Das Analogon zur Funktion $\varphi(x)$ in einem zu vorgegebenen Primzahlen teilerfremden Zahlensystem.

Von **A. Axer** in Wien.

Geht man von der Auffassung der natürlichen Zahlenreihe als multiplikativen Erzeugnisses der natürlichen Primzahlen und der natürlichen Einheit aus und denkt nun gewisse Primzahlen p_i von der Teilnahme an der genannten Zahlenerzeugung ausgeschlossen, so wird das alsdann hervorgehende System der sämtlichen zu $P = \Pi p_i$ teilerfremden Zahlen, das im folgenden kurz mit (P) bezeichnet sei, immer noch eine Gruppe in Bezug auf multiplikative Elementenverknüpfung, wenn auch keinen Modul mehr bilden. Daher werden voraussichtlich zu all denjenigen Tatsachen und Betrachtungen der natürlichen Arithmetik, welche einzig auf multiplikativen Eigenschaften der Zahlen beruhen oder auf solche hinzielen, sich ganz entsprechende, für ein beliebiges Zahlensystem (P) gültige Korrelate aufstellen lassen. Das Studium der letzteren könnte an sich sowohl, wie auch wegen eventueller Zusammenhänge mit Fragen der Primzahlenverteilung vielleicht einiges Interesse bieten.[1])

Von den zahlreichen einschlägigen Untersuchungsobjekten wird in den vorliegenden Zeilen ein einziges, das Analogon zur Euler-Gaußschen φ-Funktion, nach einigen Richtungen hin erörtert. Dasselbe, hier mit $\varphi_P(x)$ bezeichnet, ist nur für die in (P) enthaltenen Argumentwerte, und zwar als die Anzahl der in (P) vorhandenen, zu x teilerfremden Zahlen $\leq x$ zu definieren. P wird dabei als endlich vorausgesetzt[2]) und auch des Wertes 1, der dem natürlichen Zahlensystem entspricht, fähig gedacht.

In den Nummern 1—3 werden unten rein arithmetische Formeln für $\varphi_P(x)$ aufgestellt, die Nummern 4—10 suchen den Verlauf

[1]) Selbstverständlich könnte (P) in obigem Sinne für ein beliebiges natürliches P definiert werden; doch darf eben P ohne Beschränkung der Allgemeinheit als quadratfrei vorausgesetzt werden.

[2]) Die Formeln in den Nummern 1., 2., 3. unten behalten übrigens auch bei unbegrenzter Anzahl der oberwähnten ausgeschlossenen Primzahlen p_i Sinn und Gültigkeit. Hingegen dürften die weiterhin erörterten Fragen in diesem Falle eine andere, etwas tiefer gehende Behandlung erheischen, — worauf ich eventuell an anderer Stelle zurückkommen will.

dieser Funktion, wie auch gewisser mit ihr zusammenhängender Größen durch asymptotische Gesetze zu beleuchten. Zum Teil handelt es sich dabei um Fragen, die auch in $(P) = (1)$ bisher nicht aufgeworfen wurden, bezw. überhaupt erst für ein allgemeines (P) auftauchen.[1])

Im folgenden deute $\sum\limits_{d_n}$ oder $\sum\limits_{\delta_n}$, wie üblich, die Summation über alle natürlichen Teiler von n an. $\prod\limits_{p \mid n}$ bedeute jeweils ein über alle verschiedenen Primfaktoren p von n, $\prod\limits_{p \leqq n}$ ein über alle Primzahlen $p \leqq n$, $\prod\limits_{p}$ endlich ein über die sämtlichen, ihrer Größe nach geordnet gedachten Primzahlen zu erstreckendes Produkt.

Ein eventuelles Symbol (N) über Π oder Σ kündige jedesmal den Ausschluß derjenigen Werte des Produktbildungs-, bezw. Summationsbuchstaben an, welche mit der natürlichen Zahl N einen Teiler > 1 gemein haben. Ebenso deute $\overset{(N)}{\lim\limits_{x=\infty}}$ den Grenzübergang nur über die zu N teilerfremden, unbegrenzt wachsenden natürlichen x an.

1. Für die Funktion $\varphi_P(x)$ gelten zunächst die zwei **grundlegenden Relationen**:

$$\varphi_P(x) = \sum_{d_x} \mu(d) \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \left[\frac{x}{d\,\delta}\right], \tag{1}$$

$$\sum_{d_x} \varphi_P(d) = \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \left[\frac{x}{\delta}\right], \tag{2}$$

die vorläufig als Korrelate zu den Formeln

$$\varphi(x) = \sum_{d_x} \mu(d) \frac{x}{d}, \quad \sum_{d_x} \varphi(d) = x \qquad (1'),\ (2')$$

anzusehen sind.

Und zwar ist (1) ein Spezialfall der bekannten, im folgenden noch mehrmals anzuwendenden Formel:

$$\sum_{k \leqq m}^{(N)} f(k)^{2)} = \sum_{d_N} \mu(d) \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{d}\right]} f(kd); \tag{3}$$

die letztere liefert nämlich für $f(k) \equiv 1$, $m = x$, $N = Px$:

$$\varphi_P(x) = \sum_{d_{Px}} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]$$

[1]) Solches wäre insbesondere von den Nummern 5., 7., 10. zu sagen.

[2]) $\sum\limits_{k \leqq m}$ ist hier wie im folgenden im Sinne von $\sum\limits_{k=1}^{[m]}$ zu verstehen.

oder, da x zu P teilerfremd:

$$\varphi_P(x) = \sum_{d_x} \sum_{\delta_P} \mu(d\delta) \left[\frac{x}{d\delta}\right]$$

oder auch (1).

Faßt man die innere Summe rechts in (1) als Funktion von $\frac{x}{d}$ auf, dann folgt aus (1) nach einem bekannten Umkehrungssatze unmittelbar (2).

2. Die Relationen (1), (2) lassen sich noch auf bemerkenswerte andere Formen bringen, darunter solche, deren Analogie mit (1′), (2′) viel deutlicher, als dies bei (1), (2) der Fall, hervortritt.

Es bedeute zu diesem Zwecke $[z]_P$, mit beliebigem nicht negativem z, die Anzahl der Zahlen $\leqq z$ in (P). In gewissem Sinne wird sich dies als das Korrelat in (P) zum größten Ganzen $[z]$ $(= [z]_1)$ des natürlichen Zahlensystems erweisen.

In ähnlicher Bedeutung wie $[z]_P$ soll unten auch $[z]_y$ mit variablem, natürlichem y gebraucht werden. Danach ist im besonderen

$$\varphi(x) = [x]_x, \quad \varphi_P(x) = [x]_{Px}. \tag{4}$$

Man sieht leicht ein, daß

$$[z]_y = \left[\frac{z}{y}\right] \varphi(y) + \left[z - \left[\frac{z}{y}\right] y\right]_y \tag{5}$$

ist. Anderseits folgt aus (3) (für $f(k) \equiv 1$, $m = z$, $N = y$):

$$[z]_y = \sum_{\delta_y} \mu(\delta) \left[\frac{z}{\delta}\right]. \tag{5′}$$

Nun ist die innere Summe rechts in (1) ein Spezialfall derjenigen (5′) $\left(\text{für } y = P,\ z = \frac{x}{d}\right)$. Demnach geht (1) in die folgende Formel über:

$$\varphi_P(x) = \sum_{d_x} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right]_P \tag{6}$$

oder unter Benützung von (5):

$$\varphi_P(x) = \varphi(P) \sum_{d_x} \mu(d) \left[\frac{x}{dP}\right] + \sum_{d_x} \mu(d) \left[\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right] P\right]_P \tag{6′}$$

oder auch nach (5'), $y = x$, $z = \frac{x}{P}$ gesetzt:

$$\varphi_P(x) = \varphi(P)\left[\frac{x}{P}\right]_x + \sum_{d_x} \mu(d)\left[\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right] P\right]_P. \qquad (6'')$$

Kehrt man hingegen rechts in (1) die Summationsordnung um und wendet dann auf die innere Summe wieder (5') ($y = x$, $z = \frac{x}{\delta}$ gesetzt) an, so ergibt sich die Formel:

$$\varphi_P(x) = \sum_{\delta_P} \mu(\delta)\left[\frac{x}{\delta}\right]_x. \qquad (6''')$$

Endlich schreibt sich (2) mit Rücksicht auf (5') in folgender einfacher Form:

$$\sum_{d_x} \varphi_P(d) = [x]_P \qquad (7)$$

oder auch nach (5):

$$\sum_{d_x} \varphi_P(d) = \left[\frac{x}{P}\right]\varphi(P) + \left[x - \left[\frac{x}{P}\right] P\right]_P. \qquad (7')$$

D i e A n a l o g i e d e r F o r m e l n (6), (7) m i t j e n e n (1'), (2') ist unverkennbar. Hingegen gehen (6''), (6''') für $P = 1$ in Trivialitäten über.

3. Auch zu anderen bekannten Formeln für $\varphi(x)$ lassen sich leicht Korrelate in (P) aufstellen.

So ist nach (7)

$$\sum_{y \leqq n}^{(P)} \sum_{d_y} \varphi_P(d) = \sum_{y \leqq n}^{(P)} [y]_P$$

oder, wenn man die linksseitige Doppelsumme nach gleichwertigen $d_y = x$ ($= 1, 2, \ldots, \leqq n$, zu P teilerfremd) ordnet, wobei ein $\varphi_P(x)$ jeweils $\left[\frac{n}{x}\right]_P$-mal vorkommen wird:

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P = \sum_{y \leqq n}^{(P)} [y]_P.$$

Hier läßt sich die Summe rechts als die Anzahl solcher Zahlenpaare (y, z) in (P) deuten, wobei jedesmal $n \geqq y \geqq z$ ist. Anderseits gleicht diese Anzahl (aller Kombinationen zweiter Klasse von $[n]_P$ Elementen mit Wiederholungen) $\binom{[n]_P+1}{2}$. Danach hat man

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P = \binom{[n]_P+1}{2}, \tag{8}$$

als augenscheinliches Analogon zur Formel

$$\sum_{x=1}^{[n]} \varphi(x)\left[\frac{n}{x}\right] = \binom{[n]+1}{2}. \tag{8'}$$

Weiter ist nach (6)

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} \sum_{d_x} \mu(d)\left[\frac{x}{d}\right]_P$$

oder, wenn hier die Doppelsumme wieder nach gleichwertigen d_x geordnet wird:

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x) \sum_{y \leqq \frac{n}{x}}^{(P)} [y]_P$$

$$= \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x) \binom{\left[\frac{n}{x}\right]_P + 1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P^2 + \frac{1}{2}\sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P. \tag{9}$$

Anderseits ergibt sich aus der Relation

$$\sum_{d_x} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 1, \\ 0 & \text{„} \; x \geqq 2 \end{cases}$$

durch seitenweise Summierung bezüglich x in (P) zwischen 1 und n:

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \sum_{d_x} \mu(d) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P = 1.$$

Hienach und nach (9) wird

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x)\left[\frac{n}{x}\right]_P^2\right), \tag{10}$$

in Analogie mit

$$\sum_{x=1}^{[n]} \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{x=1}^{[n]} \mu(x)\left[\frac{n}{x}\right]^2\right). \tag{10'}$$

4. Die bisher aufgestellten Formeln können nun für die Herleitung einiger asymptotischen Gesetze, durch die der Verlauf der Funktion $\varphi_P(x)$ gekennzeichnet werden soll, den Ausgangspunkt bilden.

Eine einfache Bemerkung sei noch vorausgeschickt.

Für die Anzahl aller Zahlen $\leqq x$ in (P) gilt [vgl. (5)]:

$$[x]_P = \left[\frac{x}{P}\right]\varphi(P) + \left[x - \left[\frac{x}{P}\right]P\right]_P$$

oder:

$$[x]_P - \frac{\varphi(P)}{P}x = \left[x - \left[\frac{x}{P}\right]P\right]_P - \left(\frac{x}{P} - \left[\frac{x}{P}\right]\right)\varphi(P).$$

Hienach ist wegen

$$0 \leqq \left[x - \left[\frac{x}{P}\right]P\right]_P \leqq \varphi(P),\quad 0 \leqq \frac{x}{P} - \left[\frac{x}{P}\right] < 1:$$

$$[x]_P - \frac{\varphi(P)}{P}x = \Theta\,\varphi(P),\quad |\Theta| \leqq 1 \tag{11}$$

und also

$$\lim_{x=\infty}\frac{[x]_P}{x} = \frac{\varphi(P)}{P} = \prod_{p|P}\left(1 - \frac{1}{p}\right).^{1)} \tag{11'}$$

Dieser Grenzwert soll aus wohlverständlichem Grunde die Dichte des Zahlensystems (P) genannt und mit D_P bezeichnet werden.

5. Fürs erste soll nun aus (6') eine asymptotische Hilfsformel für $\varphi_P(x)$ abgeleitet werden.

In (6') ist

$$\sum_{d_x}\mu(d)\left[\frac{x}{dP}\right] = \frac{x}{P}\sum_{d_x}\frac{\mu(d)}{d} - \sum_{d_x}\left(\frac{x}{dP} - \left[\frac{x}{dP}\right]\right)\mu(d)$$

$$= \frac{\varphi(x)}{P} - \frac{1}{P}\sum\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right]P\right)\mu(d);$$

---

[1]) So oft hier oder im folgenden bei einem Π angezeigte p gar nicht existieren sollten (wie z. B. hier für $P = 1$), sei $\Pi = 1$ verstanden.

in der Folge ist nach (6') für jedes x in (P):

$$\varphi_P(x) - \frac{\varphi(P)}{P}\varphi(x) = \sum_{d_x}\left\{\left[\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right]P\right]_P - \frac{\varphi(P)}{P}\left(\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right]P\right)\right\}\mu(d). \quad (12)$$

Eine für die hier weiter anzustrebenden Zwecke hinreichende obere Schranke für den Summenwert (12) erhält man, wenn man hierin die Ausdrücke $\left[\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right]P\right]_P$, $\frac{x}{d} - \left[\frac{x}{dP}\right]P$ für je ein quadratfreies d entweder bezw. durch die Werte $\varphi(P)$, 0 oder bezw. durch solche 0, P ersetzt, und zwar je nachdem das jeweils zugehörige $\mu(d) = 1$ oder $= -1$ ist; ersteres trifft aber, sofern $x > 1$, $2^{\omega(x)-1}$mal zu, letzteres ebenso oft, wenn unter $\omega(x)$ die Anzahl der verschiedenen in x aufgehenden Primzahlen verstanden wird. Ganz analoge Wertersetzungen, jedoch die ersterwähnte in den Fällen $\mu(d) = -1$, die letztere in solchen $\mu(d) = 1$, ergeben für den fraglichen Summenwert eine untere Schranke. [1]) Solcherart wird

$$\varphi_P(x) - \frac{\varphi(P)}{P}\varphi(x) = \vartheta\,\varphi(P).2^{\omega(x)}, \quad |\vartheta| \leqq 1,$$

oder (vgl. Nr. 4)

$$\varphi_P(x) - D_P\varphi(x) = \vartheta\,\varphi(P).2^{\omega(x)}. \quad (12')$$

Behufs Abschätzung von $2^{\omega(x)}$ sei zunächst unter $x_k (k = 1, 2, \ldots)$ das Produkt aller k ersten (der Größe nach abzuzählenden) Primzahlen in (P) verstanden: $x_k = p_1 p_2 \ldots p_k$. Von einem gewissen $k = K$ an wird dann p_k größer als der größte Primfaktor von P sein und also Px_k jedesmal alle $\omega(P) + k$ ersten natürlichen Primfaktoren überhaupt (quadratfrei) enthalten und es wird alsdann nach bekannten Sätzen über Primzahlenverteilung

$$\lg Px_k = \sum_{p \leqq p_k} \lg p = p_k(1 + \varepsilon_1(p_k)), \text{[2])} \quad (13)$$

$$\omega(Px_k) = \omega(P) + k = \frac{p_k}{\lg p_k}(1 + \varepsilon_2(p_k)) \text{[3])} \quad (14)$$

---

[1]) Wie grob auch diese Abschätzung scheinen könnte, die hiedurch gewonnenen Schranken bestimmen die Größenordnung des Schwankungsbereiches von $\varphi_P(x) - \frac{\varphi(P)}{P}\varphi(x)$, wie sich in Nr. 7 zeigen wird, mit sehr guter Annäherung, wo nicht ganz genau.

[2]) Vgl.: Hadamard: „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la Soc. math. de France, 24., 1896. De la Vallée Poussin: „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la Soc. scientif. de Bruxelles, 20., 1896.

[3]) Vgl.: De la Vallée Poussin, l. c.

sein, wobei ε_i ($i = 1, 2, \ldots$) oder auch ε hier und im folgenden jedesmal eine Größe bedeuten soll, die gegen 0 konvergiert, wenn ihr jeweils angezeigtes Argument unbegrenzt wächst. Aus (13), (14) folgt aber:

$$k = \omega(x_k) = \frac{\lg P x_k}{(1+\varepsilon_1(p_k))\{\lg\lg P x_k - \lg(1+\varepsilon_1(p_k))\}} \cdot (1+\varepsilon_2(p_k)) - \omega(P),$$

was sich leicht zu

$$\omega(x_k) = \frac{\lg x_k}{\lg\lg x_k}(1+\varepsilon(x_k)) \tag{15}$$

abschätzt. Nun sei zu einem beliebig vorgegebenen $x > 1$ in (P) k so gewählt, daß

$$x_k \leqq x < x_{k+1} \tag{16}$$

wird; alsdann ist, wie leicht einzusehen, notwendig

$$\omega(x) \leqq \omega(x_k), \tag{17}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für den Fall zu gelten hat, daß x dem x_k oder einem Vielfachen hievon gleicht. In der Folge ist nach (15)

$$\omega(x) \leqq \frac{\lg x_k}{\lg\lg x_k}(1+\varepsilon(x_k)), \tag{18}$$

also auch

$$\omega(x) \leqq \frac{\lg x}{\lg\lg x}(1+\varepsilon(x)).^{1)} \tag{18'}$$

Demgemäß ist in (12')

$$2^{\omega(x)} \leqq x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}}; \tag{18''}$$

mit Rücksicht darauf folgt aus (12'):

$$\varphi_P(x) - D_P\varphi(x) = O\left(x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}}\right), \tag{19}$$

---

[1]) $\frac{\lg x}{\lg\lg x}$ wächst monoton von $x = e^e = 15, \ldots$ an. Nun sei $\bar{k}$ das kleinste k, für welches $x_k > 15$; für jedes $x \geqq x_{\bar{k}}$ folgt dann (18') aus (18) a fortiori, sofern nur $\varepsilon(x)$ (für $x \geqq x_{\bar{k}}$) etwa jeweils $= \varepsilon(x_k)$ gesetzt (und hiemit nach (16) und (15) völlig definiert) wird. (Für alle $x < x_{\bar{k}}$ hingegen können unter $\varepsilon(x)$ in (18'), (18'') irgend welche entsprechend gewählte Werte verstanden werden.) Alsdann gilt in (18'), (18'') für jedes x, das $\geqq x_{\bar{k}}$ ist und dem ihm nach (16) zugeordneten x_k oder einem Vielfachen hievon gleicht, das Gleichheitszeichen.

und also a fortiori, unter $\varkappa$ eine beliebige positive Konstante verstanden:

$$\varphi_P(x) - D_P\,\varphi(x) = O\left(x^{\frac{(1+\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}\right). \tag{19'}$$

Diese asymptotische Hilfsformel wird im folgenden anzuwenden sein.

6. Es soll jetzt die Art des Unendlichwerdens der φ_P-Funktion (bei unbegrenzt in (P) wachsendem Argument), bezw. sollen die Unbestimmtheitsgrenzen für geeignete Quotienten von $\varphi_P(x)$ durch entsprechende analytische Funktionen untersucht werden.

Für den Spezialfall $P = 1$ ist die entsprechende Aufgabe bereits durch eine Arbeit von Landau [1]) erledigt. Von den Grundgedanken derselben wird die hier folgendenur Betrachtung in einem, nicht unwesentlichen Punkte abweichen. (Vgl. Anm. 1 auf S. 11.)

Zunächst ist wegen

$$\varphi_P(x) \leqq [x]_P - 1 \quad (x > 1)$$

und mit Rücksicht auf (11'):

$$\limsup_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x)}{x} \leqq \frac{\varphi(P)}{P} = D_P;$$

anderseits ist für unbegrenzt wachsende Primzahlen p in (P):

$$\lim_{p=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(p)}{p} = \lim_{p=\infty}^{(P)} \frac{[p]_P - 1}{p} = \big(\text{nach } (11')\big)\, D_P;$$

aus beidem folgt

$$\limsup_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x)}{x} = D_P \tag{20}$$

als gewünschte obere Unbestimmtheitsgrenze.

Zur Herleitung einer entsprechenden unteren Grenze beachten wir, zunächst mit Bezugnahme auf die Funktion $\varphi(x)$, daß wenn $x_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ die in Nr. 5 festgelegte Bedeutung hat,

$$\frac{\varphi(x_k)}{x_k} = \prod_{p \leqq p_k}^{(P)} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

und also für alle k oberhalb eines bestimmten K

$$\frac{\varphi(x_k)}{x_k} = \frac{\prod\limits_{p \leqq p_k}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{\prod\limits_{p \mid P}\left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \frac{1}{D_P} \prod_{p \leqq p_k}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \tag{21}$$

---

[1]) „Über den Verlauf der zahlentheoretischen Funktion $\varphi(x)$." Archiv d. Math. u. Phys. III. Reihe, Bd. 5, 1903; S. 86—91.

wird. Nun ist nach einem Satze von Mertens[1])

$$\prod_{p \leqq p_k}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1+\varepsilon_3(p_k)}{e^C \lg p_k},$$

wobei C die Euler-Mascheronische Konstante bedeutet, also nach (21)

$$\frac{\varphi(x_k)}{x_k}=\frac{1+\varepsilon_3(p_k)}{D_P\, e^C \lg p_k}$$

und mit Rücksicht auf (13):

$$\frac{\varphi(x_k)}{x_k}=\frac{1+\varepsilon_3(p_k)}{D_P e^C\{\lg\lg(Px_k)-\lg(1+\varepsilon_1(p_k))\}}=\frac{1+\varepsilon_4(x_k)}{D_P e^C \lg\lg x_k}. \qquad (22)$$

Hienach ist

$$\lim_{k=\infty}\frac{\varphi(x_k)\lg\lg x_k}{x_k}=\frac{1}{D_P\, e^C} \qquad (23)$$

und also jedenfalls

$$\liminf_{x=\infty}^{(P)}\frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x}\leqq\frac{1}{D_P\, e^C}. \qquad (24)$$

Hier gilt nun in Wirklichkeit das Gleichheitszeichen. Um dies einzusehen, denke man zu einem in (P) vorgegebenen $x>1$ ein x_k nach (16) bestimmt, so daß in der Folge (17) eintritt, und man vergleiche dann in den beiden Produkten

$$\frac{\varphi(x)}{x}=\prod_{p\mid x}\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad \frac{\varphi(x_k)}{x_k}=\prod_{p\leqq p_k}^{(P)}\left(1-\frac{1}{p}\right) \qquad (25),\ (25')$$

deren etwaige nicht gemeinsame Faktoren $1-\frac{1}{p}$. Sofern es in (25) solche gibt, weist jeder derselben notwendig ein $p>p_k$ auf und ist daher größer, als der größte unter allen Faktoren von (25′). Da nun (25) nach (17) nicht mehr Faktoren zählt als (25′), dabei aber sämtliche Faktoren hier und dort einzeln <1 und >0 sind, so folgt aus alledem notwendig:

$$\frac{\varphi(x)}{x}\geqq\frac{\varphi(x_k)}{x_k} \qquad (26)$$

und um so mehr von einem x an:

$$\frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x}\geqq\frac{\varphi(x_k)\lg\lg x_k}{x_k}. \qquad (26')$$

[1]) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie.“ Journal f. die r. u. a. Math. 78. 1874; S. 53.

Faßt man nun hier x als variabel in (P) und gleichzeitig x_k als Funktion von x [durch (16) gegeben] auf, so ist hieraus zu folgern:

$$\liminf_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x} \geqq \liminf_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi(x_k)\lg\lg x_k}{x_k}, \tag{27}$$

daher mit Rücksicht auf (23):

$$\liminf^{(P)} \frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x} \geqq \frac{1}{D_P e^C},\ ^{1)} \tag{27'}$$

schließlich also wegen (24):

$$\liminf_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x} = \frac{1}{D_P e^C}. \tag{28}$$

Nunmehr ergibt sich sofort auch $\liminf\limits_{x=\infty}^{(P)} \dfrac{\varphi_P(x)\lg\lg x}{x}$. Nach (19) wird nämlich

$$\frac{\varphi_P(x)\lg\lg x}{x} = D_P \frac{\varphi(x)\lg\lg x}{x} + O\left(x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}-1}.\lg\lg x\right);$$

da nun $\lim\limits_{x=\infty}^{(P)} O$ hier verschwindet, folgt unter Berücksichtigung von (28)

$$\liminf_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x)\lg\lg x}{x} = e^{-C} \tag{29}$$

als verlangte untere Unbestimmtheitsgrenze. *Während die obere (20) der Dichte von (P) gleichkommt, ist diese untere von P unabhängig.*

7. Aus (19) und (28) folgt unmittelbar noch eine für den Verlauf von $\varphi_P(x)$ charakteristische Tatsache.

Nach (19) ist

$$\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} - D_P = \frac{1}{\varphi(x)}\, O\left(x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}}\right);$$

da wegen (28) für $P=1$ jedenfalls

$$\frac{1}{\varphi(x)} = O(x^{-1}\lg\lg x)$$

ist, folgt:

$$\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} - D_P = O\left(x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}-1}.\lg\lg x\right). \tag{30}$$

---

[1]) Diese Ungleichung wird in der auf S. 8, Anm. 1, zitierten Arbeit mittels eines asymptotischen Kalküls (für $P=1$) gewonnen (l. c., S. 90, 91), welcher hier durch Berücksichtigung der Sachlage (26) erspart wird.

Es ist somit

$$\lim_{P=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} = D_P,$$

d. h.: Die Anzahl der zu x in (P) teilerfremden Zahlen $\leqq x$ ist, sofern x selbst nur Werte in (P) annimmt, zur Anzahl aller natürlichen zu x teilerfremden Zahlen $\leqq x$ asymptotisch proportional[1]) mit der Dichte von (P) als Proportionalitätsfaktor.

Wiewohl solcherart die Quotienten $\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} = \frac{[x]_{Px}}{[x]_x}$, $\frac{[x]_P}{x} = \frac{[x]_P}{[x]_1}$ [vgl. (11′)] mit in (P) unbegrenzt zunehmendem x dem gleichen Grenzwerte D_P zustreben (was wohl von vornherein zu vermuten war), ist doch nicht zu verkennen, daß die Annäherung des ersteren an D_P wesentlich langsamer vor sich geht als die des letzteren. Während nämlich $x \cdot \left(\frac{[x]_P}{x} - D_P\right)$ stets zwischen den Schranken $\pm \varphi(P)$ bleibt [vgl. (11)], rücken die Unbestimmtheitsgrenzen von $\varphi(x) \cdot \left(\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} - D_P\right)$ $\left[\text{und umsomehr noch diejenigen von } x \cdot \left(\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} - D_P\right)\right]$ mit in (P) zunehmendem x im allgemeinen ins Unendliche. Letzteres geht aus (19) noch nicht zwingend hervor und soll daher an dieser Stelle bewiesen werden. Aber mehr noch: während $x^{\frac{(1+\varepsilon(x))\lg 2}{\lg\lg x}}$, bezw. $x^{\frac{(1+\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}$ (mit beliebig kleinem $\varkappa > 0$) nach (19), bezw. (19′) nur eine obere Schranke für die Größenordnung von $\varphi(x) \cdot \left(\frac{\varphi_P(x)}{\varphi(x)} - D_P\right)$ abgibt, stellt es sich heraus, daß diese letztere allenfalls nicht zur Ordnung von $x^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}$ herabsinken kann, sofern nur $P \geqq 3$. In anderer, zum Teil genauerer Fassung ausgesprochen:

Sofern $P \geqq 3$, ist für beliebig kleines positives $\varkappa$ einerseits

$$\lim_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x) - D_P\,\varphi(x)}{x^{\frac{(1+\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}} = 0, \tag{31}$$

[1]) „Asymptotisch proportional" werden hier zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ der positiven oder auch nur in einem (P) variierenden Größe x genannt, wenn $\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ existiert und $\neq 0$ ist. (Der Sinn ist also derselbe, wie wenn $f(x)$ und $L\,g(x)$ als „asymptotisch gleich" bezeichnet werden.)

anderseits aber

$$\limsup_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x) - D_P\varphi(x)}{x^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}} = +\infty, \quad \liminf_{x=\infty}^{(P)} \frac{\varphi_P(x) - D_P\varphi(x)}{x^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x}}} = -\infty. \quad (32),\ \mathbf{(32')}$$

(Hingegen hat man für $P=1$:

$$\varphi_1(x) - D_1\varphi(x) = 0;$$

für $P=2$:

$$\varphi_2(x) - D_2\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ für } x=1, \\ 0 \text{ für (ungerade) } x \geqq 3.) \end{cases}$$

(31) ist unmittelbar in (19) begründet. Zum Beweise von (32), (32') dagegen genügt es, wenn — für ein beliebiges $P \geqq 3$ — die Existenz zweier Zahlenfolgen x'_i, x''_i $(i = 1, 2\ldots)$ in $(\overline{P})$ nachgewiesen wird, so daß — bei beliebig vorgegebenem positiven N — für alle i, die oberhalb eines bestimmten, von N (und P) abhängigen J liegen,

$$\frac{\varphi_P(x'_i) - D_P\varphi(x'_i)}{{x'_i}^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x'_i}}} > N, \quad \frac{\varphi_P(x''_i) - D_P\varphi(x''_i)}{{x''_i}^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x''_i}}} < -N \quad (33), (33')$$

bleibt.

In der Tat erhält man zwei derartige Zahlenfolgen, wenn man x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ einmal als das Produkt aller $2i$, ein anderes Mal als das Produkt aller $2i-1$ ersten Primzahlen von der Form $Py-1$ (mit wachsendem, natürlichem $y \geqq 1$) definiert. Ist solcherart etwa $x'_i = p'_1 p'_2 \ldots p'_{2i}$, so wird im allgemeinen Gliede der Summe (12), $x = x'_i$ gesetzt:

$$\mu(d) = (-1)^{\omega(d)}, \quad \frac{x'_i}{d} \equiv (-1)^{\omega(d)} \pmod P,$$

$$\frac{x'_i}{d} - \left[\frac{x'_i}{dP}\right] P = \begin{cases} 1 \text{ bei geradem } \omega(d), \\ P-1 \text{ bei ungeradem } \omega(d), \end{cases}$$

in der Folge

$$\left[\frac{x'_i}{d} - \left[\frac{x'_i}{dP}\right]P\right]_P - \frac{\varphi(P)}{P}\left(\frac{x'_i}{d} - \left[\frac{x'_i}{dP}\right]P\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\varphi(P)}{P} \text{ bei geradem } \omega(d), \\ [P-1]_P - \dfrac{\varphi(P)}{P}(P-1) = \\ = \dfrac{\varphi(P)}{P} \text{ bei ungeradem } \omega(d) \end{cases}$$

und hienach schließlich:

$$\varphi_P(x_i') - D_P\varphi(x_i') = \left(1 - \frac{\varphi(P)}{P}\right).2^{\omega(x_i')-1} - \frac{\varphi(P)}{P}.2^{\omega(x_i')-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - D_P\right)\cdot 2^{\omega(x_i')}. \tag{34}$$

Ganz in derselben Weise erhält man, $x_i'' = p_1' p_2' \dots p_{2i-1}'$ gesetzt:

$$\varphi_P(x_i'') - D_P\varphi(x_i'') = \left(D_P - \frac{1}{2}\right).2^{\omega(x_i'')}. \tag{34'}$$

$2^{\omega(x_i')}$, $2^{\omega(x_i'')}$ können nun genau nach dem auf $2^{\omega(x_k)}$ in Nr. 5 angewandten Modus abgeschätzt werden. Nach Sätzen über die Verteilung der Primzahlen in einer arithmetischen Progression mit zum Anfangsgliede (hier $P-1$) teilerfremder Differenz (hier P) hat man:

$$\lg x_i' = \sum_{p' \leqq p'_{2i}} \lg p' = \frac{p'_{2i}}{\varphi(P)}(1 + \varepsilon_1'(p'_{2i})),\text{[1]} \tag{35}$$

$$\omega(x_i') = 2i = \frac{p'_{2i}}{\varphi(P)\lg p'_{2i}}(1 + \varepsilon_2'(p'_{2i}));\text{[2]} \tag{35'}$$

danach wird

$$\omega(x_i') = \frac{(1+\varepsilon_2'(p'_{2i}))\lg x_i'}{(1+\varepsilon_1'(p'_{2i}))\{\lg\lg x_i' + \lg\varphi(P) - \lg(1+\varepsilon_i'(p'_{2i}))\}} =$$

$$= \frac{\lg x_i'}{\lg\lg x_i'}(1 + \varepsilon'(x_i')).$$

Dies ergibt, in (34) eingesetzt:

$$\varphi_P(x_i') - D_P\varphi(x_i') = \left(\frac{1}{2} - D_P\right)x_i'^{\frac{(1+\varepsilon'(x_i'))\lg 2}{\lg\lg x_i'}}$$

und es ist hienach:

$$\frac{\varphi_P(x_i') - D_P\varphi(x_i')}{x_i'^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x_i'}}} = \left(\frac{1}{2} - D_P\right)x_i'^{\frac{(\varkappa+\varepsilon'(x_i'))\lg 2}{\lg\lg x_i'}}. \tag{36}$$

---

[1]) Vgl.: Hadamard, l. c. (s. S. 7, Anm. 2); De la Vallée Poussin, l. c. (s. S. 7, Anm. 2); Deuxième partie.

[2]) Vgl.: De la Vallée Poussin, l. c., Deuxième partie.

Genau so ergibt sich:

$$\frac{\varphi_P(x_i'') - D_P\,\varphi(x_i'')}{x_i''^{\frac{(1-\varkappa)\lg 2}{\lg\lg x_i''}}} = \left(D_P - \frac{1}{2}\right) x_i''^{\frac{(\varkappa+\varepsilon''(x_i''))\lg 2}{\lg\lg x_i''}}. \tag{36'}$$

Da nun dabei

$$\lim_{i=\infty} \varepsilon'(x_i') = 0, \quad \lim_{i=\infty} \varepsilon''(x_i'') = 0$$

ist und in der Folge die Größen $x_i'^{\frac{(\varkappa+\varepsilon(x_i'))\lg 2}{\lg\lg x_i'}}$, $x_i''^{\frac{(\varkappa+\varepsilon''(x_i''))\lg 2}{\lg\lg x_i''}}$, wie klein auch $\varkappa$ (> 0) angenommen wurde, beide mit wachsendem i von einer gewissen Stelle an unbegrenzt zunehmen, da ferner D_P für $P \geqq 3$ sicher $\neq \frac{1}{2}$ ist, folgt aus (36), (36'), sofern $D_P < \frac{1}{2}$, die Bestimmbarkeit eines J zu vorgegebenem positivem N derart, daß für alle $i > J$ (33) und (33') eintritt. Das nämliche folgt — nur nach Umtauschung der Bezeichnungen x_i', x_i'' für die konstruierten Zahlenfolgen — im Falle $D_P > \frac{1}{2}$. Hiemit ist die ausgesprochene Behauptung bewiesen.

8. Es soll des weiteren die summatorische Funktion $\sum\limits_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x)$ von n, das Korrelat zu $\sum\limits_{x=1}^{[n]} \varphi(x)$, asymptotisch ausgewertet werden.

Indem wir hiezu die Formel (10) benützen,[1]) ersetzen wir darin $\left[\frac{n}{x}\right]_P$ nach (11) durch

$$\frac{\varphi(P)}{P} \cdot \frac{n}{x} + \Theta_x\,\varphi(P), \qquad |\Theta_x| \leqq 1;$$

[1]) Man kann mit gleichem Erfolg, wiewohl ein wenig längerer Rechnung, auch direkt von (1) ausgehen. Danach wird

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \sum_{x \leqq n}^{(P)} \sum_{d_x} \mu(d) \left[\frac{x}{d\,\delta}\right] = \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x) \sum_{z \leqq \frac{n}{x}}^{(P)} \left[\frac{z}{\delta}\right],$$

was nun,

$$\sum_{z \leqq \frac{n}{x}}^{(P)} \left[\frac{z}{\delta}\right] = \frac{1}{\delta} \sum_{z \leqq \frac{n}{x}}^{(P)} z - \frac{\theta n}{x}, \quad 0 \leqq \theta < 1$$

gesetzt, leicht abzuschätzen ist.

alsdann wird

$$\left.\begin{aligned}\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \frac{\varphi^2(P)}{2P^2} n^2 \sum_{x \leqq n}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} + \frac{\varphi^2(P)}{P} n \sum_{x \leqq n}^{(P)} \frac{\mu(x)\Theta_x}{x} + \\ + \frac{\varphi^2(P)}{2} \sum_{x \leqq n}^{(P)} \mu(x)\Theta_x^2 + \frac{1}{2}.\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Hier ist die zuletzt stehende Summe $= O(n)$, die vor- (38)
letzte dem absoluten Betrage nach $\leqq \sum_{x=1}^{[n]} \frac{1}{x}$, also $= O(\lg n)$. (38′)
Hinsichtlich der drittletzten Summe gilt einerseits

$$\sum_{x \leqq \infty}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\prod\limits_p \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)}{\prod\limits_{p \mid P} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid P} \frac{p^2}{p^2 - 1}; \quad (39)$$

anderseits ist

$$\left| \sum_{n < x \leqq \infty}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} \right| < \sum_{n < x \leqq \infty}^{(P)} \frac{1}{x^2} \leqq \sum_{x=[n]+1}^{\infty} \frac{1}{x^2},$$

also zufolge bekannter Abschätzung der letzteren Summe:

$$\sum_{n < x \leqq \infty}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} = O(n^{-1}); \quad (39')$$

aus (39), (39′) folgt:

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} = \sum_{x \leqq \infty}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} - \sum_{n < x \leqq \infty}^{(P)} \frac{\mu(x)}{x^2} = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p \mid P} \frac{p^2}{p^2 - 1} - O(n^{-1}). \quad (40)$$

Hiemit erhalten wir aus (37), nach Berücksichtigung von (38), (38′), (40), sowie der Beziehung

$$\frac{\varphi^2(P)}{P^2} \prod_{p \mid P} \frac{p^2}{p^2 - 1} = \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1}, \quad (41)$$

für $\sum\limits_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x)$ den nachstehenden asymptotischen Ausdruck:

$$\sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \frac{3}{\pi^2} n^2 \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O(n \lg n). \quad (42)$$

Hieraus und aus [vgl. (11)]

$$[n]_P = n \prod_{p\mid P} \frac{p-1}{p} + O(1) \tag{43}$$

ergibt sich weiter als Mittelwert von $\varphi_P(x)$ für Zahlen $x \leqq n$ in (P) folgendes:

$$\frac{1}{[n]_P} \cdot \sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) = \frac{3}{\pi^2} n \prod_{p\mid P} \frac{p}{p+1} + O(\lg n). \tag{44}$$

Zwischen den Größen (42), (44) und den analogen für $P=1$ [wofür die entsprechenden Formeln in jenen (42), (44) mitenthalten sind] besteht wiederum asymptotische Proportionalität, mit den Proportionalitätsfaktoren $\prod\limits_{p\mid P} \frac{p-1}{p+1}$, bezw. $\prod\limits_{p\mid P} \frac{p}{p+1}$.

9. Im Anschluß an (42) können genau, wie Analoges im Zahlensystem (1) geschieht, folgende Größen asymptotisch ausgewertet werden:

a) die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Zahlen, die $\leqq n$ und zu P teilerfremd sind, zueinander teilerfremd sind;

b) die Anzahl der positiven Brüche in (P) mit Zähler und Nenner $\leqq n$; unter „Brüchen in (P)" sollen dabei rationale Brüche mit zu P teilerfremdem Zähler und Nenner verstanden und stets in nicht kürzbarer Form gedacht werden.

Ad *a*): Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist durch

$$W_P(n) = \frac{2 \sum\limits_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) - 1}{[n]_P^2}$$ [1]

gegeben[2]; hiefür folgt nach Berücksichtigung von (42), (43):

$$W_P(n) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p\mid P} \frac{p^2}{p^2-1} + O\left(\frac{\lg n}{n}\right). \tag{45}$$

Danach ist weiter

$$W_P = \lim_{n=\infty} W_P(n) = \frac{6}{\pi^2} \prod_{p\mid P} \frac{p^2}{p^2-1} = \prod_{p}^{(P)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right). \tag{45'}$$

Die besagte Wahrscheinlichkeit ist nach (45) für ein $P \geqq 2$ (wie ja zu erwarten) größer als diejenige für $P=1$, d. i.

[1]) Vgl. z. B. (für $P=1$): Bachmann: „Zahlentheorie." II. Teil (Leipzig 1894); S. 429—430.

[2]) Natürlich wird hier n (wie ja in vorliegender Arbeit überall) $\geqq 1$, sonst beliebig gedacht.

$> \frac{6}{\pi^2} + O\left(\frac{\lg n}{n}\right)$, sofern nur n jeweils oberhalb einer entsprechenden, von P abhängigen. Schranke gedacht wird.

Läßt man P nacheinander alle quadratfreien (oder auch alle natürlichen) Werte wachsend durchlaufen, so schwankt gleichzeitig der Wert von W_P, wie aus (45′) leicht zu folgern, derart, daß

$$\liminf_{P=\infty} W_P = \frac{6}{\pi^2}, \tag{46}$$

$$\limsup_{P=\infty} W_P = 1 \tag{46'}$$

wird und zudem für $P \geqq 2$ stets

$$\frac{6}{\pi^2} < W_P < 1 \tag{46''}$$

bleibt.

Aus

$$W_P(n) = W_P + O\left(\frac{\lg n}{n}\right)$$

ist mit Rücksicht auf (46′), (46″) die nachstehende (übrigens an sich recht durchsichtige) Tatsache zu folgern:

Zu einer vorgegebenen beliebig kleinen Größe $\varepsilon > 0$ läßt sich stets (auf unendlich viele Arten) eine natürliche Zahl P und dazu eine positive Größe N derart angeben, daß die Wahrscheinlichkeit: zwei beliebige zu P teilerfremde Zahlen $\leqq n$ seien zueinander teilerfremd, sich für alle $n > N$ von der Gewißheit um weniger als ε unterscheide.

Ad b): Da zu einem zu P teilerfremden $x \geqq 2$ als Nenner $\varphi_P(x)$ echte Brüche in (P) gehören und ebensoviele unechte zu einem zu P teilerfremden $x \geqq 1$ als Zähler, ist die Gesamtzahl der unter b) bezeichneten Brüche

$$2 \sum_{x \leqq n}^{(P)} \varphi_P(x) - 1 = \frac{6}{\pi^2} n^2 \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O(n \lg n). \tag{47}$$

Hieraus in Verbindung mit dem daselbst mitenthaltenen Werte für $P = 1$ ist zu folgern:

Die Wahrscheinlichkeit, daß in einem rationalen, nicht kürzbaren Bruch mit Zähler und Nenner $\leqq n$ diese beiden zu einer vorgegebenen Zahl P teilerfremd sind, beträgt $\prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O\left(\frac{\lg n}{n}\right)$.

10. An dieser Stelle finde noch die folgende, mit der φ_P-Funktion nur mittelbar zusammenhängende, bisher, wie es scheint, auch für $(P)=(1)$ nicht aufgeworfene Frage ihre Beantwortung:

Wieviel verschiedene reguläre Kettenbrüche[1]) gibt es (asymptotisch), die positive Brüche in (P) mit Zähler und Nenner $\leqq n$ darstellen?

Es bedeute $K'_P(n)$ die Anzahl der verschiedenen regulären Kettenbrüche insgesamt für alle echten, $K''_P(n)$ diejenige für alle unechten positiven Brüche in (P) mit Zählern und Nennern $\leqq n$.

Ein rationaler, nicht kürzbarer Bruch mit einem Nenner $x \geqq 0$ kann auf x verschiedene Arten in einen regulären Kettenbruch entwickelt werden.[2]) Hienach wird zunächst [vgl. auch Nr. 9, ad b)]

$$K'_P(n) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} x\,\varphi_P(x) - 1 \tag{48}$$

$$[\text{vgl. } (1)] = \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \sum_{x \leqq n}^{(P)} x \sum_{d_x} \mu(d) \left[\frac{x}{d\delta}\right] - 1 \tag{48'}$$

oder, wenn in (48′) die Glieder der inneren Doppelsumme nach den Werten von $d_x = y$ $(= 1, 2, \ldots, [n]$, zu P teilerfremd) geordnet werden:

$$K'_P(n) = -1 + \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \sum_{y \leqq n}^{(P)} y\,\mu(y) \sum_{z \leqq \frac{n}{y}}^{(P)} z \left[\frac{z}{\delta}\right]. \tag{48''}$$

Anderseits ergeben die sämtlichen, einen bestimmten Zähler $x \geqq 1$ aufweisenden unechten positiven Brüche in (P) jeweils als Summe all ihrer Nenner

$$\sum_{y \leqq x}^{(Px)} y = [\text{vgl. } (3)] \sum_{d_{Px}} d\,\mu(d) \sum_{y=1}^{\left[\frac{x}{d}\right]} y = \frac{1}{2} \sum_{\delta_P} \delta\,\mu(\delta) \sum_{d_x} d\,\mu(d) \left[\frac{x}{d\delta}\right]\left[\frac{x}{d\delta}+1\right];$$

somit ist
$$K''_P(n) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} \sum_{y \leqq x}^{(Px)} y \tag{49}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\delta_P} \delta\,\mu(\delta) \sum_{x \leqq n}^{(P)} \sum_{d_x} d\,\mu(d) \left[\frac{x}{d\delta}\right]\left[\frac{x}{d\delta}+1\right] \tag{49'}$$

[1]) Als „regulär" wird hier jeder Kettenbruch mit Teilzählern ± 1 und natürlichen Teilnennern bezeichnet, der durch eine Divisionenkette hervorgeht, bei welcher jeder Rest absolut kleiner als der zugehörige Divisor genommen wird.

[2]) Satz von Vahlen. Vgl.: Journal f. d. reine u. angew. Math. Bd. 115. 1895: „Über Näherungswerte und Kettenbrüche." S. 227.

oder, in ähnlicher Weise wie (48″) geordnet:

$$K_P''(n)=\frac{1}{2}\sum_{\delta_P}\delta\,\mu(\delta)\sum_{y\leqq n}^{(P)} y\,\mu(y)\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)}\left[\frac{z}{\delta}\right]\left[\frac{z}{\delta}+1\right]. \qquad (49'')$$

Als Gesamtzahl der in der Fragestellung bezeichneten Kettenbrüche folgt nach (48″), (49″):

$$K_P(n)=-1+\sum_{\delta_P}\mu(\delta)\sum_{y\leqq n}^{(P)} y\,\mu(y)\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)}\left[\frac{z}{\delta}\right]\left(z+\frac{\delta}{2}\left[\frac{z}{\delta}+1\right]\right), \qquad (50)$$

was nun asymptotisch auszuwerten ist.

Zunächst hat man, $\left[\frac{z}{\delta}\right]=\frac{z}{\delta}-\varepsilon$ gesetzt $(0\leqq\varepsilon<1)$:

$$\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)}\left[\frac{z}{\delta}\right]\left(z+\frac{\delta}{2}\left[\frac{z}{\delta}+1\right]\right)=\frac{3}{2\delta}\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)} z^2+\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)}\left(\frac{1-4\varepsilon}{2}z+\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)\delta}{2}\right). \qquad (51)$$

Hierin schätzt sich die letzte Summe zu

$$\gamma_1\sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{y}\right]} z+\gamma_2\sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{y}\right]} 1=\gamma_3\left(\frac{n}{y}\right)^2+\gamma_4\frac{n}{y}+\gamma_5=\gamma_6\left(\frac{n}{y}\right)^2 \qquad (52)$$

$$\left(|\gamma_6|\leqq|\gamma_3|+|\gamma_4|+|\gamma_5|\right)$$

ab; dabei soll $\gamma_i\,(i=1,2,\ldots)$ hier und im folgenden jeweils eine Größe bedeuten, die im allgemeinen zugleich mit den übrigen in Betracht kommenden Größen (hier n, y) variiert, doch für die sämtlichen zulässigen Werte dieser letzteren zwischen angebbaren endlichen, von den letzteren unabhängigen Schranken verbleibt. Für die vorletzte Summe in (51) gilt nach (3):

$$\sum_{z\leqq\frac{n}{y}}^{(P)} z^2=\sum_{\delta_P}\delta^2\,\mu(\delta)\sum_{z=1}^{\left[\frac{n}{\delta y}\right]} z^2$$

$$=\frac{1}{6}\sum_{\delta_P}\delta^2\,\mu(\delta)\left[\frac{n}{\delta y}\right]\left[\frac{n}{\delta y}+1\right]\left[\frac{2n}{\delta y}+1\right],$$

was leicht zu

$$\sum_{z \leqq \frac{n}{y}}^{(P)} z^2 = \frac{n^3}{3y^3} \sum_{\delta_P} \frac{\mu(\delta)}{\delta} + \gamma_7 \left(\frac{n}{y}\right)^2 + \gamma_8 \frac{n}{y} + \gamma_9$$

$$= \frac{\varphi(P)\, n^3}{3Py^3} + \gamma_{10} \left(\frac{n}{y}\right)^2 \quad \left(|\gamma_{10}| \leqq |\gamma_7| + |\gamma_8| + |\gamma_9|\right) \tag{53}$$

abgeschätzt wird. (52) und (53) ergeben, in (51) eingesetzt:

$$\sum_{z \leqq \frac{n}{y}}^{(P)} \left[\frac{z}{\delta}\right]\left(z + \frac{\delta}{2}\left[\frac{z}{\delta} + 1\right]\right) = \frac{\varphi(P)\, n^3}{2P\delta y^3} + \gamma_{11} \left(\frac{n}{y}\right)^2.$$

Danach ergibt sich aus (50):

$$K_P(n) = -1 + \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \left(\frac{\varphi(P)}{2P\delta} n^3 \sum_{y \leqq n}^{(P)} \frac{\mu(y)}{y^2} + n^2 \sum_{y \leqq n}^{(P)} \frac{\gamma_{11}\, \mu(y)}{y} \right)$$

$$= -1 + \frac{\varphi^2(P)}{2P^2} n^3 \sum_{y \leqq n}^{(P)} \frac{\mu(y)}{y^2} + n^2 \sum_{\delta_P} \sum_{y \leqq n}^{(P)} \frac{\gamma_{11}\, \mu(\delta)\, \mu(y)}{y}$$

oder mit Rücksicht auf (40), (41) und auf

$$\sum_{\delta_P} \sum_{y \leqq n}^{(P)} \frac{\gamma_{11}\, \mu(\delta)\, \mu(y)}{y} = \gamma_{12} \sum_{y=1}^{[n]} \frac{1}{y} = O(\lg n)$$

endgültig:

$$K_P(n) = \frac{3}{\pi^2} n^3 \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O(n^2 \lg n), \tag{54}$$

ein, wie ersichtlich, mit (47) ganz analog gebauter asymptotischer Ausdruck.

Speziell ist danach die Anzahl der verschiedenen regulären Kettenbrüche, die überhaupt rationale positive Brüche mit Zählern und Nennern $\leqq n$ darstellen, $= \frac{3}{\pi^2} n^3 + O(n^2 \lg n)$.

Der Vergleich von (54) und (47) lehrt folgendes:

Von den verschiedenen regulären Kettenbruchentwicklungen, die für die positiven Brüche in (P) mit Zählern und Nennern $\leqq n$ möglich sind, kommen auf einen einzelnen derartigen Bruch im Mittel $\frac{n}{2} + O(\lg n)$ Entwicklungen.

Die gesonderte Behandlung der Anzahlen $K'_P(n)$, $K''_P(n)$ mit Hilfe der Formeln (48''), (49'') in der oben auf $K_P(n)$ angewandten Weise würde, wie leicht nachzurechnen, nachstehendes ergeben:

$$K'_P(n) = \frac{2}{\pi^2} n^3 \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O(n^2 \lg n), \tag{55'}$$

$$K''_P(n) = \frac{1}{\pi^2} n^3 \prod_{p \mid P} \frac{p-1}{p+1} + O(n^2 \lg n). \tag{55''}$$

Hieraus folgt:

Von den regulären Kettenbrüchen, die positive Brüche in (P) mit Zähler und Nenner $\leqq n$ darstellen, stellen asymptotisch zwei Drittel echte Brüche dar, ein Drittel unechte.

Für $(P) = (1)$ ist übrigens die Beziehung der Anzahlen (55'), (55'') zueinander ganz genau festzustellen, indem diesfalls [vgl. (48), (49)]

$$K'(n) = \sum_{x=1}^{[n]} x\varphi(x) - 1,$$

$$K''(n) = \sum_{x=1}^{[n]} \sum_{y \leqq x}^{(x)} y = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{[n]} x\varphi(x) + \frac{1}{2}, \text{[1]}$$

also

$$K'(n) = 2(K''(n) - 1)$$

wird.

Eine für die asymptotische Berechnung von $K_P(n)$ geeignete arithmetische Formel für $K_P(n)$ kann man auch — kürzer, als dies oben bei (50) der Fall war — durch die folgende einfache Überlegung erhalten: Zu jeder Zahl $x \leqq n$ in (P) als Nenner gehören im Ganzen $[n]_{Px}$ verschiedene positive (echte und unechte) Brüche in (P), nämlich ebenso viele, als in (P) zu x teilerfremde Zahlen $\leqq n$ (die als Zähler fungieren sollen) vorhanden sind. Folglich ist nach dem Vahlenschen Satze

$$K_P(n) = \sum_{x \leqq n}^{(P)} x[n]_{Px}. \tag{56}$$

[1]) Nach einem elementaren Satze über die Summe der zu x ($\geqq 1$) teilerfremden Zahlen $\leqq x$.

Diese Formel kann mit Hilfe der Identität (3) unschwer zu

$$K_P(n) = \sum_{\delta_P} \mu(\delta) \sum_{y \leqq n}^{(P)} y\,\mu(y) \left[\frac{n}{\delta y}\right] \sum_{z \leqq \frac{n}{y}}^{(P)} z \tag{56'}$$

umgeformt werden und die Abschätzung der letzteren dreifachen Summe verläuft dann ganz analog zu derjenigen von (50).

Die beiden für $K_P(n)$ erhaltenen, äußerlich verschiedenen arithmetischen Ausdrücke, u. zw. einerseits (48) plus (49), anderseits (56), führen im Spezialfalle $P=1$ zur bemerkenswerten Relation

$$\frac{3}{2} \sum_{x=1}^{[n]} x\,\varphi(x) - \frac{1}{2} = \sum_{x=1}^{[n]} x\,[n]_x$$

oder

$$\sum_{x=1}^{[n]} x(3\,[x]_x - 2\,[n]_x) = 1.$$