SUR LA CONDITION D'ACHROMATISME DANS LES PHÉNOMÈNES D'INTERFÉRENCE;

PAR M. A. CORNU.

I. — THÉORIE.

Les expériences que j'ai entreprises pour l'étude des lois de la double réfraction circulaire, naturelle et magnétique, et que j'ai exposées précédemment (1), m'ont amené à examiner et à résoudre une difficulté signalée par divers auteurs, et considérée même par M. Gouy (2) comme une objection à l'admirable explication du pouvoir rotatoire donnée par Fresnel.

En effet, j'ai utilisé le phénomène des *franges latérales* pour mesurer la différence entre les vitesses des ondes circulaires et la vitesse de l'onde ordinaire dans le quartz : or ce phénomène offre l'anomalie qui se rencontre dans tous les cas analogues, où l'on fait interférer des ondes ayant subi la double réfraction circulaire : les systèmes latéraux de franges sont écartés d'un peu plus du double de ce qu'une théorie approximative semble indiquer.

M. Billet, dans son excellent *Traité d'Optique physique,* signale ce désaccord et cite les chiffres qu'il a obtenus en répétant les expériences d'Arago, Fresnel et Babinet avec un quartz de 42^{mm} (t. II, p. 242); ce passage résume parfaitement l'état de la question.

« ... Ce quartz fait tourner le rayon moyen du spectre d'environ $42 \times 23° = 966°$. Cela donne, à raison de $180°$ pour une onde de retard, un retard total d'environ 5,5 ondes. Ce devrait donc être sur la cinquième frange noire, là où le retard géométrique vaut 5,5 ondes, que devrait s'installer la frange centrale d'un système latéral, et la distance des centres des deux systèmes latéraux devrait être, par conséquent, de 22 franges simples ou de 11 fois l'intervalle qui sépare deux franges semblables, deux

(1) *Journal de Physique,* 2e série, t. I, p. 157.

(2) Séances de la *Société de Physique,* année 1880, p. 133.

noires par exemple. Il n'en est rien : cette distance dépasse le double de cette valeur théorique et atteint le chiffre de 24. »

L'expérience, faite avec un bloc unique de quartz, suivant le dispositif Arago-Fresnel, exige l'emploi d'un polariseur et d'un analyseur; mais elle peut se répéter dans des conditions plus simples, avec la lumière naturelle, lorsque l'on emploie un *biquartz à deux rotations,* comme dans l'expérience rappelée dans ma précédente Communication : l'anomalie est exactement la même. Avec les *biquartz à axes croisés,* que j'ai employés dans mes observations, les conditions théoriques sont également réduites au maximum de simplicité (1); la même anomalie subsiste encore.

L'une de mes premières préoccupations a donc été d'examiner ce désaccord apparent, non pas que la démonstration expérimentale de la loi à laquelle je suis parvenu pût en être infirmée (fondée sur la symétrie des deux systèmes latéraux, elle est indépendante de cette anomalie), mais pour ne pas laisser passer une difficulté touchant de si près le mode expérimental adopté.

Le résultat de ces recherches préliminaires, qui ont embrassé des cas divers et nombreux, se résume en un théorème général dont voici l'énoncé :

Dans un système de franges d'interférences produites à l'aide d'une lumière hétérogène ayant un spectre continu, il existe toujours une frange achromatique qui joue le rôle de frange centrale et qui se trouve au point du champ où les radiations les plus intenses présentent une différence de phase maximum ou minimum.

Ce théorème, déduit d'abord de l'examen de cas très particuliers, est une simple conséquence de la constitution d'un système de franges d'interférences, de sorte qu'on peut en donner la démonstration indépendamment des phénomènes qu'il est destiné à expliquer.

Soit b la distance des deux ouvertures (réelles ou fictives) qui livrent passage aux deux ondes réagissantes dont on observe

(1) L'emploi d'un polariseur ne sert qu'à éliminer le rayon extraordinaire : le phénomène est visible sans analyseur; il le serait même sans polariseur, mais le champ serait lavé de blanc et l'observation moins facile.

l'interférence sur un tableau, à la distance D, en un point situé à la distance u du milieu géométrique du champ des franges rectilignes.

Ces deux ondes, issues de la même source et d'égale intensité A_λ^2, ont une différence de phase φ, provenant de deux causes :

1° De la différence optique des chemins parcourus dans les divers milieux placés en avant des ouvertures : la différence de phase provenant de ce chef dépend de la couleur, c'est-à-dire de la longueur d'onde de la lumière employée; on la désignera, en général, par $F(\lambda)$;

2° De la différence de distance des ouvertures au point u du tableau; la différence de phase correspondante est évidemment égale à $\frac{bu}{\lambda D}$, d'où l'on conclut

$$\varphi = F(\lambda) + \frac{bu}{\lambda D}.$$

D'après la règle de Fresnel, l'intensité au point u sera

$$I = A_\lambda^2 + A_\lambda^2 + 2A_\lambda . A_\lambda \cos 2\pi\varphi = 4A^2 \cos^2 \pi\varphi.$$

Avec la lumière blanche, on aura la superposition d'une infinité de semblables systèmes, de sorte que l'intensité en un point du champ sera représentée par la somme

$$I = 4 \Sigma A_\lambda^2 \cos^2 \pi\varphi,$$

le signe Σ renversé rappelant qu'on a à opérer une sommation d'effets physiologiques et non pas une sommation de quantités algébriques.

S'il existe une *frange sensiblement achromatique,* c'est-à-dire telle que toutes les couleurs (au moins les plus intenses pour l'œil) soient altérées dans la même proportion, elle doit se trouver en un point u, tel que la valeur de φ soit indépendante de λ : ce qui impose la condition analytique

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0,$$

ou bien

$$F'(\lambda) - \frac{bu}{\lambda^2 D} = 0.$$

Cette condition (qui suppose implicitement que la variable λ ne présente aucune discontinuité) signifie que la *phase* au point cherché passe *par un maximum ou un minimum*.

L'équation de condition ne contenant u qu'au premier degré, il existera toujours un semblable point définissant ainsi une ligne *neutre* ou *achromatique*, et il n'en existera qu'un seul : le théorème est donc démontré.

Propriétés de la ligne achromatique. — 1° La fonction $F(\lambda)$ étant quelconque, la condition $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ est remplie d'une manière rigoureuse pour une certaine radiation λ, et d'une manière approximative seulement pour les autres; mais, avec les formes particulières de $F(\lambda)$ qu'on rencontre dans les expériences et dans les circonstances ordinaires d'observation, il arrive que, si cette condition est réalisée pour le rayon moyen du spectre (ou mieux pour le plus intense), elle est réalisée suffisamment pour toute l'étendue du spectre visible, les divergences sur les rayons extrêmes, c'est-à-dire les moins intenses, ne produisant que des colorations peu sensibles.

2° Ces divergences sont sensiblement annulées lorsque la valeur de φ est voisine d'un nombre pair ou impair de fois la fraction $\frac{1}{2}$, parce que $\cos^2\pi\varphi$ passe alors par un maximum ou un minimum.

3° L'intensité de la lumière sur la ligne neutre est très approximativement égale à $4\cos^2\pi\varphi\Sigma A_\lambda^2$, puisque la valeur de φ est commune à toutes les radiations : elle peut prendre toutes les nuances de *gris incolore* comprises depuis le blanc parfait, valeur maximum égale à $4\Sigma A_\lambda^2$ jusqu'au noir complet, valeur minimum égale à zéro.

4° La frange qui englobe cette ligne neutre présente le minimum de colorations; on peut l'appeler la *frange achromatique;* dans les cas extrêmes, cette frange achromatique est *blanche* ou *noire* (à centre *blanc* ou *noir*).

5° Lorsque la frange achromatique est noire ou blanche, elle est sensiblement *frange centrale* du système, car la ligne neutre qu'elle contient est une ligne de symétrie des colorations de cette frange; en effet, toutes les couleurs ont leur maximum ou minimum d'intensité sur la ligne neutre, car on a

$$\frac{dI}{du} = 4\pi\frac{b}{\lambda D}\Sigma A_\lambda^2\, 2\sin\pi\varphi\cos\pi\varphi = 0.$$

Dans le cas général, au contraire, la frange achromatique est dissymétrique comme irisation.

6° Si l'expression de la phase φ contient un paramètre arbitraire, indépendant de λ et de u, la condition $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$, et par suite la position de la ligne achromatique, en est indépendante. La variation continue de ce paramètre entraîne le déplacement continu des franges, mais n'altère pas la fixité de cette ligne achromatique qui reste toujours au milieu du système; la frange qui la traverse devient la frange achromatique et passe successivement par toutes les variétés indiquées ci-dessus.

Remarque. — L'analyse précédente montre l'inexactitude de la théorie adoptée jusqu'ici pour la détermination de la frange centrale; on cherchait en effet, comme l'indique la citation du début, le point du champ où la différence de phase d'une certaine couleur (rayon moyen) est nulle, $\varphi = 0$, condition toute différente de celle qui se déduit de l'analyse du phénomène; aussi ce point ne correspond-il pas à la frange centrale apparente, puisqu'il varie lorsqu'on choisit une autre couleur.

L'erreur que l'on commettait provient d'une généralisation défectueuse de ce qu'on doit appeler une *frange centrale*. Dans le cas d'un système *normal* de franges (miroirs de Fresnel, trous d'Young, etc.), où la différence de phase se réduit à $\psi = \frac{ub}{\lambda D}$, le milieu du champ est occupé par une frange qu'on a prise comme type des franges centrales; en ce point, $u = 0$, la différence de phase est nulle quelle que soit la couleur; cette condition est double et conduit à deux généralisations différentes dans le cas où la différence de phase est une fonction plus complexe de la longueur d'onde.

La première consiste à définir la frange centrale par la condition que la différence de phase soit nulle pour une couleur donnée (rayon moyen du spectre); mais cette définition, on l'a vu, ne répond pas au phénomène qu'on veut observer et conduit à des résultats en désaccord complet avec l'expérience.

La seconde, que je propose, consiste à définir, non pas en réalité une frange centrale et symétrique, ce qui n'est pas possible en général, mais la *frange achromatique,* celle qui présente le minimum d'irisation : on a vu qu'elle existe toujours et que même, dans certains cas, elle est très sensiblement centrale et symétrique.

Il est facile de voir que cette définition correspond véritablement au phénomène que les physiciens ont en vue et qu'elle conduit aux résultats mêmes de l'expérience.

Je choisirai précisément l'exemple cité par M. Billet. Il suffit, pour le traiter, de connaître la valeur particulière de la phase φ dans l'expérience d'Arago-Fresnel. On trouve aisément [1] pour l'expression de l'intensité en un point quelconque u du champ

$$I = 4A_\lambda^2 \cos^2(\Omega + \alpha) \cos^2 \pi\psi,$$

ou l'équivalent

$$I = A_\lambda^2 [\cos(\Omega + \alpha + \pi\psi) + \cos(\Omega + \alpha - \pi\psi)]^2,$$

Ω étant l'angle des sections principales du polariseur et de l'analyseur et α l'angle dont le bloc de quartz fait tourner le plan de polarisation de la radiation λ. On sait, d'après la loi de Biot, que cet angle est proportionnel à la longueur e du quartz et à peu près en raison inverse du carré de λ

$$\alpha = \frac{He}{\lambda^2}.$$

Je ne m'arrêterai pas à démontrer que ces formules rendent compte des *trois systèmes de franges* qu'on observe avec la lumière blanche : il suffit de remarquer que les deux systèmes latéraux ont respectivement pour équations

$$I = A_\lambda^2 \cos^2(\Omega + \alpha - \pi\psi), \quad I = A_\lambda^2 \cos^2(\Omega + \alpha - \pi\psi),$$

qu'on obtiendrait directement par la considération des ondes à vibration circulaire. La forme de ces équations est naturellement celle qui a été discutée plus haut, et la valeur de $\pi\varphi$ est précisément l'argument du cosinus : on remarquera, en passant, le para-

---

(1) Les deux faisceaux incidents polarisés ont pour amplitude A_λ; leur vibration, faisant l'angle Ω avec un axe arbitraire, fait l'angle $\Omega + \alpha$ après la sortie du quartz : la composante conservée par l'analyseur dont la section est dirigée suivant l'axe arbitraire sera $A_\lambda \cos(\Omega + \alpha)$. La différence de phase due à l'obliquité sur les ouvertures sera, comme plus haut, $\psi = \frac{bu}{\lambda D}$. La règle de Fresnel donne l'expression ci-dessus.

mètre arbitraire Ω indépendant de u et de λ dont il a été question et qui explique le déplacement des franges par la rotation de l'analyseur, leur variation continue de colorations, et malgré cela la fixité de la frange centrale apparente périodiquement blanche ou noire.

La ligne achromatique est définie par la condition

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} + \pi \frac{bu}{\lambda^2 D} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{\pi} \lambda \frac{d\alpha}{d\lambda} + \frac{u}{\frac{\lambda D}{b}} = 0.$$

Le dénominateur de u représente la largeur X d'une frange (définie par la condition $\psi = 1$). Si maintenant on substitue la dérivée de α, tirée de la loi de Biot,

$$\frac{d\alpha}{d\lambda} = - \frac{2He}{\lambda^3}, \quad \text{d'où} \quad \lambda \frac{d\alpha}{d\lambda} = - \frac{2He}{\lambda^2} = -2\alpha,$$

il vient, en définitive,

$$\frac{u}{X} + \frac{2\alpha}{\pi} = 0.$$

La ligne achromatique est donc distante du milieu du champ d'un nombre de franges égal au double du nombre de fois suivant lequel 180° *est compris dans l'angle de rotation du quartz.*

C'est le double de ce que prévoyait la théorie défectueuse, et c'est précisément ce que donne l'observation.

L'anomalie prétendue n'existe donc nullement, et le phénomène est une conséquence de la loi de Biot [1].

---

[1] L'emploi d'une formule empirique plus exacte permet de serrer encore de plus près l'expérience : ainsi, en déterminant l'exposant ε de λ ($\varepsilon = -2$ dans la loi de Biot) par la condition de représenter le mieux possible les résultats de MM. Soret et Sarasin (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII, p. 818) dans l'étendue du spectre visible, on trouve $\varepsilon = -2{,}13$: la simplicité de la démonstration n'en est pas altérée, mais le facteur 2 est remplacé par 2,13. Ce chiffre, substitué dans des données numériques de M. Billet, donne

II. — Expériences de vérification.

On réalise aisément par l'expérience les conditions développées ci-dessus : voici les principaux phénomènes que j'ai pu montrer par projection ([1]).

1° *Déplacement de la frange achromatique à l'aide d'un prisme d'angle variable.*

Si l'on projette un système de franges sur un écran blanc, et qu'on interpose un diasporamètre de Boscowitch ou de Brewster, chaque lumière simple, par conséquent chaque système monochromatique de franges, est déplacé d'une quantité dépendant de sa longueur d'onde, à cause de la dispersion du prisme; si l'on fait croître progressivement l'angle du prisme, on voit les franges se déplacer, et la coloration se modifier; bientôt la symétrie initiale de la frange centrale blanche se présente autour de la frange sombre contiguë, qui devient alors complètement noire : l'augmentation de l'angle du prisme continuant, la frange centrale noire s'irise dissymétriquement, et la frange claire contiguë devient bientôt frange centrale blanche, et ainsi de suite : si bien que la frange achromatique paraît suivre le mouvement de translation des franges, mais en allant, en apparence, un peu moins vite que le déplacement général.

Le calcul permet de prévoir ce résultat : en effet, si l'on désigne, comme plus haut, par u la distance au milieu du champ, où la phase est φ, on a pour un système de franges *normal*

$$\varphi = \frac{bu}{\lambda D}.$$

---

pour la distance des franges achromatiques des deux systèmes le nombre

$$11 \times 2,13 = 23,4,$$

résultat aussi voisin que possible du chiffre observé, 24, eu égard à l'approximation qu'on est en droit d'attendre du phénomène, qui n'est appréciable qualitativement qu'à une frange près.

([1]) Avec le concours empressé de M. J. Duboscq, qui a bien voulu faire tailler diverses pièces de quartz, spécialement en vue d'exécuter plus facilement ces expériences.

Si ce point est déplacé par la réfraction du prisme, il se trouvera en un point x tel que

$$x = u + c_\lambda,$$

c_λ étant le déplacement que le prisme produit sur la radiation λ.

On peut considérer, dans une première approximation, que c_λ est proportionnel à l'angle variable du prisme A et de la forme

$$c_\lambda = A(p - q\lambda),$$

p et q étant deux constantes positives, parce que la déviation des radiations à courte longueur d'onde est plus grande que celle des radiations à grande longueur d'onde ; d'où l'on conclut, pour la détermination du point x où la phase est φ, l'expression

$$\varphi' = b\frac{x - c_\lambda}{\lambda D} = b\frac{x - Ap - Aq\lambda}{\lambda D} = b\frac{x - Ap}{\lambda D} + b\frac{Aq}{D}.$$

La position x de la frange achromatique est donnée par la dérivée de φ par rapport à λ, égalée à zéro,

$$x - Ap = 0.$$

On voit que le déplacement de la frange achromatique est proportionnel à l'angle du prisme et que la phase correspondante est une constante $\frac{bAq}{D}$ indépendante de λ, ce qui donnerait un achromatisme parfait, si l'expression adoptée pour c_λ était rigoureuse.

Les franges centrales blanches successives correspondent aux valeurs de $\frac{bAq}{D}$ égales à $0, 1, 2$, etc. ; les franges noires, aux valeurs intermédiaires $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, etc.

L'analyse de cette expérience si simple est très instructive et mérite d'être détaillée par le lecteur désireux de se rendre un compte exact des conditions d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence.

La projection est très brillante, même avec la lumière Drummond, si l'on produit les franges avec le compensateur de Babinet.

2° *Réalisation d'une variation de la phase commune à toutes les radiations.*

C'est le cas indiqué sous le numéro 6° dans l'*Étude des propriétés* *de la ligne achromatique* (p. 297) et rappelé plus loin (p. 298) à propos des *trois systèmes* de franges.

On forme un parallélepipède avec deux prismes de quartz de rotation contraire, taillés à 30°, l'axe étant perpendiculaire à l'une des faces, et on les colle ensemble, par la face oblique, de manière que les deux faces parallèles soient perpendiculaires à l'axe. Ce parallélépipède donne dans la lumière polarisée un beau système de franges dont le lieu apparent est au milieu du bloc.

La frange centrale correspond au point où les épaisseurs de quartz sont égales et se compensent comme pouvoir rotatoire. Il est facile de voir, par une formule analogue à celle qui est donnée plus haut, que la différence de phase contient, comme paramètre variable, l'angle que fait le polariseur avec l'analyseur.

Il en résulte que la condition $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ est indépendante de cet angle, c'est-à-dire que la ligne achromatique est fixe.

L'expérience montre en effet que la rotation continue de l'analyseur altère profondément les teintes des franges ; que ces franges paraissent se déplacer d'un mouvement continu ; mais la frange achromatique reste toujours fixe au centre du système, passant périodiquement à l'état de frange centrale blanche et noire alternativement.

3° *Projection des trois systèmes de franges d'Arago et Fresnel.*

Les systèmes latéraux, dans l'expérience des trois systèmes de franges, présentent cette propriété curieuse, isolée dans l'expérience précédente, de paraître, par rotation de l'analyseur, mobiles comme les filets d'une vis sans fin, et, en réalité, de rester en place. On réussit à projeter ce phénomène avec la lumière Drummond, en modifiant légèrement l'expérience primitive d'Arago avec le dispositif suivant. On prend un prisme biréfringent en quartz d'un angle extrêmement petit, intermédiaire entre l'angle des plus faibles et celui qu'on adopte pour le compensateur de Babinet. Cet appareil, placé entre un polarisateur et un analyseur, donne un système de franges très serrées dont le lieu apparent est au milieu de l'épaisseur du prisme. Entre le prisme et l'analyseur on interpose un bloc de quartz perpendiculaire à l'axe, d'au moins 50^{mm} d'épaisseur. On voit alors les trois systèmes dont la théorie a été donnée ci-dessus. On reconnaît dans les trois systèmes la fixité de la frange achromatique, malgré les mouvements apparents centrifuges ou centripètes des systèmes latéraux.