STAMPFEL-FÉLE
TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR
44.

Dr. Lévay Ede

ALGEBRA

Ára 30 Kr. = 60 fill.

POZSONY – BUDAPEST
KIADJA
STAMPFEL K.

Folytatás a túlsó oldalon.

22. **Magyar poétika.** Irta Gaal Mózes.
23. **Planimétria** példatárral. Irta Dr. Lévay Ede.
24. **A római nemz. irod. tört.** Irta Márton Jenő.
25. **Német nyelvtan.** Irta Albrecht János.
26. **Oszmán-török nyelvtan.** Irta Dr. Pröhle Vilmos.

27—30. **Áruisme-Lexikon.** Irta Dr. Koós Gábor.
31—34. **Magyar magánjog.** Irta Dr. Katona Mór.
35. **Számtan.** Irta Dr. Lévay Ede.
36. **Logarithmustáblák.** Összeállította Polikeit Károly.
37—38. **Magyarország őskora.** Irta Darnay Kálmán.
39—40. **Magyar büntetőjog.** Irta Dr. Atzél Béla.
41—42. **A bűnvádi perrendtartás.** Irta Dr. Atzél Béla.
43. **Kis növénygyűjtő.** Összeállította Dr. Cserey Adolf.
44. **Algebra.** Irta Dr. Lévay Ede.
45. **A magyar helyesirás törvényei.** Irta Gaal Mózes.
46. **Ábrázolástan.** Irta Kolbai Arnold.

A „Tudományos zseb-könyvtárban" legközelebb, de időhöz nem kötötten, a következő kötetek megjelenése van tervbe véve:

Aesthetika
Alkotmánytan
Államszámviteltan
Áruisme és vegytan
Astronomia
Chémia (szerves)
Chémia (szervetlen)
Egyházjog (Prot.)
Egyháztörténet
Építészeti stilisme
Észjog
Ethika
Fogalmazványok
Földrajz (politikai)
Földtan
Geologia
Geometria (analytica)
Görög irod. tört.
Görög régiségek
Gyorsirás
Jogtörténet
Kereskedelem-isme
Keresk. földrajz
Kereskedelmi jog

Keresk. szokások ismert.
Közigazgatási jog
Közjog
Léiektan
Logika
Math. és phys. földrajz
Művelődéstörténet
Mythologia
Német helyesirás
Német irodalomtörténet
Nemzetgazdaságtan
Népisme
Oktatási módszertan
Olasz nyelvtan
Orosz nyelvtan
Paedagógia
Pénzügyi jog
Pénzügytan
Polg. perrendtartás
Politika

Phys. repetitorium:
Mechanika és akustika
Optika és hötan
Elektromosság és mágnesség
A kosmograph. elemei
Rajzolás
Statisztika
Stereometria és sphaerikai trigonometria.
Természetrajz:
Állattan
Bogárgyüjtö
Rovargyüjtö
Lepkegyüjtö
Növénytan
Gombaisme
Ásványtan
Tornatanitás
Váltójog
Világtörténet
Zene műszavak gyüjteménye
Zeneelmélet és összhangzattan.

Minden egyes füzet 30 kr.

Stampfel Károly kiadásában Pozsonyban

megjelent és általa, valamint minden hazai könyvárustól megszerezhető:

Nemzetünk nagy költői.

Szerkeszti ***Gaal Mózes.***

Ezen vállalatban a magyar szellem kiválóbb képviselőinek: a költőknek, a regény- és drámairóknak nem száraz életrajzaik, hanem élvezetesen és érdekesen megírt jellemképeik, műveiknek az életrajz keretébe foglalt eszthétikai fejtegései 3—4 íves, csinos füzetekben fognak megjelenni Azok is kedvvel forgathatják, a kik a szóban forgó irót olvasták, s azok is megértik, akiknek meg nem volt módjukban az illető írók műveit olvashatni. — Eddig megjelentek: **Tompa, Petőfi, Arany, Balassa, Gyöngyösi, Zrinyi, Csokonai, Berzsenyi, Kazinczy** és **Kölcsey** élete és költészete.

A csinosan és izléssel kiállitott füzetek ára egyenkint 40 fillér.

Földrajzi és statisztikai zseb-atlasz.

Ezen zseb-atlaszt mindenki élvezettel fogja tanulmányozni, mert közérdekű dolgok oly sokaságát közli világos előadásban, mint a mennyi **ily alakban eddigelé egy általában még nem került nyilvánosságra.**

Ára díszes vászonkötésben 5 korona.

STAMPFEL-FÉLE
TUDOMÁNYOS ZSEB-KÖNYVTÁR.
44.

ALGEBRA.

IRTA

DR. LÉVAY EDE,
KIR. FŐGYMN. TANÁR.

POZSONY. 1900. BUDAPEST.
STAMPFEL KÁROLY KIADÁSA.

A „TUDOMANYOS ZSEB-KÖNYVTÁR"-ban

ugyanazon szerzőtől megjelent:

2. sz. **Arithmetikai és algebrai példatár.**
14. „ **A sik trigonometriája.**
23. „ **Planimetria.**
35. „ **Számtan.**
44. „ **Algebra.**

Legközelebb pedig meg fognak jelenni:

Stereometria és sphaerica trigonometria.
Analytica geometria.
Physikai repetitorium:
1. Mechanika és hangtaa.
2. Optika és hőtan.
3. Elektromosság és mágnesség.

*Egy füzet ára 30 kr. = **60** fillér.*

Eder István könyvnyomdája Pozsonyban.

ELSŐ RÉSZ.

Az algebra négy első alapművelete.

1. §. Általános fogalmak.

Az algebra feladata a mennyiségekre vonatkozó kérdések *rövid, egyszerű* és mindenekfölött *általános* megoldása. *Newton* az algebrát *általános számtannak* nevezte.

Az általánosítás némely esete már a közönséges számtanban is előfordul, így: a kamatszámítás képleteinél, a kör kerületét és területét kifejező értékeknél és a többi.

Az algebra czéljának elősegítésére bizonyos műnyelv szolgál, melynek elemei:

1) a *betűk,* ezek nem egyebek, mint oly számok, melyeknek értékeivel egyelőre nem törődünk. Általánosan elfogadott elv, hogy az *abc* elejéről vett betűk az *adott* (ismert), a legvégéről vett betűk (x, y, z) pedig az *ismeretlen* mennyiségek jelölésére szolgálnak. A számitásban előforduló analog mennyiségeket ugyanazon, de indexek ál.al megkülönböztetett betűkkel jelöljük, így: a_1, a_2, a_3 . . . . vagy a', a'', a''' . . . . (a-egy, a-kettő, a-három stb.);

2) a *műveleti jelek,* ezek pontosan kijelölik a műveleteket, melyeket két vagy több számmal végeznünk kell;

3) az *egyenlőség* (= egyenlő) és az *egyenlőtlenség* ($>$ nagyobb, $<$ kisebb) **jelei**, melyeket a mennyiségeknek a nagyság szempontjából való összehasonlításánál használunk; majd

4) a *zárójelek,* ezek oly mennyiségek egybefoglalására szolgálnak, a melyekkel ugyanazt a műveletet kell elvégeznünk.

Az algebrában hét alapművelet van és pedig: az *összeadás* és annak fordítottja a *kivonás;* a *szorzás* és annak fordítottja az *osztás;* az egyenlő tényezők szorzása vagyis a *hatványozás* és az ebből eredő *gyökvonás* és *logarithmálás.* A négy első alapművelet lényegét már a számtanból is eléggé ismerjük, ezek kijelentésére ugyanazon jelek szolgálnak, mint a számtanban, kivételt csakis a szorzás képez, mert $5 \times a$, vagy $a \times b \times c$ helyett itt egyszerüen: $5a$, vagy abc írható.

A betűmennyiség elé írt számot *együtthatónak* vagy *coefficiensnek* nevezzük, ez azt mutatja, hogy hányszor kell az utána következő mennyiséget összeadandóúl tekinteni. Igy az $5a$-ban 5 a coefficiens és $5a$ nem egyéb, mint rövidebb felirási módja az $a + a + a + a + a$ összegnek. *Az egységet mint coefficienst nem szokás felirni.* A coefficiens betűmennyiség is lehet, így az ax-ben a a coefficiens.

Az egyenlő tényezők szorzatát *hatványnak* (potentia), magát a műveletet *hatványozásnak* nevezzük. Valamely számot 2-ik, 3-ik . . . . n-edik hatványra emelni annyit jelent, mint az illető számot 2-szer, 3-szor, n-szer önnönmagával megszorozni. Tehát a^5 nem egyéb, mint rövidebb félirási módja az $a \times a \times \times a \times a \times a$ szorzatnak. Az adott számot *alapnak* vagy *gyöknek* (basis, radix) azt a számot, a mely megmutatja, hogy az alap hányszor veendő tényezőül *kitevőnek* (exponens) nevezzük. A kitevőt az alaptól jobbra felűl, kisebb számmal szoktuk felírni, így: $a^2 = a \times a$ vagy $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$. Itt 5 az alap, 3 a kitevő, 125 a hatvány. Az egységet mint exponenst nem irjuk ki.

Azt a műveletet, mikor adott *hatványból* és *kitevőből* az *alapot* határozzuk meg, *gyökvonásnak* nevezzük. E művelet jele a radix szó kezdő r betűjének eltorzitásából származó $\sqrt{}$ gyökjel. Igy ha azt kérdezem, melyik az a szám, a mely 3-szor önnönmagával szorozva 125-öt ad, lesz: $\sqrt[3]{125} = 5$. Itt 125 a *gyökzendő* vagy *gyökalatti mennyiség,* 3 a *gyökkitevő,* 5 a *gyök.* A 2-t, mint gyökkitevőt nem irjuk fel.

Valamely szám n-edik gyökének azt a számot hívjuk, a mely n-edik hatványra emelve az adott értékre vezet.

Gyakran ismeretes az alap és a hatvány, keresendő a kitevő. E kitevő neve *logarithmus,* azért az az ilyen műveletet *logarithmálásnak* nevezzük. Jele: $\log_a b = x$ (logarithmus a alapra b egyenlő x) és ennek értelme az, hogy: $a^x = b$. Igy: $\log_{10} 1000 = 3$ azaz: $10^3 = 1000$.

A betűk és az algebrában használatos jelek segítségével felírt mennyiségeket *algebrai kifejezéseknek* nevezzük. Az algebrai kifejezések legtöbbször $+$, vagy $-$ jelekkel elkülönített részekből állanak. Minden ilyen rész egy-egy *tag*. A $+$ jellel, vagy jel nélkül felírt mennyiséget *positiv*nak, a $-$ jellel bírót *negativ*nak hívjuk. Negativ számhoz a kivonás vezet, mikor a kivonandó nagyobb, mint a kisebbítendő. A positiv és negativ számok a zérustól kiindulva mindkét irányban a végtelenségig terjednek s a *viszonyított* vagy *algebrai számsort* alkotják. Az előjel nélkül felirt számokat *absolut* számoknak nevezzük. Két egyenlő, de jelre nézve különböző mennyiség megsemmisíti egymást. A positiv és negativ számokat *ellentett mennyiségeknek* is nevezik.

A jelből, együtthatóból és egy vagy több jel nélkül egymás mellé írt betűből alkotott algebrai kifejezést *egytagúnak* (monom) nevezzük. Ilyenek: a^3, $4a^2b$, $-5cx^4$ és a többi. A $+$, vagy $-$ jellel összekapcsolt kifejezéseket *összetett algebrai kifejezéseknek* hívjuk, még pedig a tagok száma szerint: *kéttagúaknak* (binom), *háromtagúaknak* (trinom) és *többtagúaknak* (polynom). Ilyenek:

$$5a^4 - 9b^3;\quad 7c^2 - 2d + 6a^3;\quad \frac{5}{x} + 3y + \frac{z}{4} - 15ax^2y^3z.$$

Ha a többtagú algebrai kifejezésben ugyanazon betűmennyiségnek különböző hatványai fordúlnak elő, akkor az áttekintés megkönnyítése czéljából a tagokat az illető betű *fogyó* vagy *növekedő* hatványai szerint rendezhetjük. Pl.

Fogyólag: $x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x + 4$;
Növekedőleg: $4 + 6x + 5x^2 - 3x^3 + x^4$.

Az olyan algebrai kifejezést, mely gyökjelet nem tartalmaz *rationalisnak*, a gyökjelet tartalmazót pedig *irrationalisnak* hívjuk. Pl. $5x^2 + 6y$ rationalis, $ab + \sqrt{c}$ irrationalis kifejezés.

Az osztási jelet nem tartalmazó algebrai kifejezés *egész*, ellenben az ily jelet tartalmazó *tört* kifejezés. Pl.
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ egész, $a^3 - \frac{b+c}{2} + bc$ tört kifejezés.

Az egytagú algebrai kifejezésnek valamely betűre vonatkoztatott *fokát* az illető betű exponense, több betűre vonatkoztatott fokát pedig az illető betűk exponenseinek összege szabja meg. Pl. $5a^3b^2c^3$ kifejezés *a*-ra nézve 3-ad, *b*-re nézve 2-vel, *c*-re nézve 3-ad, mind a 3 betűre nézve 8-ad fokú. A többtagú algebrai kifejezésnek egy betűre vonatkoztatott fokát az illető betű legmagasabb hatványa határozza meg. Pl. $ax^5 - bx^4 + cx^2 + d$ kifejezés x-re nézve 5-öd fokú.

*Homogén*nek az olyan többtagú algebrai kifejezést nevezzük, a melynek tagjai az azokban foglalt különböző betűmennyiségekre vonatkoztatva egyenlő fokúak. Pl. $4x^2y + 5xy^2 - 6x^3 + 7y^3$. Itt valamennyi tag 3-ad fokú. Ez a kifejezés homogén.

Az olyan mennyiségek, melyekben ugyanazon betűk ugyanazon exponensekkel ellátva fordúlnak elő *egyneműek,* noha különböző jellel és coefficienssel bírnak. Ha két mennyiségben a betűmennyiségek, vagy az exponensek különbözők, akkor azok *különneműek.* Pl. $5a^2$, $-7a^2$; $8xy^3$, $3xy^3$; $\frac{5}{6}x^2y$, $-2x^2y$ egynemű, $3xy^2z$, $5x^2yz$; a, $-3ab$ stb. különnemű mennyiségek.

Az egynemű mennyiségek *összevonhatók,* azaz egyetlen velük egyenlőértékű taggá egyesíthetők. Az összevonás a következő szabály szerint végezhető. *Ha az összevonandó tagok egyenlő előjellel bírnak, akkor a közös előjelet megtartjuk, a coefficienseket összeadjuk s a közösen előforduló betűmennyiségeket exponenseikkel együtt felirjuk. Ha az összevonandó tagok különböző előjelüek, akkor: összeadjuk előbb a positiv, majd a negativ tagok coefficienseit; azután az így nyert nagyobb összegből levonjuk a kisebbiket; a különbség elé a nagyobbik szám jelét írjuk, végűl a megtalált szám után egyszer leírjuk a tagokban szereplő valamennyi betűt megfelelő exponensével együtt.* Pl. Vonjuk össze a következő kifejezést: $8a^2b - 5a^2b + 7a^2b - 6a^2b$. A positiv tagokból lesz: $15a^2b$; a negativ tagokból pedig: $-11a^2b$; a kettő együtt:

$$15a^2b - 11a^2b = 4a^2b \cdot$$

Ha valamely algebrai kifejezésben a betűmennyiségek helyére bizonyos számokat írunk, akkor *behelyettesítést* végzünk. Valamely algebrai kifejezés *számértékének* azt az értéket nevezzük, melyhez akkor jutunk, ha a behelyettesített számokon a kijelentett műveleteket elvégezzük. Ha felteszszük, hogy az $a^3b + 5a(b - 2c) + 2c^2 - 3ac$ kifejezésben: $a = 3$, $b = 4$, $c = 1$, akkor:

$$a^3b + 5a(b - 2c) + 2c^2 - 3ac = 3^3 . 4 + 5 . 3(4 - 2) + 2 . 1^2 - 3 . 3 . 1 = 27 . 4 + 15 . 2 + 2 - 9 = 140 - 9 = 131.$$

Az egyenlőség jelével összekapcsolt algebrai kifejezéseket *egyenleteknek* hívjuk.

2. §. Algebrai mennyiségek összeadása.

Az algebrai összeadás czélja több adott algebrai kifejezésnek — az *összeadandóknak* — egyetlen-egygyé — az *összeggé* (summa) — való egyesítése oly módon, hogy a nyert új kifejezés számértéke az adott kifejezések számértékeinek összegével legyen egyenlő.

Minthogy $a + b$ éppen annyi egységet tartalmaz, mint $b + a$; ennélfogva $a + b = b + a$, azaz: *az összeg értéke nem változik, ha az összeadandó részek sorrendjét megváltoztatjuk.*

Algebrai mennyiségeket ugy adunk össze, hogy azokat jeleikkel egymás mellé irjuk, azután az előforduló egynemű mennyiségeket összevonjuk. Hogy e szabályt igazoljuk, legyen az $a + b$ kéttagúhoz a $c - d$ kéttagú kifejezés hozzáadandó, akkor ha c-t hozzáadjuk az $a + b$-hez, lesz: $a + b + c$. Azonban $a + b$-hez csakis a d-vel kisebbített c adandó, így tehát az $a + b + c$ összeg a kelleténél d-vel nagyobb s így abból még d egység elveendő, miáltal:

$$(a + b) + (c - d) = a + b + c - d,$$

tehát a szabály igazolást nyert.

Az egynemű tagok összevonásának megkönnyebbítésére azokat egymás alá irjuk. Pl.

$$\begin{array}{r} 4a^2 - 3b^3 + 2c \\ -3a^2 + 2b^3 - c \\ 2a^2 - b^3 - 3c \\ \hline 3a^2 - 2b^3 - 2c \end{array}$$

Az algebrában az összeadás nem von mindig — mint a számtanban — értéknövekedést maga után, hanem csakis akkor, mikor az összeedandó részek positiv mennyiségek. Ha a-hoz $-b$ adandó, akkor e két szám *algebrai összege:* $a - b$ kisebb, mint a magában véve volt.

3. §. Algebrai mennyiségek kivonása.

Az algebrai kivonás czélja két adott algebrai kifejezéshez — a *kisebbítendő-* és *kivonandóhoz* — oly harmadikat — a *különbséget* — keresni, melynek számértéke a kivonandó számértékéhez adva a kisebbítendő számértékére vezet.

Az algebrai kivonást úgy végezzük el, hogy a változatlan kisebbítendőhöz hozzácsatoljuk a kivonandót oly módon, hogy minden tagjának jelét ellenkezőre változtatjuk s azután az előforduló egynemű mennyiségeket összevonjuk.

Igy: 1) az a és b egytagúak különbsége lesz: $a-b$; 2) az a és $-b$ egytaguaké: $a+b$; 3) az $a+b-c$ és $d-e+f$ többtagúaké: $a+b-c-d+e-f$.

Hogy ezeket az eredményeket igazoljuk, csakis azt kell tekintetbe vennünk, hogy a kivonásnál:

$$\textit{különbség} + \textit{kivonandó} = \textit{kisebbítendő};$$

tehát:

$$1)\ (a-b)+b=a,$$

mert $+b$ és $-b$ ellentett mennyiségek egymást megsemmisítik, hasonló okból:

$$2)\ (a+b)-b=a$$

$$3)\ (a+b-c-d+e+f)+(d-e+f)=a+b-c.$$

Az algebrai kivonás, amint a 2) alatt foglalt esetből kiderül, a számtani kivonástól eltérőleg, nem jelent mindig érték-kisebbedést. Valóban, ha azt a kérdést vetjük fel, mily nagy A és B pénzbeli állapota között a különbség, feltéve, hogy A zsebében 10 korona van, B-nek pedig 5 korona az adóssága, azaz -5 korona a vagyona, akkor erre a felelet: különbség $= 10-(-5) = 10+5 = 15$ korona. Tényleg B-nek 15 koronát kellene kapnia, hogy vagyoni állapota elérje az A-ét.

Hogy az egynemű tagok összevonását könnyebben végezhessük, azokat egymás alá irjuk, tehát ha:

$5a^2x - 6ax^2 + 7cx^3$, többtagúból kivonandó
$3a^2x - 4ax^2 + 5cx^3$, akkor lesz:

$$\begin{array}{r} 5a^2x - 6ax^2 + 7cx^3 \\ -\ 3a^2x + 4ax^2 - 5cx^3 \\ \hline 2a^2x - 2ax^2 + 2cx^3. \end{array}$$

Ha a többtagúak kivonását csakis ki akarjuk jelölni, akkor a kivonandót zárójel közé teszszük s a zárójel elé írjuk a kivonás jelét. A zárójel felbontásánál természetesen elvégezzük a kijelölt műveletet, azaz a zárójelben foglalt tagok jeleit ellenkezőkre változtatjuk. Legyen pl. a-ból kivonandó $-b+c-d+e$, akkor a művelet

a) kijelölve lesz:

$$a-(-b+c-d+e)$$

b) elvégezve:

$$a+b-c+d-e.$$

4. §. Algebrai mennyiségek szorzása.

Az algebrai szorzásnál olyan, *szorzat*-nak nevezett mennyiséget keresünk, a mely nagyságra és előjelre nézve úgy van összetéve a *szorzandóból,* mint a *szorzó* a positiv egységből.

E meghatározásból folyólag:

1) *Bármely mennyiség az egységgel szorozva önmagát adja szorzatul,* mert $a \times 1$ annyit jelent, hogy a egyszer veendő összeadandóul s így $a \times 1 = a$.

2) *Bármely mennyiség zérussal szorozva zérust ad szorzatul,* mert a-t 0-sal szorozni annyit jelent, mint a-ból olymódon származtatni új számot, amint 0 származott a positiv egységből, ámde 0 az egységnek egyszer összeadandóul és egyszer kivonandóul való vétele révén jött létre s így: $1-1=0=a-a$; tehát: $a \times 0 = 0$.

3) *A szorzat értéke nem változik, ha a tényezők rendjét megváltoztatjuk:*

$$ab = ba;\ abc = acb = bac = bca \text{ stb.}$$

4) *A szorzat jelére nézve* a szorzási művelet meghatározásából következik, hogy a hányszor a *szorzó előjele* a positiv egységével megegyezőleg *positiv,* mindannyiszor a *szorzat jele olyan* lesz, *mint a szorzandóé;* ellenben, a hányszor *a szorzó jele* a positiv egységétől eltérőleg *negativ,* mindannyiszor a *szorzat jele ellenkező lesz, mint a szorzandóé;* képletileg:

1) $+\times+=+$; 2) $-\times+=-$; 3) $+\times-=-$;
4) $-\times-=+$.

Ezt a szabályt röviden így foglalhatjuk össze: *egyenlő jellel biró két tényező positiv, különböző jellel biró két tényező negativ előjelű szorzatra vezet.* — Több tényező esetében: *a szorzat positiv, ha valamennyi tényező positiv, vagy ha a negativ tényezők száma páros; ellenben a szorzat negativ, ha a negativ tényezők száma páratlan.*

A szorzásnál a következő eseteket kell sorban tárgyalnunk, miként szorzandó: 1) egytagú mennyiség egytagúval; 2) többtagú egytagúval; 3) többtagú másik többtagúval?

1) Valamely egytagú kifejezésnek egy másik egytagúval való szorzásánál az *előjelekre, coefficiensekre,* a *közösen előforduló betűkre és azok exponenseire* kell figyelmünket fordítanunk. Az *előjelre* nézve már ismerjük a szabályt; a *coefficiensek* a hozzájuk tartozó mennyiségek szorzói lévén (1. §.) megszorzandók egymással; az *egyenlő alappal biró hatvány mennyiségek szorzása* pedig *akként eszközlendő, hogy az alapot megtartjuk s a tényezőkben szereplő exponenseket összeadjuk,* mert pl. $a^3 \times a^4 = a.a.a \times a.a.a.a = a^{3+4} = a^7$ s általánosabban: $a^m . a^n = a^{m+n}$. Ezeket szem előtt tartva, bármilyen egytagú mennyiségnek egy másikkal való szorzását elvégezhetjük. Legyen pl.:

a) $5x^2 . 3x^3y = 15x^5y$; b) $7xy^3 - 4x^2y^2 = -28x^3y^5$;

c) $-9a^3b^2c . 4ab^2c^3 = -36a^4b^4c^4$;

d) $-7x^2 . -5y^2 = 35x^2y^2$.

2) *Valamely többtagú mennyiséget egytagúval úgy szorzunk, hogy a többtagú minden tagját megszorozzuk a szorzóval és a részszorzatokat összeadjuk.* Pl.:

$(x+y+z).a = (x+y+z)+(x+y+z)+(x+y+z)$ $+ \ldots$ *a*-szor, azaz kifejtve:

$$(x+y+z).a = ax+ay+az.$$

Ha valamely algebrai összegben egyenlő szorzó fordul elő az egyes tagokban, az *kiemelhető,* így az $ax+ay+az$ összegből közös tényezőül kiemelhető az *a,* miáltal lesz:

$$ax+ay+az = a.(x+y+z).$$

3) *Valamely összetett algebrai kifejezést egy másik összetett kifejezéssel úgy szorzunk, hogy az egyiknek minden tagját megszorozzuk a másik kifejezés minden tagjával s az így nyert részszorzatokat összeadjuk.* E szabály igazolására legyen: $(a+b+c) \times (x+y+z)$.

Jelöljük egyelőre az $(x+y+z)$ összeget m-mel, akkor lesz:

$$(a+b+c) \, . \, m = am + bm + cm;$$

vagy m értékét helyettesitve:

$$(a+b+c) \, . \, (x+y+z) = a(x+y+z) + b(x+y+ \\ + z) + c(x+y+z).$$

Az egyenlet jobb oldalát a 2) alatt megismert szabály szerint fejthetjük ki s akkor kimondott tételünk igazolást nyer.

A többtagúak szorzásánál, ha a tényezők valamely betű hatványai szerint rendezett kifejezések, czélszerű a részszorzatokat egyegy taggal jobb felé írni, mivel az ilyenkor egymás alá kerülő tagok gyakran összevonhatók. Legyen pl.:

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
 & & & 5a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a + 4 & & & & & \text{szorzandó} \\
 & & & 7a^3 - 3a^2 + 5a - 1 & & & & & \text{szorzó} \\
\hline
35a^7 & -21a^6 & +28a^5 & -21a^4 & +28a^3 & & & & \\
 & -15a^6 & +9a^5 & -12a^4 & +9a^3 & +13a^2 & & & \\
 & & +25a^5 & -15a^4 & +20a^3 & -15a^2 & -20a & & \\
 & & & -5a^4 & +3a^3 & -4a^2 & +3a & +4 & \\
\hline
35a^7 & -36a^6 & +62a^5 & -53a^4 & +4a^3 & -7a^2 & -17a & +4 &
\end{array}$$

szorzat.

5. §. Nevezetes szorzat-alakok.

1) *Két mennyiség összege szorozva a két mennyiség különbségével, szorzatul a mennyiségek négyzeteinek különbségét adja:*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

A szorzás tényleges elvégzése a tételt igazolja.

2) *A kéttagú kifejezés négyzete háromtagú összeg, melynek részei az első tag négyzete, az első és második tag kétszeres szorzata és a második tag négyzete:*

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2.$$

Ha háromtagú kifejezésnek kivánjuk a négyzetét előállítani, akkor a két első tagot egynek tekintjük s a négyzetet a most megismert szabály szerint fejtjük ki; így:

$$(a+b+c)^2 = [(a+b)+c]^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + \\ + c^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

Háromnál több tag esetében:

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2;\ (a+b+c+ +d+e)^2=[(a+b+c+d)+e]^2 \text{ stb.}$$

3) *A kéttagú kifejezés köbe négytagú összeg, melynek részei az első tag köbe, az első tag háromszoros négyzete szorozva a második taggal, a második tag háromszoros négyzete szorozva az első taggal és a második tag köbe.*

$$(a+b)^3=(a+b)^2.(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a-b)^3=(a-b)^2.(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Kettőnél több tag esetében:

$$(a+b+c)^3=[(a+b)+c]^3=(a+b)^3+3(a+b)^2.c+ +3(a+b)c^2+c^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+ +6abc+3ab^2c+3ac^2+3bc^2+c^3;$$
$$(a+b+c+d)^3=[(a+b+c)+d]^3 \text{ stb.}$$

4) Minthogy a tizes számrendszerbeli számok 10 fogyó hatványai szerint rendezett kifejezésekül tekinthetők; ennélfogva azok négyzetét és köbét úgy álllíthatjuk elé, mint az algebrai összegekét. Legyen pl.:

$$\begin{array}{lrcr}
527^2=(5.10^2+2.10+7)^2= & 250000 & = & 25\\
 & 20000 & & 20\\
 & 400 & & 4\\
 & 7280 & & 728\\
 & 49 & & 49\\
\hline
 & 277729 & & 277729
\end{array}$$

Azaz: *a tizes számrendszerbeli számok négyzetre emelésénél képeznünk kell a legmagasabb számjegy négyzetét, azután minden következő számjegy két részt ad, tudniillik kétszeresének szorzatát az előtte álló számmal és a négyzetét; minden újabb sort egy számmal jobbra írunk az előző alá.* Tehát:

$$\begin{array}{lr}
3124^2= & 9\\
 & 6\\
 & 1\\
 & 124\\
 & 4\\
 & 2496\\
 & 16\\
\hline
 & 9759376.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
0{\cdot}27^2= & 4\\
 & 28\\
 & 49\\
\hline
 & 0\,0729.
\end{array}$$

A köbre emelésnél képezzük a legmagasabb rendű számjegy köbét, azután minden következő számból három részt nyerünk t. i. annak háromszorosát megszorozva az előtte álló szám négyzetével; a háromszoros négyzetét megszorozva az előtte álló számmal és a köbét. A felirás módja olyan, mint a négyzetre emelésnél. Pl.:

$$\overline{234}^3 = \begin{array}{r} 8 \\ 36 \\ 54 \\ 27 \\ 6348 \\ 1104 \\ 64 \\ \hline 12812904 \end{array} \qquad \overline{2\cdot34}^3 = \begin{array}{r} 8 \\ 36 \\ 54 \\ 27 \\ 6348 \\ 1104 \\ 64 \\ \hline 12\cdot812904. \end{array}$$

6. §. Algebrai mennyiségek osztása.

Az osztás czélja két adott mennyiségből, az *osztandóból* és az *osztóból* egy oly harmadikat, a *hányadost* vagy *quotienst* meghatározni, a mely az osztóval megszorozva az osztandót adja szorzatúl. A hányados ilyformán azt mutatja, hogy hányszor lehet az osztót az osztandóból kivonni.

Az osztás meghatározásából következik, hogy:

1) *Ha két mennyiség szorzatát a mennyiségek egyikével elosztjuk, a másikat nyerjük hányadosúl:*

$$ab : a = b.$$

2) *Az osztandó egyenlő az osztó és a hányados szorzatával.* Ha: $a : b = c$, akkor: $a = bc$.

3) *Bármely szám önmagával osztva az egységet, az egységgel osztva önmagát adja hányadosúl:*

$$a : a = 1, \; a : 1 = a.$$

4) *A szorzásnál megismert jelszabály az osztásnál is érvényes, azaz: két mennyiség hányadosa positiv vagy negativ a szerint, amint a két menngiség előjele megegyező vagy ellenkező.*

5) *A 0 bármely számmal osztva zérus hányadost ad; véges szám pedig zérussal osztva végtelen nagyot* (jele ∞) *ad hányadosúl, mert* a-t 0-ból 0-szor, *zérust pedig* a-ból *végtelen sokszor lehet elvenni:*

$$0 : a = 0; \; a : 0 = \infty.$$

6) *Ha ugyanazon alap különböző hatványai fordúlnak elő az osztandóban és az osztóban, akkor a hányadosban az alapot megtartjuk oly kitevővel, melyet úgy nyerünk, hogy az osztó exponensét az osztandóéból kivonjuk:*

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \; a^7 : a^4 = a^3.$$

Itt most *m* és *n*-re nézve három eset lehetséges:

α) $m > n$, akkor: $m^m : a^n = a^{m-n}$.

β) $m = n$, akkor: $m^m : a^m = 1$, ámde: $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$, tehát: $a^0 = 1$.

Bármely szám 0 hatványra emelve egygyel egyenlő.

γ) $m < n$, akkor $m - n$ negativ szám és pedig: $m - n = -(n - m)$. Legyen $n - m = p$, akkor $m - n = -p$ s így:

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^{-p}$$

másfelől:

$$a^m : a^n = a^m : a^m \,.\, a^{n-m} = \frac{a^m}{a^m \,.\, a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^p}$$

innen:

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Ezen utolsó egyenlet szerint: negativ exponenssel biró szám csakis az osztásból eredhet, mégpedig olyankor, mikor az osztandó exponense kisebb az osztóénál s így az ilyen alakú kifejezés tulajdonképen oly törttel egyenlő, melynek számlálója az egység, nevezője pedig az igenleges kitevővel vett hatványmennyiség.

Az algebrai osztás kivételénél négy eset lehetséges; és pedig: a) az osztandó és az osztó egytagú kifejezés; b) az osztandó többtagú, az osztó egytagú; c) úgy az osztandó, mint az osztó többtagú kifejezés, végre d) az osztandó egytagú, az osztó többtagú.

Lássuk sorban ezen eseteket:

a) Ha az osztandó és az osztó egytagúak, akkor a hányados is egytagú; a hányados előjelét az ismert szabály szerint állapitjuk meg, azután az osztandó coefficiensét elosztjuk az osztóéval, vagy ha az osztás tényleg nem végezhető, akkor azt törtalakban kijelentjük; a betűmennyiségekre nézve, amennyiben azok egyenlő alappal biró hatványmennyiségek, a 6. pontban foglalt szabályt követjük, a mennyiben pedig az osztóban és az osztandóban különböző betűk fordulnak elő, azokra nézve a műveletet csak kijelentjük. Pl.:

$$56a^5b^3c^2 : 8a^3b^2c = 7a^2bc;$$

vagy:

$$49x^7y^5z^3 : 7x^4y^2 = 7x^3y^3z^3.$$

Nem végezhető el az egytagúak osztása: ha az osztó coefficiense nincs meg maradék nélkül az osztandóéban; ha az osztóban valamely betű exponense nagyobb, mint ugyanazé az osztandóban; végre ha az osztó valamely betűmennyisége hiányzik az osztandóból. Pl.:

$$27a^5b^3c : 15a^3b^2c^3d = \frac{27a^5b^3c}{15a^3b^2c^3d} = \frac{9a^2b}{5c^2d}.$$

b) Ha az osztandó többtagú, az osztó pedig egytagú, akkor az osztandó minden tagját elosztjuk az osztóval. A 4. §. 2. pontja szerint:

$$(x + y + z) \,.\, a = ax + ay + az.$$

Ha most a szorzat és az egyik tényező van adva, lesz:

$$\frac{ax + ay + az}{a} = \frac{ax}{a} + \frac{ay}{a} + \frac{az}{a} = x + y + z.$$

Pl.: $(36x^2y + 27x^3y^2 - 15x^4y^3) : 3x^2y = 12 + 9xy - 5x^2y^2$.

c) Ha ugy az osztandó, mint az osztó többtagú, akkor legelőször mind a kettőt rendezzük ugyanazon betű fogyó vagy növekedő hatványai szerint; azután az osztandó első tagját elosztjuk az osztó első tagjával, a kijövő eredmény lesz a hányados első tagja s azzal az egész osztót megszorozván, a szorzatot az osztandóból levonjuk. Most folytatjuk a műveletet, nevezetesen a nyert maradék első tagját elosztjuk az osztó első tagjával, a kijövő eredmény lesz a hányados második tagja, melylyel az osztó minden tagját megszorozzuk s a nyert szorzatot az osztandóból levonjuk. A talált második maradék első tagját ismét elosztjuk az osztó első tagjával s így tovább mindaddig folytatjuk ezt az eljárást, amig a maradék 0, vagy az osztónál kisebb szám, amit a rendezett betűmennyiség alacsonyabb foka jelez. Ilyen esetben a nyert hányadoshoz hozzáadjuk utolsó tagúl azt a tört kifejezést, melynek számlálója az utolsó maradék, nevezője az egész osztó.

Hogy az osztási eljárást igazoljuk, csakis az ugyanazon betű növekedő, vagy fogyó hatványai szerint rendezett többtagú mennyiségek szorzására kell visszagondolnunk; e szerint az osztandó első tagja nem más mint az osztó és a hányados első tagjainak pontos, mással össze nem vont szorzata. Ha tehát azt elosztjuk az osztó első tagjával, akkor tényleg csakis a hányados első tagját kaphatjuk. Ha most kivonjuk a hányados első tagjának az osztóval való szorzatát az osztandóból, akkor a maradék nem lehet más, mint a hányados többi tagjának az osztóval való szorzata; másfelől e maradék első tagja nem más, mint a hányados második tagjának az osztó első tagjával való pontos, mással össze nem vont szorzata. Ha tehát azt az osztó első tagjával elosztjuk, megkapjuk a hányados második tagját. Ha most a hányados második tagjának az osztóval való szorzatát a hányadosból levonjuk, a második maradékhoz jutunk, melyre nézve ugyanaz áll, mint az előbbire. Ilyformán az osztási eljárás igazolást nyert. Legyen pl.

$$\begin{array}{r}
(35a^7 - 36a^6 + 62a^5 - 53a^4 + 4a^3 - 7a^2 - 17a + 4) : \\
(5a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a - 4) = \\
= 7a^3 - 3a^2 + 5a - 1 \\
-35a^7 + 21a^6 - 28a^5 + 21a^4 + 28a^3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
-15a^6 + 34a^5 - 32a^4 + 32a^3 - 7a^2 - 17a + 4 \\
-15a^6 - 9a^5 + 12a^4 - 9a^3 - 12a^2 \qquad\qquad \\
\hline
25a^5 - 20a^4 + 23a^3 - 19a^2 - 17a + 4 \\
-25a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 20a \qquad \\
\hline
-5a^4 + 3a^3 - 4a^2 + 3a + 4 \\
+5a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 3a - 4 \\
\hline
0 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Ha két négyzet különbségét az alapok különbségével osztjuk, az alapok összegét, ha pedig ugyanazon osztandót az alapok összegével osztjuk, az alapok különbségét kapjuk hányadosúl:

$(a^2 - b^2):(a - b) = a + b$; és: $(a^2 - b^2):a + b) = a - b$

Általában:

1) Egyenlő fokú hatványok különbsége az alapok különbségével mindig osztható.

2) Egyenlő fokú hatványok összege az alapok különbségével sohasem osztható.

3) Egyenlő fokú hatványok különbsége az alapok összegével csakis akkor osztható, mikor a kitevő páros szám.

4) Egyenlő fokú hatványok összege a gyökök összegével csakis akkor osztható, ha a kitevő páratlan szám.

Ezek szerint: $(x^m - a^m) : (x - a) =$ maradék nélküli hányadossal; $(x^m + a^m) : (x - a)$ maradék nélkül nem végezhető; $(x^m - a^m) : (x + a)$ maradék nélkül végezhető, ha *m* páros és $(x^m + a^m) : (x + a)$, ha *m* páratlan szám.

d) Ha az osztandó egytagú, az osztó pedig többtagú kifejezés, akkor ha a hányadost nem akarjuk egyszerüen törtalakban kijelölni, az osztandót olyan többtagúnak tekintjük, melynél az elsőt követő tagok coefficiensei zérussal egyenlők; így tehát itt a *c)* alatt foglalt szabály szerint végezhetjük az osztást. Pl.:

$$a : (1 + a) = \frac{a}{1 + a};$$

vagy:

$$\begin{array}{l} a : (1 + a) = a - a^2 + a^3 - \ldots\ldots \\ \underline{-a - a^2} \\ \quad - a^2 \\ \quad \underline{+ a^2 + a^3} \\ \qquad + a^3. \end{array}$$

Itt a maradék sohasem lesz zérus, hanem az osztást tetszőleges számú tagig folytathatjuk.

A geometriai haladvány. Az osztás néha sajátságos hányados alakra vezet, így:

$$\frac{1 - q^2}{1 - q} = 1 + q; \quad \frac{1 - q^3}{1 - q} = 1 + q + q^2;$$

$$\frac{1 - q^4}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 \text{ és } \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}.$$

A számoknak olyan sorait, mint az itt megismertek, melyeknél bármely tag az előtte állóval elosztva ugyanazon hányadosra vezet, geometriai haladványnak hívjük.

Tehát: 1, 4, 16, 64 stb. geometriai haladvány.

A geometriai haladvány *növekedő* vagy *fogyó*, a szerint, amint tagjai nagyobbodnak vagy kisebbednek.

Az a szám, a mely megmutatja, hogy bármely tag hányszor van meg az utána állóban a *geometriai* *haladvány hányadosa* vagy *quotiense.* Felvett példánkban q a quotiens, 1 az első tag, n a tagok száma, $\frac{1-q^n}{1-q} = s_n$ az n tag összege és $q^{n-1} = a_n$ az n-ik tag.

Ha az első tag nem 1, hanem a, akkor lesz :

$$a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1};$$

itt a az első tag, n a tagok száma, q a quotiens, $a_n = aq^{n-1}$ az utolsó (n-ik) tag és $s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$ a tagok összege.

Feladat. Keressük meg az 1, 3, 9, 27 ... geom. haladvány 7-ik tagját és 7 első tagjának összegét. Az $a_n = aq^{n-1}$ és $s_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$ képletekből: $a_7 = 1 \cdot 3^6 = 729$ és $s_7 = 1 \cdot \frac{2177-1}{2} = 1088$.

7. §. Oszthatóság; törzstényezőkre bontás; a legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többes kikeresése.

Ha valamely szám egy másikkal maradék nélkül osztható, akkor az előbbi *többszöröse* az osztónak, az osztó pedig *mértéke* az adott számnak. — *Az olyan számokat, a melyek önmagukon kivül csakis az egységgel oszthatók, törzs- vagy primszámoknak nevezzük.* Azokat a számokat, melyek az egységen és önmagukon kivül más számokkal is oszthatók, *összetett számoknak* hívjuk. — Valamely szám primszámosztói az illető szám *törzstényezőit* alkotják. Minden szám mint törzstényezőinek szorzata állitható elő; a művelet, a melylyel ezt végezzük, a *számok felbontása törzstényezőkre.* Egyszerű algebrai kifejezéseknél maguk a betűk tekintetnek törzsszámoknak, pl. $mnp = m \cdot n \cdot p$, vagy : $5a^2bc^3 = 5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c$. — Összetett algebrai kifejezéseket nem mindig sikerül így felbontani. Két négyzet különbségét, vagy a kéttagú négyzetét és köbét tudjuk tényezőkre bontani (5 §.), hasonló módon sikerül a felbontás akkor is, ha a tagok közös tényezőt foglalnak magukban, mert akkor azt kiemeljük. (4. §.) Más esetekben a felbontás már sokkal nehezebb. Egy módszert említünk itt csak fel, amely néha sikerrel alkalmazható a többtaguak felbontására.

Legyen a felbontandó kifejezés: $15a^2+8a-7$, akkor az első és harmadik tagot két-két szorzóra bontjuk, így: $15a^2=15a\,.\,a$ és: $-7=-7\,.\,1$, azután képezzük az első tag első tényezőjének a harmadik tag második, és az első tagmásodik tényezőjének a harmadik tag első tényezőjével való szorzatát; ha e szorzatok összege kiadja a középső tagot, akkor a felbontott számok első tényezői jeleikkel egymás mellé irva adják az első szorzót, a második tényezők a második szorzót. Tehát: $15\,.\,a\,.\,1=+15a$ és $a\,.\,-7=-7a$. Most $15a-7a=8a$ ez éppen a középső tag s így a felbontás helyes, a miből: $15a^2+8a-7=(15a-7)(a+1)$. A czélszerűbb berendezés lesz:

$$\begin{array}{ccc} 15a^2 & +\ 8a & -\ 7 \\ 15a & \times & -\ 7 \\ a & & 1 \\ \hline & 8a & \end{array}$$

s így: $15a^2+8a-7=(15a-7)(a+1)$

Vagy legyen felbontandó:

$$21x^2+2x-3$$

$$3x\,.\,7x=21x^2\left\{\begin{array}{ccc} 3x & \times & -1 \\ 7x & & 3 \end{array}\right\}3\,.-1=-3$$

$$\overline{9x-7x=2x}$$

és: $21x^2+2x-3=(3x-1)(7x+3)$

Azt a számot, a mely két vagy több adott számban maradék nélkül található az illető számok közös mértékének nevezzük. Az olyan számokat, a melyeknek, az egységtől eltekintve, nincs közös mértékük *viszonylagos törzsszámoknak* (relativ primszámok) hivjuk. Azt a legnagyobb számot, melylyel két vagy több adott szám maradék nélkül osztható, az illető számok *legnagyobb közös osztójának* mondjuk. *Ha két vagy több szám egy és ugyanazon számmal osztható, akkor azok összege, különbsége, az illető számok többszörösei, a számok osztásából származó osztási maradék szintén osztható a közös mértékkel. — Két szám legnagynbb közös osztójának értéke nem változik, ha az egyiket oly számmal szorozzuk vagy osztjuk, a mely a másiknak nem tényezője.*

Az olyan legkisebb számot, a mely két vagy több adott számmal maradék nélkül osztható, az illető számok legkisebb közös többszörösének nevezzük. A következőkben: a) a legnagyobb közös osztó; b) a legkisebb közös többszörös meghatározási módjaival fognak foglalkozni.

a) *A legnagyobb közös osztó meghatározása:* 1) vagy törzstényezőkre bontással; 2) vagy osztással történik.

1) *A legnagyobb közös osztó meghatározását törzstényezőkre bontással* úgy végezzük, hogy kikeressük az adott számok törzstényezőit, ezek közül a valamennyi adott számban előfordulókat megszorozzuk egymással, ez a szorzat lesz az adott számok legnagyobb közös osztója. Pl. 255 és 330-ra nézve: $255 = 3 . 5 . 17$; $330 = 2 . 3 . 5 . 11$ s így: l. n. k. o. $= 3 . 5 = 15$. Vagy: $8a^2bc^2$ és $6ab^2c^3$-ra. $8a^2bc^2 = 2 . 2 . 2 . a . a . b . c . c$; $6ab^2c^3 = 2 . 3 . a . b . b . c . c . c$; s így: l. n. k. o. $= 2abc^2$.

Minthogy az összetett kifejezések tényezőkre bontása csak ritkán sikerül, azért ezt a módszert azok legnagyobb közös osztójának meghatározásánál nem igen alkalmazhatjuk, hanem az osztási módszert.

2) *A legnagyobb közös osztó meghatározása osztás segítségével* úgy történik, hogy a nagyobbik számot elosztjuk a kisebbikkel, ha maradékot nem kapunk, akkor a kisebbik a két szám legnagyobb közös osztója; hogyha azonban maradékhoz jutunk, akkor az osztót a maradékkal elosztjuk, majd ha ismét maradékhoz jutunk, az első maradékot elosztjuk a másodikkal és így tovább, mindaddig, amig zérus a maradék, ekkor az utalsó osztó lesz a két szám legnagyobb közös osztója. Pl. α) 7425 és 4875-re nézve.

$$\begin{array}{l}
7425 : 4875 = 1; \\
\overline{2550} \\
4875 : 2550 = 1 \\
2325 \\
2550 : 2325 = 1 \\
225 \\
2325 : 225 = 10 \\
75 \\
225 : 75 = 3 \\
0
\end{array}$$

E két szám legnagyobb közös osztója 75.

β) $2x^3 - 13x^2 + 23x - 12$ és $2x^2 - 5x + 3$-ra.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 - 13x^2 + 23x - 12) : (2x^2 - 5x + 3) = x - 4 \\
\underline{\begin{array}{l} 2x^3 - 5x^2 + 3x \\ - \quad + \quad - \end{array}} \\
\quad - 8x^2 + 20x - 12 \\
\quad \underline{\begin{array}{l} - 8x^2 + 20x - 12 \\ + \quad - \quad + \end{array}} \\
\qquad \emptyset
\end{array}
$$

$2x^2 - 5x + 3$ a legnagyobb közös osztó.

Kettőnél több szám esetében előbb meghatározzuk két szám legnagyobb közös osztóját, azután az így talált értéknek és a harmadik számnak legnagyobb közös osztóját és így tovább, a legutoljára talált legnagyobb közös osztó lesz az összes adott számok legnagyobb közös osztója.

Ha a legnagyobb közös osztó kikeresésénél valamelyik osztandó számbeli coefficiense nem lenne osztható az osztóval, akkor az osztandót megszorozhatjuk oly számmal, a mely a másiknak nem tényezője, de a mely által az osztás egész számú hányadosra vezet. Pl. keresendő:

$$10x^2 + 14x - 12 \text{ és } 7x^2 + 22x + 16$$

legnagyobb közös osztója. Az elsőt megszorozzuk 7-tel lesz:

$$
\begin{array}{l}
(70x^2 + 98x - 84) : (7x^2 + 22x + 16) = 10 \\
\underline{- 70x^2 \pm 220x \pm 160} \\
\quad - 122x - 244 \text{ itt } - 122\text{-vel rövidíthetünk,}
\end{array}
$$

lesz: $x + 2$ és:

$$
\begin{array}{l}
(7x^2 + 22x + 16) : (x + 2) = 7x + 8 \\
\underline{- 7x^2 \pm 14x} \\
\quad 8x + 16 \\
\underline{\quad - 8x \pm 16} \\
\qquad 0
\end{array}
$$

$x + 2$ a legnagyobb közös osztó.

b) *A legkisebb közös többes kikeresése:* 1) törzstényezőkre bontással; 2) a legnagyobb közös osztó segélyével történhetik.

1) Egytagú kifejezések legkisebb közös többszörösét úgy határozzuk meg, hogy előállítjuk a coefficiensek legkisebb közös többesét és e mellé írjuk

az egyes kifejezésekben előforduló betűket a mutatkozó legmagasabb hatványon. Pl.:

$$8a^2b^2c,\ 70ab^2d,\ 35a^3bc$$

legkisebb közös többese: $280a^3b^2cd$.

Minthogy az összetett kifejezések tényezőkre bontása ritkán sikerül, azért ezek legkisebb közös többszörösét leginkább a második módszerrel határozzuk meg.

2) Két összetett kifejezés esetében úgy határozzuk meg a legkisebb közös többszöröst, hogy mindenekelőtt kikeresssük azok legnagyobb közös osztóját, azzal elosztjuk az egyik adott számot s az így nyert hányadossal megszorozzuk a másikat; ez a szorzat lesz a keresett legkisebb közös többszörös. Legyen pl.: $x^2 - 3x + 2$ és $x^2 - x - 2$ legkisebb közös többszöröse meghatározandó. E kifejezések legnagyobb közös osztója : $x - 2$; most:

$$(x^2 - x - 2) : (x - 2) = x + 1$$

és a legkisebb közös többszörös:

$$\begin{array}{l} x^2 - 3x + 2 \\ \underline{x + 1 \qquad\qquad} \\ x^3 - 3x^2 + 2x \\ \underline{\qquad\ x^2 - 3x + 2} \\ x^3 - 2x - x + 2. \end{array}$$

8. §. Az algebrai törtekről.

Minden $\frac{a}{b}$ (*a* törve *b*) alakú kifejezést, mely az *a* és *b* hányadosát jelöli ki, *algebrai törtnek* nevezünk. Ebben *a* a *számláló*, *b* a *nevező* s mindkettő positiv vagy negativ egész, vagy tört számot jelenthet. Az algebrai törtekre nézve minden, a közönséges számokban adott törtekre ismert szabály érvényes; tehát érvényes az is, hogy:

A tört értéke nem változik, ha számlámlóját és nevezőjét ugyanazon számmal szorozzuk vagy osztjuk:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \text{ és } \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}.$$

Ezen szabály alapján a tört alakban kijelentett hányados nagyobb számokban, vagy ha a számláló és nevező közös osztóval bír, kisebb számokban fejezhető ki. A szorzást a különböző nevezővel bíró törtek közös nevezőre való hozatalánál, az osztást a törtek rövidítésénél használhatjuk fel.

1) *A törtek közös nevezőre hozatala* úgy történik, hogy klkeressük a nevezők legkisebb közös többszörösét, az lesz a közös nevező, azt elosztjuk mindenik régi nevezővel s a nyert hányadossal a megfelelő számlálót megszorozzuk, az lesz mindenik tört új számlálója. Pl. közös nevezőre hozandók:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{f},\ \frac{g}{h}.$$

A közös nevező $bdfh$, melyet rendre elosztunk a régi nevezőkkel s a nyert hányadosokkal megszorozzuk a régi számlálókat, miáltal az egyes tört kifejezések új alakja lesz:

$$\frac{adfh}{bdfh},\ \frac{cbfh}{bdfh},\ \frac{ebdh}{bdfh},\ \frac{gbdf}{bdfh}.$$

Hozzuk még közös nevezőre a következő törteket:

$$\frac{a}{a+b},\ \frac{b}{a-b},\ \frac{c}{a^2-b^3};$$

a közös nevező: $a^2 - b^2$ s az egyes törtek új alakja:

$$\frac{a(a-b)}{a^2-b^2},\ \frac{b(a+b)}{a^2-b^2},\ \frac{c}{a^2-b^2}.$$

2) *A tört rövidítését* úgy végezzük, hogy számlálóját és nevezőjét a két kifejezés legnagyobb közös osztójával elosztjuk. Legyen pl. rövidítendő:

$$\frac{x^2+5x}{x^2+6x+5}.$$

A számláló a következőképen bontható tényezőkre: $x(x+5)$, a nevező pedig $(x+1)(x+5)$, miáltal:

$$\frac{x^2+5x}{x^2+6x+5} = \frac{x(x+5)}{(x+1)(x+5)} = \frac{x}{x+1}.$$

A műveletek értelmezése a törtekre nézve ugyanaz, mint az egész számokra nézve, azok végrehajtása pedig a következő szabályok alapján történik.

a) *Összeadás. Ha a törtek egyenlő nevezővel bírnak, akkor a nevezőt megtartjuk az összeg nevezőjéül is, az összeg számlálóját pedig a részek számlálóinak összege adja.* Pl.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c}{m}.$$

Ha különböző nevezővel biró törteket kell összeadni, akkor azokat előbb — a fentebb megismert módon — közös nevezőre hozzuk, s azután alkalmazzuk reájuk az összeadási szabályt.

b) *Kivonás. A kisebbitendő és kivonandó közös nevezője szolgáltatja a különbség, vagy maradék nevezőjét, annak számlálóját pedig úgy nyerjük, hogy a kisebbitendő számlálójából levonjuk a kivonandóét.* Pl.

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}.$$

c) *Szorzás.* Minthogy a törtek értéke egyenlő nevező mellett annál nagyobb, minél nagyobb a számlálójuk és egyenlő számláló mellett, minél kisebb a nevezőjük; ennélfogva a törteknek 2-szer, 3-szor . . . n-szer nagyobbá tételét úgy érjük el, ha számlálójukat 2-szer, 3-szor . . . n-szer nagyobbitjuk, nevezőjüket pedig változatlanul hagyjuk, vagy pedig számlálójuk változatlanul hagyása mellett nevezőjüket megfelelő módon kisebbitjük.

Ilyformán *törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy vagy a tört számlálóját szorozzuk az egész számmal, vagy pedig a nevezőjét osztjuk azzal.* Pl.

$$\frac{a}{b}\times m=\frac{a\,m}{b}=\frac{a}{b:m}.$$

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálók szorzatát elosztjuk a nevezők szorzatával, mert legyen:

$$\frac{a}{b}=p;\quad \frac{c}{d}=q,\quad \text{akkor: } a=bp \quad \text{és} \quad c=dq$$

$$\text{és: } ac=bp\,.\,dq.$$

Ha most mind a két oldalt *bd*-vel osztjuk:

$$\frac{ac}{bd}=p\,.\,q=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}.$$

d) *Osztás.* A c) pont alatt elmondottakból közvetlenül következik, *hogy törtet egész számmal úgy osztunk, hogy vagy a számlálóját osztjuk, vagy pedig a nevezőjét szorozzuk az egész számmal.* Pl.

$$\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b} = \frac{a}{bm}.$$

Törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztandót az osztó reciproc értékével megszorozzuk, mert legyen:

$$\frac{a}{b} = p, \ \frac{c}{d} = q; \ a = bp, \ c = dq$$

akkor: $\frac{a}{c} = \frac{bp}{dq}$ mindkét oldalon *d*-vel szorozva és *b*-vel osztva: $\frac{ad}{bc} = \frac{p}{q} = p : q = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

MÁSODIK RÉSZ.

Az elsőfoku egyenletekről.

9. §. Az egyenletekről általában.

Az egyenlőség jelével összekötött két $A = B$ mennyiség *egyenletet* alkot. Az egyenlőségi jeltől jobbra és balra eső mennyiségek *az egyenlet oldalai,* melyek mindenike több *tagból* állhat.

Ha az egyenlet oldalait szemmelláthatólag egyenlő mennyiségek alkotják, akkor *azonossággal* (identitas) van dolgunk. Ilyen: $8 = 8$, vagy $5 \times 6 = 30$. Ilyen identitások a *képletek* is, melyek a bennük foglalt betük akármilyen értékei mellett igazak. Igy: $a + b = b + a$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ stb.

A szó szoros értelmében vett, azaz meghatározó *egyenlettel* akkor állunk szemben, mikor az ismeretlent jelző betű nem helyettesíthető akármilyen és akármennyi értékkel, hanem annak helyére csakis egy, vagy ha több, de mindenesetre csak korlátolt számú érték irható. Igy pl. ha azt kérdezem, melyik az a szám, melyhez 5-öt adva 20-at nyerek összegül, lesz: $x + 5 = 20$ az *egyenlet,* s itt *x* helyére csakis

15 irható, mert csakis ez az egy szám felel meg a kivánságnak s alakitja azonossággá az egyenletet. — Azt az értéket, a mely az egyenletet helyes képletté teszi, azaz az egyenletet megoldja vagy kielégiti *az egyenlet gyökének* nevezzük. Igy az : $x+5=20$ egyenlet gyöke $x=15$. — *Az egyenletet megoldani annyit jelent, mint annak gyökét meghatározni.* — Az olyan egyenleteket, melyek megoldásánál csakis a hat első algebrai müvelet nyer alkalmazást *algebrai egyenleteknek* nevezzük, a többiek a *túllépő* (transcedens) *egyenletek*, ezekhez tartoznak az úgynevezett *exponentialis egyenletek* is, melyekben valamely exponens szerepel, mint ismeretlen mennyiség. Tehát: $5x+7=22$; $x^2+3x=28$; $a+b\sqrt{x}=c\sqrt{y}$ algebrai; $a^x=b$; $3^x=9$; $\log(1+x)=a$ stb. túllépő egyenletek.

Az egyenlet *fokát* az ismeretlen betűmennyiség legmagasabb hatványa vagy több ismeretlen esetében az ugyanazon tagban előforduló ismeretlenek exponenseinek legnagyobb összege határozza meg. Igy pl. az egy ismeretlent tartalmazó egyenletek közül: $x+7=9$, $ax+c=bx+d$ *első-;* $x^2+3x=9$, $ax^2+b=c$ *másodfokú* egyenletek és a többi; a több ismeretlent tartalmazók közül: $5x+6y=18$, $ax+by=c$ *elsőfokuak,* $x^2+y^2=41$, $axy+bx=c$ *másodfokuak,* $x^2y+xy^2=30$, $ax^3+bx^2y+cy^3=d$ *harmadfokuak* stb.

10. §. Az egyenletek átalakitásáról.

Az egyenlő gyökökkel biró egyenleteket *egyenértéküeknek* (aequivalens) nevezzük. Egyenértékű egyenletek előállitása a következő tételek segitségével lehetséges.

1) *Ha valamely egyenlet mindkét oldalához ugyanazon számokat hozzáadjuk vagy levonjuk, aequivalens egyenleteket nyerünk.* Pl. az $A=B$ egyenletből: $A\pm C=B\pm C$.

E tétel alapján az egyenlet egyik oldaláról bármely tag a másik oldalra vihető át ellenkező előjellel, mert legyen az egyenlet :

$$\alpha)\quad \begin{array}{r} x-3=5 \\ +3=+3 \\ \hline x=5+3 \end{array} \qquad\qquad \beta)\quad \begin{array}{r} x+9=15 \\ -9=-9 \\ \hline x=15-9 \end{array}$$

Ha az egyik oldalról valamennyi tagot a másik oldalra teszszük át, akkor *az egyenletet zérusra hoztuk vagy redukáltuk.* Az egyenlet két oldalán egyenlő jellel előforduló tagok egyszerüen elhagyhatók. Végre ugyancsak a kimondott tételből következik, hogy szabad az egyenlet valamennyi tagjának előjelét ellenkezőre változtatni.

2) *Ha valamely egyenlet mindkét oldalát valamely meghatározott, véges és zérustól különböző számmal megszorozzuk vagy elosztjuk, aequivalens egyenleteket nyerünk.*

Ezen tétel alapján képesek vagyunk az egyenletben előforduló törteket kiküszöbölni olyformán, hogy az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk a nevezők legkisebb közös többszörösével, képesek vagyunk továbbá az egyenlet minden tagjának előjelét a (-1)-gyel való szorzás által ellenkezőre változtatni, vagy végre a tagokat a bennök előforduló közös osztóval elosztva az egyenletet egyszerüsiteni.

Ezen tételek alapján történik *az egyenletek rendezése.*

A rendezés abban áll, hogy:

a) *Az egyenletben előforduló törteket eltávolítjuk.*

b) *A kijelentett műveleteket végrehajtjuk.*

c) *Az ismeretlent tartalmazó tagokat az egyik oldalra átviszszük, ha lehet azokat összevonjuk s az így nyert tagokat az ismeretlen fogyó hatványai szerint rendezzük; a másik oldalon az ismert tagokat összevonjuk.*

d) *Az ismeretlen legmagasabb hatványát tartalmazó tag coefficiensével az egyenlet mindkét oldalát elosztjuk.*

11. §. Az elsőfokú, egy ismeretlent tartalmazó határozott egyenletek megfejtése.

Az egy ismeretlent tartalmazó első fokú egyenletek megfejtése abban áll, hogy rendezzük az ilyen egyenleteket, ez által már az ismeretlen részére teljesen meghatározott értéket nyerünk. Pl.

	Igazolás:
$3x + \frac{x}{2} - 7 = 5x - \frac{2x}{4} - 12$	$3 . 4 + \frac{4}{2} - 7 =$
$12x + 2x - 28 = 20x - x - 78$	$= 5 - 4 - 1 - 12$
$-5x = -20;\ 5x = 20;\ x = 4$	összevonva:
	$7 = 7$

Általában minden első fokú egyenlet a következő alakra hozható:

$$ax = b, \text{ honnan: } x = \frac{b}{a}.$$

Az elsőfokú egyenleteknek csakis egy gyök felel meg, mert tegyük fel, hoy az: $ax = b$ egyletnek p az egyik és q a másik gyöke, akkor:

$$ap = b; \ aq = b \text{ és: } ap - aq = o = a(p - q)$$

a mi, minthogy a nem lehet zérus, csakis akkor állhat fent, ha: $p - q = o$, azaz: $p = q$.

12. §. Elsőfokú határozott egyenletek két és több ismeretlennel.

Ha két ismeretlen között csakis egy egyenlet van adva, akkor a feladat határozatlan, mert a két ismeretlennek végtelen sok értékpár felel meg. Hogy a feladat határozott legyen két egyenletnek kell adva lenni; 3 ismeretlen esetében 3 egyenletből, 4 ismeretlen esetében pedig 4-ből kell az egyenletrendszernek állania és a többi.

A két ismeretlent tartalmazó egyenletrendszereket megoldottaknak tekinthetjük, hogyha sikerült azokból oly harmadikat előállítanunk, a mely már csakis egy ismeretlent foglal magában. Azt az eljárást, melylyel ezt elérjük, *kiküszöbölésnek* nevezzük. A kiküszöbölés különböző módjai a következők:

1) *A helyettesités* (substitutio) *módszere.* Az adott egyenletek egyikéből kiszámítjuk az egyik ismeretlent s a nyert értéket a másik egyenletbe helyettesítjük, miáltal már csakis egy egyenletünk marad egy ismeretlennel. Pl.

$a)$ $ax + by = c$	$x = \dfrac{c - by}{a}$
$a_1x + b_1y = c_1$	$a_1 \cdot \dfrac{c - by}{a} + b_1y = c_1$

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$$

$$x = \frac{cb_1 - bc_1}{ab_1 - a_1b}$$

β) $2x - 3y = 4$	$x = \frac{4 + 3y}{2}$	
$7x - 2y = 31$	$7 \cdot \frac{4 + 3y}{2} - 2y = 31$	

$$y = 34 : 17 = 2$$
$$x = 5$$

2) *Az egyenlítés* (comparatió) *módszere.* Mindkét egyenletből kiszámitjuk ugyanazt az ismeretlent s azok értékeit egyenlítjük. Pl.

α) $ax + by = c$	$x = \frac{c - by}{a}$	$\frac{c - by}{a} = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}$
$a_1x + b_1y = c_1$	$x = \frac{c_1 - b_1y}{a}$	$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}$

β) $3x + 2y = 30$; $8x + 3y = 55$; $x = \frac{30 - 2y}{3}$; $x = \frac{55 + 3y}{8}$; $\frac{30 - 2y}{3} = \frac{55 + 3y}{4}$; $x = 8$; $y = 3$.

3) *Az angol, vagy összeadás-kivonási* (eliminatio) *módszer.* Képezzük a kiküszöbölendő ismeretlen coefficienseinek legkisebb közös többszörösét s mindegyik egyenletet megszorozzuk azon tényezőjével a legkisebb közös többszörösnek, mely az illető egyenletből hiányzik. Ily uton az egyik ismeretlen coefficiense mindkét egyenletben absolut értékre egyenlő lesz s ekkor ha azok még jelre nézve is megegyeznek, kivonjuk a két egyenletet egymásból, ha pedig jelre nézve különböznek, összeadjuk a két egyenletet. Pl.

α) $ax + by = c$	$aa_1x + a_1by = a_1c$
$a_1x + b_1y = c_1$	$aa_1x + ab_1y = ac_1$

$$(ab_1 - a_1b)y = ac_1 - a_1c$$
$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1c}$$

β) $6x - 3y = 27$	$12x - 6y = 54$	$21y = 105$
$4x + 5y = 53$	$12x + 15y = 159$	$y = 5$; $x = 7$

4) *A francia, vagy Bezout-féle módszer.* (A határozatlan együtthatók módszere.) Az egyenletek egyikét megszorozzuk bizonyos egyelőre határozatlan számmal, azután a két egyenletet kivonjuk egymásból s

ekkor úgy határozzuk meg a tetszőleges szorzó értékét, hogy az egyik ismeretlen coefficiense zérus legyen. Pl.

α) $ax + by = c$ | $ax + by = c$ a felsőt kivonva az
$a_1x + b_1y = c_1$ | $ma_1x + mb_1y = mc_1$ [alsóból

$$x(ma_1 - a) + y(mb_1 - b) = mc_1 - c$$

legyen:

$$ma_1 - a = o$$

innen:

$$m = \frac{a}{a_1} \quad \text{és:}$$

$$y\left(\frac{a}{a_1}b_1 - b\right) = \frac{a}{a_1}c_1 - c; \quad y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}.$$

β) $15x - 14y = 17$ | $-15x \mp 14y \equiv 17$
$24x + 7y = 86$ | $24mx + 7my = 86m$

$$x(24m - 15) + y(7m + 14) = 86m - 17$$

$$24m - 15 = 0; \quad m = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$$

$$y.\left(\frac{35}{8} - 14\right) = 86 . \frac{5}{8} - 17$$

$$\frac{147}{8}y = \frac{430 - 136}{8}; \; 147y = 294; \; y = 2; \; x = 3.$$

Kettőnél több ismeretlen esetében a feladat akkor határozott, ha az egymástól független egyenletek száma annyi, mint az ismeretleneké. Ezek megfejtésénél a most megismert módszerek nyernek alkalmazást. Igy pl. ha megfejtendő lenne a helyettesítés módszerével a:

$$3x - 4y + 2z = 3$$
$$2x + 5y - 4z = 8$$
$$x + y - z = 4$$

egyenletrendszer, akkor a 3-ik egyenletből:

$$x = 4 - y + z$$

a másik két egyenletbe helyettesitve a következő két ismeretlent tartalmazó egyenlet rendszerre vezet:

$$-7y + 5z = -9$$
$$y - 2z = 0$$

ezt már könnyű az eddig tanultak alapján megfejteni, mert: $y = 2z$

$$-14z + 5z = -9;\ 9z = 9;\ z = 1;$$
$$y = 2;\ x = 3$$

Bezout módszerének alkalmazásánál az első egyenletet változatlanúl hagyjuk, a másodikat m-mel, a harmadikat n-nel szorozzuk s azután összeadjuk az egyenleteket. Ekkor két ismeretlennek, pl. x-nek és y-nak coefficiensét zérussal egyenlítjük, miáltal m- és n-re nézve két egyenletet nyerünk, melyekből azok értékét kiszámíthatjuk és az összegül nyert egyenletbe helyettesíthetjük. A további eljárás már nem okoz nehézséget.

13. §. Elsőfokú egyenletekre és egyenletrendszerekre vezető tárgyi feladatok.

A tárgyi körökből vett feladatoknál a szereplő mennyiségek egymáshoz való viszonya csakis szavakban nyer kifejezést. Az algebrai formába öntése az ily feladatoknak arra vár, aki azok megoldására vállalkozik. A szavakban kifejezett egyenletek megfejtésére szabályt nem lehet felállítani, erre a gyakorlat adja meg a kellő ügyességet. A megoldás czéljából mégis a következőket tarthatjuk szem előtt:

1) *Az ismeretlen mennyiséget megnevezzük.*

2) *Az egyenletet felállitjuk,* azaz oly kapcsolatba hozzuk az adott és az ismeretlen mennyiségeket, amilyet a feladat követel.

3) *A nyert egyenletet megfejtjük,* vagyis megkeressük az ismeretlen számára azt az értéket, a mely az egyenletnek eleget tesz.

4) *Az eredmény helyességét behelyettesítés által igazoljuk.*

A következő feladatok némi útmutatást nyújthatnak a követendő eljárás menetére.

I. *Melyik az a szám, a melynek 9-czel megnövesztett harmada 3-mal megnövesztett ötödéhez adva a szám* $\frac{2}{3}$*-adát adja összegül?* Ez a szám x. Ennek 9-czel növesztett harmada: $\frac{x}{3} + 9$ és 3-mal növesztett 5-öde: $\frac{x}{5}+3$; ezek összegéről azt állítjuk, hogy $\frac{2}{3}$x-el egyenlő; azaz:

$$\frac{x}{3}+9+\frac{x}{5}+3=\frac{2}{3}x:$$

innen:

$$-2x=-180 \text{ és: } x=90.$$

II. *Melyik szám az, melynek 8-ad, 16-od, 32-ed része együtt 140?* Ez a szám x és:

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{16}+\frac{x}{32}=140;\ 4x+2x+x=4480;$$
$$7x=4480;\ x=640.$$

III. *60 két részre osztandó úgy, hogy az egyik rész hetede a másik nyolczadával legyen egyenlő.* Az egyik rész x, a másik: 60 — x s így:

$$\frac{x}{7}=\frac{60-x}{8};\ 8x=420-7x;\ 15x=420;$$
$$x=28;\ 60-x=32.$$

IV. *Egy tőkepénzes pénzének $\frac{4}{5}$-ét 4%-ra, a többit 5%-ra adta ki s összesen 2940 korona kamatot húz évenként. Mennyi a vagyona?* A vagyona x korona. Ennek $\frac{4}{5}$-e, tehát $\frac{4x}{5}$ korona 4%-re van kiadva s hoz: $\frac{\frac{4x}{5}.4}{100}$ korona kamatot, a maradék pedig $\frac{\frac{x}{5}.5}{100}$ koronát; a kettő összege:

$$\frac{\frac{4x}{5}.4}{100}+\frac{\frac{x}{5}.5}{100}=2940;$$
$$16x+5x=1470000;\ 21x=1470000;$$
$$x=70000 \text{ korona.}$$

V. *Két szám különbsége 8, négyzeteik különbsége 176. Melyek e számok?* Az egyik x, a másik x + 8

$$(x+8)^2-x^2=176;\ x^2+16x+64-x^2=176;$$
$$16x=112;\ x=7;\ x+8=15.$$

VI. *Mely két egymásra következő szám négyzetének különbsége 17?* Az egyik x, a másik $x+1$;
$$(x+1)^2-x^2=17;\ x^2+2x+1-x^2=17;\ 2x=16;$$
$$x=8;\ x+1=9.$$

VII. *Két szám összege 25, különbsége 1. Melyek e számok?* Az egyik x, a másik y.

$x+y=25$ Összeadva: $2x=26$; $x=13$.
$x-y=1$ Kivonva: $2y=24$; $y=12$.

VIII. *Melyik az a kétjegyű szám, mely 9-czel kisebb lesz, ha a számjegyek sorrendjét megfordítom és 99 lesz, ha az utóbbi számot hozzáadom?* Az egyik jegy x, a másik y. Akkor:
$$10x+y=10y+x+9 \text{ és: } 10x+y+10y+x=99$$
$$x-y=1;\ x+y=9;\ x=5;\ y=4.$$
Az a szám: 54.

IX. *Melyik az a tört, mely $\frac{1}{3}$ lesz, ha számlálójához 1-et és $\frac{1}{4}$ lesz, ha nevezőjéhez 2-őt adunk?* Ez a tört $\frac{x}{y}$ és:
$$\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3};\quad \frac{x}{y+2}=\frac{1}{4};$$
$$\left.\begin{array}{l}3x-y=-3\\4x-y=2\end{array}\right|\quad x=5;\ y=18;\ \text{az a tört: } \frac{5}{18}.$$

X. *Két ezüst rúd közül az egyik 0·950, a másik 0·800 finomságú, mennyi veendő mindenikből a 6 kg. súlyú 0·900 finomságú rúd nyerésére?* Az egyikből x, a másikból y kg. Akkor:
$$x+y=6 \text{ és } 950x+800y=6\times900$$
innen: $x=4;\ y=2.$

XI. *A háromjegyű szám jegyeinek összege 9, a számjegyek megfordításából nyert szám 198-czal nagyobb, mint az eredeti; ha pedig csak a tizesek és százasok helyén álló jegyeket cserélem fel, akkor a növekedés 108. Melyik e szám?* A jegyek x, y, z és:
$$x+y+z=9$$
$$100z+10y+x=100x+10y+z+198$$
$$100y+10x+z=100x+10y+z+108.$$
Ezek megfejtése után:
$$x=2;\ y=3;\ z=4 \text{ s így a szám: } 234.$$

XII. *Három játékos megegyezett abban, hogy a vesztő megkétszerezi a másik kettő pénzét. Három játszma után az első 40, a második 100, a harmadik 50 koronával vonult vissza. Mennyi volt mindenik tétje, tudván, hogy mindenik a kijelölt sorrendben egy-egy játszmát vesztett?* A tétek x, y és z. Az első játszma után az első játékos része: $x-y-z$, a másodiké: $2y$, a harmadiké: $2z$; a második után az elsőé: $2x-2y-2z$, a másodiké: $3y-x-z$, a harmadiké: $4z$; a harmadik után:

$$\left.\begin{aligned} 4x-4y-4z&=40\\ 6y-2x-2z&=100\\ 7z-x-y&=50 \end{aligned}\right|$$

megfejtve: $x=100$; $y=60$; $z=30$.

Igazolás: Az első játszma után az egyes játékosok pénze: 10, 120, 60; a 2-ik után: 20, 50, 120; a 3-ik után: 40, 100, 50.

14. §. Az elsőfokú határozatlan egyenletekről.

Ha valamely egyenletrendszerben kevesebb az egyenletek, mint az ismeretlenek száma, akkor a megoldások száma végtelen nagy s így a feladat *határozatlan.*

Gyakran azonban az ismeretlenekre nézve olyan feltételeknek kell eleget tennünk, a melyeket egyenletekbe nem foglalhatunk ugyan, de a melyek azt eredményezik, hogy a megoldások száma véges határok közé szorúl. Az olyan határozatlan egyenleteket, a melyekre nézve kikötjük, hogy az ismeretleneknek csakis egész számú, vagy négyzetes egyenleteknél csak rationális értékei veendők figyelembe, *Diophantus* alexandriai mathematikus után *diophantikus-egyenleteknek* nevezzük.

Legyen az: $ax+by=c$ egyenlet adva, melyre nézve x és y csakis egész számú értéket vehet fel és a melyben a, b és c szintén egész számok. Feltehetjük még, hogy a 3 utóbb nevezett számnak nincs közös osztójuk, mert amennyiben lenne, azzal az egyenletet végig oszthatnók. De akkor a és b sem birhat közös osztóval, mert tegyük fel, hogy: $a=m.p$ $b=m.q$, akkor:

$$ax+by=m(px+qy)=c;$$

és mert x és y s azokkal px és qy is egész számok, azért az m osztót c-nek is tartalmaznia kell. Ilyformán a és b relativ primszámok s ha most az egyenletből a kisebb együtthatóval biró pl. y ismeretlent kifejezzük, lész: $y = \frac{c - ax}{b}$ és ha azután c-t és a-t elosztjuk b-vel egész és tört számú részeket kapunk, ugy hogy: $y = t + ux + \frac{c' - a'x}{b}$, a hol c' és a' a b-vel való osztás után mutatkozó maradékok. Hogy x és y számértékei egész számok legyenek, kell, hogy a $\frac{c' - a'x}{b} = r_1$ szintén egész számu érték legyen. Innen most x kifejezhető s akkor az a'-gyel való osztás után ismét valamely $\frac{c'' - a''r_1}{a'} = r_2$ egész számu maradékhoz jutunk és így tovább, mindaddig, mignem az $r_{n-1} = \gamma - \alpha \,.\, r_n$ alakú kifejezéshez érkezünk, a melynél 1 a nevező; ha most r_{n-1} értékét r_{n-2} — bc, ennek értékét r_{n-3}-ba és így tovább visszamenőleg behelyettesítjük, akkor r_n minden értékének megfelelőleg x meg y számára egy-egy egész számú értéket nyerünk. Az eljárást a következő példa fogja megvilágítani. Keresendők a: $17x - 11y = 86$ egyenlet egész számú gyökei.

$$y = \frac{17x - 86}{11} = x - 7 + \frac{6x - 9}{11}; \quad \frac{6x - 9}{11} = r_1$$

$$x = \frac{11r_1 + 9}{6} = r_1 + 1 + \frac{5r_1 + 3}{6}; \quad \frac{5r_1 + 3}{6} = r_2$$

$$r_1 = \frac{6r_2 - 3}{5} = r_2 + \frac{r_2 - 3}{5}; \quad \frac{r_2 - 3}{5} = r_3$$

$r_2 = 5r_3 + 3$ Helyettesités után:

$$r_1 = \frac{6(5r_3 + 3) - 3}{5} = 6r_3 + 3$$

$$x = \frac{11(6r_3 + 3) + 9}{6} = 11r_3 + 7$$

$$y = \frac{17(11r_3 + 7) - 86}{11} = 17r_3 + 3.$$

Ha most r_3-nak különböző értékeket adunk, mindannyiszor x és y részére is egy-egy egész számú gyököt nyerünk. Legyen pl.

$$r_3 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$$

$$\text{akkor} \begin{cases} x = 7,\ 18,\ 29,\ 40,\ \ldots -4,\ -15,\ -30,\ \ldots \\ y = 3,\ 20,\ 37,\ 54,\ \ldots -14,\ -31,\ -48,\ \ldots \end{cases}$$

A megoldások száma végtelen nagy.

15. §. Az elsőfokú határozatlan egyenletek positiv egész számú gyökei.

Ha az $ax + by = c$ határozatlan egyenlet egyik egész számú gyök-párja $x = \xi$ és $y = \eta$, akkor:

$$ax + by = c \text{ és } a\xi + b\eta = c;$$

a második egyenletet az elsőből levonva:

$$a(x - \xi) + b(y - \eta) = o$$

innen:

$$x = \xi - \frac{b(y - \eta)}{a} = \xi - b \,.\, u$$

a hol:

$$u = \frac{y - \eta}{a}.$$

Hasonló úton:

$$y = \eta + au.$$

Ha az adott egyenletnek csakis positiv egész számú gyökeit keressük, akkor:

$$\xi - bu > o \text{ és } \eta + au > o$$

egyenlőtlenségeknek kell állani, a honnan u-ra nézve a következő határokat nyerjük:

$$u < \frac{\xi}{b} \text{ és } u > -\frac{\eta}{a}.$$

Ha az előbbi §-ban kidolgozott feladatra alkalmazzuk a most lefejtett elméletet, akkor 7 és 3 az egyenlet egy gyökpárja és:

$$x = 7 + 11u; \; y = 3 + 17u$$

$$7 + 11u > o \text{ és } 3 + 17u > o$$

$$u > -\frac{7}{11}; \; u > -\frac{3}{17}$$

itt a positiv egész számú megoldások u-nak minden $-\frac{3}{17}$-nél negyobb értékére nézve nyerhetők és pedig végtelen nagy számban.

A $11x + 7y = 230$ egyenlet egyik gyökpárja -2 és 36, innen:

$$7u - 2 > o; \; u > \frac{2}{7}$$

$$36 - 11u > o; \; u < 3\frac{3}{11};$$

tehát a positiv egész számu megoldásoknak csakis 3 párja van, mikor $u = 1, 2, 3$ és pedig:

$$x = 5, 12, 19 \text{ és } y = 25, 14, 3.$$

16. §. Elsőfokú határozatlan egyenletek három, vagy több ismeretlennel.

Ha általában n ismeretlen részére $n - 1$ egyenletünk van, akkor kiküszöbölés utján odavezetjük a dolgot, hogy egy egyenletünk maradjon x és y ismeretlenek között, a melylyel már az eddig tanúltak alapján könnyen elbánhatunk.

Ha n ismeretlen részére csakis $n - p$ egyenlet áll rendelkezésünkre, akkoz $p - 1$ ismeretlen helyébe tetszőleges egész számú értéket helyettesítünk s akkor a többire nézve az eljárás olyan lesz, aminőről előbb szólottunk.

Lássuk a megfejtés menetét, ha 1) egy egyenlet van adva három ismeretlen között, vagy 2) két egyenlet ugyancsak három ismeretlen között.

1) Keresendő a $3x + 4y + 7z = 32$ egyenlet egészszámú megoldása.

$$x = \frac{32 - 4y - 7z}{3} = 10 - y - 2z + \frac{2 - y - z}{3}$$

$$\frac{2 - y - z}{3} = u; \quad y = 2 - z - 3u$$

tehát:

$$x = 10 - y - 2z + u = 8 - z + 4u$$
$$y = 2 - z - 3u$$
$$z = z$$

ha most pl. $z = 1$, $u = 1$, akkor:

$$x = 11, \; y = -2.$$

2) Egész számokban megfejtendő

$$5x + 7y - 4z = 13$$
$$4x + 3y + 5z = 29$$

Itt a két egyenletből z kirekesztése után olyan egyenlethez jutunk, a mely már csupán két ismeretlent tartalmaz, az lesz: $41x + 47y = 181$, ennek felkeressük az egész számú gyökeit és azok közűl kiválogatjuk azokat, a melyek az első egyenletnek is eleget tesznek. Az egész számú gyökök:

$$x = -47u + 9 \text{ és } y = 41u - 4.$$

Ezen értékeket a 2-ik egyenletbe helyettesítve lesz:

$$4(-47u+9)+3(41u-4)+5z=29$$

innen:

$$z=1+13u,$$

mely érték x és y talált értékeivel együtt az egyenlet teljes megoldására vezet és pl. $u=1, 2 \ldots . 0, -1, -2$ mellett

$$\begin{array}{llllll} x= & -39, & -85 \ldots . & 9, & 56, & 103 \ldots . \\ y= & 37, & 78 \ldots . & -4, & -45, & -86 \ldots . \\ z= & 14, & 27 \ldots . & 1, & -12, & -25 \ldots . \end{array}$$

HARMADIK RÉSZ.

Hatvány- és gyökmennyiségek. Logarithmusok.

17. §. A hatványozásról és gyökvonásról általában.

A hatványozás és gyökvonás értelmezését már ismerjük (1. §.) most az ezen műveletekre vonatkozó főbb tételeket fogjuk felsorolni.

Szorzatot úgy hatványozunk, hogy valamennyi tényezőjét a kivánt hatványra emeljük:

$$(abcd)^2 = abcd \,.\, abcd = aa \,.\, bb \,.\, cc \,.\, dd = a^2b^2c^2d^2;$$

általában:

$$(abcd)^m = a^m b^m c^m d^m.$$

Ilyformán valamely egytagú mennyiséget négyzetre emelünk, ha valamennyi tényezőjének exponensét kettővel megszorozzuk.

Szorzatból úgy vonunk n-ik gyököt, hogy valamennyi tényezőjéből n-ik gyököt fejtünk:

$$\sqrt[3]{abc}=\sqrt[3]{a} \,.\, \sqrt[3]{b} \,.\, \sqrt[3]{c}\,; \quad \sqrt[m]{abc}=\sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{b} \,.\, \sqrt[m]{c}.$$

Tehát valamely egytagú mennyiségből négyzetgyököt vonunk, ha valamennyi tényezőjének exponensét kettővel elosztjuk. Pl.

$$\sqrt{a^4b^2c^6}=a^2bc^3; \ \sqrt{a^{2m}b^{4n}}=a^m b^{2n}.$$

Köbgyökvonásnál az exponenseket 3-mal osztjuk és a többi.

Ilyformán, ha a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet, vagy a köbgyökjel alatt teljes köb fordul elő, annak gyökét szorzóul az illető gyökjel elé irhatjuk s viszont a gyökjel előtti szorzó négyzetét vagy köbét a gyökjel alá vihetjük be. Pl.

$$\sqrt{ab^2c} = b\sqrt{ac}\,;\ \sqrt{a^{2m}bc} = a^m\,.\,\sqrt{bc}\,;\ \sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}\,;$$

$$c\sqrt{ab} = \sqrt{abc^2}\,;\ c^m\sqrt{ab} = \sqrt{abc^{2m}}\,;\ a\sqrt[3]{bc} = \sqrt[3]{a^3bc}.$$

Az $a = \sqrt{bc}$ alakú kifejezésben a-t b és c *geometriai középarányosának* hivjuk s azt aránylat alakjában is előállithatjuk, mert: $b : a = a : c$.

Törtet úgy hatványozunk, hogy számlálóját és nevezőjét a kivánt hatványra emeljük:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\,.\,\frac{a}{b} = \frac{a\,.\,a}{b\,.\,b} = \frac{a^2}{b^2}\,;\ \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}\,;\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Törtből úgy vonunk n-ik gyököt, hogy számlálójából és nevezőjéből n-ik gyököt fejtünk:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,;\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\,;\ \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

Minden positiv számnak két négyzetgyök felel meg, melyek absolut értékre egyenlők, de előjelre nézve különbözők. Pl.

$$\sqrt{36} = +\,6\,;\ \sqrt{36} = -\,6 \text{ azaz: } \sqrt{36} = \pm\,6\,;\ \sqrt{a^2} = \pm a,$$

mert: $(+\,a)^2 = (-\,a)^2 = a\,.\,a = -\,a\,.\,-\,a = a^2.$

A hatványmennyiségeket úgy hatványozzuk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük:

$$(a^m)^n = a^m\,.\,a^m\,.\,a^m\,.\,.\,.\,.\, = a^{m+m+m+\,.\,.\,.\,.} = a^{mn}.$$

Gyökmennyiségből úgy vonuuk gyököt, hogy a gyökkitevők szorzatát írjuk új gyökkitevőül:

$$\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}\,;\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

A positiv alapnak akár páros, akár páratlan hatványa positiv, a negativ alap páros hatványa positiv, a páratlan negativ:

$$(\pm\,a)^{2n} = a^{2n}\,;\ (\pm\,a)^{2n+1} = \pm\,a^{2n+1}.$$

Ha a gyökalatti mennyiség exponense többszöröse a gyökkitevőnek, akkor a gyökvonást úgy végezzük, hogy az előbb nevezett exponenst elosztjuk az utóbbival:

$$\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2; \text{ ha } m = n \,.\, u, \text{ akkor:}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nu}} = a^{\frac{nu}{n}} = a^u \,.$$

Ha a gyökjel alatt foglalt mennyiség, a melyből n-ik gyököt kell vonni, nem teljes n ik hatvány, akkor a gyök sem egész, sem tört szám alakjában nem állítható elő. *A nem teljes n-ik hatványból vont n-ik gyök a számok új csoportjára az irrationális számokra vezet, melyekkel szemben a positiv és negativ egész és tört számokat rationális számoknak nevezzük. Az irrationális számok értékét végtelen tizedes törtek alakjában tetszőleges pontosságig megközelíthetjük.*

A positiv szám páros gyöke lehet positiv vagy negativ, ellenben annak páratlan gyöke csakis positiv szám lehet, mert két egyenlő positiv és negativ szám ugyanazon páros hatványra emelve, ugyanazon positiv értékre vezet, ellenben csakis positiv szám bir azon tulajdonsággal, hogy páratlan hatványra emelve positiv értéket adjon; tehát:

$$\sqrt[2n]{a} = \pm x \text{ és } \sqrt[2n+1]{a} = + x.$$

A negativ mennyiségekből vont páros gyökök új számokra, a *képzetes vagy imaginárius* számokra vezetnek, mert az eddig megismert számok között nem találhatunk olyanokat, amelyek páros hatványra emelve negativ eredményre vezetnének. Az imaginárius számokkal szemben a positiv és negativ egész, tört és irrationális számokat *valós vagy reális számoknak* hívjuk; tehát:

$$\sqrt[2n]{-a} = \text{imaginárius szám.}$$

Az imaginárius számok két tényezőre bonthatók, így: $\sqrt{-a^2} = \sqrt{a^2} \,.\, \sqrt{-1} = a\sqrt{-1}$; az itt fellépő $\sqrt{-1}$ számot *imaginárius egységnek* nevezzük és *Gauss* után i-vel jelöljük; tehát: $\sqrt{-25} = 5\sqrt{-1} = 5 \,.\, i$. Ha az imaginárius szám egy reális számmal összekötve jelenik meg, származik a *complex szám.* Ha a valós és képzetes rész egyszer $+$, egyszer $-$ jellel van összekötve, akkor a *conjugált complex szám* áll ellőttünk. Igy: $a + bi$ és $a = bi$ conjugált complex számok.

Eddigi tárgyalásainkban csakis positiv egész számot vettünk hatványkitevőül, de lehet a hatványkitevő zérussal, végtelen nagygyal, valamely negativ, vagy valamely tört számmal is egyenlő.

Ha a hatványkitevő 0, akkor: $a^0 = 1$ (6. §.)

Ha a hatványkitevő ∞, akkor a hatvány értéke az alaptól függ:

$$a^{\infty} = \infty; \; a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0, \text{ ha } a > 1;$$

$$a^{\infty} = 0; \; a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \frac{1}{0} = \infty, \text{ ha } a < 1.$$

Ha a hatványkitevő negativ szám, akkor a hatvány oly törttel egyenlő, melynek számlálója az egység, nevezője pedig az adott hatvány positiv kitevővel. (6. §.) Ezen tétel alapján a számlálónak bármely tényezője a nevezőbe s a nevezőnek bármely tényezője a számlálóba vihető. Pl.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = a^3b^{-3} = \frac{b^{-3}}{a^{-3}} = \frac{1}{a^{-3}b^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-3}.$$

Könnyen igazolható, hogy *azok a tételek, a melyeket a positiv kitevővel biró hatványmennyiségekre vonatkozólag megismertünk, a negativ kitevővel biró hatványmennyiségekre is érvényesek.*

Lássuk még *minő értelem tulajdonítható a tört kitevővel biró hatványmennyiségeknek?* Minthogy az $\sqrt[n]{a^m}$ alakú kifejezésből $m = n\,.\,u$ esetében úgy vontunk gyököt, hogy a hatványkitevőt a gyökkitevővel elosztottuk; ennélfogva *az $\sqrt[n]{a^m}$ gyökmennyiség oly $a^{\frac{m}{n}}$ tört kitevőjü hatványmennyiségül tekinthető, melyben az exponens számlálója a hatványkitevő, nevezője pedig a gyökkitevő.* Könnyü igazolni, hogy az egész számú exponensekkel biró hatványmennyiségekre érvényes tételek a tört kitevővel biró hatványmennyiségekre nézve is igazak maradnak.

$$1)\; (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m}\,.\,\sqrt[n]{b^m};$$

$$2)\; \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}};$$

$$3)\; a^{\frac{m}{n}}\,.\,a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}};$$

$$4)\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}};$$

$$5)\ \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}}.$$

A most megismert tételek arra a végeredményre utalnak, hogy a hatványozás és gyökvonás nem különböző műveletek, hanem csakis különböző esetei az *általánositott hatványozásnak,* melynél exponensül bármilyen *rationális* szám vehető.

A tört kitevővel biró hatványmennyiségekre vonatkozó igazságok előnyösen felhasználhatók a gyökmennyiségek olyszerű átalakítására, mely által az ily mennyiségekkel való számvetés tetemesen könnyebbé válik. Igy pl.:

$$\sqrt[4]{a^5b^6c^7} = a^{\frac{5}{4}}.\ b^{\frac{6}{4}}.\ c^{\frac{7}{4}} = abc.a^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{2}{4}}\ c^{\frac{3}{4}} = abc\ \sqrt[4]{ab^2c^3}.$$

De egyszerűbbé teszünk minden szorzást, osztást, hatványozást és gyökvonást, amit ilyen gyökmennyiségekkel kell végeznünk, ha azokat mint tört kitevővel biró hatványmennyiségeket állítjuk elő. Pl.:

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[7]{a^4}} = \frac{a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{7}}} = a^{\frac{3}{5}-\frac{4}{7}} = a^{\frac{21-20}{35}} = a^{\frac{1}{35}} = \sqrt[35]{a}.$$

18. §. Számműveletek gyökmennyiségekkel és imaginárius számokkal.

I. Összeadni és kivonni csakis egynemű gyökmennyiségeket lehet. Egyneműek azok a gyökmennyiségek, amelyek ugyanazon alapra vonatkozó egyenlő hatvány- és gyökkitevőkkel birnak. A nem egynemű gyökmennyiségek összeadását és kivonását úgy végezzük, mint a különnemű algebrai mennyiségekét, azaz csak kijelentjük.

$$3\sqrt[5]{a} + 5\sqrt[5]{a} - 7\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a};\quad 5\sqrt[3]{a^2} - 7\sqrt[5]{a} = 5\sqrt[3]{a^2} - 7\sqrt[5]{a}.$$

Gyakran a gyökmennyiségek első tekintetre különneműeknek látszanak, holott a kellő átalakítás után az tünik ki, hogy egyneműek. Pl.:

$$5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} = 5\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{8.2} + 2\sqrt[3]{27.2} = 5\sqrt[3]{2} -$$
$$- 3\sqrt[3]{2^3.2} + 2\sqrt[3]{3^3.2} = 5\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}.$$

A gyökmennyiségek szorzásánál és osztásánál feltételezzük, hogy a részek egyenlő gyökkitevőkkel bírnak, amennyiben nem állana fent ez az eset, a gyökkitevőket egyenlő nevezetre hozzuk s azután végezzük el a gyökjel alatt foglalt mennyiségek szorzását, vagy osztását. Pl.

$$\sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\,;$$

$$-\sqrt{3} \,.\, -\sqrt{2} \,.\, \sqrt[3]{4} = -\sqrt[6]{27} \,.\, -\sqrt[6]{8} \,.\, \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{3456}.$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Az olyan mennyiségeket, melyeknek nevezői gyökmennyiségek, mindig át lehet alakítani oly módon, hogy a nevezők rationális számok legyenek. Az ezen czél elérésére szolgáló eljárást a *nevező gyöktelenítésének* nevezzük.

Ha a nevező csakis egytagú, akkor elég a számlálót és nevezőt ezen egytagú mennyiséggel megszorozni s már a nevező rationálissá lesz. Pl.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3} \,.\, \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}\,; \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{7}\,; \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$$

Ha a nevező többtagú, akkor a gyöktelenítést amaz ismert igazság alapján végezzük, hogy két mennyiség összege szorozva ugyanazok különbségével a mennyiségek négyzetének különbségét adja. Pl.

$$\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} =$$
$$= 5\sqrt{3} - 5\sqrt{2}.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{a+\sqrt{ab}}{a-b}.$$

Gyökmennyiséget úgy hatványozunk, hogy a gyökjel alatti mennyiséget a kivánt hatványra emeljük és az eredményből a kijelölt gyököt kifejtjük:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \,.\, \sqrt[n]{a} \ldots = \sqrt[n]{a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots} = \sqrt[n]{a^m}.$$

A gyökmennyiség értéke nem változik, hogyha a gyök- és hatványkitevőket ugyanazon számmal szorozzuk vagy osztjuk:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}; \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[\frac{n}{p}]{a^{\frac{m}{p}}}.$$

II. Minthogy az imaginárius számok az imaginárius egységből ugyanazon törvény szerint jönnek létre, mint a reális számok a reális egységből, azért mindazok a szabályok a melyek a reális számok összeadására és kivonására érvényesek, itt is helyesek maradnak.

$$5i + 7i = 12i; \quad 5i - 3i = 2i.$$
$$ai + bi = (a + b)i; \quad ai - bi = (a - b)i.$$

Ezekből kitetszőleg két képzetes szám összege és különbsége is képzetes. A complex számok összege és különbsége szintén complex szám, ellenben a conjugált complex számok összege valós, különbsége képzetes szám.

Az imaginárius számok szorzásánál, osztásánál és hatványozásánál leginkább az imaginárius egység különböző hatványainak megfelelő értékekre kell gondot fordítani. E czélból képezzük e hatványokat, lesz:

$$(\sqrt{-1})^1 = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2 \,.\, \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (\sqrt{-1})^2 \,.\, (\sqrt{-1})^2 = +1$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (\sqrt{-1})^4 \,.\, \sqrt{-1} = \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6 = (\sqrt{-1})^4 \,.\, (\sqrt{-1})^2 = -1$$
$$(\sqrt{-1})^7 = (\sqrt{-1})^4 \,.\, (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^8 = (\sqrt{-1})^4 \,.\, (\sqrt{-1})^4 = +1$$

általában:

$$(\sqrt{-1})^{4m} = +1; \quad (\sqrt{-1})^{4m+2} = -1;$$
$$(\sqrt{-1})^{4m+1} = \sqrt{-1}; \quad (\sqrt{-1})^{4m+3} = -\sqrt{-1}.$$

Amint látjuk a képzetes egység négy első hatványa folytonosan ismétlődik és pedig a páros hatványok valós mennyiségek, mégpedig a positiv egységgel egyenlők, ha a hatványkitevő 4-gyel és a negativ egységgel, ha a hatványkitevő csak 2-vel osztható. A páratlan hatványok ismét képzetes számok és pedig a positiv i jön ki, ha a hatványkitevő 4-gyel osztva 1-et ad maradékul és $-i$, ha a hatványkitevőnek 4-gyel való osztása után 3 a maradék.

Két képzetes mennyiség szorzata és hángadosa valós mennyiség. Ellenben a képzetes és valós mennyiségek szorzata és hányadosa képzetes szám.

$$a\sqrt{-1}\,.\,b\sqrt{-1}=ab\,.\,(\sqrt{-1})^2=-ab.$$

$$\frac{a\,.\sqrt{-1}}{b\,.\sqrt{-1}}=\frac{a}{b};\quad \frac{3\sqrt{-1}}{4\sqrt{-1}}=\frac{3}{4}.$$

$$\sqrt{a}\,.\,\sqrt{-b}=\sqrt{a.-b}=\sqrt{-ab}.$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\,.\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\,.(\sqrt{-1})^2}=\frac{\sqrt{-1}}{-1}\,.\sqrt{\frac{a}{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}\,.\sqrt{-1}.$$

A complex számok szorzata és hányadosa szintén complex szám. Ellenben a conjugált complex számok szorzata valós, hányadosa képzetes szám.

$$(a+bi)\,.\,(a-bi)=a^2+b^2.$$

$$\frac{a+bi}{a-bi}=\frac{(a+bi)^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2+2abi-b^2}{a^2+b^2}.$$

19. §. A négyzet- és köbgyök.

Azt az eljárást, melynek alapján valamely mennyiségből négyzet- vagy köbgyököt fejtünk, azokból a szabályokból ismerjük meg, a melyek szerint valamely összetett alapnak tagjai a négyzetben vagy köbben előfordúlnak. Mivel egytagú kifejezésekből már tudunk négyzet- és köbgyököt vonni, azért tárgyalni fogjuk még: a) a négyzetgyökvonást összetett algebrai kifejezésből és valamely tizes számrendszerbeli számból; b) a köbgyökvonást ugyanazokból.

a) Összetett algebrai kifejezésből négyzetgyököt a következő módon vonunk: 1) Az adott kifejezést valamely betű hatványai szerint rendezzük; 2) mivel a teljes négyzet első tagja az alap első tagjának négyzete, azért, ha ezen tagból négyzetgyököt fejtünk, akkor megkapjuk a gyök első tagját; 3) ha a gyök első tagjának négyzetét levonjuk az adott többtagúból, akkor a következő két tagja a maradéknak az alap első és második tagjának kétszeres szorzata és második tagjának a négyzete lesz; ennélfogva ha a megtalált gyökrész kétszeresével a maradék első tagját elosztjuk, akkor a gyök második tagját nyerjük, melynek segítségével képezzük az első és második tag kétszeres szorzatát és a második tag négyzetét s azokat a maradékból levonjuk; 4) ha még ekkor is mutatkozik maradék, akkor annak következő két tagja csakis az eddig megtalált gyökrész (egy tagnak véve) kétszeres szorzata lehet a harmadik taggal és a harmadik tag négyzete; ennélfogva képezzük az eddig talált gyök kétszeresét s azzal a maradékot osztjuk s azután a hányadosul nyert harmadik taggal megszorozzuk az osztót és képezzük a harmadik tag négyzetét s e tagokat a maradékból levonjuk; 5) ha még lenne maradék akkor az előbbiek szerint már könnyű lenne az eljárást folytatni. Pl.:

$$\sqrt{9x^2 - 24xy + 6xz + 16y^2 - 8yz + z^2} = 3x - 4y + z;$$
$$-9x^2$$
$$(-24xy + 6xz + 16y^2 - 8yz + z^2) : (6x - 4y). - 4y$$
$$-24xy + 16y^2$$
$$+ \quad -$$
$$(6xz - 8yz + z^2) : (6x - 8y + z). + z$$
$$6xz - 8yz + z^2$$
$$- \quad + \quad -$$
$$0$$

($-4y$.t és $+z$-t az osztó $6x$ illetőleg $6x - 8y$ mellé irjuk összeadandóúl, majd szorzóúl.)

A tizes számrendszerbeli számok négyzetgyökének meghatározását a most megismert eljárás alkalmazásával minden nehézség nélkül végezhetjük. E czélból: 1) az adott számot az egyesektől kezdve kettős-csoportokra bontjuk, egy tagból csakis a legmagasabb rendű rész állhat; 2) a legmagasabb rendű csoportból négyzetgyököt vonunk, azaz megkeressük azt a számot, amelynek négyzete legközelebb áll az e csoport által kifejezett számhoz, ez lesz a gyök első tagja, melynek négyzetét az első csoportból levonjuk; 3) az igy nyert és minden utána jövő maradékhoz hozzácsatoljuk a legközelebbi csoportot s a nyert számot — miután utolsó számjegyét elvágtuk — elosztjuk a már megtalált gyökrész kétszeres szorzatával; ilymódon megkapjuk a gyök újabb számjegyeit, melyeket az osztóhoz csatolunk s egyszersmind az így megváltoztatott osztó szorzására használunk fel; ezt a szorzatot az osztandóból — az elmetszett számjegyet is ahhoz számítva — levonjuk; 4) a további eljárást most már az elmondottak alapján könnyen folytathatjuk.

Ha a gyökjel alatti számban tizedes törtek is fordulnak elő, akkor az eljárás csakis annyiban módosul, hogy a csoportokra osztást a tizedes ponttól jobb és bal felé végezzük. Amennyiben a tizedes törtek utolsója egyedül maradna, azt zérussal kiegészítjük. Pl.:

1) $\sqrt{38452401} = 6201$

36

$245 : 122.2$

-244

$1?4 : 124$

-0

$12401 : 12401.1$

-12401

0

2) $\sqrt{254076 \cdot 4836} = 504 \cdot 06$

$40 : 10$

$4076 : 1004.4$

$-6048 : 1008$

$604836 : 100806.6$

0

b) Köbgyökvonásnál 1) rendezzük az összetett algebrai kifejezést valamely betű hatványai szerint; 2) a kifejezés első tagjának köbgyöke adja a gyök első tagját; 3) a maradék első tagja a már kijött, gyökrész háromszoros négyzete szorozva a második taggal, hogyha tehát azt elosztjuk a már megtalált gyökrész háromszoros négyzetével, akkor a gyök második tagját nyerjük; 4) ekkor képezzük az első tag háromszoros négyzetének szorzatát a második taggal, a második tag háromszoros négyzetének szorzatát az első taggal és a második tag köbét s ezeket a többtagú maradékból levonjuk; 5) ha még mutatkozik maradék, akkor azt az eddig megtalált s egy tagnak tekintett gyökrész háromszoros négyzetével elosztjuk s a már elmondott módon folytatjuk az eljárást. Pl.:

$$\sqrt[3]{1 + 3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6} = 1 + x + x^2$$

-1

$(3x + 6x^2 + 7x^3 + 6x^4 + \ldots\ldots) : 3$

$-3x + 3x^2 + x^3$

$(3x^2 + 6x^3 + 6x^4 + 3x^5 + x^6) : (3 + 6x + 3x^2)$

$-3x^2 \pm 6x^3$

$$-\begin{cases} +3x^4 \\ +3x^4 \pm 3x^5 \pm x^6 \end{cases}$$

0

A tizes számrendszerbeli számokból való köbgyökvonásnál: 1) felosztjuk az adott számot az egyesektől — tizedes tört esetében a tizedes ponttól jobbra és balra — számitva három jegyből álló csoportokra; 2) megkeressük azt a számot, melynek köbe a legmagasabb rendű csoportot leginkább megközelíti ez lesz a gyök első számjegye; 3) ennek köbét kivonjuk az első csoportból, a nyert maradékhoz pedig hozzáfüggesztjük a következő csoportot; 4) az így nyert számot miután két utolsó számjegyét elmetszettük, elosztjuk a már megtalált gyökrész háromszoros négyzetével; a kijövő hányados a gyök második számjegyét szolgáltatja; 5) most képezzük az első tag háromszoros négyzetének szorzatát a második taggal, a második tag háromszoros négyzetének szorzatát az első taggal s a második tag köbét s felirjuk ezeket a szorzatokat a maradék és egymás alá úgy, hogy minden következő szám egy jegygyel jobbra tovább kerüljön s az igy képezhető összeget a maradékból levonjuk; 6) ezt az eljárást addig kell folytatni, amig zérus a maradék. Ha a maradék sohasem zérus akkor a szám irrationális. Az eljárás a következő példákból nyer bővebb megvilágitást:

1) $\sqrt[3]{531441} = 81$
512
19441 : 192
192
 24
  1
0

2) $\sqrt[3]{49 \cdot 836032} = 3 \cdot 68$
27
22866 : 27
162
 324
  216
3180032 : 3888
31104
 6912
  512
0

20. §. Az egy ismeretlent tartalmazó másodfokú egyenlet.

Valamely egy ismeretlent tartalmazó egyenletet akkor nevezünk *másodfokúnak,* ha abban az összes lehetséges összevonások megtétele után az ismeretlen legfeljebb a négyzeten fordúl elő. Ha a másodfokú rendezett egyenlet csakis egy az ismeretlen második hatványát tartalmazó és egy ismert tagból áll, akkor azt *tiszta másodfokú egyenletnek* nevezzük. Ennek általános alakja: $ax^2 = b$. Ha a rendezett másodfokú egyenlet három tagból áll, a melyek közül egyik az ismeretlen második hatványát, a másik az ismeretlen első hatványát, a harmadik pedig a teljesen ismert részeket tartalmazza, akkor azt *vegyes másodfokú egyenletnek* nevezzük. Az ilyen egyenletek általános alakja:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

ahol *a, b* és *c* positiv, vagy negativ számokat jelentenek.

A tiszta másodfokú egyenletek megfejtése nem okoz nehézséget, mert *a*-val az egyenlet mindkét oldalát osztva s azután mindkét oldalból négyzetgyököt fejtve lesz a két gyök:

$$x^2 = \frac{b}{a} \text{ és } x_1 = + \sqrt{\frac{b}{a}};\ x^2 = - \sqrt{\frac{b}{a}};$$

vagy ha az adott egyenlet:

$$3\,x^2 = 243, \text{ akkor: } x^2 = 81 \text{ és } x_1 = +\,9,\ x_2 = -\,9.$$

Ha az egyenlet alakja:

$$x^2 + px = 0,$$

akkor:

$$x\,(x + p) = 0 \text{ és } x_1 = 0, x_2 = -\,p.$$

Legyen pl. az adott egyenlet:

$$x^2 + 6x = 0, \text{ akkor: } x\,(x + 6) = 0 \text{ és } x_1 = 0, x_2 = -\,6.$$

Ha az egyenlet alakja:

$$x^2 + 2ax + a^2 = b, \text{ akkor: } (x + a)^2 = b$$

$$x + a = \pm \sqrt{b} \text{ és } x_1 = -\,a + \sqrt{b}, x_2 = -\,a - \sqrt{b}.$$

Legyen pl. az adott egyenlet:

$$x^2 + 4\,x + 4 = 25, \text{ akkor: } (x + 2)^2 = 25, x + 2 = \pm 5,$$

$$x_1 = 3, x_2 = -\,7.$$

Ezen megjegyzések után lássuk miképen történik a vegyes másodfokú egyenletek megfejtése. Osszuk el az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet minden tagját *a*-val, akkor lesz:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a} = 0$$

ilyformán az ismeretlen négyzetét tartalmazó tagra nézve mindig elérhető, hogy annak coefficiense az egység legyen. Ha most $\frac{a}{b} = p$ és $\frac{c}{a} = q$, akkor az egyenlet alakja : $x^2 + px = -q$.

Ha a baloldal teljes négyzet lenne, akkor a megoldást az $(x+a)^2 = b$ egyenlet-alaknál követett eljárás szerint végezhetnők. Tehát egészítsük azt ki teljes négyzetté, akkor egy harmadik tag járul még a két előbbihez, amely csak $\frac{p}{2}$-nek a négyzete lehet; ha ezt az egyenlet mindkét oldalához adjuk, lesz:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - q,$$

azaz :

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \text{ és } x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - p};$$

honnan :

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Tehát *az olyan másodfokú egyenleteknél, melyekben a négyzetes tag coefficiense az egység, az ismeretlent megtaláljuk, ha képezzük a második tag fél-coefficiensét ellenkező jellel s ahhoz hozzáadjuk, vagy abból levonjuk a fél-coefficiens négyzetéből s a jobb oldalon álló ismert tagból képezett algebrai összeg négyzetgyökét.*

Legyen pl. adva :

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \; x^2 - 6x + 9 = 9 - 8; \; (x-3)^2 = 1;$$
$$x - 3 = \pm 1; \; x_1 = 4; \; x_2 = 2.$$

Vagy legyen :

$$x^2 - 9x + 20 = 0; \; x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2};$$
$$x_1 = 5; \; x_2 = 4.$$

A vegyes másodfokú egyenlet gyökeire nézve három eset lehetséges ; éspedig :

1) *Ha* $\frac{p^2}{4} - q > 0$, *akkor a két gyök valós és*

egymástól különböző, mert a gyökalatti mennyiség positiv s így a gyökvonás végezhető. Itt ismét három eset lehetséges, a szerint, amint $q > 0$, $q = 0$, $q < 0$.

2) *Ha* $\frac{p^2}{4} - q = 0$, *akkor a két gyök valós és egymással egyenlő* éspedig: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

3) *Ha* $\frac{p^2}{4} - q < 0$, *akkor a két gyök imaginárius.*

21. §. Másodfokú egyenletek két ismeretlennel.

Ha két egyenlet van adva két ismeretlen között, melyek közül az egyik első-, a másik másodfokú, vagy a melyek mindegyike másodfokú, akkor azok megoldása ugyanazon elvek szerint történik, melyeket az elsőfokú egyenlet-rendszerekre nézve (12. §.) megismertünk. Mi jelenleg csakis azon feladatok megfejtésére fogunk szorítkozni, amelyek az egy ismeretlent tartalmazó egyenletre való redukálás után legfeljebb másodfokú egyenleteket adnak. Legyen a megoldandó egyenlet-rendszer:

I. $x + y = a$ és $xy = b$, akkor az első egyenletből: $y = a - x$, ami a másodikba helyettesitve a következő egy ismeretlent tartalmazó másodfokú egyenletre vezet:

$$x^2 - ax + b = 0.$$

Ugyanezen eljárás vezet az $x - y = a$ és $xy = b$ továbbá az $x + y = a$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = b$ egyenlet rendszerek megfejtésére is, ha a második rendszer második egyenletét közös nevezőre hozzuk.

II. $$x^2 + y^2 = a^2;\ x + y = b;$$

a második egyenletet négyzetre emelve lesz:

$$x^2 + 2xy + y^2 = b^2;$$

ebből az elsőt kivonva lesz:

$$2xy = b^2 - a^2 \text{ és } xy = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ha most az $x + y = b$ és $xy = \frac{b^2 - a^2}{2}$ egyenletrendszert tekintjük, azt látjuk, hogy az az I. alatt tárgyalt rendszerrel azonos s így a megfejtést a következő másodfokú egyenlet szolgáltatja:

$$x^2 - bx + \frac{b^2 - a^2}{2} = 0.$$

Hasonló eljárás utján jutunk az $x^2 + y^2 = a^2$ és $x - y = b$ egyenlet-rendszer megoldására.

III. $x^2 - y^2 = a^2$; $x + y = b$; $(x + y)(x - y) = a^2$; ezt a 2-ik egyenlettel osztva, lesz:

$$x - y = \frac{a^2}{b};$$

hozzávéve $x + y = b$ egyenletet lesz:

$$2x = b + \frac{a^2}{b};\ x = \frac{1}{2}\left(b + \frac{a^2}{b}\right)$$

$$2y = b - \frac{a^2}{b};\ y = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a^2}{b}\right).$$

IV. $x^2 + y^2 = a$; $xy = b$; a 2-ik egyenlet helyett irható $x^2y^2 = b^2$ s akkor ez olyszerű alak, amilyet I. alatt tárgyaltunk s így ennek megoldását az

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

másodfokú egyenlet szolgáltatja, melyből x^2 és y^2 részére a következő értékpárokat nyerjük:

$$\pm\sqrt{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}} \text{ és } \pm\sqrt{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}}.$$

V. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$; $x - y = b$. Legyen $\sqrt{x} = u$, $\sqrt{y} = v$, akkor:

$$u + v = a;\ u^2 - v^2 = b.$$

A megoldást visszavezettük a III. alatt foglalt alakra.

22. §. Másodfokú egyenletekre és egyenletrendszerekre vezető tárgyi feladatok.

Itt is érvényes mindaz, amit az ily természetű elsőfokú feladatokra (13. §.) megemlitettünk, azért jelenleg csakis néhány példát kivánunk mintául bemutatni.

I. *Ha valamely szám négyzetéhez a 4-szeresét adjuk összegül 32-őt nyerünk? Melyik e szám?* Ez a szám x és:

$$x^2 + 4x = 32, \text{ honnan: } x_1 = -2 + \sqrt{36} = 4;$$
$$x_2 = -2 - \sqrt{36} = -8.$$

II. *Két részre osztandó 70 oly módon, hogy a részek szorzata 600 legyen.* Az egyik rész x, a másik $70 - x$ és

$$x(70 - x) = 600; \quad x^2 - 70x = -600;$$
$$x_1 = 35 + \sqrt{1225 - 600} = 35 + 25 = 60;$$
$$x_2 = 35 - \sqrt{1225 - 600} = 35 - 25 = 10.$$

III. *Mely két szám összege 15, négyzeteik különbsége 15?* Az egyik szám x, a másik $15 - x$ és

$$x^2 - (15 - x)^2 = 15; \quad x^2 - 225 + 30x - x^2 = 15;$$
$$30x = 240; \quad x = 8 \text{ és } 15 - x = 7.$$

IV. *Melyik három egymás után következő szám összege 50?* Ha az egyik szám x, akkor a másik $x + 1$, a harmadik $x + 2$ és:

$$x^2 + (x + 1)^2 + (x + 2)^2 = 50; \quad x^2 + 2x = 15;$$
$$x = -3 \pm \sqrt{16}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -5.$$

Tehát a három szám: 3, 4, 5; vagy -5, -4, -3.

V. *Egy mulatság költsége 64 korona; ha 4-gyel kevesebb résztvevő lett volna, mindegyik $1\frac{1}{3}$ koronával többet fizetett volna. Hányan voltak s mennyit fizetett egy-egy?* A résztvevők száma x volt s egyre $\frac{64}{x}$ korona jutott. Ha $x - 4$ résztvevő lett volna, akkor egynek $\frac{64}{x - 4}$ koronát azaz $\frac{64}{x} + 1\frac{1}{3}$ koronát kellett volna fizetni, miből:

$$\frac{64}{x - 4} = \frac{64}{x} + \frac{4}{3};$$
$$192x = 192x - 768 + 4x^2 - 16x;$$
$$x^2 - 4x = 192; \quad x = 2 \pm \sqrt{196} = 2 + 14 = 16.$$

A negativ gyök itt nem bir értelemmel.

VI. *Melyik az a két szám, melyek összege 18, szorzata 45.* E számok x és y; tehát:

$$x + y = 18; \quad xy = 45; \quad x = \frac{45}{y} \text{ és } \frac{45}{y} + y = 18;$$

$y^2 - 18y = -45$; $y = 9 \pm \sqrt{36}$; $y_1 = 15$; $y_2 = 3$.
Az y értékeinek nyerésére ezeket helyettesítjük s így: $x_1 = 3$; $x_2 = 15$.

VII. *Két szám négyzeteinek összege 61, szorzata 30. Melyik ez a két szám?* Az egyik x, a másik y és: $x^2 + y^2 = 61$; $xy = 30$, innen $2xy = 60$ az első egyenlethez adva:

$x^2 + 2xy + y^2 = 121$; $(x+y)^2 = 121$; $x + y = 11$;
tehát: $x + y = 11$ és $xy = 30$;

honnan $x = \frac{30}{y}$ és $\frac{30}{y} + y = 11$; $y^2 - 11y = -30$;

$$y = \frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{120}{4}} = \frac{11}{2} \pm \frac{1}{2};\ x_1 = 6;\ x_2 = 5.$$

Helyettesítés után: $y_1 = 5$; $y_2 = 6$.

VII. *A derékszögű négyszög területe 20m², kerülete 18 m. Mily nagyok az oldalai?* Az egyik x, a vele szomszédos y és:

$$xy = 20;\ 2(x+y) = 18;\ x + y = 9;\ y = \frac{20}{x};$$

$$x + \frac{20}{x} = 9;\ x^2 - 9x = -20;\ x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81-80}{4}} =$$
$$= \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2};\ x_1 = 5,\ x_2 = 4;\ y_1 = 4,\ y_2 = 5.$$

IX. *Két négyzet területének különbsége 5400 m², oldalaik különbsége 60 m. mily nagyok a négyzetek oldalai?* Az egyiké x, a másiké y.

$$x^2 - y^2 = 5400;\ x - y = 60;$$
$$\frac{x^2 - y^2}{x - y} = x + y = \frac{5400}{60} = 90$$

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 90 \\ x - y &=& 60 \\ \hline 2x &=& 150 \\ 2y &=& 30 \end{array} \qquad \begin{array}{l} x = 75 \text{ m.} \\ \hline y = 15 \text{ m.} \\ \hline \end{array}$$

X. *Két szám aránya 4 : 5, négyzeteik összege 2009. Melyik e két szám?* A két szám x és y.

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5},\ x^2 + y^2 = 2009;\ x = \frac{4}{5}y;\ \frac{16}{25}y^2 + y^2 = 2009;$$
$$41y^2 = 25.2009;\ y^2 = 1225;\ y = \pm\sqrt{1225} = 35;\ x = 28.$$

23. §. **A számrendszerekről.**

Valamely szám kisebbedő hatványainak sorát a negativ hatványkitevők bevezetése alapján az első hatványon túl bármeddig folytathatjuk, felirván annak 0-ik, — 1-ik, — 2-ik stb. hatványát is. Ily módon lehet a tizes számrendszerbeli tizedes törteket is 10 fogyó hatványai szerint rendezett sorban feltüntetni. Legyen pl. 2356·7864 ily sor alakjában előállitandó, akkor a kivánt sor:

$$2.10^3+3.10^2+5.10^1+6.10^0+7.10^{-1}+8.10^{-2}+$$
$$+6.10^{-3}+4.10^{-4}.$$

A tizes számrendszerbeli számoknak ily alakban való felirása módot nyújt arra, hogy a számok oszthatóságára a közönséges és tizedes törteknek egymásra való átalakítására vonatkozó és más már a számtanban megismert tételeket szigorúan bizonyítani tudjunk.

A számrendszer alapjául nem csupán 10, hanem más positiv egész szám is szolgálhatna. Ha valamely a számot választanánk alapul, akkor az ezen rendszerbeli számok a fogyó hatványai szerint rendezett sor alakjában lennének felírhatók, persze akkor az a hatványainak coefficiensei csakis 0, 1, 2, 3... $a-2$, $a-1$ lehetnének. Igy a hetes számrendszerben a 7 hatványaihoz tartozó coefficiensekül csakis 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 szolgálhatnak.

A tizes számrendszerbeli számokat pl. N-et könnyen kifejezhetjük más pl. m alappal biró számrendszerben, csakis az:

$$N = a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 m^2 + a_1 m + a_0$$

számsorban kell az a_n, a_{n-1}, a_{n-2} ..... a_2, a_1, a_0 coefficienseket rendre meghatározni. Ezeket pedig könnyen nyerhetjük, ha N-et elosztjuk az m alapszámmal, mert akkor hányadosul kijön:

$$a_n m^{n-1} + a_{n-1} m^{n-2} + \ldots + a_2 m + a_1$$

és a_0 lesz a maradék, ha azután a nyert hányadost ismét m-mel osztjuk, kijön az $a_n m^{n-2} + a_{n-1} m^{n-3} + \ldots + a_3 m + a_2$ hányados és maradékul a_1 coefficiens; ezen eljárás folytatása rendre megadja a kivánt coefficienseket, melyekhez még csupán az alapszám megfelelő hatványai függesztendők. Legyen pl. 2358 kifejezve a 7-es számrendszerben, akkor:

$2358:7=336$, $336:7=48$, $48:7=6$, $6:7=0$
maradék: 6 maradék: 0 maradék: 6 maradék: 6
tehát:
$$2358=6.7^3+6.7^2+0.7^1+6.$$

24. §. A kéttagú mennyiségek magasabb hatványai. Newton binomiális tantétele.

Ismerjük már a kéttagú mennyiségek négyzetét és köbét (5. §.) állitsuk most elő az $(a+b)^3$-nak $(a+b)$-vel való szorzása által $(a+b)$ 4-ik hatványát, majd az 5-iket is és iparkodjunk azokból megállapítani ama törvényszerüségeket, melyek bennünket $(a+b)^n$-ik hatványának felírására képesítenek.

$$(a+b)^1=a+b$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Ezen alakok gondos megfigyelése alapján a következő észrevételeket tehetjük:

1) Minden hatvány egygyel több tagot tartalmaz, mint a mennyit az exponens mutat.

2) A hatvány első tagja az alap első tagjának annyiadik hatványa, a mennyire a kéttagút emelni kivánjuk; ez a betű azután minden következő tagban egy-egy fokkal kisebb hatványon látható, egészen a 0-ikig; az alap második tagja megfordított sorrendben növekedő hatványokban fordúl elő a 0-iktól egészen a kivánt legmagasabbig, a két rész exponenseinek összege egyenlő a hatványkitevővel ilyformán: ha csakis a coefficienseiktől megszabadított betűmennyiségeket vennők figyelembe, azt látnók, hogy azok geometriai haladványt képeznek, (6. §.) melynek quotiense $\frac{b}{a}$; így az 5-ik hatványnál: a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5.

3) A számbeli coefficiensekre nézve kitünik, hogy ezek elseje 1, továbbá, hogy azok az első és utolsó tagtól számítva egyenlő távolságban egyenlők; végűl hogy minden ily coefffcienst a közvetetlenűl előtte állóból fejthetünk ki, ha ezt megszorozzuk az előtte álló tagban lévő *a* szám exponensével és a nyert szorzatot elosztjuk a megelőző tagok számával; tehát pl. az 5-ik hatványra nézve az első coefficiens 1,

ugyanott *a* exponense 5, a másodikat megelőző tagok száma 1, lesz tehát a 2-ik coefficiens: $\frac{5}{1}$; a harmadik: $\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$, a 4-ik $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; az 5-ik $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; végre a 6-ik $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$.

A most megismert jellemző tulajdonságok alapján már az $(a + b)^6$-nak $(a + b)$-vel való szorzása nélkül is képesek vagyunk $(a + b)^7$ értékét kifejteni, mert:

$$(a+b)^7 = a^7 + \frac{7}{1} \cdot a^6b + \frac{7.6}{1.2} a^5b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4b^3 +$$
$$+ \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3b^4 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot a^2b^5 + \frac{7}{1} ab^6 + b^7.$$

Az itt szereplő coefficiensekre nézve új jelzési módot hozunk be, mely szerint pl. $\frac{7}{1} = \binom{7}{1}$ (olv. hét egy fölött); $\frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \binom{7}{2}$ (hét kettő fölött); $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \binom{7}{3}$ (hét három fölött) és a többi, vagy általában:

$$\frac{n}{1} = \binom{n}{1} \text{ (n egy fölött)}; \quad \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = \binom{n}{2} \text{ stb.}$$

Nem lesz nehéz most már $(a + b)$ n-dik hatványának kifejtett alakját felírni, mert:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$
$$+ \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n.$$

Ezt a tantételt, mely arra képesít bennünket, hogy a kéttagú mennyiség bármely hatványát, vagy valamely hatványának akár hányadik tagját felírhassuk, feltalálójáról *Newton*-féle kéttagi tantételnek nevezzük.

Jegyzet. A kéttagi coefficienseket úgy is előállíthatjuk, hogy elsőül felirjuk az egységet, a következő coefficienst pedig nyerjük, ha a megélőző hatvány két első tagjához tartozó coefficienseket összeadjuk, a 3-ikat, ha a megelőző hatvány második és harmadik coefficiensének összegét képezzük és így tovább, tehát (a + b) első hatványának coefficienseiből kiindúlva:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\end{array}
$$

. . . .

A kéttagi coefficiensek így nyerhető háromszögalakú táblázatát *Pascal-féle háromszögnek* hívjuk.

Minthogy a *Pascal-féle* háromszög alapján az n-ik hatványhoz tartozó coefficienseket csakis akkor vagyunk képesek felírni, hogyha az $(n-1)$-ik hatványhoz tartozókat már ismerjük; azért az a kéttagúak magasabb hatványainak gyakorlati meghatározása tekintetében — a *Newton*-féle tantétellel szemben — nem nagy értékkel bír.

25. §. Az arithmetikai vagy számtani haladvány.

Arithmetikai vagy számtani haladványnak a számok oly sorát nevezzük, melynél bármely tagból az előtte állót kivonván, ugyanazon különbséghez jutunk. Ilyen haladvány: 2, 4, 6, 8, 10 . . . . , vagy:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,\ \ldots\ldots$$

A számtani haladvány *növekedő*, vagy *csökkenő*, aszerint, amint a *különbség* (differentia) positiv, vagy negativ:

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 növekedő,
18, 15, 12, 9, 6, 3, 1 csökkenő

haladvány; az előbbi különbsége $+2$, az utóbbié -3. Az itt szereplő számokat a haladvány *tagjainak* nevezzük.

A számtani haladvány bármely tagját nyerjük, ha az első taghoz hozzáadjuk a különbség annyiszorosát, a hány tag a keresettet megelőzi. Ha tehát az első tag a, a differentia d és az n-ik — a_n — a felirandó tag, akkor: $a_n = a_1 + (n-1)\,d$; így pl. az

1, 7, 13, 19 . . . . . .

haladvány 9-ik tagja:

$$a_9 = a_1 + (n-1)\,d = 1 + 8.6 = 49.$$

A számtani haladvány n első tagjának összegét — s_n — nyerjük, ha az első és n-ik (utolsó) tag összegét a tagok számának felével megszorozzuk. Legyen az *n* tagú haladvány:

$$s_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \ldots\ldots + \\ + [a + (n - 1)d]$$

vagy az utolsó tagot *u*-val jelölvén, a forditott sorrendben felírt haladvány:

$$s_n = u + (u - d) + (u - 2d) + (u - 3d) + \ldots\ldots + \\ + [u - (n - 1)d];$$

akkor, ha most e két sort összeadjuk:

$$2s_n = (a + u) + (a + u) + (a + u) + (a + u) + \ldots + \\ + (a + u);$$

és mivel az *n* tagú összeg tagjai egyenlők, lesz:

$$2s_n = n(a + u) \text{ és } s_n = \frac{n}{2}(a + u).$$

Ha a 3, 7, 11, 15 ..... haladvány 12 első tagjának s_{12} összegét keressük, lesz:

$$s_{12} = \frac{12}{2}(3 + 3 + 11.4) = 6\,(6 + 44) = 6.50 = 300.$$

Ha a számtani haladvány két tagja pl. *a* és *b* közé *n* tag sorolandó olymódon, hogy a szereplő $n + 2$ tag számtani haladványt alkosson, akkor *közbeigtatást* (interpolatio) kell végeznünk. E czélra elég az új haladvány differentiáját — d^1 — kikeresni. Azonban tudjuk, hogy ezen $n + 2$ tagú haladvány utolsó tagja: $b = a + (n + 1)d^1$, honnan:

$$d^1 = \frac{b - a}{n + 1}.$$

Igy pl. ha a 3, 5, 7 .... haladványban 3 és 5 közé 7 új tag igtatandó, akkor:

$$d^1 = \frac{5 - 3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \text{ s a haladvány}$$

$$3,\ 3\frac{1}{4},\ 3\frac{1}{2},\ 3\frac{3}{4},\ 4,\ 4\frac{1}{4},\ 4\frac{1}{2},\ 4\frac{3}{4},\ 5.$$

26. §. A logarithmusokról.

Valamely *a* számnak a *b* alapra vonatkozó *logarithmusa* alatt azt az x *hatványkitevőt* értjük, melyre az alapot emelni kell, hogy az adott számot nyerjük.

Ezt igy jelöljük ki: 1) $\log_b a = x$ (logarithmus *b* alapra *a* egyenlő x) s ennek az az értelme, hogy: 2) $b^x = a$. A *logarithmálás* vagyis az ismeretlen exponens számbeli értékének meghatározása tehát éppen úgy, mint a gyökvonás, a hatványozásnak megfordított művelete, a hol azonban az adott alaphoz és hatványhoz a megfelelő exponenst keressük. Ha az 1) alatt foglalt egyenletből x értékét 2)-be helyettesitjük, lesz: 3) $b^{\log_b a} = a$. Igy pl.:

$$3^4 = 81; \ \log_3 81 = 4; \ 3^{\log_3 81} = 81.$$

A logarithmus értelmezéséből következik, hogy:

a) *Bármely alapnak önmagára vonatkoztatott logarithmusa az egység;* ha *b* az alap, akkor $\log_b b = 1$, mert: $b^1 = b$.

b) *Az egységnek bármely alapra vonatkozó logarithmusa zérus;* $\log_b 1 = 0$, mert: $b^0 = 1$.

c) *A zérus logarithmusa az egynél nagyobb alapra* $-\infty$; $\log_a 0 = -\infty$, ha: $a > 1$; mert:

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

d) *A szorzat logarithmusa egyenlő a tényezők logarithmusainak összegével;* $\log_m (ab) = \log_m a + \log_m b$; mert legyen: $\log_m a = x$ és $\log_m b = y$, innen: $m^x = a$ és $m^y = b$; e két egyenletet szorozván, lesz: $m^{x+y} = ab$ s a logarithmus értelmezése alapján: $x + y = \log_m (ab)$ innen x és y értékének helyettesitése után: $\log_m (ab) = \log_m a + \log_m b$.

e) *A hányados logarithmusát megtaláljuk, ha a számláló logarithmusából kivonjuk a nevezőét:* $\log_m \left(\frac{a}{b}\right) = \log_m a - \log_m b$. A bizonyitás menete olyan, mint *d)* alatt.

f) *A hatvány logarithmusát nyerjük, ha az alap logarithmusát megszorozzuk az exponenssel:* $\log_m (a^b) = b \,.\, \log_m a$, mert legyen $\log_m a = x$ honnan: $m^x = a$, innen: $m^{xb} = a^b$ és $xb = \log_m (a^b)$; x értékét helyettesitve, lesz: $b \,.\, \log_m a = \log_m (a^b)$.

g) *A gyökmennyiség logarithmusát úgy találjuk meg, hogy a gyök alatti mennyiség logarithmusát a* *gyökkitevővel elosztjuk;* $\log_m \sqrt[b]{a} = \frac{\log_m a}{b}$. A bizonyitás az előbbi alapján egyszerű, ha meggondoljuk, hogy a gyökmennyiség nem más, mint törtkitevővel biró hatványmennyiség.

h) *Ugyanazon számnak különböző alapokra vonatkozó logarithmusai különbözők.*

i) *Ha valamely a számnak c alapra vonatkozó logarithmusát már ismerjük, akkor annak b alapra vonatkozó x logarithmusát úgy kapjuk meg, hogy a már ismert logarithmusát elosztjuk az alapnak a régire vonatkoztatott logarithmusával:* $\log_b a = \log_c a \cdot \frac{1}{\log_c b}$, mert: $b^x = a$; $\log_c (b^x) = a$, vagy: $x \log_c b = \log_c a$, honnan: $x = \log_c a \cdot \frac{1}{\log_c b}$.

Ha valamely számot alapul választunk és a természetes számokat, mint ezen alap hatványait képzeljük előállítva, akkor az exponensek — tehát a természetes számok logarithmusai — *logarithmusi rendszert* alkotnak. *A logarithmusi rendszer alapja csakis az egységnél nagyobb positiv szám lehet.* Negativ számot nem választhatunk alapul, mert annak hatványaival nem vagyunk képesek minden *reális* számot előállítani, éppen oly kevéssé szolgálhat ily czélra az egység, melynek minden hatványa egy. — A positiv alapnak minden positiv és negativ egész és tört hatványa positiv szám, azért a negativ számok logarithmusai csakis imaginárius számok lehetnek.

A mathemetikában két logarithmusrendszert ismerünk, a *természetest,* vagy hyperbolikus logarithmusrendszert, ennek feltalálója *Napier lord* skót tudós (1614), alpszáma $e = 2{\cdot}718281828459\ldots$ jele l., vagy l. nat. (logarithmus naturalis); és a *közönséges* vagy *Brigge-féle* logarithmus-rendszert, melynek feltalálója *Briggs Henry* (1624) oxfordi egyetemi tanár, alapszáma pedig 10, jele log. A *Briggs-féle* logarithmusok alapszámát nem irjuk ki, a természetesé azonban mindig kiirandó.

A *Briggs-féle* logarithmusrendszerben csak kevés számnak egész szám a logarithmusa, a legtöbb számé irrationális érték, melyet annál jobban megközelítünk, minél több tizedessel állítjuk elő. Rendesen 4—7 jegyig történik a meghatározás. Minthogy:

$10^0 = 1$ azért $\log 1 = 0$ | $10^2 = 100$ azért $\log 100 = 2$
$10^1 = 10$ „ $\log 10 = 1$ | $10^3 = 1000$ „ $\log 1000 = 3$

$$10^{-1} = \frac{1}{10}, \text{ azért } \log 0\cdot1 = -1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100}, \text{ „ } \log 0\cdot01 = -2$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}, \text{ „ } \log 0.001 = -3.$$

Az 1 és 10, 10 és 100, 100 és 1000 stb., továbbá a 0·1 és 0·01, 0·01 és 0·001 stb. közé eső számok logarithmusai két részből állanak éspedig egy egész számú és egy tört részből. Az egész számú részt *jellemzőnek,* vagy *charakteristikának,* a tört számot pedig *pótléknak,* vagy *mantissának* hívjuk. Az egységnél nagyobb számoknak positiv, a kisebbeknek negativ logarithmus felel meg. A negativ pótlék helyett rendesen positiv pótlékot veszünk és negativ jellemzőt írunk utána. Igy pl. — 0·56789 = 1 — 0·56789 — — 1 = 0·43211 — 1. A természetes számok logarithmusait táblázatokba állítják össze, melyeknek elején megtalálhatók az utasítások, miknek követésével képesek vagyunk a keresett logarithmusokat a táblázatban megtalálni. (L. *Polikeit:* Logarithmustáblák. Kiadta: Stampfel Károly.) Ez a táblázat ötjegyű. Az első logarithmustáblát *Briggs* és *Vlacq* számították ki és állították össze. Ők a számítást a geometriai középarányosok ismételt alkalmazásaival, igen fáradságos úton végezték. A logarithmustáblák használatára nézve csakis néhány megjegyzést kivánunk tenni: *Az egész számok logarithmusainak charakteristikája mindig egygyel kevesebb egységből áll, mint a mennyi az adott szám jegyeinek a száma.* Tehát az egyjegyű számé 0, a kétjegyűé 1, a három jegyűé 2 és a többi. *Az egyenlő jegyekből álló, de szorzóul 10 különböző hatványait tartalmazó számok logarithmusai csakis a charakteristikában különbözhetnek.* Igy pl. 5, 50, 500, 5000..., 0·5, 0·05, stb. logarithmusainak pótlékai ugyanazon számok, csakis a charakteristika az elsőnél 0, a másodiknál 1, majd 2, 3... — 1, — 2,...stb. Ez okból a táblázatokban csakis a pótlékok vannak feljegyezve.

A logarithmusokkal való számításoknál a tizedes törtekre érvényes szabályok szerint járunk el.

27. §. Exponentiális egyenletek.

Az olyan egyenleteket, melyekben az ismeretlen, mint hatvány vagy gyökkitető fordul elő, *exponentiális egyenleteknek* nevezzük. Ilyenek:

$$a^x = b \text{ és } \sqrt[x]{a} = b.$$

Az ilyszerű egyenletek megoldása logarithmálás segítségével végezhető, mert:

$$x \log a = \log b \text{ és } \frac{1}{x}.\log a = \log b$$

melyekből: $$x = \frac{\log b}{\log a} \text{ és } x = \frac{\log a}{\log b}.$$

Például:

$$21^x = 9261 \text{ és } \sqrt[y]{1728} = 12$$

$$x \log 21 = \log 9261 \text{ és } \frac{1}{y} \log 1728 = \log 12$$

$$x = \frac{\log 9261}{\log 21} = \frac{3{\cdot}966658}{1{\cdot}322219} = 3;$$

$$y = \frac{\log 1728}{\log 12} = \frac{3{\cdot}237544}{1{\cdot}079181} = 3.$$

NEGYEDIK RÉSZ.

A másodfokú egyenletek teljes elmélete. A másodfokú függvény és annak szélső értékei.

28. §. A másodfokú egyenletek gyökei és gyöktényezői.

A másodfokú egyenletek legáltalánosabb alakja: $ax^2 + bx + c = 0$, melyben *a*, *b* és *c* x-től független tetszésszerinti számokat jelentenek. Hogy azt az egyenletet megfejthessük, szorozzuk meg minden tagját $4a$-val, lesz:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

vagy:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac.$$

Ha ehhez a $b^2 = b^2$ azonosságot hozzáadjuk, a bal oldal teljes négyzet lesz, azaz:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac,$$

vagy:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac;$$

és:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

honnan:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

vagy felbontva ezt és $\sqrt{b^2 - 4ac} = m$ értéket helyettesítve, a gyökök számára a következő értékeket nyerjük:

$$x_1 = \frac{-b + m}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - m}{2a}.$$

Minden zérusra redukált másodfokú egyenlet oly szorzat alakjában állitható elő, melynek tényezői: a másodfokú tag coefficiense, és az egyenlet két gyöktényezője. Gyöktényező alatt oly különbséget értünk, melynek kisebbitendője az ismeretlen, kivonandója az egyenlet egyik gyöke; tehát:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

E tétel képesit bennünket arra, hogy a másodfokú kifejezéseket, mint három tényező szorzatát állithassuk elő.

Hogy e tételt bebizonyithassuk, vegyük figyelembe az egyenlet baloldalát, akkor:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{m}{2a}\right)^2\right] =$$

$$= a\left(x + \frac{b + m}{2a}\right)\left(x + \frac{b - m}{2a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

A másodfokú egyenleteknek csakis két gyök felelhet meg, mert tegyük fel, hogy x_1 és x_2-n kivül még r is gyöke az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletnek, akkor ezen új érték x helyére írható s lesz:

$$ax^2 + bx + c = a(r - x_1)(r - x_2) = 0.$$

Ámde valamely szorzat csakis úgy lehet zérussal egyenlő, ha valamelyik tényezője zérus s mivel a nem lehet zérus, tehát:

$$r - x_1 = 0, \text{ vagy } r - x_2 = 0$$

azaz:

$$r = x_1, \text{ vagy } r = x_2.$$

29. §. A másodfokú egyenlet gyökeinek és coefficienseinek összefüggése. A discriminans. A reális gyökök előjelei.

A másodfokú egyenlet gyökeinek nagyságát az *a, b, c* coefficiensek nagysága szabja meg. A gyökök és coefficiensek ilyformán szükségképen szoros összefüggésben állanak egymással.

Ha a 27. §-ban talált gyökök összegét és szorzatát képezzük, lesz:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ és } x_1 \,.\, x_2 = \frac{c}{a},$$

azaz: *a második és az első coefficiens ellenkező jellel vett quotiense a két gyök összegével, a harmadik és az első tag quotiense pedig a gyökök szorzatával egyenlő.*

Az elmondottak alapján képesek vagyunk adott gyökeiből a másodfokú egyenletet felírni, mert ha e gyökök 5 és 9, akkor:

$$\frac{b}{a} = -(5+9) \text{ és } \frac{c}{a} = 5 \,.\, 9$$

s így:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\,(x^2 - 14x + 45) = 0;$$

$$x^2 - 14x + 45 = 0$$

lesz a keresett másodfokú egyenlet.

Azt, hogy a másodfokú egyenlet gyökei, melyben az *a, b* és *c* coefficiensek reális számok, valós, vagy képzetes értékek-e, a gyökjel alatt előforduló $\sqrt{b^2 - 4ac}$ kifejezés dönti el; mert ha: $b^2 - 4ac > 0$, akkor *m* (28. §.) reális szám s így a két gyök két különböző nagyságú reális érték; ha: $b^2 - 4ac = 0$, akkor a két gyök két egyenlő nagyságú reális érték, ha végül: $b^2 - 4ac < 0$, akkor a gyökök conjugált complex-számok. A $b^2 - 4ac$ kifejezést a másodfokú egyenlet *discriminans*-ának hívjuk.

A reális gyökök és a coefficiensek előjelei között szoros összefüggés van, melyre nézve *Descartes* jelszabálya nyújt felvilágositást, e szerint: *az egyenletnek annyi a positiv reális gyöke, a hány jelváltás van az egyenleti háromtag két-két egymásra következő tagjánál és annyi a negativ reális gyöke, amennyi a jelkövetkezés az egymásután jövő tagoknál.* Igy az $x^2 - 14x + 45 = 0$ egyenletnek két reális gyöke van, mert discriminansa: $b^2 - 4ac = 16$ és mind a két gyök positiv, mert az egyenleti háromtagban két jelváltás fordul elő.

30. §. Két egyenlet közös gyöke.

Hogy két egyenletnek közös gyöke lehessen, szükséges, hogy coefficienseik között bizonyos összefüggés mutatkozzék. A coefficiensek összefüggését mutató azon egyenletet, melynek fenállása mellett a két egyenlet közös gyökkel bír, az egyenletek *resultansának* hivjuk.

Egy első- és egy másodfokú egyenlet resultánsát a következő módon határozzuk meg. Legyenek az egyenletek:

$$ax + b = 0$$
$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0.$$

Ha ez a két egyenlet közös gyökkel bír, akkor az elsőfokú egyenlet egyetlen gyöke szükségképen gyöke a másodfokú egyenletnek, tehát:

$$x = -\frac{b}{a}$$

eleget fog tenni a másik egyenletnek is s így azt x helyébe írva lesz:

$$a_1\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + b_1\left(-\frac{b}{a}\right) + c_1 = 0,$$

honnan:

$$a_1b^2 - abb_1 + a^2c_1 = 0,$$

mint a két egyenlet resultánsa nyerhető.

Ha mind a két egyenlet másodfokú s közös gyökük x_1, akkor:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$
$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = 0.$$

Ha ebből az angol módszerrel (12. §.) előbb a négyzetes, majd az ismert tagokat kiküszöböljük, a következő egyenletekhez jutunk:

$$x_1(ab_1 - a_1b) + (ac_1 - a_1c) = 0$$
$$x_1^2(ac_1 - a_1c) + x_1(bc_1 - b_1c) = 0,$$

ezekből:

$$x_1 = -\frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b}, \text{ vagy } x_1 = -\frac{bc_1 - b_1c}{ac_1 - a_1c}$$

s e két egyenlet révén a resultáns értéke:

$$(ac_1 - a_1c)^2 - (ab_1 - a_1b)(bc_1 - b_1c) = 0.$$

31. §. Másodfokúra redukálható felsőbb fokú egyenletek.

Az oly felsőbb fokú egyenletek, melyekben az ismeretlennek csak két hatványa fordul elő, de oly módon, hogy az egyik exponense kétszerese a másikénak, mindig másodfokú egyenletekre vezethetők vissza, ha új ismeretlent hozunk be a régi helyett. Igy:

$$x^{2n} + ax^n = b$$

egyenletben legyen: $x^n = y$, akkor: $x^{2n} = y^2$ s az egyenlet:

$$y^2 + ay = b,$$

$$y = x^n = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \text{ és } x = \sqrt[n]{-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} = b}}.$$

Ha az egyenlet alakja:

$$\sqrt[n]{x} + a\sqrt[2n]{x} = b,$$

akkor:

$$\sqrt[2n]{x} = y \text{ és } \sqrt[n]{x} = y^2,$$

honnan:

$$y^2 + ay = b \text{ és } y = \sqrt[2n]{x} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b};$$

majd:

$$x = \left(-\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{2n}.$$

Legyen még megfejtendő a következő alak: $a^{2x} + ma^x = n$; ha: $a^x = y$, akkor $a^{2x} = y^2$ és

$$y = a^x = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + n};$$

$$x = \frac{\log\left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + n}\right)}{\log a}.$$

Végűl, ha az egyenlet alakja:

$$\sqrt[x]{a} + m \cdot \sqrt[2x]{a} = n,$$

akkor:

$$\sqrt[2x]{a} = y, \sqrt[x]{a} = y^2,$$

és:

$$y^2 + my = n,$$

azaz:
$$\sqrt[2x]{a} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + n};$$
honnan:
$$x = \frac{\log a}{2 \log\left(-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + n}\right)}.$$

32. §. A reciproc egyenletekről.

Az olyan zérusra redukált s az ismeretlen fogyó, vagy növekedő hatványai szerint rendezett egyenleteket, a melyeknél a baloldal elejétől és végétől egyenlő távolságban álló tagok coefficiensei egyenlők, *reciproc egyenletek*-nek nevezzük, mert azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy gyökeiknek reciproc értékei szintén eleget tesznek az egyenleteknek. Igy ha az $x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ egyenletbe x helyére $\frac{1}{x}$-et írunk, lesz: $\frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 1 = 0$, vagy x^4-nel, mint közös nevezővel felszorozván: $1 - 3x + x^2 - 3x^3 + x^4 = 0$, ami állitásunkat szemmel láthatólag igazolja.

A reciproc-egyenletek, ha nem lépik túl az 5-ik fokot, másodfokúakra vezethetők vissza. Lássuk sorban a visszavezetés-módját a harmad-, negyed- és ötödfokú reciproc egyenleteknél.

1) Ha a megfejtendő egyenlet:
$$x^3 + px^2 + px + 1 = 0,$$
akkor a helyett:
$$x^3 + 1 + px(x + 1) = 0$$
egyenlet irható s mivel $(x^3 + 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)$ (6. §. 4. pont), azért:
$$(x + 1)(x^2 - x + 1) + px(x + 1) = 0,$$
honnan $x + 1$, mint közös elem kiemelhető lévén, az egyenlet ilyen alakot ölt:
$$(x + 1)[x^2 + (p - 1)x + 1] = 0.$$
Ez az egyenlet csak akkor állhat fent, ha:
$$x + 1 = 0, \text{ vagy } x^2 + (p - 1)x + 1 = 0,$$
ezen egyenletekből az eredeti gyökeit meghatározhatjuk.

2) Ha a megfejtendő egyenlet:

$$x^4+px^3+qx^2+px+1=0,$$

akkor az egyenlet tagjait x^2-tel osztván, lesz:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+p\left(x+\frac{1}{x}\right)+q=0,$$

ha ide: $x+\frac{1}{x}=y$ értékét helyettesítjük, akkor ennek négyzete $x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2$, azaz $x^2+\frac{1}{x^2}=$ $=y^2-2$, miáltal: $y^2-2+py+q=0$ és

$$y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q+2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q+8}}{2}$$

eredményhez jutunk, melyből az adott egyenlet gyökeit már a legnagyobb könnyűséggel meghatározhatjuk.

3) Ha a megfejtendő egyenlet:

$$x^5+px^4+qx^3+qx^2+px+1=0,$$

$$(x^5+1)+px(x^3+1)+qx^2(x+1)=0;$$

ezekből a tagokból $(x+1)$ kiemelhető, miáltal lesz:

$$(x+1)[x^4+(p-1)x^3+(1-p+q)x^2+(p-1)x+$$
$$+1]=0.$$

Itt az egyik tényező $x+1$, a másik egy negyedfokú reciproc-egyenlet; így hát a megfejtendő egyenlet gyökeit ezek révén előállíthatjuk.

33. §. A binom-egyenletekről.

Az olyan egyenleteket, melyek csakis két tagból, mégpedig az ismeretlen valamely hatványából s egy ismert részből állanak, *binom egyenleteknek* nevezzük. Ilyen:

$$x^m\pm A=0,$$

melyben A az ismert részt képviseli. Ha most A-nak a az m-ik gyöke, úgy hogy: $a=\sqrt[m]{A}$ és $a^m=A$, akkor a binom-egyenletek általános alakja:

$$x^m\pm a^m=0,$$

melyből: $x=ay$ behelyettesitése után a következő alakra jutunk:

$$a^my^m\pm a^m=0;\ a^m(y^m\pm1)=0 \text{ és } y^m\pm1=0.$$

Minden binom-egyenlet megfejtése ennélfogva az $y^m\pm1=0$ alakú egyenlet megfejtésére vezethető vissza s annak gyökeit az $y^m \pm 1 = 0$ alakú egyenlet gyökeiből nyerhetjük, ha ez utóbbi egyenlet gyökeit — az $x = ay$ helyettesités folytán — a-val megszorozzuk. Legyen pl.: $x^3 - 27 = 0$ egyenlet adva; ebben $27 = a^3$ és $a = 3$, ha most: $x = 3y$, akkor:

$$27y^3 - 27 = 0;\ 27(y^3 - 1) = 0,$$

az adott binom-egyenlet három gyöke az által nyerhető, ha az $y^3 - 1 = 0$ egyenlet gyökeit rendre 3-mal megszorozzuk; de:

$$y^3 - 1 = (y - 1)(y^2 + y + 1) = 0,$$

honnan: $y - 1 = 0$ és $y^2 + y + 1 = 0$

azaz:

$$y_1 = 1;\ y_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2};\ y_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2};$$

az adott egyenlet gyökei pedig ezek háromszorosai.

Ha az adott egyenlet gyökei az $x^4 - 1 = 0$ alakú egyenlet gyökeivel állanak összefüggésben, akkor a megoldás menete:

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0,$$

innen: $x^2 - 1 = 0;\ x^2 + 1 = 0,$

s az egyenlet gyökei:

$$a_1 = 1;\ x_2 = -1,\ x_3 = i;\ x_4 = -i.$$

Állitsuk még elő az $x^4 + 1 = 0$ egyenlet gyökeit.

$$x^4 + 1 = x^2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 0;\ \text{innen } x^2 = 0$$

és: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$ ha $x + \frac{1}{x} = y$, akkor:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = y^2 \text{ és } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

minek figyelembe vétele után:

$$y^2 - 2 = 0 \text{ és } y = \pm\sqrt{2};$$

y értékeit az $x + \frac{1}{x} = y$ egyenletbe helyettesítve az adott egyenlet számára négy gyököt nyerünk. — Ezek után már nem okozhat nehézséget az: $x^5 \pm 1 = 0$, $x^6 \pm 1 = 0$ stb. egyenlet-alakok megfejtése sem.

34. §. A függvény fogalma.

A végtelen sok érték felvételére képes mennyiségeket *változóknak* (variabilis mennyiségeknek) nevezzük. Ha két változó mennyiség olyan kapcsolatban áll egymással, hogy az egyik minden adott értékéhez a másiknak egy teljesen meghatározott értéke tartozik, akkor a két mennyiség *függvénye* egymásnak. Azt a változót, melynek értékét $-\infty$-től $+\infty$-ig változtathatjuk *függetlennek*, a másikat, melynek értéke függ az előbbitől s azzal együtt változik, *függő-változónak* hívjuk. A függvényekben előforduló olyan mennyiségeket melyek értéke mindig ugyanaz marad, *állandóknak* (constans) mondjuk. Igy pl.: a kör területe függvénye a sugárnak, a négyzet területe a négyzet oldalának és a többi. Két mennyiségnek egymástól való függését az állandó és változó mennyiségek közt fenálló határozatlan egyenletek fejezik ki. Igy pl. az:

$$ax + by = c$$

egyenletből:

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

itt x értékének változtatásával y is változik, tehát x a független, y a függő változó, a, b, c pedig állandó mennyiségek. A függvény megjelölését következőleg eszközöljük:

$$y = f(x); \ y = F(x); \ y = \varphi(x).$$

Ha a független változó a függvényben a második hatványon, vagy azonkivül az elsőn is előfordúl, akkor a függvény másodfokú, ilyen az: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ függvény-alak.

35. §. Maximum és minimum értékek.

Valamely változó mennyiség *maximum* értékének azt nevezzük, amely nagyobb a közvetlenül előtte álló és közvetlenül utána következő értékeknél. — Valamely változó mennyiség *minimum* értékének azt nevezzük, amely kisebb a közvetlenül előtte álló és közvetlenül utána következő értékeknél. (Ezek a *relativ maximum, vagy minimum-értékek.* A függvény összes lehetséges értékei közül a legnagyobbat, vagy legkisebbet *absolut maximum, vagy minimum értéknek* hívjuk.) Ha az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú egész függvényben a, b és c valós értékek, akkor ha e függvény maximum, vagy minimum értékét keressük, írjuk ezt fel a következő alakban:

$$y = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4}}{a};$$

ha most 1) $a > 0$, akkor ezen alak azt mutatja, hogy *az y függvény akkor veszi fel legkisebb értékét, mikor a számláló első tagja elenyészik,* tehát mikor:

$$ax + \frac{b}{2} = 0, \text{ azaz: } x = -\frac{b}{2a},$$

és ekkor a függvény minimum értéke:

$$y' = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Hogy ez valóban minimum érték, kimutatható, ha az $y - y'$ különbséget képezzük, mert:

$$y - y' = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2}{a}$$

különbség mindig positiv érték, mivel számlálója és nevezője positiv; tehát y ilyformán y'-nál bármilyen x érték mellett is nagyobb értékkel bír. Ha pedig:

2) $a < 0$, akkor az $y = \frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2}{a} - \frac{\frac{b^2 - 4ac}{4}}{a}$ függvény első tagja (a negativ s a számláló positiv lévén) mindenesetre negativ szám; *a függvény tehát akkor nyeri el legnagyobb értékét,* ha: $\frac{\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2}{a} = 0$, azaz:

$ax + \frac{b}{2} = 0$ és $x = -\frac{b}{2a}$, amikor a függvény *maximum értéke:*

$$y'' = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Az első esetben csak minimum, a másodikban csak maximum értéke lehet a függvénynek, mert első esetben a változó más értékeivel a függvény értéke a végtelenségig nagyobbitható, a másodikban pedig a végtelenségig kisebbithető lenne.

Ilyformán: *az $ax^2 + bx + c$ másodfokú egész függvény akkor éri el legnagyobb vagy legkisebb értékét, ha: $x = -\frac{b}{2a}$ és pedig az x ezen értékéhez tartozó $\frac{4ac - b^2}{4a}$ függvény-érték maximum, ha a negativ és minimum, ha a positiv. Első esetben nincs minimum, a másodikban nincs maximum.*

ÖTÖDIK RÉSZ.

A sorok és a kamatos-kamat-számítás.

36. §. A sorokról általában.

A meghatározott szabály szerint alkotott mennyiségek egymásutánjait *sorok*nak, magukat a mennyiségeket a sorok *tagjainak* nevezzük. Igy pl. 1, 2, 6, 24, 120 . . . . oly sor, melynél a tagok megalkotásának miképtje azonnal szembeötlő lesz, ha azokat ily alakban írjuk fel: $a_1 = 1$; $a_2 = 1.2$; $a_3 = 1.2.3$; $a_4 = 1.2.3.4$; $a_5 = 1.2.3.4.5 \ldots$ és a többi.

Az előzőkben (6. és 25. §) már foglalkoztunk a geometriai- és az arithmetikai-sorral, de ottani tárgyalásainkban feltételeztük, hogy a tagok száma *(n)* véges; ekkor úgy az összeget (s_n), mint az általános tagot (a_n) kifejező értékek véges számok voltak. Vizsgáljuk most különösen a geometriai sort abban az esetben, ha a tagok száma végtelen nagy. Azt a számot, mely felé a geometriai sor összege annál jobban közeledik, minél több tagot veszünk számításba, *határérték*nek (limes) nevezzük. Ha a geometriai sor összegének határértékét keressük, négy lehetséges esetre bukkanunk; mégpedig:

1) ha az: $s_n = \dfrac{aq^n - a}{q - 1}$ képletben $q > 1$ és $n = \infty$, akkor:

$$\lim_{n=\infty} s_n = \infty,$$

a folyton növekedő tagok összege végtelen nagy;

2) ha $q < 1$ és $n = \infty$, akkor:

$$\lim_{n=\infty} . s_n = \frac{a}{1-q},$$

mert aq^n végtelen kicsi s így elhanyagolható tört értéket vesz fel;

3) ha $q = 1$ és $n = \infty$, akkor:

$$\lim_{n=\infty} . s_n = \infty,$$

mert az egyenlő tagok összege folytonosan növekedni fog a számításba vett tagok számával; ha végül:

4) $q = -1$ és $n = \infty$, akkor: $\lim\limits_{n=\infty} s_n$ vagy 0, vagy *a*, a szerint, amint a tagok száma páros, vagy páratlan.

A végtelen geometriai haladvány összege az elmondottakból kitetszőleg csakis akkor állítható elő véges értékben, mikor quotiense kisebb, mint az egység, különben soha. Az olyan végtelen sorokat, melyek összegét képesek vagyunk véges értékben kifejezni, *convergensek*nek, a melyek összege végtelen nagy *divergensek*nek, a 4) alatt megismert sort *ingadozónak* (oscilláló) hívjuk. — Mielőtt valamely sor összegezéséhez fognánk tudnunk kell arról, hogy vajjon convergens-e, vagy divergens? A következőkben a sorok convergentiájának néhány ismertető jelével fogunk foglalkozni.

37. §. A sorok convergentiájának felismerése.

Általános szabályúl felállíthatjuk, hogy minden olyan sor *divergens*, melyben az egymásután következő tagok növekednek, vagy egyenlő nagyok maradnak, vagy bár kisebbednek, mindazáltal nagyobbak maradnak valamely véges számnál.

Valamely adott sor convergentiáját a legegyszerűbb módon úgy állapíthatjuk meg, ha annak tagjait valamely már convergensnek ismert sor pl. valamely convergens geometriai haladvány tagjaival hasonlítjuk össze. Ha ez összehasonlításból az derűl ki, hogy a megvizsgálandó sor tagjai bizonyos tagtól kezdve rendre kisebbek a convergens sor tagjainál, akkor az adott sor is convergens. Ezen a tételen alapszik a convergentia egyik legbiztosabb ismerve. Ha ugyanis $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$ valamely positiv tagokból álló, fogyó végtelen sor, melyben az *n*-ik tagtól kezdve mindegyik tag az előtte állóval elosztva *q* valódi törtnél kisebb hányadosra vezet, akkor ha figyelembe veszszük, hogy az első *n* tag mindenesetre véges összeggel bír, mondhatjuk, hogy a sor convergentiája csakis attól fog függni, hogy vajjon az *n*-iktől vett tagok összege közeledik-e zérushoz, vagy sem. Ámde, ha:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q\,;\quad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} < q\,;\quad \frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} < q\,;\ \ldots\ldots$$

akkor:

$$u_{n+1} < u_n \cdot q;\ u_{n+2} < u_{n+1} \cdot q < u_n \cdot q^2;$$
$$u_{n+3} < u_{n+2}\, q < u_n \cdot q^3 \ldots\ \text{és:}$$
$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} \ldots < u_n (q + q^2 + q^3 + \ldots);$$

és minthogy a zárójelben foglalt geometriai haladvány q valódi tört lévén convergens, melynek összege: $\frac{q}{1-q}$, azért:

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots \text{ in. inf.} < u_n \cdot \frac{q}{1-q}.$$

Minthogy u_n mint a fogyó sor általános tagja, annálinkább közeledik zérushoz, minél nagyobb n, azért az egyenlőtlenség baloldalán álló összeg határértéke zérus s így: *a positiv tagokból álló fogyó végtelen sor convergens, ha abban a tagok viszonya az őket közvetlenül megelőzőkhöz kisebb valamely valódi törtnél.*

Ha a fogyó végtelen sor tagjai váltakozva plus és minus előjellel bírnak, úgy hogy a sor alakja: $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \ldots\ldots$ akkor azt még értékének megváltozása nélkül következőleg is felirhatjuk:

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \ldots\ldots \text{ in. inf.}$$

vagy:

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - (u_6 - u_7) - \ldots\ldots \text{ in. inf.};$$

az első alak csupa positiv különbség s így a tagok összege: $S > u_1 - u_2$; a második alaknál a levonandók mind positiv számok s így az eredmény: $S < u_1$. Ilyformán a sor összege $u_1 - u_2$ és u_1 között fekvő véges érték, miért is: *a szabályszerűen váltakozó előjelekkel ellátott tagokból álló fogyó végtelen-sor convegens.*

A tiszta és vegyes szakaszos tizedes törtek rövidített alakban felirt fogyó végtelen geometriai haladványok, melyeket éppen oly módon fejezhetünk ki közönséges törtek által, mint a mikép a convergens végtelen geometriai haladványok összegeinek meghatározása történt.

38. §. A geometriai sor alkalmazása a kamatoskamat számitásra.

Valamely tőkéről akkor mondjuk, hogy *kamatoskamatokra* van elhelyezve, ha a meghatározott időegységekre, pl. évekre vagy félévekre eső kamatokat szintén a tőkéhez csatoljuk, úgy hogy a következő időszaktól kezdve azok is kamatozzanak. Az a kérdés merül most már fel, hogy bizonyos számú időegység eltelte után mennyire nő fel a tőke megadott kamatláb mellett kamatos-kamataival együtt?

Hogy e kérdésre kielégitő feleletet adhassunk, csakis azt kell tudnunk, hogy mennyire növekszik fel az egységnyi tőke a meghatározott idő elteltével a megadott kamatláb mellett? Ha ismerem 1 korona felnövekedett értékét akkor könnyen megtudom a t koronáét is, mert az egyenlő viszonyok közt t-szer annyira fog növekedni. Ha a kamatláb, azaz a 100 korona után egy évre járó kamat $p\%$, akkor, egy koronának az első év végén $1 + \frac{p}{100} = q$ a felnövekedett értéke. Minthogy most már a második év kezdetén q a kamatozó tőke és mert egy év alatt minden korona $1 + \frac{p}{100}$-ra növekszik, azért q korona $q\left(1 + \frac{p}{100}\right)$-ra, azaz q^2-re fog felnőni. Hasonló gondolat menet alapján következik, hogy a harmadik év végén q^3-ra és így tovább, az n-ik év végére pedig minden korona q^n-re fog növekedni s így a $p\%$ mellett n évre kamatos kamatokra elhelyezett t tőke felnövekedett T értéke:

$$T = tq^n,$$

a hol $q = 1 + \frac{p}{100}$ a *kamattényező* s ez 4, 5, 6... stb % esetén 1·04, 1·05, 1·06.... és igy tovább. — Ha kamatozási időegységül nem az évet, hanem annak felét, harmadát, negyedét, vagy általánosabban m-ed részét tekintjük, akkor a kamatlábnak fele, harmada, negyede, általában m-ed része, az évek számának azonban kétszerese, háromszorosa, négyszerese, általában m-szerese veendő számitásba. Ha a: $T = tq^n$ képletben szereplő négy mennyiség közül hármat ismerünk, a negyediket meghatározhatjuk. Igy ha:

1) T az ismeretlen, akkor:

$$T = tq^n \text{ és } \log T = \log t + n \log q;$$

2) ha t az ismeretlen, akkor:

$$t = \frac{T}{q^n} \text{ és } \log t = \log T - n \log q;$$

3) ha q az ismeretlen, akkor:

$$q=\sqrt[n]{\frac{T}{t}} \text{ és } \log q=\frac{\log T-\log t}{n};$$

4) ha n az ismeretlen, akkor:

$$q^n=\frac{T}{t} \text{ és } n=\frac{\log T-\log t}{\log q}.$$

Ha n az évek száma vegyes szám, akkor előbb meghatározzuk a felnövekedett tőkét az egész számú éveknek megfelelőleg s azután abból kiszámitjuk a hátralevő év tört részére eső kamatot. Ha 4) alatt n részére vegyes szám jönne ki, akkor a tört-rész hónapokban és napokban fejezendő ki.

39. §. A járadék (rente).

A járadék oly egyenlő időközökben (évenként, félévenként stb.) esedékes pénzösszeg, melynek élvezeti jogát a tulajdonos (rentier) valamely előre teljesített befizetéssel szerzi meg. Megkülönböztetünk *idő-, vagy életjáradékot.* Az elsőnek élvezete csakis bizonyos ideig, az utóbbié a tulajdonos haláláig tart. A járadékot vagy az időszak végén (legtöbbször az év) végén, vagy annak elején fizetik ki. Ilyformán *utólagos- és előleges évjáradékokról* beszélhetünk.

Mi a járadékra vonatkozó következő kérdésekre kivánunk kielégítő feleletet adni:

1) Mily nagy az n éven át minden év végén esedékes j koronát tevő járadékok $p\%$-os kamatos-kamatokkal számitott összes értéke az n-ik év végén és mily nagy az összes járadékok mostani értéke?

Az 1-ső, 2-ik, 3-ik...(n — 1)-ik és n-ik év végén kapott j koronák együttes értéke az n-ik év végén:

$$s=jq^{n-1}+jq^{n-2}+\dots+jq^2+jq+j=j(1+q+$$
$$+q^2+\dots+q^{n-1})=j.\frac{q^n-1}{q-1};$$

az összes járadékok mostani értéke pedig:

$$t=\frac{j}{q^n}.\frac{q^n-1}{q-1}.$$

2) Mily nagy az n éven át minden év elején esedékes j koronát tevő járadékok $p\%$-os kamatos-

kamatokkal számitott összes értéke az n-ik év végén és mily nagy az összes járadékok mostani értéke?

Az 1-ső, 2-ik, 3-ik...(n — 1)-ik és n-ik év elején kapott j koronák együttes értéke az n-ik év végén:

$$s = jq^n + 1jq^{n-1} + jq^{n-1} + \ldots + jq^2 + jq = jq(1 + + q + q^n + \ldots + q^{n-1}) = jq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1};$$

az összes járadékok mostani értéke pedig:

$$t = \frac{j}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Ezen képleteket csak akkor használkatjuk fel logarithmusokkal való számitásra, ha előbb $(q^n - 1)$ értékét meghatároztuk.

40. §. A kölcsönök törlesztése (amortisatió).

A meghatározott időközökben fizetendő olyan állandó — a — pénzösszegeket, melyekkel valamely kölcsön kamatait fizetvén egyszersmind magát a kölcsönt is törlesztjük, *annuitás*-nak hívjuk. Minthogy az egyes annuitások mostani értéke (39. § 1. pont) t, azért: $a = tq^n \cdot \frac{q - 1}{q^n - 1}$. Az annuitásoknak a tőke törlesztésre fordított részeit: b_1, b_2, $b_3 \ldots . b_n$-nek nevezvén, lesz: $b_1 = a - \frac{tp}{100}$ (az annuitásból levonva a tartozás egy évre eső kamatját); $b_2 = a - - (t - b_1) \cdot \frac{p}{100} = a - \frac{tp}{100} + \frac{b_1 p}{100} = b_1 + b_1 \cdot \frac{p}{100} = = b_1 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = b_1 q$. Hasonló eljárás szerint nyerhetjük b_3, b_4 stb. értékét és pedig: $b_3 = b_1 q^3$, $b_4 = = b_1 q^3 \ldots$, $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Függelék.

A kapcsolástan főbb képletei.

Adott *elemeknek* meghatározott szabály szerint alkotott csoportokba való fűzésére a *kapcsolástan* tanít bennünket. A csoportokba való fűzésnek 3 módját ismerjük, ezek: a *permutatió*, melynél az egyes csoportokban valamennyi elem előfordul, csak-hogy különböző elrendezésben; a *combinatió,* melynél az egyes csoportokban az adott elemekből csakis bizonyos számú elem jelenik meg; a *variatió,* melynél az egyes csoportokban előforduló elemek megválasztása mellett azok elrendezésére is tekintettel vagyunk.

Az n számú elemből alkotható *permutatiók* száma: $P_n = n!$ Igy pl. 3 elemből $3! = 1.2.3 = 6$ permutatió, ezek: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Ha az adott elemek között p egyenlő elem fordul elő, akkor a képezhető egymástól különböző permutatiók száma: $P_n^1 = \frac{n!}{p!}$.

Ha az adott elemek mindenikét külön választjuk, *első osztályú combinatiókat,* (unio) ha kettenként csoportosítjuk, *másod-osztályú* (ambo), ha hármanként *harmad-osztályú combinatiókat* (terno) stb. nyerünk. Ha valamely elem az egyes csoportokban csakis egyszer fordul elő, az ismétlés nélküli, ha többször az ismétléssel való combinatiókat kapjuk. Az n elemből alkotott ismétlés nélküli r-ed-osztályú combinatiók számának jele: C_n^r és $C_n^r = \binom{n}{r}$. Igy a 6 elemből képezhető ternók száma: $C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$. Az n elemből alkotható r-ed rendű ismétléssel való combinatiók jele: $C_n^{r.\,i.}$ és $C_n^{r.\,i.} = \binom{n+r-1}{r}$.

Az n elemből alkotható r-ed osztályú ismétlés nélkülvaló variatiók jele: V_n^r és $V_n^r = \binom{n}{r} \, . \, r! = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$. Az n elemből ismétléssel képezhető r-ed osztályú variatiók jele: $V_n^{r.\,i.}$ és $V_n^{r.\,i.} = n^r$.

Az $(a+b)(a+c)(a+d)(a+e)\ldots(a+p)$ alakú szorzatok értéke $= a^n + S_1(b\ldots p)a^{n-1} + S_2(b\ldots p)a^{n-2} + \ldots + S_{n-1}(b\ldots p) + S_n(b\ldots p)$, mely képletben pl. S_k a $b, c, \ldots p$ elemekből képezhető k-ad osztályú combinatiók összegét jelenti. — Ha most: $b = c = \ldots = p$, akkor: $(a+b)(a+c)(a+d)\ldots = (a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b + \ldots + \binom{n-1}{n}ab^{n-1} + b^n$ *Newton* kéttagi tantételére vezet. (24. §.)

A binomális coefficiensekre nézve a következő tételek érvényesek: 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; miből, ha: $k=0$, lesz: $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$; 2) $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$;

3) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$;

4) $2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\ldots+\binom{n}{n}$;

5) $0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$.

TARTALOMJEGYZÉK.