

Ueber bilineare Formen und deren geometrische Anwendung.

Von

M. PASCH in Giessen.

In zwei Aufsätzen, welche in diesen Annalen 1884 Bd. 23 S. 419, 1886 Bd. 26 S. 211 abgedruckt sind, habe ich mich, unter Zugrundelegung bilinearer Formen, mit projectiven ebenen Systemen und zwar hauptsächlich mit der Deutung der Invarianten, welche in der Determinante einer linearen Verbindung solcher Formen auftreten, beschäftigt.*) Seitdem bin ich durch verschiedene Fragen, welche sich ursprünglich auf ternäre quadratische Formen bezogen, veranlasst worden, auf ternäre und dann auf binäre bilineare Formen zurückzugehen. Der Zusammenhang, welcher sich dabei zwischen jenen Fragen ergab, führte zu der nachfolgenden Darstellung, welche mehrfache Berührungspunkte mit den früheren Aufsätzen bietet.

Wenn man von einer linearen Verbindung zweier ternären bilinearen Formen die Adjuncte bildet, so entsteht eine bilineare Form (Nr. 5 und 12), welche zu jenen in invarianter Beziehung steht. Mit dieser Beziehung und deren geometrischer Construction beschäftigen sich die Nummern 6, 7 und 13, mit den verschiedenen Ausartungen die Nummern 8, 14—16. Für den Fall, dass zwei ternäre quadratische Formen zu Grunde liegen, stellt die dritte Form den „Kegelschnitt der acht Tangenten“ dar. Bei der eingehenden Betrachtung der Ausartungen dieses Kegelschnittes (Nr. 18—23) begegnet man einer Eigenschaft einförmiger Gebilde, welche in Nr. 4 selbstständig behandelt ist, ferner einem Zusammenhange mit den metrisch ausgezeichneten Kegelflächen 2. O. und mit den birationalen quadratischen Verwandtschaften.

*) Einige Druckfehler in diesen Arbeiten sind am Schluss des 26^{ten} Bandes verzeichnet.

Ich erlaube mir hier nachzutragen, dass Herr S. Kantor in den Wiener Denkschriften von 1882 die Wiederholung linearer Transformationen untersucht hat, und dass Figuren, wie die in meiner zweiten Arbeit in § 2 und am Ende des § 3 betrachteten, bei Herrn Kantor in den Wiener Sitzungsberichten von 1881 bezw. 1877 vorkommen.

Gelegentlich konnten auch diejenigen Determinanten 9. und 6. Grades ausgewerthet werden, welche die Hesse'sche Form einer Determinante dritten Grades darstellen (Nr. 17, 23 und 24).

Um gewisse algebraische Fragen, welche bei den oben erwähnten quadratischen Verwandtschaften auftauchen, zu erledigen (Nr. 9—11), wurden Entwicklungen aus dem binären Gebiete — Ausdehnung von Eigenschaften quadratischer Formen auf bilineare — vorausgeschickt (Nr. 1—3).

Den Schluss bildet die Herleitung einer algebraischen Beziehung, welche bei der wiederholten Anwendung einer bilinearen Form von beliebig vielen Veränderlichen auftritt (Nr. 25 und 26).

I.

Binäre bilineare Formen.

1. Bildet man aus zwei bilinearen Formen der Veränderlichen $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$:

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \sum a'_{ik} x_i y_k \quad (i, k=1, 2)$$

die beiden Functionaldeterminanten:

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial f'}{\partial y_2} - \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial f'}{\partial y_1} = \frac{1}{2} X = \frac{1}{2} (X_{11} x_1^2 + 2 X_{12} x_1 x_2 + X_{22} x_2^2),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f'}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f'}{\partial x_1} = \frac{1}{2} Y = \frac{1}{2} (Y_{11} y_1^2 + 2 Y_{12} y_1 y_2 + Y_{22} y_2^2),$$

so haben die Coefficienten X_{ik} , Y_{ik} folgende Werthe:

$$X_{11} = 2(a_{11} a'_{12} - a_{12} a'_{11}), \quad X_{12} = a_{11} a'_{22} - a_{22} a'_{11} - a_{12} a'_{21} + a_{21} a'_{12},$$

$$X_{22} = 2(a_{21} a'_{22} - a_{22} a'_{21}),$$

$$Y_{11} = 2(a_{11} a'_{21} - a_{21} a'_{11}), \quad Y_{12} = a_{11} a'_{22} - a_{22} a'_{11} - a_{21} a'_{12} + a_{12} a'_{21},$$

$$Y_{22} = 2(a_{12} a'_{22} - a_{22} a'_{12}),$$

und die Formen X , Y selbst lassen sich auf mannigfache Art schreiben, z. B.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} X &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} & x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} & 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a_{21} & a'_{21} & x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ a_{12} & a'_{12} & a_{22} & a'_{22} & 0 & x_1 & 0 & x_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \\ x_2 & 0 & -x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & -x_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \\ 0 & x_1 & 0 & x_2 \\ -x_1 & 0 & -x_2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Das identische Verschwinden der Combinante X würde bedeuten, dass f und f' entweder in constantem Verhältniss stehen oder durch eine und dieselbe lineare Form von $y_1|y_2$ theilbar sind.

Aus dem Systeme

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

gehen 6 Determinanten zweiten Grades hervor, nämlich:

$$\begin{aligned} a_{11}a'_{12} - a_{12}a'_{11} &= \frac{1}{2} X_{11}, & a_{11}a'_{21} - a_{21}a'_{11} &= \frac{1}{2} Y_{11}, \\ a_{11}a'_{22} - a_{22}a'_{11} &= \frac{1}{2} (Y_{12} + X_{12}), \\ a_{21}a'_{22} - a_{22}a'_{21} &= \frac{1}{2} X_{22}, & a_{22}a'_{12} - a_{12}a'_{22} &= -\frac{1}{2} Y_{22}, \\ a_{12}a'_{21} - a_{21}a'_{12} &= \frac{1}{2} (Y_{12} - X_{12}). \end{aligned}$$

Man schliesst hieraus, dass $X_{11}X_{22} - Y_{11}Y_{22} + Y_{12}^2 - X_{12}^2$ verschwindet, dass also die Formen X und Y gleiche Discriminanten besitzen*):

$$X_{11}X_{22} - X_{12}^2 = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2.$$

Da die Ausdrücke $X_{ik} = X_{ki}$ und $Y_{ik} = Y_{ki}$ dadurch entstehen, dass man die Reihen

$$a_{11} \ a_{12} \ a'_{11} \ a'_{12} \quad \text{und} \quad a'_{k2} \ -a'_{k1} \ -a_{k2} \ a_{k1}$$

bezw.

$$a_{1i} \ a_{2i} \ a'_{1i} \ a'_{2i} \quad \text{und} \quad a'_{2k} \ -a'_{1k} \ -a_{2k} \ a_{1k}$$

componirt, so erscheinen die Discriminanten auch in den Formen:

$$\begin{aligned} X_{11}X_{22} - X_{12}^2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{11} & a'_{12} & a'_{12} & -a'_{11} & -a_{12} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a'_{21} & a'_{22} & a'_{22} & -a'_{21} & -a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}, \\ Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a'_{11} & a'_{21} & a'_{21} & -a'_{11} & -a_{21} & a_{11} \\ a_{12} & a_{22} & a'_{12} & a'_{22} & a'_{22} & -a'_{12} & -a_{22} & a_{12} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

2. Die beiden bilinearen Formen von $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$ können — bei veränderter Bezeichnungsweise — aus einer trilinearen Form, welche noch weitere Veränderliche $z_1|z_2$ enthält:

$$F(xyz) = \sum a_{ikl} x_i y_k z_l \quad (i, k, l = 1, 2)$$

als Coefficienten von z_1 und z_2 entnommen werden. Zu den zwei Covarianten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial z_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial z_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial z_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial z_1} &= \frac{1}{2} X, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 F}{\partial z_2 \partial x_1} &= \frac{1}{2} Y \end{aligned}$$

tritt alsdann noch eine dritte

*) Ueber entsprechende Erscheinungen im quadratischen Gebiete siehe Frobenius, Journal f. Math. 1890 Bd. 106 S. 125.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_1} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial y_2} \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial y_1} = \frac{1}{2} Z$$

$$= \frac{1}{2} (Z_{11} z_1^2 + 2Z_{12} z_1 z_2 + Z_{22} z_2^2)$$

hinzu, und die Discriminanten der Formen X , Y , Z sind einander gleich:

$$X_{11} X_{22} - X_{12}^2 = Y_{11} Y_{22} - Y_{12}^2 = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2,$$

oder, anders ausgedrückt, die durch Composition hergestellte Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{122} & -a_{112} & -a_{121} & a_{111} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{222} & -a_{212} & -a_{221} & a_{211} \end{vmatrix}$$

ändert ihren Werth nicht, wenn man überall den ersten Index mit dem zweiten vertauscht, oder den ersten mit dem dritten, oder den zweiten mit dem dritten.

Die Function $\frac{1}{2} X$ erscheint als Determinante von F , wenn man nur $y_1|y_2$ und $z_1|z_2$ als Veränderliche ansieht:

$$X = 2 \det_{yz} F, \quad Y = 2 \det_{zx} F, \quad Z = 2 \det_{xy} F.$$

Kehrt man also zu der vorigen Bezeichnungsweise zurück und führt statt $z_1|z_2$ homogene Parameter $\varrho|\sigma$ ein, so erscheint $\frac{1}{2} Z$ als Determinante der aus f und f' linear zusammengesetzten Form $\varrho f + \sigma f'$ der Veränderlichen $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$:

$$\frac{1}{2} Z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_{11} & a'_{12} & \varrho & 0 & \sigma & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a'_{21} & a'_{22} & 0 & \varrho & 0 & \sigma \end{vmatrix} = \Delta \varrho^2 + \Theta \varrho \sigma + \Delta' \sigma^2,$$

und die Gleichheit der Discriminante von Z :

$$4\Delta\Delta' - \Theta^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} & a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} & a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \end{vmatrix}$$

mit denen von X und Y als Verallgemeinerung einer bekannten Eigenschaft des Systems zweier binären quadratischen Formen.

Ein einfacher Beweis ergibt sich übrigens auch durch folgende Determinantenmultiplication:

$$4\Delta\Delta' = 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{12} & -b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{22} & -b_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} + \Theta \\ X_{12} - \Theta & X_{22} \end{vmatrix}.$$

Die so erhaltene Determinante ist die der bilinearen Form

$$2(a_{11}x_1 + a_{21}x_2)(b_{12}\xi_1 + b_{22}\xi_2) - 2(a_{12}x_1 + a_{22}x_2)(b_{11}\xi_1 + b_{21}\xi_2)$$

$$= X_{11}x_1\xi_1 + (X_{12} + \Theta)x_1\xi_2 + (X_{12} - \Theta)x_2\xi_1 + X_{22}x_2\xi_2,$$

welche unter der Bedingung $\Theta = 0$ symmetrisch wird.

3. Um in gleichem Sinne eine gewisse Eigenschaft dreier binären quadratischen Formen zu verallgemeinern, führe ich drei bilineare Formen von $x_1|x_2$ und $y_1|y_2$:

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \sum a'_{ik} x_i y_k, \quad f''(xy) = \sum a''_{ik} x_i y_k$$

($i, k = 1, 2$)

ein und bilde die Ausdrücke:

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \Delta, \quad a_{11} a'_{22} - a_{12} a'_{21} - a_{21} a'_{12} + a_{22} a'_{11} = \Theta_{01} = \Theta_{10}, \dots;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial f'}{\partial y_2} - \frac{\partial f}{\partial y_2} \frac{\partial f'}{\partial y_1} = a'' x_1^2 + b'' x_1 x_2 + c'' x_2^2, \dots;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f'}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial f'}{\partial x_1} = \alpha'' y_1^2 + \beta'' y_1 y_2 + \gamma'' y_2^2, \dots;$$

so dass z. B. a'', b'', c'' dieselbe Bedeutung haben, wie oben

$$\frac{1}{2} X_{11}, X_{12}, \frac{1}{2} X_{22}.$$

Da die halbe Determinante des componirten Systems aus

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} & a_{22} & -a_{21} & -a_{12} & a_{11} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} & a'_{22} & -a'_{21} & -a'_{12} & a'_{11} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{21} & a''_{22} & a''_{22} & -a''_{21} & -a''_{12} & a''_{11} \end{vmatrix}$$

sich auf die Differenz zweier Determinantenproducte

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} & a_{11} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{22} & a'_{11} & a'_{21} & a'_{22} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{22} & a''_{11} & a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \\ a'_{11} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{12} & a'_{21} & a'_{22} \\ a''_{11} & a''_{12} & a''_{21} & a''_{12} & a''_{21} & a''_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (a_{22} a + a'_{22} a' + a''_{22} a'') (a_{11} c + a'_{11} c' + a''_{11} c'')$$

$$- (a_{21} a + a'_{21} a' + a''_{21} a'') (a_{12} c + a'_{12} c' + a''_{12} c'')$$

zurückführt und mit Zuziehung verschwindender Elemente in die Summe

$$\begin{vmatrix} a_{11} c + a'_{11} c' + a''_{11} c'' & a_{11} a + a'_{11} a' + a''_{11} a'' \\ a_{22} c + a'_{22} c' + a''_{22} c'' & a_{22} a + a'_{22} a' + a''_{22} a'' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{21} c + a'_{21} c' + a''_{21} c'' & a_{21} a + a'_{21} a' + a''_{21} a'' \\ a_{12} c + a'_{12} c' + a''_{12} c'' & a_{12} a + a'_{12} a' + a''_{12} a'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{11} & a''_{11} & c & c' & c'' \\ a_{22} & a'_{22} & a''_{22} & a & a' & a'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{21} & a'_{21} & a''_{21} & c & c' & c'' \\ a_{12} & a'_{12} & a''_{12} & a & a' & a'' \end{vmatrix}$$

übergeht, so gelangt man zu der Formel:

$$\begin{vmatrix} 2\Delta & \Theta_{01} & \Theta_{02} \\ \Theta_{10} & 2\Delta' & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} & 2\Delta'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix}.$$

4. Die Deutung der Invariante Θ der beiden Formen $f(xy)$ und $f'(xy)$ ist von Herrn Rosanes (Journal f. Math. 1881 Bd. 90 S. 312f.) angegeben worden; siehe auch Pasch, diese Annalen 1884 Bd. 23 S. 423, und die Schlussbemerkung in Nr. 2 der gegenwärtigen Abhandlung. In dem besonderen Falle $a_{12} = a_{21}$, $a'_{12} = a'_{21}$ stellen die Gleichungen $f(xy) = 0$, $f'(xy) = 0$, wenn $x_1|x_2$, $y_1|y_2$ als lineare Coordinaten von Punkten einer Geraden X gedeutet werden, Involutionen dar, deren Doppelpunkte FF' bzw. GG' heissen mögen, und die Gleichung $\Theta = 0$ drückt die harmonische Lage dieser Punktepaare aus.

Nehmen wir also an, dass $a_{12} = a_{21}$, $a'_{12} = a'_{21}$ und $\Theta = 0$ ist, aber $\Delta \neq 0$, und verstehen wir unter q' irgend einen Punkt der Geraden X , unter p den harmonischen Punkt zu $FF'q'$, unter q den harmonischen Punkt zu $GG'q'$. Dann erzeugen die Paare pq eine Involution (Rosanes a. a. O.), welcher die Paare FF' und GG' angehören; für einen gewissen Punkt p' der Geraden X ist daher p der harmonische Punkt zu $GG'p'$, q der harmonische Punkt zu $FF'p'$, und auch das Paar $p'q'$ liegt in der eben erwähnten Involution; m. a. W.:

Hat man auf einer Geraden vier harmonische Punkte $FF' GG'$ und einen weiteren Punkt p , und bestimmt man zu $FF'p$, $GG'p$ die bezüglichen harmonischen Punkte q' , p' , so ist der zu $FF'p'$ harmonische Punkt q zugleich harmonisch zu $GG'q'$, und die Paare FF' , GG' , pq , $p'q'$ liegen in Involution.

Geometrischer Beweis: Sowohl die Reihe $FF' GG' q'q$, als auch die Reihe $F'FGG'p'p$ sind (involutorisch) projectiv zu $FF' GG' pp'$; folglich sind jene beiden Reihen einander projectiv, die Paare FF' , GG' , pq , $p'q'$ in Involution. Weiter sind die Reihen $GG' pp'$ und $GG' q'q'$ projectiv, folglich $GG' q'q'$ harmonisch.

Wenn man einen Doppelpunkt der durch die Paare FF' und GG' bestimmten Involution mit ξ bezeichnet, so wird der andere Doppelpunkt aus der Gleichung $f(x\xi) = 0$ gefunden, und die Punkte GG' sind dann die Nullstellen der Functionaldeterminante der Formen $f(xx)$ und $(x\xi) \cdot f(x\xi)$:

$$2 \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & (x\xi)(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2) + \xi_2 f(x\xi) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & (x\xi)(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2) - \xi_1 f(x\xi) \end{vmatrix} \\ = 2\Delta \cdot (x\xi)^2 - 2(f(x\xi))^2,$$

wobei $(x\xi)$ die Determinante $x_1\xi_2 - x_2\xi_1$ bedeutet. Nun ist

$$\Delta \cdot (x\xi)^2 = f(\xi\xi) f(xx) - (f(x\xi))^2;$$

folglich können zwei harmonische Punktepaare durch die Gleichungen

$$f(xx) = 0, \quad f(\xi\xi) f(xx) - 2(f(x\xi))^2 = 0$$

in der Weise dargestellt werden, dass der Punkt ξ in Bezug auf beide Paare einem und demselben Punkte harmonisch zugeordnet ist. — Auch die Identität

$$a_{11}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2)^2 - 2a_{12}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + a_{22}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2)^2 = \Delta \cdot f(xx)$$

lässt erkennen, dass die harmonische Invariante (Rosanes, diese Annalen 1884 Bd. 23 S. 413) der beiden Gleichungen verschwindet.*)

II.

Ternäre bilineare Formen mit contragredienten Veränderlichen.

5. Bei der bilinearen Form der contragredienten Veränderlichen $x_1 | x_2 | x_3$ und $u_1 | u_2 | u_3$:

$$f(xu) = \sum a_{ik} x_i u_k \quad (i, k=1, 2, 3)$$

treten uns zunächst Determinante und adjungirte Form (Adjuncte) entgegen:

$$\det f = \sum \pm a_{11} a_{22} a_{33} = \Delta,$$

$$\text{adj } f = \sum a_{ik} u_i x_k = \varphi(xu),$$

wo $a_{ik} = \text{adj } a_{ik}$ in der Determinante Δ . Bei verschwindendem Δ wird φ , bei identisch verschwindendem φ wird f selbst ein Product linearer Factoren.

Legt man nun eine lineare Verbindung $\rho f + \sigma f'$ der Form $f(xu)$ und einer gleichartigen Form

$$f'(xu) = \sum a'_{ik} x_i u_k \quad (i, k=1, 2, 3)$$

zu Grunde, so haben Determinante und Adjuncte die Gestalt:

$$\det(\rho f + \sigma f') = \rho^3 \Delta + \rho^2 \sigma \Theta + \rho \sigma^2 \Theta' + \sigma^3 \Delta',$$

$$\text{adj}(\rho f + \sigma f') = \rho^2 \varphi(xu) + \rho \sigma \Phi(xu) + \sigma^2 \varphi'(xu).$$

*) Auch wenn $f(xy)$ nicht symmetrisch ist, besteht die Identität:

$$\Delta(x\xi)(y\eta) = f(\xi\eta)f(xy) - f(x\eta)f(\xi y).$$

Die harmonische Invariante der Formen $f(xy)$ und $(x\xi)(y\eta)$ ist $= f(\xi\eta)$, die der Formen $f(xy)$ und $f(x\eta)f(\xi y)$ folglich $= \Delta f(\xi\eta)$. Für

$$f'(xy) = \mu f(xy) + \lambda f(x\eta)f(\xi y)$$

wird daher

$$\Theta = \Delta(2\mu + \lambda f(\xi\eta)), \quad \Delta' = \mu \Delta(\mu + \lambda f(\xi\eta)),$$

und insbesondere für

$$f'(xy) = f(\xi\eta)f(xy) - 2f(x\eta)f(\xi y)$$

wird

$$\Theta = 0, \quad \Delta' = -\Delta(f(\xi\eta))^2.$$

Mittels der besonderen Form u_x , d. i. $\sum x_i u_i$, werde

$$\det(\varrho f + \sigma u_x) = \varrho^3 \Delta + \varrho^2 \sigma i_\varphi + \varrho \sigma^2 i + \sigma^3,$$

$$\text{adj}(\varrho f + \sigma u_x) = \varrho^2 \varphi(xu) + \varrho \sigma \psi(xu) + \sigma^2 u_x.$$

Wir denken uns in einer Ebene lineare Coordinaten eingeführt, $x_1|x_2|x_3$ als Coordinaten eines Punktes x , $u_1|u_2|u_3$ als Coordinaten einer Geraden u . Dann begründet die Gleichung $f(xu) = 0$ unter der Voraussetzung $\Delta \neq 0$ in dieser Ebene eine Collineation, welche dem Punkte x einen bestimmten Punkt zuordnet; die Gleichung $\varphi(xu) = 0$ stellt die umgekehrte Beziehung dar, $u_x = 0$ die identische Collineation. Die Figuren, welche einer und derselben Figur mittels der Collineationen $f(xu) = 0$, $f'(xu) = 0$ entsprechen, stehen unter sich in einer projectiven Beziehung; vermöge dieses Umstandes kann die Deutung der Ausdrücke Θ' , Θ , Φ auf die der Ausdrücke i , i_φ , ψ zurückgeführt werden (s. Nr. 11 der Abhandlung in Bd. 23).

6. Um die Projectivität $\psi(xu) = 0$, deren Bedeutung a. a. O. S. 425 entwickelt ist, geometrisch herzuleiten, nehmen wir in der Ebene den Punkt a beliebig an und geben dann zwei weiteren Punkten b, c eine solche Lage, dass — wenn immer a, b, \dots, a', \dots mittels $f(xu) = 0$ in $a', b', \dots, a'', \dots$ übergehen — in dem Dreieck abc die Seite ab durch c' , die Seite ac durch b' hindurchgeht (Seite bc durch a' nur bei verschwindendem i); m. a. W.: die Geraden $b'c'$ und cb' laufen durch a . Ich will das Paar bc ein Gegenpaar des Punktes a in Bezug auf f nennen; die Gerade bc trägt unendlich viele Gegenpaare von a , die Paare einer gewissen Involution. Nur auf einer einzigen solchen Geraden (vorausgesetzt, dass a kein Doppelpunkt der Projectivität f ist), nämlich auf aa' , artet die Involution der Gegenpaare aus, indem dort beide Doppelpunkte in a zusammenliegen, und ausser a giebt es nur einen einzigen Punkt A , welcher sich mit mehr als einem Punkte — den sämtlichen Punkten der Geraden aA' — zu einem Gegenpaare verbindet, nämlich denjenigen Punkt der aa' , welchen das Quadrat der Projectivität f in einen Punkt A'' der aa' überträgt. Dieser Punkt A , in welchem alle Geraden bc sich begegnen, heisse der Gegenpunkt von a in f .

Zu je zwei projectiven Punktreihen $bc \dots, b'c' \dots$ auf den Geraden U, U' gehört eine Gerade u als Ort der Punkte (bc', cb') u. s. w., in welchen jene Reihen involutorisch gesehen werden. Herr J. Kraus*)

*) Jacob Kraus: Die geometrische Deutung von Invarianten, welche bei ebenen Collineationen auftreten. Dissertation, Giessen 1886. (Daselbst gehören auf S. 9 Z. 14 v. u. ε_1 und ε_2 in den Nenner; S. 15 Z. 1 v. u. vertausche man $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$, S. 16 Z. 11 v. o. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $\alpha\beta\gamma\delta$). S. den Auszug in diesen Annalen 1887 Bd. 29 S. 234. — Die Uebertragung auf den Raum behandelt Herr P. Muth ebendas. 1889 Bd. 33 S. 493.

nennt u die Involutionenlinie der beiden Reihen und beschreibt mittels derselben die Umkehrung der Collineation ψ (§ 9 der Dissertation); in der That läuft u beständig durch a , wenn U sich um A dreht. (Um direct zu beweisen, dass u , während U sich um einen beliebigen Punkt A dreht, ein Strahlbüschel beschreibt, schneidet man a aus AA'' mittels derjenigen Geraden heraus, welche durch f in die AA'' übergeht.) U verbindet die Gegenpunkte aller Punkte von u und heisse deshalb die Gegenlinie von u in f . Um zu irgend einer Geraden $u = ax$ die Gegenlinie $U = Ab$ zu erhalten, bestimmt man den Punkt b auf der Geraden xA' derart, dass xAb' in eine Gerade fallen.

Sind die bei festem a von u , U um a , A beschriebenen Büschel projectiv, so folgt, dass die Paare aA eine Collineation erzeugen. Nun beschreiben bei festem a , wenn man b irgend eine feste Gerade v durchlaufen lässt, $Ax = Ab'$ und $A'x = A'b$ projective Büschel, wobei für $d = (v, aA')$ die Strahlen $Aa = Ad'$ und $A'a = A'd$ einander entsprechen; mithin beschreibt x einen Kegelschnitt durch A , A' und a . Die Büschel der Strahlen $u = ax$ und $A'b = A'x$ sind demnach projectiv, die der Strahlen $A'b$ und $U = Ab$ aber perspectiv, folglich bewegen sich u , U projectiv.

Die Collineation der Paare aA ist die durch die Gleichung $\psi(xu) = 0$ dargestellte; sie mag als die Gegencollineation zu f bezeichnet werden. Die Doppelemente von f sind zugleich die von ψ .

7. Wie leicht zu erkennen, entsprechen einander in ψ nicht bloss a und A , sondern auch a' und A' . Denn da $aa'A''$ in gerader Linie liegen, so ist A' derjenige Punkt der in f entsprechenden Geraden $a'a''$, welcher sich durch das Quadrat von f nach derselben Geraden überträgt.

Unterwirft man daher den Strahl aA' der Transformation f und hierauf noch der Transformation ψ , so gelangt man über $a'A'' = aa'$ zu AA' . Hieraus folgt aber: Wenn von den drei Strahlen AA' , aA , aA' einer ein Büschel beschreibt, so bewegen die beiden anderen sich ebenfalls in Büscheln. Sind also von A und A' beschriebene Figuren perspectiv, so sind sie auch perspectiv zu der von a beschriebenen Figur. Dies kommt mit dem von Herrn Keller auf S. 25 (§ 12) seiner Dissertation*) angegebenen Satze überein.

Da die Gerade aA mit AA'' identisch ist, so sind in dem eben betrachteten Falle auch die von A und A'' erzeugten Figuren perspectiv, d. h. bei veränderter Bezeichnung: *Wenn durch eine ebene Projectivität ein Dreieck abc in $a'b'c'$, dieses in $a''b''c''$ übergeht, und es liegen zwei von den Dreiecken perspectiv, so liegen sie auch perspectiv zu dem dritten.*

*) Adam Keller: Ueber gewisse Vierecke, die von Viereckspaaren abhängen. Dissertation, Giessen 1888.

8. Bei besonderer Beschaffenheit von f artet die Gegencollineation aus, so dass in ihr einem gewissen Punkte p alle Punkte der Ebene, den übrigen Punkten nur die Punkte einer gewissen Geraden π entsprechen. Es sind dann p und π Doppelemente von f ; p der Scheitel eines Strahlenbüschels, welches durch f in ein involutorisches Büschel übergeht; π der Träger einer Punktreihe, welcher in f eine involutorische Reihe entspricht. Das Auftreten eines solchen Doppelpunktes bei f zieht das einer solchen Doppelgeraden nach sich, und umgekehrt. Die beiden Involutionen liegen perspectiv.

Soll in der That der Gegenpunkt eines Punktes p in f unbestimmt werden, so muss p Doppelpunkt von f sein und jede Gerade Gegenpaare bc von p tragen, so dass $bc'p$, $cb'p$ gerade Reihen werden und einander doppelt entsprechen. Ein beliebiger Strahl durch p kehrt mithin bei zweimaliger Anwendung von f in sich selbst zurück und enthält (wenn f nicht involutorisch ist) ausser p noch *einen* Punkt β , welcher mit β'' zusammenfällt. Auf der Geraden $\pi = \beta\beta'$ werden aber durch f nicht bloss β und β' , sondern auch umgekehrt β' und β einander zugeordnet.

Die algebraische Bedingung besteht in dem Verschwinden der Determinante von ψ :

$$\begin{aligned} \det \psi &= \det (-f + iu_x) = -\Delta + ii_\varphi \\ &= \frac{1}{2} (i^3 - ii_1 - 2\Delta) = \frac{1}{3} (i^3 - i_2), \end{aligned}$$

während f zur Involution wird durch das identische Verschwinden der adjungirten Form von ψ (bei $i \neq 0$):

$$\begin{aligned} \text{adj } \psi &= \text{adj} (-f + iu_x) = \varphi - i\psi + i^2 u_x \\ &= \varphi + if = f_1 + i_\varphi u_x. \end{aligned}$$

Wegen der Bedeutung von i_1 , i_2 , f_1 und wegen der erforderlichen Beziehungen s. Bd. 23 S. 425—427.

9. Die Form Φ , aus welcher ψ durch besondere Wahl von f' hervorging, kann in Verbindung mit φ und φ' noch auf anderem, als dem obigen Wege erzeugt werden. Wir führen Strahlen v , w und Punkte y , z mit der Massgabe ein, dass $(vw)_i = x_i$ und $(yz)_i = u_i$ für $i = 1, 2, 3$, wobei

$$(vw)_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2, \quad (vw)_2 = v_3 w_1 - v_1 w_3 \text{ u. s. w.}$$

Bildet man dann unter Zuziehung weiterer Veränderlichen $\lambda_1 | \lambda_2$ und $\mu_1 | \mu_2$ die binären bilinearen Formen

$$g(\lambda\mu) = f(\lambda_1 y + \lambda_2 z, \mu_1 v + \mu_2 w), \quad g'(\lambda\mu) = f'(\lambda_1 y + \lambda_2 z, \mu_1 v + \mu_2 w),$$

so ist φ die Determinante von g (s. Bd. 23 S. 432) und mithin

$$\varrho^2 \varphi + \varrho \sigma \Phi + \sigma^2 \varphi' = \det (\varrho g + \sigma g').$$

Um nun die beiden Functional-determinanten von g und g' darzustellen, bezeichne ich (hier, wie später, mit Bezugnahme auf Nr. 6 in Bd. 23)

$$f(yv) f'(zv) - f(zv) f'(yv) \text{ d. i. } \sum \pm u_1 f_2(v) f_3'(v) \text{ mit } \frac{1}{2} k(vv),$$

$$f(yv) f'(yw) - f(yw) f'(yv) \text{ d. i. } \sum \pm x_1 f_2(y) f_3'(y) \text{ mit } \frac{1}{2} l(yy),$$

$$\frac{1}{2} \sum_i w_i \frac{\partial k}{\partial v_i} \text{ mit } k(vw), \quad \frac{1}{2} \sum_i z_i \frac{\partial l}{\partial y_i} \text{ mit } l(yz);$$

$\frac{1}{2} k(vv)$ ist die Determinante der Formen $f(x_1 y + x_2 z, v)$, $f'(x_1 y + x_2 z, v)$ nach x_1, x_2 ; aus ihr wird die Determinante von g, g' nach x , wenn man $\lambda_1 v + \lambda_2 w$ für v einsetzt:

$$2 \det_x g g' = \lambda_1^2 k(vv) + 2 \lambda_1 \lambda_2 k(vw) + \lambda_2^2 k(ww),$$

$$2 \det_x g g' = x_1^2 l(yy) + 2 x_1 x_2 l(yz) + x_2^2 l(zz).$$

Nach Nr. 2 besteht also die Identität:

$$4 \varphi \varphi' - \Phi^2 = k(vv) k(ww) - (k(vw))^2 = l(yy) l(zz) - (l(yz))^2.$$

10. Bezüglich der Ausdrücke $k(vv)$ und $l(yy)$ führe ich die weiteren Bezeichnungen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 k(vv)}{\partial v_i \partial v_k} = k_{ik}, \quad \frac{\partial k(vw)}{\partial u_i} = k_i(vw),$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 l(yy)}{\partial y_i \partial y_k} = l_{ik}, \quad \frac{\partial l(yz)}{\partial x_i} = l_i(yz)$$

ein und betrachte die in $x_1 | x_2$ und $\varrho_1 | \varrho_2$ bilinearen Formen:

$$\varrho_1 f(x_1 y + x_2 z, v) + \varrho_2 f'(x_1 y + x_2 z, v),$$

$$\varrho_1 f(x_1 y + x_2 z, w) + \varrho_2 f'(x_1 y + x_2 z, w).$$

Die Determinante der ersteren ist $\frac{1}{2} k(vv)$; die Determinanten beider nach x bzw. ϱ sind:

$$\varrho_1^2 \varphi + \varrho_1 \varrho_2 \Phi + \varrho_2^2 \varphi', \quad \frac{1}{2} x_1^2 l(yy) + x_1 x_2 l(yz) + \frac{1}{2} x_2^2 l(zz).$$

Behandelt man daher die drei Formen von $x_1 | x_2$ und $\varrho_1 | \varrho_2$:

$$\varrho_1 f(x_1 y + x_2 z)_i + \varrho_2 f'(x_1 y + x_2 z)_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

nach Nr. 3, so treten beispielsweise

$$k_{11}, k_{23}, \varphi_1(u), \Phi_1(u), \varphi_1'(u), \frac{1}{2} l_1(yy), l_1(yz), \frac{1}{2} l_1(zz)$$

an die Stelle von

$$2\Delta, \Theta_{12}, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c,$$

und es ist demnach identisch:

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \\ \Phi_1(u) & \Phi_2(u) & \Phi_3(u) \\ \varphi_1'(u) & \varphi_2'(u) & \varphi_3'(u) \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} l_1(y y) & l_2(y y) & l_3(y y) \\ l_1(y z) & l_2(y z) & l_3(y z) \\ l_1(z z) & l_2(z z) & l_3(z z) \end{vmatrix},$$

wie auch

$$\sum \pm l_{11} l_{22} l_{33} = 2 \sum \pm \varphi(x)_1 \Phi(x)_2 \varphi'(x)_3 = \frac{1}{2} \sum \pm k_1(vv) k_2(vw) k_3(wv).$$

11. Zur Aufsuchung der in den beiden vorigen Nummern entwickelten Identitäten wurde ich durch eine geometrische Ueberlegung veranlasst, welche, ursprünglich an quadratischen Formen angestellt, mit Steiner's „schiefer Projection“ zusammenhängt (Werke I. 1881 S. 409; Systematische Entwicklung u. s. w. 1832. § 59, II). Diese Verwandtschaft zwischen ebenen Punktfeldern wird, da sie quadratisch und birational ist, durch zwei bilineare Gleichungen zwischen Punkt-coordinaten' dargestellt (Rosanes, Journal f. Math. 1871 Bd. 73 S. 104). Man kann aber ähnliche Betrachtungen durchführen, indem man Punkt- und Liniencoordinaten verbindet. Es entspricht nämlich mittels der beiden Gleichungen

$$f(yv) = 0, \quad f'(yv) = 0$$

jedem Punkte y eine Gerade v mit den Coordinaten

$$f(y)_2 f'(y)_3 - f(y)_3 f'(y)_2 \mid f(y)_3 f'(y)_1 - f(y)_1 f'(y)_3 \mid f(y)_1 f'(y)_2 - f(y)_2 f'(y)_1,$$

zu welcher rückwärts der Punkt y der Coordinaten

$$f_2(v) f'_3(v) - f_3(v) f'_2(v) \mid f_3(v) f'_1(v) - f_1(v) f'_3(v) \mid f_1(v) f'_2(v) - f_2(v) f'_1(v)$$

gehört; v ist der Ort der Punkte, welche dem Punkte y durch die Collineationen $\varrho f + \sigma f' = 0$ zugeordnet werden, während in den umgekehrten Collineationen der Geraden v die Strahlen des Büschels y entsprechen.

Wenn y die Gerade u durchläuft, so umhüllt v den durch die Gleichung $k(vv) = 0$ dargestellten Kegelschnitt, welcher der correspondirende Kegelschnitt der u genannt werden kann. Die Gleichung $k(vv) = 0$ entsteht aber auch durch Elimination von ϱ und σ aus dem Systeme

$$u_1 = \varrho f_1(v) + \sigma f'_1(v), \quad u_2 = \varrho f_2(v) + \sigma f'_2(v), \quad u_3 = \varrho f_3(v) + \sigma f'_3(v),$$

welches die in $\varrho f + \sigma f' = 0$ zugehörige Gerade v liefert. Folglich umhüllen die Geraden v , welche sich der u durch die Collineationen $\varrho f + \sigma f' = 0$ zuordnen, ebenfalls den correspondirenden Kegelschnitt der u , und man erhält für diesen Kegelschnitt die Parameterdarstellung:

$$v_i = \varrho^2 \varphi_i(u) + \varrho \sigma \Phi_i(u) + \sigma^2 \varphi'_i(u). \quad (i = 1, 2, 3)$$

Aus der Parameterdarstellung eines beliebigen Kegelschnittes

$$v_i = a_i \varrho^2 + b_i \varrho \sigma + c_i \sigma^2 \quad (i = 1, 2, 3)$$

fließen nun bekanntlich die Gleichungen desselben in Punkt- und Liniencoordinaten (wenn z. B. $(bcv) = \sum \pm b_1 c_2 v_3$):

$$4a_x c_x - b_x^2 = 0, \quad (bcv)(abv) - (cav)^2 = 0,$$

und zwar ist

$$\frac{1}{4} \text{adj}(4a_x c_x - b_x^2) = (bcv)(abv) - (cav)^2, \quad \det(4a_x c_x - b_x^2) = 4(abc)^2.$$

Wenden wir dies auf unsern Fall an, so finden wir die Gleichung des correspondirenden Kegelschnittes der u in Punktcoordinaten x :

$$4\varphi\varphi' - \Phi^2 = 0;$$

und in der That ist $4\varphi\varphi' - \Phi^2$, wie sich in Nr. 9 ergeben hat, in x die Adjuncte von $k(vv)$, zugleich in u die Adjuncte von $l(yy)$. Weiter muss

$$4 \left(\sum \pm \varphi_1(u) \Phi_2(u) \varphi_3'(u) \right)^2$$

mit dem Quadrat der Determinante von $k(vv)$ übereinstimmen, wie dies durch Nr. 10 bestätigt wird, wobei man $2 \det k$ zugleich als die Hermite'sche Form des Netzes

$$x_1 l_1(yy) + x_2 l_2(yy) + x_3 l_3(yy)$$

erkennt. Beachtet man endlich, dass

$$\text{adj}(4\varphi\varphi' - \Phi^2) = k(vv) \cdot \det k,$$

so kommt die Identität:

$$\begin{aligned} \sum \pm v_1 \Phi_2(u) \varphi_3'(u) \cdot \sum \pm v_1 \varphi_2(u) \Phi_3(u) - \left(\sum \pm v_1 \varphi_2'(u) \varphi_3(u) \right)^2 \\ = \frac{1}{2} k(vv) \cdot \sum \pm \varphi_1(u) \Phi_2(u) \varphi_3'(u), \end{aligned}$$

welche die neue Tangentialgleichung auf die alte zurückführt. Der Fall, wo zwei Polarsysteme statt der Collineationen vorliegen, ist in der Dissertation von O. Weimar*) auf Grund einer Andeutung über das hier befolgte Verfahren behandelt.

III.

Ternäre bilineare Formen mit cogredienten Veränderlichen.

12. Bei der weiteren Betrachtung werden Formen mit cogredienten Veränderlichen vorausgesetzt, so dass $x_1|x_2|x_3$ und $y_1|y_2|y_3$ in

$$f(xy) = \sum a_{ik} x_i y_k, \quad f'(xy) = \sum a'_{ik} x_i y_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

als Coordinaten von Punkten einer Ebene aufgefasst werden können.

*) Ueber verschiedene Darstellungen des correspondirenden Kegelschnittes einer Geraden in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel. Giessen 1890.

Die mit Determinante und Adjuncte von $\rho f + \sigma f'$ zusammenhängenden Bezeichnungen sind wie in Nr. 5 einzuführen. Ausserdem schreibe ich:

$$\Phi(uv) = \sum A_{ik} u_i v_k, \quad f(xy) = \sum x_i f_i(y) = \sum y_x f(x)_x$$

u. s. w.

In Betreff des Einflusses linearer Substitution sei bemerkt, dass die Determinante einer Form $\sum b_{ik} u_i v_k$, wenn die u_i durch $f_i(x)$ ersetzt werden, sich mit Δ multiplicirt, während gleichzeitig in der Adjuncten die $x_i y_k$ in $x_k \varphi_i(v)$ übergehen.

Bildet man also die Determinanten von beiden Seiten der in Bd. 23 S. 434 hergeleiteten Identität:

$$\sum A_{ik} f_i(y) f(x)_x = \Theta f(xy) - \Delta f'(xy),$$

so kommt links $\Delta^2 \det \Phi$, rechts $\Theta \Delta^2 \cdot \Theta' - \Delta^3 \cdot \Delta'$ und mithin:

$$\det \Phi = \Theta \Theta' - \Delta \Delta'.$$

13. Die Paare der Punkte, welche ($\Delta \Delta' \neq 0$ vorausgesetzt) einer und derselben Geraden mittels der Reciprocitäten $f' = 0$, $f = 0$ zugeordnet werden, bilden eine Collineation, deren Gleichung $g(xu) = 0$ ich in Bd. 23 S. 435 angegeben habe. Es ist zu erwarten, dass die Form Φ mit der Form

$$g(xu) = \sum \alpha_{ik} a'_{li} x_i u_k \quad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

zusammenhängt, welcher wir noch die Form

$$g'(xu) = \sum a'_{li} a_{lk} u_i x_x$$

zur Seite stellen können.

Bemerken wir zunächst, dass die Determinante und die Adjuncte von g die Werthe

$$\det g = \Delta^2 \Delta', \quad \text{adj } g = \Delta g',$$

ferner die in Nr. 5 mit i und i_φ bezeichneten Invarianten für g die Werthe Θ , $\Delta \Theta'$ annehmen, folglich die ebendasselbst mit ψ bezeichnete den Werth

$$\psi_g = \Theta u_x - g \quad \text{und} \quad \det \psi_g = \Delta \det \Phi, \quad \text{adj } \psi_g = \Delta g' + \Theta g.$$

Wendet man nun das in Bd. 23 S. 432 beschriebene Verfahren auf die Identität

$$\sum \alpha_{lk} u_k f_l(x) = \Delta u_x$$

an, so kommt

$$g + \sum A_{ik} u_k f_i(x) = \Theta u_x,$$

d. h. ψ_g geht aus $\Phi(vu)$ dadurch hervor, dass man die v_i durch $f_i(x)$ ersetzt. Um die Adjuncte von ψ_g zu erhalten, verwandelt man in

adj Φ die $x_i y_k$ in $x_k \varphi_i(u)$. Schreibt man endlich $f(y)_k$ für u_k , so geht ψ_g über in

$$\Theta f(yx) - \Delta f'(yx).$$

14. Die Ausartungen der Form Φ sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Diese Ausartungen finden stets gleichzeitig mit den entsprechenden Ausartungen von ψ_g statt.

Verswindet $\det \Phi$, so giebt es nach Nr. 8 eine Strahleninvolution, in welcher jedes Paar conjugirter Strahlen mittels f und f' einem und demselben Punkte, und eine (dazu perspective) gerade Punktinvolution, in welcher jedes Paar conjugirter Punkte mittels f und f' der nämlichen Geraden entspricht. Es ist dann $\Theta f - \Delta f'$ eine der drei singulären Formen des Büschels $\sigma f + \sigma f'$.

Eine weitere Besonderheit tritt ein, wenn adj Φ und mithin adj ψ_g identisch verschwindet. In diesem Falle ist die Collineation $g = 0$ involutorisch, nicht verschieden von $g' = 0$. Da die Form Φ in lineare Factoren zerfällt:

$$\Phi = cu_\xi u_\eta, \quad \psi_g = cu_\xi f(x\eta), \quad \Theta f - \Delta f' = cf(x\eta) f(\xi y),$$

so wird f' eine lineare Verbindung von f und $f(x\eta) f(\xi y)$; und da für $f' = \kappa f + \lambda f(x\eta) f(\xi y)$:

$$\Theta = 3\kappa\Delta + \lambda\Delta f(\xi\eta), \quad \Theta' = \kappa\Delta(3\kappa + 2\lambda f(\xi\eta)), \quad \Delta' = \kappa^2\Delta(\kappa + \lambda f(\xi\eta)),$$

$$\Phi = 2\kappa\varphi(uv) + \lambda f(\xi\eta)\varphi(uv) - \lambda\Delta u_\xi v_\eta,$$

$$\varphi' = \kappa^2\varphi(uv) + \kappa\lambda f(\xi\eta)\varphi(uv) - \kappa\lambda\Delta u_\xi v_\eta,$$

so kann man hier annehmen:

$$f'(xy) = f(\xi\eta) f(xy) - 2f(x\eta) f(\xi y)$$

und erhält bei dieser Annahme:

$$\Theta = \Delta f(\xi\eta), \quad \Theta' = -\Delta (f(\xi\eta))^2, \quad \Delta' = -\Delta (f(\xi\eta))^3,$$

$$\Phi = 2\Delta u_\xi v_\eta, \quad \varphi' = -f(\xi\eta) \{f(\xi\eta)\varphi(uv) - 2\Delta u_\xi v_\eta\}.$$

Dabei sind die Punkte ξ und η beliebig; nur muss, so lange die Voraussetzung $\Delta\Delta' \neq 0$ festgehalten wird, $f(\xi\eta)$ von Null verschieden sein.

15. Der Fall, wo Φ sich zerlegt und zugleich $\Delta\Delta'$ verschwindet, ist noch zu erörtern.

Bleibt Δ von Null verschieden, so kann nach dem Vorstehenden f' nur dann, wenn $f(\xi\eta) = 0$ wird, singulär und zwar das Product linearer Factoren werden, nämlich:

$$f'(xy) = -2f(x\eta) f(\xi y).$$

Verlangt man dagegen: $\Delta = 0$, $\Delta' \neq 0$, so ist zu nehmen:

$$f(xy) = -2f'(x\eta) f'(\xi y) \quad \text{mit} \quad f'(\xi\eta) = 0.$$

Beidemale wird Φ durch u_ξ und v_η theilbar, ohne identisch zu verschwinden; auch hat man beidemale: $\Theta = \Theta' = 0$.

Was endlich den Fall $\Delta = \Delta' = 0$ anlangt, so sei zuerst bemerkt, dass dann wieder Θ und Θ' Null werden; denn entweder ist $\varphi = 0$ und schon deshalb $\Theta = 0$, oder f ist kein Product und dennoch $\Theta f = cf(x\eta) f(\xi y)$, u. s. w. Ferner sei bemerkt, dass bei der Annahme: $f = l_x q_y$, $f' = l'_x q'_y$ sich ergeben würde:

$$\begin{aligned} \varrho f + \sigma f' &= \varrho l_x q_y + \sigma l'_x q'_y, & \text{adj}(\varrho f + \sigma f') &= \varrho \sigma (ll'u) (qq'v), \\ \Phi &= (ll'u) (qq'v). \end{aligned}$$

In Rücksicht auf die Voraussetzung $\Delta = \Delta' = 0$ kann man nun den Formen f und f' die Gestalt:

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l'_x q'_y - \mu' m'_x p'_y$$

geben, wodurch man erhält:

$$\begin{aligned} \Phi(uv) &= \lambda \lambda' (ll'u) (qq'v) - \lambda \mu' (lm'u) (qp'v) \\ &\quad - \mu \lambda' (ml'u) (pq'v) + \mu \mu' (mm'u) (pp'v), \\ \varphi(uv) &= \lambda \mu (lm u) (pqv), \\ \Theta &= \lambda \mu \{ \lambda' (lm l') (pqq') - \mu' (lmm') (ppp') \} \end{aligned}$$

u. s. w., und es gehen dann entweder die Geraden $lm l' m'$ oder die Geraden $pq p' q'$ durch einen Punkt. In der That: Wenn man — was zulässig ist — l'_x als identisch mit l_x annimmt, so folgt aus $\Theta = \Theta' = 0$:

$$\lambda \mu \mu' (lmm') (ppp') = 0, \quad \mu \lambda' \mu' (lmm') (pp'q') = 0,$$

und es wird daher

$$\begin{aligned} \text{adj } \Phi &= \lambda \mu \lambda' \mu' \cdot \sum \pm (lm')_1 (ml')_2 x_3 \cdot \sum \pm (qp')_1 (pq')_2 y_3 \\ &\quad - \lambda \mu \mu'^2 \cdot \sum \pm (lm')_1 (mm')_2 x_3 \cdot \sum \pm (qp')_1 (pp')_2 y_3 \\ &\quad - \mu^2 \lambda' \mu' \cdot \sum \pm (ml')_1 (mm')_2 x_3 \cdot \sum \pm (pq')_1 (pp')_2 y_3 \\ &= \lambda \mu \lambda' \mu' (lmm') l_x (p_y (qp'q') - q'_y (ppq')) \\ &= \lambda \mu \lambda' \mu' (lmm') (qp'q') l_x p_y = - \lambda \mu \lambda' \mu' (lmm') (pqq') l_x p'_y. \end{aligned}$$

Da aber dieser Ausdruck verschwinden soll, so ist entweder $(lmm') = 0$, oder $(ppp') = (pqq') = (pp'q') = (qp'q') = 0$, oder — falls keine dieser Möglichkeiten zutrifft — das Product $\lambda \mu \lambda' \mu' = 0$. Im letzten Falle kann man, wenn μ oder $\mu' = 0$, die Gerade m bzw. m' so wählen, dass $(lmm') = 0$; wenn $\lambda = 0$ neben $\mu \lambda' \mu' \neq 0$, oder $\lambda' = 0$ neben $\lambda \mu \mu' \neq 0$, so ist $(pp'q') = 0$ bzw. $(pqq') = 0$, und man kann q bzw. q' so wählen, dass $pqp'q'$ durch einen Punkt gehen; entsprechend verfährt man bei $\lambda = \lambda' = 0$.

Man kann also die Formen f und f' , wenn beide singularär sind und ihre Contravariante Φ zerfällt, entweder auf die Gestalt

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l_x q'_y - \mu' m_x p'_y$$

oder auf die Gestalt

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l'_x q_y - \mu' m'_x p_y$$

bringen. Umgekehrt folgt aus der ersteren Gestalt, dass für einen gewissen Punkt ξ sowohl $f(\xi y)$ wie $f'(\xi y)$ identisch in y verschwinden und φ, φ', Φ durch $u_\xi = (lm u)$ getheilt werden; aus der letzteren, dass für einen gewissen Punkt η sowohl $f(x\eta)$ wie $f'(x\eta)$ identisch in x verschwinden und $v_\eta = (pqv)$ in φ, φ', Φ als Factor steckt.

16. Will man erreichen, dass Φ nicht bloss zerfällt, sondern geradezu identisch verschwindet, so hat man die Formen f und f' , welche alsdann nach Nr. 14 und 15 beide (wie überhaupt alle Formen $\sigma f + \sigma' f'$) singularär sein müssen, jedenfalls in der Gestalt

$$\begin{aligned} f(xy) &= \lambda_{11} l_x p_y + \lambda_{12} l_x q_y + \lambda_{21} m_x p_y + \lambda_{22} m_x q_y, \\ f'(xy) &= \lambda'_{11} l_x p_y + \lambda'_{12} l_x q_y + \lambda'_{21} m_x p_y + \lambda'_{22} m_x q_y \end{aligned}$$

vorauszusetzen. Denn schreibt man gemäss Nr. 15 etwa

$$f(xy) = \lambda l_x q_y - \mu m_x p_y, \quad f'(xy) = \lambda' l_x q'_y - \mu' m_x p'_y,$$

so wird

$$\Phi = (lm u)[\lambda \mu' (p' q v) - \mu \lambda' (q' p v)],$$

und hier soll, da das Zusammenfallen der Geraden l und m sich vermeiden lässt, der zweite Factor verschwinden; dann gehen aber entweder die Geraden $p q p' q'$ durch einen Punkt, oder man hat: $\lambda \mu \lambda' \mu' = 0$ und kann deshalb eine oder zwei dieser Geraden so wählen, dass alle vier sich in einem Punkte treffen.

Werden nun f und f' in der obigen Weise angenommen, so verschwinden $f(\xi y)$ und $f'(\xi y)$ identisch in y für einen gewissen Punkt ξ , zugleich $f(x\eta)$ und $f'(x\eta)$ identisch in x für einen gewissen Punkt η , und φ, φ', Φ werden theilbar durch $u_\xi v_\eta$:

$$\Phi = (\lambda_{11} \lambda'_{22} - \lambda_{12} \lambda'_{21} - \lambda_{21} \lambda'_{12} + \lambda_{22} \lambda'_{11}) u_\xi v_\eta.$$

Damit also Φ identisch verschwindet, ist nur noch die Bedingung

$$\lambda_{11} \lambda'_{22} - \lambda_{12} \lambda'_{21} - \lambda_{21} \lambda'_{12} + \lambda_{22} \lambda'_{11} = 0$$

zu erfüllen.

17. Bei jeder Beschaffenheit der Form f kann man die Adjuncte von Φ durch geeignete Wahl von f' zum Verschwinden bringen. Wird jedoch gewünscht, dass Φ selbst bei gegebenem f durch geeignete Wahl von f' den Werth Null erhalte, so ist dazu die Bedingung $\Delta = 0$ nothwendig und auch hinreichend (Nr. 16). Die Nothwendigkeit derselben folgt schon daraus, dass mit Φ auch $\Theta f - \Delta f'$ (s. Nr. 12) und mithin Δ (wie auch Θ, Θ', Δ') verschwindet; der Fall $f : f' = \text{Const.}$

würde sogar $\varphi = \varphi' = 0$ ergeben. Andererseits erhellt die Zulänglichkeit der Bedingung $\Delta = 0$ sofort, wenn man f auf die Gestalt $\lambda l_x q_y - \mu m_x p_y$ bringt und dann $f' = l_x p_y$ annimmt.

(Die singuläre Reciprocität $f = 0$ läuft übrigens — wenn f nicht zerfällt — auf eine projective Beziehung zwischen den Strahlen zweier Büschel lm, pq hinaus. Jeder Punkt etwa von l bildet mit jedem Punkte des entsprechenden Strahles p ein Nullpaar der Form f , d. h. für alle u, v ist $\sum a_{ik} (lu)_i (pv)_k = 0$. Dieser Ausdruck ist aber der Werth von Φ für $a'_{ik} = l_i p_k$, da unter der Annahme $u = xy, v = \xi \eta$:

$$f(x\xi) l_y - f(y\xi) l_x = \sum a_{ik} (lu)_i \xi_k$$

u. s. w.)

Die vorstehende Ueberlegung führt zu dem Werthe der symmetrischen Determinante neunten Grades:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33} & -a_{32} & 0 & -a_{23} & a_{22} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{33} & 0 & a_{31} & a_{23} & 0 & -a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & a_{32} & -a_{31} & 0 & -a_{22} & a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{33} & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{13} & -a_{12} \\ a_{33} & 0 & -a_{31} & 0 & 0 & 0 & -a_{13} & 0 & a_{11} \\ -a_{32} & a_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & -a_{11} & 0 \\ 0 & a_{23} & -a_{22} & 0 & -a_{13} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{23} & 0 & a_{21} & a_{13} & 0 & -a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{22} & -a_{21} & 0 & -a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

welche aus dem Systeme $A_{ik} = 0$ ($i, k = 1, 2, 3$) durch Elimination der a'_{ik} hervorgeht und als Jacobi'sche Determinante der a_{ik} oder als Hesse'sche Determinante von Δ aufzufassen ist*). Ist nämlich $H = 0$, lässt sich also das System $A_{ik} = 0$ durch geeignete Werthe der a'_{ik} befriedigen, so ist auch $\Delta = 0$. Folglich sind alle irreduciblen Theiler von H gleich Δ , $H : \Delta^3$ eine Constante. Nimmt man für die a_{ik} das Einheitssystem, so wird $\Delta = 1$, $H = -2$. Somit ist $H = -2\Delta^3$.

Auch die Formeln der Nr. 14 ermöglichen eine Berechnung von H und zugleich die der ersten Unterdeterminanten. Indem man eine jede Zeile von H mit der Reihe

$$a_{ik} f(\xi \eta) - 2f_i(\eta) f(\xi)_k \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

componirt, erhält man die Werthe $2\Delta \xi_i \eta_m$ ($l, m = 1, 2, 3$); indem man

*) auch als Determinante der in den a'_{ik} und a''_{ik} bilinearen (in den $a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik}$ symmetrischen) Invariante $\sum A_{ik} a''_{ik}$ dreier Formen f, f', f'' . Ueber diese Invariante s. Kraus a. a. O.

also die Elemente jener Reihe nach den Producten $\xi_i \eta_m$ ordnet, gewinnt man ein System K , welches, mit dem Systeme H componirt, in der Diagonale überall 2Δ , sonst Nullen liefert. Demnach ist $HK = (2\Delta)^9$, $H : \Delta^3$ eine Constante, $H = -2\Delta^3$, $K = -2^8\Delta^6$, und die Elemente von K sind die mit $-\Delta^2$ dividirten Adjuncten der Elemente von H .

IV.

Anwendungen im Gebiete der ternären quadratischen Formen.

18. Ich wende mich nun zu dem besonderen Falle symmetrischer Formen. Durch die Annahme

$$a_{ik} = a_{ki}, a'_{ik} = a'_{ki} \quad \text{für } i, k = 1, 2, 3$$

werden $f(xy)$, $f'(xy)$ Polarformen der quadratischen Formen $f(xx)$, $f'(xx)$; zugleich werden $\varphi(uv)$, $\varphi'(uv)$, $\Phi(uv)$ symmetrisch. Dient f als Abkürzung für $f(xx)$, φ für $\varphi(uv)$, f_i für $f_i(x)$ u. s. w., so bestehen (Nr. 12) die Identitäten:

$$\sum A_{ik} f_i f_k = \Theta f - \Delta f', \quad \sum A_{ik} f'_i f'_k = \Theta' f' - \Delta' f.$$

Bekanntlich stellt die Gleichung $\Phi = 0$ den Ort der Geraden dar, welche aus den Kegelschnitten $f = 0$, $f' = 0$ harmonische Punktepaare herauschneiden.

Es handelt sich um die Ausartungen von Φ , d. h. um die Fälle, wo $\det \Phi = \Theta \Theta' - \Delta \Delta'$ verschwindet. Ich nehme also zunächst an, dass $\det \Phi = 0$ ist, während $\text{adj } \Phi$ und auch $\Delta \Delta'$ noch von Null verschieden bleiben sollen. Die Gleichungen $f = 0$ und $f' = 0$ stellen alsdann eigentliche Kegelschnitte dar, Φ zerfällt in ein Product $u_\xi u_\eta$, die Strahlenbüschel ξ und η liegen getrennt und umfassen die Träger harmonischer Schnittpunktepaare mit jenen Kegelschnitten. Zugleich wird $\Theta : \Delta = \Theta' : \Delta'$ und

$$\Theta f - \Delta f' = -\frac{\Delta}{\Theta'} (\Theta' f' - \Delta' f) = f(x\xi) f(x\eta) = -\frac{\Delta}{\Theta'} f'(x\xi) f'(x\eta),$$

d. h. $\Theta f - \Delta f' = 0$ ist einer der drei zerfallenden Kegelschnitte des Büschels ff' , etwa mit dem Doppelpunkte r ; und zwar besteht derselbe aus zwei verschiedenen Geraden, welche den beiden Kegelschnitten f und f' in den nämlichen Punkten, etwa ab bez. cd begegnen; endlich sind ξ und η die Pole dieser Geraden für f und für f' , etwa ξ der Pol der ab für f und der cd für f' , η der Pol der cd für f und der ab für f' . Die Gerade $\xi\eta$ ist demnach für alle Kegelschnitte des Büschels die Polare des Punktes r ; auf ihr treffen sich die Geraden bc und ad in einem Punkte p , die Geraden ca und bd in einem

Punkte q , und da die Strahlen pr , qr durch ab , cd harmonisch getrennt werden, so bilden auch die Pole $pq\xi\eta$ eine harmonische Punktreihe.

19. Hieraus ergeben sich auch die nach Nr. 14 dem vorliegenden Falle eigenthümlichen Involutionen. Man kann auf der Geraden $\xi\eta$ je zwei Punkte einander zuordnen, welche für f und f' dieselbe (durch r laufende) Polare besitzen; diese projective Zuordnung mit den Doppelpunkten pq ist involutorisch, weil in ihr ξ mit η ein Paar bildet; sie fällt mit der Involution zusammen, welche die Gerade $\xi\eta$ aus den Kegelschnitten des Büschels herausschneidet*). Man kann in dem Strahlenbüschel r je zwei Strahlen einander zuordnen, welche für f und f' denselben Pol (auf $\xi\eta$) besitzen; diese Paare liegen ebenfalls in Involution und zu den obigen Punktpaaren perspectiv.

Wie schon bemerkt, lässt sich jedes derartige Punktpaar mit $abcd$ durch einen Kegelschnitt verbinden. Insbesondere läuft durch $abcd\xi\eta$ ein Kegelschnitt k , auf welchem jeder Punkt nach ξ und η conjugirte Strahlen sowohl für f wie für f' entsendet. Denn ξa , ηa sind für f und f' conjugirt u. s. w.

Noch sei auf den Zusammenhang hingewiesen, in welchem unsre Figur mit gewissen, in metrischer Hinsicht ausgezeichneten Kegelflächen 2. O. steht. Man verlege die Ebene der Figur nach dem Unendlichen, den Kegelschnitt f' nach dem Durchschnitt der Ebene mit allen Kugeln und verbinde die Punkte der Figur mit irgend einem Punkte O im Endlichen. Dann gehen aus den Linien f , f' , k drei Kegel 2. O. hervor: F , F' , K , und die Paare senkrechter Strahlen oder Ebenen des Bündels O sind die Paare conjugirter Elemente für F' . Demnach ist F ein Kegel des Pappus**), d. i. ein Kegel 2. O., welcher aus den Ebenen einer gewissen Geraden $O\xi$ (und mithin auch aus denen einer zweiten Geraden $O\eta$) je zwei senkrechte Strahlen herausschneidet; K ein orthogonaler Kegel (nach Schroeter, Journal f. Math. 1878 Bd. 85 S. 79), dessen Kanten mit zwei Strahlen $O\xi$, $O\eta$ durch je zwei rechtwinklige (hier in Bezug auf F conjugirte) Ebenen verbunden werden, — der mit F concyklische orthogonale Kegel (Th. Meyer a. a. O. S. 18). —

20. Dass die Kegelschnitte f und f' einander berühren, ist nicht ausgeschlossen. Die Berührung muss aber dann im Punkte r erfolgen, so

*) Wird $\xi\eta$ von f in FF' , von f' in GG' geschnitten, so liegen FF' , GG' mit einander und mit pq harmonisch. Die aus solchen Paaren FF' , GG' in Nr. 4 hergestellte Involution stimmt mit der obigen überein.

**) Siehe Theodor Meyer: Ueber die Kegel des Pappus und des Hachette. Strassburger Dissertation, Berlin 1884. Dort sind die Benennungen „Kegel des Pappus“ und „Kegel des Hachette“ eingeführt. Der letztere ist der supplementäre Kegel des ersteren.

dass etwa q , a und d mit r zusammenfallen; denn wegen $\Theta\Theta' = \Delta\Delta'$ wird die Discriminante von $\det(\rho f + \sigma f')$:

$$4(3\Delta\Theta' - \Theta^2)(3\Theta\Delta' - \Theta'^2) - (9\Delta\Delta' - \Theta\Theta')^2 = -12\frac{\Delta'}{\Theta}(\Theta^2 + \Delta\Theta')^2,$$

und andererseits ist

$$3\Delta\rho^2 + 2\Theta\rho\sigma + \Theta'\sigma^2 = \Delta(\Theta^2 + \Delta\Theta') \quad \text{für } \rho = \Theta, \sigma' = -\Delta.$$

Am Kegelschnitt f wird die Tangente des Punktes a von den Tangenten der Punkte b , c in ξ bzw. η , von der Geraden bc in p getroffen. Aus der hierdurch bedingten harmonischen Lage der Punkte $\xi\eta ap$ folgen die übrigen Eigenschaften der Figur.

Um auch den Fall $\Delta\Delta' = 0$ (also $\Delta\Delta' = \Theta\Theta' = 0$) zu erledigen, nehmen wir zuerst etwa Δ von Null verschieden, aber $\Delta' = 0$. Unter der Voraussetzung $\Delta' = \Theta = 0$ zerfällt f' in zwei für f conjugirte Geraden, von denen im Falle $\Delta' = \Theta = \Theta' = 0$ die eine f berührt. Unter der Voraussetzung $\Delta' = \Theta' = 0$ zerfällt f' in zwei Geraden, welche sich auf f begegnen, etwa in b , und f ausserdem etwa in a und c schneiden; $\Theta f - \Delta f' = 0$ zerfällt in die Gerade ac und die Tangente des Punktes b , $\Phi = 0$ in den Punkt b und den Pol β der ac . Dass jede Gerade durch β (d. i. jede zu ac conjugirte Gerade, also die Polare eines beliebigen Punktes B der ac) die Geraden bc , ba in conjugirten Polen A , C schneidet, ist eine bekannte Eigenschaft des dem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecks abc .*)

Zerfällt endlich sowohl f wie f' , so geht eine Gerade des einen Linienpaares durch den Doppelpunkt des andern; nur eine der Grössen Θ , Θ' wird Null.

21. In der Reihe der Ausartungen von Φ folgt jetzt der Fall, wo $\text{adj } \Phi$ für alle u verschwindet, aber nicht Φ selbst, d. i. $\Phi = c u \xi^2$, $c \neq 0$.

Zuerst sei wieder $\Delta\Delta'$ von Null verschieden. Dann wird man nach Nr. 14 schreiben:

$$f'(xx) = f(\xi\xi)f(xx) - 2(f(xy))^2,$$

wo ξ einen beliebigen, dem Kegelschnitt f (und mithin auch f') nicht angehörigen Punkt bedeutet, dessen Polare ω für f — zugleich seine Polare für f' — durch die Gleichungen $\xi_i = \varphi_i(\omega)$ bestimmt werden kann. Ebenfalls nach Nr. 14 ist $\Phi = 2\Delta u \xi^2$ und

$$\begin{aligned} \varphi'(uu) &= -f(\xi\xi) \{f(\xi\xi) \varphi(uu) - 2\Delta u \xi^2\} \\ &= -\Delta f(\xi\xi) \{ \varphi(\omega\omega) \varphi(uu) - 2(\varphi(u\omega))^2 \}. \end{aligned}$$

*) Reye: Die Geometrie der Lage I, 3. Aufl. 1886 S. 102. Ein besonderer Fall ist der Satz, wonach je zwei Supplementarsehnen des Kegelschnittes conjugirte Richtungen besitzen. — Das Dreieck abc und das ihm eingeschriebene Poldreieck ABC erscheinen perspectiv in einem gewissen Punkte des Kegelschnittes.

Die beiden so dargestellten Kegelschnitte befinden sich in doppelter Berührung; die gemeinschaftlichen Tangenten treffen sich in ξ und berühren auf ω . Die Strahlen des Büschels ξ — und nur diese — schneiden f und f' in harmonischen Punktpaaren; die Punkte der Geraden ω — und nur diese — entsenden an f und f' harmonische Tangentenpaare. Jeder der beiden Kegelschnitte ist seine eigene Polarfigur in Bezug auf den andern. Derartige Kegelschnitte behandelt Herr F. Gerbaldi in Nr. VI der Abhandlung: Sul sistema di due coniche. (Annali di Matematica 1889/90 Serie 2 T. 17 p. 161) und nennt sie „conjugirte Kegelschnitte in Bezug auf den Punkt ξ oder die Gerade ω .“

Ist $\Delta \neq 0$, aber $\Delta' = 0$, so bedeutet f' eine doppelt zu zählende Tangente von f ; sind beide Determinanten Null, so stellen f, f' Strahlenpaare eines Büschels dar, welche einander nicht harmonisch trennen (Nr. 15).

22. Auch hier — wie in Nr. 19 — treten gewisse, mit den in Nr. 4 betrachteten verwandte, Punkt- und Strahlen-Involutionen auf, diesmal aber in unendlicher Menge, nämlich auf jeder Geraden durch ξ und in jedem Punkte von ω . Man verbinde ξ mit irgend einem anderen Punkte P der Ebene durch eine Gerade, welche ω in η , f in FF' , f' in GG' schneidet, so dass die Paare $\xi\eta$, FF' , GG' zu je zweien harmonisch liegen, und bezeichne den harmonischen Punkt zu $\xi\eta P$ mit Q ; dann ist auf $\xi\eta$ ein gewisser Punkt p' zugleich dem Punkte P für f und dem Punkte Q für f' , ebenso ein Punkt q' (der harmonische zu $\xi\eta p'$) zugleich P für f' und Q für f conjugirt. Man verzeichne ferner auf ω denjenigen Punkt ζ , welcher ξ und η zu einem Poldreieck von f und f' ergänzt (vorausgesetzt wird $\Delta\Delta' \neq 0$); dann sind $\xi P p'$ und $\xi Q q'$ Poldreiecke von f , $\xi P q'$ und $\xi Q p'$ Poldreiecke von f' .

Wenn P die Ebene durchwandert, so beschreibt Q eine projective Figur, und zwar entsteht eine durch ω als Axe und ξ als Centrum bestimmte involutorische Beziehung, in welcher auch p' und q' einander entsprechen. Legt man daher auf ω einen Punkt O (mithin in dem Büschel ξ einen Strahl $O\xi = \omega$) fest, und bringt man die Geraden $\xi p'$ und OQ in P' , die entsprechenden Geraden $\xi q'$ und OP in Q' zum Schneiden, so sind die mit P veränderlichen Punkte P' und Q' ebenfalls entsprechende Punkte in jener Projectivität. Mit P ist aber sowohl P' , wie Q' durch quadratische, birationale und überdies symmetrische Verwandtschaft verknüpft, nämlich P' als der harmonische Pol von P für den Kegelschnitt f und zugleich für das diesem conjugirte Linienpaar $\omega\omega'$, Q' als der in der Geraden OP enthaltene harmonische Pol von P für den Kegelschnitt f' . Wir sind also im Stande, diese beiden Arten von quadratischer Verwandtschaft durch Zuziehung einer involutorischen Projectivität in einander überzuführen.

Ueberhaupt wird jede quadratische, birationale und symmetrische Verwandtschaft (vergl. Nr. 11) durch zwei bilineare Gleichungen $g(xy) = 0$, $g'(xy) = 0$ dargestellt, welche sich mit dem Systeme $g(yx) = 0$, $g'(yx) = 0$ decken müssen; dabei ist jedoch der Fall auszuschliessen, dass g und g' gleichzeitig alternirende Formen sind. Entweder sind nun die Formen g und g' beide symmetrisch; dann sind je zwei zugeordnete Punkte harmonische Pole in Bezug auf ein Büschel von Kegelschnitten. Oder man kann g und g' durch eine symmetrische und eine alternirende Form ersetzen (denn wenn etwa g weder symmetrisch noch alternirend ist, so deckt sich das System $g = g' = 0$ mit dem Systeme $g(xy) = g(yx) = 0$, und die Summe der Formen $g(xy)$, $g(yx)$ ist symmetrisch, ihre Differenz alternirend); dann liegen je zwei zugeordnete Punkte auf einem Strahle eines bestimmten Büschels harmonisch gegen einen bestimmten Kegelschnitt. Zwischen den hier nach einzig möglichen beiden Arten solcher Verwandtschaft hat sich oben ein linearer Zusammenhang ergeben. Geht man von der ersten Art aus, so hat man in dem Kegelschnittbüschel ein Linienpaar $\omega\omega'$ zu ermitteln, dann denjenigen Kegelschnitt f des Büschels, welcher $\omega\omega'$ in harmonischen Punkten schneidet, u. s. w.

23. Die letzte Möglichkeit ist die, dass alle Coefficienten von Φ verschwinden (vergl. Nr. 16). Dann bedeuten $f = 0$, $f' = 0$ Linienpaare mit gleichem Doppelpunkt und in harmonischer Lage. Sind die Linien des Paares $f = 0$ von einander verschieden, so darf man wieder, wie in Nr. 21:

$$f'(xx) = f(\xi\xi) f(xx) - 2(f(x\xi))^2$$

nehmen, wo ξ jetzt einen beliebigen Punkt der Ebene vorstellt, nur nicht den Doppelpunkt von f (vergl. Nr. 4). Besteht jedoch f aus zwei gleichen Factoren, so ist f' das Product eines solchen Factors in eine beliebige lineare Form.

Analog zu dem in Nr. 17 eingeschlagenen Gange bringen wir hiermit die symmetrische Determinante sechsten Grades*)

$$H = \begin{vmatrix} 0 & a_{33} & a_{22} & -2a_{23} & 0 & 0 \\ a_{33} & 0 & a_{11} & 0 & -2a_{31} & 0 \\ a_{22} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & -2a_{12} \\ -2a_{23} & 0 & 0 & -2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{31} \\ 0 & -2a_{31} & 0 & 2a_{12} & -2a_{22} & 2a_{23} \\ 0 & 0 & -2a_{12} & 2a_{31} & 2a_{23} & -2a_{33} \end{vmatrix},$$

*) Auf diese Determinante wurde ich durch eine von Herrn A. Breuer zu Trautenau im Januar d. J. mir zugeschickte Schrift: Die Normalform der allgemeinen Kegelschnittsgleichung, Eisenach 1888, aufmerksam. Herr Breuer ist zu der Determinante — mit entgegengesetztem Vorzeichen — durch eine eigen-

die Hesse'sche Determinante von Δ nach $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{23}, a_{31}, a_{12}$, in Verbindung. Diesmal ist H durch das Quadrat von Δ theilbar, $H = -16\Delta^2$.

Man kann H als die Determinante der in den je sechs Grössen a'_{ik}, a''_{ik} bilinearen Invariante $\sum A_{ik} a''_{ik}$ dreier quadratischen Formen f, f', f'' auffassen. Diese (in den $a_{ik}, a'_{ik}, a''_{ik}$ symmetrische) Invariante*) geht, wenn man $u_i u_k$ für a'_{ik} , $v_i v_k$ für a''_{ik} einsetzt (vergl. Nr. 17), in den Ausdruck

$$\sum a_{ik} (uv)_i (uv)_k, \text{ d. i. } v_x^2 f(yy) - 2v_x v_y f(xy) + v_y^2 f(xx)$$

über, wobei $u_i = (xy)_i$ für $i = 1, 2, 3$ zu nehmen ist. In der That entsteht $H = 0$ als Bedingung für die Zerlegbarkeit von f am einfachsten, wenn man davon ausgeht, dass jeder Punkt uv auf f liegen, d. h. dass bei allen u der vorstehende Ausdruck Null werden muss, falls eine Gerade v ganz zu f gehören soll. Zugleich erhält man für diesen Fall die Zerlegung von f in lineare Factoren:

$$v_y^2 \cdot f(xx) = v_x \{ 2v_y f(xy) - v_x f(yy) \},$$

wo y einen beliebigen Punkt ausserhalb der Geraden v bedeutet.

24. In dem Elementensysteme H sind auch die Adjuncten der Elemente durch Δ theilbar, nämlich gleich den mit -8 multiplicirten Elementen, aus welchen sich die Determinante des Ausdrucks

$$f(\xi\xi) f(xx) - 2(f(x\xi))^2$$

zusammensetzt, wenn man denselben als bilineare Form der Reihe $x_1^2, x_2^2, x_3^2, 2x_2x_3, 2x_3x_1, 2x_1x_2$ und der Reihe $\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2, 2\xi_2\xi_3, 2\xi_3\xi_1, 2\xi_1\xi_2$ auffasst. Wegen der Begründung darf auf die in Nr. 21 über Φ gemachte Angabe und auf Nr. 17 verwiesen werden.

Im Falle $\Delta = 0$ sinkt für das System H der Rang (nach der von Herrn Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1884 S. 1078, eingeführten Ausdrucksweise) von 6 auf 4, vorausgesetzt dass nicht zugleich alle a_{ik} Null werden, wodurch der Rang sich auf 3 erniedrigen würde. Eine weitere Erniedrigung ist nicht möglich, es müsste denn schon f identisch verschwinden. Diese Verhältnisse lassen sich aus der Determinante selbst nachweisen,

Die entsprechende Determinante zehnten Grades im Gebiete der ternären cubischen Form besitzt, wie Herr Rosanes neuerdings (diese Annalen 1890 Bd. 36 S. 316) bewiesen hat, die Eigenschaft, dass sie selbst und alle ihre ersten Minoren immer verschwinden.

thümliche Elimination gelangt und hat durch Ausrechnung der Determinante den Werth $16\Delta^2$ erhalten, a. a. O. S. 30.

*) S. Nr. 17 Fussnote. Eine neue Deutung dieser Invariante giebt Herr Wölffing, diese Annalen 1890 Bd. 36 S. 113f.

V.

Bilineare Formen mit beliebig vielen Veränderlichen.

25. Im Anschluss an die Bezeichnungen in Bd. 23 S. 423—427 werde eine bilineare Form der Veränderlichen x und der contragredienten Veränderlichen u eingeführt:

$$f(xu) = \sum a_{ik} x_i u_k, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

ferner für $i = 1, 2, \dots, n$:

$$x_{i0} = x_i, \quad x_{i1} = a_{1i} x_{10} + a_{2i} x_{20} + \dots + a_{ni} x_{n0},$$

$$x_{i2} = a_{1i} x_{11} + a_{2i} x_{21} + \dots + a_{ni} x_{n1}$$

u. s. f., sodann

$$f_1(xu) = \sum_i x_{i2} u_i, \quad f_2(xu) = \sum_i x_{i3} u_i \quad \text{u. s. f.}$$

Es ist nun bekannt, dass für $n = 3$ eine Beziehung

$$f_2 - A_1 f_1 + A_2 f_2 - A_3 u_x = 0$$

besteht, deren Coefficienten auch in der Gleichung

$$\det(f + \sigma u_x) = \sigma^3 + A_1 \sigma^2 + A_2 \sigma + A_3$$

auftreten. Diese Beziehung, welche sich sofort ergibt, wenn man f in der — allerdings nicht immer zulässigen — Gestalt $\sum a_{ii} x_i u_i$ annimmt, ist von Clebsch und Gordan, diese Annalen 1869 Bd. 1 S. 374 und 379, sowie in Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I. 1876 S. 989—991 durch symbolische Rechnung, in meiner Arbeit Bd. 23 S. 425—428 (s. auch Nr. 5 der vorliegenden Arbeit) auf anderem Wege hergestellt worden. Die entsprechende Thatsache für beliebiges n hat Herr Netto, gelegentlich seiner noch nicht veröffentlichten Untersuchungen über lineare Substitutionen, im Juli 1888 gefunden und nebst seinem Beweise mir mitgetheilt. Hierdurch veranlasst, habe ich damals eine Verallgemeinerung des a. a. O. von mir eingeschlagenen Weges aufgesucht.

26. Bei beliebigem n setze ich:

$$\det(f + \sigma u_x) = \sigma^n + A_1 \sigma^{n-1} + A_2 \sigma^{n-2} + \dots + A_n,$$

$$\sum_k \begin{vmatrix} x_{i,n-1} & a_{ki} \\ x_{k,n-1} & a_{kk} \end{vmatrix} = \sum_k \sum_i x_{i,n-2} \begin{vmatrix} a_{li} & a_{ki} \\ a_{lk} & a_{kk} \end{vmatrix} = R_1,$$

$$\sum_{k,l} \begin{vmatrix} x_{i,n-2} & a_{ki} & a_{li} \\ x_{k,n-2} & a_{kk} & a_{lk} \\ x_{l,n-2} & a_{kl} & a_{ll} \end{vmatrix} = \sum_{k,l} \sum_m x_{m,n-3} \begin{vmatrix} a_{mi} & a_{ki} & a_{li} \\ a_{mk} & a_{kk} & a_{lk} \\ a_{ml} & a_{kl} & a_{ll} \end{vmatrix} = R_2$$

