

27.

Auszug zweier Schreiben des Prof. Hesse an den Herrn Prof. Jacobi und eines Schreibens des Prof. Jacobi an Herrn Prof. Hesse.

Königsberg den 27. November 1849.

Ihr Brief ist mir von unschätzbarem Werthe, weil ich daraus Ihre alte Freundschaft entnehme, und er mir zugleich das bringt, wonach ich mich lange gesehnt habe. Sie schreiben von meiner Meisterschaft in gewissen mathematischen Dingen und beweisen gleich darauf, wie viel mir daran fehlt. Das lasse ich mir schon gerne gefallen, da dieser Beweis von unberechenbarem Nutzen für meine Bemühungen zu werden verspricht. Ich bedauere nichts mehr, als daß 80 Meilen zwischen uns liegen, was mit einem halben Jahre gleichbedeutend ist. Im Sommer haben Sie den Beweis gemacht, der für mich vielleicht eine Lebensfrage ist, und im Winter erst kann ich ihn erfahren.

Reductionen der Art kommen in der Geometrie oft vor. *So löst sich z. B. der Grad der Gleichung der Schmiegungs-Ebene einer Curve doppelter Krümmung, entstanden aus dem Schnitt zweier algebraischen Oberflächen, immer um 2 Einheiten in Rücksicht auf die Coordinaten des Berührungspunctes mit Hülfe der Gleichungen der beiden Oberflächen reduciren.* Die reducirten Gleichungen, zu weitläufig hier hinzuschreiben, werde ich alsbald an das Journal schicken.

Ich erlaube mir noch in Rücksicht auf die Wendepuncte eine Bemerkung hinzuzufügen, die ich eben jetzt gemacht habe, und die mir interessant scheint. Wenn u eine homogene Function von x, y, z , und wenn

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

so ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} : \dots : \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} : \dots = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} : \dots : \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} : \dots,$$

wo v die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten von u zusammengesetzte Determinante ist. Hieraus erklärt sich auch, warum in einen Doppelpunct immer 6 Wendepuncte zusammenfallen.

Mit dem innigen Wunsche Ihres Wohlergehens

Ihr treu ergebener Schüler

Otto Hesse.

Königsberg den 7. December 1849.

— — — Sie haben durch Ihren Beweis von den Doppeltangenten zugleich dargethan, dafs auch der Grad jedes Gliedes der Reihe

$$f(x + bh, y - ah) = \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 + \dots,$$

wo $b = \frac{\partial f}{\partial y}$, $a = \frac{\partial f}{\partial x}$, mit Hülfe der Gleichung, $f(x, y) = 0$, sich um 2 Einheiten erniedrigen läfst. Wie sich aber durch diese Erniedrigung die Coëfficienten $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ gestalten, läfst sich aus Ihren Andeutungen nicht schliessen, (Sie haben das ja auch gar nicht gewollt) und doch wäre gerade die wirkliche Darstellung der reducirten α in einer einfachen Form für mich von der höchsten Wichtigkeit.

Schliesslich erwähne ich noch einer Eliminationsmethode zur Anwendung auf Curven 3ter und 4ter Ordnung. Ich habe mir nämlich die Aufgabe gestellt, die Gleichungen dieser Curven durch Liniencoordinaten auszudrücken, wenn sie in Punctcoordinaten gegeben sind, d. h. die Variablen aus den 4 Gleichungen zu eliminiren:

$$(1.) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \alpha_2, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \alpha_3,$$

$$(2.) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0,$$

wenn $u = 0$ die Gleichung der Curve ist. Zu diesem Zwecke bilde ich für die Curven 3ten Grades die Determinante v aus den Gröfsen

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} & \alpha_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} & \alpha_2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} & \alpha_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0, \end{array}$$

und eliminire die Variablen x_1, x_2, x_3, λ aus den linearen Gleichungen

$$(2.) \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

$$(3.) \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} + \lambda \alpha_1 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} + \lambda \alpha_2 = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} + \lambda \alpha_3 = 0.$$

Dieses Verfahren für die Curven 3ter Ordnung ist ein anderes als das, welches ich bereits bekannt gemacht habe und was auch *Cayley* bekannt gewesen sein soll.

In dem Falle, wenn $u = 0$ eine Curve 4ter Ordnung ist, bilde ich aus der Gleichung (2.) 6 andere Gleichungen durch Multiplication mit x_1^2 , x_1x_2 , x_1x_3 , x_2^2 , x_2x_3 , x_3^2 , und eliminire aus diesen 6 Gleichungen, den 3 Gleichungen (1.) und den 3 Gleichungen (3.), wie aus lineären Gleichungen, die 11 Unbekannten x_1^3 , $x_1^2x_2$, . . . und λ .

Otto Hesse.

Von dem ersten Satz Ihres gütigen Schreibens vom 27^{ten} Nov. habe ich einen Beweis gesucht. Man hat die n identischen Gleichungen:

$$x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_i} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_i} \dots + x_n \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} = (m-1) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

wenn u vom m^{ten} Grade ist. Durch ihre Auflösung erhalte man:

$$vx_i = (m-1) \left\{ U_{1,i} \frac{\partial u}{\partial x_1} + U_{2,i} \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots + U_{n,i} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

wo $U_{i,k} = U_{k,i}$. Differentiirt man diese Gleichung nach x_k , so wird

$$\frac{\partial v}{\partial x_k} x_i = (m-1) \left\{ \frac{\partial U_{1,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial U_{2,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial U_{n,i}}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\},$$

wo x_k von x_i verschieden. Differentiirt man nochmals nach x_l , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l} x_i &= (m-1) \left\{ \frac{\partial^2 U_{1,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 U_{2,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_2} \dots + \frac{\partial^2 U_{n,i}}{\partial x_k \partial x_l} \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\} \\ &\quad - (m-1) \left\{ U_{1,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_k \partial x_l} + U_{2,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_2 \partial x_k \partial x_l} \dots + U_{n,i} \frac{\partial^3 u}{\partial x_n \partial x_k \partial x_l} \right\}. \end{aligned}$$

Wenn $l = i$, kommt rechts noch $(m-1) \frac{\partial v}{\partial x_k}$ hinzu.

Es sei jetzt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0,$$

so wird

$$\Delta = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial x_k} = 0, \quad U_{i,k} = N x_i x_k,$$

wo N für sämtliche Combinationen von i und k Dasselbe bleibt. Es folgt daher aus der zuletzt gefundenen identischen Gleichung:

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x_k \partial x_l} = -(m-1)(m-2)N \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l};$$

was Ihren Satz giebt.

C. G. J. Jacobi.