Seminar Nasional Matematika dan Aplikasinya, 21 Oktober 2017
Surabaya, Universitas Airlangga

KETERBATASAN OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL PADA RUANG KUASI METRIK TAK HOMOGEN TERBOBOTI

Mohammad Imam Utoyo

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi,Universitas Airlangga
Kampus C Universitas Airlangga ,Surabaya
m.i.utoyo@fst.unair.ac.id

Abstract— **Pada penelitian ini ditemukan syarat cukup keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey terboboti dan ruang Morrey diperumum terboboti pada ruang Kuasi Metrik yang berbeda dengan hasil penelitian sebelumnya. Pembuktian dilakukan dengan menggunakan ketaksamaan Holder.**

Keywords— **Operator integral fraksional, ruang Morrey terboboti, ruang Morrey diperumum terboboti, ruang kuasi metrik Tak homogen.**

I. PENDAHULUAN

Penelitian keterbatasan operator integral telah dikembangkan pada ruang Eclid, ruang Metrik, dan ruang kuasi metrik di ruang Lebesgue, ruang Morrey, dan ruang Morrey diperumum baik tanpa bobot maupun yang terboboti. Penelitian tentang keterbatasan operator integral fraksional pada ruang kuasi metrik terboboti dapat dilihat pada [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Pada penelitian sebelumnya telah ditemukan syarat perlu dan cukup untuk keterbatasan operator integral fraksional pada ruang kuasi metrik tak homogen terboboti. Pada penelitian ini akan ditentukan syarat cukup lainnya untuk keterbatasan operator integral fraksional $I_\alpha f(x) := \int_X f(y)\rho(x,y)^{\alpha-1} d\mu(y)$, $0 < \alpha < 1$ di ruang Lebesgue terboboti M_β^p, yaitu ruang kelas ekivalen fungsi terukur μ sehingga

$$\|f\|_{M_\beta^p} = \left(\int_X |f(y)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \beta \in R,$$

di ruang Morrey terboboti $M_\beta^{p,\lambda}$; yaitu ruang kelas ekivalen fungsi terukur μ sehingga

$$\|f\|_{M_\beta^{p,\lambda}} = \sup_{B:=B(a,r)} \left(\frac{1}{r^\lambda}\int_B |f(y)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 0 \le \lambda < 1, \beta \in R,$$

dan di Ruang Morrey diperumum $M_\phi^{p,\beta}$; yaitu ruang kelas ekivalen fungsi terukur μ sehingga

$$\|f\|_{M_\phi^{p,\beta}} = \sup_{B:=B(a,r)} \frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{r}\int_B |f(y)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \beta \in R,$$

dengan ϕ merupakan fungsi dari $(0,\infty)$ ke $(0,\infty)$. Jika $\phi(r) := r^{\frac{\lambda-1}{p}}$, maka $M_\phi^{p,\beta} = M_\beta^{p,\lambda}$, jika $\phi(r) = r^{-\frac{1}{p}}$, maka $M_\phi^{p,\beta} = M_\beta^p$, sedangkan jika $\lambda = 0$, maka $M_\beta^{p,\lambda} = M_\beta^p$. Jika $\beta = 0$, maka semua ruang akan menjadi ruang tanpa bobot. Berbeda dengan pembuktian syarat cukup untuk keterbatasan operator integral pada penelitian sebelumnya yang membagi operator integral fraksional menjadi tiga bagian, pembuktian pada penelitian menggunakan pembuktian yang lebih sederhana, yaitu hanya dengan menggunakan ketaksamaan Holder.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Berikut ini diberikan definisi ruang kuasi metrik (lihat [1]).

Definisi 2.1. (Ruang kuasi metrik). Misalkan $X := (X, d, \mu)$ merupakan ruang topologi dengan μ merupakan ukuran lengkap sehingga ruang fungsi kontinu dengan *support* lokal adalah rapat dalam $M^1(X,\mu)$ dan $\rho: X \times X \to [0,\infty)$ merupakan fungsi kuasi metrik, yaitu fungsi yang memenuhi kondisi:

(i) untuk semua $x \in X$, $\rho(x,x) = 0$

(ii) untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, $\rho(x,y) > 0$

(iii) Terdapat konstanta $K_1 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$, $\rho(x,y) \le K_1 \rho(y,x)$.

(iv) Terdapat konstanta $K_2 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$, $\rho(x,z) \le K_2(\rho(x,y) + \rho(y,z))$.

Diasumsikan bahwa untuk semua $x \in X$ dan setiap konstanta $r > 0$ bola terbuka

$B(x,r) := \{y \in X: \rho(x,y) < r\}$ merupakan himpunan terukur. Untuk setiap persekitaran V dari $x \in X$ terdapat konstanta $r > 0$ sehingga $B(x,r) \subseteq V$. Diasumsikan pula bahwa $\mu(X) = \infty$, untuk semua $x \in X$ dan untuk semua konstanta r_1 dan r_2 dengan $0 < r_1 < r_2 < \infty$ berlaku $\mu(\{x\}) = 0$ dan $B(x,r_2)\setminus B(x,r_1) \neq \emptyset$.

Tripel (X,d,μ) disebut ruang kuasi metrik. Jika μ pada ruang kuasi metrik memenuhi kondisi penggandaan, dinotasikan dengan $\mu \in (DC)$, (yaitu: $\mu \in (DC)$ jika untuk semua $x \in X$ dan semua konstanta $r > 0$ terdapat konstanta $C_1 > 1$ sehingga $\mu(B(x,2r)) \leq C_1\mu(B(x,r))$), maka (X,ρ,μ) disebut ruang tipe homogen. Jika kondisi penggandaan tidak terpenuhi, maka X disebut ruang tipe tak homogen. Ukuran μ dikatakan memenuhi kondisi pertumbuhan tingkat s, dinotasikan dengan $\mu \in GC(s)$, $s > 0$, jika untuk semua $x \in X$ dan semua konstanta $r > 0$ terdapat konstanta $C_0 > 0$ sehingga $\mu(B(x,r)) \leq C_0 r^s$.

Keterbatasan I_α di ruang Lebesgue ([2]) diberikan dalam teorema dan akibat berikut ini.

Teorema 2.1. Misalkan X merupakan ruang tak homogen. Misalkan $1 < p < q < \infty$. Operator I_α terbatas dari M^p ke M^q jika dan hanya jika terdapat konstanta $C > 0$ sehingga untuk semua bola $B(a,r)$ dalam X, $\mu(B) \leq Cr^s$, $s = \frac{pq(1-\alpha)}{pq+p-q}$.

Akibat 2.1. Misalkan X merupakan ruang tak homogen. Misalkan $1 < p < \frac{1}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \alpha$. Operator I_α terbatas dari M^p ke M^q jika dan hanya jika $\mu \in GC(1)$.

Eridani dkk. [1] memperluas keterbatasan I_α dari Lebesgue M^p ke ruang Morrey klasik, $M^{p,\lambda}$ dan ke ruang Morrey terboboti, $M^{p,\lambda}_\beta$, yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2. Misalkan X merupakan ruang tak homogen. Jika $\mu \in GC(1)$, $1 < p \leq q < \infty$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \alpha < 1$, $\alpha \neq \frac{1}{p}$, $p\alpha - 1 < \beta < p - 1$, $0 < \lambda_1 < \beta - \alpha p + 1$ dan $\frac{\lambda_1}{p} = \frac{\lambda_2}{q}$, maka I_α terbatas dari M^{p,λ_1}_β ke M^{q,λ_2}_γ dengan $\gamma = q\left(\frac{1}{p} + \frac{\beta}{p} - \alpha\right) - 1$.

Utoyo [4] melengkapi melengkapi Teorema 2.2. dengan syarat perlu untuk keterbatasan I_α dan selanjutnya Utoyo dkk. [5] menentukan syarat perlu dan cukup keterbatasan I_α untuk $\mu \in GC(s)$.

III. METODE PENELITIAN

Berikut adalah langkah-langkah yang digunakan untuk menyelesaikan penelitian ini.

(1) Mengkaji definisi, teorema, dan pembuktian teorema keterbatasan operator integral fraksional pada ruang kuasi metrik tak homogen terboboti
(2) Mencari syarat cukup keterbatasan operator integral fraksional pada ruang kuasi metrik tak homogen terboboti selain yang telah ditemukan dan yang memungkinkan menggunakan pembuktian yang lebih sederhana
(3) Membutikan kebenaran hasil yang diperoleh dari langkah (2)

(4)

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini diberikan teorema tentang keterbatasan operator integral fraksional di ruang Morrey Terboboti dan di ruang Morrey diperumum terboboti pada ruang kuasi metrik

Lemma 4.1. Misalkan (X,ρ,μ) merupakan ruang kuasi metrik tak homogeny. Untuk setiap $a \in R$ dan $r > 0$ berlaku:

(1) Jika $f \in M^p_\beta$, maka $f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)} \in M^p$
(2) Jika $f \in M^{p,\lambda}_\beta$, maka $f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)} \in M^p$
(3) Jika $f \in M^{p,\beta}_\phi$, maka $f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)} \in M^p$

Bukti: Diambil sebarang $a \in R$ dan $r > 0$.

(1) $\left[\int_X \left|f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)}(x)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq r^{-\frac{\beta}{p}}\left[\int_{B(a,2r)}|f(x)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq r^{-\frac{\beta}{p}}\|f\|_{M^p_\beta}$

(2) $\left[\int_X \left|f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)}(x)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq r^{\frac{\lambda-\beta}{p}}\left[\frac{1}{r^\lambda}\int_{B(a,2r)}|f(x)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq r^{\frac{\lambda-\beta}{p}}\|f\|_{M^{p,\lambda}_\beta}$

(3) $\left[\int_X \left|f\chi_{B(a,2r)\setminus B(a,r)}(x)\right|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq r^{\frac{1-\beta}{p}}\phi(r)\frac{1}{\phi(r)}\left[\frac{1}{r}\int_{B(a,2r)}|f(x)|^p \rho(a,y)^\beta d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}$

$$\leq r^{\frac{1-\beta}{p}}\phi(r)\|f\|_{M_\phi^{p,\beta}} \blacksquare$$

Teorema 4.1. Misalkan (X,ρ,μ) merupakan ruang kuasi metrik tak homogen, $\mu \in GC$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, dan $1 < q < \frac{p}{1-\alpha p}$. Jika $\frac{\beta+1}{p} - \frac{\gamma+1}{q} - \alpha < 0$, maka I_α terbatas dari M_β^p ke M_γ^q.

Bukti: Misalkan $s = \frac{p}{1-\alpha p}$, maka $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$, $\frac{s}{q} > 1$, dan $-\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} + \frac{s-q}{qs} = -\frac{\beta+1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} + \alpha > 0$ Berdasarkan Akibat 2.1. diperoleh bahwa I_α terbatas dari M^p ke M^s. Berdasarkan Ketaksamaan Holder pangkat $\frac{s}{q}$ dan Lemma 4.1. (1) diperoleh

$$\left(\int_{B(a,r)}|I_\alpha f(y)|^q\rho(a,y)^\gamma d\mu(y)\right)^{1/q} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|I_\alpha f(y)|^q\rho(a,y)^\gamma d\mu(y)\right)^{1/q}$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\left[\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|I_\alpha f(y)|^s d\mu(y)\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq$$

$$C\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\times\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|f(y)|^p(2^k r)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq$$

$$C\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\times$$

$$\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\times\left(\int_{B(a,r)}|f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}}\left(\int_{B(a,r)}|f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq C\|f\|_{M_\beta^p}\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}} \leq C\|f\|_{M_\beta^p} \blacksquare$$

Teorema 4.2. Misalkan (X,ρ,μ) merupakan ruang kuasi metrik tak homogen, $\mu \in GC$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, dan $1 < q < \frac{p}{1-\alpha p}$. Jika $\frac{\lambda_1}{p} - \frac{\lambda_2}{q} = \frac{\beta+1}{p} - \frac{\gamma+1}{q} - \alpha < 0$, maka I_α terbatas dari M_β^{p,λ_1} ke M_γ^{q,λ_2}.

Bukti: Misalkan $s = \frac{p}{1-\alpha p}$, maka $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$, $\frac{s}{q} > 1$, $-\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} + \frac{s-q}{qs} = -\frac{\beta+1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} + \alpha > 0$, dan $\frac{\lambda_1}{p} - \frac{\lambda_2}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} + \frac{s-q}{qs} = 0$. Berdasarkan Akibat 2.1. diperoleh bahwa I_α terbatas dari M^p ke M^s. Berdasarkan Ketaksamaan Holder pangkat $\frac{s}{q}$ dan Lemma 4.1. (2) diperoleh

$$\left(\frac{1}{r^{\lambda_2}}\int_{B(a,r)}|I_\alpha f(y)|^q\rho(a,y)^\gamma d\mu(y)\right)^{1/q} = r^{\frac{-\lambda_2}{q}}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|I_\alpha f(y)|^q\rho(a,y)^\gamma d\mu(y)\right)^{1/q}$$

$$\leq Cr^{-\frac{\lambda_2}{q}}\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\left[\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|I_\alpha f(y)|^s d\mu(y)\right)^{\frac{q}{s}}\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq$$

$$Cr^{-\frac{\lambda_2}{q}}\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}\times$$

$$\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|f(y)|^p(2^k r)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{-\frac{\lambda_2}{q}}\sum_{k=-\infty}^{-1}(2^k r)^{-\frac{\beta}{p}}\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}\rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}}d\mu(y)\right)^{\frac{s-q}{qs}}$$

$$\times\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\backslash B(a,2^k r)}|f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\frac{\lambda_1}{p}-\frac{\lambda_2}{q}} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} \rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}} d\mu(y) \right)^{\frac{s-q}{qs}}$$

$$\times \left(\frac{1}{r^{\lambda_1}} \int_{B(a,r)} |f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\frac{\lambda_1}{p}-\frac{\lambda_2}{q}} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}} \left(\frac{1}{r^{\lambda_1}} \int_{B(a,r)} |f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq Cr^{\frac{\lambda_1}{p}-\frac{\lambda_2}{q}} \|f\|_{M_\beta^{p,\lambda_1}} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}} \leq C\, \|f\|_{M_\beta^{p,\lambda_1}} \blacksquare$$

Teorema 4.3. Misalkan (X,ρ,μ) merupakan ruang kuasi metrik tak homogen, $\mu \in GC$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, dan $1 < q < \frac{p}{1-\alpha p}$. Jika $\frac{1}{p} - \frac{q}{q} = \frac{\beta+1}{p} - \frac{\gamma+1}{q} - \alpha < 0$ dan $\phi(r) \leq C\psi(r)$, maka I_α terbatas dari $M_\phi^{p,\beta}$ ke $M_\psi^{q,\gamma}$.

Bukti: Misalkan $s = \frac{p}{1-\alpha p}$, maka $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} - \alpha$, $\frac{s}{q} > 1$, $-\frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} + \frac{s-q}{qs} = -\frac{\beta+1}{p} + \frac{\gamma+1}{q} + \alpha > 0$, dan $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{\gamma}{q} + \frac{s-q}{qs} = 0$. Berdasarkan Akibat 2.1. diperoleh bahwa I_α terbatas dari M^p ke M^s. Berdasarkan Ketaksamaan Holder pangkat $\frac{s}{q}$ dan Lemma 4.1. (3) diperoleh

$$\frac{1}{\psi(r)} \left(\frac{1}{r} \int_{B(a,r)} |I_\alpha f(y)|^q \rho(a,y)^\gamma d\mu(y) \right)^{1/q} =$$

$$\frac{r^{-\frac{1}{q}}}{\psi(r)} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |I_\alpha f(y)|^q \rho(a,y)^\gamma d\mu(y) \right)^{1/q}$$

$$\leq \frac{Cr^{-\frac{1}{q}}}{\psi(r)} \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} \rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}} d\mu(y) \right)^{\frac{s-q}{qs}} \left[\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |I_\alpha f(y)|^s d\mu(y) \right)^{\frac{q}{s}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq$$

$$\frac{Cr^{-\frac{1}{q}}}{\psi(r)} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} \rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}} d\mu(y) \right)^{\frac{s-q}{qs}} \times$$

$$\left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |f(y)|^p (2^k r)^\beta d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{Cr^{-\frac{1}{q}}}{\psi(r)} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} \rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}} d\mu(y) \right)^{\frac{s-q}{qs}}$$

$$\times \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} |f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{C\phi(r) r^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}}{\psi(r)} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}} \left(\int_{B(a,2^{k+1}r)\setminus B(a,2^k r)} \rho(a,y)^{\frac{\gamma s}{s-q}} d\mu(y) \right)^{\frac{s-q}{qs}}$$

$$\times \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{r} \int_{B(a,r)} |f(y)|^p d(a,y)^\beta d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{C\phi(r) r^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}}{\psi(r)} C\|f\|_{M_\phi^{p,\beta}} \sum_{k=-\infty}^{-1} (2^k r)^{-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}}$$

$$\leq \frac{C\phi(r) r^{-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}-\frac{\beta}{p}+\frac{\gamma}{q}+\frac{s-q}{qs}}}{\psi(r)} \|f\|_{M_\phi^{p,\beta}} \leq C\|f\|_{M_\phi^{p,\beta}} \blacksquare$$

DAFTAR PUSTAKA

[1.] Eridani, Kokilasvilli, V., dan Meskhi, A., 2009, Morrey space and fractional integral operators, Expo.Math. 27(3), 227–239.

[2.] D. Edmunds, V. Kokilashvili and A. Meskhi, 2002, Bounded and Compact Integral Operator, Mathematics and Its Applications, Vol. 543, Kluwer Academics Publisher, Dordrecht, The Netherlands

[3.] V. Kokilashvili and A. Meskhi, 2005, On some weighted inequalities for fractional integrals on nonhomogeneous spaces, Journal for Analysis and its Applications, Volume 24, No. 4, 871-885

[4.] M.I.,Utoyo, 2012, Characterization of the Boundedness of Fractional integral operator in Weighted non-homogenous Morrey spaces, FJMS, Pushpa Publishing, Volume 66(1), 45-62.

[5.] M.I. Utoyo, T. Nusanatara, dan C. Alfiniyah, 2013, Fractional Integral Operator on Weighted Non-homogeneous Morrey Spaces, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, no. 62, 3081 – 3095

[6.] M.I. Utoyo, T. Nusanatara, dan C. Alfiniyah, 2014, Adams-Type Inequality for Weighted Non-homogeneous Quasi Metric Space, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 8, no. 46, 2293 - 2301