Querschnittstheorie.

Von

E. B. Christoffel †,

(aus dessen Nachlass mitgetheilt von A. Krazer in Strassburg i. E.*)).

Die Lehre von den Schnitten durch die Fläche T ist veranlasst durch die Frage, unter welchen Bedingungen jeder ringförmige Integrationsweg ein Stück dieser Fläche einschliesst, also der ihm entlang durch die Fläche geführte Schnitt ein Stück der Fläche ablöst. Sie erfordert vor allem Andern eine genaue Classification der Schnitte durch eine solche Fläche.

I.

Der Ringschnitt, der Punktschnitt, die Querschnitte I. und II. Art; Randcurven der Fläche.

Die Fläche T ist eine zusammenhängende, d. h. man kann in ihr von jeder Stelle zu jeder andern gelangen. In ihrem ursprünglichen Zustande fehlt ihr jede Begrenzung; eine solche erlangt sie erst durch Schnitte, welche in ihr ausgeführt werden, und bei diesen und ihrer Classification handelt es sich wesentlich um die Anzahl und die Beschaffenheit der Randcurven, welche sie der Fläche ertheilen.

---

*) Christoffel hatte wiederholt die Absicht gehabt in einer Reihe von Abhandlungen einzelne Fragen aus der Theorie der Abel'schen Functionen zu behandeln. Kurz vor seinem Tode kam er nochmals auf dieses Vorhaben zurück und übergab in diesem Sinne die Abhandlung: „Ueber die Vollwerthigkeit und Stetigkeit analytischer Ausdrücke" der Redaction dieser Annalen. Nach seinem Tode fand sich eine zweite Abhandlung: „Vollständige Theorie der ϑ-Function" mit dem Vermerke: druckreif vor und wurde im 54. Bande veröffentlicht. Bei der Durchsicht des handschriftlichen Nachlasses habe ich nun vor Kurzem eine dritte dieser Abhandlungen, ebenfalls vollständig abgeschlossen vorgefunden, und es kommt dieselbe im Nachstehenden unverändert zum Abdruck, nachdem ich nur zur bequemeren Orientirung des Lesers die einzelnen Abschnitte mit Ueberschriften versehen habe.

Krazer.

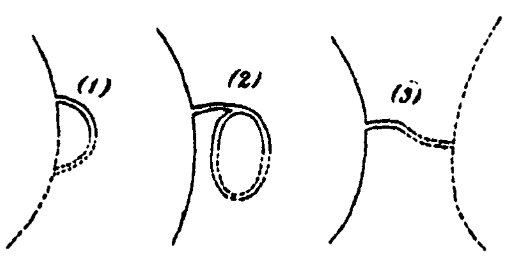
Ein Schnitt durch die ursprüngliche Fläche T kann nur in der Fläche selbst ansetzen; wird er so weit fortgesetzt, bis er zu einer frühern Stelle zurückkehrt, so heisst er *Ringschnitt*; solange das nicht eingetreten ist, *Punktschnitt*.

Durch einen Ringschnitt erhält die Fläche zwei Randcurven, durch einen Punktschnitt nur eine, aber das sind in allen Fällen *geschlossene Curven*, d. h. man darf einer solchen auf der Fläche nur nachgehen um sicher zu sein, dass man zu jeder beliebigen Stelle derselben und nöthigenfalls zur Ausgangsstelle zurückgelangen wird.

Hat nun die Fläche T durch Punkt- und Ringschnitte Ränder erhalten, welche, wie wir nochmals betonen, lauter geschlossene Curven sind, so wird eine dritte und letzte Kategorie von charakteristischen Schnitten möglich, die *Querschnitte* der verschiedenen Arten.

Jeder Querschnitt setzt in einem Rande an und endigt in einem solchen.

Zu einem Querschnitte gehört also, dass er nicht bloss in einem Rande beginnt, sondern auch, dass er in einem solchen endigt. Ein Schnitt, der bloss einen Rand öffnet, aber in der Fläche endigt, ohne zum zweiten Male einen Rand zu treffen, führt keinen besondern Namen, da er weiter nichts leistet, als den Rand zu erweitern, von dem er ausgegangen ist.



Endigt ein Querschnitt im nämlichen Rande, von dem er ausgeht (1) oder in sich selbst (2), so heisst er *Querschnitt I. Art*, endigt er in einer andern Randcurve (3), so heisst er *Querschnitt II. Art*.

Die Ränder eines fertigen Querschnitts I. Art liefern mit dem Rande, von welchem der Querschnitt ausgeht, zusammen *zwei Randcurven* der Fläche, *beides geschlossene Curven;* die Ränder eines Querschnittes II. Art vereinigen sich mit den durch den Querschnitt verbundenen Randcurven zu *einer einzigen, abermals geschlossenen Randcurve*.

Es springt in die Augen, dass jedes beliebige Schnittsystem in der Fläche T sich aus Schnitten der hier aufgezählten Arten zusammensetzen lässt.

II.

Die Flächen I. und II. Art.

Dies vorausgeschickt, möge eine zusammenhängende Fläche als eine Fläche I. Art bezeichnet werden, wenn sie durch jeden Ringschnitt zerstückelt wird; andernfalls heisse sie Fläche II. Art.

Die Frage, welche hier zu beantworten ist, betrifft dann die Kriterien, aus denen sich erkennen lässt, ob eine vorgelegte Fläche von der I. oder II. Art ist; es werden sich dabei von selbst die Hülfsmittel ergeben, um eine Fläche T der II. Art in eine den Bedürfnissen der Integralrechnung entsprechende Fläche T' der I. Art zu verwandeln.

Die vorstehende Classification der Flächen und der Schnitte durch dieselben führt nun zu folgenden Sätzen:

a) *Durch einen Querschnitt II. Art wird eine zusammenhängende Fläche nie zerstückelt;*

denn Verbindungen in der Fläche, welche durch ihn zerstört sind, können durch Einschaltung von Umwegen wieder hergestellt werden, indem man nämlich, an einem Querschnittrande angelangt, zunächst diesem und dann einer Randcurve bis zum andern Querschnittrande folgt, um von dort den unterbrochenen Weg weiter fortzusetzen.

b) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Ringschnitt oder einen Querschnitt I. Art überhaupt zerstückelt, so zerfällt sie in zwei Stücke;*

denn die Anzahl dieser Stücke kann nicht grösser sein als die Anzahl der Ränder, an denen entlang sie von einander abgelöst sind.

c) *Wird eine Fläche I. Art durch irgend welche Schnitte in Stücke zerlegt, so sind das lauter Flächen I. Art;*

denn wenn eines dieser Stücke durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt würde, so würde dieser auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerfällen, also wäre dies eine Fläche II. Art.

d) *Eine Fläche I. Art wird nicht bloss durch jeden Ringschnitt, sondern auch durch jeden Querschnitt I. Art in Stücke zerlegt;*

denn wäre das nicht der Fall, so hätte man, nach Ausführung des Querschnittes, eine zusammenhängende Fläche mit zwei, vom Querschnitt herrührenden Randcurven; von diesem Querschnittrande gäbe es also durch die Fläche einen Weg l zum gegenüberliegenden Punkte des andern Querschnittrandes, also l entlang einen Querschnitt II. Art L, welcher die Fläche auch nicht zerstückelt, also würde L für sich allein die ursprüngliche Fläche um so weniger zerstückeln; sie wäre also eine Fläche, welche durch diesen Ringschnitt L nicht zerstückelt wird, also keine Fläche I. Art. Aus b), c), d) zusammengenommen folgt

e) *Jeder Ringschnitt und jeder Querschnitt I. Art zerfällt eine Fläche I. Art in zwei Stücke, und beides sind wieder Flächen I. Art.*

III.

Fortsetzung.

Die Umkehrung des vorstehenden Satzes e) führt nun zu einer Umformung des Kriteriums für Flächen I. und II. Art.

f) *Eine zusammenhängende Fläche τ werde durch einen Ringschnitt Q oder einen Querschnitt I. Art Q in zwei Stücke, E und τ_1 zerlegt. Sind dies Flächen I. Art, so ist τ selbst ebenfalls Fläche I. Art.*

Seien also E und τ_1 von der I. Art; es ist zu beweisen, dass τ nicht von der II. Art sein kann.

1) Jeder Ringschnitt durch E oder τ_1 allein schneidet aus dieser Fläche, also aus τ selbst ein Stück heraus; es ist also nur zu beweisen, dass τ auch durch jeden Ringschnitt zerfällt wird, welcher über Q hinweg alternirend durch E und τ_1 verläuft.

2) Sei R ein solcher Ringschnitt. Folgt man ihm, etwa von E aus, so kommt eine Stelle, wo er über Q hinweg in τ_1 eintritt, und auf jede solche Eintrittstelle folgt eine, wo er aus τ_1 wieder austritt. Ist, in dieser Weise gezählt,

$$\alpha$$

die Anzahl der Ein- also auch der Austrittsstellen, so wird R durch Q in 2α Abtheilungen zerlegt, von denen α durch E und ebensoviel durch τ_1 führen. Jeder von ihnen beginnt auf einem Rande von Q und endigt auf demselben Rande von Q, weil er sonst eine Verbindung zwischen E und τ_1 herstellen würde, während diese durch Q von einander abgelöst sind. Wenn zwei von diesen Abtheilungen sich etwa in E kreuzen würden, so ergäben sie zusammen drei Querschnitte für E. Aber das ist ausgeschlossen, da alle diese Abtheilungen Stücke eines einzigen Ringweges R sind. Also wird R durch Q in α Querschnitte I. Art von E, und ebensoviel Querschnitte I. Art von τ_1 zerlegt.

Bringt man diese für E in irgend eine Reihenfolge, so zerlegt der erste E in zwei Stücke I. Art (e); der zweite führt durch eines dieser Stücke und zerlegt dieses in zwei Stücke erster Art. So setzt sich das fort, und es folgt, dass E, mithin auch τ_1, in $\alpha + 1$ Stücke zerfällt.

Bei den vorliegenden Voraussetzungen wird also τ durch Q und R zusammen in $2\alpha + 2$ Stücke zerlegt. Dass dies Stücke I. Art sind, kommt nicht mehr in Betracht.

3) Dieselben Stücke erhält man auch, wenn man zuerst den Ringschnitt R und dann erst Q ausführt.

Sei τ' die Fläche, in welche τ durch den Ringschnitt R verwandelt wird und

$$x$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ' besteht also entweder $x = 1$ oder (nach b)) $x = 2$. Ist $x = 1$, so ist τ' eine zusammenhängende Fläche, τ Fläche II. Art; der zu beweisende Satz behauptet, dass $x = 2$ ist.

In der ursprünglichen Fläche τ war Q ein Ringschnitt oder ein Querschnitt I. Art; in τ' wird Q von R 2α-mal gekreuzt. Ist Q ein Ringschnitt, so zerfällt er in 2α Querschnitte von τ'; ist Q ein Querschnitt I. Art, so ist $2\alpha + 1$ die Anzahl der Querschnitte von τ', in welche Q zerfällt. Um beide Fälle zu umfassen, bezeichnen wir diese Anzahl durch

$$2\alpha + q,$$

so dass $q = 1$, wenn Q ein Querschnitt, und $q = 0$, wenn Q ein Ringschnitt von τ ist.

Wir zählen die Anzahl der Stücke, in welche τ' jetzt zerfällt, von Neuem ab. Dafür ist es nothwendig zu bemerken, dass im ersten Falle sich unter den Querschnitten, in welche Q zerfällt, mindestens Ein Querschnitt II. Art befindet, nämlich die Abtheilung, welche von einem Rande der ursprünglichen Fläche τ bis zu einem Rande von R reicht. Sei

$$\lambda + q$$

die wirkliche Anzahl aller Querschnitte II. Art unter jenen, so folgt, mag Q Quer- oder Ringschnitt sein,

$$\lambda \gtreqless 0,$$

und es bleiben $2\alpha - \lambda$ Querschnitte I. Art von τ' übrig. Aber da über die Beschaffenheit der Fläche τ' nichts feststeht, so ist der Fall in Aussicht zu nehmen, dass auch einzelne von diesen keine Zerstückelung von τ' nach sich ziehen. Sei μ ihre Anzahl, also auch

$$\mu \gtreqless 0,$$

so bleiben $2\alpha - \lambda - \mu$ wirklich zerstückelnde Querschnitte I. Art übrig, und diese machen aus den x Stücken, aus denen τ' besteht, deren

$$x + 2\alpha - \lambda - \mu.$$

Aber das sind die nämlichen $2\alpha + 2$ Stücke, die wir in Nr. 2 fanden, also ist $2\alpha + 2 = x + 2\alpha - \lambda - \mu$, d. i. $\lambda + \mu = x - 2$. Dazu kommt $\lambda + \mu \gtreqless 0$, das giebt $x \gtreqless 2$. Aber wir wissen, dass x entweder $= 1$ oder $= 2$ ist, also folgt $x = 2$, $\lambda + \mu = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was wir brauchen, so folgt, dass τ durch jeden Ringschnitt R zerstückelt wird, auch wenn er nicht bloss durch E oder τ_1 allein führt, also ist, wie behauptet, τ eine Fläche I. Art.

Nehmen wir hierzu noch den selbstverständlichen Satz dass

g) *wenn zwar E von der I., aber τ_1 von der II. Art ist, nothwendig τ selbst auch von der letztern Art sein wird,*

so ergiebt sich durch Vereinigung beider der

Lehrsatz A. *Von einer zusammenhängenden Fläche τ werde durch einen Ringschnitt oder einen einzigen Querschnitt ein Stück E abgelöst, und sei τ_1 die Fläche, welche dann noch übrig bleibt. Ist E eine Fläche I. Art, so sind stets τ und τ_1 Flächen derselben Art.*

Um diesen Satz fruchtbar zu machen, bedarf es des Nachweises der charakteristischen Flächenstücke I. Art E; zuvor wollen wir aber die verlangte Umformung der Kriterien für Flächen I. Art zu Ende bringen.

Sei τ eine zusammenhängende Fläche, Q ein Querschnitt II. Art in τ; er verwandle τ in eine Fläche I. Art, welche τ' heissen möge. Es folgt 1) Jeder Ringschnitt von τ' schneidet ein Stück aus τ', also das nämliche Stück aus τ heraus, also wird τ durch jeden Ringschnitt zerfällt, welcher Q nicht überschreitet. 2) Sei R ein Ringschnitt von τ, welcher, wenn man Q ausführt, von diesem geschnitten wird. Durch diesen Ringschnitt wird τ in eine Fläche τ'' verwandelt, welche entweder noch zusammenhängt, oder aus zwei Stücken besteht. Sei

$$y$$

die Anzahl der Stücke, aus denen τ'' besteht, und

$$\alpha$$

die Anzahl der Punkte, in denen Q und R einander kreuzen. Wir zählen nun auf zwei Arten die Anzahl der Stücke ab, in welche τ durch Q und R zerlegt wird.

1) Das sind zunächst die Stücke, in welche τ' durch R zerfällt. Es ist aber nach Voraussetzung τ' eine Fläche I. Art, die beiden Ränder von Q, als Querschnitt II. Art, haben sich mit den durch Q verbundenen Rändern von τ zu einer einzigen Randcurve ϱ von τ' vereinigt. Der ursprüngliche Ringschnitt R wird durch Q in α Abtheilungen zerlegt, die einander nicht kreuzen, jede beginnt und endigt in einem Rande von Q, also auf derselben Randcurve ϱ von τ': sie sind hiernach sämmtlich Querschnitte I. Art von τ' und zerfällen demnach τ' in $\alpha + 1$ Stücke.

Durch R und Q zusammen wird also τ in $\alpha + 1$ Stücke zerlegt.

2) Das aber sind auch die Stücke, in welche τ'' durch Q zerfällt. Aber in dieser Fläche löst Q sich in $\alpha + 1$ Querschnitte auf, darunter mindestens zwei von der II. Art, nämlich der erste und der letzte, da die Randcurve von τ, in welcher einer von diesen beginnt, verschieden ist von dem Rande von R, in welchem er sein Ende erreicht. Sei

$$\lambda + 2$$

unter jenen die genaue Anzahl von Querschnitten II. Art, und unter den noch übrigen $\alpha - \lambda - 1$ Querschnitten I. Art

$$\mu$$

die Anzahl derjenigen, welche keine Zerstückelung nach sich ziehen; es bleiben $\alpha - \lambda - \mu - 1$ zerstückelnde Querschnitte übrig, und diese machen aus den y Stücken, aus denen τ'' besteht, deren $y + \alpha - \lambda - \mu - 1$. Das sind also die $\alpha + 1$ vorigen; es folgt $y + \alpha - \lambda - \mu - 1 = \alpha + 1$, also $\lambda + \mu = y - 2$. Wiederum ist $\lambda \gtreqless 0$, $\mu \gtreqless 0$ also $\lambda + \mu \gtreqless 0$, $y \gtreqless 2$, während y nur $= 1$ oder $= 2$ sein kann. Es folgt $y = 2$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$.

Beschränken wir uns auf das, was für unsere Zwecke ausreicht, so haben wir den Satz:

h) *Wird eine zusammenhängende Fläche durch einen Querschnitt II. Art in eine Fläche I. Art verwandelt, so ist sie selbst eine Fläche dieser Art.*

Die Umkehrung dieses Satzes liegt auf der Hand:

i) *Wenn eine Fläche I. Art überhaupt einen Querschnitt II. Art gestattet, so wird sie durch denselben in eine neue Fläche I. Art verwandelt;* denn ein Ringschnitt, welcher letztere nicht zerstückelt, würde auch die ursprüngliche Fläche nicht in Stücke zerlegen.

Beide Sätze zusammengenommen zeigen weiter, dass eine Fläche II. Art durch einen Querschnitt II. Art niemals in eine Fläche I. Art, also, da sie durch ihn nicht zerstückelt wird, stets in eine neue Fläche II. Art verwandelt wird.

Folglich wird durch einen Querschnitt II. Art der Gattungscharakter einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert. Und da dies bestehen bleibt, wenn zu jenem ein Querschnitt II. Art nach dem andern kommt, so haben wir den

Lehrsatz B. *Durch Querschnitte II. Art wird die Art einer zusammenhängenden Fläche niemals geändert.*

Dazu kommt nun noch eine Schlussbemerkung.

Riemann nennt *einfachzusammenhängend* jede zusammenhängende Fläche, welche durch jeden Querschnitt zerstückelt wird. Eine solche darf also keinen Querschnitt II. Art gestatten, also nicht mehr als eine Randcurve haben. Sie darf auch nicht unter den Flächen II. Art gesucht werden, denn eine (durch eine Randcurve) begrenzte Fläche, welche durch einen Ringschnitt R nicht zerstückelt wird, wird auch nicht zerfällt durch den Querschnitt I. Art, welcher sich zusammensetzt aus R und einem vom Rande nach R führenden Querschnitt II. Art. Dazu gehört der Satz

k) *Die einfach zusammenhängenden Flächen sind nichts anderes als diejenigen Flächen I. Art, welche nur eine einzige Randcurve haben.*

Dass sie nur unter den Flächen dieser Art zu suchen sind, wurde soeben bewiesen; dass auch umgekehrt jede Fläche I. Art, die nur eine Randcurve hat, im Sinne Riemann's einfach zusammenhängend ist, folgt daraus, dass nach d) eine Fläche I. Art durch jeden Querschnitt I. Art zerstückelt wird und, wenn sie nur eine Randcurve hat, keinen Querschnitt II. Art, sondern nur Querschnitte I. Art gestattet, also durch jeden Querschnitt überhaupt zerlegt wird.

IV.

Die Stücke E und W erster Art einer Fläche T.

Um von diesen Lehrsätzen Anwendung machen zu können, ist nur noch nöthig, die charakteristischen Stücke einer Fläche T nachzuweisen, welche zu den Flächen I. Art gehören und deren successive Ablösung, wenn sie für jedes Stück durch einen einzigen Ring- oder einen einzigen Querschnitt erreicht wird, die Art der Fläche ungeändert lässt.

Das sind nur zwei verschiedene Gattungen von Flächenstücken. Die Stücke der ersten Gattung sind solche, die sich auch aus einer Ebene herausschneiden lassen, also ebene Stücke von T; wo eine Bezeichnung wünschenswerth ist, mögen sie als

Stücke E von T

bezeichnet werden. Dass ein solches durch jeden Ringschnitt zerfällt, versteht sich von selbst, und liegt der complexen Integration in der Ebene zu Grunde.

Ein Stück der andern Gattung fällt aus T heraus, wenn ein Ringschnitt in einem vollständigen Umlauf um einen Verzweigungspunkt α, aber nicht um mehr als einen, ausgeführt wird. Ein solches gewundenes Stück von T soll als ein

Stück W oder $W(\alpha)$ von T

bezeichnet werden. Dass es eine Fläche I. Art ist, beweist man am einfachsten, indem man durch dasselbe vom Verzweigungspunkte α aus eine genügende Anzahl radialer Schnitte nach seinem Umfange führt. Die beiden ersten Schnitte zusammen und alsdann jeder folgende für sich allein sind lauter Querschnitte I. Art; jeder von ihnen löst von W ein Stück E ab, also ein Stück I. Art nach dem andern; was übrig bleibt, ist selbst ein Stück E und von derselben Art wie W, mithin W von der I. Art.

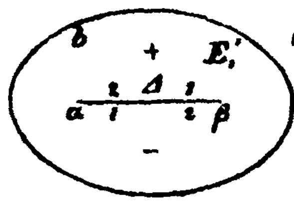
Mit diesen ebenen Stücken E und den gewundenen Stücken W sind aber alle charakteristischen Stücke I. Art von T erschöpft, indem T selbst und jeder Theil von T durch eine hinreichende Anzahl von Ring- und Querschnitten in solche Stücke E und W aufgelöst werden kann, und die Frage nach dem Gattungscharakter von T nur davon abhängt, wieviel solcher Schnitte zur Ablösung eines solchen Stückes erforderlich sind.

V.

Die zweiblättrige Fläche T mit einer einzigen Doppellinie.

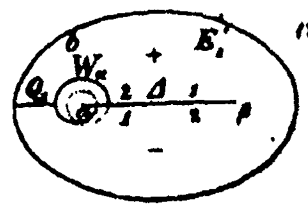
Wir beginnen mit der einfachsten Riemann'schen Fläche, der zweiblättrigen Fläche mit einer einzigen Doppellinie. Es ist nach dem Vorangehenden sehr leicht zu beweisen, dass sie von der I. Art ist: aber der Beweis selbst und einige Nebenumstände, die sich dabei ergeben, liefern uns die Hülfsmittel, mit denen wir auch in allen folgenden Fällen ausreichen. Eine gewisse Ausführlichkeit an dieser Stelle wird dem Folgenden zu Gute kommen.

Seien also zwei Ebenen E_1 und E_2 in einer einzigen Doppellinie Δ aneinander geheftet; die Endpunkte α, β von Δ sind dann die Verzweigungspunkte der so entstandenen Fläche T.



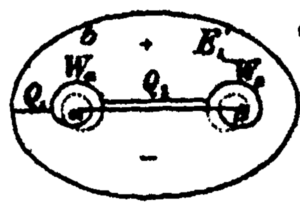
(1)

1) Ein Ringschnitt b zerlegt die Ebene E_1 in zwei Theile, einen äussern und einen innern E_1'; führt b in der Fläche T um Δ herum, so fällt jener ab, dieser bleibt an E_2 haften, und bildet mit E_2 zusammen eine Fläche gleicher Art wie T.



(2)

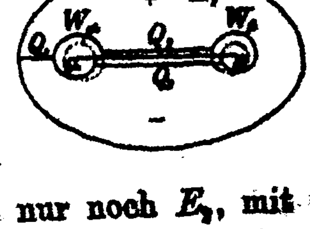
2) In dieser Fläche führen wir von b aus, also in E_1' beginnend, einen Querschnitt I. Art Q_1 so aus, dass er zuletzt um α kreist, bis er sich schliesst. Er schneidet aus der Fläche ein Stück W_α heraus, was von der Fläche übrig ist, ist von der frühern Art.



(3)

3) In dieser Fläche führen wir einen zweiten Querschnitt I. Art Q_2 aus. Er beginnt in E_1' auf dem Rande von W_α, folgt dann dem Rande von $\overset{+}{E}_1{}'$ und endigt mit einem vollständigen Umlauf um β. Er schneidet aus der vorigen Fläche ein Stück W_β heraus, lässt also die Art der Fläche ungeändert.

In dieser Fläche ist $\overset{+}{E}_1{}'$ völlig abgelöst von $\overset{-}{E}_2$ aber es haftet noch $\overset{-}{E}_1{}'$ an $\overset{+}{E}_2{}'$ von W_α bis W_β.



(4)

4) Nun führe man noch einen Querschnitt I. Art Q_3 aus, er folge dem Rande von $\overset{-}{E}_1{}'$ und führe von W_α bis W_β. Er löst das, was von E_1' nach Ausscheidung von W_α und W_β noch übrig geblieben ist, von E_2 völlig ab: von T ist nur noch E_2, mit einer sofort zu erwähnenden Modification übrig, das ist eine Fläche I. Art, also ist auch T von der I. Art.

Was hier vorgegangen ist, wird sich im Folgenden stets wiederholen. Wir werden dann nöthigenfalls b als einen zur Doppellinie Δ gehörigen Ringschnitt und Q_1, Q_2, Q_3 als die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte bezeichnen.

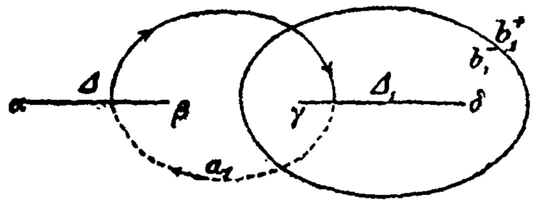
Abgesehen vom äussern Theile des Blattes E_1, bezüglich dessen sich bei den folgenden Aufgaben andere Verhältnisse einstellen werden, leisten die drei zu b, Δ gehörigen Querschnitte folgendes: 1) dass der innere Theil E_1' von E_1 nebst Stücken von E_2 ohne Aenderung der Flächenart abgelöst werden, und 2) in E_2 eine *Lücke* entsteht, indem die zu W_α, W_β gehörigen Stücke von E_2 ausgefallen sind, aber ihre Ränder sind durch die von Q_2 und Q_3 herrührenden Schnittränder von $\overset{-}{E}_2$ und von $\overset{+}{E}_2$ zu einer einzigen Randcurve vereinigt.

Das sind die Operationen und die dabei aufzufassenden Umstände, auf welche wir im Folgenden Bezug nehmen werden.

VI.

Die Fläche T der elliptischen Functionen.

Sei T wieder eine zweiblättrige Fläche aber mit zwei Doppellinien Δ und Δ_1 also vier Verzweigungspunkten $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$; Δ reiche von α bis β, Δ_1 von γ bis δ.



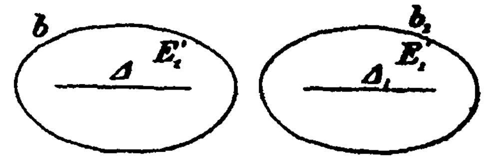
(τ)

Diese Fläche ist nicht von der I. Art. Man führe über das erste Blatt von T, welches wieder E_1 heisen möge, einen Ringschnitt b_1 um Δ_1, so entsteht eine Fläche τ, von welcher wir beweisen werden, dass sie eine zusammenhängende ist. Daraus folgt dann, dass T selbst von der II. Art ist.

Seien $\overset{-}{b}_1$, $\overset{+}{b}_1$ die beiden Ränder von b_1, und zwar $\overset{-}{b}_1$ derjenige, welcher Δ_1 zugewandt ist. Alle Wege durch T, welche zu $\overset{-}{b}_1$ führen und von $\overset{+}{b}_1$ aus weiter fortzusetzen sind, sind unterbrochen; aber man kann ihre Verbindung durch einen Umweg a_1 wieder herstellen, der von $\overset{-}{b}_1$ durch Δ_1, dann über E_2 nach Δ und durch die Doppellinie hindurch wieder über E_1 nach $\overset{+}{b}_1$ führt. Man kann also in der Fläche τ noch von jeder Stelle aus jede beliebige Stelle von T erreichen, τ ist also eine zusammenhängende Fläche, T selbst eine Fläche II. Art.

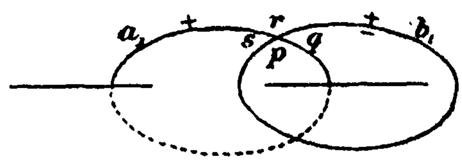
Aber τ ist eine Fläche I. Art. Zum Beweise führe man über E_1 zunächst den zu Δ gehörigen Ringschnitt b aus; alles was vom Blatte E_1

ausserhalb b und b_1 liegt, fällt ab; was übrig ist, ist von derselben Art wie τ und besteht aus E_2 und den von b bis Δ und von b_1 bis Δ_1 reichenden innern Theilen E_1' von E_1. Diese werden durch die drei zu b, Δ und die drei zu b_1, Δ_1 gehörigen Querschnitte $Q_1\, Q_2\, Q_3$ abgelöst, wieder ohne Aenderung des Flächencharakters. Was übrig bleibt, ist E_2 mit den beiden von Δ, Δ_1 herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art; also ist auch τ eine Fläche I. Art, wie behauptet wurde.



Aber diese Fläche I. Art τ hat zwei Randcurven, $\overset{-}{b}_1$ und $\overset{+}{b}_2$, sie gestattet also einen Querschnitt II. Art, ohne zu zerfallen und ohne ihre Art zu ändern. Dafür nehmen wir den Schnitt längs des vorhin benutzten Umweges a_1; τ verwandelt sich in eine Fläche I. Art T', die vier Schnittränder $p\overset{-}{b}_1q$, $q\overset{+}{a}_1r$, $r\overset{+}{b}_1s$, $s\overset{-}{a}_1p$ vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, also folgt, *dass diese Fläche T' eine einfach zusammenhängende ist.*

(τ)



(T)

Während also τ durch jeden Ringschnitt, aber nicht durch jeden Querschnitt (z. B. a_1) zerstückelt wird, wird T' durch jeden Ring- und jeden Querschnitt in Stücke zerlegt.

Es ist wohl zu beachten, dass diese Untersuchung nur den Zwecken der Integralrechnung dient. Wir treten in diese Frage sofort ein, um so mehr als das, was sich im vorliegenden Falle noch mit genügender Einfachheit herausstellen wird, vollkommen ausreicht, um die nöthige Aufklärung in die folgenden, wenn auch noch so verwickelten Fälle zu bringen. Sei

$$s = \sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)}$$

die Irrationalität, welche der vorliegenden Fläche T eindeutig zugeordnet ist,

$$w = \int \frac{dz}{s}$$

das zugehörige Integral I. G. Auf diesen Fall beschränkt, besteht die der Integralrechnung angehörige Frage, welche den Anlass zur Flächentheorie giebt, darin, ob und unter welchen Umständen zwei verschiedene Wege al_1z, al_2z durch T denselben Werth für w liefern; allgemeiner in der Aufgabe, wenn w_1, w_2 die Werthe sind, welche sich auf diesen Wegen für w ergeben, den Werth von $w_1 - w_2$ zu ermitteln. Das ist der Werth den das $\int dw$ auf dem Wege al_1zl_2a erlangt, als Ringweg heisse er R.

Die Frage lässt sich beantworten, sobald R ein Stück der Fläche abgrenzt. In der Fläche T ist das nicht bei jedem Ringwege R der Fall, wohl in der Fläche τ. Für diese soll also $w_1 - w_2$ ermittelt werden.

Sei demnach R Ringweg durch τ; er zerfällt τ in zwei Stücke E und F, und sei E dasjenige von beiden, welches bei der beabsichtigten Integration in *positiver* Richtung umlaufen wird.

Bezüglich E sind nun folgende drei Fälle herstellbar, also möglich: erstens der Fall, wo E von R allein begrenzt ist; zweitens der Fall, wo R und ein Rand von b_1, etwa $\overset{+}{b}_1$ die Begrenzung von E bilden; und drittens der Fall, wo die Begrenzung von E aus R, $\overset{+}{b}_1$ und $\overset{-}{b}_1$ besteht.

In allen Fällen ist das über die ganze Begrenzung von E in positiver Richtung erstreckte $\int dw = 0$:

$$\int\limits_{(E)} dw = 0.$$

Zu ihm liefert R in allen Fällen den Beitrag $w_1 - w_2$; seien $\overset{+}{B}$, $\overset{-}{B}$ die Beiträge, welche $\overset{+}{b}_1$, $\overset{-}{b}_1$ in den übrigen Fällen liefern, so haben wir in den drei aufeinanderfolgenden Fällen

$$(1)\ w_1 - w_2 = 0, \quad (2)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} = 0, \quad (3)\ w_1 - w_2 + \overset{+}{B} + \overset{-}{B} = 0.$$

Aber da im dritten Falle $\overset{-}{b}_1$ mit denselben Werthen von s wie $\overset{+}{b}_1$ aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, so ist $\overset{-}{B} = -\overset{+}{B}$, und wir erhalten

$$\text{in den Fällen (1) und (3):} \quad w_2 = w_1,$$
$$\text{im zweiten Falle:} \quad w_2 = w_1 + \overset{+}{B}.$$

Die Frage nach der Beziehung zwischen w_2 und w_1 lässt sich also in der Fläche τ beantworten, und insofern löst die Fläche τ die Aufgabe so, wie sie ursprünglich gelautet hat.

Aber die Lösung, welche wir finden, zeigt, dass man die ursprüngliche Aufgabe vervollständigen kann und an ihre Stelle, so weit sie das Integral I. G. betrifft, die Frage stellen kann, ob sich die Fläche τ so modificiren lässt, dass der zweite Fall unmöglich wird, denn dann liefern alle Wege zwischen denselben Endpunkten denselben Werth für w, und *w ist eindeutig geworden.*

Das ist erreicht, wenn man bewirken kann, dass entweder kein Rand von b_1 oder beide zur Begrenzung von E gehören. *Dies leistet der Querschnitt a_1*, da a_1 und b_1 zusammen nur eine einzige Randcurve ergeben.

Ist E Stück von T', so ist entweder R allein seine Begrenzung, oder diese besteht aus R und der genannten vollständigen Randcurve; zum $\int\limits_{(E)} dw$ liefert R den Beitrag $w_1 - w_2$, die Integration über gegenüberliegende Theile der Randcurve hebt sich überall auf; es folgt $w_1 - w_2 = 0$, d. h. $w_2 = w_1$, *also ist w, auf die einfach zusammenhängende Fläche T' beschränkt, eindeutig.*

Und das rührt, wie man deutlich erkennt, einzig und allein davon her, dass die Ränder des Schnittpaares a_1, b_1 eine einzige Randcurve bilden, dass sie also entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehört, und dass die Integrationen über diese Randcurve einander aufheben.

Dies ist also der Grund, wesshalb man schon im vorliegenden Falle die Fläche τ aufgiebt, und zu Zwecken der Integralrechnung sich der einfach zusammenhängenden Fläche T' bedient, obgleich auch τ die ursprüngliche Frage der Integralrechnung löst.

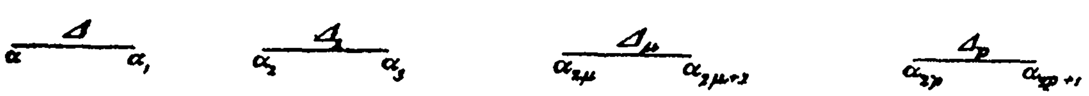
VII.

Die allgemeine Fläche T der ultraelliptischen Functionen.

Der Lehre von den ultraelliptischen Functionen von beliebigem Genus p liegt die Irrationalität

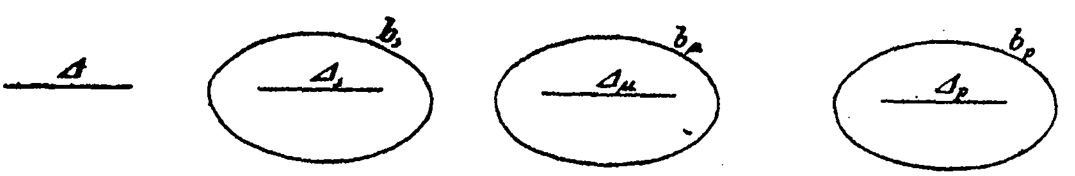
$$s = \sqrt{[(z-\alpha)(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_{2p+1})]}$$

zu Grunde, wo unter dem Wurzelzeichen das Product aus $2p+2$ ungleichen Wurzelfactoren steht, also die $2p+2$ Werthe $\alpha\,\alpha_1\cdots\alpha_{2p+1}$ ungleich sind. Um sie eindeutig zu machen, bedarf es einer zweifachen z-Ebene T, deren Blätter E_1 und E_2 in $p+1$ Doppellinien $\Delta\,\Delta_1\cdots\Delta_p$ zusammenhängen. Man kann diese, ohne an der Zuordnung der Werthe von s zu den Punkten der Fläche etwas zu ändern, so anlegen, dass Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis α_3, $\cdots\Delta_\mu$ von $\alpha_{2\mu}$ bis $\alpha_{2\mu+1}\cdots$ und Δ_p von α_{2p} bis α_{2p+1} reicht.



(T)

Dass diese Fläche von der II. Art ist, ergiebt sich wie im vorigen Falle, indem man durch E_1 um jede der p Doppellinien $\Delta_1\,\Delta_2\cdots\Delta_p$ einen zugehörigen Ringschnitt $b_1\,b_2\cdots b_p$ legt. Dann entsteht eine neue Fläche τ,



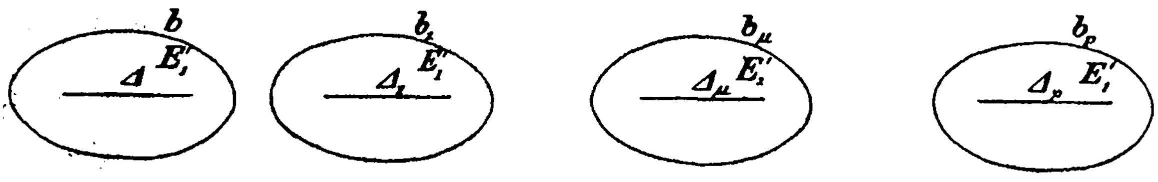
(τ)

von der man wie im vorigen Falle beweist, dass sie eine zusammenhängende ist.

Aber diese Fläche τ ist von der I. Art, d. h. sie wird durch jeden Ringschnitt in Stücke zerlegt.

Der Beweis wird geleistet, indem wir von dieser Fläche τ ein Stück I. Art nach dem andern ablösen, und zwar das erste durch einen Ringschnitt, jedes folgende durch einen Querschnitt I. Art, und zwar so lange, bis als Fläche gleicher Art wie τ ein ebenes Stück übrig bleibt.

Diesen Ringschnitt führen wir durch E_1 um Δ: es ist der Ringschnitt b der folgenden Figur; er löst den ausserhalb $b\, b_1 \cdots b_p$ liegenden Theil

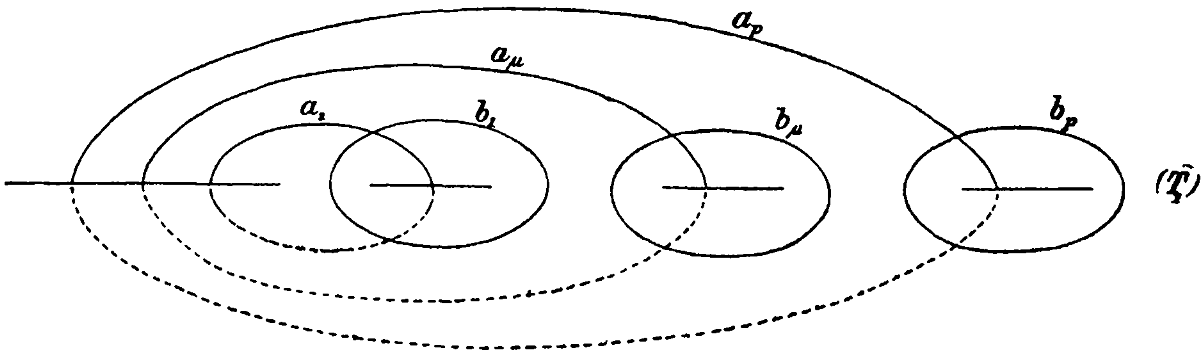


von E_1 ab und lässt übrig eine Fläche, welche aus E_2 und den inneren Theilen E_1' von E_1 besteht. Diese nebst zugehörigen Stücken von E_2 lösen wir ab durch die drei zu b, Δ, zu $b_1, \Delta_1, \cdots$ zu b_p, Δ_p gehörigen Querschnitte $Q_1\, Q_2\, Q_3$; was übrig bleibt, hat den ursprünglichen Flächencharakter, ist aber nichts anderes als E_2 mit den von $\Delta\, \Delta_1 \cdots \Delta_p$ herrührenden Lücken, also eine Fläche I. Art: folglich ist auch τ selbst von dieser Art, wie behauptet.

Sei wieder w ein Integral I. G., um es an dieser Stelle wieder bei diesem einfachsten und wichtigsten Falle zu lassen, und seien w_1, w_2 die Werthe, welche w auf den durch τ führenden Wegen al_1z, al_2z erlangen, mithin $w_1 - w_2$ der Werth, den das $\int dw$ auf dem Ringwege al_1zl_2a, den wir R nennen, erhält. Dieser Weg zerlegt τ in zwei Stücke E und F; sei wieder E dasjenige, an welchem diese Integration in positiver Richtung vorbeiführt. Gehören beide Ränder eines Ringschnittes b_μ zur Begrenzung von E, so hat das, wie beim elliptischen Integral w, auf den Werth von $w_1 - w_2$ gar keinen Einfluss; welchen Werth $w_1 - w_2$ hat, hängt nur davon ab, ob von einigen dieser Ringschnitte nur ein Rand zur Begrenzung von E gehört, und welche das sind. Das richtet sich, wenn der Weg l_1 gegeben ist, ganz und gar nach der Wahl von l_2; in jedem Falle kann man $w_1 - w_2$ ermitteln, aber nicht in jedem Fall findet sich dies $= 0$.

Begnügt man sich nicht mit der Reduction von w_2 auf w_1, so ist der Weg gewiesen um w eindeutig zu machen, so nämlich dass stets $w_1 - w_2 = 0$ wird. Man darf, um das zu erreichen, die Fläche nur so einrichten, dass, *so oft irgend ein Schnittrand zur Begrenzung von E gehört, der gegenüberliegende Rand ihr auch angehört.*

Für b_1 leistet das der Querschnitt II. Art a_1, den wir bei der Fläche der elliptischen Functionen benutzten, und zwar leistet er dies zugleich für sich selbst, weil die Ränder von a_1, b_1 zusammen eine einzige Curve bilden, die hiernach entweder ganz oder gar nicht zur Begrenzung von E gehört. Für b_2 ergiebt das nach dem nämlichen Muster einen Querschnitt II. Art a_2, u. s. w. bis b_p, zu dem sich ein Querschnitt II. Art a_p ergiebt.



So erhält man jetzt p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $\cdots$ $a_p b_p$, und die Fläche T_1, in welche sie T verwandeln, ist eine zusammenhängende Fläche I. Art. Auf sie beschränkt, ist jedes Integral I. G. eindeutig.

Aber diese Fläche hat p Randcurven, ist also keine einfach zusammenhängende. Fordert die Aufgabe eine solche, was bei den Integralen der Classe nie der Fall ist, so hat man nur zu bewirken, dass alle Randcurven sich zu einer einzigen vereinigen. Das erreicht man durch Querschnitte II. Art: einen von der ersten Randcurve zur zweiten; seine Ränder vereinigen sich mit beiden Randcurven zu einer einzigen; von dieser führt man, mit dem gleichen Erfolge, einen zweiten Querschnitt II. Art zur dritten Randcurve von T_1; fährt man so fort, so erreicht man das vorgesteckte Ziel durch $p - 1$ Querschnitte II. Art. Diese kann man, nach dem, was soeben ausgeführt wurde, so anlegen, dass man auf einem Rande des ersten einen Punkt ω annimmt, und von diesem die $p - 2$ folgenden alle ausgehen lässt. Dann lassen die $p - 1$ Querschnitte II. Art sich auch ansehen als ein Bündel von p Schnitten $c_1 c_2 \cdots c_p$, die alle von ω ausgehen und, ohne einander zu schneiden, durch die Fläche T_1 nach den Rändern von $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $\cdots$ $a_p b_p$ führen.

Dann entsteht ein Schnittnetz, welches aus p Querschnittbündeln $c_1 a_1 b_1$, $c_2 a_2 b_2$, $\cdots$ $c_p a_p b_p$ besteht, und die Fläche T in eine einfach zusammenhängende T' verwandelt.

VIII.

Die allgemeine n-blättrige Fläche T.

Diese Principien erledigen auch den Fall, welcher der allgemeinen Lehre von den Abel'schen Functionen zu Grunde liegt, und bei dem die Fläche T aus beliebig viel Blättern besteht, aber der Zusammenhang zwischen denselben nur durch Doppellinien zwischen je zwei Blättern vermittelt wird. Seien also $E_1 E_2 \cdots E_n$ die Blätter von T,

$$n$$

ihre Anzahl und

$$d$$

die Anzahl ihrer Doppellinien. Zunächst ist die Vorfrage zu erledigen, wie man es sich zu denken hat, dass n Ebenen durch d Doppellinien in Zusammenhang gebracht sind.

An E_1 muss wenigstens ein anderes Blatt angeheftet sein, weil E_1 sonst mit T nicht zusammenhinge. Sei E_2 an E_1 angeheftet. Dazu ist eine Doppellinie erforderlich und hinreichend; sei

$1 + a_1$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_1 und E_2,

also $a_1 \gtreqless 0$.

Eine von diesen wähle man als für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2 wesentlich heraus; die a_1 übrigen sind dann entbehrlich 1) für den Zusammenhang zwischen E_1 und E_2, also 2) für den Zusammenhang von T selbst.

Mit diesen $1 + a_1$ Doppellinien bilden E_1 und E_2 eine zusammenhängende Fläche, welche wir E_{12} nennen werden.

An E_{12} muss mindestens ein anderes Blatt E_3 angeheftet sein, sei

$1 + a_2$ die wirkliche Anzahl aller Doppellinien zwischen E_{12} und E_3,

also $a_2 \gtreqless 0$.

Unter diesen wähle man eine, D_2, als für den Zusammenhang zwischen E_{12} und E_3 wesentlich heraus; die a_2 übrigen sind dann für diesen und für den Zusammenhang von T selbst entbehrlich. Mit diesen $1 + a_2$ Doppellinien bilden E_{12} und E_3 zusammen eine Fläche E_{123}.

Mit dieser muss irgend ein Blatt E_4 in $1 + a_3$, $a_3 \gtreqless 0$ Doppellinien zusammenhängen, von denen irgend eine, D_3, wesentlich ist, die a_3 übrigen überzählig sind. Zusammen bilden E_{123} und E_4 eine Fläche E_{1234}.

So setzt sich die Schlussweise fort bis zu einer aus den $n - 1$ Blättern $E_1 E_2 \cdots E_{n-1}$ gehefteten Fläche $E_{12\ldots n-1}$; an sie muss E_n geheftet sein; ist $1 + a_{n-1}$ die Anzahl der Doppellinien, welche das leisten, so ist irgend eine von ihnen, D_{n-1}, für den angegebenen Zweck wesentlich, die a_{n-1} übrigen sind entbehrlich.

So erhalten wir 1) $n - 1$ Doppellinien $D_1 D_2 \cdots D_{n-1}$, welche für den Zusammenhang der n Blätter ausreichen aber auch unentbehrlich sind, und 2) wenn $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = p$, also $p \gtreqless 0$ ist, noch p andere Doppellinien, welche für den Zusammenhang von T entbehrlich sind. Dies giebt als Anzahl aller Doppellinien von T

$$d = n - 1 + p.$$

Ist also eine n-blättrige, zusammenhängende Fläche T nur in Doppellinien geheftet, so ist die Anzahl derselben

$$d \overline{\gtrless} n - 1.$$

Ist insbesondere $d > n - 1$ und

$$d = n - 1 + p,$$

so kann man aus diesen Doppellinien auf mindestens eine Art eine Gruppe von $n - 1$ Doppellinien

$$D_1\, D_2 \cdots D_{n-1}$$

herausheben, welche die n Blätter der Fläche in Zusammenhang bringen, und dann bleiben p Doppellinien

$$\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_p$$

übrig, welche für den Zusammenhang der Blätter entbehrlich sind. Jene werden wir als die wesentlichen, diese als die überzähligen Doppellinien der Fläche T bezeichnen.

Die Untersuchung dieser Fläche T gründet sich auf ihre Beziehung zu der einfacheren Fläche, welche entsteht, wenn zur Heftung von $E_1 E_2 \cdots E_n$ nur die wesentlichen Doppellinien $D_1\, D_2 \cdots D_{n-1}$ verwendet werden; wir wollen dieselbe als eine T_n^0 bezeichnen, so dass, wenn bei der obigen Entstehungsweise von T ebenfalls nur diese Doppellinien, aber nicht die überzähligen benutzt werden, E_1 eine T_1^0, E_{12} eine $T_2^0, \cdots E_{12\ldots n-1}$ eine T_{n-1}^0 heissen wird.

α. Diese Fläche T_n^0 ist von der I. Art.

Sie entsteht, indem E_n mittelst der Doppellinie D_{n-1} an eine T_{n-1}^0 geheftet wird. Man führe durch E_n einen Ringschnitt b um D_{n-1}; er löst den äussern Theil von E_n ab, den innern löse man ab durch die drei zu b, D_{n-1} gehörigen Querschnitte $Q_1\, Q_2\, Q_3$; was übrig bleibt, ist von derselben Art wie T_n^0. Aber was übrig bleibt, ist T_{n-1}^0 bis auf eine von D_{n-1} herrührende Lücke, vermöge deren an T_{n-1}^0 ein ebenes Stück fehlt, und ist aus diesem Grunde von derselben Art wie die vollständige Fläche T_{n-1}^0. Also sind $T_n^0, T_{n-1}^0, T_{n-2}^0, \cdots T_2^0, T_1^0$ alle von derselben, mithin alle von der I. Art.

β. Führt man in der Fläche T um jede überzählige Doppellinie $\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_p$ in einem der beiden Blätter, zu denen sie gehört, einen Ringschnitt $b_1\, b_2 \cdots b_p$ aus, so erhält man eine Fläche τ, welche noch zusammenhängt und von der ersten Art ist.

Dass die Fläche τ eine zusammenhängende ist, ergiebt sich sofort, wenn man für jeden Ringschnitt b den äusseren Theil des Blattes, auf dem er ausgeführt ist, unterscheidet vom innern, welcher von b bis zur zugehörigen Doppellinie Δ reicht. Der Zusammenhang zwischen allen äussern Theilen ist durch die wesentlichen Doppellinien gesichert, an ihnen haften die innern Theile in den überzähligen Doppellinien.

Um die Art der hiernach zusammenhängenden Fläche τ zu ermitteln, löse man diese innern Theile ab durch je drei zu $b_1\Delta_1$, zu $b_2\Delta_2, \cdots$ und zu $b_p\Delta_p$ gehörige Querschnitte $Q_1 Q_2 Q_3$, was den Charakter der Fläche nicht ändert. Uebrig bleibt dann $T_\varkappa^0$ mit p ebenen Lücken, also eine Fläche I. Art, mithin ist auch τ eine Fläche I. Art.

Bei jedem Ringschnitte b unterscheiden wir seine beiden Ränder, indem wir den einen $\overset{-}{b}$, den andern $\overset{+}{b}$ nennen. In der zusammenhängenden Fläche τ führt ein Weg von $\overset{-}{b}_1$ nach dem gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_1$; schneidet man ihn durch, so hat man einen Querschnitt II. Art a_1; die neue Fläche ist 1) eine zusammenhängende und 2) von der frühern, also der ersten Art. Die Ränder von a_1, b_1 vereinigen sich zu einer einzigen Randcurve, welche $a_1 b_1$ heissen möge. In dieser neuen Fläche führt auch ein Weg von $\overset{-}{b}_2$ zum gegenüberliegenden Punkte von $\overset{+}{b}_2$: durchgeschnitten, liefert er einen Querschnitt II. Art a_2, seine Ränder vereinigen sich mit $\overset{-}{b}_2$ und $\overset{+}{b}_2$ zu einer einzigen Randcurve $a_2 b_2$, und die Fläche ist noch immer eine zusammenhängende von der I. Art. Diese Schlussweise setzt sich fort, und es folgt:

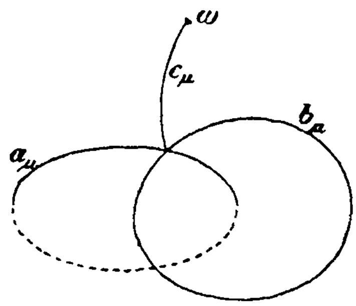
γ. In der Fläche τ kann man, ohne ihren Zusammenhang zu zerstören, die Ränder jedes Ringschnittes b_μ durch einen Querschnitt II. Art a_μ verbinden. Dann erhält man für die ursprüngliche Fläche T p Schnittpaare $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \cdots a_p b_p$, welche sie in eine zusammenhängende Fläche T_1 verwandeln, und diese ist von der I. Art. Auf sie beschränkt ist jedes Integral I. G. eindeutig.

Aber diese Fläche hat p Randcurven $a_1 b_1$, $a_2 b_2, \cdots a_p b_p$, ist also keine einfach zusammenhängende.

δ. Um diese Fläche T_1 in eine einfach zusammenhängende T' zu verwandeln, ist es ausreichend, von irgend einem Punkte ω aus durch T_1 nach jeder Randcurve einen Schnitt zu führen, c_1 nach $a_1 b_1$, c_2 nach $a_2 b_2, \cdots c_p$ nach $a_p b_p$, aber so, dass diese Schnitte $c_1 c_2 \cdots c_p$ ausser ω einander nicht mehr kreuzen.

Denn unter dieser Voraussetzung bilden $c_1 c_2$ zusammen einen Querschnitt II. Art zwischen $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$, mit diesen zusammen also eine einzige Randcurve; diese wird durch c_3 mit $a_3 b_3$ zu einem einzigen Rande vereinigt u. s. w., so dass T', weil nur Querschnitte II. Art zur Verwendung kamen, eine zusammenhängende Fläche I. Art, und weil sie nur noch eine Randcurve hat, eine einfach zusammenhängende Fläche ist.

Das Schnittsystem dieser Fläche ist sehr leicht zu übersehen. Führt man, wie üblich ist, jeden Schnitt c_μ nach einer Ecke des Schnittpaares $a_\mu b_\mu$, so bilden diese drei Schnitte ein Querschnittbündel $c_\mu a_\mu b_\mu$, und aus p



vom nämlichen Punkt ω ausgehenden Querschnittbündeln setzt sich das ganze Schnittsystem zusammen.

Lässt man es in der Reihenfolge entstehen, dass man in der Fläche T zuerst die p Schnitte $c_1\, c_2 \cdots c_p$ anlegt, so bilden diese zusammen einen *Punktschnitt*, und an seine Aeste $c_1\, c_2 \cdots c_p$ sind dann die *Querschnittpaare* $a_1 b_1,\ a_2 b_2, \cdots a_p b_p$ angehängt.

Die Anzahl

$$p = d - (n - 1)$$

dieser Querschnittpaare ist durch die Zahl der Blätter und der Doppellinien der Fläche T völlig bestimmt und heisst *das Genus der Fläche T selbst und der ihr zugeordneten Classe von algebraischen Functionen.*