La noción de estructura en early algebra

The notion of structure in early algebra

Marta Molina y María C. Cañadas
Universidad de Granada

Resumen

El early algebra es una propuesta curricular y línea de investigación que atiende a la integración del pensamiento algebraico en el currículo de Educación Primaria. Partimos de una visión multidimensional del álgebra escolar que incluye la aritmética generalizada, el estudio y generalización de patrones, el estudio de las funciones y la resolución de problemas. La noción de estructura está presente en todas estas dimensiones, con diferencias en su significado. En este trabajo describimos el significado asignado a esta noción en diferentes investigaciones que se enmarcan en algunas de estas dimensiones en el marco del early algebra.

Palabras clave: early algebra, educación primaria, estructura, investigación.

Abstract

The early algebra is a curricular proposal and research line that refers to the integration of algebraic thinking in the Primary Education curriculum. We adopt a multidimensional view of school algebra that encompass generalized arithmetic, the study and generalization of patterns, the study of functions and problem solving. The notion of structure is considered in all these dimensions with some differences in its meaning. In this chapter we describe the meaning given to this notion in different research studies which can belong to some of these dimensions in the context of early algebra.

Keywords: early algebra, structure, primary education, research.

Introducción

La propuesta curricular y línea de investigación denominada *early algebra* plantea la "algebrización del currículo" de Educación Primaria (Kaput, 2000), es decir, la introducción de modos de pensamiento algebraicos en la matemática escolar desde los primeros cursos (Cai y Knuth, 2011). Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, promover hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas (Blanton y Kaput, 2005). El *early algebra* va acompañado de una amplia concepción del álgebra escolar que engloba la aritmética generalizada, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, la resolución de problemas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y el desarrollo y la manipulación del simbolismo algebraico (v.g. Kaput, 2000).

El álgebra[1] se considera importante en términos de cómo representa los principios y estructuras de las matemáticas (Cooper y Warren, 2011). Las diferentes concepciones no son disjuntas y en ellas se observan nociones comunes. La generalización, los sistemas de representación, la resolución de problemas o las estructuras son algunas de ellas. En este trabajo recogemos diferentes significados con los que el término estructura se emplea en este contexto, distinguiendo la concepción del álgebra en la que se enmarca y ejemplificando algunas de las investigaciones que la consideran como objeto de estudio en el marco del *early algebra*.

El álgebra como aritmética generalizada

En general, el término estructura en matemáticas se asigna a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, una o más operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (Castro, Rico y Romero, 1997). Por ejemplo, la estructura del

[1] En este trabajo utilizaremos el término álgebra para referirnos al álgebra escolar.

conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

Este es el significado con el que se usa la noción estructura al considerar el álgebra como aritmética generalizada. Las investigaciones con alumnos de Educación Infantil y Educación Primaria que atienden a esta noción de estructura analizan la comprensión y conocimiento de propiedades y relaciones matemáticas de forma previa y paralela a la introducción del simbolismo aritmético (v.g., Irwin, 1996; Resnick, 1992). La mayoría de los estudios se centran en el contexto de la estructura aditiva en los números naturales, prestando especial atención a las cuatro propiedades —complementaria de la suma y la resta, conmutativa de la suma, asociativa de la suma, y compensación de la suma—, de forma conjunta o aislada (Molina, 2006).

En investigaciones sobre el uso de algoritmos o estrategias inventadas en la resolución de problemas, se observa que los estudiantes aprecian las propiedades conmutativa y asociativa desde muy jóvenes, utilizándolas cuando abordan cálculos de formas no estándares o cuando inventan y discuten múltiples soluciones de un problema verbal (Resnick, Bill y Lesgold, 1992). Concretamente, al descomponer y volver a componer los términos de una operación de distintas formas, los alumnos hacen un uso implícito de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma. Sin embargo, los niños entienden inicialmente estas propiedades como permisos (evidentes) para combinar los números en cualquier orden pero no como leyes o propiedades (Resnick, 1992). Por ejemplo, dan muestras del uso implícito de la propiedad conmutativa de la suma, al operar sin dar importancia al orden tanto al trabajar con modelos físicos como al operar mediante conteo

Algunos trabajos más recientes que atienden a esta dimensión del álgebra, lo hacen en conexión con el estudio de pensamiento relacional, término que se refiere al reconocimiento y uso, para alcanzar un objetivo, de relaciones (incluyendo propiedades) entre los elementos que componen una expresión numérica (Molina, 2006). Como ejemplos están los trabajos de Carpenter y colaboradores (v.g., Carpenter, Levi, Franke y Koehler, 2005) y Molina y colaboradores (v.g., Molina, Ambrose, Castro y Castro, 2009). Estos autores aportan evidencias de la emergencia natural de este tipo de pensamiento en el contexto de tareas que juzgan la equivalencia de expresiones aritméticas (p. ej., 12 + 7 = 7 + 12; 16 + 14 – 14 = 16).

El álgebra como estudio y generalización de patrones

A la generalización, usualmente se llega a partir de una regularidad observada y tras la búsqueda de un patrón que sea válido para más casos (Pólya, 1966). La noción de patrón se asocia a términos como secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura. Todas ellas son relevantes y permiten acotar la esencia de esta noción (Liljedahl, 2004). Un patrón “es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse” (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). Morales, Cañadas y Castro (2017) distinguen los siguientes tipos de patrones:

- Patrones visuales o espaciales, en los que la regularidad se percibe a través de la vista. Generalmente, se encuentran en el ámbito de la geometría o representaciones pictóricas. La representación puntual de números poligonales se considera un patrón visual. En la figura 1 presentamos un ejemplo con los primeros términos de la secuencia de los números cuadrados.

1 4 9 16 …

Figura 1. Primeros términos de los números cuadrados

- Patrones lineales o de repetición son en los que una unidad se repite cíclicamente. A la unidad que se repite se le llama unidad de repetición o núcleo. Un ejemplo de este tipo de patrones es ABABAB,… donde el núcleo es AB. Otro ejemplo lo observamos en la figura 2, donde el núcleo es cuadrado blanco-triángulo negro.

Figura 2. Ejemplo de patrón de repetición

- Patrones numéricos, donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante. Por ejemplo, 1 2 3 5 8 13 21… constituye un patrón numérico.
- Patrones lógicos son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y diferencia de atributos entre objetos. En la figura 3 mostramos un ejemplo en el que se mantiene el tamaño de las figuras geométricas. Podríamos considerar que el patrón por el que se van añadiendo términos a la seriación es que cada término se diferencia del anterior en forma y color.

Figura 3. Ejemplo de patrón lógico

Los tipos de patrones presentados no son disjuntos. Por ejemplo, el patrón mostrado en la figura 1 es un patrón visual pero también es numérico si atendemos al número de círculos que componen cada configuración puntual que representa los términos de la secuencia.

En este contexto, la noción de estructura conecta los patrones y la generalización. Por ejemplo en el caso de patrones repetitivos, la estructura comprende aspectos como la unidad que se repite, la longitud de dicha unidad, el número de veces que se repite y si el patrón termina o no en una unidad completa. Mulligan, English, Mitchelmore y Robertson (2010) definen el término estructura como la forma en que varios elementos se organizan y relacionan. Estos autores enfatizan que "la estructura matemática se expresa más a menudo en forma de una generalización —una relación numérica, espacial o lógica que es siempre verdadera en un cierto dominio" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34). Desde esta aproximación del *early algebra*, la noción de estructura permite establecer conexiones y relaciones entre conceptos y procesos matemáticos y, como consecuencia, permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, la generalizan (Warren, Miller y Cooper, 2013).

Las investigaciones sobre estructura en el estudio y generalización de patrones abordan aspectos tales como la distinción de *niveles de reconocimiento* de estructura en tareas de generalización (Mulligan y Mitchelmore, 2009) o *la relación entre las formas de percibir la estructura* que evidencian los estudiantes y su mayor o menor competencia matemática, detectando importantes diferencias entre los estudiantes de alto rendimiento y los de bajo rendimiento (Lüken, 2012). Mulligan y Mitchelmore (2009) destacan que, por ejemplo, el patrón 3 x 5 representado en la figura 4 no es evidente para estudiantes de los primeros cursos, ya que no reconocen la estructura de tres filas con cinco cuadrados cada una (ver (b) de la figura 4). Así, se observa que una estructura pictórica u otra puede ser más cercana a unos estudiantes u otros y puede favorecer o dificultar la comprensión de una estructura numérica asociada.

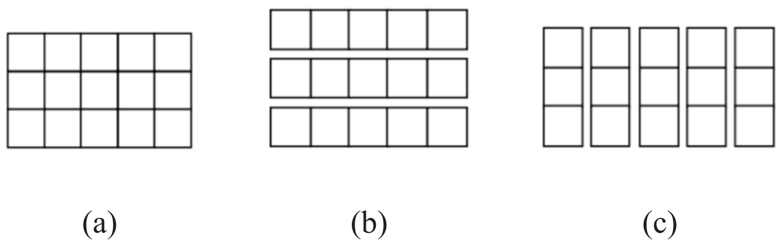


Figura 4. Representación pictórica de (a) 3 x 5, (b) 3 filas de 5, (c) 5 columnas de 3 (p. 34)

El álgebra como estudio de las funciones

En este enfoque funcional del álgebra, las funciones son el foco de contenido matemático. En Educación Infantil y Educación Primaria, las investigaciones utilizan funciones lineales. En este sentido, son claves las funciones lineales en general y las relaciones entre las dos variables, en particular. El foco está en el pensamiento funcional “entendido como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen” (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

La forma en que se trabajan las relaciones funcionales en el marco de la propuesta *early algebra* se basa en promover la percepción y generalización de patrones detectados en situaciones donde hay dos variables relacionadas que covarían. En consecuencia, la noción de estructura se utiliza con significado semejante al recogido en el apartado previo. En la práctica, en una misma situación en la que subyace una relación funcional los estudiantes identifican diversidad de estructuras, no todas ellas adecuadas ni equivalentes. Por ejemplo Pinto y Cañadas (2017) en un estudio comparativo, con estudiantes de tercero y quinto de Educación primaria, de la resolución del problema de las baldosas (se les presenta la imagen de la figura 5 y se les pregunta por el número de baldosas grises necesarias para un número dado de baldosas blancas), destacan una amplia variedad de estructuras mayor en tercero que en quinto.

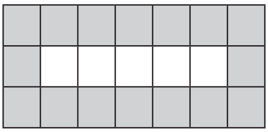


Figura 5. Imagen presentada para el problema de las baldosas

Las estructuras identificadas en el total de estudiantes son las siguientes, expresadas mediante simbolismo algebraico a partir de lo que los estudiantes presentan para casos particulares: (a) $2x+6$, (b) $2(x+2)+2$, (c) $2x+3+3$, (d) $3(x+2)-x$, (e) $3x+1$, (f) $2x+2$ (g) $(x+3)\cdot 2$ y (h) $(x+6)+2x$. Es importante observar que diferentes conteos o formas de percibir el patrón se corresponden con diferentes estructuras. En efecto, en los ejemplos anteriores no todas las respuestas corresponden a estructuras equivalentes. Algunas son adecuadas y otras no. Los estudiantes de tercero, de forma general, emplean más de una estructura al responder diferentes preguntas, lo que permite a los autores concluir una inconsistencia en el uso de las estructuras. Por otra parte, en los estudiantes de quinto se observa una mayor consistencia.

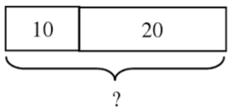
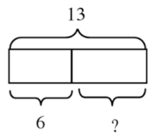
El álgebra como resolución de problemas

Desde la concepción del álgebra como herramienta para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas, el término estructura se emplea para hacer referencia a la estructura semántica del problema, la cual permite distinguir significados que se asignan a las operaciones en los problemas verbales.

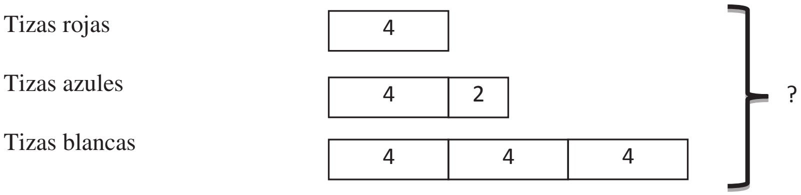
La forma de abordar la resolución de problemas mediante modelos rectangulares, ampliamente utilizada en el método Singapur, hace uso de esta idea de estructura. De forma sistemática, desde segundo de Educación Primaria (7-8 años) hasta la secundaria se enseña a los estudiantes a representar problemas verbales y relaciones numéricas (Clark, 2013). Se utilizan modelos rectangulares para representar la relación entre las cantidades conocidas, cantidades desconocidas y resolver problemas relativos a estas cantidades (ver Figura 6). Se trabaja con las cuatro operaciones aritméticas con diferentes conjuntos numéricos, tanto con los números naturales como las fracciones. La creación de modelos rectangulares permite a los estudiantes visualizar relaciones matemáticas abstractas y la estructura semántica de los problemas. De este modo los estudiantes llegan a resolver problemas algebraicos sin usar (el menos de manera única) el simbolismo algebraico (Bautista y Cañadas, 2015). Adicionalmente el método conduce a los estudiantes a desarrollar el concepto de variable e incógnita de forma gradual.

Este heurístico forma parte del método Singapur (Kho, Yeo y Lim, 2009), que ha tenido especial reconocimiento en los últimos años gracias a los buenos resultados de los estudiantes de Singapur en diferentes ediciones de evaluaciones internacionales de PISA y TIMSS. El objetivo de este método es que los estudiantes desarrollen las habilidades conceptuales y procedimentales de matemáticas para el día a día, y proporcionar a los estudiantes la habilidad para formular, aplicar y resolver problemas. Se considera que las representaciones juegan un papel crucial en la resolución de problemas.

Las investigaciones indagan en aspectos tales como de qué forma los estudiantes utilizan este método (Swee Fong y Lee, 2009), qué dificultades presentan (Kow Cheong, 2002) y cómo condiciona su posterior uso del simbolismo algebraico en la resolución de problemas (Swee Fong, 2003).

Tengo 10 cromos de animales y 20 de deportes ¿cuántos cromos tengo en total?	He comprado un sobre con seis cromos y ya tengo 13. ¿Cuántos cromos tenía?
	

En una clase hay 4 tizas de color rojo. Hay dos tizas más azules que las que hay rojas. Hay tres veces más tizas blancas que rojas. ¿Cuántas tizas hay en total?



3x5+2=17

Figura 6. Problemas resueltos con el método Singapur

No encontramos literatura que haga mención explícita al término estructura en este contexto.

Conclusiones

En este trabajo nos hemos centrado en un contexto muy particular de las matemáticas: el álgebra escolar. No abordamos otros significados que la noción de estructura presenta cuando se trabaja el álgebra en cursos superiores a la Educación Primaria o cuando se trabajan otros contenidos matemáticos. Hemos presentado nociones de estructura, con sutiles diferencias para distintas aproximaciones al *early algebra*. Estas nociones se encuentran estrechamente conectadas con la generalización. Este hecho es importante dado que la generalización se considera clave en el pensamiento algebraico, en el conocimiento matemático y en el conocimiento en general (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Observamos que en las investigaciones consultadas que atienden al estudio y generalización de patrones, no es fácil en ocasiones distinguir la noción de patrón y la noción de estructura. Consideramos la primera más amplia, conteniendo a la segunda. Entendemos que la noción de estructura hace referencia a la identificación del patrón a través de casos particulares, y a la expresión o aplicación del mismo para el caso general. No obstante, este trabajo pone de manifiesto la necesidad de avanzar en una clara caracterización independiente de ambos términos.

Hay estudios donde considerar que la noción de estructura podría contribuir a la descripción del pensamiento algebraico de los estudiantes y de la percepción del contenido matemático involucrado. Por ejemplo, en el contexto funcional así como en el estudio de patrones, permitiría indagar sobre si la estructura se mantiene para el trabajo con diferentes casos particulares y la generalización. Esto informaría sobre la consistencia del trabajo de los estudiantes en un determinado problema. Consideramos que sería interesante y necesario indagar sobre estas ideas en la investigación desde algunas de las dimensiones del álgebra.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado dentro de los proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Bautista, A. y Cañadas, M. C. (2015). Book review of The Singapore model method for the learning of mathematics / Reseña del libro, The Singapore model method for the learning of mathematics. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology*, DOI: 10.1080/02109395.2014.1000037

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization, advances in mathematics education*. Berlin: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(53).

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Clark, A. (2013). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems. *Math in Focus*[2].

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning early algebraization. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 187- 214). Berlin: Springer.

Irwin, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part–whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 25-40.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kho, T. H., Yeo, S. M. y Lim, J. (2009). *The Singapore model method for the learning of mathematics*. Singapur, Singapur: Ministry of Education.

Kow Cheong, Y. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator, 6*(2), 47-64.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

[2] https://www.hmhco.com/~/media/sites/home/education/global/pdf/white-papers/mathematics/elementary/math-in-focus/mif_model_drawing_lr.pdf?la=en

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E. y Castro E. (2009). Breaking the addition addiction: creating the conditions for knowing-to act in early algebra. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: studies on John Mason's contribution to Mathematics Education* (pp. 121-134). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Morales, Cañadas y Castro (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de primero y segundo de educación primaria en tareas de seriaciones. *PNA, 11*(4) 233-252.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Mulligan, J., English, L. D., Mitchelmore, M. y Robertson, G. (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP) in Kindergarten. En L. Sparrow, B. Kissane, y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 795-802). Fremantle, Australia: MERGA.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B., Bill, V. y Lesgold, S. (1992). Development of thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou, M. Shayer y A. Efklides (Eds.), *Neo-piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education* (pp. 210-230). Londres, Reino Unido: Routledge.

Swee Fong, N. (2003). How secondary two express stream students used algebra and the model method to solve problems. *The Mathematics Educator, 7*(1), 1-17

Swee Fong, N. y Lee, K. (2009). Model Method: Visual tool to support algebra word problem solving. En W. Khoon Yoong, L. Peng Yee, B. Kaur, F. Puig Yee y N. Swee Fong (Eds.), *Mathematics Education*. *The Singapore Journey* (pp.169-203). Singapur: Nanyang Technological University.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.