

Tab. III. Epochen der Sonnenflecken-Maxima und -Minima.

Minima			Maxima								
Epoche	Gew.	Periode	Epoche	Gew.	Periode	Epoche	Gew.	Periode	Epoche	Gew.	Periode
1610.8	5	8 <sup>a</sup> .2	1766.5	5	9 <sup>a</sup> .0	1615.5	2	10 <sup>a</sup> .5	1769.7	8	8 <sup>a</sup> .7
1619.0	1	15.0	1775.5	7	9.2	1626.0	5	13.5	1778.4	5	9.7
1634.0	2	11.0	1784.7	4	13.6	1639.5	2	9.5	1788.1	4	17.1
1645.0	5	10.0	1798.3	9	12.3	1649.0	1	11.0	1805.2	5	11.2
1655.0	1	11.0	1810.6	8	12.7	1660.0	1	15.0	1816.4	8	13.5
1666.0	2	13.5	1823.3	10	10.6	1675.0	2	10.0	1829.9	10	7.3
1679.5	2	10.0	1833.9	10	9.6	1685.0	2	8.0	1837.2	10	10.9
1689.5	2	8.5	1843.5	10	12.5	1693.0	1	12.5	1848.1	10	12.0
1698.0	1	14.0	1856.0	10	11.2	1705.5	4	12.7	1860.1	10	10.5
1712.0	3	11.5	1867.2	10	11.7	1718.2	6	9.3	1870.6	10	13.3
1723.5	2	10.5	1878.9	10	10.7	1727.5	4	11.2	1883.9	10	10.2
1734.0	2	11.0	1889.6	10	12.1	1738.7	2	11.6	1894.1	10	12.3
1745.0	2	10.2	1901.7	10	11.9	1750.3	7	11.2	1906.4	10	11.2
1755.2	9	11.3	1913.6	10		1761.5	7	8.2	1917.6	10	

Zürich, 8. Aug. 1921.

A. Wolfert.

### Die Bestimmung der Massen der Sterne aus ihrer Verteilung in den Sternhaufen. Von H. v. Zeipel.

Für die Erforschung des Weltalls in mechanischer und in physikalischer Hinsicht ist es nötig, nicht nur die Koordinaten und Geschwindigkeiten der Himmelskörper sondern auch ihre absoluten Helligkeiten und Farben sowie auch ihre Massen zu bestimmen. Die Ableitung der Richtungskordinaten, der Eigenbewegungen, der Radialgeschwindigkeit, der scheinbaren Helligkeit und der Farbe ist in wohlbekannter Weise auszuführen. In der letzten Zeit ist es *Kohlschütter* und *Adams* gelungen, die absoluten Helligkeiten und damit auch die Parallaxen und die Geschwindigkeiten sehr weit entfernter Sterne zu finden. Die Bestimmung der Massen konnte aber bis jetzt nur für einige wenige visuelle oder spektroskopische Doppelsterne ausgeführt werden. Wenn die absolute Helligkeit und die Farbe bekannt sind, so ist es ja möglich, die effektive Temperatur und die Ausdehnung der Oberfläche des Sterns abzuleiten. Ist noch die Masse des Sterns bekannt, so kann auch die mittlere Dichte desselben berechnet werden.

Durch die theoretischen Untersuchungen von *Eddington*<sup>1)</sup> wurden unsere Vorstellungen über die Konstitution und die Entwicklung der Sterne besonders vertieft. *Eddington* geht, wie bekannt, von dem Prinzip des Strahlungsgleichgewichtes aus; er berücksichtigt auch den Strahlungsdruck. Unter gewisser Annahme über die Absorption im Innern des Sterns findet er, daß die effektive Temperatur und also auch die Farbe und die absolute Helligkeit nur von der Masse und der Dichte des Sterns abhängt. Umgekehrt können also Masse und Dichte aus zwei physikalischen Eigenschaften, z. B. aus der absoluten photographischen und der absoluten visuellen Größe abgeleitet werden.

Die Hypothesen von *Eddington* müssen durch die Erfahrung geprüft werden. Es ist also wünschenswert, die Masse als Funktion von absoluter Helligkeit und Farbe auch in anderer Weise abzuleiten. Hier wird gezeigt werden, wie diese Aufgabe durch eine Untersuchung über die Verteilung

der verschiedenen Sterne in den regelmäßigen Sternhaufen gelöst werden kann. Die Erfahrung hat gezeigt, daß wenigstens in den zentralen Teilen der kugelförmigen Sternhaufen die Sterne von verschiedenem Typus auch in verschiedener Weise verteilt sind. Bei den sehr konzentrierten sogen. Globular Clusters ist dieses Phänomen nicht leicht zu verfolgen. Bei den offenen, weniger reichen Sterngruppen nahe der Milchstraßenebene ist aber die Erscheinung sehr auffallend. Dies wurde zuerst in einer eben in Upsala erschienenen Abhandlung über Messier 37 gezeigt.<sup>2)</sup> In dynamischer Hinsicht müssen ja die Sterne der Gruppe als materielle Punkte angesehen werden. Ihre physische Beschaffenheit kommt dabei gar nicht in Betracht; nur die Massen der Sterne spielen für die Verteilung eine Rolle. Deshalb wird es möglich sein, durch die Verteilung der Sterne die Massen der verschiedenen Typen zu bestimmen. Zuerst ist es aber notwendig, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Sterne verschiedener Masse in einem kugelförmigen Haufen sich verteilen.

Es ist offenbar, daß dieses Problem, sowie auch das allgemeinere über die Konstitution der Sternwolken, sehr nahe verwandt sein muß mit gewissen Problemen der kinetischen Gastheorie, welche von *Clausius*, *Maxwell*, *Boltzmann*, *Gibbs* und anderen schon behandelt worden sind. Zwischen den beiden Aufgaben treten aber auch ganz bestimmte Verschiedenheiten auf. Es werde hier nur der wichtigste Unterschied angedeutet. Bei den gastheoretischen Untersuchungen nimmt man öfters an, daß die Gasmenge durch feste Wände in einem begrenzten Raume eingeschlossen bleibt, oder auch behandelt man Gasmassen von so großer Dichte und Ausdehnung (z. B. die Atmosphäre), daß ein Raumteil im Innern wie geschlossen angesehen werden kann. Die umgebenden Gasmassen wirken dann gerade wie Wände. In den Gasen treten deshalb stabile stationäre Zustände auf, die auf verschiedene Weise theoretisch abgeleitet werden können. Es sind eben diese stationären Zustände, die übrigens auch die

<sup>1)</sup> MN 77.16, 596 (1916, 1917); Ap.J. 48.205 (1918).

<sup>2)</sup> H. v. Zeipel und J. Lindgren: Photometrische Untersuchungen der Sterngruppe Messier 37 (N.G.C. 2099). K. Svenska Vet. Akad. Handlingar, Bd. 61, Nr. 15 (1921).

wahrscheinlichsten Zustände sind, welche in der kinetischen Gastheorie die Hauptrolle spielen.

Bei einer frei in Raume schwebenden Sternwolke liegt die Sache anders. Von Zeit zu Zeit kommt es vor, daß ein Stern durch zu große Annäherung an andere Sterne eine so große Geschwindigkeit bekommt, daß er aus der Wolke ins Unendliche hinausgeschleudert wird. Wenn nicht diese Verluste durch Einfangen von anderen Sternen ausgeglichen werden, so muß die Totalmasse der Sternwolke mit der Zeit abnehmen. Es gibt dann für die Wolke nur einen einzigen Endzustand: wenn alle Sterne unabhängig voneinander ins Unendliche forteilen. Aber diese vollständige Auflösung nimmt sehr lange Zeit in Anspruch. Wahrscheinlich wird sich im Laufe der Zeit ein halbstationärer Zustand herstellen, wie wir es bei den freien kugelförmigen Sternhaufen ( $\omega$  Centauri, Messier 13 u. a.) wahrnehmen können. Die theoretische Ableitung dieses Zustandes scheint aber schwierig zu sein, wenigstens ist diese Aufgabe noch nicht in einwandfreier Weise gelöst worden.

Es kommt aber auch eine Art Sternansammlungen vor, die nicht frei oder unabhängig von der Umgebung sind. Dieselben stehen wie N. G. C. 2099 (Messier 37), N. G. C. 7789 usw. in Verbindung mit den ausgedehnten Sternwolken der Milchstraße. Manche Sterne einer solchen Gruppe ziehen sehr lange in Bahnen von begrenzter Ausdehnung. Viele werden mit der Zeit aus der Gruppe in die umgebende Sternwolke hinausgeschleudert. Aber andere Sterne werden aus der Wolke in die Gruppe eingefangen. Endlich gibt es auch Wolkensterne, welche die Gruppe nur durchkreuzen, ohne dabei gefangen zu werden. Es kommt also zwischen Gruppe und Wolke ein beinahe beständiger Austausch von Sternen vor. Manche dieser Gruppen sind von sphärischer Struktur. Dieselben sind nicht so reich wie die großen freien Haufen, enthalten aber oft mehrere Tausend Sterne der absolut helleren Größenklassen. Auch in der Mitte sind diese Haufen in größeren Instrumenten gut auflösbar und zeigen daselbst keine Spur von Nebeligkeit. Wir wollen nun annehmen, daß eine solche Gruppe stationär ist. Diese Annahme ist vielleicht nicht ganz streng, aber sie muß doch als eine mögliche erste Annäherung bezeichnet werden. Vor allem ist sie eine gute Arbeitshypothese. Die Gruppe kann als in einem begrenzten Raume eingeschlossen betrachtet werden. Dadurch wird die mathematische Behandlung ihres Zustandes erleichtert, gerade wie bei den gastheoretischen Problemen. Übrigens wird es nachträglich möglich sein, die Hypothese durch ihre Folgerungen zu prüfen.

Der momentane Zustand einer Sternwolke wird durch die sogenannte Fundamentalfunktion  $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mu, t)$  definiert. Das Produkt  $F dx dy dz d\xi d\eta d\zeta d\mu$  gibt zur Zeit  $t$  die Anzahl der Sterne an, für welche die Massen zwischen den Grenzen  $\mu$  und  $\mu + d\mu$ , die Koordinaten zwischen den Grenzen  $x$  und  $x + dx$  usw., die Geschwindigkeitskomponenten zwischen den Grenzen  $\xi$  und  $\xi + d\xi$  usw. liegen. Mit Anwendung einer von *Gibbs* gegebenen Methode, welche auch die Methode der statistischen Mechanik genannt wird, kann man zeigen, daß von allen möglichen Zuständen einer geschlossenen, kugelförmigen Sterngruppe diejenige die wahrscheinlichste ist, welche durch die Fundamentalfunktion

$$F = \alpha(\mu) e^{-h\mu[\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2V(r)]} \quad (1)$$

definiert wird. Hier ist  $V(r)$  das Potential der Gruppe im

Abstande  $r$  vom Zentrum,  $h$  ist eine Konstante,  $\alpha(\mu)$  eine Funktion von  $\mu$ , die offenbar von der relativen Frequenz der verschiedenen Massen in der Gruppe abhängt. Die Formel (1) drückt das Verteilungsgesetz von *Maxwell* aus. Es bezeichne jetzt  $f(r, \mu) d\mu$  die Anzahl Sterne mit Massen zwischen  $\mu$  und  $\mu + d\mu$  pro Volumeneinheit im Abstande  $r$  vom Zentrum. Dann ist offenbar

$$f(r, \mu) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} F d\xi d\eta d\zeta = \beta(\mu) e^{2h\mu V(r)} \quad (2)$$

wo  $\beta(\mu)$  eine Funktion von  $\mu$  ist, welche in einfacher Weise mit  $\alpha(\mu)$  zusammenhängt. Die Gleichung (2) gibt unmittelbar die folgende:

$$f(r, \mu) = \gamma(\mu) [f(r, 1)]^\mu \quad (3)$$

wo  $\gamma(\mu)$  eine von  $r$  unabhängige Funktion von  $\mu$  ist, die offenbar, wie  $\alpha(\mu)$ , von der relativen Frequenz der verschiedenen Massen in der Gruppe abhängt. Infolge der Gleichung (3) ist auch

$$\log f(r, \mu) = \log \gamma(\mu) + \mu \log f(r, 1). \quad (4)$$

Zwischen den zwei Unbekannten,  $\log \gamma(\mu)$  und  $\mu$ , bekommt man ebensoviele Gleichungen (4) wie Werte von  $r$ , für welche  $f(r, \mu)$  und  $f(r, 1)$  numerisch bekannt sind. Die Masse  $\mu$  und die Größe  $\log \gamma(\mu)$  können daraus durch die M. d. kl. Q. gefunden werden.

Die hier angegebene Methode wurde bei dem offenen Sternhaufen Messier 37 angewandt. Zusammen mit Herrn *J. Lindgren* in Upsala habe ich die photographischen und die photovisuellen Größen für ungefähr 2000 Sterne in dieser Gruppe durch Anschluß an die Polarsequenz bestimmt. Durch die scheinbaren Größen der G-Riesen, der B-Sterne, der A-Sterne, der F-Zwerge und der G-Zwerge im Vergleich mit den bekannten absoluten mittleren Größen solcher Sterne wurde der Abstand der Gruppe Messier 37 zu  $1450 \pm 180$  Parsec geschätzt. Die Genauigkeit dieser Bestimmung der Entfernung der Gruppe zeigt, daß die durch die Farbenindices erhaltene Klassifizierung der Sterne in G-Riesen, B-Sterne usw. mit der gewöhnlichen Spektralklassifizierung übereinstimmt. Dann wurden die Sterne der fünf angegebenen Typen innerhalb konzentrischer Kreise um das Zentrum der Gruppe auf der Platte gezählt. In dieser Weise wurden die Flächenverteilungsdichten der verschiedenen Sterntypen in ihrer Projektion auf den Himmel oder auf die Platte gefunden. Daraus konnten schließlich die Raumverteilungsdichten der verschiedenen Sterntypen berechnet werden. Dabei war es gar nicht nötig, die Gruppensterne von den Hinter- oder Vordergrundsternen zu unterscheiden. Die letzteren werden in der Tat durch die Rechnung automatisch eliminiert. In Übereinstimmung mit der Theorie von *Eddington* wurde angenommen, daß alle Sterne mit gegebener absoluter Helligkeit und gegebener Farbe auch dieselbe Masse  $\mu$  haben. Für jeden der fünf betrachteten Sterntypen konnte also die Raumverteilungsdichte  $f(r, \mu)$  bis auf einen unbekanntem von  $r$  unabhängigen Faktor für verschiedene Werte von  $r$  numerisch berechnet werden. Dabei war es gar nicht nötig, alle Sterne mit der Masse  $\mu$  zusammenzufassen. Die Bestimmung der Masse  $\mu$ , welche einem gewissen Sterntypus entspricht, wird also gar nicht durch eventuell existierende dunkle Sterne von dieser Masse beeinflusst.

Für die verschiedenen Sterntypen ergaben sich die Massen, welche in der folgenden Tabelle zusammengestellt worden sind:

Sterntypus	Masse ( $\mu$ )	Anz. d. Sterne
G-Riesen [ $C = +1.00$ ]	$2.15 \pm 0.12$	57
B- und A-Sterne	1.00	795
F-Zwerg [ $C = +0.50$ ]	$0.67 \pm 0.02$	682
G-Zwerg [ $C = +0.80$ ]	$0.36 \pm 0.02$	1203

Hier bezeichnet  $C$  den mittleren Farbenindex der Sterne. Für die B- und die A-Sterne ergab sich dieselbe mittlere Masse, welche als Einheitsmasse gewählt wurde.

Um die gute Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zu veranschaulichen, wurde die nebenstehende Figur gezeichnet. Als Abszisse wurde  $\log r^2$ , als Ordinate  $\log f(r, \mu)$  abgesetzt. Für jeden der vier Werte von  $\mu$  wurde also eine Kurve erhalten, welche die Raumverteilungsdichte als Funktion der Entfernung vom Zentrum gibt unter Annahme des *Maxwellschen* Verteilungsgesetzes. Die aus den Beobachtungen berechneten Werte von  $\log f(r, \mu)$  wurden als Kreuze (X) eingezeichnet. (Die weniger gut verlaufende gestrichelte Kurve entspricht der Masse  $\mu = 1.76$  der G-Riesen.) Die den verschiedenen Massen entsprechenden Kurven unterscheiden sich in Bezug auf ihre Form ganz wesentlich. Weiter schließen sich die Beobachtungen an die ausgeglichenen Kurven sehr gut an. Diese Tatsache (resp. die Kleinheit der mittleren Fehler der abgeleiteten Massen) muß als ein Kriterium betrachtet werden, daß unsere Hypothese, nach welcher die *Maxwellsche* Verteilung in der Gruppe herrscht, richtig ist, wenigstens bis zu einer Entfernung von  $6.2 = 2.7$  Parsec vom Zentrum der Gruppe. Der Halbmesser der Gruppe ist ungefähr 10 Parsec.

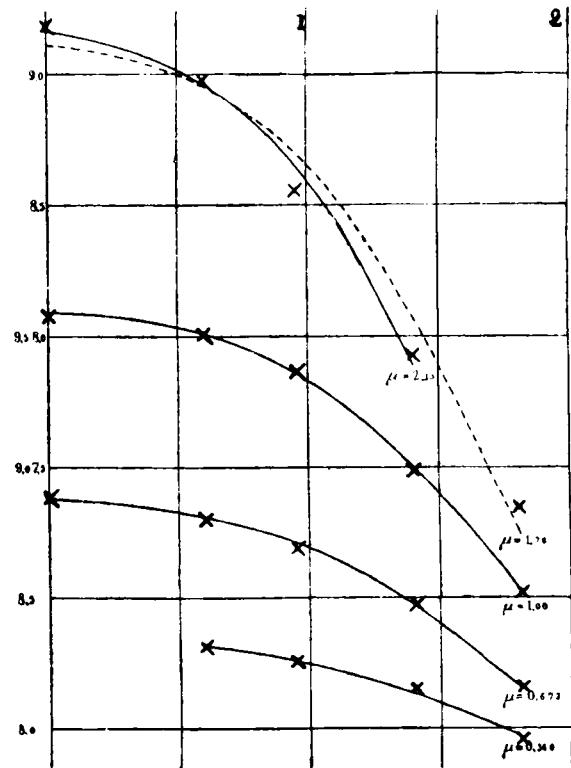
Nach der Theorie von *Eddington* könnten unter den gelben und roten Riesensternen sowohl große wie auch kleine Massen vorkommen. Dasselbe gilt von den gelben und von den roten Zwergen. Nur die weißen Sterne müßten nach der Theorie verhältnismäßig große Massen haben. Warum ist nun in Messier 37 die mittlere Masse der G-Riesen größer als diejenige der B- und A-Sterne und diese wieder größer als die Masse der F- und der G-Zwerg? Um dies zu erklären, können wir annehmen, daß die Sterne der Gruppe Messier 37 ungefähr gleichzeitig entstanden sind. Die großen Massen bleiben noch im Riesenstadium, die kleinen haben ihre Entwicklung rascher durchlaufen und haben deshalb schon den Zwergzustand erreicht.

Upsala, Sternwarte, 1921 August.

Im Zentrum von Messier 37 ist die Verteilungsdichte der Sterne ungefähr 1600 mal so groß wie in der Umgebung der Sonne. Doch liegen die Sterne dieser offenen Gruppe ziemlich weit voneinander. Offenbar war eine sehr lange Zeit erforderlich, ehe sich der *Maxwellsche* Zustand der Gruppe herstellen konnte. Wahrscheinlich wird es wohl möglich sein, mit Hilfe der Theorie dieses Zustandes eine untere Grenze des Alters der Sterngruppe zu berechnen.

Es sei noch erwähnt, daß diese Bestimmung der Massen der verschiedenen Sterntypen durch die von *Russell* aus den visuellen<sup>1)</sup> und von *Ludendorff*<sup>2)</sup> aus den spektroskopischen Doppelsternen gewonnenen Bestimmungen im großen und ganzen bestätigt wird.

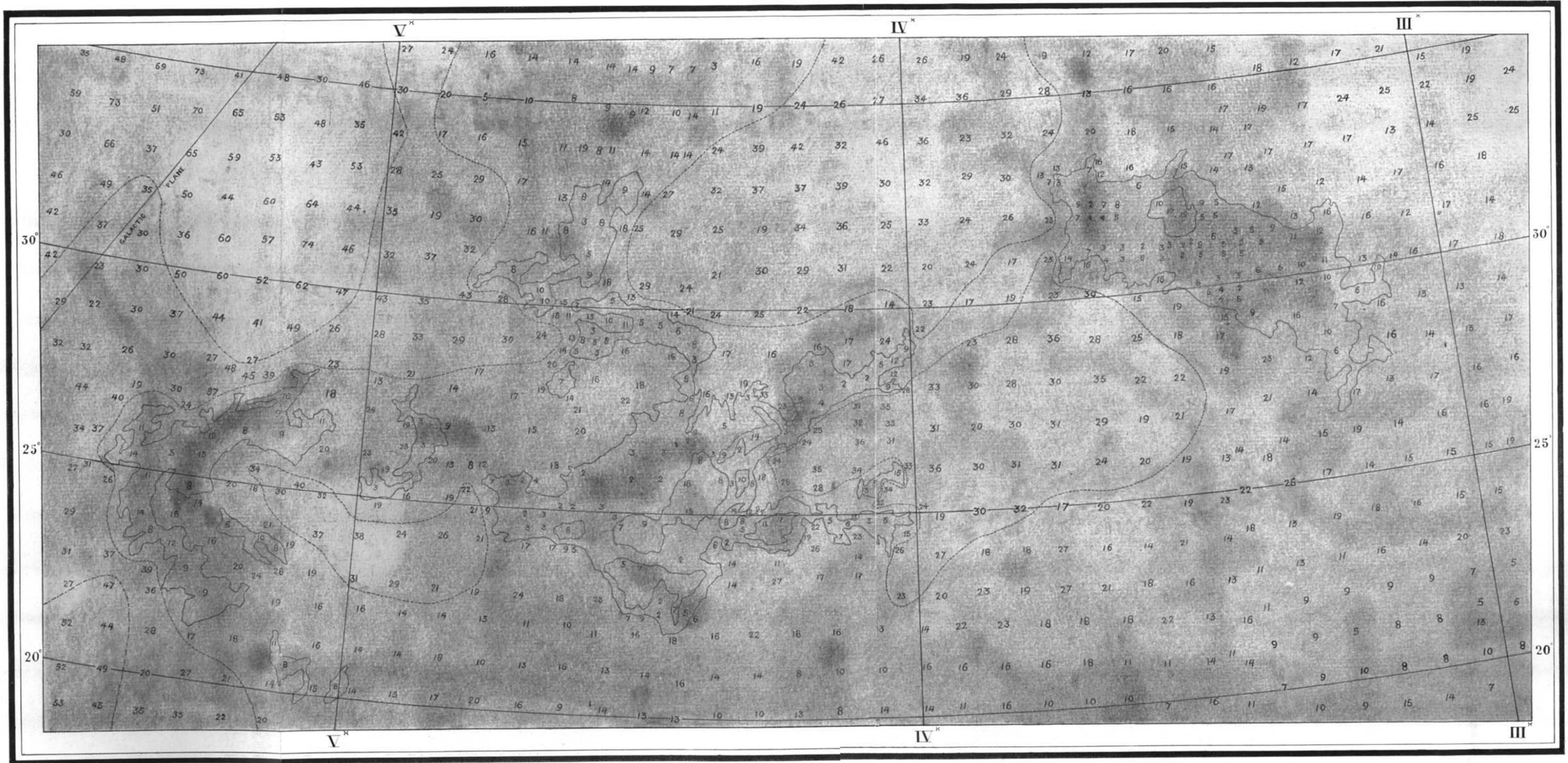
Zum Schluß sei die Hoffnung ausgesprochen, daß es wohl gelingen werde, die Sterne in noch engere Typen zu spalten und so die Masse in ihrer Abhängigkeit von Helligkeit und Farbe zu erhalten.



H. v. Zeipel.

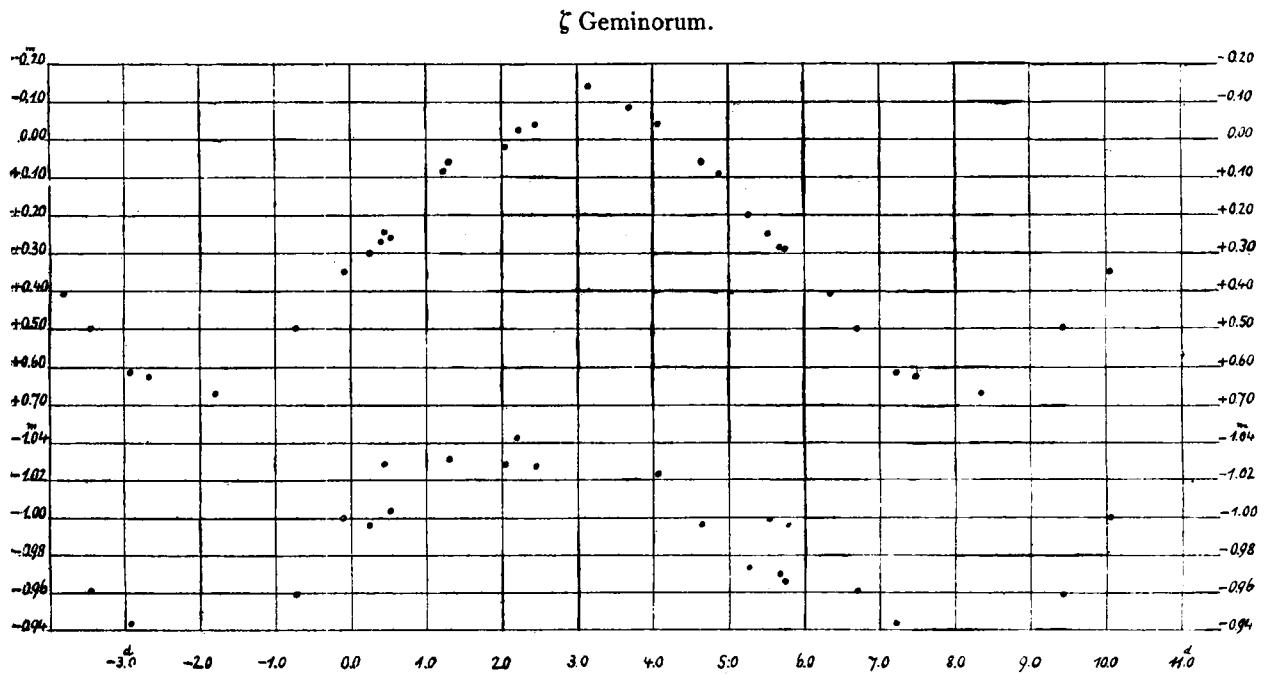
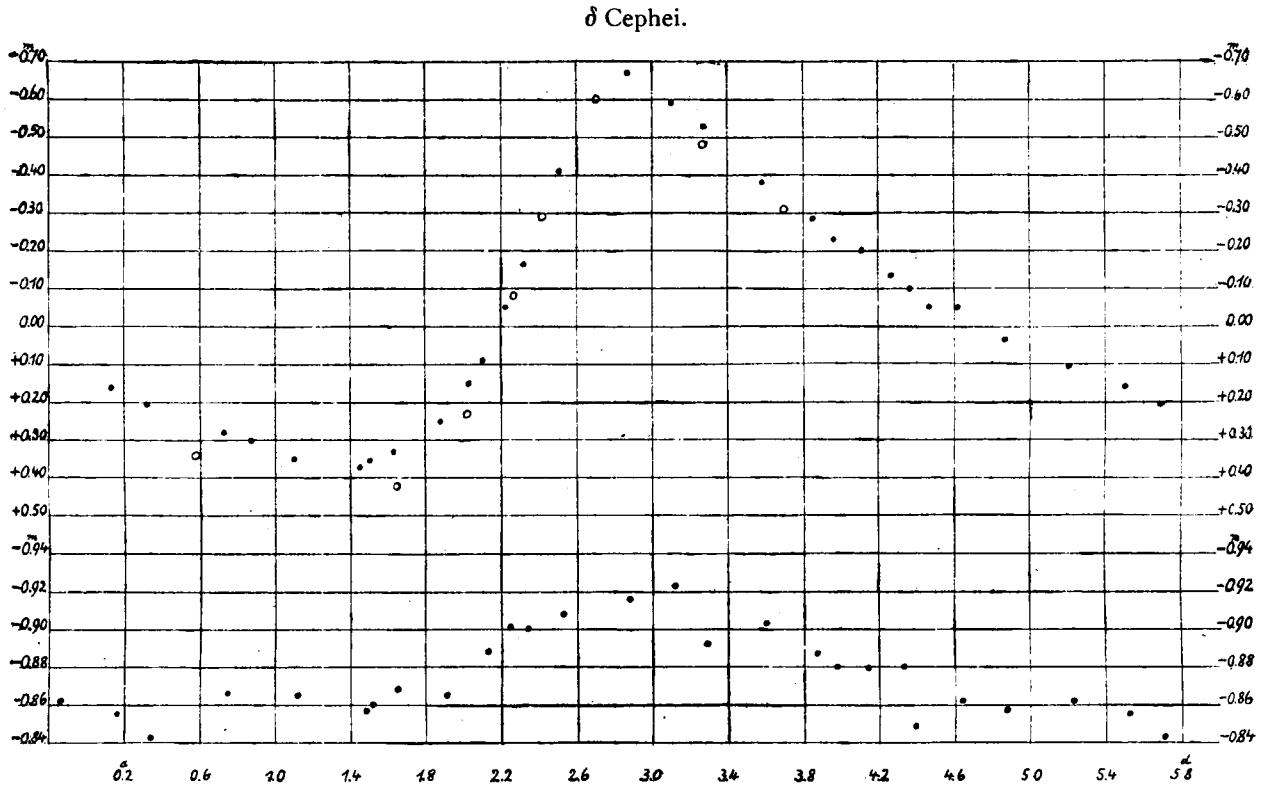
<sup>1)</sup> Amer. Astr. Soc. Publ. Vol. 3, p. 327 (1917).

<sup>2)</sup> AN 211.105 (1920).



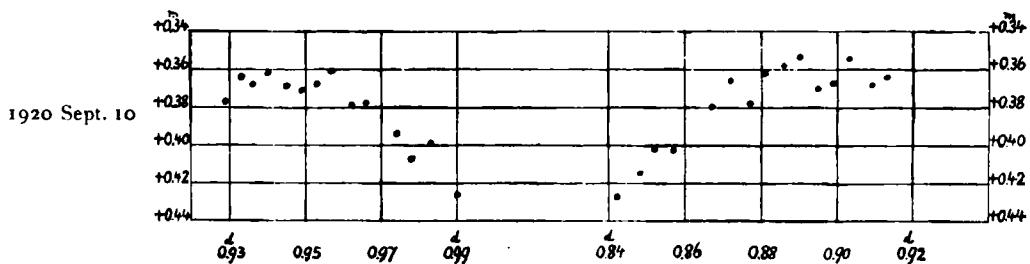
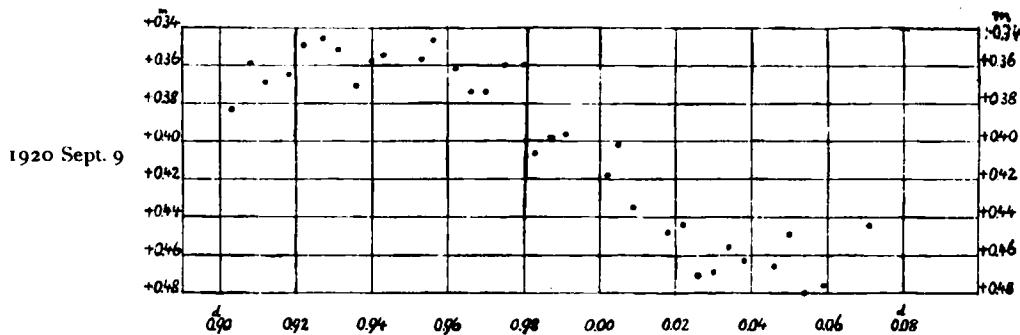
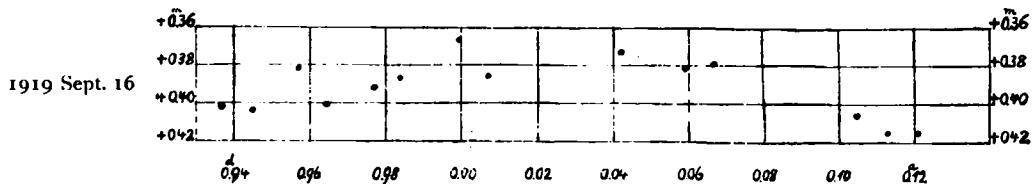
HAGEN:  
Dunkle Nebel und Sternleeren

**P. Guthnick. Einige Beobachtungstatsachen zum  $\delta$  Cephei-Problem.**

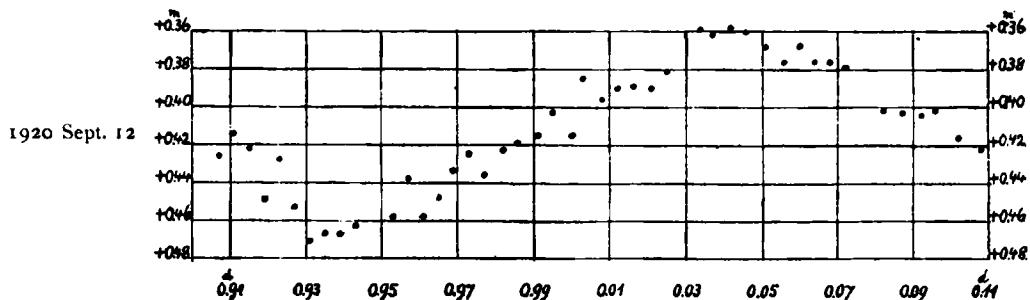


*P. Guthnick.* Einige Beobachtungstatsachen zum  $\delta$  Cephei-Problem.

12 Lacertae.

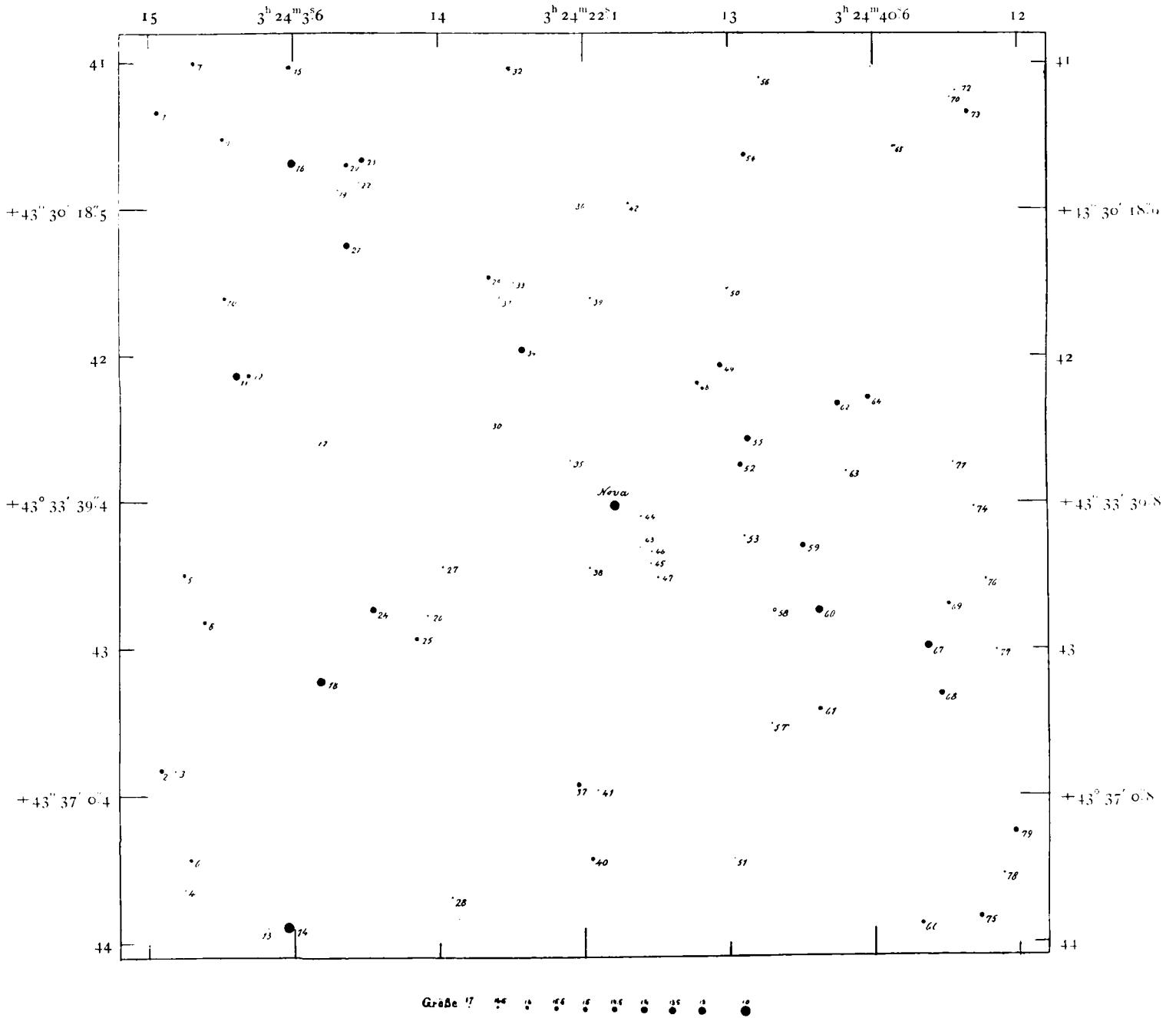


1920 Sept. 17

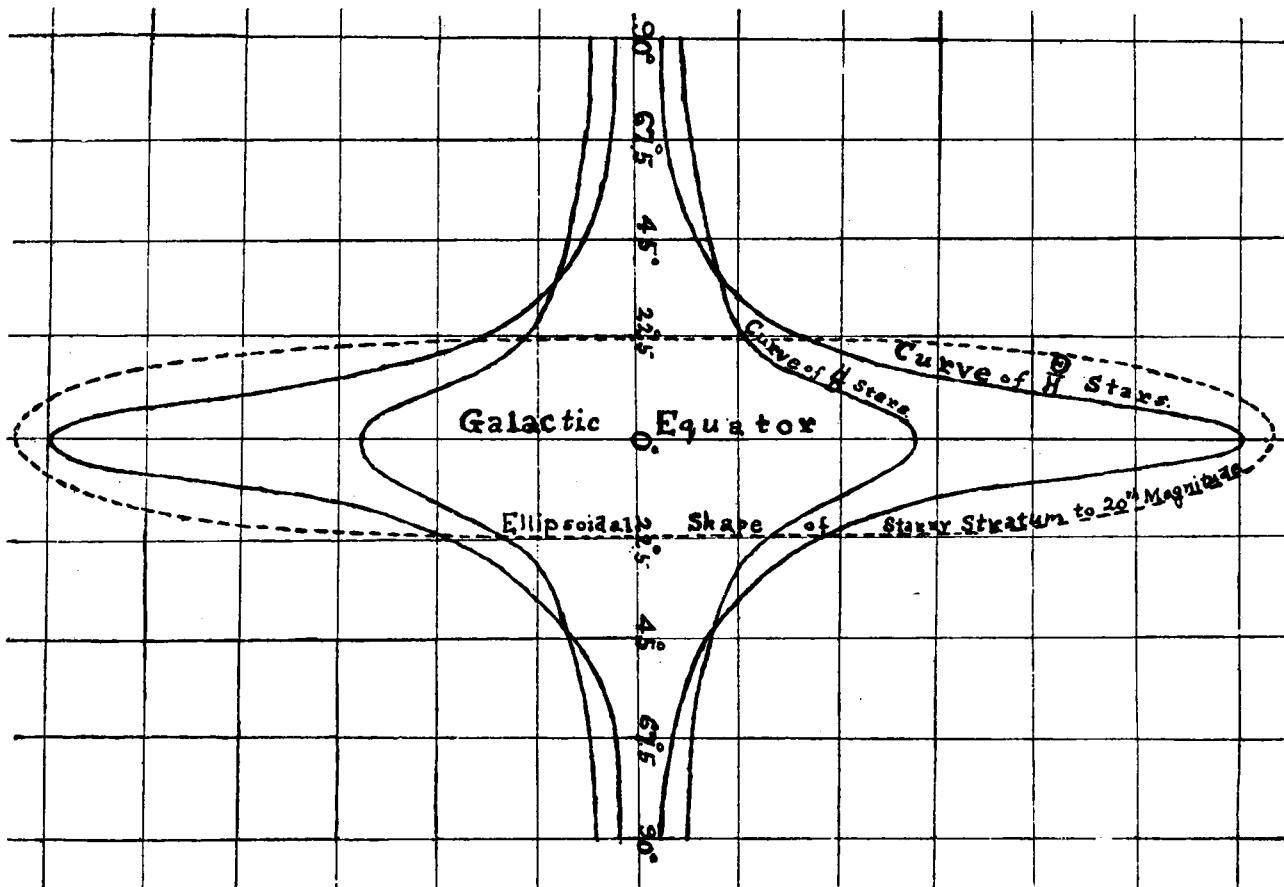
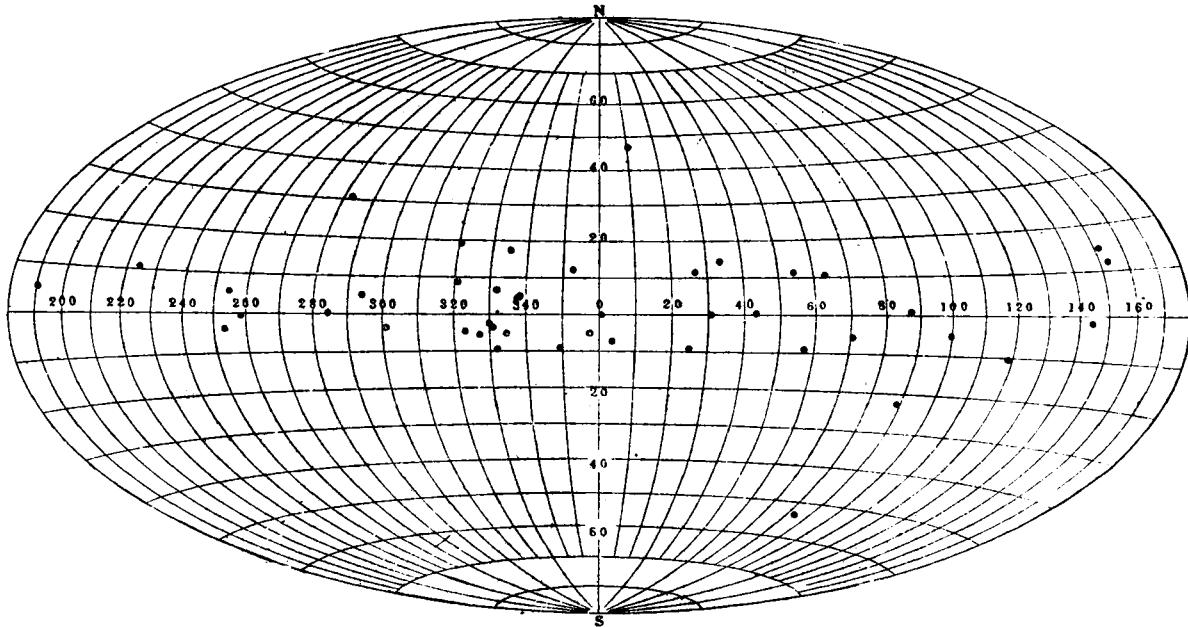


### F. Küstner. Umgebung der Nova Persei von 1901.

Äqu. 1900.0. Epoche 1903.0.



T. J. J. See. The Cause of Temporary Stars.



## H. Shapley. The Galactic Distribution of Stars of Spectral Class B.

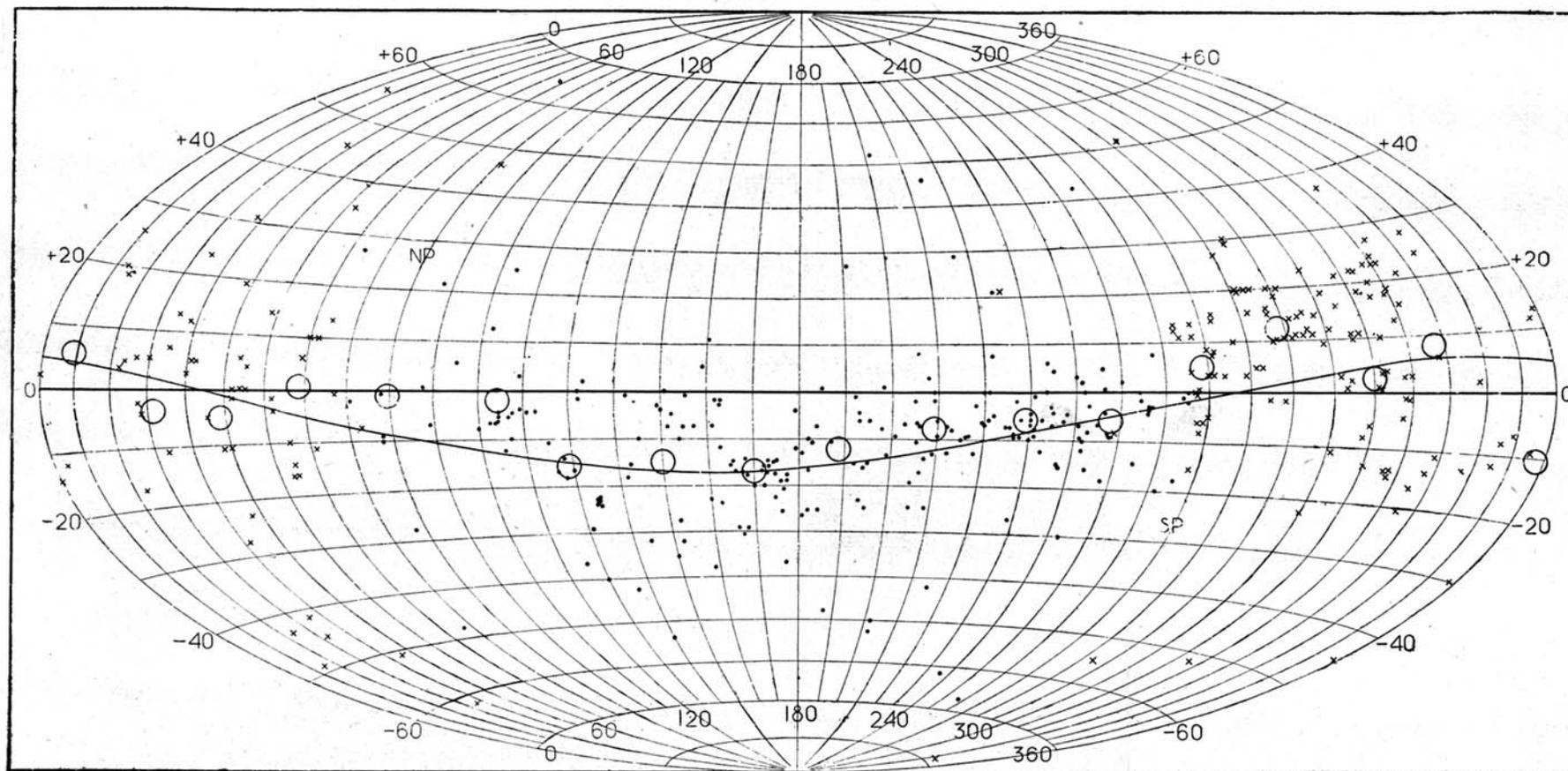


Fig. 1. Distribution in galactic coordinates of individual B's brighter than visual magnitude 5.5.

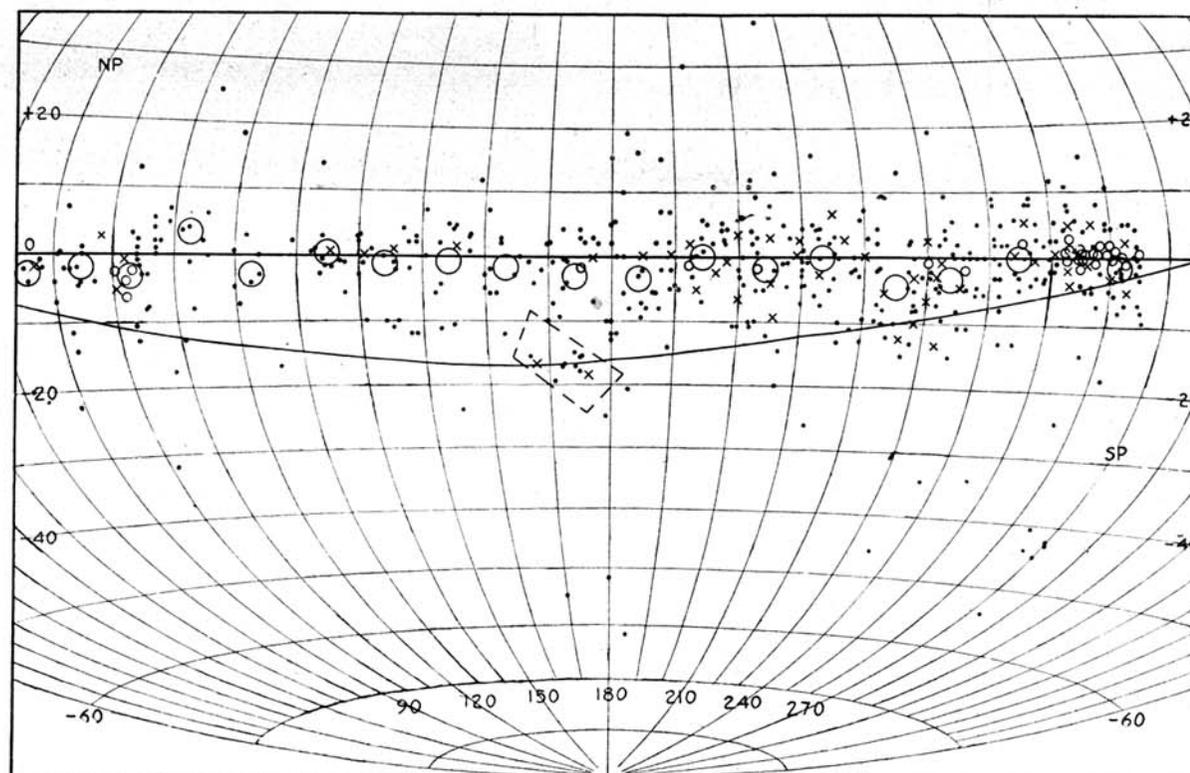


Fig. 2. Distribution of distant early B's fainter than visual magnitude 7.5.