

Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya, 21 Oktober 2017
Surabaya, Universitas Airlangga

ANALISIS STABILITAS PENYEBARAN VIRUS EBOLA PADA MANUSIA

Mutholafatul Alim¹⁾, Ari Kusumastuti²⁾

¹⁾Mahasiswa Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
¹⁾mutholafatul@rocketmail.com

²⁾Dosen Jurusan Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
²⁾arikusumastuti@gmail.com

Abstrak— Ebola merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh virus. Penularan virus ebola menyebar dengan cepat pada populasi manusia yang saling berinteraksi dalam satu lingkungan terinfeksi. Populasi manusia dalam penelitian ini diasumsikan atas 5 level, yaitu *susceptible* (*S*), *exposed* (*E*), *infected* (*I*), *recovered* (*R*), dan *death* (*D*). Level-level populasi tersebut membentuk model matematika yang digunakan untuk mendeskripsikan dinamika penyebaran virus ebola dalam lingkungan *SEIRD*. Model matematika tersebut selanjutnya dianalisis titik-titik tetapnya untuk mengetahui model penyebaran virus ebola, menganalisis nilai *basic reproduction number* (R_0) untuk mengetahui pola penyebaran virus ebola pada suatu lingkungan, dan menganalisis kestabilan titik tetap untuk mengetahui keadaan setimbang dari lingkungan terinfeksi virus ebola. Analisis terhadap model ini menghasilkan titik tetap bebas penyakit (E_0) di sekitar sistem bersifat stabil asimtotik pada saat $R_0 < 1$ dan titik tetap endemik penyakit (E_1) di sekitar sistem bersifat stabil asimtotik pada saat $R_0 > 1$. Melalui kondisi ini, dapat diketahui bahwa untuk menjaga kestabilan dari sistem pada penyebaran virus ebola maka harus dilakukan upaya berupa adanya vaksinasi terhadap populasi manusia *infected* dan adanya proses sterilisasi terhadap populasi manusia *death*.

Kata kunci: model ebola *SEIRD*, titik tetap, *basic reproduction number*, kestabilan

I. PENDAHULUAN

Ebola adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus yang berasal dari genus *Ebolavirus* dan familia *Filoviridae*. Penularan virus ebola ini terjadi dalam satu lingkungan terinfeksi yang terdiri dari lima level populasi yaitu level populasi *S* (*susceptible*), level populasi *E* (*exposed*), level populasi *I* (*infected/isolated*), level populasi *R* (*recovered*), dan level populasi *D* (*death*). Level populasi manusia sehat pada lingkungan tersebut akan berinteraksi dengan virus ebola sehingga mengakibatkan munculnya populasi manusia *susceptible* terhadap virus ebola. Populasi manusia *susceptible* yang belum teridentifikasi terinfeksi virus ebola akan berada dalam

populasi *exposed*. Populasi manusia *exposed* yang terbukti terinfeksi menyebabkan munculnya populasi manusia *infected* setelah mengalami masa inkubasi selama satu minggu. Populasi manusia *infected* selanjutnya akan sembuh dan masuk ke populasi *recovered* jika mendapatkan penanganan yang tepat. Namun, apabila populasi manusia *infected* tidak mendapatkan penanganan yang tepat maka akan mengalami kematian atau munculnya populasi manusia *death*. Populasi manusia *death* ini akan mendapat penanganan berupa proses sterilisasi. Proses sterilisasi ini bertujuan untuk mencegah penyebaran virus ebola dari jenazah terinfeksi terhadap populasi manusia *susceptible* (Arfani dkk, 2015).

Untuk mengetahui dinamika dari penyebaran virus ebola tersebut maka diperlukan model matematika yang dipengaruhi oleh perubahan waktu dan beberapa parameter. Parameter-parameter tersebut selanjutnya diaproksimasi untuk menganalisis model matematika. Hasil analisis model ini selanjutnya digunakan untuk menganalisis kestabilan model penyebaran virus ebola. Kestabilan model tersebut selanjutnya dapat diketahui dengan menentukan nilai *basic reproduction number* (R_0). Setelah mengetahui sifat kestabilan model, maka dilakukan simulasi untuk mengetahui pola penyebaran virus ebola tersebut dalam suatu lingkungan pada setiap perubahan waktunya. Berdasarkan uraian di atas, penelitian ini fokus pada analisis model matematika Sug Do & S. Lee dengan modifikasi pada level populasi *S*, *E*, *R*, dan *D*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Analisis Kestabilan Titik Tetap

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial biasa autonomous nonlinear di sekitar titik tetap x^* dapat menggunakan matriks jacobian $J(f(x^*))$, dengan syarat bahwa titik tetap tersebut adalah titik tetap hiperbolik. Berikut ini disajikan tabel tentang sifat kestabilan sistem persamaan diferensial biasa autonomous nonlinear berdasarkan nilai Eigen dari matriks Jacobian $J(f(x^*))$.

TABEL 1. KESTABILAN TITIK TETAP SISTEM
DINAMIK LINEAR

No	Nilai Eigen	Kestabilan	Jenis
1.	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	-	-
2.	$\lambda_1, \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node (Simpul)
3.	$\lambda_1, \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node (Simpul)
4.	$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Tidak Stabil	Saddle (Pelana)
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Tidak Stabil	Node (Simpul)
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Stabil Asimtotik	Node (Simpul)
7.	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C}$	-	-
8.	$a > 0$	Tidak Stabil	Spiral
9.	$a < 0$	Stabil Asimtotik	Spiral
10.	$a = 0$	Stabil	Center (Terpusat)

Sumber: (Boyce & DiPrima, 2001)

B. Basic Reproduction Number (R_0)

Tingkat penyebaran penyakit dapat diketahui melalui suatu parameter tertentu yang digunakan untuk melihat potensi penyebaran penyakit dalam populasi manusia. Parameter tersebut yaitu *basic reproduction number* (R_0). Apabila nilai dari R_0 ini meningkat maka penyebaran penyakit akan meningkat, yang berarti bahwa penyebaran penyakit semakin berbahaya dan epidemik semakin meningkat (Campbell & Haberman, 2008). Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $R_0 > 1$. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka diperoleh teorema-teorema berikut ini (Driessche & Watmough, 2001):

Teorema 2.1

Diasumsikan bahwa \bar{x} adalah titik tetap bebas penyakit dari sistem persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ maka titik tetap bebas penyakit \bar{x} stabil asimtotik jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) > 1$.

Teorema 2.2

Diasumsikan bahwa \bar{x} adalah titik tetap endemik penyakit dari sistem persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ maka titik tetap endemik penyakit \bar{x} stabil asimtotik jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) > 1$ dan tidak stabil jika $R_0 = \rho(FV^{-1}) < 1$.

C. Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria *Routh-Hurwitz* merupakan kriteria untuk menentukan nilai Eigen pada persamaan yang memiliki orde tinggi. Berikut ini diberikan persamaan karakteristik berderajat n :

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0 \quad (1)$$

dengan p_n adalah koefisien yang merupakan bilangan real dan $n = 1, 2, \dots$

Berdasarkan persamaan pada Eq.1 tersebut, dapat diperoleh n matriks *Hurwitz* (H_k) yang didefinisikan sebagai berikut ini:

$$H_k = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \dots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{2n-3} & p_{2n-4} & p_{2n-5} & p_{2n-6} & \dots & p_{n-2} \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & p_{2n-4} & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

dengan syarat setiap unsur (l, m) pada matriks H_k adalah:

$$H_{l,m} = \begin{cases} p_{2l-m}, & \text{untuk } 0 < 2l - m \leq k \\ 1, & \text{untuk } 2l = m \\ 0, & \text{untuk } 2l < m \text{ atau } 2l > k + m \end{cases}$$

Teorema 2.3

Akar-akar dari persamaan pada Eq.1 bernilai negatif atau mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika (Merkin, 1997):

$$\det(H_k) > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

III. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan penulis adalah studi literatur yang menggunakan referensi utama pada penelitian Salem dan Smith (2016) dengan referensi pendukung yaitu penelitian Do dan Lee (2015) serta Purwati (2015).

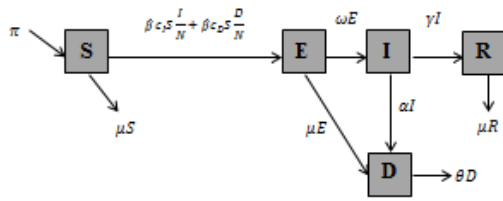
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Analisis Model Virus Ebola SEIRD

Penyebaran virus ebola pada penelitian ini diawali dengan interaksi antara populasi manusia sehat yang masuk ke level populasi S sebesar π dengan virus ebola. Hal ini menyebabkan manusia sehat berada pada level populasi S (*susceptible*) dengan ekspektasi kejadian sebesar β_{C_I} . Populasi manusia *susceptible* tersebut selanjutnya akan mengalami kematian alami sebesar μ yang kemudian akan mendapat perawatan sehingga menimbulkan adanya interaksi antara populasi manusia *susceptible* dengan populasi manusia *death* dengan ekspektasi kejadian sebesar β_{C_D} . Populasi manusia *susceptible* yang baru terinfeksi virus ebola akan berada pada level populasi E (*exposed*). Populasi manusia *exposed* ini akan berada pada level populasi I (*infected*) setelah mengalami masa inkubasi dengan laju sebesar ω . Populasi manusia *infected* ini kemudian akan mendapatkan proses pengobatan dengan laju γ . Namun, apabila proses

pengobatan tersebut tidak berhasil maka akan mengalami kematian dengan laju sebesar α . Populasi manusia *death* tersebut akan berada pada level populasi D . Untuk mengurangi meningkatnya laju level populasi D , maka akan dilaksanakan proses perawatan dan penanganan berupa sterilisasi jenazah dengan laju sebesar θ . Hal tersebut bertujuan agar virus yang menyebabkan populasi manusia *death* tidak menyebar dan menginfeksi kembali populasi manusia *susceptible* pada lingkungan *infected*.

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut dapat diperoleh model penyebaran virus ebola adalah model matematika *SEIRD* yang digambarkan pada diagram kompartmen berikut ini:



Gambar 1 Diagram Kompartmen Penyebaran Virus Ebola di Lingkungan *SEIRD*

Sehingga dapat diperoleh model matematika penyebaran virus ebola *SEIRD* yang digunakan di dalam penelitian ini yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \pi - \frac{\beta c_1 S I}{N} - \frac{\beta c_2 S D}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta c_1 S I}{N} + \frac{\beta c_2 S D}{N} - (\mu + \omega) E \\ \frac{dI}{dt} &= \omega E - (\gamma + \alpha) I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu R \\ \frac{dD}{dt} &= \alpha I + \mu E - \theta D \end{aligned} \quad (2)$$

dengan $N = S + E + I + R + D$.

B. Analisis Titik-titik Tetap

Titik tetap bebas penyakit pada model penyebaran virus ebola *SEIRD* dapat diperoleh dengan mendefinisikan $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0$ serta banyaknya populasi manusia *exposed* dan populasi manusia *infected* adalah nol. Sehingga dapat diperoleh titik tetap bebas penyakit pada penyebaran virus ebola ini sebagai berikut:

$$E_0 = (S, E, I, R, D) = \left(\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right).$$

Selanjutnya diasumsikan $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0, \frac{dD}{dt} = 0$ dengan syarat $E \neq 0$ dan $I \neq 0$, maka dapat diperoleh titik tetap endemik penyakit sebagai berikut:

$$E_1 = (S, E, I, R, D) = \left(\begin{aligned} &\frac{\pi}{\mu} \left(\frac{\alpha \mu^2 + \alpha \mu \omega + \alpha \mu \theta + \gamma \mu^2 + \gamma \omega \theta + \mu \omega \theta}{c_D \alpha \beta \mu + c_D \alpha \beta \omega + c_D \beta \gamma \mu + c_1 \beta \omega \theta + \alpha \mu^2 + \alpha \mu \omega - \alpha \omega \theta + \gamma \mu^2 + \mu \omega \theta} \right), \\ &\frac{\pi}{\mu} \left(\frac{c_D \alpha \beta \mu + c_D \alpha \beta \omega + c_D \beta \gamma \mu + c_1 \beta \omega \theta - \alpha \mu \theta - \alpha \omega \theta - \gamma \mu \theta - \gamma \omega \theta}{\psi} \right), \\ &\frac{(\pi \omega)}{(\mu(\alpha + \gamma))} \left(\frac{c_D \alpha \beta \mu + c_D \alpha \beta \omega + c_D \beta \gamma \mu + c_1 \beta \omega \theta - \alpha \mu \theta - \alpha \omega \theta - \gamma \mu \theta - \gamma \omega \theta}{\psi} \right), \\ &\frac{(\pi \gamma \omega)}{(\mu(\alpha + \gamma))} \left(\frac{c_D \alpha \beta \mu + c_D \alpha \beta \omega + c_D \beta \gamma \mu + c_1 \beta \omega \theta - \alpha \mu \theta - \alpha \omega \theta - \gamma \mu \theta - \gamma \omega \theta}{\psi} \right), \\ &\left(\frac{\mu \pi}{\theta} + \frac{\alpha \omega \pi}{\theta(\alpha + \gamma)} \right) \left(\frac{c_D \alpha \beta \mu + c_D \alpha \beta \omega + c_D \beta \gamma \mu + c_1 \beta \omega \theta - \alpha \mu \theta - \alpha \omega \theta - \gamma \mu \theta - \gamma \omega \theta}{\psi} \right) \end{aligned} \right),$$

dengan

$$\begin{aligned} \psi &= c_D \alpha \beta \mu^2 + 2c_D \alpha \beta \mu \omega + c_D \alpha \beta \omega^2 \\ &+ c_D \beta \gamma \mu^2 + c_D \beta \gamma \mu \omega + c_1 \beta \mu \omega \theta \\ &+ c_1 \beta \omega^2 \theta + \alpha \mu^3 + 2\alpha \mu^2 \omega + \alpha \mu \omega^2 - \\ &\alpha \mu \omega \theta - \alpha \omega^2 \theta + \gamma \mu^3 + \gamma \mu^2 \omega + \\ &\mu^2 \omega \theta + \mu \omega^2 \theta. \end{aligned}$$

C. Analisis Nilai Basic Reproduction Number (R_0)

Basic reproduction number (R_0) merupakan bilangan yang menyatakan banyaknya populasi manusia *susceptible* yang terinfeksi virus ebola yang diakibatkan oleh satu manusia *infected* dalam satu lingkungan. Untuk menentukan nilai R_0 pada model penyebaran virus ebola tersebut menggunakan metode *next generation matrix*. Sehingga dapat diperoleh nilai R_0 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_0 &= \rho(K) \\ &= \frac{\beta c_1 \omega \theta + \beta c_2 (\alpha \mu + \alpha \omega + \gamma \mu)}{\theta(\omega + \mu)(\alpha + \gamma)} \end{aligned}$$

Berdasarkan nilai R_0 tersebut, maka dapat diketahui nilai parameter β yaitu:

$$\beta = R_0 \left(\frac{\theta(\omega + \mu)(\alpha + \gamma)}{(c_1 \omega \theta + c_2 (\alpha \mu + \alpha \omega + \gamma \mu))} \right).$$

D. Analisis Kestabilan Titik-titik Tetap

Diberikan matriks Jacobian J yang digunakan untuk menentukan kestabilan titik tetap pada penyebaran virus ebola yang dinyatakan sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial S} & \frac{\partial f}{\partial E} & \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial R} & \frac{\partial f}{\partial D} \\ \frac{\partial g}{\partial S} & \frac{\partial g}{\partial E} & \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial R} & \frac{\partial g}{\partial D} \\ \frac{\partial h}{\partial S} & \frac{\partial h}{\partial E} & \frac{\partial h}{\partial I} & \frac{\partial h}{\partial R} & \frac{\partial h}{\partial D} \\ \frac{\partial i}{\partial S} & \frac{\partial i}{\partial E} & \frac{\partial i}{\partial I} & \frac{\partial i}{\partial R} & \frac{\partial i}{\partial D} \\ \frac{\partial j}{\partial S} & \frac{\partial j}{\partial E} & \frac{\partial j}{\partial I} & \frac{\partial j}{\partial R} & \frac{\partial j}{\partial D} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Untuk menentukan kestabilan titik tetap bebas penyakit pada penyebaran virus ebola, maka substitusi titik tetap bebas penyakit E_0 pada matriks J di atas sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari $J(E_0)$ menurut $\det(J(E_0) - \lambda I) = 0$ yaitu:

$$(\lambda + \mu)^2(\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3) = 0 \quad (4)$$

Persamaan karakteristik pada Eq.4 menghasilkan dua kondisi. Kondisi pertama yaitu diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu < 0$ yang menunjukkan bahwa λ_1 dan λ_2 adalah stabil asimtotik. Sedangkan, kondisi kedua diperoleh $(\lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3)$. Sehingga, untuk menentukan kestabilan pada kondisi kedua ini digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* pada Teorema 2.3 dengan membuktikan $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$, dan $p_1 \cdot p_2 > p_3$ berikut ini:

Kasus I: Membuktikan $p_1 > 0$, yaitu

$$p_1 = \alpha + \gamma + \mu + \omega + \theta > 0$$

Kasus II: Membuktikan $p_2 > 0$, yaitu

$$p_2 = \theta(\mu + \omega + \gamma + \alpha) + (\alpha + \gamma)(\omega + \mu)(1 - R_0) \left(\frac{\theta\pi(c_I\omega + c_D\mu)}{\mu(c_I\omega\theta + c_D(\alpha\mu + \alpha\omega + \gamma\mu))} \right) > 0$$

Kasus III: Membuktikan $p_3 > 0$, yaitu

$$p_3 = \theta(\alpha + \gamma)(\omega + \mu)(1 - R_0) \frac{\pi}{\mu} > 0$$

Kasus IV: Membuktikan $p_1 \cdot p_2 > p_3$, yaitu

$$p_1 \cdot p_2 > p_3$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \gamma + \mu + \theta)(\theta(\mu + \omega + \gamma + \alpha) + (\alpha + \gamma)(\omega + \mu) - \frac{\beta\pi}{\mu}(c_I\omega + c_D\mu)) > \theta(\alpha + \gamma)(\omega + \mu) - \frac{\beta\pi}{\mu}(c_D(\alpha\mu + \alpha\omega + \gamma\mu) + c_I\omega\theta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \gamma + \mu + \theta)(\theta(\mu + \omega + \gamma + \alpha) + (\alpha + \gamma)(\omega + \mu) - \frac{\beta\pi}{\mu}(c_I\omega + c_D\mu)) > \theta(\alpha + \gamma)(\omega + \mu) - \frac{\beta\pi}{\mu}(c_D(\alpha\mu + \alpha\omega + \gamma\mu) + c_I\omega\theta)$$

Berdasarkan pembuktian pada kasus I sampai dengan kasus IV terbukti bahwa jika $0 < R_0 < 1$ maka $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$, dan $p_1 \cdot p_2 > p_3$. Sehingga menurut Teorema 2.1, kondisi ini menunjukkan semua nilai Eigen dari persamaan pada Eq.4 bernilai negatif yang berarti bahwa titik tetap bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik.

Selanjutnya, untuk menentukan kestabilan titik tetap endemik penyakit pada penyebaran virus ebola maka substitusi titik endemik penyakit E_1 matriks J dengan $R_0 = \frac{\beta c_I \omega \theta + \beta c_D (\alpha \mu + \alpha \omega + \gamma \mu)}{\theta(\omega + \mu)(\alpha + \gamma)}$ sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari $\det(J(E_1) - \lambda I) = 0$ yaitu:

$$(\lambda + \mu)(\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4) = 0 \quad (5)$$

Persamaan karakteristik pada Eq.5 tersebut menghasilkan dua kondisi. Kondisi pertama (3.3) yaitu diperoleh $\lambda_1 = -\mu < 0$ yang menunjukkan bahwa λ_1 adalah stabil asimtotik. Sedangkan, kondisi kedua diperoleh $(\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4)$. Untuk menentukan kestabilan pada kondisi kedua ini digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dengan membuktikan bahwa $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, p_1 \cdot p_2 - p_3 > 0$, dan $p_3(p_1 \cdot p_2 - p_3) - p_1^2 \cdot p_4 > 0$ yaitu:

Kasus I: Membuktikan $p_1 > 0$, yaitu

$$p_1 = 2\mu + \theta + \alpha + \omega + \gamma + (R_0 - 1) \left(c_D\beta\zeta + \frac{c_I\beta\epsilon}{\zeta} \right) > 0$$

Kasus II: Membuktikan $p_2 > 0$, yaitu

$$p_2 = 2\alpha\mu + 2\gamma\mu + \mu\omega + 2\mu\theta + \mu^2 + \gamma\omega + \alpha\omega + \alpha\theta + \gamma\theta + \omega\theta - c_D\beta\eta\pi - \frac{c_I\beta\eta\omega\pi}{\mu} + (R_0 - 1) \left(\left[\frac{c_I\alpha\beta\epsilon}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\omega}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\theta}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\mu}{\zeta} + c_D\alpha\beta\zeta + c_D\beta\gamma\zeta + c_D\beta\omega\zeta + c_D\beta\theta\zeta + c_D\beta\mu\zeta \right] \right) > 0$$

Kasus III: Membuktikan $p_3 > 0$, yaitu

$$p_3 = \alpha\mu^2 + \gamma\mu^2 + \mu^2\theta + \gamma\omega\theta + \alpha\mu\omega + 2\alpha\mu\theta + \gamma\mu\omega + 2\gamma\mu\theta + \mu\omega\theta + \alpha\omega\theta + (R_0 - 1) \left(\frac{c_I\alpha\beta\epsilon\theta}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma\omega}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma\theta}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\omega\theta}{\zeta} + \frac{c_I\alpha\beta\epsilon\omega}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma\mu}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\mu\theta}{\zeta} + c_D\alpha\beta\omega\zeta + c_D\alpha\beta\mu\zeta + c_D\beta\gamma\mu\zeta + c_D\alpha\beta\theta\zeta + c_D\beta\gamma\omega\zeta - c_D\beta\gamma\theta\zeta \right) + c_I\beta \left(\frac{\alpha\epsilon\mu R_0}{\zeta} - \eta\omega\pi - \frac{\eta\omega\pi\theta}{\mu} \right) + c_D\beta (\omega R_0\theta\zeta - \gamma\mu\zeta\theta + \mu\zeta R_0\theta - \omega\theta - \frac{\alpha\eta\omega\pi}{\mu} - \alpha\eta\pi - \eta\gamma\pi - \eta\mu\pi) > 0$$

Kasus IV: Membuktikan $p_4 > 0$, yaitu

$$p_4 = \alpha\mu^2\theta + \gamma\mu^2\theta + \alpha\mu\omega\theta + \gamma\mu\omega\theta + (R_0 - 1) \left(\frac{c_I\alpha\beta\epsilon\omega\theta}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma\omega\theta}{\zeta} + \frac{c_I\alpha\beta\epsilon\mu\theta}{\zeta} + \frac{c_I\beta\epsilon\gamma\mu\theta}{\zeta} \right) + c_D\alpha\beta\omega\theta\zeta + c_D\alpha\beta\mu\zeta\theta +$$

$$c_D\beta\gamma\mu\zeta\theta + c_D\beta\gamma\omega\theta\zeta) - c_D\eta\beta(\alpha\omega\pi - \gamma\mu\pi - c_D\alpha\beta\mu\pi) - c_I\beta\eta\omega\pi\theta > 0$$

Kasus V: Membuktikan $p_1 \cdot p_2 - p_3 > 0$, yaitu

Berdasarkan kasus 1 sampai dengan kasus 4, terbukti bahwa $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$, dan $p_4 > 0$. Sehingga jelas bahwa $p_1 \cdot p_2 - p_3 > 0$.

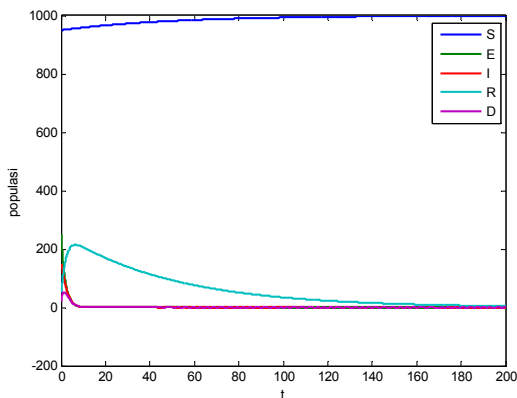
Kasus VI: Membuktikan $p_3(p_1 \cdot p_2 - p_3) - p_1^2 \cdot p_4 > 0$, yaitu

Berdasarkan kasus 1 sampai dengan kasus 4, terbukti bahwa $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$, dan $p_4 > 0$. Sehingga jelas bahwa $p_3(p_1 \cdot p_2 - p_3) - p_1^2 \cdot p_4 > 0$.

Berdasarkan pembuktian di atas terbukti bahwa jika $R_0 > 1$ maka $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, p_1 \cdot p_2 - p_3 > 0$, dan $p_3(p_1 \cdot p_2 - p_3) - p_1^2 \cdot p_4 > 0$. Sehingga, menurut Teorema 2.2 kondisi ini menunjukkan bahwa semua nilai Eigen dari persamaan (3.4) bernilai negatif, sehingga titik tetap bebas penyakit E_1 adalah stabil asimtotik.

V. SIMULASI MODEL

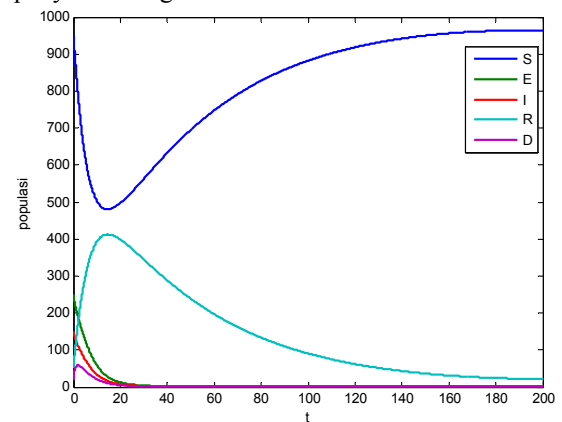
Simulasi model untuk titik tetap bebas penyakit diasumsikan bahwa $\pi = 20; c_I = 0,0005; \omega = 0,5; \gamma = 0,5; \alpha = 0,5; c_D = 0,0005; \theta = 1$; and $\mu = 0,02$ dengan syarat awal pada populasi manusia *susceptible* $S(0) = 950$, populasi manusia *exposed* $E(0) = 250$, populasi manusia *infected* $I(0) = 150$, populasi manusia *recovered* $R(0) = 50$, dan populasi manusia *death* $D(0) = 20$ (Salem & Smith, 2016). Sehingga, diperoleh simulasi untuk titik tetap bebas penyakit sebagai berikut:



Gambar 2 Dinamika Penyebaran Virus Ebola SEIRD pada Populasi Manusia untuk $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 2, dapat diketahui bahwa titik tetap bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik ketika $R_0 < 1$ pada saat $t \in [120, 200]$. Hal tersebut menunjukkan virus ebola mempunyai kemungkinan untuk hilang dari lingkungan terinfeksi.

Selanjutnya, simulasi model untuk titik tetap endemik penyakit diasumsikan bahwa $\pi = 20; c_I = 1; \omega = 0,5; \gamma = 0,5; \alpha = 0,5; c_D = 1; \theta = 1$; and $\mu = 0,02$ dengan syarat awal pada populasi manusia *susceptible* $S(0) = 950$, populasi manusia *exposed* $E(0) = 250$, populasi manusia *infected* $I(0) = 150$, populasi manusia *recovered* $R(0) = 50$, dan populasi manusia *death* $D(0) = 20$ (Salem & Smith, 2016). Sehingga, diperoleh simulasi untuk titik tetap endemik penyakit sebagai berikut:



Gambar 3 Dinamika Penyebaran Virus Ebola SEIRD pada Populasi Manusia untuk $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3, dapat diketahui bahwa titik tetap endemik penyakit E_1 bersifat stabil asimtotik ketika $R_0 > 1$ pada saat $t \in [160, 200]$. Hal tersebut menunjukkan virus ebola mempunyai kemungkinan untuk berada dalam lingkungan terinfeksi sehingga menjadi endemik.

VI. KESIMPULAN

Untuk kondisi $R_0 < 1$ titik tetap bebas penyakit bersifat stabil asimtotik. Hal ini berarti bahwa untuk jangka waktu yang lama, populasi manusia yang terinfeksi virus ebola akan berkurang atau bahkan menghilang sehingga virus ebola tersebut tidak ada lagi dalam populasi. Selanjutnya, untuk kondisi $R_0 > 1$ titik tetap endemik penyakit bersifat stabil asimtotik. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jangka waktu tertentu virus ebola akan tetap ada dan menyebar dalam populasi.

DAFTAR RUJUKAN

- Arfani, Kusumastuti, N., dan Martha, S. 2015. Analisis Kestabilan dan Proses Markov Model Penyebaran Penyakit Ebola. *Bimaster*, 3(4): 163-172.
- Boyce, W.E dan DiPrima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York: Von Hoffmann Press
- Campbell, S. dan Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press.
- Clark, R. 1999. *Dynamical System*. New York: CRC Press.
- Driessche, P.V dan Watmough, J. 2002. Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Bioscience*, 180(1): 29-48.
- Merkin, D.R 1997. *Introduction to the Theory of Stability*. New York: Springer.
- Purwati, E. 2015. *Model Matematika SIRD (Susceptibles-Infected-Recovered-Deaths) pada Penyebaran Virus Ebola*. Skripsi tidak dipublikasikan. Yogyakarta: Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Robinson, R.C 2004. *An Introduction to Dynamical Systems Continuous and Discrete*. New Jersey: Pearson Education, In.
- Salem, D. dan Smith, R. 2016. A Mathematical Model of Ebola Virus Disease: Using Sensitivity Analysis to Determine Effective Intervention Targets. *Proceedings of the Summer Computer Simulation Conference*. Montreal, Quebec, Canada, 24-27 Juli 2016.
- Sug Do, T. & S. Lee, Y. 2015. Modeling the Spread of Ebola. *Mathematical Biosciences*, 7(1): 43-48.