



**Mathématiques et sciences humaines**

Mathematics and social sciences

**173 | Printemps 2006**

**Varia**

---

## Analyse critique de la notion de variable. Points de vue sémiotique et formel

*Critical Analysis of Variable (Semiotic and Formal Wiewpoints) [First part]*

**Jean-Pierre Desclés and Kye-Seop Cheong**

---



### **Electronic version**

URL: <http://journals.openedition.org/msh/2956>

DOI: 10.4000/msh.2956

ISSN: 1950-6821

### **Publisher**

Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

### **Printed version**

Date of publication: 1 March 2006

ISSN: 0987-6936

### **Electronic reference**

Jean-Pierre Desclés and Kye-Seop Cheong, « Analyse critique de la notion de variable. Points de vue sémiotique et formel », *Mathématiques et sciences humaines* [Online], 173 | Printemps 2006, Online since 22 May 2006, connection on 02 May 2019. URL : <http://journals.openedition.org/msh/2956> ; DOI : 10.4000/msh.2956

---

## ANALYSE CRITIQUE DE LA NOTION DE VARIABLE (POINTS DE VUE SÉMIOTIQUE ET FORMEL)<sup>1</sup>

Jean-Pierre DESCLÉS<sup>2</sup>, Kye-Seop CHEONG<sup>3</sup>

RÉSUMÉ – *Pour B. Russell, la variable est peut-être une des notions les plus difficiles à comprendre en mathématiques (The Principles of Mathematics, 1903). En effet, la variable est fondamentalement polysémique. Sa signification varie avec les domaines d'utilisation ; tantôt elle est utilisée pour indiquer une indétermination d'un signe dans une équation ; tantôt elle sert à décrire analytiquement une fonction en Analyse, tantôt, on l'utilise en logique pour exprimer la quantification au moyen de « variables liées ». Nous donnons une brève analyse historique de l'évolution de cette notion en mathématiques, depuis sa création avec l'Algèbre de Viète et Descartes pour l'expression des équations, jusqu'à la représentation formelle d'un concept, formalisé par Frege comme une fonction non numérique, ce qui a donné naissance aux modernes langages du premier ordre. D'une part, la théorie des signes de Peirce et d'autre part, les types fonctionnels de Church, le  $\lambda$ -calcul « avec variables liées » ainsi que la logique combinatoire de Curry « sans variables liées », sont d'excellents instruments qui sont convoqués pour examiner les différentes sortes de variables aussi bien en mathématiques, qu'en logique ou en informatique théorique. Par exemple, nous montrons que la notion de « variable liée » n'est pas nécessaire pour la formulation de la quantification en logique et son analyse dans le fonctionnement des langues naturelles : un quantificateur simple est avant tout un opérateur qui s'applique à un prédicat afin de construire une proposition ; un quantificateur restreint est dérivé d'un quantificateur simple, obtenu par une composition fonctionnelle avec un connecteur logique (les opérateurs d'implication ou de conjonction). Nous proposons de prendre en compte et de formaliser à l'intérieur du cadre formel de la logique combinatoire typée : (i) les « vieilles notions » logiques « extension / intension », (ii) les distinctions issues de la psychologie cognitive et de l'anthropologie, entre les exemplaires « typiques » ou « atypiques » d'un concept, (iii) l'opération de détermination » de la Logique de Port Royal., ce qui nous a conduit à définir les quantificateurs « star », considérés comme des opérateurs qui viennent apporter des déterminations supplémentaires aux termes, en particulier aux termes nominaux. Ces nouveaux quantificateurs sont plus adéquats à l'analyse logique des langues naturelles que les quantificateurs frégéens. Nous sommes ainsi capables de donner une distinction nette entre les significations de « quelconque » et « indéterminé », qui sont implicitement mises en œuvre dans la Dédution Naturelle de Gentzen. Cela nous conduit à donner une solution à un paradoxe apparent qui surgit avec la règle d'introduction du quantificateur universel.*

MOTS-CLÉS – Algèbre, Fonction, Logique combinatoire, Quantification, Sémiotique, Variable

---

<sup>1</sup> Ce texte est le résultat des nombreux et fructueux dialogues menés lors des séjours de K.-S. Cheong, pendant son année sabbatique à Paris en 2002, et de J.-P. Desclés, à Séoul, en 2003 et 2004. Il peut être considéré comme une réflexion préliminaire à un article plus technique sur les formalismes intrinsèques [Desclés, 1980, 1981] que la logique combinatoire de Curry et les catégories cartésiennes fermées expriment.

<sup>2</sup> Laboratoire LaLICC (Langages, Logiques, Informatique, Cognition et Communication), unité mixte 8139 CNRS/Paris-Sorbonne, Maison de la Recherche, 28, rue Serpente 75006 Paris, Jean-Pierre.Descles@paris4.sorbonne.fr

<sup>3</sup> Duksung Women's University, Séoul, 132-714 – Corée, kseopcheong@hanmail.net

## SUMMARY – Critical Analysis of Variable (Semiotic and Formal Viewpoints)

For B. Russell “The variable is perhaps the most distinctively mathematical of all notions ; it is certainly also one of the most difficult to understand” (The Principles of Mathematics, 1903). *The aim of this paper is to highlight the meaning of variable in different fields of Mathematics: the expression of equations in Algebra with indeterminate entities; the analytical expression of functions in Analysis; the expression of quantification in Logic... We give a historical survey of this notion from Viète and Descartes to Frege’s representations of a concept, viewed as a non numerical function, yielding to the modern theory of quantification in first order languages. On one hand, the Peirce’s theory of signs, and on the other hand, with Church’s functional types,  $\lambda$ -calculus “with bound variables” and Curry’s combinatory logic “without bound variables”, are very useful tools for investigating different kinds of variables in Mathematics, in Logic and in theoretical Computer Sciences. For instance, it was showed that “bound variables” were not semiotic tools necessary to formulate quantification (in Frege’s sense) in “classical” Logic. Indeed, a simple quantifier is an operator which applies to a predicate by building a proposition; restricted quantifiers are derived from simple quantifiers by formal combinations with logical connectors (conditional or conjunction operators). We propose to take into account and to formalize, inside the framework of Combinatory Logic with types, (i) the “old logical notions” of “extension / intension”; (ii) determination operations from Port Royal’s Logic; (iii) the distinction from the anthropology and cognitive psychology between “typical” and “atypical” instances of a concept, which brings us to define new quantifiers, called “star quantifiers”, conceived as determination operators acting on terms. These quantifiers are more adequate than the fregean quantifiers, for a natural languages processing. Thus, we are able to give a conceptual distinction between the meanings of “Whatever” and “Indeterminate”, implicitly used in Gentzen’s Natural Deduction; thanks to this distinction, we can clarify an apparent “paradox” emerging with the universal quantifier introduction rule.*

KEYWORDS – Algebra, Combinatory Logic, Function, Quantification, Semiotics, Variable

*The variable is perhaps the most distinctively mathematical of all notions; it is certainly also one of the most difficult to understand.*

(B. Russell, *The Principles of Mathematics*, 1903, p. 89)

Un grand nombre d’élèves qui étudient les mathématiques dans les collèges ou dans les lycées éprouvent parfois une réelle difficulté à saisir en profondeur la notion de variable□ils se découragent alors et, ensuite, ils se jugent «□uls en maths□□plus tard, ils se décrètent inaptes à saisir toute pensée mathématique□«□s ne sont donc pas doués pour les chiffres et les formules algébriques□. N’est-il pas fréquent d’entendre□«□’est de l’algèbre, je n’y comprends rien□□ Or, un des blocages qui peut entraver la progression des élèves dans l’apprentissage des mathématiques est souvent étroitement lié à l’absence de la maîtrise du concept de variable, un autre blocage, qui lui est étroitement corrélé, étant une compréhension trop insuffisante de la notion de fonction. Les enseignants de mathématiques n’ont peut-être pas toujours mesuré l’extrême complexité cognitive de ces deux notions, pourtant fondamentales dans le développement des mathématiques. Pourtant, l’émergence historique de ces deux notions a demandé des efforts d’abstraction très importants aux arpenteurs, aux commerçants, aux calculateurs qui ont progressivement ouvert la voie aux notations algébriques mises en place par François Viète puis perfectionnées par René Descartes. Certains mathématiciens ont eu, en effet, des scrupules intellectuels<sup>4</sup> à manipuler, par

<sup>4</sup> Cf. plus loin□§ 2.3.

les mêmes règles, d'un côté, des expressions qui dénotent des objets déterminés et d'un autre côté, des symboles qui peuvent dénoter plusieurs objets (les valeurs d'une variable) ou des «entités inconnues» ou encore, parfois, ne rien dénoter lorsque, par exemple, aucune solution n'a été trouvée à une équation. L'introduction des variables dans la notation des fonctions en complique la compréhension, bien que, dans ce contexte, une variable soit directement associée à l'idée même de variation lorsqu'une quantité varie, une autre, qui lui est liée, varie également mais dans une autre proportion. Quant à la logique, qui cherche avec Frege, Peirce, Russell et Peano, à analyser formellement la langue des mathématiciens, elle a introduit dans la formalisation de la quantification, une distinction nette entre les «variables libres» et les «variables liées» (ou mieux «thuettes»). Or, cette distinction est-elle fondamentale et nécessaire à l'expression formelle de la quantification? Nous verrons que non. Par ailleurs, certains langages de programmation font appel aux variables et notent des processus d'affectation, par exemple « $x := x+1$ », en signifiant par là que la *nouvelle* valeur de « $x$ » doit changer en fonction de la valeur *déjà* assignée à « $x$ ». En procédant ainsi, on introduit, de façon totalement implicite, une certaine temporalité dans le calcul, mais sans pour cela la noter explicitement.

Devant tous ces emplois, s'agit-il de la *même notion*? On peut alors comprendre que l'élève, tout particulièrement celui qui est scrupuleux, puisse être inquiet, surtout lorsqu'il essaie de «comprendre en profondeur» le jeu sémiotique des symboles avec lesquels il doit calculer, sans chercher à se contenter d'accepter et d'appliquer «sans comprendre» les règles formelles de manipulation, souvent mises en place à partir d'une série d'exemples. Les professeurs devraient sans doute être mieux avertis de la difficulté didactique rencontrée par certains de leurs élèves et, pour y remédier, trouver des moyens pédagogiques efficaces qui éviteraient ainsi un blocage parfois définitif. Il est clair que le mathématicien professionnel, lui, a une conscience assez claire du caractère polysémique de la variable; seul le contexte de ses occurrences permet à l'intelligence humaine de lever l'ambiguïté et l'indétermination conceptuelle portée par la notation elle-même. Pourtant, peu de philosophes des sciences et d'épistémologues des formalismes<sup>5</sup> ont signalé le rôle ambigu joué par les différents emplois de la variable, bien qu'un logicien comme Bertrand Russell ait déjà souligné, dès ses *Principles of mathematics* [1903], que la variable est peut-être «une [des notions] les plus difficiles à comprendre». Plus tard, le logicien Haskell Curry et Feys [1958, p. 52] remarquent : “The word ‘variable’ has two distinct senses which have to be carefully distinguished”. Il distingue ainsi «variables intuitives» incorporées aux langues naturelles et les «variables formelles» des systèmes formels et, parmi ces dernières (a) les indéterminées, (b) les variables substitutives, (c) les variables liées. Ainsi, la notion de variable n'est nullement innocente.

Une analyse qui ferait appel aux concepts de la sémiotique, et à certains concepts de la linguistique, pourrait être utile pour une meilleure compréhension de cette notion fondamentale en mathématiques, en logique et en informatique. Mais que faut-il entendre par «sémiotique»? Un système sémiotique est un système général de signes et de symboles qui sont étroitement mêlés et destinés à représenter des entités (symboliques ou non) autres<sup>6</sup>

<sup>5</sup> On peut, par exemple, regretter que les excellents et riches ouvrages sur les formalismes de G.-G. Granger *Langages et épistémologie*, Klincksieck [1979] et *Formes, opérations, objets*, Vrin [1994], n'abordent pas le problème de la variable.

<sup>6</sup> Pour Ch. Morris : “Semiotics is not merely a science among sciences but an organon or instrument of all the sciences”. *Writings on the general theory of signs*, Mouton, 1971, p 67.

*Science and signs are inseparately interconnected, since science both presents men with more reliable signs and embodies its results in systems of signs. Human civilization is dependent upon signs and systems of signs, and the human mind is inseparable from the functioning of signs.*

[Charles Morris, *Writings on the general theory of signs*, Mouton, 1971, p 17]

Quant à Svetan Todorov, il souhaite que la sémiotique ne se restreigne pas aux seules études issues de la linguistique générale et à la seule analyse des signes dans les langues

*Quelle est la place des signes linguistiques au sein des signes en général ? Tant qu'on s'interroge sur le langage verbal seulement, on reste à l'intérieure d'une science ou d'une philosophie du langage ; seul l'éclatement du cadre linguistique justifie l'instauration d'une sémiotique.*

[Tzvetan Todorov, *Théorie du symbole*, Seuil, 1977, p 56]

L'unique discipline, en l'occurrence la linguistique, ne devrait donc pas prétendre répondre à toutes les questions relatives aux signes et aux symboles, d'autant que quelqu'un comme Etienne Bonnot de Condillac<sup>7</sup> a affirmé que « l'algèbre est une langue bien faite et c'est la seule ». Une analyse sémiotique et formelle de la variable n'est donc certainement pas superflue et devrait permettre de mieux appréhender la portée cognitive des processus d'abstraction reflétés, plus ou moins bien, par les jeux des différents formalismes employés et des notations utilisées. Elle fera également apparaître le double rôle conceptuel exprimé par certaines variables qui renvoient tantôt, au « quelconque » et tantôt, à « indéterminé ».

L'article est présenté en deux parties. La première partie (du § 1 au § 6) retrace plutôt l'évolution historique et sémiotique des différents emplois de la notion de la variable, depuis la naissance de l'algèbre avec François Viète et René Descartes, jusqu'à l'utilisation de la « variable liée » dans l'expression désormais classique de la quantification dans les langages du premier ordre, en passant par les différentes façons de penser les fonctions et de les décrire à l'aide d'écritures appropriées comme le  $\lambda$ -calcul de Church. La seconde partie (du § 7 au § 9) reprend l'analyse dans une perspective plus systématique en dégageant les rôles, souvent confondus, d'objet quelconque et d'objet indéterminé.

---

<sup>7</sup> E. Bonnot de Condillac, *Langue des Calculs*, 1798, Presses Universitaires de Lille, 1981, p. 6.

## PREMIERE PARTIE

## 1. INTRODUCTION

En tant qu'étude générale des systèmes de signes, la sémiotique englobe à la fois l'analyse de la constitution des expressions des langues naturelles et celle des expressions symboliques des langages artificiels comme les formalismes algébriques, les langages logiques et les langages de programmation. Par *symbole*, nous entendons un signe purement conventionnel qui s'oppose ainsi au signe iconique qui, lui, garde un lien motivé avec ce qu'il représente<sup>8</sup>. Il peut arriver cependant que la forme expressive du symbole choisi entretienne quelque rapport plus ou moins motivé avec son interprétation ou avec d'autres symboles. Ainsi, le symbole d'égalité « $=$ » introduit, par sa forme même, une parfaite symétrie entre les deux membres, à gauche et à droite, qu'il met en relation ; ce symbole d'égalité engendre, par composition avec un symbole élémentaire, le symbole « $\neq$ » de non égalité et les symboles non symétriques « $\leq$ », « $\geq$ », « $<$ » ou « $>$ ». Dans la théorie des ensembles, le symbole d'appartenance « $\in$ », retenu par G. Peano, est inspiré de la première lettre de la copule « $\epsilon\sigma\tau\iota$ » du grec ancien, avec lequel il entretient des relations sémantiques évidentes. En analyse, le symbole d'intégration « $\int f(x)dx$ » est motivé directement par un lissage du symbole de sommation « $\sum f(x)$ » qui désigne la somme des valeurs  $f(x)$  d'une fonction lorsque la variable « $x$ » parcourt un certain intervalle de variation. En logique, les symboles retenus pour les quantificateurs ne sont pas indépendants d'une certaine motivation linguistique originelle : « $\forall$ » pour « $\text{All}$ » et « $\exists$ » pour « $\text{Exists}$ ». Cependant, d'une façon générale, les symboles choisis, bien que parfois motivés, restent dans un rapport de pure convention avec ce qu'ils représentent. Ils peuvent donc se combiner, lorsque les systèmes et formalismes sont assez riches, avec d'autres symboles dans une véritable «*algèbre*», chaque expression se laissant décomposer en expressions plus simples ou entrant dans des combinaisons formelles plus complexes.

Nous souhaitons procéder, dans cet article, à une analyse sémiotique des symbolismes algébriques et logiques en dégagant quelques ambiguïtés inhérentes de la notion de variable. Nous ferons au passage quelques incursions dans l'histoire de ces symbolismes, afin de mieux éclairer les mécanismes mis en œuvre par les mathématiciens et les logiciens et les difficultés qui ont dû être surmontées.

## 1.1 LES LANGUES NATURELLES SONT DES SYSTÈMES DE REPRÉSENTATIONS UNIVERSELLES

Les langues naturelles apparaissent comme des systèmes de représentations universels au sens suivant : tous les systèmes symboliques artificiels, tous les systèmes formels se laissent interpréter directement ou indirectement dans une langue naturelle. En reprenant la distinction introduite par H.B. Curry et R. Feys [1958], la propriété sémiotique «*U*» (pour universelle) des langues naturelles oppose ces dernières aux langages artificiels de type sémiotique «*A*» (pour artificiel) :

<sup>8</sup> À la suite de Peirce, il faut ajouter aux symboles et icônes, les signes indiciaux qui établissent des liens avec d'autres signes («*La fumée est un indice de la présence du feu*») ou d'autres entités. Ainsi, des signes comme *je*, *ici*, *maintenant*, dans la langue française, sont des indices qui manifestent la présence d'utilisateurs de la langue, c'est-à-dire la présence des énonciateurs. Le signe *je* dans *J'écris cet article* est le témoin de l'existence de «*celui qui parle*».

*The construction of a formal system has to be explained in a communicative language understood by both the speaker and the hearer. We call this language the U-language (the language being used); It is a language in the habitual sense of the word. It is well determined but not rigidly fixed; new locutions may be introduced in it by way of definition, old locutions may be made more precise, etc. Everything depends of the U-language; we can never transcend it; whatever we study we study by means of it. Of course, there is always vagueness inherent in the U-language; but we can, by skilful use, obtain any degree of precision by a process of successive approximation.*

[Curry et Feys, *Combinatory Logic*, I, p. 25]

*(...) given a certain presentation of a formal system, the A-language is that language which is constituted by the symbols and expressions used for the primitive ideas and their combinations. The symbols of the A-language are adjoined to the U-language to be used there; they perform grammatical functions therein.*

[Curry et Feys, *Combinatory Logic*, I, p. 26]

Ainsi, même si les formalismes algébriques et logiques acquièrent une certaine autonomie (langages de type « $\Lambda$ » selon Curry), en autorisant des calculs formels avec les seuls symboles, ils ne sont pas complètement indépendants des langues naturelles puisqu'ils apparaissent souvent comme des extensions, par une adjonction réglée de symboles externes aux langues qui sont alors de véritables systèmes sémiotiques universels (de type « $\Pi$ » selon Curry). Ces systèmes acquièrent parfois une telle autonomie qu'ils deviennent de véritables « $\Pi$ langues artificielles» avec une morphologie, une syntaxe, des expansions paraphrastiques et une interprétation sémantique. Cette extension des langues naturelles introduit des « $\Sigma$ économies de pensée» indéniables, ce qui conduit les mathématiciens à concevoir des méthodes de résolution simple pour certains problèmes par une mise en équation ou encore par une ré-écriture d'énoncés en langue naturelle aboutissant à un formatage dans un langage canonique logique ou même parfois dans un langage de programmation (comme, en son temps, PROLOG). C'est le cas, par exemple, de la « $\Pi$ otation canonique» revendiquée par Quine, que l'on rangerait facilement parmi les philosophes qui proposent de remplacer le « $\Pi$ langage naturel», rempli d'imperfections notoires, par un langage artificiel, construit de toute pièce qui en serait exempt<sup>9</sup>. Pour Quine, les formatages canoniques sont des langages artificiels qui admettent une grammaire simple et limitée « $\Sigma$  la prédication, à la quantification et aux valeurs de vérité», c'est-à-dire en fait le « $\Pi$ langage des prédicats du premier ordre».

Il est cependant clair que les adjonctions de nouveaux symboles empruntent parfois des propriétés sémantiques et syntaxiques à des signes linguistiques précis. Par exemple, le symbole d'égalité, « $\Sigma$ », et celui d'appartenance à un ensemble, « $\Sigma$ », entretiennent des rapports sémantiques motivés par la copule « $\Sigma$ st» (ou ses équivalents dans les langues indo-européennes)<sup>10</sup>. De même, la notion de « $\Sigma$ variable liée», utilisée, depuis Frege, dans la théorie de la quantification, entretient certaines analogies simples avec certains procédés sémiotiques des langues naturelles. Par exemple, pour Quine, la « $\Sigma$ variable liée» est un analogue du pronom des langues naturelles « $\Pi$ es marques les plus décisives de la réification dans notre langage et les langages apparentés sont les

<sup>9</sup> Cf. sur ce point, par exemple, C. Hookway [1992, p. 102-103] et P. Gochet [1978] et les ouvrages de Quine lui-même cités dans la bibliographie.

<sup>10</sup> Cf., entre autres, les réflexions linguistiques d'E. Benveniste [1966] (« $\Sigma$ tre et avoir» in *Problèmes de linguistique générale*) et d'A. Culioli [2002] et les réflexions plus philosophiques de Lesniewski (cf. [D. Miéville, 1984]).

pronoms dans la «notation canonique», évoquée précédemment, le rôle des pronoms est tenu par les variables liées, aussi cette conception l'amène-t-elle alors à lier, avec force et netteté, l'ontologie aux variables liées. «Être c'est être la valeur d'une variable liée par un quantificateur», en d'autres termes, ce n'est pas par le canal des termes singuliers mais par celui des variables liées que nous énonçons nos assomptions ontologiques... Cependant, les analogies sont parfois trompeuses. Il en est ainsi des fameuses «donkey sentences» avec les indéfinis et les pronoms. Une telle «donkey sentence», comme

(1) *Lorsque Pedro possède un âne, il le bat*

pose des problèmes pour formuler des règles générales et uniformes de traduction du quantificateur *un*, en particulier quand on compare la phrase (1) précédente à la phrase (2) suivante

(2) *Lorsque Pedro possède un âne, Maria est heureuse.*

En effet, si (1) est traduite par (1') et (2) par (2') :

(1')  $(\forall x) [\text{être-âne}(x) \wedge \text{possède}(\text{Pedro}, x) \Rightarrow \text{bat}(\text{Pedro}, x)]$

(2')  $(\exists x) [\text{être-âne}(x) \wedge \text{possède}(\text{Pedro}, x)] \Rightarrow \text{est-heureuse}(\text{Maria})$

Nous pouvons constater que la proposition (2') est logiquement équivalente à (2'') :

(2'')  $(\forall x)[(\text{être-âne}(x) \wedge \text{possède}(\text{Pedro}, x)) \Rightarrow \text{est-heureuse}(\text{Maria})]$

Alors que la proposition (1') n'est pas logiquement équivalente à (1'')

(1'')  $(\exists x)[(\text{être-âne}(x) \wedge \text{possède}(\text{Pedro}, x)) \Rightarrow \text{bat}(\text{Pedro}, x)]$

Il en résulte ainsi un problème pour une traduction «compositionnelle» du quantificateur *un* lorsqu'il apparaît avec des pronoms<sup>11</sup>. Par ailleurs, les interprétations de systèmes symboliques artificiels, plus ou moins autonomes par rapport aux systèmes des langues naturelles, exigent *en fait un retour vers une langue naturelle*, soit directement, soit par l'intermédiaire d'interprétations préalables dans des systèmes déjà formalisés – il s'agit, ici, de l'approche de la sémantique selon Tarski – par exemple l'interprétation dans le système axiomatisé par Peano des entiers, dans l'ensemble continu des réels, dans la théorie des ensembles, dans un système topologique fonctionnel admettant des limites de fonctions (modèle de Dana Scott)... Ainsi, les rapports entre langues naturelles et langages artificiels ou formalismes artificiels sont triples : (i) adjonction de symboles, (ii) emprunts de propriétés (syntaxiques et sémantiques), (iii) interprétation *in fine* en langue naturelle (système de type « $\lambda$ »).

<sup>11</sup> Divers auteurs, par exemple H. Kamp [1981], I. Heim [1990] et J. Groenendijk, M. Stolkoff [1991] proposent les solutions à ce problème dans le cadre du modèle de la DRT ou de modèles plus «dynamiques» qui en sont hérités. Cf. par exemple, sur ce point, F. Corblin [2002, p. 91-106]. Dans le cadre de la théorie des types de Martin-Löf, le logicien A. Ranta [1994] propose une solution constructive intuitionniste. Quant à J.-P. Desclés [1997(a), p. 211-219] [1997(b), p. 152-156], il construit des «prédicats complexes» exprimés dans un formalisme «sans variables liées» à l'aide d'opérateurs abstraits - des combinateurs - qui composent entre eux les prédicats lexicaux élémentaires, de façon à assurer l'identité des référents indéterminés.



## 1.2. LE SIGNE DANS L'APPROCHE SÉMIOTIQUE DE C.S. PEIRCE

Dans sa théorie du signe, C.S. Peirce [1960] analyse le signe en trois composantes : le *representamen*, l'*objet* et l'*interprétant*. Le *representamen* ou représentant est mis à la place d'un objet mais la représentation doit être interprétée.

*Un signe, ou representamen, est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe qu'il crée, je l'appelle l'interprétant du premier signe. Ce signe tient lieu de quelque chose : de son objet. Il tient lieu de cet objet, non sous tous rapports, mais par référence à une sorte d'idée que j'ai appelée quelquefois le fondement du representamen.*

[Traduit de C. S. Peirce, *Collected papers*, § 2.228]

Autrement dit, l'analyse sémiotique du signe s'inscrit complètement dans une théorie des représentations à trois niveaux, le niveau des *représentés* (les «Objets»), le niveau des *représentants* (chaque «Representamen») et le niveau des *interprétations* (les «Interprétants»). Contrairement à l'analyse du signe de Saussure qui l'exclut complètement, C.S. Peirce donne implicitement une place à «l'interpréteur» (c'est-à-dire, dans une théorie de l'énonciation, à l'énonciateur et à son co-énonciateur puisque, dit-il «le signe est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un») et donc à la création d'Interprétants. En fait, les processus de production et d'interprétation d'un signe ne sont pas symétriques et réversibles. En effet, en produisant un signe, «le producteur-énonciateur» part d'une certaine interprétation de l'Objet<sub>1</sub> qu'il souhaite représenter, en créant un Interprétant<sub>1</sub>, c'est-à-dire en adoptant un certain point de vue à propos de l'Objet<sub>1</sub> qu'il veut représenter à partir de cet Interprétant<sub>1</sub>, il produit un Representamen. De son côté, le «co-énonciateur-interpète» doit partir, lui, de ce Representamen pour l'interpréter au moyen d'un Interprétant<sub>2</sub> en vue de construire un Objet<sub>2</sub> représenté.

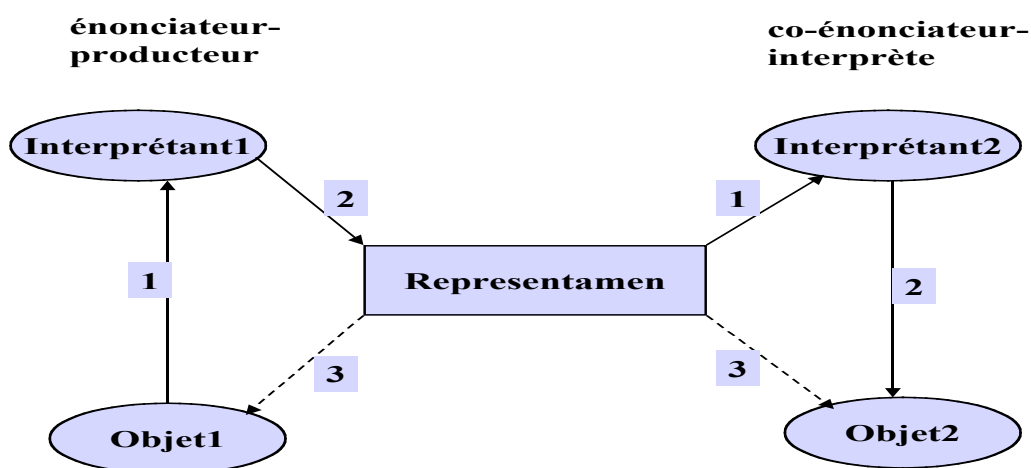


Figure 1. Les processus de production et d'interprétation d'un signe ne sont pas symétriques et réversibles.

Le Representamen, qui est ainsi échangé, devient l'aspect matériel (graphique, phonique, gestuel, iconique, symbolique, indiciel...) du signe qui est devenu commun à l'énonciateur et à son co-énonciateur. Cependant, les objets représentés  $Objet_1$  et  $Objet_2$ , par le biais des Interprétants respectifs  $Interprétants_1$  et  $Interprétants_2$ , ne sont pas nécessairement identiques (cf. Figure 1), ce qui fait dire au linguiste Antoine Culioli [2002] « La bonne compréhension est un cas particulier du malentendu ». En effet, en produisant un signe, l'énonciateur a toujours une certaine visée intentionnelle, il interprète donc ce qu'il souhaite représenter en produisant un Representamen matériel ; de son côté, le Representamen est une invitation, ou un ensemble d'instructions, pour le co-énonciateur, à re-construire un objet représenté à partir d'une interprétation préalable. Ainsi, les deux processus de production et de compréhension n'exécutent pas les opérations selon le même ordre opératoire.

Nous allons mettre à l'épreuve cette analyse sémiotique du signe en trois composantes dans une étude du statut sémiotique et formel de la « variable ». Remarquons que cette notion est centrale en mathématiques mais, comme Bertrand Russell l'a remarqué dès ses *Principles of Mathematics* [1903, p. 89], elle reste assez difficile à saisir. Mais avant toute étude profonde sur le statut de la variable, une première question doit être préalablement examinée : pouvons-nous considérer que « la variable » est une notion identique pour la logique, l'arithmétique ou la géométrie ? Bertrand Russell semble l'affirmer :

*By making our  $x$  always an unrestricted variable, we can speak of the variable, which is conceptually identical in Logic, Arithmetic, Geometry, and all other formal subjects. The terms dealt with are always all terms ; only the complex concepts that occur distinguish the various branches of Mathematics.*

[Russell, *The Principles of Mathematics*, 1903, p. 91]

Mais, derrière toute notion polysémique, il y a souvent un invariant abstrait commun<sup>12</sup>, « un signifié de puissance » pour reprendre l'expression du linguiste Gustave Guillaume. Nous devons donc chercher à cerner l'éventuel invariant qui serait commun à tous les usages de la variable : pour cette entreprise, il nous faut entreprendre une enquête à travers l'histoire de la notion de variable et de son émergence dans la pensée mathématique.

## 2. LES VARIABLES EN ALGÈBRE

L'algèbre s'est construite très lentement, beaucoup plus lentement que la géométrie. Mais le formalisme algébrique étant mis en place, beaucoup de problèmes, jugés jusque là, compliqués et réservés à quelques savants et aux experts du calcul, sont devenus si simples qu'ils ont pu alors être enseignés aux écoliers. De plus, le formalisme algébrique permet des extensions mathématiques que son absence ne permettait absolument pas. Citons, par exemple, la compréhension mathématique profonde des irrationnels par complétion des rationnels, ou encore, plus facile, l'invention et la maîtrise des nombres imaginaires comme solutions d'équations polynomiales.

---

<sup>12</sup> C'est du moins une des thèses sémantiques que défendent certains, dont l'un des auteurs (J.-P. Desclés) avec la notion d'archétype sémantico-cognitif à la racine d'un réseau de significations exprimées par la même forme linguistique ou Representamen.

Nous allons rappeler quelques procédures de résolution de problèmes qui ne faisaient pas appel à des notations algébriques avec des variables dénotant des « indéterminées », puis nous évoquerons les difficultés intellectuelles éprouvées à propos de la manipulation formelle de symboles dénotant des inconnues, aboutissant à de « fausses solutions ».

## 2.1. PROCÉDURES ALGORITHMIQUES ANCIENNES

Le formalisme algébrique a émergé progressivement à la suite de tâtonnements. Beaucoup de mathématiciens avaient imaginé des procédures algorithmiques plus ou moins complexes pour résoudre des problèmes pratiques, dont la mise en forme revient à résoudre une équation. Par exemple<sup>13</sup>, dans le Papyrus *Rhind* (XV<sup>e</sup> avant J.-C.), le problème 24 revient à résoudre l'équation à une inconnue, exprimée sous une forme moderne par (1) :

$$(1) \quad x + (1/7)x = 19$$

Résoudre une telle équation ne pose plus maintenant aucun problème à un jeune collégien. Cependant, pour le scribe égyptien, la méthode était beaucoup plus complexe puisqu'elle faisait appel à une « fausse solution ». L'équation étant de la forme «  $ax = b$  », on essaie une solution «  $x_1$  » et l'on pose alors :

$$(a) \quad b_1 = ax_1$$

La véritable solution est alors obtenue en multipliant  $x_1$  par  $b/b_1$ . Ainsi, le calcul effectué par le scribe, pour l'équation précédente (1), se décompose avec les étapes suivantes :

1. on prend pour « fausse solution », la valeur  $x_1 = 7$ , pour supprimer le dénominateur du premier membre de l'équation ;

2. on calcule  $b_1$  :

$$(b) \quad b_1 = 1 * 7 + (1/7) * 7 = 8$$

3. on divise  $b (= 19)$  par  $b_1 (= 8)$ , en décomposant au préalable 19 :

$$(c) \quad 19 = 16 + 2 + 1 = 2 * 8 + (1/4) * 8 + (1/8) * 8$$

$$19/8 = 2 + \_ + 1/8$$

4. on multiplie  $b/b_1 (= 19/8)$  par  $x_1 (= 7)$ , pour obtenir la solution «  $6 + \_ + 1/8$  » :

$$(d) \quad 7 * (19/8) = (1 + 2 + 4) * (2 + 1/4 + 1/8) = 16 + \_ + 1/8$$

Cet algorithme de calcul permet de trouver la solution exprimée par des fractions dont le numérateur est toujours « 1 », en partant d'une fausse solution initiale. Il s'agit ici d'une procédure opérationnelle, certes astucieuse, mais qui, cependant, ne réussit pas à dégager la notion d'inconnue, qui serait exprimée par une notation adéquate. Elle ne permet pas non plus de chercher une méthode plus générale de résolution des équations.

---

<sup>13</sup> Cf. *Mathématiques au fil des âges*, Textes choisis et commentés par J. Dhombres, A. Dahan-Dalmedico, R. Bkouche, C. Houzel, et M. Guillemot, I.R.E.M., Groupe Epistémologie et Histoire, Gauthier-Villars, 1987, p. 82-83.

Le mathématicien arabe al-Khwarizmī (IX<sup>e</sup> siècle) propose une méthode dans son livre *Kitab al-jabr wa-l-muqabala* en faisant appel 1) à une opération de «restauration» *al-jabr* (qui a donné son nom à notre «algèbre») qui consiste à se débarrasser des soustractions, puis 2) à une autre opération de réduction, *al-muqabala* («confrontation»). Ainsi, l'équation considérée par al-Khwarizmī :

$$(3) \quad 110 + 2x^2 - 22x = 54$$

est ramenée par *el-jabr* à :

$$(3,a) \quad 110 + 2x^2 = 54 + 22x$$

puis par *al-maqabala* à successivement :

$$(3,b) \quad 55 + x^2 = 27 + 11x$$

$$(3,c) \quad 28 + x^2 = 11x$$

Là encore, des transformations successives ont permis de ramener une expression à une autre expression équivalente qui est plus simple à résoudre.

En ce qui concerne «l'algèbre pythagoricienne», on ne peut pas dire qu'elle soit symbolique, elle a plutôt une essence géométrique. Par exemple, la proposition 4 du Livre II des *Eléments* d'Euclide établit, par des considérations géométriques (sur des surfaces de rectangles), l'identité remarquable de l'algèbre

$$(4,a) \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Les propositions 7 et 5 du Livre d'Euclide démontrent, par des voies purement géométriques, les identités respectives :

$$(4,b) \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(4,c) \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Cependant, ces identités remarquables, tellement utiles pour les calculs algébriques, n'étaient pas «pensées» par les grecs comme des expressions symboliques autonomes avec des variables substitutives.

## 2.2. VERS UNE ALGÈBRE SYMBOLIQUE EN PASSANT PAR UNE ALGÈBRE SYNCOPÉE

Du point de vue des symboles, on peut alors analyser l'évolution de l'algèbre en trois étapes distinctes. Une première approche orientée vers l'algèbre élémentaire est dépourvue de symboles, elle recourt exclusivement à la langue naturelle usuelle. C'est une *algèbre rhétorique ou terminologique*, dont on en verra plus loin les inconvénients. L'algèbre, en se servant explicitement de symboles adjoints aux langues naturelles, devient alors une *algèbre symbolique*. Cependant, l'humanité a mis plus de deux mille ans pour passer de la première à la seconde, et à mi-chemin, il lui a fallu passer par une algèbre, dite *algèbre syncopée*, qui utilise, pour exprimer des grandeurs ou des opérations, une sorte de sténographie avec des abréviations.

Les historiens des mathématiques se mettent d'accord pour dire que c'est Diophante qui, le premier, a fait usage d'abréviations, dans son *Arithmetica*, aussi bien pour l'inconnue que pour les opérations à effectuer. Il prend un caractère comme une

abréviation de la quantité inconnue, et emploie le terme «partie de» pour remplacer la barre de fraction. Mais il n'a pas une notation pour manipuler une seconde inconnue lorsqu'un problème en comporte, il n'a pas non plus des symboles pour les constantes. Cela constitue autant de limites à son système de notations algébriques. Pour aboutir à une algèbre symbolique<sup>14</sup>, il s'agit de traiter les inconnues comme des quantités ordinaires et de les manipuler comme telles dans des transformations jugées «correctes». Chez Pacioli, l'inconnue n'est jamais représentée par un symbole spécial.

À partir des travaux des mathématiciens arabes, à la fin du moyen âge, la quantité sur laquelle on opère reçoit plusieurs noms. Elle est désignée par *res* en latin, à partir de l'arabe (*say*). Les traducteurs italiens lui donnent le nom de *cosa*, d'où *Regola de la cosa* ou «grand art». Nicolas Chuquet inventa (*Triparty en la science des nombres*, 1484) une notation exponentielle fort suggestive. En effet, les expressions algébriques modernes :

$$(5,a) \quad 7x, 13x^2 \text{ et } 15x^3$$

sont exprimées dans le *Triparty* par respectivement

$$(5,b) \quad 7^1, 13^2 \text{ et } 15^3$$

Les exposants négatifs sont également introduits :  $8x^0$  devient  $8^0$ ,  $11x^{-1}$  devient  $11^{1m}$ ,  $13x^{-2}$  devient  $13^{2m}$ . L'expression moderne :

$$(6,a) \quad \sqrt{(4x^2 + 4x + 2x + 1)} = 100$$

est écrite ainsi :

$$(6,b) \quad R^2 4^2 p 4^1 p 2^1 p 1 \text{ égaux } 100$$

Luca Pacioli dans son *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportionalita* (1494) note par «p» et «h» les opérations d'addition et de soustraction et utilisait «o» pour *cosa* (l'inconnue), «enso» pour le carré de l'inconnue, «dece» pour le carré-carré et «equalis» pour l'égalité.

Les traces, avec les opérations élémentaires d'addition et de soustraction, de l'algèbre syncopée sont encore nombreuses dans nos systèmes modernes. Le signe «-» fut longtemps exprimé par le mot *meno* (Pacioli) on y substitua la lettre «h» surmontée d'une barre, puis la lettre «h» disparaît pour ne laisser subsister que le signe «-». L'addition a connu le même chemin, c'est-à-dire que «p» (*piu*, chez Pacioli) s'est transformé peu à peu en «+». On constate que le mot syncopé est devenu, à son tour, un symbole. Des symboles utilisés dans la trigonométrie tels *sin*, *cos*, *tan* sont eux aussi autant d'exemples de symboles syncopés. Cependant, remarquons bien que, dans ces essais de notation algébrique, l'inconnue n'a pas encore été nettement dégagée.

*Chose curieuse : rien de plus simple que la notion de l'opération (algébrique ou arithmétique) et les manuels d'algorithmes médiévaux et modernes nous présentent toutes les listes de ces opérations, et nous enseignent les règles opératoires que l'on doit suivre pour effectuer une multiplication ou une division, pour extraire une racine ou résoudre une équation. Et pourtant, malgré l'emploi sporadique de symboles (lettres) déjà par Aristote (logique),*

<sup>14</sup> Cf. René Taton, *Histoire générale des sciences*, T2, 1958, et Morris Kline *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, 1972, p. 259-262.

*par Léonard de Pise et Jordanus Nemorarius (dans la théorie des proportions), l'opération et l'objet (la « chose ») sur lequel on opère semblent former une unité tellement indissoluble que la pensée ne parvient pas à les dissocier et à les séparer. Res, radix, census, désignent l'inconnue, la racine, le carré, mais la racine n'est pas, en quelque sorte, conçue comme la racine de la chose, bien qu'on l'en extraie, ni le carré de la chose, bien qu'on l'y élève ; ils sont, pour ainsi dire, racine et carré en leur propre droit. C'est pour cela aussi, et non parce que l'on opère généralement avec une seule inconnue, que celle-ci - notre x- n'est jamais exprimée comme telle.*

*En conséquence, l'algèbre de la Renaissance ne nous présente jamais de formules, mais nous donne des règles et nous offre des exemples. Exactement comme le fait la grammaire qui, elle aussi, nous donne des règles que nous devons suivre, et des exemples auxquels nous devons nous conformer en déclinant les noms et en conjuguant les verbes. 5...) La pensée de l'arithméticien et de l'algébriste de la Renaissance reste au niveau de celle du grammairien : elle est semi-concrète : on suit la règle générale, mais on opère sur des cas – mots ou nombres – concrets.*

*Histoire générale des sciences, (sous la direction de René Taton), p. 50.*

C'est évidemment avec François Viète, dans son *In artem analyticam isagoge* (Tours, 1591; Paris, 1624), qu'intervient un véritable progrès dans les notations symboliques. Viète désigne – et cela est remarquable – par des lettres non seulement les inconnues, mais aussi les constantes, c'est-à-dire des valeurs connues mais qu'il n'est pas indispensable de préciser. Ces valeurs connues interviennent en tant que paramètres, d'où la généralité du symbolisme et l'application à de multiples situations concrètes conduisant à des résultats généraux formulés grâce à ces paramètres. Viète était pleinement conscient du fait que l'algèbre se situe, du point de vue de l'abstraction, à un niveau plus élevé que l'arithmétique, et cette avance en généralité fait de Viète le créateur légitime d'une algèbre syncopée directement tournée vers une algèbre symbolique<sup>15</sup>.

François Viète introduit des symboles spécialisés pour désigner les quantités inconnues en utilisant des voyelles (A par exemple) et les quantités connues exprimées par des consonnes les quantités connues (B, F par exemple)□

*En cela, nous sommes aidés par un artifice qui nous permet de distinguer les valeurs données de celles qui sont inconnues ou que nous cherchons; c'est l'emploi de symboles, permanents par leur nature et aisés à comprendre, par exemple la notation des valeurs inconnues par A ou d'autres voyelles, tandis que les valeurs données sont désignées par B, C, G ou d'autres consonnes.*

L'équation qui, dans une notation moderne, est écrite :

$$(7,a) \quad 3ax^2 + 5bx - x^3 = c$$

était exprimée par Viète sous la forme :

$$(7,b) \quad B^3 \text{ in } A \text{ quadratus} + F^5 \text{ in } A - A \text{ cubus} \text{ aequatur } D \text{ solido}$$

ou encore□

$$(7,c) \quad B^3 \text{ in } A \text{ q} + F^5 \text{ in } A - aC \text{ aequatur } D \text{ solido}$$

<sup>15</sup> Cf. Louis Charbonneau, in *François Viète, un mathématicien de la Renaissance*, 2005, p. 53-73.

où « $\text{th}$ » signifie «multiplier», « $\text{q}$ » est l'abréviation de «quadratus» et « $\text{C}$ » signifie «cubus». Viète utilise ainsi une écriture analogue à

$$(8) \quad 3BA^2 + 5FA - A^3 = D$$

laquelle n'est pas encore totalement détachée des contraintes sémiotiques de la langue naturelle et, de ce fait, n'est pas complètement comparable et équivalente à notre notation actuelle. Avec les notations empruntées à Chuquet (français), Stevin (flamand) ou Stifel (allemand), le formalisme de Viète va s'enrichir<sup>16</sup>. Descartes, en particulier, mais en inversant les décisions conventionnelles de Viète pour les inconnues et les constantes (paramétrées), a perfectionné ce formalisme en lui donnant pratiquement la forme actuelle. En effet, dans son ouvrage *Géométrie* (1637), les quantités connues sont symbolisées par les premières lettres de l'alphabet a, b, c, ... et les inconnues par les dernières x, y, z, et les lettres majuscules sont remplacées par des minuscules. Il adopte, et ainsi stabilise, l'emploi du à Chuquet des exposants, pour marquer les puissances. On peut voir facilement que, par exemple, l'expression

$$(9) \quad x^{13} = y^9$$

est infiniment plus concise et plus intelligible que la notation exprimée avec le seul symbole de multiplication. Descartes adopte également une notation, qui est devenue la notation moderne, pour la racine carrée.

Nous pouvons maintenant comparer les trois écritures de Stevin, Viète et Descartes, ce qui fait apparaître les nets progrès dans la généralisation notationnelle et dans la concision symbolique, qui se détache progressivement des contraintes sémiotiques imposées par la syntaxe des langues naturelles :

(10)	Stevin (1585) :	$3(2) - 5(1) + 6(0) = 0$
	Viète (1591) :	$3 \text{ in } A \text{ quad} - 5 \text{ in } A \text{ plano} + 6 \text{ aequatur } 0$
	Descartes (1637)	$3x^2 - 5x + 6 = 0$

*C'est pour cela que la notation de l'inconnue dans les expressions algébriques, introduite par Viète et perfectionnée par Descartes, marque une étape décisive (...). Elle reflète le passage du degré d'abstraction du grammairien à celui du logicien pur : par là même l'abréviation devient symbole et la logistica numerosa, pour employer l'expression de Viète, s'élève au niveau de la logistica speciosa.*

*Histoire générale des sciences*, (sous la direction de René Taton), p. 51.

Ainsi, de Diophante à Viète et à Descartes jusqu'à notre époque moderne, il a fallu plus de 15 siècles d'efforts pour arriver à écrire l'équation algébrique sous sa forme la plus générale

$$(11) \quad \begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ \dots & \qquad \dots \end{aligned}$$

<sup>16</sup> Comme le note J.-P. Le Goff, dans l'ouvrage collectif consacré à Viète [Barbin *et al.*, 2005, p. 100] « $\text{C}$ ...») *L'Algèbre de Viète* par James Hume et Godscroft apparaît donc comme un moment de transition entre l'algèbre «spécieuse» de Viète et la *Nouvelle Analyse de Descartes*».

Une généralisation dans les notations se produit avec l'utilisation d'indices souscrits aux différentes constantes dans l'expression d'une équation polynomiale :

$$(12) \quad a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

La très grande généralité de cette expression fait qu'elle englobe toutes les équations algébriques en une seule formule. Elle sera le point de départ pour toute l'évolution ultérieure aboutissant d'une part, aux recherches sur le théorème fondamental de l'algèbre (d'Alembert, Laplace, Gauss avec des considérations topologiques, Cauchy avec les variables complexes) puis aux considérations ultérieures sur les équations par Evariste Galois et d'autre part, aux notations avec doubles indices utilisées dans les systèmes d'équations, dans les matrices de coefficients, repris dans les tableaux en informatique...

### 2.3. MANIPULER UNE QUANTITÉ INCONNUE «UNE QUANTITÉ INCONNUE» UNE QUANTITÉ CONNUE

Remplacer une «quantité inconnue» dans une expression et la manipuler par des transformations analogues à celles qui règlent les «quantités connues» ne va pas sans poser des problèmes de compréhension<sup>17</sup>, à la fois sur le plan sémiotique et sur le plan mathématique. En effet, quel est le statut sémiotique du symbole qui désigne une «quantité inconnue», tout particulièrement lorsque justement cette quantité est démontrée ne pas avoir d'existence ? Autrement dit, en termes modernes :

*À quoi réfère le symbole qui désigne une quantité inconnue lorsque celle-ci n'existe pas ?  
Quel est l'objet dénoté par ce symbole ?*

Si la *res* ou la *cosa*, qui représente, dans un calcul, une quantité encore inconnue, a été manipulée par les mêmes règles qui ont été bien définies et expérimentées à propos de quantités connues, il s'avère, à la fin du calcul, que cette quantité inconnue *désigne un objet qui ne peut pas avoir d'existence*, quelle peut donc être alors la légitimité de cette représentation sémiotique, puisque les transformations réglées ont opéré avec des désignations d'objets qui n'existent pas ? Certains mathématiciens, particulièrement scrupuleux, ont exprimé de réelles interrogations :

A-t-on vraiment le droit, sans prendre certaines précautions, de manipuler des symboles qui ne désignent rien ?

Ainsi, Descartes considère les «vraies racines» et les «fausses racines».

*(...) Mais souvent il arrive que quelques unes de ces racines sont fausses, ou moindres que rien. Comme si on suppose que  $x$  désigne aussi le défaut d'une quantité qui soit 5, on a  $x+5 = 0$ , qui étant multipliée par  $x^3 - 9xx + 26x - 24 = 0$  fait :*

$$x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 = 0$$

*pour une équation en laquelle il y a quatre racines, à savoir trois racines vraies qui sont 2,3,4 et une fausse qui est -5.*

Les «vraies racines» sont celles qui sont positives tandis que les racines négatives sont «fausses».

<sup>17</sup> À titre d'anecdote instructive, rappelons que «l'oncle Jacob» qui initie le jeune Albert Einstein à l'algèbre n'a pas craint de lui montrer que: «l' est une science joyeuse. Quand on ne peut pas attraper l'animal qu'on chasse, on l'appelle temporairement  $x$  et on continue à le chasser tant qu'il n'est pas dans la gibecière».



*Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut toujours en imaginer autant (...) mais qu'il n'y a pas quelquefois aucune quantité, qui corresponde à celles qu'on imagine, comme encore qu'on puisse imaginer trois en celle-ci,  $x^3 - 6xx + 13x + 10 = 0$ , il n'y en a qu'une réelle, qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente, ou diminue, ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires.*

On remarquera que dans le texte précédent, «*l'imaginaire*» signifie, ici, pour Descartes, «*la fausse racine*», c'est-à-dire «*la racine négative*».

Pour Lazare Carnot, adopter la «*racine négative*», c'est s'engager dans un labyrinthe de paradoxes pour l'ensemble des mathématiques et risquer de procéder ainsi à des «*opérations impossibles*» :

*Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0, c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes, tous plus bizarres les uns que les autres : dire que ce n'est qu'une quantité opposée aux quantités positives, c'est ne rien dire du tout parce qu'il faut expliquer ensuite ce que c'est que ces quantités opposées, recourir pour cette expression à de nouvelles idées premières semblables à celles de la matière, du temps et de l'espace, c'est déclarer qu'on regarde la difficulté comme insoluble, et c'est en faire naître de nouvelles, car si l'on me donne pour exemple de quantités opposées, un mouvement vers l'orient en un mouvement vers l'occident, ou un mouvement vers le nord et un mouvement vers le sud, je demanderai ce que c'est un mouvement vers le nord-est, vers le nord-ouest, vers le sud-ouest, etc., et de quels signes ces quantités devront être affectées dans le calcul.*

[Lazare Carnot, *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, 1797]

*Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?*

En effet, certaines opérations deviennent impossibles puisque «*3*» serait moindre que 2 alors que  $(-3)^2$  serait plus grand que  $(2)^2$  :

*[...] le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite, et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former sur la quantité.*

[Lazare Carnot, *Géométrie des positions*, 1803]

La «*fausse racine*» de Descartes est visiblement problématique car elle risque d'entraîner les mathématiciens, selon Carnot, vers une multitude de paradoxes.

### 3. LANGUES NATURELLES ET ALGÈBRES SYMBOLIQUES

Les langues naturelles sont-elles suffisantes pour exprimer correctement les problèmes et surtout pour engendrer des moyens calculatoires destinés à les résoudre ? L'introduction de symboles nouveaux est une des propriétés sémiotiques d'ouverture des systèmes linguistiques que sont les langues naturelles : en effet, chaque langue est un système ouvert qui possède des mécanismes d'emprunt et d'incorporation de symboles étrangers. Ces mécanismes sont une des conséquences du principe formulé

par le linguiste Zellig Harris « La métalangue est dans la langue »<sup>18</sup>, c'est-à-dire que chaque langue contient des mécanismes de description et d'introduction, par des procédures purement linguistiques, de nouveaux symboles. La notion de variable serait-elle alors un simple substitut formel de la notion de pronom, comme certains logiciens, comme W.O. Quine, l'ont affirmé ? Pourquoi les calculateurs, les scribes, les géomètres chargés de calculer les rapports espérés d'une récolte, de mesurer la superficie d'un champ pour en évaluer le prix, ont-ils progressivement ressenti le besoin de recourir à des symboles pour représenter certaines quantités puis à « mettre en équation » les problèmes ?

### 3.1. LES INTERPRÉTANTS DU SYMBOLE REPRÉSENTANT « UNE QUANTITÉ INCONNUE »

Quel est exactement l'objet référentiel représenté par un symbole désignant, dans une équation, une « quantité inconnue » ? Que représente le symbole lorsque la racine est « fautive », qu'elle soit négative ou inexistante ?

Pour tenter de répondre à ces questions, reprenons la notion de « symbole » dans l'approche sémiotique de Peirce, rappelée au début de ce texte. La notion d'Interprétant devient, ici, essentielle. En effet, puisque l'équation (13)

$$(13) \quad 5x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 4)(x - 3)(x - 2) = 0$$

a des solutions positives, l'Interprétant de la variable «  $x$  » est un nombre positif. Mais, pour l'équation :

$$(14) \quad x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 20 = (x + 5)(x - 4)(x - 3)(x - 2) = 0$$

l'Interprétant de «  $x$  » varie selon le domaine d'interprétation dans lequel on interprète les solutions de l'équation. Pour spécifier l'Interprétant, prenons le domaine des entiers naturels en utilisant la terminologie de Descartes, l'équation précédente possède les trois « vraies racines » 2, 3, 4 et une « fautive racine » -5 ; dans ce cas, l'objet dénoté par le symbole «  $x$  » qui représente « une quantité inconnue », dans l'équation précédente (14), a une « dénotation indéterminée » dans l'ensemble {2, 3, 4}. Si nous prenons maintenant le domaine des entiers naturels positifs, négatifs ou nul, la même équation (14) possède quatre « vraies racines » ; dans ce cas, le symbole «  $x$  » a une dénotation indéterminée dans l'ensemble {2, 3, 4, -5}. Ainsi, la dénotation du symbole «  $x$  » dans cette équation (14) *dépend essentiellement du contexte d'interprétation* (cf. la Figure 2). Le symbole «  $x$  » renvoie donc 1) à un Objet en partie indéterminé (puisqu'il appartient à l'espace des solutions potentielles) et 2) l'indétermination de l'Objet *dépend du contexte* donc de l'Interprétant qui fixe en partie son mode de dénotation, c'est-à-dire de son domaine d'interprétation.

En faisant appel à des variables qui seraient considérées, du point de vue de la sémiotique, comme des symboles qui dénotent des objets indéterminés dépendant de l'Interprétant choisi, c'est-à-dire du domaine d'interprétation, la symbolisation par une équation abstraite rapproche ce formalisme algébrique d'une des propriétés des langues naturelles. En effet, les signes des langues n'ont pas tous une dénotation entièrement déterminée car, bien souvent, la dénotation reste étroitement dépendante du contexte,

<sup>18</sup> Cf., par exemple, *Structures mathématiques du langage*, 1968/1971, ou *Notes du Cours de syntaxe* 1976.

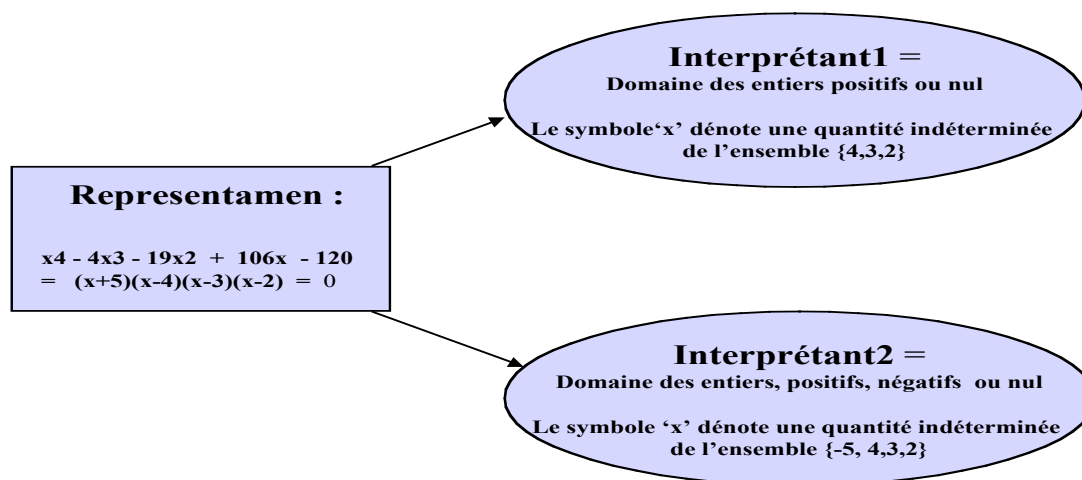


Figure 2. Différents Interprétants d'un même symbole « $x$ »

donc de l'Interprétant choisi par l'énonciateur ou reconstruit par le co-énonciateur. Il s'agit du problème bien connu de l'opacité référentielle. Par exemple, dans l'énoncé *J'ai rencontré un étudiant*, le syntagme *un étudiant* peut renvoyer soit à «un étudiant ayant une référence parfaitement déterminée pour l'énonciateur», qui connaît très bien l'étudiant rencontré, mais qui, néanmoins, est présentée par l'énonciateur comme étant indéterminée et qui, par conséquent, reste opaque pour son co-énonciateur, soit à «un étudiant parfaitement indéterminé», y compris pour l'énonciateur, comme *un voleur* dans *un voleur m'a dérobé mon livre de logique*. La levée progressive de l'indétermination référentielle peut s'effectuer par des échanges dialogiques<sup>19</sup>.

Le signe *un nombre*, dans l'instruction *Prenez un nombre*, renvoie non pas à un objet référentiel bien déterminé mais plutôt à un objet indéterminé appartenant à un ensemble référentiel qui dépend du contexte d'interprétation, donc de l'Interprétant choisi : soit les entiers naturels positifs, soit les entiers naturels positifs, négatifs ou nul, soit les nombres rationnels, soit les nombres réels... Cette approche de la quantification est bien claire lorsque l'on considère les règles qui gèrent les quantificateurs dans la Dédution Naturelle de Gentzen (cf. § 8). Par exemple, l'analyse sémiotique de l'élimination du quantificateur existentiel est parlante puisque, étant donnée une expression comme « $(\exists x) (A(x))$ », on peut raisonner sur un symbole « $y$ » (qui est tel que, pour cet « $y$ », l'expression  $A(y)$  soit vérifiée) : ce symbole « $y$ », introduit par l'élimination du quantificateur « $\exists x$ », dénote en fait *un objet indéterminé* dont la seule propriété connue est « $y$  tombe sous le prédicat  $A(x)$ » – pour employer une expression de Frege. Nous allons revenir plus loin sur la notion d'objet indéterminé dénoté par une variable.

<sup>19</sup> Cf. l'analyse effectuée par F. Jacques pour un énoncé comme *Le candidat du président est dangereux* où, par un jeu dialogique, les interlocuteurs déterminent progressivement la référence du syntagme «le candidat du président».

Le nom propre lui-même peut renvoyer, parfois, à des objets partiellement déterminés. Considérons, par exemple, les deux occurrences du signe *Napoléon* dans la phrase suivante :

(15 a) *Le Napoléon de Waterloo n'est pas le Napoléon de la défaite de Sedan*

Les deux occurrences de *Napoléon* dénotent des objets référentiels différents («Napoléon I» dans la première occurrence et «Napoléon III» dans la seconde). Les Interprétants de ces deux occurrences du même signifiant matériel (plus précisément associés au même *representamen* selon la terminologie de Peirce) dépendent évidemment du contexte d'interprétation. On pourrait également pousser l'analyse du nom propre plus loin en comparant les référents des deux occurrences de *Napoléon* dans les trois phrases

(15 b) *Le Napoléon d'Austerlitz n'est pas encore le Napoléon de Waterloo*  
*Le Napoléon de Sainte Hélène n'est plus le Napoléon du 4 décembre 1802*  
*Napoléon n'est plus Bonaparte*

Dans ces phrases, les occurrences du signe *Napoléon*, ou de *Bonaparte*, renverraient à «Un même individu», à savoir l'entité individuelle /Napoléon Bonaparte/, mais ces occurrences saisissent, donc dénotent, une entité représentée – un Objet – qui, selon les points de vue exprimés, sont des objets différents, c'est-à-dire que ces occurrences renvoient à des Objets construits à partir d'Interprétants différents et par des voies constructives distinctes. Ainsi, même au nom propre est attachée une certaine indétermination référentielle (temporelle, spatiale, notionnelle)...

Dans certains contextes, un signe linguistique peut ne pas dénoter un objet référentiel, puisque c'est l'Interprétant de ce signe qui contribue à fixer l'Objet auquel il renvoie, de façon plus ou moins déterminée. Prenons, par exemple, l'expression linguistique *le monstre du Loch Ness*. Selon les contextes et les intentions d'interprétation (... et les croyances ou intérêts économiques, liés à l'afflux des touristes et des journalistes, que l'on souhaite préserver), l'Objet référentiel existera ou n'existera pas et, dans ce dernier cas, il aura seulement une «référence fictive» (à rapprocher des «fausses racines» de Descartes) mise en place par le discours. En effet, pour un habitant des rives du Loch Ness en Ecosse, l'Objet auquel réfère *le monstre du Loch Ness* aura certainement pour référence «Un Objet existant», même si cet objet reste difficilement déterminable et guère accessible à une perception empirique et répétitive mais, en revanche, pour un scientifique sceptique, l'Objet auquel réfère le signe complexe *le monstre du Loch Ness* restera simplement un objet fictif, sans occurrence réelle dans le domaine des objets identifiables par les organes de la perception (visuelle ou par le biais d'instruments fiables d'observation). Ainsi, l'interprétant du même signe complexe *le monstre du Loch Ness* n'est donc pas le même, selon qu'on habite ou non la région de Loch Ness, ou selon que l'on soit plus ou moins sceptique ou crédule. Puisque les Interprétants sont différents, les Objets dénotés n'ont donc pas le même statut existentiel. Prenons un second exemple. Lorsqu'elle apparaît dans un récit mythique, la proposition *Il a rencontré un centaure* sera considérée comme dénotant «Le vrai» (la dénotation de proposition étant prise au sens de Frege)<sup>20</sup> dans ce cas, *un centaure* dénote un objet indéterminé mais réel. En

<sup>20</sup> Nous pouvons citer, ici, l'anecdote qui met en scène le philosophe Alain. Dans une classe de khâgne, où il enseignait, une jeune fille traduisait un fragment d'Homère. Alain l'interrompt «Mademoiselle, croyez-vous aux dieux d'Homère». La jeune fille, interloquée, répond en rougissant «Bien

revanche, la même proposition énoncée dans le contexte de la conversation quotidienne sera plutôt interprétée, de nos jours, comme dénotant « $\square$  faux $\square$ » dans ce cas, ‘un centaure’ dénote un objet fictif qui ne posséderait aucune réalité. Prenons encore un autre exemple *Ulysse a débarqué à Ithaque*, emprunté à Frege. L’objet référentiel dénoté par le signe *Ulysse* peut avoir une existence réelle (mais l’historien pourrait en douter) ou simplement fictive ou mythique. De même, l’objet dénoté par *Madame Bovary*, dans le célèbre roman de Flaubert, n’a pas une existence réelle dans le monde du vécu historique mais il a simplement une existence fictive $\square$  de plus, certaines de ses déterminations physiques ou morales nous restent largement inconnues et inaccessibles $\square$  ce n’est pas le cas de l’objet dénoté par *Georges Sand*, pour lequel nous pouvons reconstituer, au moins en partie, certaines de ses déterminations, grâce, par exemple, à des portraits ou aux témoignages crédibles de ses contemporains.

Nous venons de mettre en évidence une propriété qui serait commune à certains signes des langues naturelles et aux symboles désignant des « $\square$  quantités inconnues $\square$ » dans des équations algébriques. Ces signes ont des occurrences qui dénotent parfois des objets ayant une existence et parfois des objets fictifs sans existence externe (c’est-à-dire externe à l’univers référentiel construit par une énonciation particulière). Le choix d’une interprétation est donc guidé par les Interprétants qui sont alors attachés aux occurrences de ces signes insérés dans des contextes. Le recours à la théorie du signe de Peirce nous est d’un grand secours. Remarquons qu’une simple analyse selon la célèbre dichotomie « $\square$  Signifiant / Signifié $\square$ » de Ferdinand de Saussure resterait très insuffisante pour notre analyse.

Pour résumer notre position, nous pouvons dire que le symbole d’inconnue d’une équation algébrique, c’est-à-dire « $\square$  une variable $\square$ », *dénote un objet indéterminé dont l’existence dépend du choix de son Interprétant*. Si les langues naturelles et les algèbres symboliques ont sans doute quelques propriétés communes, les algèbres se sont cependant progressivement détachées des langues naturelles pour acquérir un statut beaucoup plus autonome. Cette autonomie, par rapport aux langues, introduit au moins deux avantages, l’un est lié à une recherche systématique de solutions, par des transformations réglées, en fait par des calculs symboliques, à partir d’une formulation nouvelle du problème, l’autre conduit à une dimension mathématique supplémentaire, plus englobante et orientée surtout vers une compréhension plus profonde de la nature mathématique des entités (nombres, objets mathématiques...) représentées par des symboles.

### 3.2. REFORMULATION SYMBOLIQUE DE PROBLÈMES EXPRIMÉS DANS UNE LANGUE NATURELLE

Nous allons maintenant voir, à partir d’un exemple, comment la formulation d’un problème exprimé en langue naturelle peut être assez délicate à comprendre et peut faire apparaître difficilement une procédure générale de résolution. En revanche, la formalisation du problème dans un formalisme artificiel, muni de symboles désignant les « $\square$  quantités inconnues $\square$ », ce qui revient à sa « $\square$  mise en équation $\square$ », peut conduire à une résolution simple et rapide, avec des procédés généraux applicables à de nombreuses situations du même type, d’où « $\square$  économie de pensée $\square$ » qui en résulte. Le gain opéré

---

évidemment, non $\square$  et Alain de répondre $\square$  « $\square$  Mademoiselle, vous avez tort $\square$ » On ne peut pas traduire Homère sans croire aux dieux évoqués». Il est clair qu’un récit mythique implique « $\square$  existence $\square$ » des êtres mentionnés $\square$  comprendre un tel récit, c’est donc croire à leur existence.

par une telle formalisation n'est donc plus à prouver : ce qui paraît difficile dans l'énonciation d'un problème devient, dès que le problème a reçu une formalisation algébrique, relativement accessible aux procédures opératoires de résolution. Considérons, parmi mille autres, le problème suivant exprimé en langue naturelle :

*Quand je serai aussi âgé que mon père l'est actuellement, je serai cinq fois plus âgé que mon fils aujourd'hui. À ce moment-là, mon fils sera huit ans plus âgé que mon âge actuel. La somme de mon âge et de l'âge de mon père est cent. Quel est l'âge mon fils ?*

Si l'on suit pas à pas l'analyse de ce problème en le découpant en propositions, nous sommes assez vite submergés par les inconnues qu'il nous faut introduire. Il est, à n'en pas douter, bien fastidieux et tortueux d'arriver à sa solution en se laissant guider par les seules énonciations linguistiques et en renonçant à toute formalisation algébrique. En revanche, en mettant l'âge de mon fils sous forme de l'inconnue « $x$ », on peut reformuler le problème tout entier sous la forme d'une seule expression algébrique :

$$(1) \quad 5x - (100 - 5x) + x = 100 - 5x + 8$$

La difficulté dans la reformulation linguistique consiste justement à exprimer, à partir de l'énoncé, l'équation algébrique qui lui correspond. La «mise en équation» n'est pas toujours évidente et peut même être la phase la plus délicate dans l'analyse d'un problème. Cela ne doit pas nous étonner outre mesure. Remarquons en effet que lorsqu'on traduit une phrase d'une langue naturelle  $LN_1$  en une phrase d'une autre langue  $LN_2$ , on ne consulte pas simplement un dictionnaire bilingue. En effet, les premiers travaux de traduction automatique partaient de l'idée que traduire était une affaire essentiellement de dictionnaires bilingues consultés automatiquement. Ce fut là un obstacle important pour la traduction automatique puisqu'une langue naturelle n'est pas réductible, comme l'a amplement fait remarquer F. de Saussure, à un simple système de nomenclatures. La traduction automatique s'est ensuite tournée, avec N. Chomsky, vers une prise en compte plus sérieuse de la syntaxe. De même, dans la thèse de «l'indétermination de la traduction» de Quine (par exemple, [Quine, 1977] Gochet, 1978) «*Gavagai*» exprimé dans une langue indigène signifie-t-il «les oreilles du lapin», «les pattes du lapin», «le lapin entier», ou encore «il court»... La traduction d'un énoncé en langue naturelle dans le formalisme du Calcul des prédicats ne va pas, non plus, de soi. Ainsi, Janet Fodor observe

*no precise and explicit translation rules relating a natural language and a system of logic have ever been formulated. In logic textbooks the principles of translation are presented informally... only rules of thumb are given... The student must rely on his own intuitions.*

[Janet Fodor, "Formal Linguistics and Formal Logic" in John Lyons (éditeur) *New horizons in Linguistics*, Penguin Harmondsworth, p. 207].

Par ailleurs, les spécialistes de l'Intelligence Artificielle ont pu constater, à leur dépens, que les «traductions» des énoncés d'une langue naturelle, en PROLOG, langage de programmation construit sur le modèle de la logique du premier ordre avec variables liées, varient énormément et ne sont donc pas équivalentes d'un traducteur à l'autre. Certes, il existe quelques stratégies de reformulations linguistiques et de transformations – Quine en propose quelques-unes dans *Logique élémentaire et Méthodes de logique* – mais les logiciens, tout comme les informaticiens, n'ont pas donné une procédure univoque de traduction.

Si le langage usuel ne se traduit donc pas automatiquement dans un symbolisme algébrique ni même dans le Calcul des prédicats, que l'on serait en droit de penser être *a priori* plus proche des contraintes sémiotiques des langues naturelles, car il n'existe pas de correspondance terme à terme entre les deux systèmes sémiotiques, cependant, une fois formulé dans un formalisme, le problème initial qui était exprimé en langue naturelle s'est affranchi des lourdeurs, des longueurs de certaines expressions en langue naturelle, et des jeux, parfois croisés, des liens anaphoriques, d'où un plus faible effort de mémorisation pour le calculateur :

*Lorsque les raisonnements et les calculs se font avec des mots, c'est alors surtout que la mémoire devient nécessaire, et souvent nous n'en avons pas assez.*

[Etienne Bonnot de Condillac, *La langue des calculs*, 1798]

On peut parfois se débarrasser des énoncés exprimés longuement en langage ordinaire par des jeux de rappels anaphoriques en ayant recours à des formalisations symboliques plus économiques sur le plan cognitif. Le recours aux symboles opératoires facilite en effet l'effort d'attention qu'il est nécessaire de maintenir pour suivre l'enchaînement des pas de calcul et de raisonnement. W.V.O. Quine [1950, 1965] donne de nombreux exemples de paraphrases réglées par des jeux de relations anaphoriques remplacées par des variables, ce qui lui permet de rapprocher un énoncé, exprimé dans une langue naturelle, de sa «forme canonique», exprimée à l'aide de variables liées, de prédicats et des quantificateurs. Pourtant, si de telles recettes réussissent dans de nombreux cas, elles peuvent parfois conduire à des traductions guère répétibles avec les mêmes résultats.

Une des raisons de l'incompréhension mathématique chez certains sujets humains<sup>21</sup> ne résiderait-elle pas dans cette difficulté cognitive réelle de ne pas avoir la pleine capacité sémiotique (donc langagière) de retrouver tous les liens existants entre des éléments ? Or, pour développer une aptitude propre à comprendre des mathématiques, il faut préalablement savoir analyser, saisir, puis mémoriser, le caractère suivi d'un discours d'abord exprimé dans une langue naturelle avant de le «traduire» dans une langue formalisée, et donc avoir acquis une bonne capacité langagière d'analyse et de compréhension des textes. Dans la comparaison entre langues naturelles et systèmes logiques, il est bon de se rappeler la remarque de Fred Sommers :

*The contemporary logician has virtually lost sight of the fact that natural language is the actual medium of deductive reasoning and that logic is, in an important sense, a part of cognitive psychology. "*

[Fred Sommers, *The Logic of Natural Language*, 1982, p. 11]

Une fois établie l'équation ou l'expression algébrique, on acquiert un nouveau pouvoir en objectivant, par des symboles à la fois présents et distincts, tous les éléments sur lesquels on peut opérer. Ainsi, au lieu de dire

(2,a) le carré d'un binôme est formé de la somme des carrés des deux termes à laquelle on ajoute deux fois le produit du premier terme par le second

il est, de loin, beaucoup plus économique et plus opératoire, sur le plan cognitif, d'exprimer l'équivalence précédente par l'expression symbolique :

$$(2,b) \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

<sup>21</sup> Ou peut, ici, se rappeler l'opposition célèbre de Pascal, entre «l'esprit de géométrie» et «l'esprit de finesse».

Un système de notations algébriques introduit ainsi une véritable «économie de pensée» en rendant purement mécaniques et formels certains procédés de calcul et en les appliquant sans faire nécessairement appel, au cours des calculs, aux «contenus sémantiques» des expressions et aux significations des symboles d'inconnues, donc aux domaines d'interprétation de ces symboles. Les voyelles employées par Viète ou les variables « $x$ », « $y$ », « $z$ » de Descartes sont indépendantes du problème particulier traité. Ce sont des signes d'indéterminés. C'est justement cette indétermination attachée à ces symboles qui hausse l'algèbre à une grande hauteur de généralité. *C'est l'indétermination qui constitue l'algèbre* remarque Condillac. Ce qu'on a fait pour le cas général recouvre un nombre très grand de cas particuliers, voire une infinité. Les formules générales, telles que

$$(3,a) \quad ax + b = 0$$

$$(3,b) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

deviennent des schémas susceptibles de s'appliquer à quantité de cas concrets. Un seul problème résolu dans un formalisme algébrique donne alors une solution pour tous les problèmes de même espèce. Mais ce n'est pas tout. Dès lors que l'indication des opérations à effectuer est exprimée par une formule, cette dernière reste à notre disposition pour l'appliquer autant de fois qu'on voudra. Par exemple, étant donné l'expression  $(x + y)^2$ , on peut la transformer et la ramener à l'expression  $x^2 + 2xy + y^2$  éventuellement plus facile à calculer. On peut aussi appliquer la règle de transformation inverse au second membre de l'identité formelle et revenir ainsi au premier membre qui fait apparaître un seul carré. L'écriture symbolique possède une autre caractéristique. Elle se prête à des opérations qui rendent possibles des transformations formelles et l'établissement de liens entre équations, ce qui reste très difficile, une fois de plus, à maîtriser de façon générale dans une formulation qui serait purement linguistique. Par exemple, avec deux équations simultanées, où « $a$ », « $b$ », « $c$ », « $d$ », « $e$ », « $f$ » sont des constantes et « $x$ » et « $y$ » des inconnues

$$(4) \quad ax + by - c = 0$$

$$dx + ey - f = 0$$

on peut se débarrasser de l'inconnue « $x$ » et se ramener ainsi à une équation plus simple. Pour cela, il suffit de multiplier la première équation par « $d$ » et la seconde par « $a$ ». La suite des opérations s'en déduit afin de calculer « $y$ » en fonction des constantes, puis ensuite calculer « $x$ »...

En fait, ces différents aspects sémiotiques des formalismes algébriques sont intimement liés entre eux. Ils montrent clairement que le symbole algébrique (aussi bien, du reste, le symbole d'opération que le symbole d'inconnue) n'est pas un simple accessoire, une simple désignation abrégative mais que, du point de vue heuristique, il constitue l'essor même du symbolisme algébrique. On peut donc en conclure que la puissance de l'algèbre réside dans le pouvoir dynamique propre aux symboles, à savoir celui de transformer un problème donné en le reformulant de façon telle que ce problème devienne susceptible de recevoir une solution par des procédures opératoires générales. La méthode employée dans la géométrie analytique de Descartes (cf. § 4.1.) n'est rien d'autre que la transformation de tout problème de géométrie plane en un nouveau problème d'algèbre, ce qui conduit à rechercher une solution algébrique qui a, en retour, une interprétation géométrique.



### 3.3 EXTENSION DES DOMAINES D'INTERPRÉTATION

Un autre avantage des formalismes algébriques sur les langues naturelles relève, comme nous l'avons déjà dit, d'une pensée mathématique beaucoup plus élaborée et qui serait pratiquement impossible si nous restions enfermés dans des expressions qui n'utiliseraient que les seuls moyens sémiotiques développés par les langues naturelles. En effet, une équation qui n'a pas que des « vraies solutions », mais également des « fausses solutions », pose un nouveau problème de généralisation abstractive avec la découverte éventuelle de nouveaux êtres mathématiques. Les « fausses solutions » de Descartes, rejetées dans une interprétation contextuelle qui a fixé une fois pour toutes un domaine d'interprétation, conduisent à rechercher des extensions dans ces domaines choisis pour les « fausses solutions », c'est-à-dire à faire en sorte que les racines qui ont été trouvées par une procédure algorithmique, deviennent finalement des « vraies solutions » dans une extension algébrique. Pour cela, bien entendu, il faut que *l'extension du domaine*

- i) soit générale (et non restreinte à un exemple traité) ;
- ii) puisse étendre les propriétés structurales (propriétés des opérations, par exemple, et conservation des ordres entre éléments) du domaine originel au domaine qui en est son extension ;
- iii) puisse conserver le domaine originel comme étant un sous domaine du domaine plus étendu.

Par exemple, lorsqu'on envisage de construire une extension des entiers naturels positifs, il faut construire des entiers négatifs par symétrisation, mais on ne peut pas en rester là, sinon on tomberait sous les sarcasmes de Lazare Carnot rappelés plus haut. Il faut donc définir très proprement les propriétés des entiers négatifs, en particulier lorsqu'ils se composent, au moyen des opérations usuelles, avec des entiers positifs et préciser comment les nouveaux éléments sont organisés les uns par rapport aux autres et également par rapport aux anciens. C'est à ce prix que l'on peut concevoir les entiers naturels positifs, négatifs ou nuls comme une extension algébrique des entiers strictement positifs. Dès lors, l'extension des entiers peut être poursuivie à partir des « fausses solutions » des équations quadratiques. Les racines imaginaires (non dans le sens restrictif de Descartes mais dans un sens plus vaste conduisant aux « nombres complexes » modernes) sont des « fausses racines » dans le domaine des nombres « réels » mais des « vraies racines » dans le domaine des complexes (cf. § 4.).

## 4. POUVOIR HEURISTIQUE DES SYMBOLES

### 4.1. DU LANGAGE GÉOMÉTRIQUE AU LANGAGE ALGÈBRE : DESCARTES

Les mathématiciens grecs résolvait des problèmes par des constructions géométriques, avec les seuls compas et règles, or ces mêmes problèmes paraissent aujourd'hui être de nature algébrique. Nous avons rappelé plus haut que « l'algèbre pythagoricienne » d'Euclide démontrait des identités remarquables par des voies purement géométriques, en assignant aux quantités exprimées des interprétations essentiellement géométriques : une quantité est une mesure d'un segment, un carré est une mesure de l'aire d'une figure (un carré) géométrique et ainsi de suite... Contrairement aux Grecs, Descartes a appliqué consciemment une méthode essentiellement algébrique à la résolution de problèmes de nature géométrique. Avec le système des coordonnées qu'il a inventé et qui sert de cadre de référence (ou de

référentiel), il a su étudier, à l'aide de mises en équations, des figures géométriques pour résoudre les problèmes par une approche purement algébrique. Ce n'est sans doute pas un hasard si Descartes, qui a perfectionné le symbolisme algébrique, a trouvé dans l'algèbre une méthode efficace pour supporter et exprimer les raisonnements relatifs à des problèmes géométriques dont la solution nécessitait souvent une intuition et des représentations spatialisées hors du commun. Son procédé consiste, comme on le sait, à mettre les données géométriques en équations algébriques à la suite de quoi il suffit de procéder aux calculs ordinaires de l'algèbre.

L'algèbre ne donne cependant pas un accès direct à la réalité phénoménale, puisque les connaissances du monde spatial et physique (statique, cinématique, dynamique, description des mouvements, recherche des équilibres...) proviennent essentiellement de la géométrie et de la mécanique. Il faudrait alors traduire les résultats obtenus en résultats géométriques. C'est pourtant la mise en équation des problèmes géométriques qui constitue une étape décisive sur le plan à la fois sémiotique et mathématique.

Sémiotique, d'abord, car les objets géométriques, une fois traduits et représentés par des expressions algébriques, deviennent infiniment plus opératoires et finalement susceptibles de faire apparaître, en retour, des relations géométriques jusque-là insoupçonnées et donc, dans un second temps, d'accroître nos connaissances mathématiques. Du point de vue épistémologique, la découverte d'une similitude entre les deux domaines, le géométrique et l'algébrique, qui semblent apparemment sans rapport, est un véritable acte de création.

*The scientist or the artist takes two facts or experiences which are separate; he finds in them a likeness which had not seen before; and he creates a unity by showing the likeness.*

[Jacob Bronowski, *Sciences and the Human values*, Harper and Row, 1959, p. 35]

Mathématique, ensuite, car la « mise en équation » implique forcément le concept de fonction que Descartes a su utiliser. En effet, toute expression qui décrit par exemple un mouvement dans l'espace se ramène à l'étude d'une fonction «  $y = f(x)$  » : la quantité «  $y$  » est fonction de la quantité «  $x$  » lorsque peut être formulée une loi, ou plus simplement un procédé algorithmique (souvent analytique), qui associe «  $x$  » chaque valeur de la variable  $x$ , une valeur bien définie de  $y$ . Inversement, il est souvent intéressant de mettre en évidence les propriétés géométriques d'expressions algébriques, par exemple avec les coniques associées aux fonctions polynomiales du second degré. On peut également associer des représentations arborescentes aux expressions algébriques et des « feuilles »<sup>22</sup> ou DAGS (dans les représentations sémantiques de la théorie de la compilation en informatique) pour éviter la liaison (implicite) des variables aux feuilles des structures hiérarchisées. On peut également évoquer les études sur la forme géométrique des structures de preuve de façon à en réduire les tailles.

Une question surgit immédiatement lorsque nous examinons le statut sémiotique des deux symboles «  $x$  » et «  $y$  » utilisés traditionnellement dans l'expression «  $y = f(x)$  » d'une fonction, «  $x$  » et «  $y$  » ont-ils le même statut que celui des variables utilisées dans les équations ou dans les identités remarquables de l'algèbre ? C'est un des problèmes que nous devons examiner.

<sup>22</sup> Cf. J.-P. Desclés, 1980.

## 4.2. DE L'ALGÈBRE AU GÉOMÉTRIQUE : EULER, GAUSS, HAMILTON

Le carré de n'importe quel nombre est positif. Le bon sens voudrait que la racine carrée de tout nombre négatif ne puisse pas exister et ne devrait pas exister. Or, le mathématicien italien Cardan (1501-1576) a été assez audacieux pour se servir de racines négatives et utiliser l'impossibilité précédente comme outil de calcul. Il voulait que l'équation

$$(1) \quad x^2 = p$$

ait toujours une solution, même lorsque  $p$  est négatif. On a le sentiment, ici plus qu'ailleurs, que la *nécessité de trouver une solution* entraîne le mathématicien vers d'autres contrées qu'il lui faut d'abord découvrir puis, ensuite, explorer. Les nombres imaginaires ont ainsi fait une apparition en faisant toutefois scandale à l'époque. Descartes affirmait, en son temps, que ladite équation (1) n'avait pas de solution lorsque « $p$  est négatif. La «racine carrée de « $(-1)$  est l'imaginaire favori qu'Euler a représenté par le symbole « $i$  qui est toujours en usage<sup>23</sup>. On peut discuter longtemps sur «la réalité et sur «l'existence de ce nombre mais une fois qu'on en a admis le droit de cité dans le monde mathématique, on découvre alors des rapports dont on ne se doutait pas, comme par exemple la relation avec l'exponentiation et les fonctions trigonométriques (où « $e$  est la base du «logarithme naturel)»

$$(2) \quad e^{ix} = \cos x + i(\sin x)$$

Cette formule d'Euler est considérée comme l'une des plus élégantes des mathématiques. Pour de nombreux problèmes non mathématiques (par exemple en électricité), une fois mis en équation dans le formalisme algébrique, le recours aux imaginaires et au symbole « $i$  est plus qu'utile. Ce qui est admirable, c'est que, de même que l'inconnue « $x$  posée comme telle au début d'un calcul, participe aux opérations et aux transformations formelles pour finalement disparaître lorsque la solution est trouvée, le « $i$  imaginaire participe ainsi aux opérations formelles pour établir de nouveaux rapports et, dans certains cas, disparaître sans laisser la moindre trace dans la solution qui est trouvée.

En incorporant la racine d'un nombre négatif dans le système des nombres, il a été possible d'inventer le système des nombres complexes qui sont tous de la forme générale « $a + ib$ . Gauss en a donné une représentation géométrique dans le plan. Plus tard, Hamilton conçoit par la suite des nombres plus généraux de la forme « $q = x + iy + jz$  où le triplet (« $x$ , « $y$ , « $z$ ) représente les coordonnées d'un point dans l'espace euclidien à trois dimensions. Il introduit, par la suite, un hypothétique « $q$  défini par des propriétés purement formelles ( $ij = -ji = k$ ), d'où l'invention des quaternions de la forme « $x + iu + jv + kw$ .

Les notations mises au point par l'algèbre ont permis des développements de notations opératoires pour le calcul infinitésimal de Leibniz, ce qui nécessiterait une

---

<sup>23</sup> Le terme d'imaginaire provoque chez les non mathématiciens certaines confusions et de grandes libertés conceptuelles comme en témoigne cette citation. *Si vous me permettez d'utiliser l'une de ces formules qui me viennent quand j'écris mes notes, la vie humaine pourrait être définie comme un calcul dans lequel zéro serait irrationnel. Cette formule n'est qu'une image, une métaphore mathématique. Quand je dis «irrationnel», je ne me réfère pas à quelque état émotionnel insondable mais précisément à ce qu'on appelle un nombre imaginaire [...]* (de J. Lacan, cité par A. Sokal et J. Bricmont, *Impostures intellectuelles*, Paris, Éditions Odile Jacob, 1997, p. 31).

étude toute particulière et systématique du jeu des symboles employés pour représenter les conceptualisations mathématiques exprimées par ces écritures formalisées.

## 5. LA VARIABLE DANS L'EXPRESSION D'UNE FONCTION

La variable est utilisée non seulement dans la mise en équation d'un problème mais également en Analyse avec «Les fonctions numériques d'une variable réelle» puisque son objet d'étude est, au moins au départ, l'étude des propriétés de ces fonctions – sont-elles continues, dérivables, intégrables, représentables de façon analytique par des séries... Rappelons que la notion de fonction s'est lentement dégagée à partir des conceptions de Leibniz et d'Euler.

### 5.1. LA NOTION INTUITIVE DE FONCTION COMME VARIATION CONTINUE

Pour Leibniz (1673), la *functio* désigne les grandeurs dont les variations sont liées par une loi. Pour Euler, la loi doit représenter analytiquement la fonction

*Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocumque composita ex illa quantitate variabilis et numeris seu constantibus.*

[La fonction d'une quantité variable est l'expression analytique formée de façon quelconque à partir des quantités variables et de nombres ou de quantités constantes].

Au XVIII<sup>e</sup> siècle (cf., entre autres, [Dhombres, 1978, Dieudonné, 1978 – Kline, 1972 – Taton, 1958]) une «vraie» fonction est «continue», c'est-à-dire représentable par les extensions analytiques pour chaque domaine de la variable («*Natura non facit saltus*» disait Leibniz). Selon cette conception intuitive, qui correspond aux caractérisations analytiques des fonctions numériques usuelles, les variables « $x$ » et « $y$ » interviennent dans la caractérisation même d'une fonction – elles sont donc liées à la notion de variation – la *variation du résultat*, désigné par « $y$ » et appelé «valeur de la fonction», *dépend étroitement des variations imposées* à « $x$ », appelé «argument (variable) de la fonction». L'écriture usuelle des fonctions, sous la forme « $y = f(x)$ » permet ainsi de représenter les variations de la valeur de la fonction à partir des variations de son argument – ainsi « $y = \sin(x)$ », « $y = x^2$ », « $y = 3x^2 + 5x$ » sont des exemples de descriptions analytiques de fonctions numériques à valeurs réelles. Cependant, à côté des «vraies» fonctions («continues» et représentables par des expressions analytiques), Euler admitra des fonctions qui sont occasionnellement «discontinues» ainsi que des fonctions arbitraires, c'est-à-dire des relations exprimées par une courbe tracée sur le plan à la main («*libertus manus dictus*»). Les travaux de Fourier et de Cauchy, entre autres, permettront de dissocier les concepts de continuité et d'analyticité du concept général de fonction.

*Soient a et b deux valeurs fixes et soit x une quantité variable telle que x doit prendre successivement toutes les valeurs entre a et b. Alors il correspond à chaque x, un y unique et fini et cela de telle façon que, quand x parcourt l'intervalle de a à b, y = f(x) change peu à peu également [...]. Dans ce cas-là, il n'est pas nécessaire que y, dans cet intervalle, dépende par la même loi de x. En effet, on a pas besoin de penser à une dépendance qui peut être exprimée par des opérations mathématiques. La représentation géométrique, c'est-à-dire considérant x et y comme des abscisse et ordonnée, présente une fonction continue comme une courbe continue.*

[Dirichlet, 1829]

La généralisation de la notion de fonction doit donc dépasser ce cadre intuitif associé aux variations conjointes de l'argument et du résultat de la fonction. En étudiant sérieusement les conditions pour qu'une série de Fourier représente une fonction, Dirichlet donne un exemple d'une fonction dont les discontinuités forment un ensemble partout dense des réels et dont il n'y a aucun sens à calculer les coefficients de Fourier. C'est donc une fonction « arbitraire » (au sens d'Euler)

*égale à une constante déterminée  $c$  lorsque la variable  $x$  obtient une valeur rationnelle et égale à une autre constante  $d$  lorsque cette variable est irrationnelle.*

[Dirichlet, 1829]

## 5.2. LA FONCTION PENSÉE « COMME UN ENSEMBLE »

La conception moderne de Dirichlet aboutit finalement à l'appréhension générale d'une fonction *définie par son graphe*. C'est ainsi qu'on la trouve exprimée à partir de l'ouvrage de Nicolas Bourbaki<sup>24</sup>

*Un tel ensemble  $f$  est appelé fonction définie sur  $a$ , à valeurs dans  $b$ , ou application de  $a$  dans  $b$ , ou encore famille d'ensembles indexée par  $a$ .*

[J.L. Krivine, *Théorie axiomatique des ensembles*, 1969, p. 21]

Ainsi, l'énoncé «  $f$  est une application de  $a$  dans  $b$  », qui s'écrit également, en reprenant les notations de Krivine :

$$(1) \quad f \subseteq a \rightarrow b$$

est équivalente à la conjonction des trois propositions suivantes :

- $$(2) \quad \begin{aligned} (i) \quad & f \subseteq a \times b \\ (ii) \quad & (\forall x) [x \in a \Rightarrow (\exists y) [(y \in b) \wedge ((x,y) \in f)]] \\ (iii) \quad & (\forall x) (\forall y) (\forall y') [((x,y) \in f) \wedge ((x,y') \in f) \Rightarrow (y = y')] \end{aligned}$$

Cette définition retient une approche cognitive de la fonction *conçue comme un ensemble* : dire que l'on a une fonction de  $a$  vers  $b$ , c'est se donner un ensemble  $f \subseteq a \times b$ , partie de l'ensemble produit  $a \times b$  : un tel ensemble est un ensemble de couples  $(x,y)$  tels qu'à chaque élément  $x$  de  $a$  correspond, dans l'ensemble  $b$ , *un unique élément*, appelé « image de  $x$  ». Peut-on concevoir autrement une fonction ? La conceptualisation *atemporelle* de la fonction « comme ensemble » est-elle la seule possible ? Exprime-t-elle complètement la notion plus intuitive et plus constructive de fonction ? Nous verrons plus loin que non.

## 5.3. UNE FONCTION NON NUMÉRIQUE : LE « CONCEPT » MATHÉMATISÉ PAR G. FREGE

La notion de fonction, définie pour les besoins de l'Analyse par Dirichlet, a été élargie par G. Frege [1879-1884-1893] au domaine des entités non numériques, en particulier aux entités logiques. Les connecteurs logiques « et », « ou », « si ... alors », « équivaut à » ... sont des opérations binaires définissables par des fonctions ayant pour domaine un ensemble de couples des « valeurs de vérité », soit « le-vrai » ou « le-faux », et pour co-domaine une « valeur de vérité ». Cette conception fonctionnelle des

<sup>24</sup> N. Bourbaki, *Eléments de la théorie des ensembles*, E, II, 1970, p. 9-13.

connecteurs logiques conduit, avec la négation, à une algèbre de Boole, mais elle n'épuise pas les entités qui relèvent manifestement de la logique. En effet, Frege [1893] oppose les «objets» aux «fonctions», les premiers étant «saturés» et «complets», les secondes étant «non saturées» et «incomplètes»

*Je considère comme étant des objets chaque chose qui n'est pas une fonction, par exemple, des nombres, des valeurs de vérité et des « parcours de valeurs » [...] Les noms d'objets – les noms propres – dès lors n'impliquent aucune place d'argument ; ils sont saturés, comme les objets eux-mêmes.*

[Traduit de G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, § 2, 1893]

Cette distinction n'est pas sans évoquer la distinction plus ancienne entre «catégorèmes» (expressions saturées) et «syncatégorèmes» (expressions non saturées). La non saturation, ou non complétude, d'une fonction est représentée, par Frege, sous la forme d'une expression sémiotique d'un langage artificiel construit et repris, avec cependant d'autres conventions notationnelles par les logiciens et mathématiciens qui l'ont suivie. Cette expression de la non saturation fait explicitement appel à la notion de variable. Ainsi, l'expression

$$(3,a) \quad 2 + (2x^2)$$

décrit «la valeur d'une fonction» où le symbole « $x$ », qui y apparaît sous forme d'une occurrence, «représente de façon indéterminée» des objets. Si nous substituons à « $x$ » les numéraux «1», «2», «3»..., nous obtenons la suite des expressions

$$(3,b) \quad 2 + (2.1^2), 2 + (2.2^2), 2 + (2.3^2)...$$

qui dénote la suite des nombres

$$(3,c) \quad 4, 10, 20...$$

Ainsi, la dénotation de l'expression qui décrit la fonction précédente contient l'ensemble des couples successifs<sup>25</sup>

$$(3,d) \quad \{(0,2), (1,4), (2,10), (3,20),...\}$$

Cependant, l'ensemble (3,d) des couples *n'est pas la fonction elle-même* car l'essence de cette fonction se manifeste par la correspondance qu'elle établit entre d'une part, la suite des nombres – en fait les dénotations des symboles numéraux – substituables au symbole de la variable « $x$ » et d'autre part, la suite des nombres qui apparaissent après substitution des numéraux à « $x$ », c'est-à-dire comme étant la suite de la dénotation attachée à l'expression (3,a). Pour exprimer la non saturation de l'expression de la valeur de la fonction, nous pourrions utiliser une notation comme :

$$(3,e) \quad 2 + 2.( )^2$$

où le symbole « $()$ » est l'indication d'une «place vide» ou d'une «place non saturée» dans l'expression de la fonction. Il est cependant plus usuel et plus commode d'exprimer cette «place vide» en faisant appel à une «variable» qui en prend la place dans l'expression de la valeur d'une fonction, en représentant un *objet quelconque*<sup>26</sup> du

<sup>25</sup> Cette conception ne s'éloigne donc pas d'une conception de la fonction qui serait purement ensembliste.

<sup>26</sup> On doit distinguer explicitement «objet quelconque» et «objet indéterminé», distinction que nous reprendrons et expliciterons plus loin (au § 8). Nous devons remarquer que l'on peut «représenter de

domaine de variation de la fonction, c'est-à-dire du domaine des arguments. Chaque occurrence de « $\square$ » représente une place où des «objets», et plus généralement des expressions symboliques du langage lui-même, peuvent y être substitués. Ainsi, l'expression suivante :

$$(4,a) \quad (x + 2.z)^2 + x$$

sert à décrire la valeur d'une fonction. Elle contient des places non saturées, qualifiées «ouvertes», lesquelles sont «liées entre elles» par des liens implicites d'identification<sup>27</sup>, ce qui revient à dire que l'expression précédente pourrait être réécrite avec des liens explicites par

$$(4,b) \quad \overbrace{((x) + 2.(z))^2 + (x)}$$

Rappelons que, d'une façon générale, on doit distinguer l'opération de *remplacement* et l'opération de *substitution* d'une expression à une variable. La *substitution* consiste à *remplacer toutes* les occurrences d'une variable liées entre elles par la même expression, en évitant cependant les télescopages qui aboutiraient à lier des variables qui, avant la substitution, n'étaient pas liées – ce qui aurait pour effet un changement de signification. Le *remplacement* d'une variable consiste à *remplacer seulement certaines* de ses occurrences et pas nécessairement toutes. Ainsi, dans l'expression (4,b), la *substitution* d'un symbole (ou plus généralement d'une expression) à la variable « $\square$ » consiste à *remplacer systématiquement toutes les occurrences* de « $\square$ » (dans l'exemple, les deux occurrences de « $\square$ ») par le même symbole (le même objet ou plus généralement la même expression du langage) ; de façon indépendante, on peut remplacer « $\square$ » par un autre symbole ou une autre expression.

Frege – en particulier dans ses *Grungesetze* [1893) – appelle «places d'arguments» les places vides qui apparaissent dans une expression algébrique ou, plus généralement dans une expression formelle. Les expressions qui sont susceptibles d'occuper ces «places d'arguments» sont appelées «arguments de la fonction». Enfin, l'expression construite à la suite du processus de substitution des arguments aux différentes places d'arguments, en tenant compte des liaisons éventuelles entre ces places, est appelée «valeur de la fonction pour l'argument substitué à toutes les occurrences de la variable « $\square$ » dans l'expression». Une expression comme (4,a) avec des variables qui représentent les places d'expressions – quelconques – substituables à ces places, est une façon de nommer une fonction. Remarquons que l'argument d'une fonction ne fait pas partie de la fonction elle-même; cet argument est cependant nécessaire lorsqu'on veut construire la valeur de la fonction en «complétant les places laissées vides» dans l'expression de la fonction.

---

façon indéterminée des objets, en particulier des objets quelconques, sans que pour autant ces objets soient, par eux-mêmes, «indéterminés».

<sup>27</sup> La liaison est une opération d'identification qui étant appliquée à un opérande recherche un antécédent de même nature, cette opération construit une relation binaire entre deux occurrences. Dans ce cas, comme l'a vu Quine, l'opération d'identification entre une occurrence d'une variable et une occurrence précédente d'une variable de même nom doit être rapprochée de l'opération d'anaphore des langues naturelles.

#### 5.4. LA FONCTION REPRÉSENTÉE À L'AIDE DE LA $\lambda$ -NOTATION DE CHURCH

Pour résumer, dans l'expression générale de la valeur d'une fonction, présentée usuellement par l'écriture :

$$(5) \quad y = f(x)$$

nous avons plusieurs rôles associés à la notion de variable

1. le symbole « $\lambda x$ » sert à désigner

- i) *l'incomplétude* de la fonction, qui est en elle-même non saturée, avec des places vides exprimées par les différentes occurrences de « $\lambda x$ », liées entre elles implicitement par un lien d'identification ;
- ii) *le moyen analytique pour construire l'expression de la valeur de la fonction* en rendant aisément reconnaissables les places d'arguments, auxquelles il est possible de *substituer* des arguments *quelconques*, sans pour autant altérer l'essence de la fonction

2. le symbole « $x$ » est une variable qui exprime *une entité indéterminée* dont le mode de construction (et de variation) est décrit par l'expression de la fonction.

Si « $\lambda x$ » est associé à la notion *d'entité quelconque* substituable à certaines places, « $x$ » est associé à la notion *d'entité indéterminée* qui varie avec les choix opérés par les substitutions opérées aux occurrences de la variable « $\lambda x$ ». Lorsqu'un argument sera substitué à la variable « $\lambda x$ », la dénotation de « $x$ » deviendra alors mieux déterminée. Lorsque l'argument est une entité entièrement déterminée (par exemple un objet référentiel parfaitement connu), alors l'objet calculé et construit par la fonction appliquée à son argument devient un objet complètement déterminé. On peut remplacer « $x$ » par l'expression qui dénote cet objet parfaitement déterminé.

La définition d'une fonction devient encore plus explicite avec la  $\lambda$ -notation introduite par A. Church [1951] qui propose une notation symbolique explicite permettant d'exprimer clairement, par un jeu d'écriture opératoire sur les symboles (et non par la seule interprétation contextuelle), la distinction nette à établir entre :

- i) la *fonction pensée pour elle-même*, décrite par une écriture sémiotique qui représente une procédure analytique de construction de la valeur de la fonction pour un argument quelconque ;
- ii) *l'expression de la valeur de la fonction pour un argument désigné par une variable*.

La *fonction pensée pour elle-même* est maintenant notée<sup>28</sup>

$$(6,a) \quad \lambda x . [A(x)]$$

<sup>28</sup> La notation « $\lambda x \rightarrow A(x)$ », plus usuelle dans les ouvrages de mathématiques, joue un rôle analogue à la  $\lambda$ -notation. En effet, le nom de la variable « $\lambda x$ » n'intervient pas en tant que tel, la variable est par conséquent «*muette*» et n'assume directement aucun rôle opératoire mais simplement l'indication d'une place pour les substitutions potentielles. Pour une présentation du  $\lambda$ -calcul, (cf. Church [1951] Barendregt [1981]) pour une application à l'informatique, (cf. Stoy [1977]) pour une application à la linguistique, (cf. par exemple Cann [1993]).



où « $A(x)$ » est une expression (algébrique ou formelle) dans laquelle apparaissent des occurrences de la variable « $x$ ». Le symbole « $\lambda$ » est un opérateur (dit d'abstraction) qui assume deux rôles

2. lier entre elles toutes les occurrences de la variable « $x$ » dans  $A(x)$
3. «abstraire», à partir de l'expression « $A(x)$ », l'expression analytique de la fonction.

Quant à «la valeur de la fonction pour l'argument « $a$ », elle est maintenant désignée par l'expression, appelée le *corps de la fonction*

$$(6,b) \quad A(x)$$

En notant conventionnellement l'application d'une fonction à son argument « $a$ » à l'aide d'une simple concaténation, nous obtenons

$$(6,c) \quad (\lambda x) . [A(x)] (a) = [a/x]A(x) = A[a]$$

où l'expression « $[a/x](A(x))$ » (ou « $A[a]$ ») désigne le résultat de la substitution de l'argument « $a$ » à toutes les occurrences de la variable « $x$ » qui sont liées par l'opérateur « $\lambda x$ » dans l'expression « $A(x)$ ». Nous avons, par exemple

$$(6,d) \quad (\lambda x) . [A(x)] (x) = [x/x](A(x)) = A[x] = A(x)$$

Nous distinguons ainsi clairement, et par la notation sémiotique elle-même, d'un côté, « $\lambda x . [A(x)]$ », c'est-à-dire «la fonction prise pour elle-même» et d'un autre côté, « $A(x)$ », c'est-à-dire «la valeur de la fonction pour l'argument « $x$ »». L'abstraction opérée par l'opérateur « $\lambda x$ » construit «la fonction prise pour elle-même» à partir de «l'expression de la fonction pour l'argument « $x$ »variable».

Reprenons l'expression de la fonction décrite par l'expression (4,a) donnée plus haut. On peut maintenant la noter :

$$(7) \quad (\lambda x) . [(x + 2.z)^2 + x]$$

où l'opérateur « $\lambda x$ » établit une liaison des différentes occurrences de la variable « $x$ » et opère une abstraction, à partir de l'expression « $(x + 2.z)^2 + x$ » qui contient des occurrences de la variable « $x$ ». On remarquera que dans cette expression de la fonction, seules les occurrences de « $x$ » ont été liées par l'abstraction alors que l'occurrence de « $z$ » ne l'est pas. « $z$ » présente une occurrence «libre» tandis que « $x$ » présente des occurrences «liées».

## 5.5. EXTENSION ET INTENSION D'UN CONCEPT

Ayant introduit la  $\lambda$ -notation de Church, nous pouvons de nouveau revenir aux fonctions que la logique manipule. Pour Frege, comme nous l'avons déjà dit, les concepts sont des fonctions à valeurs dans l'ensemble des valeurs de vérité {«vrai», «faux»}. L'expression

$$(8,a) \quad (\lambda x) . [x^2 = 4]$$

désigne une fonction où la variable « $x$ » renvoie «de façon indéterminée» au domaine des nombres du domaine. Le résultat, après substitution d'une valeur numérique à la variable, est une valeur de vérité. Cette fonction a pour co-domaine, c'est-à-dire

l'ensemble des résultats possibles, l'ensemble des valeurs de vérité. Prenons, par exemple, la suite des nombres :

$$(8,b) \quad 0, 1, 2, 3, \dots$$

après substitution de chacun de ces arguments à la variable « $x$ » dans l'expression « $x^2 = 4x$ », nous obtenons des expressions qui, toutes, dénotent une des valeurs de vérité

$$(8,c) \quad \begin{array}{ll} \langle 0^2 = 4 \rangle & \text{dénote} & \langle \text{faux} \rangle \\ \langle 1^2 = 4 \rangle & \text{dénote} & \langle \text{faux} \rangle \\ \langle 2^2 = 4 \rangle & \text{dénote} & \langle \text{vrai} \rangle \\ \langle 3^2 = 4 \rangle & \text{dénote} & \langle \text{faux} \rangle \end{array}$$

L'expression « $x > 1$ » est une expression dont la valeur est « $\text{vrai}$ » pour les nombres strictement supérieurs à l'unité substitués à « $x$ » et est « $\text{faux}$ » pour tous les autres entités, que ce soient des nombres négatifs ou nul, ou encore tout autre objet non numérique.

Frege conceptualise comme de véritables fonctions mathématiques, étendues aux domaines et co-domaines non numériques, les « $\text{notions logiques}$ » suivantes :

un *concept*, ou son expression linguistique par un prédicat lexical unaire (souvent un verbe « $\text{monoactanciel}$ » dans la terminologie du linguiste Lucien Tesnière<sup>29</sup>), est une fonction avec une place d'arguments, les valeurs sont toujours soit « $\text{vrai}$ », soit « $\text{faux}$ »

une *relation* binaire (ternaire,...), ou son expression linguistique sous la forme d'un prédicat lexical binaire (ternaire,...) ou d'un verbe à deux (à trois,...) « $\text{actants}$ », est une fonction à deux (à trois,...) « $\text{places d'arguments}$ », les valeurs obtenues, après la substitution de tous les arguments, sont toujours soit « $\text{vrai}$ », soit « $\text{faux}$ »

un *quantificateur* est une fonction qui a pour domaine les prédicats (ou plus généralement les relations) et pour co-domaine les expressions qui dénotent soit « $\text{vrai}$ », soit « $\text{faux}$ » (ou plus généralement des relations d'arité moindre)

un *jugement*<sup>30</sup> (assertion ou négation) est une fonction qui a pour argument toute expression susceptible d'être « $\text{vrai}$ » ou « $\text{faux}$ ».

Ainsi, les concepts formulés par des expressions d'une langue naturelle par

$$(9,a) \quad \langle \text{être racine carrée de } 4 \rangle$$

$$(9,b) \quad \langle \text{être quelque chose dont quatre fois le carré est } 16 \rangle$$

désignent des fonctions représentées au moyen des  $\lambda$ -expressions suivantes :

$$(10,a) \quad (\lambda x) . [x^2 = 4]$$

<sup>29</sup> « $\text{Actant}$ » est pris au sens donné par le linguiste L. Tesnière dans ses *Éléments de syntaxe structurale*, Paris, Klincksieck, 1966. Un actant est un terme linguistique qui joue, dans une phrase élémentaire ou proposition associée, à la fois un rôle syntaxique (sujet de, objet direct de, objet indirect de...), un rôle grammatical (agent, patient, bénéficiaire...) et enfin un rôle référentiel.

<sup>30</sup> Le jugement assertif est noté par le symbole « $\langle \text{ } \rangle$ » (lire « $\langle \text{ } \rangle$  est vrai que...» ou « $\langle \text{ } \rangle$  est démontré que...»).

$$(10,b) \quad (\lambda x) . [4x^2 = 16]$$

Ces concepts sont *a priori* différents même si le concept qui est exprimé par la fonction

$$(11) \quad (\lambda x) . [(x^2 = 4) = (4x^2 = 16)]$$

dénote en fait la valeur «vrai» pour chacun des arguments<sup>31</sup>.

Lorsqu'un objet est argument d'un concept donnant pour valeur «vrai», nous disons que «le concept s'applique à l'objet» ou, pour reprendre l'expression de Frege, que «l'objet tombe sous le concept». Ainsi, le concept exprimé par « $(\lambda x) . [x > 1]$ » s'applique à «2» et «3» qui tombent sous ce même concept.

À un concept désigné par le symbole « $f$ » on associe son *extension*, qui est un objet (saturé), désigné par « $\text{Ext}(f)$ ». L'extension de 'f' est en fait la classe de «tous les objets auxquels s'applique le concept « $f$ » ou en d'autres termes de «tous les objets qui tombent sous « $f$ »», c'est-à-dire

$$(12) \quad \text{Ext}(f) = \{z \mid f(z) = \text{vrai}\}$$

Remarquons que les deux concepts exprimés respectivement par « $(\lambda x) . [x^2 = 4]$ » et « $(\lambda x) . [4x^2 = 16]$ » ont *la même extension* lorsque la variable « $x$ » est astreinte à parcourir le domaine des nombres réels :

$$(13) \quad \text{Ext}(\lambda x . [x^2 = 4]) = \text{Ext}(\lambda x . [4x^2 = 16]) = \{-2, +2\}$$

Bien que *ces deux concepts aient une même extension*, ils s'expriment par des expressions différentes et *possèdent donc des significations différentes*. Nous dirons alors qu'ils sont simplement égaux «en extension» mais pas «en intension».

Contrairement à ce qui a été parfois affirmé à son propos, Frege n'est pas un logicien purement «extensionnaliste».

*Je pense qu'on pourrait dire tout simplement «concept» à la place de «extension du concept». Mais on s'exposerait à une double objection :*

1) *Ce serait en contradiction avec ce que j'ai précédemment affirmé [...]*

2) *Des concepts peuvent avoir même extension sans coïncider.*

*Je pense qu'on peut lever ces deux objections mais ceci nous entraînerait trop loin.*

[note du § 69 in *Die Grundlagen der Arithmetik*, 1879 ; traduction de C. Imbert in *Fondements de l'arithmétique*, Seuil, p. 194.

En effet

*Deux concepts peuvent avoir la même extension sans coïncider.*

*Le concept est logiquement premier par rapport à son extension et je regarde comme futile l'essai de fonder l'extension d'un concept en tant que classe (en s'appuyant) non sur le concept mais sur les choses individuelles.*

<sup>31</sup> Le concept « $(\lambda x) . [(x^2 = 4) \rightarrow (4x^2 = 16)]$ » dénote également «vrai» pour chaque argument mais le concept « $(\lambda x) . [(x^2 = 4) \wedge (4x^2 = 16)]$ » dénote toujours «faux».

<sup>32</sup> Pour les concepts (mais pas pour les fonctions en général), les notions d'extension et de «parcours des valeurs» (ou graphe de la fonction) sont étroitement canoniquement associées.

*L'extension d'un concept est constituée dans l'être, non dans les individus mais par les concepts eux-mêmes [...] Je tiens en fait le concept pour logiquement antérieur à son extension [...] Le concept prend ainsi la préséance logique sur son extension.*

Il faut donc admettre que deux concepts égaux en extension sont représentés « $\text{En extension}$ » par la même fonction  $\square$  ils auront, pour les mêmes arguments, la même valeur, soit la valeur « $\text{Vrai}$ », soit la valeur « $\text{Faux}$ ». Ils sont donc non distinguables « $\text{En extension}$ ». Cependant, il arrive souvent que deux concepts peuvent exprimer des « $\text{Idées}$ » très différentes – en empruntant le terme « $\text{Idée}$ » à la *Logique de Port Royal* et aux philosophes de Lumières<sup>33</sup> – alors que les concepts qui les expriment restent identiques « $\text{En extension}$ ». Prenons par exemple les trois concepts suivants  $\square$

(14,a) « $\text{Est le double de l'unité}$ »  $\square$

(14,b) « $\text{Est premier et être pair}$ »  $\square$

(14,c) « $\text{Est le successeur immédiat de l'unité}$ »  $\square$

Ces trois concepts ont même extension, à savoir le numéral « $\text{2}$ ». Cependant, ils n'expriment pas la même « $\text{Idée}$ » puisque le premier appréhende le numéral « $\text{2}$ » à partir de l'opération de duplication, le second par la conjonction des concepts de parité et de nombre premier, le troisième à partir de l'opération de succession immédiate. Ces trois concepts conduisent donc à des représentations cognitives différentes  $\square$  ils construisent, en tant que fonctions, les mêmes valeurs de vérité à partir des mêmes arguments mais par des processus opératoires (et cognitifs) distincts. Nous dirons que ces trois concepts *coïncident en extension* mais diffèrent *en intension* (ou *en compréhension* pour reprendre la terminologie française classique issue de la *Logique de Port Royal*). Donnons un exemple de deux prédicats (concepts) dont les extensions sont identiques mais dont les intensions diffèrent  $\square$  *être un mâle de la chèvre* et *être un bouc*. De même, les deux concepts « $\text{être un bipède sans plumes}$ » et « $\text{être un animal raisonnable}$ » coïncident en extension (c'est la classe des humains) mais certainement pas en intension, car les significations qui y sont attachées diffèrent au moins par les modes d'appréhension, de construction et de catégorisation des objets qui tombent dessous.

## 5.5. EXTENSION ET INTENSION D'UNE FONCTION

Revenons maintenant à l'expression générale une fonction quelconque désignée par la  $\lambda$ -notation de Church « $\lambda x . f(x)$ ». Nous lui associons la relation<sup>34</sup> suivante  $\square$

(14)  $(\lambda x) . (\lambda y) . [y = f(x)]$

dont l'extension, étendue aux relations, est définie comme suit :

(15)  $\text{Ext}((\lambda x) . ((\lambda y) . [y = f(x)])) = \{(x,y) \square (y = f(x)) = \text{«Vrai»}\}$

Cette extension constitue « $\text{le parcours des valeurs}$ » (*Werthverlauf* chez Frege), c'est-à-dire ce qui est appelé usuellement « $\text{le graphe de la fonction}$ »<sup>35</sup>. Deux fonctions

<sup>33</sup> Cf. S. Auroux [1993], et sur *La Logique de Port Royal*, J.-C. Pariente [1985].

<sup>34</sup> Au sens technique défini plus haut à partir de Frege.

<sup>35</sup> Rappelons que le « $\text{le graphe d'une fonction}$ » est un ensemble de couples  $(x, y)$  où la valeur « $\text{y}$ » dépend

peuvent ainsi *coïncider en extension*, donc avoir le même graphe, *sans pour autant fournir les mêmes moyens analytiques de construction des valeurs*<sup>36</sup>. Prenons, pour exemples, les deux  $\lambda$ -expressions suivantes qui représentent le calcul de la «factorielle», définie sur le domaine des entiers naturels :

$$(16,a) \quad n! = \lambda n . [n \times (n - 1) ! \text{ si } (n > 1) \text{ et } 1 \text{ pour } n = 0]$$

$$(16,b) \quad n! = \lambda n . [n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1]$$

La première expression (16,a) permet de calculer la factorielle « $n!$ » à partir d'une définition récursive; la seconde (16,b) calcule la factorielle par une voie itérative. Ces deux fonctions calculent pourtant *exactement les mêmes valeurs pour les mêmes arguments*, elles sont donc identiques «en extension» mais les modes opératoires de calcul et de construction des valeurs successives diffèrent «en intension».

En informatique, deux programmes, qui calculent une même fonction en associant aux mêmes entrées les mêmes sorties, peuvent cependant nettement se différencier par la façon dont ces deux programmes calculent la fonction (par exemple, l'un de façon itérative, l'autre de façon récursive); les espaces nécessaires au stockage des résultats intermédiaires et les temps de calcul peuvent varier considérablement. Ces deux programmes coïncident alors en extension mais pas en intension. Évidemment, pour l'informaticien, confronté à *l'effectivité réelle des calculs* et non pas à la seule *effectivité potentielle* – définie, par exemple, à l'aide du concept de «machine (universelle) de Turing» ou à l'aide des algorithmes de Markov – ce qui lui paraît être objet d'une étude formelle de la complexité, c'est l'équivalence des programmes en intension et pas seulement en extension, c'est-à-dire la façon dont une fonction est calculée et non pas seulement la fonction. Il apparaît maintenant que la définition ensembliste d'un concept, ou plus généralement d'une fonction, n'est pas suffisante, du moins dès que l'on veut différencier deux concepts ayant même extension ou différencier les modes de calcul et de construction de deux fonctions ayant même graphe, donc même extension.

## 5.6. LA FONCTION PENSÉE «COMME UN OPÉRATEUR»

Nous avons vu (au § 5.2) qu'une fonction peut être appréhendée, à l'intérieur de la théorie des ensembles, par son graphe, c'est-à-dire par l'ensemble de tous les couples < argument, image correspondante >. Cette vue cognitive conceptualise une fonction «du point de vue de Sirius», c'est-à-dire comme étant déjà entièrement construite, par conséquent *en dehors de toute temporalité et de tout processus opératoire de construction*. Or, en revenant à la notion originelle et intuitive de fonction de l'Analyse du XVIII<sup>e</sup> siècle (cf. § 5.1), la fonction était beaucoup plus «pensée» comme une procédure de transformation qui, étant appliquée à un argument, construit l'image correspondante. La fonction doit alors être appréhendée, non point par l'ensemble *sub specie eternitatis* des couples < argument, image correspondante >, hors de tout procédé générique, mais plutôt comme un processus opératoire qui, étant appliqué à un argument, construit l'unique résultat qui lui est alors associé.

---

(fonctionnellement) de la valeur assignée à « $n!$ » (cf. pour la «fonctionnalité» le § 5.2. (2)).

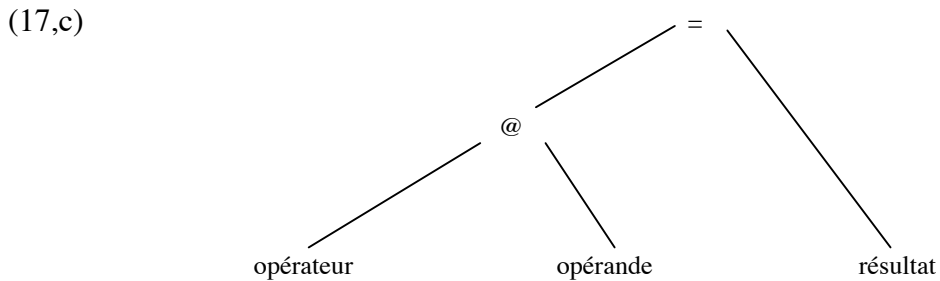
<sup>36</sup> Ces expressions analytiques, représentées par des  $\lambda$ -expressions différentes, conduisent à des processus opératoires distincts. Ainsi, deux processus opératoires distincts peuvent construire le même graphe déterminé par les deux  $\lambda$ -expressions qui représentent les deux processus opératoires; ils coïncident en extension mais pas toujours en intension, car les procédures de construction de ces graphes sont distincts.

On peut donc, en changeant légèrement de point de vue, *appréhender une fonction comme un opérateur* (ou «comme un processus opératoire» ou encore «comme une règle») qui construit un «résultat-image» à partir d'un «opérande-argument». Pour cela, il faut se donner, en tant qu'opération primitive dans la théorie des «fonctions-comme-opérateurs», *l'opération binaire d'application*. L'application construit un unique résultat à partir de tout couple < opérateur, opérande >. Nous représentons l'opération d'application, notée «@», par l'expression (17,a) ou par le schéma déductif (17,b)

(17,a) @ (opérateur, opérande) \_ résultat

(17,b) opérateur,                      opérande  
 -----  
 résultat

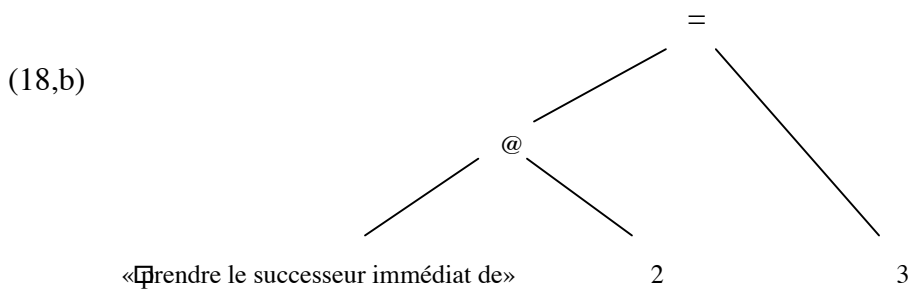
ou encore par le diagramme, dit applicatif', arborescent suivant



Par exemple, l'application de l'opérateur «prendre le successeur immédiat de» s'applique à l'opérande '2' pour construire le résultat '3', ce que nous représentons par

(18,a)                      «prendre le successeur immédiat de»                      2  
 -----  
 3

ou encore par



L'opération est exécutée de bas en haut («down up»). Remarquons la temporalité qui lui est sous-jacente puisque le résultat est construit *après que* l'opération d'application (c'est-à-dire un programme de calcul) ait été exprimée puis exécutée, ce que nous pouvons encore présenter par l'écriture infixée

(19,a) «prendre le successeur immédiat de» @ (2) \_ 3

ou encore, pour alléger les présentations sémiotiques, en adoptant la convention l'opération de noter l'opération d'application par la simple juxtaposition de l'opérateur et de son opérande□

$$(19,b) \quad \llbracket \text{prendre le successeur immédiat de} \rrbracket (2) \_ 3$$

Le symbole<sup>37</sup> non symétrique «□□ établit une *différenciation temporelle* entre d'une part, *un avant*, à gauche, c'est-à-dire *le programme de l'application avant exécution* et d'autre part, *un après*, à droite, c'est-à-dire *le résultat de l'application après exécution*. L'extension (ou le graphe) d'une fonction «□□ pensée comme un opérateur□ est *construite progressivement et non pas donnée* hors de toute temporalité calculatoire.

La  $\lambda$ -notation exprime analytiquement l'action d'un opérateur dans les termes d'opérateurs plus élémentaires (succession, addition, soustraction...). Prenons, par exemple, la fonction définie par la  $\lambda$ -expression□ suivante :

$$(20,a) \quad (\lambda x) . [(x + 2.z)^2 + x]$$

Cette  $\lambda$ -expression est un opérateur dont le mécanisme de transformation formelle de l'opérande est décrit dans le corps de la  $\lambda$ -notation. Ainsi, nous obtenons :

$$(20,b) \quad (\lambda x) . [(x + 2 . z)^2 + x] @ (3) \_ (3 + 2 . z)^2 + 3$$

$$(20,c) \quad (\lambda x) . [(x + 2 . z)^2 + x] @ (\sin(y) \_ (\sin(y) + 2 . z)^2 + \sin(y))$$

Le  $\lambda$ -calcul de Church, que nous ne détaillerons pas ici, précise toutes les conditions de substitution de l'opérande dans le calcul du résultat, afin d'éviter notamment les «□ descopages des noms de variable□ comme dans la substitution erronée□(21,a) ci-dessous mais rendue correcte dans (21,b) après le changement du nom de la variable «□□ liée par «□□ par une nouvelle variable «□□, afin de ne pas lier ce qui ne doit pas être lié :

$$(21,a) \quad * (\lambda x) . (\lambda z) . [(x + 2 . z)^2 + x] @ (\sin(z)) \_ (\lambda z) . [(\sin(z) + 2.z)^2 + \sin(z)]$$

$$(21,b) \quad (\lambda x) . (\lambda z) . [(x + 2 . z)^2 + x] @ (\sin(z)) \_ (\lambda y) . [(\sin(z) + 2.y)^2 + \sin(z)]$$

La relation (21,a) est incorrecte car les deux membres n'ont pas la même signification. En effet, la variable «□□ dans «□sin(z)□ est libre et elle devient liée, après la substitution de «□sin(z)□ à «□□ alors qu'elle devrait restée libre. En revanche dans (21,b), nous avons dû procéder à un «□renommage□ de la variable «□□ par «□□ dans l'expression qui n'est pas encore le résultat correct de la substitution□ dans la liaison opérée originellement par «□z□ nous changeons le nom de la variable «□□ par «□□. Cette opération de renommage est parfaitement légitime puisque le nom de la variable n'intervient pas dans l'expression obtenue par abstraction, c'est-à-dire que□

$$(21,c) \quad (\lambda x) . (\lambda z) . [(x + 2 . z)^2 + x] = (\lambda x) . (\lambda y) . [(x + 2 . y)^2 + x]□$$

---

<sup>37</sup> Ce symbole «□□ correspond techniquement à ce qui est appelé «□-réduction□ en logique combinatoire.

## 5.7. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS «INTRINSÈQUES»

Dans Ladrière [1984, p. 51-72] et Desclés [1980, 1981], il a été distingué, plusieurs niveaux d'opérateur :

- i) le niveau des *opérations concrètes*, dont n'ont pas pu, on l'a vu plus haut, se détacher les médiévaux et même les Arabes ;
- ii) le niveau des *opérations opérant avec des variables d'inconnues*, en fait celui de l'algèbre élémentaire issue de Viète et Descartes ;
- iii) le niveau de la  *$\lambda$ -abstraction* qui dégage «opération en soi» ;
- iv) enfin, le niveau des *opérateurs de composition*, indépendants des domaines d'interprétation, que la logique combinatoire de Schönfinkel [1924] et de Curry et Feys [1958] et, dans une certaine mesure, la théorie des  $T(\Sigma)$ -algèbres de Lawvere intégrées à la «théorie des catégories» d'Eilenberg et de Mac Lane, thématisent (cf. par exemple [F. W. Lawvere, 2003]).

Le dernier niveau, formalisé par la logique combinatoire<sup>38</sup>, est pensé plutôt comme une pré-logique («Prlogik») cherchant à aller plus loin dans l'abstraction opératoire que le  $\lambda$ -calcul de Church puisqu'elle *n'utilise pas des variables liées* (cf. aussi [Rosser, 1935]). En effet, la logique combinatoire, fondée par Schönfinkel (1924) et développée principalement par Haskell Curry [Curry et Feys, 1958] thématise la notion de composition «opérateurs quelconques» avec d'autres opérateurs, au moyen d'opérateurs *définis indépendamment des domaines interprétatifs des opérateurs composés*. En revanche, le  $\lambda$ -calcul doit donner une forme analytique à l'action de chaque opérateur, en particulier les opérateurs de composition, et, pour cela, il doit recourir à des variables liées et donc, au moins implicitement, au domaine de variation de ces variables. N'ayant pas de variables liées, la logique combinatoire évite ainsi à son utilisateur de devoir les «créer» pour éviter un «téléscopage de variables» (cf. (21,b)), ce qui aurait pour effet de lier des variables, *après substitution*, alors qu'elles n'étaient pas liées *avant la substitution*, avec pour conséquence indésirable un changement de signification en créant ainsi des «effets de bord» (redoutés en programmation en voir un exemple au § 7.5). Elle n'est pas équivalente «en intension» au  $\lambda$ -calcul de Church alors qu'elle lui est pratiquement équivalente «en extension». On peut construire deux expressions combinatoires qui restent différentes dans la logique combinatoire alors que les re-formulations analogues de ces expressions sont équivalentes en  $\lambda$ -calcul. La logique combinatoire a également un pouvoir plus concis d'expressivité, par exemple en établissant des équivalences définitoires entre opérateurs (cf. plus loin des exemples en (23,c), (24,b), (25,b), (26,a)), ce qui lui donne une capacité abstractive rigoureuse et voulue puisqu'elle a pour objet essentiel l'analyse «purement formelle» de l'opération de substitution. Par son pouvoir d'abstraction, la logique combinatoire a réussi à analyser frontalement certains paradoxes, comme celui de Russell (Cf. [Curry et Feys, 1958] Fitch, 1974] Ladrière, 1973]), ou celui de Curry-Rosser [Desclés, 1990], en

<sup>38</sup> ... et également par la théorie des catégories, mais de façon moins constructive avec la même puissance abstractive (cf. par exemple, [Lambek, 1985] Lawvere, 2003]). Dans Desclés [1980, 1981], on engendre récursivement, à partir d'un ensemble  $\Sigma$  d'opérateurs élémentaires typés et de différents arités, un ensemble  $T(\Sigma)$  de multi-opérateurs dérivés à l'aide d'opérations plus abstraites, «la greffe», «l'intrication» et d'un ensemble de fonctions entre segments finis  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , ces fonctions effectuant, de façon abstraite, les permutations, les prolongements et les effacements ... d'arguments de telles opérations réalisent, dans cet autre formalisme, les compositions d'opérateurs, effectuées par les combinateurs de la logique combinatoire. La construction algébrique de  $T(\Sigma)$  s'inscrit dans la démarche catégorielle de Lawvere [1963]. Cf. aussi la note 41.



proposant une «analyse logique» de leur construction, sans pour autant les chasser du domaine d'étude de la logique, comme étant «sans signification».

Dans le formalisme de la logique combinatoire, qui applique des opérateurs à des opérands, il a été introduit, comme nous l'avons déjà dit, des opérateurs abstraits, appelés «combinateurs», dont le rôle essentiel consiste à «composer» entre eux des opérateurs plus élémentaires, de façon à construire, *par des procédés intrinsèques*<sup>39</sup>, des opérateurs complexes. La description des mécanismes opératoires de composition est donc effectuée par les combinateurs, *à l'intérieur du formalisme lui-même* et sans faire appel à aucune variable liée. Les opérateurs élémentaires qui sont spécifiques à un domaine (arithmétique, informatique, géométrie, physique, linguistique, philosophie...) *sont définis de façon extrinsèque* mais les compositions de ces opérateurs élémentaires entre eux sont définies *de façon intrinsèque* par une voie entièrement interne au formalisme. Donnons deux exemples de définitions, l'une extrinsèque, l'autre intrinsèque.

En informatique, les opérateurs élémentaires «succession» et «addition» sont définis par des voies extrinsèques lorsque ils sont implantés «en dur» sur des supports matériels, par exemple, sur des circuits intégrés électroniques ; les actions qu'ils déclenchent, lorsqu'ils doivent être exécutés, sont réalisées physiquement par l'organe de calcul de la machine.

En linguistique, on peut partir du prédicat transitif (binaire) *rase* («quelqu'un rase quelqu'un») et construire un prédicat complexe intransitif (unaire) *se rase* («quelqu'un (se) rase soi-même») à l'aide d'un combinateur abstrait, désigné par «W» dont le schéma d'action opératoire est défini (avec usage de variables «l» ou «s» substitutives pour reprendre la terminologie de Curry) comme suit

$$(22) \quad (WX)Y \_ \text{XYY}$$

En substituant, dans ce schéma opératoire, le prédicat «rase» à «X», on construit le prédicat complexe dérivé «Wrase» – dont la signification est «se-raser-soi-même» ; cet opérateur complexe est tel que si on l'applique à un opérande, par exemple «Luc», on obtienne la construction de la phrase «Luc se rase», avec la signification «Luc (se) rase lui-même». Dans ce cas, le signe linguistique «se» est, ici<sup>40</sup>, *la trace directe du combinateur «W»*. Nous présentons la relation paraphrastique entre «Luc se rase» et la signification qui s'en déduit immédiatement «Luc rase Luc»

<sup>39</sup> «De façon intrinsèque» veut dire «de façon totalement indépendante de toute interprétation dans un domaine quelconque». Par exemple, l'opération de composition «par division» de deux fonctions formellement exprimée par «(f/g)(x) =<sub>def</sub> f(x) / g(x)» n'est pas intrinsèquement définie puisque l'expression obtenue «f(x) / g(x)» n'a pas de sens lorsque «g(x) = 0» par conséquent, la composition «par division» dépend étroitement du domaine de parcours de la variable «x». En revanche, les combinateurs de la logique combinatoire sont des modes de composition d'opérateurs, ces modes étant *totalement indépendants des domaines des opérateurs composés* (cf. [Desclés, 1980]). Nous prenons ainsi une position différente de celle de J.-P. Ginisti [2003] pour qui la logique combinatoire serait «une logique de l'objet quelconque».

<sup>40</sup> Il est clair que l'analyse sémantique de l'opérateur linguistique «se» est beaucoup plus complexe puisqu'un tel opérateur intervient dans les constructions «raies réflexives», les «constructions moyennes», les «constructions médio-passives» et certaines «constructions passives processuelles». Cependant, comme il a été montré dans [Desclés, 1990], les différents emplois font toujours appel, avec des variations contextuelles, à une analyse où le combinateur «W» (combinateur de diagonalisation) joue un même rôle abstrait, il participe ainsi à la définition et à la construction abductive de l'invariant sémantique qui est attaché au morphème «se».

– où les deux occurrences du signe *Luc* désignent le même objet référentiel « $\llbracket \text{Luc} \rrbracket$  –, par la déduction formelle suivante, où les expressions sont toutes présentées d’une façon canonique préfixée (c’est-à-dire que l’opérateur est toujours positionné devant son opérande)□

(23,a)	1.		<i>(se rase) Luc</i>	
	2.		$[se =_{\text{def}} \text{trace linguistique de } \mathbf{W}]$	
	3.		<i>(Wrased) Luc</i>	remplacement de <i>se</i> par <b>W</b>
	4.		$(\mathbf{WX})Y \_ \text{ XYY}$	schéma d’action de <b>W</b>
	5.		$[X \llbracket \_ \rrbracket \text{ rase} \llbracket Y \llbracket \_ \rrbracket \text{ Luc}]$	remplacement des variables
	6.		<i>rase Luc Luc</i>	élimination de <b>W</b>

Le pas 6 est obtenu à partir du schéma d’action de « $\llbracket \mathbf{W} \rrbracket$ , ce qui revient à éliminer « $\llbracket \mathbf{W} \rrbracket$ , en dupliquant (ou diagonalisant) l’opérande. Nous obtenons ainsi la relation de paraphrase□entre (a) *Luc se rase* et (b) *Luc rase Luc*, exprimée par la relation de déductibilité :

$$(23,b) \quad (se \ rase)Luc \_ \ rase \ Luc \ Luc$$

On peut remarquer que le pas 2 dans la déduction précédente introduit l’équivalence définitoire□

$$(23,c) \quad [se =_{\text{def}} \llbracket \text{trace linguistique} \rrbracket \text{ de } \mathbf{W}]$$

Cette relation entre un *definiendum* (à gauche) et un *definiens* (à droite) exprime, de façon intrinsèque, la signification de l’opérateur *se*, en restant à l’intérieur du langage lui-même, donc sans faire appel à une interprétation externe, par exemple dans un « $\llbracket \text{modèle interprétatif} \rrbracket$ .

Nous avons déjà dit que les combinateurs servent à composer des opérateurs pour construire des opérateurs complexes. Puisque, à la suite de Frege, les concepts sont considérés comme des fonctions à valeurs dans {le-vrai, le-faux} ou, dans l’approche de la logique combinatoire, comme des opérateurs, il devient possible de construire des « $\llbracket \text{concepts complexes} \rrbracket$  par combinaison de concepts plus élémentaires, cette combinaison étant réalisée à l’aide de combinateurs<sup>41</sup>. Donnons, à titre d’illustration très simple, la définition du prédicat complexe « $\llbracket \text{être-premier-pair} \rrbracket$ □ cet opérateur complexe est le résultat de la combinaison des prédicats plus élémentaires « $\llbracket \text{être-premier} \rrbracket$ □ et « $\llbracket \text{être-pair} \rrbracket$ □. Nous utilisons pour cela d’une part, le combinateur « $\llbracket \Phi \rrbracket$ □ dont le schéma de la règle d’action est□

$$(24,a) \quad \Phi XYZU \_ \ X(YU)(ZU)$$

et d’autre part, l’opérateur logique élémentaire « $\llbracket \& \rrbracket$ □ de conjonction (entre propositions). Nous en déduisons la définition suivante :

$$(24,b) \quad [\text{être-premier-pair} =_{\text{def}} \Phi \ \& \ (\text{être-premier}) \ (\text{être-pair})]$$

<sup>41</sup> Les combinateurs élémentaires, ou « $\llbracket \text{opérateurs de combinaisons élémentaires et intrinsèques d’opérateurs} \rrbracket$ , sont définis à partir de certains « $\llbracket \text{combinateurs de base} \rrbracket$ . On démontre qu’il est possible de définir seulement deux combinateurs de base pour engendrer l’ensemble, non fini, de tous les combinateurs responsables de toutes les combinaisons possibles d’opérateurs. On prend en général pour « $\llbracket \text{combinateurs de base} \rrbracket$  les combinateurs « $\llbracket \mathbf{S} \rrbracket$ □ et « $\llbracket \mathbf{K} \rrbracket$ □. Nous renvoyons à la littérature plus spécialisée sur ce thème [Curry, 1958□Fitch, 1974□Ginisti, 1997].

En appliquant ce prédicat complexe, par exemple au numéral « $\lambda$ », nous obtenons la déduction entre propositions :

- (24,c)
- |    |  |  |
|----|--|--|
| 1. | être-premier-pair (2)  |  |
| 2. | [ être-premier-pair = <sub>def</sub> $\Phi$ & (être-premier) (être-pair) ] |  |
| 3. | ( $\Phi$ & (être-premier) (être-pair)) (2)                                 |  |
| 4. | & ((être-premier) (2)) ((être-pair) (2))                                   |  |

On peut donner d'autres exemples de constructions d'opérateurs complexes. Par exemple, l'opérateur « $\lambda$ deux-fois $\lambda$ » est défini directement par le combinateur « $\lambda$ WB $\lambda$ », où l'action opératoire de « $\lambda$ B $\lambda$  est $\lambda$ »

- (25,a) « $\lambda$ BXYZ \_ X(YZ) $\lambda$ »

En effet, nous avons la déduction suivante (où « $\lambda$ f $\lambda$ » est un opérateur quelconque et « $\lambda$ x $\lambda$ » un opérande quelconque)

- (25,b)
- |    |   |                  |
|----|---|------------------|
| 1. | (« $\lambda$ deux-fois $\lambda$ f) x $\lambda$                   |                  |
| 2. | [ « $\lambda$ deux-fois $\lambda$ = <sub>def</sub> WB ] $\lambda$ |                  |
| 3. | (WBf) x $\lambda$   | remplacement     |
| 4. | B f f x   | élimination de W |
| 5. | f (f x)   | élimination de B |

Il en résulte la relation suivante

- (25,c) « $\lambda$ deux-fois $\lambda$  fx \_ \* f (f x)

Cette approche de la *fonction pensée comme opérateur de construction* est particulièrement importante en informatique et devrait l'être dans toute approche constructive des mathématiques<sup>42</sup>.

*In the 1920's when  $\lambda$ -calculus and CL [Combinatory Logic] began, logicians did not automatically think of functions as sets of ordered pairs, with domain and range given, as they trained to do today. Throughout mathematical history, right through to modern computer science, they have run another concept of function, less precise but strongly influential ; that of a function as an operation-process (in some sense) which may be applied to certain objects to produce other objects. Such a process can be defined by giving a set of rules describing how it acts on an arbitrary input-object(...). "(...) Let us reserve the word "operator" to denote this imprecise function-as-operation-process concept, and "function" and "map" for the set-of-ordered-pairs concept.*

*Perhaps the most important difference between operators and functions is that an operator may be defined by describing its action without defining the set of inputs for which this action produces results, i.e. defining its domain. [...] In a sense, operators are "partial functions".*

[Hindley, Seldin, *Introduction to combinators and  $\lambda$ -calculus*, 1986, p. 44-45].

<sup>42</sup> Un *opérateur* est une entité formelle qui peut se composer, à l'intérieur d'un langage formel, de façon intrinsèque, c'est-à-dire indépendamment de tout domaine d'interprétation, avec d'autres opérateurs, au moyen d'opérateurs généraux de composition (« $\lambda$ h greffe $\lambda$ » et « $\lambda$ intrication $\lambda$ » dans Desclés, [1980]). *L'interprétation d'un opérateur dans un domaine précis* conduit à la notion classique d'*opération*, considérée, cette fois, comme une fonction ensembliste « $\lambda$ pensée comme un graphe $\lambda$ ». Ainsi, l'opérateur relève plus de la syntaxe constitutive d'un langage formel, alors que l'opération relèverait plutôt d'une sémantique interprétative (cf. [Desclés, 1980, 1981]). Cf. aussi la note 37.

En pensant « $\mathbb{N}$  la fonction comme un opérateur $\mathbb{N}$ », on ouvre des voies nouvelles qui ont pour horizon la « $\mathbb{N}$  forme opératoire pure $\mathbb{N}$ »

[...] ce qui est visé ici [par la logique combinatoire], c'est la saisie de l'opération en tant que telle, c'est donc la séparation de son support tangible, de sa présentification concrète. [...] l'explication en logique consiste à dissoudre les situations opaques au moyen d'une analyse de type opératoire. (...) L'horizon de la forme pure n'est donc rien d'autre que la transgression interne qui s'effectue dans toutes les formes concrètes et qui constitue le véritable moteur de la recherche en logique.

[Jean Ladrière, *L'explication en logique*, 1973, p. 55-56].

Cette approche rend possibles et naturels de nouveaux développements formels, par exemple faire opérer une fonction sur elle-même (auto-application), ou des analyses logiques renouvelées – par exemple celle des paradoxes comme celui de Russell ou de celui, plus technique, de Curry. Elle permet également la *caractérisation de propriétés intrinsèques* (indépendamment des domaines d'interprétation) d'opérateurs abstraits. Ainsi, par exemple, pour définir la *propriété générale de commutativité*, indépendamment de tout domaine d'interprétation – de l'opérateur binaire « $\mathbb{N}$ », on peut utiliser l'équivalence (26, a) entre les deux opérateurs binaires « $\mathbb{N}$ » et « $\mathbb{C}+$ » (l'opérateur « $\mathbb{N}$  converse $\mathbb{N}$ ») :

$$(26,a) \quad [ + =_{\text{def}} \mathbb{C}+ ]$$

où « $\mathbb{C}$ » est le combinateur de « $\mathbb{N}$  conversion $\mathbb{N}$ » dont l'action opératoire est

$$(26,b) \quad \mathbb{C}XYZ \_ XZY$$

En effet, nous avons la réduction

$$(26,c) \quad \begin{array}{l|l} 1. & + y x \\ 2. & [ + =_{\text{def}} \mathbb{C}+ ] \\ 3. & (\mathbb{C}+) y x \\ 4. & + x y \end{array} \quad \text{élimination de } \mathbb{C}$$

L'opérateur « $\mathbb{N}$ » se voit ainsi attribuer la propriété de commutativité (26,a) *sans faire référence à un quelconque domaine*, aussi cet opérateur « $\mathbb{N}$ » peut-il être utilisé, avec la propriété de commutativité qui lui est intrinsèquement attachée, aussi bien pour l'addition des entiers naturels, sous une présentation binaire ou décimale, que pour celle des nombres réels ou complexes, pour l'addition de listes, de vecteurs, de matrices, de fonctions, d'opérateurs, de structures arborescentes dans des forêts, de classes d'objets... L'opérateur « $\mathbb{N}$ », avec sa propriété de commutativité, est dit *polymorphe* puisque son type – ou domaine spécifique d'interprétation – est déterminé seulement par son contexte (type des entiers naturels, des réels, des listes, des vecteurs, des matrices, des fonctions...). Pour les langages de programmation de haut niveau (par exemple les langages de programmation fonctionnelle), le type de l'opérateur « $\mathbb{N}$ » est inféré, par le programme de compilation ou d'interprétation, par une analyse contextuelle. En effet, le calcul effectif (par l'organe matériel de calcul d'un ordinateur sur lequel est implanté le langage de programmation avec son compilateur) est *physiquement différent* selon que l'on additionne des nombres entiers ou des nombres réels (avec une « $\mathbb{N}$  représentation flottante $\mathbb{N}$ »), ou des listes...

Dans une approche classique avec les notations usuelles, la définition de la commutativité fait appel à une quantification universelle *avec des variables liées*, ces variables étant nécessairement astreintes à parcourir un domaine « $\mathbb{D}$ » de variation

$$(26,d) \quad (\forall x) (\forall y) [(x, y \in \mathbb{D}) \Rightarrow (x + y = y + x)]$$

En effet, l'utilisation de variables « $\mathbb{D}$ » (au moins implicitement) vers des domaines, car il n'y a pas de variable sans domaine de parcours (très souvent simplement sous entendu et déterminable par le contexte). Pour exprimer la commutativité de façon très générale, indépendamment de tel ou tel domaine, il faudrait quantifier universellement les domaines

$$(26,e) \quad (\forall \mathbb{D}) [(\forall x) (\forall y) [(x, y \in \mathbb{D}) \Rightarrow (x + y = y + x)]]$$

donc sortir de la logique du premier ordre et monter dans une hiérarchie de types logiques où il faudrait indiquer quel est le domaine de parcours de « $\mathbb{D}$ ». La caractérisation intrinsèque (26,a) de la commutativité de « $\mathbb{D}$ » est indépendante de tout domaine d'utilisation, d'interprétation et de réalisation matérielle (qu'elle soit réalisée sur des supports neuronaux, biologiques, électroniques ou quantiques...).

La logique combinatoire, grâce à son formalisme abstrait qui « $\mathbb{D}$ » pour horizon les formes opératoires pures (selon l'expression de Jean Ladrière) ouvre également de nouveaux champs d'application de la logique, notamment

à l'informatique : conception de langages de programmation fonctionnelle, sémantique dénotationnelle des langages de programmation avec, par exemple, le modèle de Dana Scott, (cf., par exemple, [Stoy 1977 ; Lambek 1985 ; Hudak, 1989])

à la linguistique : engendrement des catégories syntaxiques par les Grammaires Catégorielles héritées des recherches initiales de Husserl (cf. par exemple, [Oehrle *et al.* 1988 ; Joray *et al.*, 2002]), et développées par Ajdukiewicz [1935], Bar-Hillel, Lambek [1958, 1961] et actuellement en plein «renouveau» avec les Grammaires Catégorielles étendues (cf. [Dowty 1988 ; Oehrle *et al.* 1988 ; Steedman 1988, 2000 ; Biskri 1995 ; Biskri et Desclés 1995]) les travaux actuels de Lecomte ; Rétoré.) ou des catégories fonctionnelles mises en œuvres dans certaines théories logiques ([Miéville 1984]) ou linguistiques, tantôt explicitement [Shaumyan 1965, 1987 ; Desclés 1990]), tantôt implicitement ([Harris, 1968, 1975, 1982, 1991]);

à l'analyse sémantique des unités grammaticales et lexicales (cf. par exemple [Shaumyan 1977, 1987 ; Desclés 1990, 1997 (a), (b)])

à la philosophie (analyse formelle de certaines notions (cf. par exemple dans [Desclés 1993 ; Boutot, 1998])<sup>43</sup>)

plus généralement, aux sciences cognitives (changement de niveaux de représentations par décomposition analytique ou, inversement, par synthèse d'unités<sup>44</sup>).

<sup>43</sup> Citons par exemple l'analyse logique, avec les outils de la logique combinatoire, de « $\mathbb{D}$ » argument ontologique présenté dans le *Proslogion* d'Anselme de Cantorbéry, où le concept complexe «être-rien-de-plus-grand-qui-ne-puisse-être-pensé» est une composition de concepts plus élémentaires (cf. sur ce point [Desclés, 1997 (a), (b), 2003]).

<sup>44</sup> Il s'agit de « $\mathbb{D}$ » hypothèse de la compilation généralisée qui semble jouer un rôle dans l'articulation explicite entre d'une part, les différents niveaux de représentations symboliques – linguistiques et représentations cognitives sous-jacentes – et d'autre part, leurs supports physiques (électroniques, neuro-chimiques...) sur lesquels ces représentations symboliques doivent être matériellement implantées (cf. [Desclés, 1990, 2003]).

## 6. LA VARIABLE DANS L'EXPRESSION DE LA QUANTIFICATION EN LOGIQUE

### 6.1. LOGIQUE «CLASSIQUE»

Dans la présentation «classique» de la logique, que nous qualifions de «trigéenne», c'est-à-dire celle du «calcul des prédicats» ou de la «logique du premier ordre» telle qu'elle a été fixée à partir des conceptions de Frege, Peirce Russell, Peano., Quin..., la variable est utilisée pour exprimer et définir l'opération de quantification. Comment procède usuellement un manuel de logique ? Il introduit la quantification en plusieurs temps à partir de la proposition. On peut considérer les trois étapes suivantes dans la construction de la proposition « $(\forall x)$  [être-mortel(x)]» :

on part d'une proposition décomposée en un prédicat lexical et un argument constant, comme est-mortel (Socrate)

on substitue à la constante «Socrate» une variable libre « $x$ », d'où la forme propositionnelle «est-mortel (x)»

on introduit une quantification qui contribue à lier les occurrences de la variable « $x$ » dans la forme propositionnelle, d'où  $(\forall x)$  [(est-mortel (x))] le quantificateur indicé « $\forall x$ » a pour portée la fonction propositionnelle entière.

En tombant sous la portée du quantificateur indicé, l'occurrence de la variable « $x$ » dans la fonction propositionnelle devient «huette» puisque le choix de son nom n'est plus pertinent. En effet, les expressions suivantes sont toutes équivalentes

$$(1) \quad (\forall x) [\text{être-mortel} (x)] = (\forall y) [\text{être-mortel} (x)] = (\forall z) [\text{être-mortel} (z)]$$

autrement dit, le choix des noms « $x$ » ou « $y$ » ou « $z$ » reste indifférent. Il est ensuite possible de généraliser l'introduction de la quantification à la quantification restreinte, en représentant un énoncé comme *Chaque homme est mortel* par l'expression :

$$(2) \quad (\forall x) [\text{être-homme} (x) \Rightarrow \text{être-mortel} (x)]$$

à partir de la forme propositionnelle

$$(3) \quad \text{être-homme}(x) \Rightarrow \text{être-mortel} (x)$$

On peut alors introduire les deux notations dérivées suivantes, utilisées souvent dans les ouvrages mathématiques, pour indiquer les restrictions de la quantification :

$$(4,a) \quad \forall_{\text{homme}} (x) [\text{être -mortel}(x)]$$

$$(4,b) \quad (\forall x)\{x \in \text{Homme}\} \Rightarrow \text{être-mortel} (x)$$

Les formules (4,a) et (4,b) expriment la même proposition (2). Cependant, l'introduction dans le symbolisme du quantificateur restreint « $\forall_{\text{homme}}$ » dans (4,a) ou encore la restriction du parcours de la variable « $x$ » à la classe Homme dans (4,b), sont des variations de présentations purement sémiotiques. Remarquons cependant que ces dernières présentations sémiotiques ne font plus apparaître exactement le rôle conceptuel et opératoire du quantificateur, en particulier son lien très étroit avec l'implication. Or, s'il est clair que lorsque le domaine d'interprétation est fini, le quantificateur universel généralise le connecteur de conjonction « $\wedge$ » et le quantificateur existentiel, le connecteur logique de disjonction « $\vee$ », le lien du

quantificateur universel avec le connecteur conditionnel « $\Rightarrow$ » est beaucoup plus profond c'est du reste ce qu'exploite l'approche intuitionniste de Martin-Löf de la quantification universelle conçue alors comme une fonction qui associe à chaque preuve de l'antécédent une preuve du conséquent, cette conception étant appliquée à l'analyse linguistique par A. Ranta [1994]. D'autres approches plus relationnelles de la quantification, avec des généralisations à d'autres quantificateurs des langues naturelles comme *quelques-uns*, *la plupart des*, *la moitié de*, *la grande majorité de...*, sont apparentées. Citons, entre autres, Bach [1995], Barwise et Cooper [1981], Barwise [1987], Keenan et Faltz [1985], Gabbay et Guentner (1989), Westerståhl [1989], Partee [1995].

## 6.2. QUANTIFICATION EXPRIMÉE AVEC LA $\lambda$ -NOTATION

Pour voir ce lien et mieux faire ressortir le rôle formel des opérateurs de quantification, utilisons la  $\lambda$ -notation de Church. Dans l'expression

$$(5) \quad (\lambda x) . [\text{être-homme}(x) \Rightarrow \text{être-mortel}(x)]$$

nous avons une fonction où les deux occurrences de la variable « $x$ » sont liées par l'opérateur d'abstraction « $\lambda x$ ». Cette fonction, appelée parfois «fonction propositionnelle», a pour domaine un ensemble d'entités individuelles et pour codomaine l'ensemble des valeurs de vérité. Cette fonction s'applique à un argument constant comme 'Socrate', c'est-à-dire

$$(6) \quad (\lambda x) . [\text{être-homme}(x) \Rightarrow \text{être-mortel}(x)] (\text{Socrate})$$

Après substitution de «Socrate» aux occurrences de « $x$ » dans le corps de la  $\lambda$ -expression, on obtient

$$(7) \quad \text{être-homme}(\text{Socrate}) \Rightarrow \text{être-mortel}(\text{Socrate})$$

Le quantificateur universel « $\forall$ » est alors un opérateur qui s'applique à une fonction propositionnelle pour construire une proposition, qui dénote soit « $\top$  vrai», soit « $\perp$  faux», d'où

$$(8) \quad \forall [(\lambda x) [\text{être-homme}(x) \Rightarrow \text{être-mortel}(x)]]$$

L'expression (8) permet de dégager explicitement les deux rôles du quantificateur indicé « $\forall x$ » dans l'écriture sémiotique classique (2) de la quantification d'un côté, la liaison d'identification entre les occurrences d'une même variable, assurée par l'opérateur d'abstraction « $\lambda x$ » et, d'un autre côté, la quantification proprement dite. La présentation (8) fait apparaître explicitement que *la fonction propositionnelle est un opérande de l'opérateur de quantification* « $\forall$ ».

Nous aurions une construction analogue pour la quantification existentielle associée à la phrase *Il y a des hommes qui sont des savants* ou *quelques hommes sont des savants*. La représentation logique, dans le Calcul des prédicats, est construite comme suit on forme la fonction propositionnelle (9) puis on quantifie par le quantificateur existentiel « $\exists$ » qui transforme ainsi cette fonction propositionnelle en la proposition (10)

$$(9) \quad (\lambda x) [\text{être-homme}(x) \wedge \text{être-savant}(x)]$$

$$(10) \quad \exists [(\lambda x) . [\text{être-homme}(x) \wedge \text{être-savant}(x)]]$$

## 6.3. EXPRESSION ILLATIVE «SANS VARIABLES LIÉES» DE CURRY

La liaison des variables n'est pas constitutive de la quantification, comme le laisseraient apparaître les présentations sémiotiques des manuels de logique à la suite des présentations des fondateurs comme Russell ou Quine. En effet, l'approche «illative» «sans variables liées» de H.B. Curry et Feys [1958] dans le cadre de la logique combinatoire, fait encore mieux apparaître le rôle des opérations de quantification. Pour cela, introduisons les *types de Church* en considérant plusieurs types d'expressions, engendrés à partir de types de base. L'ensemble de tous les types est alors construit récursivement par les seules règles suivantes

- i) Les types de base sont des types
- ii) Si « $\alpha$ » et « $\beta$ » sont des types, alors « $\lambda\alpha\beta$ » est un type.

Une expression « $X$ » dont le type est « $\alpha$ » est notée « $\lambda\alpha X$ » ou parfois, dans d'autres contextes, par « $X\alpha$ ». Les types de la forme « $\lambda\alpha\beta$ » sont appelés «types fonctionnels»<sup>45</sup>. Un tel type s'interprète comme le type des opérateurs qui, en étant appliqués à un opérande de type « $\alpha$ » construisent des expressions qui sont de type « $\beta$ ». L'application d'un opérateur de type « $\lambda\alpha\beta$ » est restreinte uniquement aux opérandes de type « $\alpha$ », le résultat de l'application étant une expression de type « $\beta$ ». Nous représentons l'opération d'application de l'opérateur « $X$ » à un opérande « $Y$ » par l'arbre applicatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \lambda\alpha\beta X & & \alpha Y \\ \hline & & \beta X(Y) \end{array}$$

Un type (au sens technique) est souvent interprété, au moins en première approximation, comme un ensemble dont tous les éléments sont homogènes et donc de même type (au sens non technique). Par exemple, aux types des chaînes de caractères («String»), des expressions booléennes («Bool»), des entiers («Int»), des réels («Real»), des vecteurs («Vecteur»), des listes («Liste»)... sont associés des ensembles.

La notation « $X\alpha$ », qui assigne le type « $\alpha$ » à l'expression « $X$ » peut être interprétée par l'appartenance à un ensemble : « $X \in \alpha$ ». Ainsi, dans l'interprétation ensembliste des types, les fonctions sont des opérateurs dont le type est défini à partir du type des arguments du domaine de la fonction et du type des valeurs de cette fonction dans son co-domaine.

<sup>45</sup> On rencontre dans la littérature la notation infixée « $\alpha \rightarrow \beta$ » à la place de la notation préfixée « $\lambda\alpha\beta$ ». La notation infixée présente l'avantage de faire apparaître, au niveau des notations elles-mêmes, l'isomorphisme structurel entre le calcul sur les types fonctionnels et le calcul intuitionniste (sans négation) des propositions : toute démonstration, en particulier sur la décidabilité, effectuée à propos du calcul des propositions se transporte immédiatement dans le calcul sur les types. Ainsi, la notation « $\alpha \rightarrow \beta$ » peut être pensée soit comme une relation d'implication entre deux propositions, soit comme un type fonctionnel, d'où l'interprétation qui est donnée par Martin-Löf aux types : ce sont des ensembles de propositions. On sait que cet isomorphisme découvert par Curry [1958], est généralisé par l'isomorphisme dit de Curry-Howard [De Groote, 1995] qui joue un rôle extrêmement important aussi bien en logique qu'en informatique théorique [Hudak, 1989] et peut-être en linguistique [Desclés, 1997(b)]. La notion de type fonctionnel est utilisée en linguistique, parfois de façon implicite [Ajdukiewicz, 1935 ; Bach, 1988 ; Dowty, 1988 ; Lambek, 1958, 1961 ; Harris 1968/1971, 1976, 1982, 1991 ; Shaumyan, 1965, 1977, 1987] ; cf. aussi [Joray *et al.*, 2002 et Desclés, 1990].



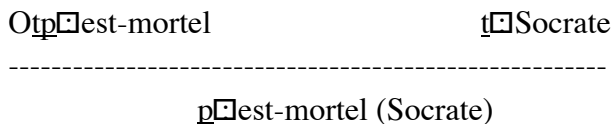
Dans le cadre de la logique classique, exprimée sans faire appel à des variables liées, c’est-à-dire dans la version, dite « $\lambda$ lative» qu’en donne la logique combinatoire, nous prenons pour entités de base les termes et les propositions. Les types « $\lambda$ » et « $\lambda$ » sont donc les deux types de base. Tous les autres types de la logique classique sont engendrés à partir de ces deux types de base. Ainsi, les types assignés aux « $\lambda$ onstantes logiques» sont :

- les connecteurs (conjonction, disjonction, connecteur conditionnel...) sont des opérateurs de type « $\lambda$ p $\lambda$ pp $\lambda$ »
- la négation propositionnelle est de type « $\lambda$ pp $\lambda$ » certains opérateurs modaux, comme « $\lambda$  est nécessaire que», « $\lambda$  est possible que», « $\lambda$  a été le cas que», « $\lambda$  sera le cas que... sont également de type « $\lambda$ pp $\lambda$ ».

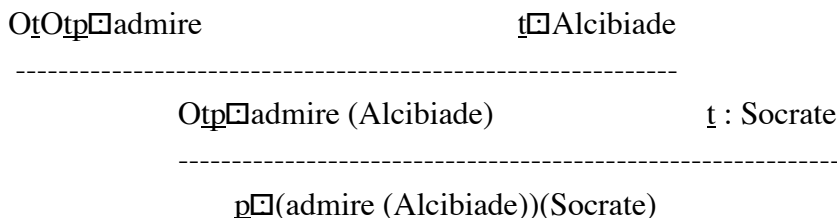
Les prédicats sont des opérateurs (des syncatégorèmes) qui sont applicables à des opérandes (des catégorèmes). Dans le cas d’un prédicat unaire, il s’applique à un terme afin de construire une proposition dans le cas d’un prédicat binaire (respectivement ternaire, ..., n-aire), il construit un prédicat d’arité moindre. Nous en déduisons ainsi les types des prédicats<sup>46</sup>

- les prédicats unaires sont de type : « $\lambda$ tp $\lambda$ »
- les prédicats binaires sont de type : « $\lambda$ tp $\lambda$ tp $\lambda$ »
- les prédicats ternaires sont de type : « $\lambda$ tp $\lambda$ tp $\lambda$ tp $\lambda$ »
- les prédicats n-aires sont de type : « $\lambda$ tp $\lambda$ tp $\lambda$ ...tp $\lambda$ » (avec n occurrences de « $\lambda$ tp $\lambda$ »)

Une opération de prédication consiste à appliquer un prédicat à un terme. Prenons pour exemple le prédicat unaire «est-mortel». La construction de la proposition *Socrate est mortel* s’opère en appliquant le prédicat «est-mortel» à l’opérande «Socrate». La construction de la prédication est représentée par l’arbre applicatif suivant où sont notés les types assignés aux expressions :



Dans le cas d’un prédicat binaire comme ‘admire’, la proposition *Socrate admire Alcibiade* est construite à la suite de deux opérations élémentaires de prédication, d’où l’arbre applicatif suivant



Comme le formalisme de la logique combinatoire ne fait pas appel à des variables liées, il présente la quantification à l’aide d’opérateurs. Les quantificateurs, appelés *quantificateurs* « $\lambda$ latifs», ont des actions sémantiques qui sont gouvernées par les

---

<sup>46</sup> En notant, pour simplifier,  $O^n tp = O_t O_t \dots O_t p$  (avec n occurrences de t), tout prédicat est considéré comme un opérateur de type  $O^n tp$ , avec  $n \geq 1$ . Lorsque  $n = 0$ , le prédicat zéro-aire est une proposition.

seules règles de formation des expressions quantifiées et les règles d'introduction et d'élimination dans le style de la Dédution Naturelle de Gentzen. Nous ne donnerons pas, ici, les règles inférentielles d'introduction et d'élimination<sup>47</sup>.

Dans le cas de la quantification simple, comme dans la phrase *tous sont mortels*, ou *quelques uns sont mortels*, les quantificateurs simples  $\ll \forall_1 \rrbracket$  et  $\ll \exists_1 \rrbracket$  sont des opérateurs de type  $\ll \text{Otp} \rrbracket$  ils construisent, en une seule étape, une proposition par exemple

$$\begin{array}{c} \text{Otp} \ll \Pi_1 \rrbracket \quad \text{Otp} \ll \text{être-mortel} \rrbracket \\ \text{-----} \\ \text{p} \ll \Pi_1 \rrbracket \text{ (être-mortel)} \end{array}$$

Les quantificateurs  $\ll \forall_1 \rrbracket$ , et  $\ll \exists_1 \rrbracket$  sont les analogues  $\ll \text{latifs} \rrbracket$  qui ne font pas appel pour leur expression à des variables liées, des quantificateurs  $\ll \text{lassiques} \rrbracket$  exprimés avec variables liées, respectivement notés  $\ll \forall x \rrbracket$  et  $\ll \exists x \rrbracket$ .

Nous discuterons, au paragraphe 6.4. et dans la seconde partie (§ 8), de la sémantique des quantificateurs. La *notion de variable liée n'est donc pas essentielle* à la définition des quantificateurs logiques, contrairement à ce que laissent entendre un trop grand nombre de manuels actuels de logique, donnant ainsi une image erronée de l'opération de quantification elle-même. Quant au rôle syntaxique d'un quantificateur simple, elle n'est donc pas un rôle de  $\ll \text{liaison des variables} \rrbracket$ , comme on peut parfois le lire dans certains ouvrages, mais celui d'un opérateur qui peut s'appliquer à un prédicat pour construire une proposition. Le rôle de liaison d'occurrences de variables qui *apparaît* dans les expressions de la logique du premier ordre résulte simplement *du choix de la présentation sémiotique retenue*<sup>48</sup>, c'est-à-dire d'un formalisme avec des variables, où l'opération de liaison n'a pas été encore complètement formalisée ; ce formalisme n'exprime pas ainsi directement le rôle opératoire du quantificateur en y introduisant une notion parasite propre au système des notations choisies. En revanche, la notation fonctionnelle du type  $\ll \text{Otp} \rrbracket$  exprime parfaitement ce rôle opératoire de constructeur de propositions à partir de prédicats unaires, en saturant la place vide du prédicat, par définition insaturé. Nous avons, dans le cas examiné ici, un exemple typique et non trivial de deux systèmes formels (d'une part, la logique du premier ordre dans sa présentation *avec* variables liées et d'autre part, la présentation illative *sans* variables liées formulée dans le cadre de la logique combinatoire) qui sont *différents par leurs présentations sémiotiques* mais équivalents par les notions qu'ils formalisent, en fait les idées frégréennes de la quantification Frege, très nettement dans ses *Grundgesetze der Arithmetik*, considérait le quantificateur comme un opérateur qui n'était plus de premier ordre. Cependant, si deux systèmes (ou langages) formels  $\ll \text{expriment les mêmes idées} \rrbracket$ , et diffèrent par leurs présentations, ils peuvent parfois rendre transparents ou opaques certains mécanismes fondamentaux. Nous dirons que le système avec variables liées rend partiellement opaque le rôle des quantificateurs tandis que le système illatif avec les types fonctionnels rend parfaitement transparents les rôles syntaxiques. Il est assez courant dans l'histoire et le perfectionnement progressif des formalismes – que l'on pense aux notations algébriques que nous avons évoquées aux

<sup>47</sup> Cf. par exemple [Hindley *et al.*, 1972 [Fitch, 1974 [Hindley et Seldin, 1986 [Desclés, 1990 [Desclés et Guentcheva, 2000 [Desclés, 2004] et le § 8. du présent article.

<sup>48</sup> On sait que Curry [1958 (a), (b)] distingue dans la définition d'un système formel (i) sa *présentation* (ii) sa *représentation* (iii) son *interprétation*.

paragraphes 2.2 et 2.3, avec les difficultés intellectuelles d'interprétation qui y sont attachées, ou aux différentes notations de la fonction du paragraphe 5 – qu'un système de notation n'atteigne pas d'emblée une perfection qui rendrait entièrement transparentes ses opérations constitutives mais une meilleure compréhension de ces opérations peut amener à modifier les notations familières – il en a été ainsi au XVI<sup>e</sup> siècle par exemple.

Si les quantificateurs n'ont plus pour rôle essentiel de lier des occurrences de variables dans une expression comment alors peut-on définir les quantificateurs restreints, qui sont associés intrinsèquement à des connecteurs logiques – le connecteur conditionnel et le connecteur conjonctif ? Comment faire opérer un quantificateur sur des places distinctes d'un quantificateur binaire, ternaire, ... n-aire, de façon à saturer une des places et pas une autre ?

Les quantificateurs universels et existentiels restreints, que nous désignons respectivement par « $\Pi_2$ » et « $\Sigma_2$ » dans cette approche «relative», sont des «constantes logiques», tout comme « $\Pi_1$ » et « $\Sigma_1$ ». Les quantificateurs « $\Pi_2$ » et « $\Sigma_2$ » sont définis à partir de « $\Pi_1$ » et « $\Sigma_1$ » en «composant»<sup>49</sup>. Ces derniers avec l'opérateur d'implication, respectivement de conjonction Ces quantificateurs « $\Pi_2$ » et « $\Sigma_2$ » sont des opérateurs qui construisent, en deux étapes, des propositions à partir de deux prédicats unaires. Dans une phrase comme *tous les hommes sont mortels* ou *quelques hommes sont savants*, les quantificateurs sont de type  $\text{OOtpOOtpp}$ . Nous avons les constructions représentées par les arbres respectifs



<sup>49</sup> La composition s'effectue dans le cadre de la logique combinatoire en utilisant des combinateurs « $\mathbf{C}$ », « $\mathbf{B}$ », « $\mathbf{B}^2$ » et « $\Phi$ ». Les quantificateurs restreints  $\Pi_2$  et  $\Sigma_2$  sont *fonctionnellement dépendants* des quantificateurs simples  $\Pi_1$  et  $\Sigma_1$ . Ils sont définis explicitement par « $\Pi_2 =_{\text{def}} (\mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B}^2)\Phi \Rightarrow) \Pi_1$ » et « $\Sigma_2 =_{\text{def}} (\mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B}^2)\Phi \wedge) \Sigma_1$ ». Nous avons par exemple la réduction pour  $\Pi_2$  et de façon analogue pour  $\Sigma_2$  obtenue par une succession d'éliminations des combinateurs (les règles d'élimination des combinateurs « $\mathbf{B}$ », « $\mathbf{C}$ » et « $\Phi$ » ont été données au § 5.6.) :

$$\begin{array}{ll}
 \Pi_2 PQ = \mathbf{B}(\mathbf{C}\mathbf{B}^2)\Phi \Rightarrow \Pi_1 PQ & \\
 \rightarrow (\mathbf{C}\mathbf{B}^2)(\Phi \Rightarrow) \Pi_1 PQ & \text{élim. } \mathbf{B} \\
 \rightarrow \mathbf{B}^2 \Pi_1 (\Phi \Rightarrow) PQ & \text{élim. } \mathbf{C} \\
 \rightarrow \Pi_1 (\Phi \Rightarrow) PQ & \text{élim. } \mathbf{B}^2 \\
 \rightarrow (\Phi \Rightarrow) PQ \ x & \text{élim. } \Pi_1 \\
 \rightarrow \Rightarrow (Px)(Qx) & \text{élim. } \Phi.
 \end{array}$$

L'analyse de la constitution applicative des propositions, associées aux phrases respectives

$\Pi_1$  (être mortel)

(en notation «classique»  $(\forall x) [ \text{est mortel} (x) ]$ )

*Tous sont mortels*

$\Sigma_1$  (être mortel)

(en notation «classique»  $(\exists x) [ \text{est mortel} (x) ]$ )

*Il y a quelqu'un qui est mortel*

$\Pi_2$  (être homme) (être mortel)

(en notation «classique»  $(\forall x) [ \text{est homme} (x) \Rightarrow \text{est mortel} (x) ]$ )

*Tous les hommes sont mortels*

$\Sigma_2$  (être homme) (être savant)

(en notation «classique»  $(\exists x) [ \text{est homme} (x) \wedge \text{est savant} (x) ]$ )

*Quelques hommes sont savants*

exprime parfaitement le rôle qui est joué par les quantificateurs selon l'analyse frégréenne : *construire des propositions à partir des prédicats*. En particulier, dans les propositions *Tous les hommes sont mortels* et *Quelques hommes sont savants*, les syntagmes nominaux quantifiés *tous les hommes* et *quelques hommes* sont des opérateurs dont les prédicats «être mortel» et «être savant» sont les opérands respectifs. On pourra objecter que les opérations de quantification multiple, comme dans la proposition *Chaque étudiant préfère une assistante*, qui sont facilement représentées à l'aide de plusieurs variables liées, ne sont pas représentables dans une logique sans variables liées. La réponse est donnée, dans le cadre de la logique combinatoire : les différentes places «non saturées» d'un prédicat, qui tombent dans la portée du quantificateur, sont systématiquement gérées par des combinateurs et cela sans faire appel à aucune variable liée. Nous pouvons ainsi définir une *famille de quantificateurs* (cf. [Desclés et Guentcheva, 2000] [Desclés, 2004]), en particulier les quantificateurs restreints « $\Pi_2$ » et « $\Sigma_2$ », qui sont tous dérivés des deux quantificateurs de base « $\Pi_1$ » et « $\Sigma_1$ ». Une réponse, légèrement différente et plus restreinte, a été donnée par Quine [1960, 1976].

Comme nous l'avons déjà dit, le recours aux variables liées n'est pas indispensable pour l'analyse et l'expression des opérations de quantification de la logique classique (frégréenne). Le recours aux variables liées a été en fait imposé par le choix sémiotique du formalisme utilisé, celui de Frege d'abord, puis ensuite celui de Russell et de Peano. Or, on peut exprimer les mêmes idées, les mêmes opérations, sans utiliser aucune variable liée. Il apparaît ainsi que le choix d'un formalisme peut imposer des notions que d'autres formalismes élimineront ou, éventuellement, faire émerger «la pureté intrinsèque d'un concept» qu'un autre formalisme «ne pourra pas faire voir» par le seul jeu des notations retenues.

Le gain obtenu par l'élimination des variables liées est très important puisqu'il évite, entre autres, les «effets de bord» (en anglais «side effects») (cf. § 7.5.) et également élimine la gestion des variables liées au cours des inférences, avec obligation, dans certaines étapes du calcul, à utiliser des opérations de «renommage» avec appel à des «variables fraîches», comme nous l'avons vu sur un exemple au paragraphe 5.6.

De plus, un formalisme sans variables liées, comme celui de la logique combinatoire, permet l'expressivité intrinsèque des propriétés des opérateurs sans faire aucune référence, de façon implicite ou explicite, aux domaines de variations des variables – nous en avons vu un exemple, au paragraphe 5.6., avec la commutativité de l'opérateur « $\forall$ » exprimée par l'équivalence entre opérateurs « $\forall$ » [=def C+] – d'où la possibilité de définir et de manipuler le polymorphisme des opérateurs, lequel est nécessaire aux formalismes de haut niveau (par exemple pour les langages du premier ordre et la plupart des langages de programmation, (cf. [Hudak, 1989]) car ils s'inscrivent dans la compréhension cognitive progressive du symbolisme (arithmétique, algébrique, fonctionnel, logique, métalinguistique...) avec ses extensions formelles successives<sup>50</sup>.

#### 6.4. LES QUANTIFICATEURS COMME OPÉRATEURS DE DÉTERMINATION DES TERMES

A la suite de Curry, nous considérons que les formalismes qui diffèrent seulement par des *variations notationnelles sémiotiques* – parfois importantes, comme nous l'avons montré au paragraphe précédent – sans atteindre à la signification profonde des agencements symboliques mis en jeu, sont en fait *différentes présentations* d'un même formalisme invariant, souvent plus abstrait et pas toujours explicite. Lorsque le changement des formalismes introduit des changements dans la signification des représentations symboliques, ces formalismes expriment alors souvent des phénomènes opératoires distincts. Comme nous venons de le montrer, les formalismes classiques «*avec variables liées*» et illatifs «*sans variables liées*», expriment sous forme de variations sémiotiques les mêmes idées fondamentales de Frege sur la quantification. En revanche, la théorie des quantificateurs «*stars*», dont nous allons esquisser quelques unes des idées de base, n'est pas une variante notationnelle de la théorie de Frege. Cette théorie exprime des idées différentes sur la quantification, car elle est associée à «*opération de détermination*», absente de la logique classique, tout en maintenant des relations avec la logique illative classique.

Depuis Aristote, en passant par les théories médiévales de la *suppositio*, de Pierre d'Espagne ou de Guillaume d'Occam, puis par la *Logique de Port Royal*<sup>51</sup>, l'approche plus traditionnelle de la quantification considère plutôt *les quantificateurs comme des déterminants de termes*<sup>52</sup> plutôt que comme des *opérateurs constructeurs de propositions ou de prédicats d'arité moindre*. Le formalisme illatif de Curry, avec les opérateurs « $\forall_1$ » et « $\exists_1$ », puis avec les opérateurs dérivés, « $\forall_2$ » et « $\exists_2$ » définis dans le cadre de la logique combinatoire, fait bien apparaître, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, ce rôle formel des quantificateurs, alors que le formalisme avec variables liées ne le rend pas transparent, du moins par le jeu des notations. Il est cependant possible de définir également d'autres opérateurs de quantification, distincts des quantificateurs frégréens ou apparentés (à savoir « $\forall x$ », « $\forall x$ » ou « $\forall_1$ » et « $\exists_1$ » et les dérivés « $\forall_2$ » et « $\exists_2$ »). Ces opérateurs de quantification, que nous avons appelés *quantificateurs «stars»* et que nous avons désignés par « $\forall^*$ » et « $\exists^*$ », sont conçus comme *des déterminants*, c'est-à-dire comme *des opérateurs qui agissent sur des termes*. Nous les avons introduits<sup>53</sup> afin d'une part, de mieux cerner et formaliser la signification des quantificateurs traditionnels «*ante-frégréens*» et d'autre part, de définir

<sup>50</sup> ... par exemple avec le calcul opérationnel d'Heaviside (cf. [Desclés, 1980, 1981]).

<sup>51</sup> Pour une analyse approfondie de la logique chez Port Royal et ses développements au «*siècle des lumières*», cf. les excellents ouvrages de J.-C. Pariente [1985] et de S. Auroux [1993].

<sup>52</sup> Sur cette notion de détermination, cf. J.-C. Pariente [1985, p. 183-258].

<sup>53</sup> Cf. Desclés et Guentcheva [2000], Desclés [1997 (b), 2004], Pascu [1999].

des opérateurs formels de quantification qui seraient en meilleure adéquation avec les représentations sémiotiques opérées par les langues naturelles.

Les quantificateurs  $\llbracket \Sigma^* \rrbracket$ ,  $\llbracket \Sigma \rrbracket$  et  $\llbracket \Pi^* \rrbracket$  sont définis à l'intérieur du cadre de la logique combinatoire. Ils viennent *déterminer* l'extension d'un terme construit à partir d'un prédicat<sup>54</sup>. Prenons, par exemple, le prédicat  $\llbracket \text{est-homme} \rrbracket$  de type  $\llbracket \text{Otp} \rrbracket$ . Un opérateur, désigné par  $\llbracket \tau \rrbracket$  permet de construire  $\llbracket \text{objet typique} \rrbracket \tau(\text{est-homme})$  qui est complètement indéterminé et canoniquement associé au prédicat  $\llbracket \text{est-homme} \rrbracket$ ; cet objet typique est exprimé par le terme linguistique *un-homme*. Ce terme dénote un objet indéterminé typique, il peut recevoir des déterminations supplémentaires, qui seront exprimées par, entre autres, des quantificateurs, qui viennent ainsi préciser et restreindre son extension. Cet opérateur  $\llbracket \tau \rrbracket$  est assez proche de l'opérateur  $\llbracket \tau \rrbracket$  de Hilbert [1939/1970] qui construit un objet à partir d'un prédicat (cf. [Godement, 1966 ; Froidevaux, 1983]) ; il s'en distingue toutefois par la *propriété de typicalité* – cf. § 8.5. – et des autres notions qui en découlent, ainsi que par celle de détermination, ces propriétés étant absentes de la problématique fondatrice de Gottlob Frege, Bertrand Russell et David Hilbert.

Les constructions des représentations logiques des deux énoncés respectifs *il y a au moins un homme qui est mortel* ou de *tous les hommes sont mortels* deviennent maintenant

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ott} \llbracket \Sigma^* \rrbracket & \text{t} \llbracket \text{un-homme} \rrbracket \\
 & \text{-----} & \\
 \text{Otp} \llbracket \text{est-mortel} \rrbracket & & \text{t} \llbracket \Sigma^*(\text{un-homme}) \rrbracket \\
 & \text{-----} & \\
 & \text{p} \llbracket (\text{est-mortel}) (\Sigma^*(\text{un-homme})) \rrbracket & \\
 & & \\
 & \text{Ott} \llbracket \Pi^* \rrbracket & \text{t} \llbracket \text{un-homme} \rrbracket \\
 & \text{-----} & \\
 \text{Otp} \llbracket \text{est-mortel} \rrbracket & & \text{t} \llbracket \Pi^*(\text{un-homme}) \rrbracket \\
 & \text{-----} & \\
 & \text{p} \llbracket (\text{est-mortel}) (\Pi^*(\text{un-homme})) \rrbracket & 
 \end{array}$$

Les termes quantifiés  $\llbracket \Sigma^*(\text{un-homme}) \rrbracket$  et  $\llbracket \Pi^*(\text{un-homme}) \rrbracket$  reçoivent une autre interprétation que celle qui a été donnée par la quantification frégréenne. Ainsi, le terme  $\llbracket \Pi^*(\text{un-homme}) \rrbracket$  s'interprète par  $\llbracket \text{importe quel homme typique} \rrbracket$  et le terme  $\llbracket \Sigma^*(\text{un-homme}) \rrbracket$  par  $\llbracket \text{un (certain) homme indéterminé} \rrbracket$  (sur les notions de typique et de indéterminé, cf. § 8.5.). Par ailleurs, les deux quantificateurs  $\llbracket \Sigma^* \rrbracket$  et  $\llbracket \Pi^* \rrbracket$  sont reliés<sup>55</sup> à leurs homologues frégréens respectifs  $\llbracket \Sigma_2 \rrbracket$  et  $\llbracket \Pi_2 \rrbracket$  ; ils apparaissent cependant comme étant plus *basiques* que les quantificateurs frégréens usuels. On démontre qu'il s'en déduit un *cube*, qui généralise le *carré* d'Aristote, dans lequel les expressions quantifiées  $\llbracket \Sigma_2 \text{ fg} \rrbracket$ ,  $\llbracket \Pi_2 \text{ fg} \rrbracket$ ,  $\llbracket \Sigma^* \text{ f} \rrbracket$  et  $\llbracket \Pi^* \text{ f} \rrbracket$  avec leur

<sup>54</sup> Cf. Pascu [1999], Desclés [2004], Freund et al. [2004], Desclés et Pascu [2006].

<sup>55</sup> La relation formelle est établie à l'aide de combinateurs. Nous ne développerons pas, ici, la théorie des quantificateurs  $\llbracket \Sigma^* \rrbracket$  intégrée à la Logique de la Détermination d'Objets (LDO). Sur ce point, cf. Desclés et Guentcheva [2000], Pascu [1999], Desclés [2002, 2004], Desclés, Pascu, [2006]. Cf. aussi la note 60.

négations respectives, sont les 8 sommets du cube, les arêtes étant les diverses relations établies entre ces expressions [Pascu, 1999] [Desclés, 2004].

En travaillant avec un formalisme comme celui de la logique combinatoire de Curry, il devient possible de définir une autre approche de la quantification que le formalisme avec variables liées ne permettait pas aussi facilement<sup>56</sup>. On a pu par exemple «éliminer» les variables quantifiées, c'est-à-dire qui tombaient sous la portée d'un quantificateur, à l'aide de combinateurs<sup>57</sup> sans pour autant s'interdire de reformuler les «idées» frégréennes sur la quantification, dans une nouvelle présentation sans variables liées. Cependant, le choix d'un formalisme, avec ou sans variables liées, *n'est donc pas neutre* puisqu'il permet, entre autres, de *rendre transparent, ou non*, le rôle constructif de certains opérateurs (par exemple les rôles tenus par les quantificateurs frégréens) pour, ensuite, procéder, éventuellement, à certaines extensions (par exemple définir les quantificateurs «stars», conçus comme des opérateurs de détermination d'objets). En ayant «la forme pure de l'opérateur» pour horizon, l'élimination des variables liées par Curry<sup>58</sup> nous fait monter dans l'abstraction et dans la compréhension des formalismes car elle permet de donner un nouvel éclairage sur les propriétés de certaines entités manipulées (variables, fonctions, prédicats, quantificateurs) et conduit ainsi à épurer un formalisme logique des accidents parasites qui sont simplement imposés par la présentation sémiotique choisie.

*Remerciements.* Les auteurs remercient Michael Freund pour sa relecture attentive ainsi que les rapporteurs anonymes de la revue.

## BIBLIOGRAPHIE

- AJDUKIEWICZ K., “Die Syntaktische Konnexität”, *Studia Philosophica*, 1, 1935, p.1-27.
- AUROUX S., *La logique des idées*, Paris, Bellarmin, Vrin, 1993.
- BACH Ed., *Categorical grammars as theories of language*, in Oehrle *et al.*, 1988, p. 17-34.
- BACH, Ed., JELINEK H., KRATZER A., PARTEE B., *Quantification in natural languages*, Dordrecht, Kluwer Academic Press, 1995.
- BARBIN E., BOYER A., *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*, Paris, Vuibert, 2005.
- BARENDREGT H. P., *The Lambda calculus, its syntax and semantics*, Amsterdam-New-York,-Oxford, North Holland Publishing Company, 1981, (1984: 2° ed).
- BARWISE J., “Noun phrases, generalized quantifiers and anaphora”, in Gâdenfors P., *Generalized quantifiers, linguistic and logical approaches*, Dordrecht, Reidel, 1987, p. 1-29.

---

<sup>56</sup> D'autres approches formelles veulent capter les problèmes de quantification. Par exemple, les langages de Lesniewski visent à donner une approche catégorielle de la quantification, comme on pourra le voir dans D. Miéville [1984] [P. Joray *et al.* [2002], Joray [2004].

<sup>57</sup> Cf. aussi P. Simons [1988, 1989].

<sup>58</sup> Outre la logique combinatoire de Curry [1958], plus puissante, il existe une autre logique combinatoire, celle de Quine [1960, 1976] qui permet également d'éliminer uniquement les variables d'individus.

- BARWISE J., COOPER R., "Generalized quantifiers and natural languages", *Linguistics and Philosophy* 4, 1981, p. 159-219.
- BENVENISTE E., «Être et avoir" dans leurs fonctions linguistiques», *Problèmes de linguistique générale*, Paris, Gallimard, 1966, p. 187-207.
- BISKRI I., *Analyse formelle de la coordination dans le cadre de la grammaire catégorielle applicative et combinatoire*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sorbonne, 1995.
- BISKRI I., DESCLES J.-P., "Applicative and combinatory categorial grammar (from syntax to functional semantics)", Bulgarie , Acte du *Colloque RANLP*, 1995.
- BOURBAKI N., *Éléments de mathématiques, théorie des ensembles*, Paris, Hermann, 1970.
- BOUTOT A., «La logique combinatoire : une théorie de la morphogénèse», Conférence, Institut des Sciences Humaines, Université de Paris-Sorbonne, 1998.
- BRONOWSKI J., *Sciences and the human values*, New-York, Harper and Row, 1959.
- CANN R., *Formal semantics*, Cambridge, Cambridge University Press, 1993.
- CHARBONNEAU L., «L'algèbre au coeur du programme analytique», in *François Viète, un mathématicien sous la Renaissance*, (sous la direction de E. Barbin et A. Boyé), Paris, Vuibert, 2005, p. 53-73.
- CHURCH A., *The calculi of lambda-conversion*, Annals of Mathematical Studies, 6, Princeton, Princeton University Press, 1951.
- CONDILLAC (de) E., *Langue des calculs*, 1798, Lille, Presses Universitaires de Lille, 1981.
- CORBLIN F., *Représentation du discours et sémantique formelle*, Paris, Presses Universitaires de France, 2002.
- CORDIER F., *Les représentations cognitives privilégiées, Typicalité et niveau de base*, Lille, Presses universitaires de Lille, 1993.
- CULIOLI A., *Variations en linguistique, Entretiens avec Frédéric Fau*, Préface et notes de Michel Viel, Paris, Klincksieck, 2002.
- CURRY H.B., *Outlines of a formalist philosophy of mathematics*, Amsterdam, North Holland Publishing Company, 1951.
- CURRY H.B, FEYS R., *Combinatory logic*, Vol. I, Amsterdam, North-Holland, 1958.
- DESCLÉS, J.-P., *Opérateur / opération - recherches sur les formalismes intrinsèques en informatique fondamentale*, Thèse d'état en mathématiques, Paris, Université René Descartes, 1980.
- DESCLES J.-P., «De la notion d'opération à celle d'opérateur ou à la recherche de formalismes intrinsèques», *Mathématiques et Sciences humaines* 76, 1981, p. 5-32.
- DESCLÉS J.-P., *Langages applicatifs, langues naturelles et cognition*, Paris, Hermès, 1990.
- DESCLÉS J.-P., «Auto-applicativité, paradoxes et logique combinatoire», *Les Cahiers du CREA, Epistémologie et anthropologie*, CREA / École Polytechnique, Paris, 1993, p. 63-119.
- DESCLÉS J.-P., «La logique combinatoire typée est-elle un «bon» formalisme d'analyse des langues naturelles et des représentations cognitives?» in LENTIN A., 1997(a), p. 179-223.



DESCLÉS J.-P., «Logique combinatoire, types, preuves et langage naturel», *Travaux de logique, Introduction aux logiques non classiques*, Centre de recherches sémiologiques, Université de Neuchâtel, 1997(b), p. 91-160.

DESCLÉS J.-P., “Categorization: a logical approach of a cognitive problem”, *Journal of Cognitive Science*, Vol. 3, n° 2, 2002, p. 85-137.

DESCLÉS J.-P., “Combinatory Logic, Language, and Cognitive Representations”, Paul Weingartner (ed.), *Alternative logics. Do sciences need them ?*, Springer, 2003, p. 115-148.

DESCLÉS J.-P., 2004, «Une analyse non frégréenne de la quantification», Pierre Joray (éd.), *La quantification dans le logique moderne*, Paris, L’Harmattan, 2004, p. 263-312.

DESCLÉS J.-P., GUENTCHEVA Z., “Quantification without bound variables”, Böttner et Thümmel (eds), *Variable-free semantics*, 13-14, Osnabrück, Rolandsmauer, Secolo Verlag, 2000, p. 210-233.

DESCLÉS J.-P., PASCU A., “Variables and notions of «Whatever» and «Indeterminate» in logic of determination of objects”, *Journal of Artificial Intelligence Tools*, [à paraître, 2006].

DHOMBRES J., *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, CEDIC, Fernand Nathan, 1978.

DHOMBRES J. et al., *Mathématiques au fil des âges. Textes choisis et commentés* I.R.E.M., Groupe Epistémologie et Histoire, Paris, Gauthier-Villars, 1987.

DIEUDONNE J., *Abrégé d’histoire des mathématiques 1700-1900*, I et II, Paris, Hermann, 1978.

DUBOIS D., *Sémantique et cognition : catégories, prototypes, typicalité*, Paris, Éditions du CNRS, 1991.

DOWTY D., *Type-Raising, functional composition, and non-constituent conjunction*, in Oehrle et al., 1988.

FITCH F. B., *Symbolic logic, An introduction*, New-York, Ronald Press, 1952.

FITCH F. B., *Dictionary of symbols of mathematical logic*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1969.

FITCH F. B., *Elements of combinatory logic*, New Haven and London, Yale University Press, 1974.

FODOR J., “Formal linguistics and formal logic”, John Lyons (ed.), *New horizons in Linguistics*, Harmondsworth, Penguin, 1973.

FREGE G., *Begriffsschrift. Eine formelsprache des reinen denkens*, Halle, 1879.

FREGE G., *Die Grundlagen der arithmetik*, Breslau, Verlag von Wilhem Koebner, 1884.

FREGE G., *Grundgesetze der arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*, Jena, Verlag Hermann Pohle, 1893. Traduit en anglais : *The basic laws of arithmetic, exposition of the system*, translated and edited, with an introduction, by Montgomery Furth, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1967.

FREUND M., DESCLÉS J.-P., PASCU A., CARDOT J., “Typicality, contextual inferences and object determination logic”, 2004 *FLAIRS Meeting*, Miami (Florida), 26 pages, 2004 [à paraître, 2006].

FROIDEVAUX C., «La fonction logique du epsilon de Hilbert à travers les *Grundlagen der Mathematik*», *Mathématiques et Sciences humaines* 84, 1983, p. 65-82.

- GABBAY D., GUENTHNER F., *Handbook of philosophical logic*, Volume IV, *Topics in the Philosophy of Language*, Dordrech, Kluwer Academic Publishers, 1989.
- GENTZEN G., *Recherches sur la déduction naturelle*, traduction de R. Feys et J. Ladrière, Paris, Presses Universitaires de France, 1955.
- GINISTI J.-P., 1997, *La logique combinatoire*, Paris, Presses universitaires de France, col. Que Sais-je, 3205, 1997.
- GINISTI J.-P., « $\Pi$ logique combinatoire logique de l'objet quelconque ou logique de l'opérateur $\Pi$ », *Mathématiques et Sciences humaines* 162, 2003, p. 42-92.
- GOCHET P., *Quine en perspective*, Paris, Flammarion, 1978
- GOCHET P., GRIBOMONT P., *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale*, tome I, Paris, Hermès, 1990.
- GODEMENT R., *Cours d'algèbre*, Paris, Hermann, 1966.
- GONSETH F., *Logique et philosophie des mathématiques*, Paris, Hermann (Nouvelle édition), 1998.
- GRANGER G.-G., *Langages et épistémologie*, Paris, Klincksieck, 1979.
- GRANGER G.-G., *Formes, opérations, objets*, Paris, Vrin, 1994.
- GRIZE J.-B., *Logique moderne*, tome I, Paris, Gauthier Villars, 1969.
- GROENENDIJK J., STOKHOF M., « $\Pi$ dynamic predicate logic», *Linguistics and Philosophy*, 1991, p. 39-101.
- GROOTE (de) P., *The Curry-Howard isomorphism*, Cahiers du Centre de Logique 8, Louvain-la-neuve, Université Catholique de Louvain, Département de philosophie, Academia, 1995.
- HARRIS Z., *Structures mathématiques du langage*, traduit de l'anglais par Catherine Fuchs, Paris, Dunod, 1968/1971.
- HARRIS Z., *Notes du cours de syntaxe*, traduit de l'anglais par Mauricer Gross, Paris, Éditions du Seuil, 1976.
- HARRIS Z., *A Grammar of English on mathematical principles*, New-York, John Wiley & Sons, 1982.
- HARRIS Z., *A theory of language and information, a mathematical approach*, Oxford, Clarendon Press, 1991.
- HEIM I., "E type pronouns and donkey anaphora", *Linguistics and Philosophy* 13, 1990, p 137-177.
- HILBERT D., BERNAYS P., *Grundlagen der mathematik*, II, Berlin, Springer-Verlag, 1939/1970.
- HINDLEY J.R., LERCHER B., SELDIN J.P., *Introduction to combinatory logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 1972.
- HINDLEY J.R., SELDIN J.P., *Introduction to combinators and  $\lambda$ -calculus*, Cambridge University Press, 1986.
- HOOKWAY C., *Quine*, Bruxelles, De Boeck-Wesmael, 1992.
- HUDAK P., "Conception, evolution, and application of functional programming languages", *ACM Computing Surveys*, Vol. 21, n° 3, September 1989, p. 359- 411.
- JORAY P., GODART-WELDING B., « $\Pi$ de la théorie des catégories sémantiques de Lesniewski à l'analyse dans la syntaxe de Ajdukiewicz», *Langages* 148, 2002, p. 28-50.
- JORAY P. (éd.), *La quantification dans la logique moderne*, Paris, L'Harmattan, 2004.

- KAHANE S. (sous la direction de), *Les Grammaires de dépendance. Traitement automatique des langues*, Techniques et science informatique, Vol. 41, n°1, Paris, Hermès, 2000.
- KAMP H., "A Theory of truth and semantic representation", Groenendijk *et al.* (eds), *Formal Methods in the study of language*, Amsterdam, Mathematical Centre Tracts, 135, 1981, p. 277-322.
- KAYSER D., LEVRAT B. (sous la direction), *Traitement automatique du langage naturel*, Techniques et science informatique, Vol. 20, n°3, Paris, Hermès, 2001.
- KEENAN E., FALTZ L.M., *Boolean semantics for natural language*, Dordrecht, Reidel, 1985.
- KLEIBER G., *La sémantique du prototype : catégories et sens lexical*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991.
- KLINE M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford, Oxford University Press, 1972.
- KRIVINE J.-L., *Théorie axiomatique des ensembles*, Paris, Presses Universitaires de France, 1969.
- LADRIÈRE J., «Le symbolisme comme domaine de l'opérateur», *L'articulation du sens*, Paris, Les éditions du CERF, 1973, p. 51-72.
- LADRIÈRE J., 1984, «L'explication en logique», *L'explication dans les sciences*, Paris, Flammarion, 1984.
- LAMBEK J., "The mathematics of sentence structure", *American Mathematical Monthly* 65, 1958, p. 154-165.
- LAMBEK J., "On the calculus syntactic types", *Proceeding of symposia in Applied Mathematics*, Vol. XII, Providence, Rhode Island, America Mathematical Society, 1961, p. 166-178.
- LAMBEK J., Scott P.J., *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 1986.
- LAWVERE F.W., "Functorial semantics of algebraic theories", *Proc. Nat. Acad. Sci.* 52, U.S.A., 1963, p. 1506-1511.
- LAWVERE F.W., *Sets for mathematicians*, Cambridge, Cambridge University Press, 2003.
- LENTIN A., *Mélanges de mathématiques, linguistique, informatique offerts à André Lentin*, Paris, Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales avec le concours du CNRS, 1997.
- LE NY J.-F., *Science cognitive et compréhension du langage*, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.
- LEROUX J., *Introduction à la logique*, Diderot Multimedia, 1998.
- MIÉVILLE D., *Un développement des systèmes de Stanislas Lesniewski, Protothétique, Ontologie, Méréologie*, Berne, Peter Lang, 1984.
- MOLK J. (sous la direction de), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquée*, Publiée sous les auspices des académies des sciences de Göttingue, de Leizig, de Munich et de Vienne avec la collaboration de nombreux savants, Édition française sous la direction de Jules Molk, Tome I, *Arithmétique*, Republication Éditions Jacques Gabay, 1992.
- MORRIS C., *Writings on the general theory of signs*, The Hague, Mouton, 1971.
- NEF F., «Des variables aux objets arbitraires», *Travaux du centre de recherches sémiologiques, Raisonement et calcul*, n° 63, septembre 1995, p. 149-159

- NEF F., *L'objet quelconque. Recherches sur l'ontologie de l'objet*, Paris, Librairie Philosophique J. Vrin, 1998.
- OEHRLE R.T., BACH E., WHEELER D., *Categorial grammars and natural languages structures*, D. Reidel, 1988.
- PARIENTE J.-C., *L'analyse de langage à Port-Royal, six études logico-grammaticales*, Paris, Les Éditions de Minuit, 1985.
- PARTEE B.H., *Quantificational structures and compositionality*, Bach et al., 1995, p. 541-601.
- PASCU A., *Logique de la détermination d'objets □ approche logique de la typicalité*, Thèse de doctorat, Paris, Université de Paris-Sorbonne, 1999.
- PEIRCE C.S., *Collected Papers*, Ch. Hartshorne, P. Weiss (eds), Vol. I-VI, Vol. VII-VIII, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1960.
- QUINE W.V.O., "Variables explained away", *Proceedings of the American Philosophical Society*, Vol. 104, 1960, p. 343-347.
- QUINE W.V.O., "Algebraic logic and predicate functors", *The Ways of Paradox and Other Essays*, Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1976, p. 283-307.
- QUINE W.V.O., *Méthodes de logique*, Paris, Armand Colin, 1959/1972.
- QUINE W.V.O., *Logique élémentaire*, Paris, Armand Colin, 1965/1972
- QUINE W.V.O., *Le mot et la chose*, Paris, Flammarion, 1977.
- RANTA A., *Type-Theoretical Grammar*, Oxford, Oxford Sciences Publications, Clarendon Press, 1994.
- ROSSER J.B., "A mathematical logic without variables", Part I: *Annals of Maths.* (2) 36, 1935, p. 127-150; Part II: *Duke Math. J.* 1, 1935, p. 328-55.
- ROUILHAN (de) P., *Frege, les paradoxes de la représentation*, Paris, Les éditions de Minuit, 1988.
- RUSSELL B., *Principles of Mathematics*, London, Allen et Unwin, 1903. Trad. partielle in *Ecrits de logique philosophique*, Paris, Presses Universitaires de France, 1989.
- SCHÖNFINKEL M., "Über die bausteine der mathematischen logik", *Math. Annalen* 92, 1924, p. 305-15.
- SHAUMYAN (SAUMJAN) S.K., *Strukturalnaja linguistica*, Moskva, Nauka, traduit en anglais, *Principles of structural linguistics*, The Hague, Mouton, 1965/1971.
- SHAUMYAN S.K., *Applicationnal grammar as a semantic theory of natural language*, Chicago, Chicago University Press, 1977.
- SHAUMYAN S.K., *A Semiotic theory of language*, Bloomington, Indiana University Press, 1987.
- SIMONS P., "Functional operations in Frege's *Begriffsschrift*", *History and Philosophy of Logic* 9, 1988, p. 35-42.
- SIMONS P., "Combinators and categorial grammar", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol 30, n° 2, Spring, 1989, p. 241-261.
- SOMMERS F., *The Logic of Natural Language*, Oxford, Clarendon Press, 1982.
- SOMMERS F., "Term functor grammars", in M. Böttner et W. Thümmel, *Variable-free Semantics*, Osnabrück, Secolo Verlag, 2000, p. 68-89.
- STEEDMAN M., *Combinators and Grammars*, in Oerhle et al., 1988, p. 207-263.
- STEEDMAN M., *The syntactic process*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 2000.

STOY J. E., *Denotational semantics: the Scott approach to programming language theory*, Cambridge (Mass.), The MIT Press, 1977.

TATON R. (sous la direction de), *Histoire générale des sciences*, Tome 2 □ *La science moderne*, Paris, Presses Universitaires de France, 1958.

TESNIÈRE L., *Éléments de syntaxe structurale*, Paris, Klincksieck, 1966.

TODOROV S., *Théorie du symbole*, Paris, Seuil, 1977.

VERNAND D., *Bertrand Russell*, Paris, Flammarion, 2003.

WESTERSTÄHL D., *Quantifiers in formal and natural languages*, in Gabbay et Guenther, 1989, p. 1-131.