

Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres, particulièrement pour $n=3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique.⁽¹⁾

(Par J. VERONESE, à Padoue.)

PRÉAMBULE.

L'Académie royale de Belgique pour le concours de 1879 et pour celui de 1881 avait proposé, comme question à résoudre, la généralisation des propriétés de l'hexagramme mystique.

L'énoncé de la question pour 1881 était le suivant: *Étendre, autant que possible, les théories des points et des droites de STEINER, KIRKMAN, CAYLEY, SALMON, HESSE, BAUER aux propriétés qui sont pour les courbes supérieures, pour les surfaces et pour les courbes gauches les analogues des théorèmes de PASCAL et de BRIANCHON.*

(¹) Dopo aver preso cognizione di questo importante lavoro, siamo lieti che l'egregio Autore abbia aderito ad affidarne la pubblicazione alla direzione degli *Annali*. Noi ci asteniamo dall'indagare le cause per le quali un lavoro così originale non abbia trovato maggior favore presso la Commissione dell'Accademia Reale delle Scienze di Bruxelles, e d'altronde ad esse si accenna sufficientemente nel preambolo; non possiamo però dissimulare anche in questa occasione una nostra antica convinzione, che le Accademie provvedono male all'incremento delle scienze, sia col proporre temi troppo speciali, sia col costringere gli Autori a seguire un indirizzo ed un piano stabilito *a priori* nella soluzione dei medesimi.

F. BRIOSCHI.

(Voir, pour ces derniers, les travaux de MM. CREMONA, P. SERRET et FOLIE) (*).

Sur l'invitation en quelque sorte de M. FOLIE, membre de l'Académie de Belgique, je me suis présenté au second concours avec un Mémoire de 150 pages environs qui portait pour devise :

« Les groupes de l'Hexagrammum mysticum donnent une expression géométrique particulière bien simple et élégante des groupes des substitutions de six lettres. »

Cette devise était reproduite dans un billet cacheté renfermant mon nom et mon adresse (**).

L'Académie royale de Belgique dans le mois de décembre 1881 a adopté les conclusions de Monsieur le rapporteur FOLIE, auxquelles s'étaient ralliés les deux autres Commissaires, CATALAN et DE TILLY.

Je reproduis le rapport entier de M. FOLIE, accompagné de mes commentaires, afin que le lecteur puisse mieux le comprendre et voir de quelle façon on a jugé mon travail.

« La question proposée, accompagnée surtout du renvoi aux travaux de

(*) Je remarque, dans l'intérêt du lecteur, que dans l'hexagramme il n'existe pas de points ou de droites qui soient désignés sous le nom de HESSE ou de BAUER, comme le ferait croire la rédaction même de la question.

(**) Comme j'avais envoyé à M. FOLIE un exemplaire de mon Mémoire sur l'hexagramme mystique de 1877, il m'écrivit aussitôt la lettre suivante :

Monsieur,

J'ai parcouru avec beaucoup d'intérêt les brochures que vous m'avez fait l'honneur de m'envoyer et, en particulier, votre Mémoire sur l'hexagramme mystique, dans lequel se trouve résolue la première partie de la question que j'avais posée à l'Académie de Bruxelles pour 1879.

J'ai insisté, *en conséquence*, pour que la seconde partie de la question restât au programme de concours pour 1881. La Classe des sciences, dans sa séance d'hier, a adopté ma proposition et m'a chargé de la rédaction de la nouvelle question.

Je m'empresse de vous en informer et de vous envoyer cette rédaction, persuadé que, par vos travaux antérieurs, vous êtes fort à même de la résoudre.

En même temps je vous adresse deux brochures dont j'ai fait des tirés à part et qui *pourront* en partie vous servir de guide.

Agréez, etc.

Liège, 4 janvier 1880.

FOLIE.

Je remarque que M. FOLIE ne dit pas *vous devront*, mais *vous pourront* servir de guide.

» MM. CREMONA et P. SERRET ainsi qu'aux miens, ne nous semble guère susceptible d'un sens amphibologique.

» Dans nos fondements d'une géométrie supérieure cartésienne, nous avons fait voir que si le théorème de PASCAL s'énonce sous cette forme :

» *Les côtés opposés de deux trilatères conjugués inscrits à une conique se coupent en trois points situés en ligne droite*, le théorème analogue s'énoncera, pour les courbes du 3^{me} ordre :

» *Les côtés opposés de deux quadrilatères conjugués inscrits à une courbe du 3^{me} ordre se coupent en quatre points situés en ligne droite*, et, pour les surfaces du 3^{me} ordre :

» *Les faces opposées de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan.*

» Ces extensions du théorème de PASCAL, jointes à celles que nous en avons données pour d'autres courbes planes ou gauches, indiquaient bien clairement le sens de la question de concours. Or le titre seul du Mémoire envoyé en réponse à la question montre que ce n'est pas dans ce sens que l'Auteur a voulu l'entendre.

» Et cependant il n'ignorait pas que ce sens était bien le véritable; la preuve en est qu'il a recherché l'extension proposée pour le cas des courbes gauches du 3^{me} ordre, parce que sa théorie s'appliquait à ce cas, tandis qu'il a laissé de côté les extensions aux courbes planes et aux surfaces d'un ordre supérieur au second, par la raison contraire.

» Toute sa théorie, en effet, repose sur le 2^d ordre, et ne peut en général s'étendre au delà que dans un espace à plus de trois dimensions, ce qui ne rentre nullement dans la question posée (*).

(*) J'ai étendu les groupes de l'hexagramme à 6 points d'une cubique gauche au moyen du théorème de CHASLES et CREMONA directement de la figure même de l'hexagramme par le principe de projection; mais cette méthode n'a rien de commun avec celle dont je me suis servi dans presque tout mon travail.

J'ai appliqué l'extension aux courbes et aux surfaces supérieures, car je l'ai fait pour toute configuration de n points du plan et de l'espace linéaire à trois dimensions, et, par conséquent aussi, pour toute courbe et surface de ces espaces.

Il n'est pas vrai que ma théorie ne puisse s'étendre que dans un espace à plus de trois dimensions. M. FOLIE n'a pas même fait attention au passage « Bien qu'il soit déjà très intéressant, etc. » de ma préface, duquel résulte très clairement que je me sers en général des espaces à n dimensions comme moyen et non pas comme but, pour étudier les figures de l'espace ordinaire et du plan. Pourtant celle-ci est une des idées fondamentales de mon travail.

» Celle-ci est-elle susceptible d'une solution générale?

» Evidemment non; et les termes mêmes de la question, « étendre autant que possible », prouvent que l'Académie ne demandait pas une solution de l'espèce.

» Mais ce qu'elle voulait, c'est qu'on étendit, dans les limites du possible, aux courbes et aux surfaces d'ordre supérieur les conséquences, déduites par les géomètres modernes, de la propriété de l'hexagramme mystique.

» Or, cette extensions peut se faire, au moins dans des cas particuliers; nous signalerons, par exemple, les points d'inflexion d'une courbe plane du 3^{me} ordre comme l'un d'entre eux; et nous ne doutons nullement qu'il en existe de semblables dans les courbes d'un ordre supérieur.

» Pour les surfaces du 3^{me} ordre, nous pensons même que l'extension demandée est susceptible de la plus grande généralité (*).

» Tel était donc le point de vue auquel on devait d'abord se placer pour traiter la question proposée (**).

» Après cela, rien n'aurait empêché de l'étudier à d'autres points de vue et, en particulier, à celui d'où l'Auteur du Mémoire l'a examiné, quoique son interprétation soit peut-être, entre toutes, celle qui est la moins susceptible de généralisation (***)

(*) Il est impossible, comme je le démontrerais dans une note de ma préface, de faire l'extension demandée au moyen des 9 points d'inflexion d'une courbe du 3^{me} ordre par des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe, tandis que pour les surfaces du 3^{me} ordre on obtient l'extension donnée par CREMONA (*Teoremi stereometrici dai quali si deducono le proprietà dell'esagrammo di Pascal*. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1877). Les plans, auxquels donnent lieu les couples des tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre, qu'on obtient en considérant les 27 droites de la surface, ne sont autres que les plans de PLÜCKER du Mémoire de CREMONA.

(**) Je demande pourquoi M. FOLIE n'a pas dit ici que je devais aussi me placer aux points de vue de MM. CREMONA et P. SERRET. La preuve que je n'étais pas obligé de suivre ses extensions, je la vois aussi dans la lettre, où il me dit: mes mémoires vous *pourront* et non pas vous *devront* servir de guide.

(***) Donc M. FOLIE convient qu'on pouvait se placer à mon point de vue pour étudier la question; il convient aussi, plus loin, que mon travail a des mérites très réels pour les aperçus nouveaux, pour les interprétations intéressantes et enfin pour la méthode féconde qu'il expose; mais pourquoi donc dit-il à la fin de son rapport que j'ai écrit mon travail à propos de la question proposée et non en réponse à cette question? S'il n'y a pas de doute sur le mérite du travail, et si l'on peut se placer à mon point de vue pour traiter la question, comment peut-on dire après cela que je n'ai pas traité la question? M. FOLIE devait dire franchement: le travail soumis à notre examen résout la question, mais à un autre point

» Aussi n'a-t-il guère réussi qu'à reproduire, d'une manière originale, les
 » résultats que M. VERONESE a obtenus, par une voie élémentaire, dans un
 » Mémoire dont le travail actuel est un commentaire fort intéressant (*).

» Ce travail est assurément l'œuvre d'un géomètre distingué, qui nous semble
 » avoir particulièrement étudié les maîtres italiens et avoir un peu négligé
 » l'étude des courbes supérieures auxquelles la question se rapportait sur-
 » tout (**).

» Outre les théorèmes déjà connus, il renferme un grand nombre d'idées
 » neuves et originales, et même, comme nous l'avons dit plus haut, quelques
 » unes des généralisations demandées; mais il ne semble pas avoir été écrit
 » dans le but de saisir, dans toute son étendue, le problème proposé (**).

» Nous croyons superflu de faire, de son travail, une analyse détaillée qui ne
 » serait, à peu de chose près, que la reproduction de celle que l'Auteur a ex-
 » posée sous forme de préface, ou de présenter des observations de détail, qui
 » ne seraient pas de nature à éclaircir la Classe sur la valeur du Mémoire. Il
 » en est une cependant que nous ferons dans l'intérêt du lecteur: c'est qu'il
 » s'y rencontre certaines dénominations proposées par BATTAGLINI, et qui ont
 » le tort de créer une homonymie regrettable. Celle d'*involution*, par exem-
 » ple, qui est prise dans un sens tout à fait différent de celui que PONCELET,
 » DE JONQUIÈRES, HESSE, CLEBSCH, CAYLEY, SALMON, etc., ont attribué à cette

de vue, qui n'est pas le nôtre, et par conséquent, il ne mérite pas le prix. Cela du reste
 résulte très clairement de tout son rapport.

À l'égard de ma méthode je dirai seulement qu'elle ne se laisse peut-être pas généraliser
 car elle est déjà très générale. Dans ma préface j'ai dit: « La méthode que je suis est
 très générale et peut s'appliquer à l'étude d'une configuration quelconque. »

(*) Certes je suis parti de mes résultats, mais cela ne signifie point que je les ai re-
 produits; par la table même des matières on peut se convaincre que les résultats de mon
 travail actuel sont presque tous nouveaux et qu'ils ne sont pas une reproduction, si ori-
 ginale qu'on la suppose, de ceux de mon Mémoire sur l'hexagramme mystique, de 1877.

(**) Il n'ignorait pas que j'avais l'intention de prendre part au concours et il savait
 bien que l'unique concurrent c'était moi, puisqu'il n'y en avait pas d'autres. Mais M. FOLIE
 se trompe lorsqu'il dit qu'il résulte de mon travail que j'ai étudié particulièrement les
 maîtres italiens, car je me suis servi seulement de mon Mémoire sur l'hexagramme my-
 stique, de 1877, des travaux de MM. P. SERRET, JORDAN pour la théorie des substitutions
 et de ceux de M. KLEIN sur la théorie des complexes linéaires des droites, deux à deux
 en involution.

(***) Le lecteur pourra voir, par la table des matières, que je traite la question de fond
 en comble et que si au commencement j'ai l'air d'y être étranger, c'est parce que j'ai
 d'abord exposé les théories générales qui devaient me conduire aux extensions demandées.

» expression, dans le sens de l'homographie cyclique des géomètres allemands (*).

» En résumé, nous nous trouvons en présence d'un travail remarquable, qui mérite certainement d'être accueilli dans les Mémoires de l'Académie, à cause des aperçus nouveaux, des interprétations intéressantes, de la méthode féconde enfin qu'il expose.

» Il a le défaut seulement, d'avoir été écrit non pas en *réponse* à la question proposée, mais à *propos* de cette question.

» Si le but de l'Académie n'avait été que de provoquer un travail original, celui-ci mériterait le prix.

» Mais nous ne devons pas oublier qu'un des buts de la question posée par la Classe était d'engager les jeunes géomètres dans la voie qui a été ouverte, dans nos Mémoires mêmes, par l'extension des théorèmes fondamentaux de la géométrie supérieure aux courbes et aux surfaces d'un ordre élevé, et de provoquer, dans cette voie, des recherches qui complètent celles de l'école des géomètres belges, selon l'expression de CHASLES.

» Or nous venons de le voir, l'Auteur n'a presque rien tenté dans cette voie; il s'est borné à suivre la sienne propre (**).

(*) Avant tout je ferai observer que si M. FOLIE ne voulait pas donner une analyse détaillée de mon travail, il devait au moins dire en quoi consiste ma méthode et quels sont les résultats principaux que j'ai obtenus, pour démontrer ensuite que je n'ai pas résolu la question; tandis que cela ne ressort pas le moins du monde de ce rapport. C'est pourtant ainsi qu'en agissent tous les rapporteurs d'Académie, qui indiquent en peu de mots la méthode suivie par l'Auteur pour pouvoir en conclure si le Mémoire mérite ou non le prix. En effet, on lit dans l'Annuaire même de l'Académie royale de Belgique de 1881 à l'article 21 sur les publications: « Les rapports des commissaires, qui devront présenter un aperçu de ce que ces mémoires contiennent de plus remarquable, peuvent être imprimés dans les Bulletins » Mais on voit facilement d'après les notes précédentes et d'après ce que dit ici M. FOLIE qu'il lui était impossible de faire un tel aperçu. Ce qu'il dit, en effet, sur l'*involution* est tout à fait contraire à la vérité, car je ne me suis jamais servi dans mon travail d'aucune dénomination proposée par BATTAGLINI. J'ai étendu l'idée de l'involution aux espaces à plus de trois dimensions, prise dans le sens commun (Collinéation ou homologie en involution, lorsque le rapport anharmonique de l'homologie est égal à -1 .) et non dans le sens de BATTAGLINI (Voir, en effet, le théor. I de mon Mémoire ci-après). Mais ce n'est pas tout. Le n.º 4 de mon travail a pour titre *Homographies cycliques*. Ce titre seul suffit pour démontrer que dans mon Mémoire l'idée de l'involution et celle des homographies cycliques sont bien distinctes.

Si M. FOLIE s'est trompé ainsi dès le début de mon travail, il est facile de comprendre ou d'admettre qu'il n'a pu être en harmonie avec le reste.

(**) Mais cela n'entre nullement dans le programme du concours. Du reste je demande pourquoi il n'a pas dit que les autres buts de l'Académie étaient de faire compléter les

» La question reste donc entière.
» Notre intention formelle est de proposer ultérieurement à la Classe de la
» maintenir au programme du concours.
» Nous ne pouvons, dans ces conditions, déclarer que le travail soumis à notre
» examen mérite le prix.
» Nous ne voulons pas non plus proposer une mention honorable pour l'Au-
» teur, récompense qui ne nous semblerait pas proportionnée aux mérites très
» réels de son travail.
» En conséquence, nous avons l'honneur de proposer à la Classe d'ordonner
» que le *Mémoire* soit imprimé, si l'Auteur veut y consentir, dans les volumes
» in 4°, et d'adresser à celui-ci des félicitations et des remerciements bien mé-
» rités. »

N'est-il pas étrange que dans un rapport qui juge mon *Mémoire* digne d'être accueilli parmi les mémoires de l'Académie mais non conforme au concours, on ne donne aucune idée de ce qu'il contient? N'est-il pas étrange qu'on ne dise rien pour informer le lecteur des résultats obtenus? N'est-il pas étrange que lorsque le rapport parle de mon travail on se trompe toujours?

Une chose seule résulte très clairement du rapport: le prix n'a pas été accordé au *Mémoire* parce qu'on n'y a pas tenu compte des travaux géométriques de M. FOLIE, suivant que le pensait l'auteur du programme.

Ce n'est pas pour la perte du prix mais dans l'espérance d'une sentence plus juste, que j'en appelle du jugement de M. FOLIE et de l'Académie royale de Belgique à celui de tous ceux qui s'occupent des sciences mathématiques.

De même que je ne puis accepter la décision de l'Académie belge, de même je ne puis consentir à l'impression de mon travail dans les mémoires de l'Académie et, par conséquent, je ne peux pas accepter en l'état de cause les félicitations et les remerciements qu'elle veut bien m'adresser.

J'ai demandé l'hospitalité aux *Annali di Matematica* dirigés par Monsieur le Sénateur et professeur BRIOSCHI, et je remercie l'illustre directeur de me l'avoir accordée.

recherches des écoles italienne et française (à la première desquelles appartiennent aussi mon travail sur l'hexagramme, de 1877, et ceux de MM. CREMONA, BELLAVITIS et CAPORALI) puisque dans le programme du concours il a cité en premier lieu les travaux de MM. CREMONA et P. SERRET.

Que les gens compétents et impartiaux lisent entièrement mon *Mémoire* et qu'ils relisent ensuite le rapport de M. FOLIE avec mes commentaires. J'ose espérer qu'ils partageront ma conviction :

1.° que j'ai été jugé très légèrement par qui n'a pas lu ou n'a pas compris mon travail;

2.° que la voie que j'ai suivie est précisément celle qui, dans l'état actuel des connaissances géométriques, se présentait comme la plus féconde en résultats nouveaux et intéressants, et la plus propre à une véritable généralisation de l'hexagramme de PASCAL, sinon selon la pensée et le désir de l'auteur du programme, au moins selon l'esprit et l'état de la science;

3.° qu'on ne peut m'imputer à reproche si une telle voie est neuve et originale, au lieu d'être celle que M. FOLIE prétend avoir découverte et indiquée aux géomètres de l'avenir.

À propos de cette dernière voie je me bornerai à la déclaration suivante :

J'ai lu et j'ai examiné les *Fondements d'une géométrie supérieure Cartésienne* et les autres mémoires de M. FOLIE pour les utiliser dans la solution de la question proposée; mais j'ai dû bientôt me convaincre que par cette voie je n'aboutirais à aucune conclusion sérieuse. Les *Fondements* de M. FOLIE ne contiennent aucune nouveauté de méthodes, de théories ou de théorèmes; tout ce qu'il a exposé avec une grande pompe de phrases, est évidemment contenu dans les œuvres de PONCELET (*), et se réduit à des cas particuliers de théorèmes déjà donnés par GERGONNE (**), et par PONCELET (***), développés par DE JON-

(*) *Analyse des transversales*, etc. Journal de CRELLE, vol. 8, 1831. *Traité des propriétés projectives*. II Ed., 1866.

La théorie de l'involution donnée par les m points d'intersection d'une transversale quelconque avec les courbes ou les surfaces d'un faisceau $A + \lambda B = 0$, était déjà connue par PONCELET même en 1830, quoiqu'il l'ait publiée seulement dans la 2^e édition de son traité en 1866, tandis que DE JONQUIÈRES avait publié son *Mémoire* sur l'involution dans ce même journal en 1859.

(**) *Annales de mathématique*, tome 17.

(***) *Traité des propriétés projectives*. Pour l'extension du théorème de DESARGUES voir les n.°s 253, 258, 259, 266, 273, et pour l'extension du théorème de PASCAL voir en outre les n.°s 154, 227, 296, 297.

L'*heureuse analyse* de M. FOLIE, comme il l'appelle dans ses *Fondements*, se base toujours sur des équations de la forme $A + \lambda B = 0$, où A et B sont deux courbes ou deux surfaces réductibles ou irréductibles du m^{me} ordre.

Il y a aussi dans ses *Fondements* des contradictions dont je donne ici quelques exemples, Pour la généralisation de l'idée de l'involution quadratique, dans une note de sa préface. pag. 2, il dit :

QUIÈRES et par d'autres géomètres toujours avant qu'il leur arrivât la grande fortune d'être retrouvés et retouchés par le mathématicien de Liège.

Padoue, juillet 1882.

« Depuis que ce travail (ses Fondements) a été écrit nous avons trouvé dans la nouvelle édition du *Traité des propriétés projectives* de PONCELET (t. 2, pag. 240 et suiv.) cette extension de l'idée de l'involution, qui ne paraît pas avoir été remarquée des géomètres, malgré sa haute importance (1870) » tandis que, après avoir donné la première généralisation du théorème de DESARGUES (pag. 15), il dit :

« On voit clairement par là pourquoi l'involution de six points, la seule connue jusqu'à ce jour, etc. »

Et à pag. 31 :

« Nous ne pouvons pas mettre les équations générales des courbes d'un ordre supérieur au cinquième sous la forme

$$\delta_0 \dots \delta_{n-1} = k \delta'_0 \dots \delta'_{n-1}$$

» qui nous a conduit à appliquer l'extension que nous avons donnée à l'idée de l'involution.

« Par quoi faudra-t-il remplacer l'involution dans ces courbes? C'est là un problème qui mérite certainement de faire l'objet des efforts des géomètres et sur lequel nous appelons leur attention. »

Il paraîtrait que M. FOLIE n'a pas même lu l'endroit du traité de PONCELET qu'il cite, car PONCELET a étendu l'involution aux faisceaux de courbes ou de surfaces d'un ordre quelconque.

Voici maintenant quelques exemples de l'art de phraser de M. FOLIE. Aux pages 3, 4, il dit :

« On nous répondra peut-être avec POISSON que c'est une heureuse analyse qui nous a conduit à ces résultats; nous faisons si peu difficulté de le reconnaître que nous sommes étonné que DESCARTES lui-même, lorsqu'il a fait cette découverte splendide qui renfermait en germe toute l'analyse moderne, ou les géomètres qui lui ont succédé, n'aient presque fait aucun usage de l'idée qui nous sert de point de départ. »

Cette heureuse analyse, comme nous venons de le voir, est basée sur des équations de la forme $A + \lambda B = 0$ déjà connues.

« Le titre même de notre travail indique suffisamment que nous n'avons voulu que poser les bases d'une méthode qui conduit aux plus belles propriétés de la géométrie supérieure.

» Dédire les corollaires de nos théorèmes serait une entreprise qui exigerait peut-être des années de travail.

» C'est là un champ que nous ne faisons que défricher et sur lequel ceux qui voudront poursuivre ces recherches sont certains de faire une ample moisson de découvertes. »

Et à la fin du premier livre (pag. 78) nous lisons :

« Nous avons, dans le livre qui précède, étendu au moyen d'une analyse fort simple les théorèmes fondamentaux de la haute géométrie aux courbes supérieures planes, pour lesquelles la plupart de ces théorèmes n'avaient pas encore été découverts, malgré la profondeur et la pénétration des géomètres. »

MÉMOIRE ⁽¹⁾

PRÉFACE.

La question à laquelle j'essaie de répondre par le présent travail est très vaste et semble tout d'abord très difficile. Le problème peut être envisagé sous beaucoup de manières différentes. Jusqu'ici on a proposé déjà bien des analogies au théorème de PASCAL; mais remarquons qu'en général pour déterminer ces propriétés, que l'on considère comme de même nature, on est obligé de ne prendre en considération dans l'Hexagramme mystique qu'un ordre de propriétés et non pas l'ensemble; citons à l'appui les théorèmes de CHASLES et de M. P. SERRET sur les surfaces du 2^d degré et ceux considérés par M. FOLIE pour les courbes et pour les surfaces d'ordre supérieur dans ses fondements et ailleurs ⁽²⁾.

Les groupes des droites de PASCAL, des points de STEINER, des 6 figures Π , des points de KIRKMAN, des droites de CAYLEY, etc., et des systèmes infinis $[Zz]_m$ de 60 droites z et de 60 points Z (où m est un nombre entier positif quelconque). Pour $m = 1$ le système $[Zz]_m$ devient le système de PASCAL-KIRKMAN ⁽³⁾ dépendant uniquement de ce que l'on peut permuter de toutes les manières possibles les 6 points fondamentaux de la conique.

⁽¹⁾ Ce Mémoire est identique à celui que j'ai envoyé à l'Académie royale de Belgique, sauf quelques corrections de forme, qui du reste ne changent en rien le sens. Je joins maintenant à certains points du travail des notes complémentaires en renvois, distinguées par des numéros des notes primitives indiquées par des astérisques.

⁽²⁾ Je dois avertir que mon intention n'était pas d'affirmer que les théorèmes indiqués par M. FOLIE sont de lui.

⁽³⁾ A., *Nuovi teoremi sull'Hexagrammum mysticum*. (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1877). Théorèmes XII, XLIX.

Ainsi en permutant les 6 points on obtient en tout 720 permutations correspondant 12 à 12 aux 60 hexagones, qu'on peut former avec les 6 points, ou bien aux 60 droites de PASCAL.

On voit donc, que la **théorie des groupes de l'Hexagramme n'est qu'une expression géométrique particulière de la théorie des substitutions de six lettres.**

C'est là l'idée fondamentale qui nous guidera dans tout notre travail. Or, en examinant à ce point de vue les propriétés que l'on considère comme analogues du théorème de PASCAL, j'avoue n'avoir pu trouver de groupes analogues à ceux de l'Hexagramme. Cette difficulté insurmontable résulte de ce que les éléments fondamentaux, sur les courbes et sur les surfaces, donnés par ces propriétés ne sont pas arbitraires, comme le sont les 6 points sur la conique, et qu'en effectuant des permutations de ces éléments les propriétés ne subsistent plus (*).

Je donne quelques exemples:

Il y a pour les surfaces du 2^d degré un théorème que l'on peut considérer plus que tout autre comme l'analogue du théorème de PASCAL; c'est celui qui est relatif aux 6 génératrices d'un hyperboloïde, appartenant trois à trois aux deux systèmes de génératrices. Ces 6 droites se rencontrent deux à deux en 9 points, avec lesquels on peut former trois hexagones, dont les côtés sont les 6 droites elles-mêmes, et dont les diagonales se rencontrent respectivement en trois points. Ces trois points sont à une ligne droite g . Les plans tangents aux sommets opposés pour chacun des trois hexagones se coupent en trois droites d'un plan. Les trois plans, qui en résultent, se coupent suivant une droite. Cette droite est la polaire de la droite g par rapport à l'hyperboloïde (**). Ce dernier théorème peut être considéré comme l'analogue du théorème de STEINER

(*) Je remarque que M. P. SERRET lui-même ne considère pas ses deux théorèmes sur dix points quelconques d'une surface du 2^d degré comme les analogues du théorème de PASCAL. Le premier de ces théorèmes, relatif à deux pentaèdres qu'on obtient en séparant les dix points en deux groupes de 5 points, est analogue au théorème que deux triangles, dont les sommets sont 6 points d'une conique, sont conjugués par rapport à une autre conique Σ . On obtient en tout 10 telles coniques, qui ont été étudiées par M. BAUER en relation avec les droites de PASCAL, et avec les points de KIRKMAN, etc. Pour les 176 surfaces du 2^d degré Σ , qu'on obtient en séparant de toutes les manières possibles les 10 points fondamentaux d'une surface du 2^d degré en deux pentaèdres, le problème, qui se présente le premier, c'est celui de leurs intersections; problème qui n'est ni linéaire, ni à première vue élégant et qui offre peu d'intérêt. L'élégance et la beauté de l'hexagramme dépendent de ce que l'on peut l'étudier au moyen de constructions purement linéaires.

(**) PLÜCKER: *System der Geometrie des Raumes*, Nr. 87-93.

pour l'hexagramme mystique (*), mais il y a cette grande différence que, pour la conique, on a 60 hexagones, ou bien 60 droites de PASCAL et 20 points de STEINER, tandis que, avec les 6 génératrices de l'hyperboloïde, ou d'une surface quelconque du 2^e degré, on obtient seulement deux groupes de trois hexagones et un seul couple de droites, qui correspondent à un couple de deux points conjugués de STEINER. On voit donc qu'il est impossible d'étendre les groupes qu'on peut former avec 6 points d'une conique à 6 telles génératrices d'un hyperboloïde (†).

(*) C'est au moyen de ce théorème que HESSE a démontré que les 10 points de STEINER sont conjugués deux à deux par rapport à la conique fondamentale.

(†) M. FOLIE dans ses *Fondements* à la pag. 5 donne les définitions suivantes:

« Nous appellerons *polygones conjugués de n côtés inscrits à une courbe du n^{me} ordre*, deux polygones tels que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre avec la courbe. »

Ces deux polygones sont, selon PONCELET, deux courbes du n^{me} ordre, qui déterminent un faisceau de courbes du n^{me} ordre auquel appartient évidemment la courbe à laquelle sont inscrits les deux polygones. (*Traité des prop. proj.*, n.ºs 253 et suivants.)

« De même nous appellerons *polygones conjugués de n + 1 côtés inscrits à une courbe du n^{me} ordre* deux polygones tels, que chaque côté de l'un passe par l'un des points d'intersection de chaque côté de l'autre, un seul excepté, avec la courbe; les *côtés opposés* dans ces deux polygones seront ceux qui n'auront pas de point commun sur la courbe. »

De même je remarque que ces deux polygones peuvent être considérés comme deux courbes du $(n + 1)^{\text{me}}$ ordre, qui déterminent un faisceau de courbes du même ordre, où $n(n + 1)$ des $(n + 1)^2$ points fondamentaux du faisceau sont situés sur la courbe du n^{me} ordre, à laquelle sont inscrits les deux polygones; donc les $n + 1$ points fondamentaux restants, où se rencontrent les côtés opposés, sont situés sur une droite.

Pour $n = 2$ on obtient deux trilatères conjugués inscrits à une conique, qui déterminent sur la conique 6 points tout à fait arbitraires. En permutant ces 6 points on obtient 60 couples de ces trilatères qui donnent lieu aux 60 droites de PASCAL, desquelles dépendent *uniquement* les groupes de l'hexagramme.

Pour la courbe du 3^{me} ordre ($n = 3$) on obtient deux quadrilatères qui déterminent sur la courbe 12 points situés 3 à 3 sur leurs côtés; les 4 points d'intersection de leurs côtés opposés sont situés sur une ligne droite g . En permutant les 12 points on n'obtient pas en général d'autres couples de ces quadrilatères, et, par conséquent, il est *impossible* dans ce cas de faire l'extension demandée.

Mais M. FOLIE dit dans son rapport qu'on peut la faire au moyen des 9 points d'inflexion de la courbe.

Par le corollaire III (pag. 13) de ses *Fondements*, on peut construire des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe du 3^{me} ordre, si l'on a un système de deux trilatères conjugués inscrits à la même courbe.

Soient en effet $0, 1, 2; 0', 1', 2'$, les points de rencontre de la courbe avec deux sécantes s, s' . Les transversales $00' \equiv t_0, 11' \equiv t_1, 22' \equiv t_2$ rencontrent la courbe encore en trois points situés sur une ligne droite u_0 . Il est clair que $ss'u_0, t_0 t_1 t_2$ donnent deux trilatères conjugués. Si l'on considère maintenant les transversales $01' \equiv T_2, 12' \equiv T_0, 20' \equiv T_1$, ces

Cependant, pour la cubique gauche, on a la propriété donnée par CHASLES et complétée par CREMONA, par laquelle on peut faire cette extension. Si 1234567

transversales déterminent une autre droite U_0 par leurs intersections ultérieures avec la courbe. Les quadrilatères

$$U_0 t_0 t_1 t_2, \quad u_0 T_0 T_1 T_2$$

sont évidemment inscrits à la courbe et les intersections de leurs côtés opposés $U_0, u_0; t_0, T_0; t_1, T_1; t_2, T_2$; sont situées sur une droite g .

Dans le cas des 9 points d'inflexion situés 3 à 3 sur 12 droites L , on peut former avec eux 4 trilatères inscrits deux à deux à la courbe. Il n'y a aucune autre droite qui passe par deux des 9 points, car les 12 droites L représentent précisément les 36 droites qui joignent deux à deux les 9 points. Ces 12 droites se rencontrent dans les 12 sommets des trilatères. Elles n'ont en dehors de ces points et des 9 points d'inflexion aucun autre point commun. Or il n'est pas difficile de voir qu'on ne peut pas former avec ces droites, au moyen de la construction susdite pour $n = 3$, des quadrilatères conjugués inscrits à la courbe, qui donnent de nouvelles droites g de la figure. Il est donc impossible dans ce cas de faire l'extension demandée.

M. FOLIE dit, dans son rapport, que pour les surfaces du 3^{me} ordre l'extension demandée est susceptible de la plus grande généralité.

On a pour ces surfaces le théorème suivant:

« Les faces opposées de deux tétraèdres conjugués inscrits à une surface du 3^{me} ordre F^3 se coupent suivant quatre droites situées dans un même plan. »

Considérons en effet les 12 droites

$$c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26}, c_{35}, c_{36}, c_{45}, c_{46}$$

d'après les indications ordinaires. (Voir par ex. CREMONA, *Teoria delle superficie* et REYE, *Geometrie der Lage*, II Abt.) Avec ces 12 droites on peut former deux tétraèdres conjugués à F^3 , savoir:

$$\begin{array}{ccc} c_{16}, c_{23}, c_{45} & c_{14}, c_{25}, c_{36} \\ c_{14}, c_{26}, c_{35} & c_{15}, c_{23}, c_{46} \\ c_{13}, c_{25}, c_{46} & c_{16}, c_{24}, c_{35} \\ c_{15}, c_{24}, c_{36} & c_{13}, c_{26}, c_{45} \end{array}$$

dont les faces sont évidemment des plans tritangents de F^3 et dont les faces opposées se coupent en 4 droites p d'un plan P . Si l'on considère en effet l'hexagone

$$c_{16} c_{23} c_{46} c_{25} c_{14} c_{35}$$

les faces opposées $c_{16} c_{23}, c_{25} c_{14}; c_{23} c_{46}, c_{14} c_{35}; c_{46} c_{15}, c_{35} c_{16}$ se coupent suivant trois droites p d'un plan P . (BRIOCHI, *Annali di matematica*, 1855.) Mais les faces qui sont opposées pour l'hexagone le sont aussi pour les tétraèdres; donc les deux faces opposées restantes se coupent suivant une droite du même plan P .

Si l'on considère les 12 droites c , qui correspondent d'une certaine manière aux 6 points fondamentaux de l'hexagramme, il est clair qu'on ne peut pas obtenir d'autres couples de tétraèdres conjugués inscrits à F^3 , et, par conséquent, aucun autre plan P . Cependant en

sont 7 points d'une cubique gauche, les trois points

12·457

23·576

34·761

où 12, 23, 34 rencontrent les plans 457, 576, 761 sont situés sur un plan E passant par le point 7 (*). CREMONA a démontré que, si le point 7 se déplace sur la courbe, le plan E passe toujours par une sécante p de la cubique (**). Cette droite correspond à l'hexagone 12, 23, 34, 45, 56, 61. On obtient donc en tout 60 sécantes p de la courbe en permutant de toutes les manières possibles les six points fondamentaux. Mais les théorèmes de CHASLES et de CREMONA s'obtenant par projection du théorème de PASCAL même, on peut par projection aussi obtenir les groupes formés par les 60 sécantes p .

À la fin de ce travail je donnerai quelques théorèmes sur ces groupes. Mais ce que je viens de dire est une application toute spéciale et, ajoutons-le aussi, trop facile. Développer les résultats peu intéressants qu'elle fournit ne serait point répondre à la question, par suite de laquelle nous avons à étendre les groupes de l'hexagramme aux courbes et aux surfaces.

Pour y arriver j'ai dû laisser de côté les propriétés connues considérées comme analogues, et partant de la théorie des substitutions j'ai développé dans ce travail une méthode générale, qui me donne des analogies nouvelles et cela assez élégamment.

J'ai fait observer dès le principe que les groupes de l'hexagramme ne sont qu'une expression géométrique particulière de la théorie des groupes de 6

considérant 15 des 27 droites, qui n'appartiennent pas à un double-six on obtient des arrangements analogues à ceux de l'hexagramme, c'est à dire qu'on obtient la figure étudiée par CREMONA. Les triangles des deux tétraèdres, que nous avons considérés plus haut, sont désignés dans le Mémoire de CREMONA par les symboles III I, III II; IV I, IV II; V I, V II; VI I, VI II, où I, II, III, IV, V, VI sont les indices romains relatifs aux 6 figures Π , ou bien aux pentaèdres de la figure dans l'espace. CREMONA appelle les droites p , où se coupent les faces des deux tétraèdres, droites de PASCAL et les plans P , où elles sont situées 4 à 4, plans de PLÜCKER; il en étudie d'abord les propriétés pour une surface F^3 avec un point double et ensuite pour une surface du 3^{me} ordre quelconque.

Cette figure a été également étudiée par M. CAPORALI, qui a donné aussi une autre extension des groupes de l'hexagramme pour les 16 points et pour les 16 plans singuliers de la surface de KUMMER. (Atti R. Acc. dei Lincei, 1878.)

(*) CHASLES, *Aperçu historique*, pag. 403.

(**) *Sur les lignes gauches de 3^{me} ordre*. CRELLE, 58.

lettres. Représentons, en effet, les 6 points d'une conique par 6 valeurs $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ d'un paramètre. Si l'on permute ces 6 valeurs de toutes les manières possibles, on obtient, en partant d'une figure géométrique quelconque qui dépend uniquement des 6 points fondamentaux, en général 720 figures de même espèce, ou bien seulement un nombre m diviseur de 720. Si cette figure est la conique fondamentale, les 720 coniques correspondantes coïncident avec elle, c'est à dire que *la conique fondamentale se transforme en elle-même*.

Donnons maintenant aux 6 valeurs x_1, x_2, \dots, x_6 une autre signification géométrique, par exemple supposons qu'elles soient les coordonnées homogènes d'un point de l'espace linéaire à 5 dimensions R_5 ; en les permutant on obtient 720 permutations qui nous donnent, *en général*, 720 points correspondant 12 à 12 aux 60 droites de PASCAL. Ces 720 points forment précisément les groupes analogues à ceux de l'hexagramme, car les deux figures ont la même base algébrique, les groupes des substitutions des 6 lettres.

Il y a encore bien d'autres manières d'étendre ces groupes. On trouve, en effet, dans R_5 aussi des sous-groupes spéciaux de 720 points, par exemple un groupe de 120 points, dont les coordonnées sont les différentes racines 6^{m^{es}} de l'unité, correspondant deux à deux aux 60 droites de PASCAL.

Cependant l'extension la plus intéressante dans R_5 est la suivante. Avec les 6 points fondamentaux de la conique on peut former 15 triangles $\Delta\alpha\beta$. Ces 15 triangles déterminent deux à deux les 60 droites de PASCAL, qui peuvent être représentées par le symbole $\Delta\alpha\beta\Delta\alpha\gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 relatifs aux indices romains I, II, ..., VI des 6 figures II) (*). Nous verrons dans le chapitre II qu'ils déterminent aussi trois à trois les 20 points de STEINER et les 60 points de KIRKMAN, qui peuvent être représentés respectivement par les symboles $\Delta\alpha\beta\Delta\alpha\gamma\Delta\beta\gamma$, $\Delta\alpha\beta\Delta\alpha\gamma\Delta\alpha\delta$. Les 6 figures II peuvent être représentées par cinq triangles $\Delta\alpha\beta$; par exemple la figure I par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. Une quelconque de ces figures est formée par 10 droites de PASCAL et les dix points correspondants de KIRKMAN qui sont pôles et polaires par rapport à une conique II.

Or dans l'espace R_5 aux triangles $\Delta\alpha\beta$ correspondent 15 surfaces du 2^d degré à 4 dimensions (**), qui représentent géométriquement les mêmes groupes de 48 substitutions que les triangles $\Delta\alpha\beta$ de l'hexagramme.

De même aux 60 droites de PASCAL $\Delta\alpha\beta\Delta\alpha\gamma$ correspondent 60 surfaces du

(*) A., l. c., pag. 28.

(**) Voir nomenclature, Nr. 1.

4^{me} ordre à 3 dimensions, aux 20 points de STEINER correspondent 20 surfaces du 6^{me} ordre à 2 dimensions, aux 60 points de KIRKMAN 60 surfaces du 8^{me} ordre à 2 dimensions et aux 6 figures II 6 configurations II. Je fais observer que ces groupes II sont représentés dans la théorie des substitutions de 6 lettres par les 6 fonctions remarquables à 6 valeurs trouvées par J. SERRET (*).

Ces groupes de points, de droites, de plans, de courbes et de surfaces dans R_5 ont des propriétés très simples et très intéressantes.

Les six points fondamentaux de la conique dans l'hexagramme, peuvent être représentés par les 6 sommets de la pyramide fondamentale dans R_5 . En effet au sommet $(x_1, 0, 0, 0, 0)$ correspond le point x_1 de la conique. Mais la conique elle-même a des représentants dans notre espace. Il suffit de remarquer que la conique se transforme en elle-même en permutant les 6 paramètres x_1, \dots, x_6 des 6 points; donc toute configuration ou toute courbe, surface à 2, 3, 4 dimensions dans R_5 , qui passe ou non par les 6 sommets de la pyramide fondamentale et qui se transforme en elle-même par les permutations des 6 quantités x_1, \dots, x_6 correspond évidemment à la conique.

L'étude des substitutions et des propriétés géométriques, qui en résultent, nous donne donc pour ces configurations, ces courbes, ces surfaces à 2, 3, 4 dimensions, les analogies directes de l'hexagramme, la réponse à la question proposée.

Bien qu'il soit déjà très intéressant de déterminer de telles propriétés dans un espace d'un nombre de dimensions quelconque, *il est bon d'utiliser ces théories pour l'espace à trois dimensions et pour le plan. J'arriverai à ce résultat par l'emploi du principe de projection* (1).

Étant donnée une configuration dans l'espace à $n+1$ dimensions R_{n+1} , nous obtiendrons par projection univoque, sur l'espace ordinaire et sur le plan, des configurations que j'appelle de même classe.

Nous projetterons toutes les figures analogues à celle de l'hexagramme, déterminées dans R_5 , comme il a été dit, sur l'espace à trois dimensions et sur le plan; nous obtiendrons ainsi dans ces espaces les analogies cherchées.

Ces théories m'ont conduit nécessairement à donner tout d'abord des théo-

(*) Journal de LIOUVILLE, 1850.

(1) Je tiens à constater actuellement que j'ai développé ce principe dans mon Mémoire publié récemment dans le 19^{me} volume des Math. Annalen intitulé: *Behandlung der project. Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*. Le travail présent est une vaste application du théorème que j'ai donné dans ce Mémoire sur les configurations générales, pag. 176-178.

rèmes généraux pour l'interprétation géométrique des groupes des substitutions de n lettres dans l'espace linéaire à $n-1$ dimensions, et à faire ensuite des applications à *une configuration quelconque* de l'espace à 3 dimensions et du plan.

J'indiquerai en terminant les résultats principaux que j'ai obtenus, en supposant que $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ soient les coordonnées d'une droite de l'espace à trois dimensions en prenant comme figure fondamentale les 6 complexes linéaires deux à deux en involution de KLEIN (*). On a alors pour les coordonnées d'une droite la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

une droite quelconque donne lieu en général à un groupe de 720 droites, un point à un groupe de 360 points, auquel se relie un groupe de 360 plans. Je mets cette figure en correspondance directe avec l'hexagramme lui-même et nous aurons dès lors pour cette figure de nouveaux théorèmes.

Je ne considère jamais en elle-même la figure corrélatrice d'une figure donnée. Les propriétés analogues au théorème de BRIANCHON se déduiraient des propriétés de l'hexagramme par le principe de réciprocité. Il y a pourtant des cas où je considère aussi deux figures corrélatrices, mais comme formant ensemble une seule figure.

À cet égard je suppose connu mon Mémoire sur l'hexagramme de 1877, en outre je fais appel aux propriétés principales de la théorie des substitutions; et, dans la seconde interprétation géométrique, à la théorie des complexes de droites.

La méthode que je suis est très générale et peut s'appliquer à l'étude d'une configuration quelconque.

Je crois que mon travail a aussi une certaine importance algébrique; cette méthode donne de la vie à la théorie des groupes des substitutions en les rendant plus visibles, pour ainsi dire, plus plastiques (†).

On pourrait encore étendre les groupes en question à toute courbe ou surface unicursale. L'application directe de la théorie des transformations de CREMONA, l'application à la représentation sur le plan pour les surfaces donnent des analogies nouvelles. Mais ces analogies, comme on le voit facilement, n'ont ni l'élégance, ni l'importance de celles que nous donnons ici.

(*) Math. Annalen, vol. 2. *Ueber die Liniensysteme 1^{er} und 2^{er} Grades.*

(†) KLEIN a été le premier à utiliser la géométrie pour la représentation des résolvantes des équations algébriques et pour la résolution des équations. Math. Annalen, vol 4. *Ueber die Resolventenbildung*, etc., et vol. 12. *Eine neue Auflösung der Gleichungen 5^{er} Grades*, etc.

Je donne aussi à la fin un théorème analogue à celui de PASCAL pour 8 points quelconques de la courbe rationnelle du 4^{m^e} ordre dans l'espace à 4 dimensions.

Pour terminer, je dois avertir que la dernière partie n'est pas complètement rédigée, faute de temps. Les résultats sont donnés, mais les démonstrations sont incomplètes. Au besoin, lors de la publication de ce travail, je développerai ce qui peut y manquer ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Aujourd'hui je publie en effet les démonstrations complètes en renvois sans altérer le texte.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉ SUR L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA THÉORIE
DES SUBSTITUTIONS DE n LETTRES.

§ 1.

**Étude de la correspondance projective entre deux espaces à $n - 1$ dimensions
dans un espace à $n - 1$ dimensions.**

NOTATIONS.

1. Je conserve dans le présent travail les dénominations de point, droite, plan dans le sens ordinaire et je désigne ces éléments par les symboles R_0, R_1, R_2 . J'appelle simplement espaces à 3, 4, ..., $n - 1$ dimensions les espaces linéaires à 3, 4, ..., $n - 1$ dimensions et je les désigne par les symboles R_3, R_4, \dots, R_{n-1} . Je dis que deux espaces sont corrélatifs dans l'espace R_{n-1} , lorsque la somme de leurs indices est égale à $n - 2$. Ainsi l'espace R_m a pour corrélatif l'espace R_{n-m-2} . Si $n = 2t$ l'espace R_{t-1} est corrélatif de soi-même.

Deux espaces quelconques $R_m, R_{m'}$ se coupent suivant un espace R_a , où $a = m + m' - n + 1$ ⁽¹⁾.

J'appelle *courbe* C^m du m^{me} ordre toute figure géométrique dans l'espace R_{n-1} , qui est rencontrée par un espace quelconque R_{n-2} en m points. De même j'appelle *surface* à 2, 3, ..., $n - 2$ dimensions et du m^{me} ordre toute figure géométrique qui est coupée par un espace R_{n-2} respectivement suivant une courbe ou suivant une surface à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et du même ordre.

Étant donné maintenant un point R_0 et un espace R_{n-2} , qui ne passe pas par R_0 , projetons par R_0 une courbe ou bien une surface quelconque à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et d'ordre m située dans l'espace R_{n-2} . Nous obtenons autour du point R_0 , comme sommet, un *cône-point* à 2, 3, ..., $n - 2$ dimensions et du même ordre; en effet ce cône est coupé par un espace R_{n-2} quelconque suivant une courbe du même ordre ou suivant une surface à 2, 3, ..., $n - 3$ dimensions et du m^{me} ordre.

⁽¹⁾ Voir A., Math. Annalen, I. c. Einleitung.

Si l'on veut projeter une figure de l'espace R_{n-1} par un espace R_m , il suffit de faire passer par l'espace R_m et les points, les droites, etc., et les espaces R_{n-m-3} de la figure des espaces R_{m+1} , R_{m+2} , etc., R_{n-2} . Si l'on coupe ces espaces par un espace R_{n-m-2} quelconque, qui n'ait aucun point commun avec l'espace R_m , on obtient sur R_{n-m-2} la projection de la figure donnée faite par R_m . Evidemment, l'espace sur lequel on projette et l'espace projetant doivent être deux espaces corrélatifs. Ainsi, pour projeter par exemple une figure de R_{n-1} sur un plan R_2 , il faut la projeter par un espace R_{n-4} ; ou bien, si nous voulons la projection sur un espace à 3 dimensions R_3 , il faut la projeter par un espace quelconque R_{n-5} , qui n'ait avec R_3 aucun point commun.

Le principe de projection nous sera très utile pour étudier les configurations dans l'espace à 3 dimensions et dans le plan. Personne ne s'est encore occupé de ce principe, mais il y a là une méthode féconde pour étudier non seulement des configurations de points, de droites, de plans, mais aussi de courbes et de surfaces dans l'espace à 3 dimensions. L'étude devient beaucoup plus facile si l'on cherche une configuration, une courbe, ou bien une surface à deux dimensions dans R_{n-1} dont la configuration, la courbe ou la surface donnée dans R_3 soit une projection univoque (¹).

HOMOGRAPHIES.

2. Nous allons maintenant considérer deux espaces S_{n-1} , S'_{n-1} projectifs situés dans l'espace R_{n-1} . Si nous désignons par $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ les coordonnées homogènes d'un point de S_{n-1} et par x'_1, x'_2, \dots, x'_n les coordonnées du point correspondant de S'_{n-1} on a

$$\rho x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \quad \text{où } i = 1, 2, \dots, n \quad (^1). \quad (1)$$

Les points doubles sont donnés par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Ce déterminant est du n^{me} degré en ρ , il y a donc en général n points doubles.

(¹) Voir A., *Math. Annalen*, l. c. Ce travail a été publié à la fin de l'année dernière, tandis que j'ai envoyé le présent Mémoire à l'Académie de Bruxelles au mois de juillet précédent.

(*) Les quantités a sont quelconques.

Les n points doubles forment une pyramide à n sommets; si nous prenons cette pyramide comme fondamentale, les formules (1) deviennent

$$\rho x'_i = a_i x_i. \quad (3)$$

Il existe dans l'espace R_{n-1} des homographies spéciales, tout aussi bien que dans l'espace à 3 dimensions, et qui dépendent évidemment du déterminant (2). Cependant je m'occuperai seulement des homographies, que j'appelle *collinéations*, et qui peuvent être toujours représentées par des formules analogues aux formules (3).

Soient $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \dots A_0^{(n)}$ les n points doubles, qui déterminent la pyramide fondamentale. On voit que cette pyramide a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes R_1 , $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ faces planes R_2 , etc., n faces à $n-2$ dimensions, que nous désignons respectivement par les symboles $A_1^{(1,2)}$, $A_2^{(1,2,3)}$, etc., $A_{n-2}^{(1,2,3,\dots,(n-1))} \equiv A_{n-2}^{(n)}$, où les indices supérieurs indiquent les sommets de la pyramide, par lesquels passe l'arête ou la face considérée. Nous voyons à l'inspection de ces symboles que deux faces sont corrélatives lorsque les indices supérieurs, pris ensemble, contiennent tous les n indices 1, 2, ..., n . Par ex. le point $A_0^{(1)}$ et l'espace $A_{n-2}^{(1,2,3,\dots,(n-1))}$ sont corrélatifs.

En général les espaces projectifs S_{n-1} , S'_{n-1} ont dans la face $A_{n-2}^{(1)}$ seulement les $n-1$ points doubles $A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}$; s'ils en ont encore un, tous les points de $A_{n-2}^{(1)}$ correspondront à eux-mêmes. Dans ce cas deux points $P_0 P'_0$ correspondants quelconques sont situés sur une droite, qui passe par le point $A_0^{(1)}$; en d'autres termes on obtient une *homologie* à $n-1$ dimensions, ou bien une *collinéation de première espèce*. Je dis que le point $A_0^{(1)}$ et l'espace $A_{n-2}^{(1)}$ sont *le centre et l'espace d'homologie*, ou bien les deux *espaces fondamentaux* de la collinéation.

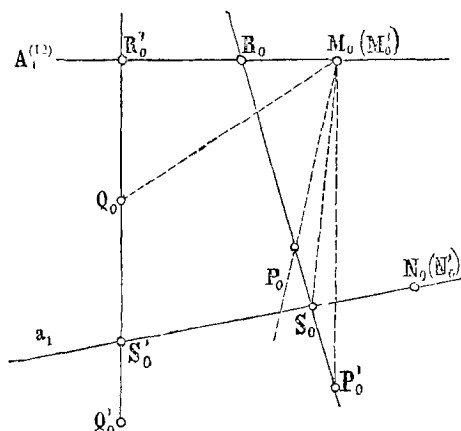
On voit aussi facilement que les points $A_0^{(1)} P_0 P'_0$ et le point d'intersection de la droite, qui les joint, avec l'espace $A_{n-2}^{(1)}$ donnent un rapport anharmonique constant quels que soient les points $P_0 P'_0$. J'appelle ce rapport anharmonique la *caractéristique* de la collinéation.

Si la caractéristique est égal à -1 , alors les points $P_0 P'_0$ sont divisés harmoniquement par $A_0^{(1)}$ et $A_{n-2}^{(1)}$. On a dans ce cas une *involution de première espèce*. Si la caractéristique est égale à une racine primitive m^{me} de l'unité, chaque point $P_0(Q'_0)$, considéré comme appartenant aux deux espaces S_{n-1} , S'_{n-1} , donne un *cycle projectif* de m points, qu'on obtient en déterminant suc-

cessivement les points correspondants de $P_0(Q'_0)$ (*). Je dis alors qu'on a une *collinéation cyclique du m^{me} ordre*.

3. Considérons maintenant les deux espaces $A_1^{(12)}$, $A_{n-3}^{(12)}$. En général les deux espaces S_{n-1} , S'_{n-1} ont dans $A_1^{(12)}$, $A_{n-3}^{(12)}$ les points doubles $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$; $A_0^{(3)}$, ... $A_0^{(n)}$; mais s'ils en ont encore un dans $A_1^{(12)}$ et $A_{n-3}^{(12)}$ tous les points de ces espaces seront des points doubles de S_{n-1} S'_{n-1} . Deux points correspondants quelconques $P_0P'_0$ sont situés, dans ce cas, sur une droite, qui coupe les deux espaces $A_1^{(12)}$, $A_{n-3}^{(12)}$. Deux plans correspondants $E_2E'_2$ passant respectivement par les points $P_0P'_0$ rencontrent l'espace $A_{n-3}^{(12)}$ en un point.

Je dis qu'on a dans ce cas une *collinéation de 2^e espèce* pour laquelle les espaces $A_1^{(12)}$, $A_{n-3}^{(12)}$ sont les deux espaces fondamentaux. On voit aussi que le rapport anharmonique de deux points correspondants $P_0P'_0$ et des deux points d'intersection R_0S_0 de la droite $P_0P'_0$ avec $A_1^{(12)}$, $A_{n-3}^{(12)}$ est constant. En effet, soient $P_0P'_0$, $Q_0Q'_0$ deux couples de points correspondants. Les deux droites



$P_0P'_0$, $Q_0Q'_0$ déterminent un espace à trois dimensions, qui passe par la droite $A_1^{(12)}$ et qui coupe l'espace $A_{n-3}^{(12)}$ suivant une droite a_1 , sur laquelle sont situés les points $S_0S'_0$ d'intersection des droites $P_0P'_0$, $Q_0Q'_0$ avec $A_{n-3}^{(12)}$. Soit donné en outre un point $M_0(M'_0)$ de la droite $A_1^{(12)}$ comme sommet; projetons par M_0 les points $P_0P'_0$, et considérons le plan E_2 des trois points $P_0Q_0M_0$. Ce plan rencontrera $A_{n-3}^{(12)}$ en un point $N_0(N'_0)$, qui sera situé sur la droite a_1 , puisque le plan E_2 appartient aussi à l'espace à

trois dimensions déterminé par les droites $P_0P'_0$, $Q_0Q'_0$. Le plan correspondant E'_2 passe par N_0M_0 et P'_0 et doit couper la droite $Q_0Q'_0$ au point Q'_0 . Si nous projetons maintenant du point N_0 les quatre droites M_0R_0 , M_0P_0 , $M_0P'_0$, M_0S_0 , on obtient quatre plans, qui passent par la droite N_0M_0 et qui

(*) Pour les cycles projectifs de m points dans l'espace à trois dimensions voir BATTAGLINI: *Sulle involuzioni di diversi ordini*, R. Acc. di Napoli, vol. 1, 2, 7. KLEIN et LIE Math. Annalen, vol. 4. *Ueber diejenigen Ebenencurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren Transformationen in sich übergehen*. A.: *Sopra alcune notevoli configurazioni*, ecc. Atti della R. Accademia dei Lincei, 1881.

coupent la droite $Q_0 Q'_0$ aux points $R'_0 Q_0 Q'_0 S'_0$; d'où

$$(P_0 P'_0 S_0 R_0) = (Q_0 Q'_0 S'_0 R'_0)$$

c. q. f. d.

Ce rapport anharmonique est la *caractéristique* de la collinéation. Si elle est égale à -1 on a une *involution* de 2^e espèce.

En général j'appelle *espace fondamental* d'une homographie un espace dont tous les points se correspondent à eux-mêmes.

Si l'on continue comme précédemment on obtient des collinéations de 3^{me}, 4^{me}, ... espèce. Si $n = 2t$, ou bien $n = 2t + 1$ on voit que, tout au plus, on a des collinéations de t^{me} espèce. Donc :

Théorème I. Si $n = 2t$ ou $n = 2t + 1$ il y a dans l'espace à $n - 1$ dimensions R_{n-1} des collinéations de 1^{re}, 2^e, 3^{me}, ... t^{me} espèce, dans lesquelles se correspondent à eux-mêmes tous les points de deux espaces fondamentaux corrélatifs, respectivement $A_0, A_{n-2}; A_1, A_{n-3}; \dots; A_{t-1}, A_{t-1}$; ou bien A_{t-1}, A_t . Deux points correspondants quelconques $P_0 P'_0$ sont situés sur une droite, qui rencontre les deux espaces fondamentaux en deux points $R_0 S_0$. Les points $R_0 S_0$ donnent avec $P_0 P'_0$ un rapport anharmonique constant, la caractéristique de la collinéation.

Si la caractéristique est égale à -1 on a des involutions de 1^{re}, 2^e, 3^{me}, ... t^{me} espèce. Si elle est égale à une racine m^{me} primitive de l'unité on a des collinéations cycliques de 1^{re}, 2^e, ... t^{me} espèce et du m^{me} ordre (1).

HOMOGRAPHIES CYCLIQUES (2).

4. Comme nous aurons besoin plus loin de ces homographies, je vais en donner les propriétés principales.

Nous avons trouvé pour la correspondance homographique générale les formules

$$\rho x'_i = a_i x_i \quad i = 1, 2, \dots n. \quad (1)$$

(1) Pour $n = 4$ on obtient deux collinéations dans l'espace à trois dimensions; pour la première les deux espaces fondamentaux sont un point et un plan; pour la seconde ce sont deux droites quelconques. Si la caractéristique est égale à -1 on obtient des collinéations ou homologies en involution. (*Involutorische Collinéation* ou bien simplement *Involution*. Voir par ex. FIEDLER *Darstell. Geom.* et REYE: *Geom. der Lage*, II Abth.) C'est donc dans ce sens que je me suis servi du mot « involution » et non dans le sens de BATTAGLINI, car j'appelle les *involutions* de BATTAGLINI, comme nous le verrons mieux plus loin, *cycles projectifs*, si l'on considère ces involutions en elles-mêmes, et *collinéations cycliques* lorsqu'il s'agit d'une collinéation ou homologie pour laquelle la caractéristique est égale à une racine m^{me} de l'unité.

(2) On voit par ce numéro même que je n'ai pas non plus appelé involutions les Homographies cycliques, comme le veut faire croire M. FOLIE dans son rapport.

Si nous opérons successivement cette transformation à un point quelconque y_i , nous obtenons un groupe de points

$$y_i, \quad a_i y_i, \quad a_i^2 y_i, \dots, \quad a_i^m y_i, \dots \quad (2)$$

que nous appelons un *groupe projectif* de points dans l'espace R_{n-1} . Il est clair qu'on passe du point y_i au point $a_i^m y_i$ par les formules

$$\rho x'_i = a_i^m x_i \quad (3)$$

on voit donc que les points $y_i, a_i^m y_i, a_i^{2m} y_i, \dots$, forment aussi un *groupe projectif*.

Si l'on suppose que les constantes a_i sont toutes positives, les points du groupe (1), qui sont en nombre infini, déterminent une *courbe transcendante* W . On obtient cette courbe en éliminant m et ρ , de manière qu'on a

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_n}{a_1}} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_1}{a_2}} = 1, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log \frac{a_n}{a_4}} \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_4}{a_3}} = 1, \text{ etc.} \quad (4)$$

En supposant $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n$ et puisque on a

$$\log \frac{a_2}{a_3} + \log \frac{a_3}{a_4} + \log \frac{a_4}{a_2} = 0,$$

nous pouvons écrire

$$\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n}} \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_n}{a_1}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_2}{a_n} + \log \frac{a_n}{a_1}}, \quad \left(\frac{x_2}{y_2}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n}} \left(\frac{x_3}{y_3}\right)^{\log \frac{a_n}{a_2}} = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)^{\log \frac{a_3}{a_n} + \log \frac{a_n}{a_2}}, \text{ etc.} \quad (5)$$

La courbe W peut donc être donnée par l'intersection de $n-2$ cônes à $n-1$ dimensions dont les sommets sont $n-2$ espaces A_{n-1} de la pyramide fondamentale. Cette courbe sera algébrique lorsque les logarithmes des rapports des coefficients a seront proportionnels à des nombres rationnels quelconques. Comme les courbes W planes et de l'espace à trois dimensions, les courbes W des espaces à plus de trois dimensions ont la propriété de se transformer en elles-mêmes par des transformations infiniment petites (*).

En effet, en posant

$$a_n = x_n = 1 \quad y_i = 1, \text{ etc.}$$

en différenciant les équations (5) on a:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{x_2 \log a_2}{x_1 \log a_1}, \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_2} = \frac{x_3 \log a_3}{x_2 \log a_2}, \dots, \quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}} = \frac{x_{n-1} \log a_{n-1}}{x_{n-2} \log a_{n-2}}. \quad (6)$$

(*) Voir KLEIN, LIE et A.: *Sopra alcune configurazioni*, I. c.

Si nous posons

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x'_1 + x'_1 \log a_1 dm \\ x_2 &= x'_2 + x'_2 \log a_2 dm \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= x'_{n-1} + x'_{n-1} \log a_{n-1} dm \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où dm est une quantité infiniment petite, et si nous différencions nous obtenons les équations (6). Mais les formules (6) nous donnent une transformation linéaire infiniment petite; donc, en opérant sur les courbes W une telle transformation, elles se transforment en elles-mêmes. En la répétant on pourra passer d'un point P_0 de la courbe W à un quelconque de ses points Q_0 ; on obtiendra ainsi une transformation de la forme

$$\rho x_i = a_i^m x_i. \quad (8)$$

Nous voyons que dans toutes les homographies données par les transformations d'une courbe W en elle-même, la pyramide fondamentale est toujours la pyramide des points doubles. Les tangentes p_0, q_0 en P_0, Q_0 à la courbe sont deux droites correspondantes dans l'homographie (8). On a donc:

Théorème II. Un groupe projectif de points détermine une courbe transcendante W , qui dans certains cas peut être aussi algébrique. Les tangentes d'une courbe W quelconque rencontrent quatre faces quelconques à $n-2$ dimensions de la pyramide des points doubles, donnée par le groupe projectif, en quatre points d'un rapport anharmonique constant.

Théorème III. Deux courbes quelconques W se rencontrent seulement aux sommets de la pyramide fondamentale, par où elles passent.

Une courbe W a toutes ses singularités sur les sommets, arêtes, etc., de la pyramide fondamentale.

Théorème IV. Une droite R_1 ou un plan R_2 , etc., donne lieu à une surface engendrée par une droite, ou par un plan, etc., qui relativement à ses droites, plans, etc., a des propriétés analogues à celles des courbes W relativement à leurs points.

5. Si nous supposons dans les formules (7) du numéro précédent $a_i^m = 1$ ou bien $a_i = \sqrt[m]{1}$, le point $a_i^m y_i$ du groupe projectif tombe sur le point y_i même, c'est à dire que nous avons un cycle projectif de m points.

Les formules (8) deviendront

$$\rho x'_i = e^{\frac{2\mu\pi\sqrt{-1}}{m}} \quad \text{ou bien} \quad \rho x'_i = r^{\mu} x_i$$

où $\mu = 0, 1, \dots, m-1$ et r est une racine primitive m^{me} de l'unité.

Si l'on multiplie les coordonnées d'un point quelconque, par ex. y_1, y_2, \dots, y_n , par n des racines m^{mes} de l'unité de toutes les manières possibles, on obtient m^{n-1} points qui forment un groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$.

Considérons les deux points de ce groupe, dont les coordonnées sont

$$r^{p_1} y_1, \quad r^{p_2} y_2, \dots, \quad r^{p_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad r^{p_{n-1}} y_{n-1}, \quad y_n \quad (1)$$

$$r^{p_1+q_1} y_1, \quad r^{p_2+q_2} y_2, \dots, \quad r^{p_s+q_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}+q_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad r^{p_{n-1}+q_{n-1}} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (2)$$

On voit facilement qu'ils sont situés sur une droite, qui rencontre les deux faces

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s \equiv A_{s-1} = 0; \quad x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_n \equiv A_{n-s-1} = 0$$

de la pyramide fondamentale. On voit aussi qu'on peut passer du point (1) au point (2) en multipliant les s premières coordonnées de (1) par r^{q_1} et les $n-s$ dernières par r^{q_2} .

Si maintenant nous faisons la même chose avec le point (2) nous obtenons le point

$$r^{p_1+2q_1} y_1, \dots, \quad r^{p_s+2q_s} y_s, \quad r^{p_{s+1}+2q_{s+1}} y_{s+1}, \dots, \quad y_n \quad (3)$$

et en continuant à faire la même opération avec le point (3) et ainsi de suite, il est clair, qu'on obtient un *cycle projectif* de m points situés sur une même droite. Donc:

Théorème V. Si l'on multiplie par ex. les s premières coordonnées d'un point quelconque du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ successivement par une puissance r^{q_1} d'une racine primitive m^{me} de l'unité, et les $n-1$ autres par une autre puissance r^{q_2} , on obtient m points d'un cycle projectif, situés sur une droite. Cette droite rencontre les deux faces

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s \equiv A_{s-1} = 0, \quad x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_n \equiv A_{n-s-1} = 0$$

de la pyramide fondamentale. D'après le théorème I les m points forment un cycle de m^{me} ordre et de s^{me} espèce.

Théorème VI. Pour chaque couple de faces opposées A_{s-1}, A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale le groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ se décompose en m^{n-2} cycles projectifs de s^{me} espèce et d'ordre m , situés respectivement sur autant de droites, qui coupent les deux faces A_{s-1}, A_{n-s-1} .

Si $n=2t$, ou bien $n=2t+1$, on a tout au plus des cycles projectifs de t^{me} espèce, situés sur des lignes droites.

6. Considérons maintenant les deux points

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots, \quad y_{n-1}, \quad y_n \quad (1)$$

$$r y_1, \quad r^2 y_2, \quad r^3 y_3, \dots, \quad r^{n-1} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (2)$$

On passe du point (1) au point (2) en multipliant les coordonnées de (1) respectivement par $r, r^2, \dots, r^{n-1}, 1$. Si nous multiplions par ces mêmes quantités les coordonnées de (2), nous obtenons le point

$$r^2 y_1, \quad r^4 y_2, \dots, \quad r^{n-2} y_{n-1}, \quad y_n. \quad (3)$$

En continuant ainsi on obtient m points d'un cycle projectif, mais qui ne sont pas situés sur une droite. Le m^{me} point sera

$$r^{m-1} y_1, \dots, \quad r y_{n-1}, \quad y_n. \quad (m)$$

Ces m points sont situés sur une courbe W . Il n'est pas difficile de voir, d'après le n.° 4, que cette courbe est algébrique. Je dis que ce cycle est du m^{me} ordre et de la $(t+1)^{\text{me}}$ espèce, lorsque $n=2t$ ou $n=2t+1$. Donc:

Théorème VII. Les m points du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$, qu'on déduit d'un point quelconque de $(y_i)_{m^{n-1}}$ en multipliant ses coordonnées respectivement par $r, r^2, r^3, \dots, r^{n-1}, 1$ forment un cycle projectif de la $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et du m^{me} ordre ($n=2t$ ou $n=2t+1$), qui est situé sur une courbe algébrique W .

Si $n=m$ il est facile, par ce qui précède, de démontrer le théorème suivant:

Théorème VIII. Les n points d'un cycle projectif de $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et d'ordre n sont situés sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre (*).

7. Si au lieu de considérer un point y_i on considère la surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \quad (1)$$

et si l'on multiplie $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ de toutes les manières possibles par n racines m^{es} de l'unité, on obtient aussi un groupe de m^{n-1} surfaces du 2^d degré à $n-2$ dimensions $(S)_{m^{n-1}}$. Or, avec ses m^{n-1} surfaces on peut former, d'une manière analogue à celle des numéros précédents, des cycles projectifs de m surfaces et respectivement de la 1^{ere}, 2^e, etc. $(t+1)^{\text{me}}$ espèce et d'ordre m .

Si nous considérons deux surfaces d'un cycle projectif de s^{me} espèce, par ex.:

$$r^{p_1} x_1^2 + \dots + r^{p_s} x_s^2 + r^{p_{s+1}} x_{s+1}^2 + \dots + r^{p_{n-1}} x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$$

$$r^{p_1+q_1} x_1^2 + \dots + r^{p_s+q_s} x_s^2 + r^{p_{s+1}+q_{s+1}} x_{s+1}^2 + \dots + r^{p_{n-1}+q_{n-1}} x_{n-1}^2 + x_n^2 = 0$$

on déduit:

Toutes les surfaces d'un cycle projectif de s^{me} espèce, où $s < t+1$, se touchent suivant deux surfaces du 2^d degré respectivement à $s-2$ et à $n-s-2$

(*) La courbe d'ordre $n-1$ est la courbe la plus simple qui puisse exister dans l'espace R_{n-1} , sans être située dans un espace de dimensions moindre.

Voir maintenant mon travail des Math. Annalen, l. c.

dimensions, situées dans deux faces opposées A_{s-1} , A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale.

Si l'on considère un cycle projectif de $(t+1)^{me}$ espèce, par ex. celui qui est déterminé par les deux surfaces

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 &= 0 \\ r x_1^2 + r^2 x_2^2 + \dots + r^{n-1} x_{n-1}^2 + x_n^2 &= 0; \end{aligned}$$

on voit que les m surfaces du cycle rencontrent les arêtes de la pyramide fondamentale en des points différents.

Nous avons aussi les théorèmes suivants:

Théorème IX. Un cycle projectif de m points du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ de s^{me} espèce a le même cycle polaire par rapport aux surfaces du 2^d degré de m^{n-2} cycles du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ de s^{me} espèce. Si le cycle du groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ est de la $(t+1)^{me}$ espèce, la courbe W qu'il détermine, a la même polaire réciproque par rapport à m^{n-1} cycles de surfaces du 2^d degré et de $(t+1)^{me}$ espèce.

Théorème X. Le groupe $(y_i)_{m^{n-1}}$ a par rapport à toutes les m^{n-1} surfaces du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ le même groupe polaire de m^{n-1} espaces v_i à $n-2$ dimensions, qui forment aussi un groupe $(v_i)_{m^{n-1}}$.

Théorème XI. La polaire réciproque d'une surface du 2^d degré d'un cycle d'espèce quelconque par rapport à une autre surface du cycle, appartient au même cycle.

La polaire réciproque d'une surface du 2^d degré par rapport à une autre surface du groupe $(S)_{m^{n-1}}$ est une surface du même groupe ⁽¹⁾.

§ 2.

Interprétation géométrique d'une substitution quelconque, particulièrement de la forme (12) (34)... $(m-1, m)$.

8. Soient y_1, y_2, \dots, y_n les coordonnées d'un point S_0 de l'espace R_{n-1} ; si nous permutons les n indices des coordonnées de toutes les manières possibles nous obtenons $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = N$ points, qui représentent les N permutations des indices $1, 2, 3, \dots, n$. Je dis qu'ils forment un groupe $(S_0)_N$.

⁽¹⁾ Pour les systèmes polaires voir A., Math. Ann., l. c., pag. 184 et suivantes. Pour les groupes $(y_i)_{m^{n-1}}$ et $(S)_{m^{n-1}}$ lorsque $n = 3, 4$ voir A.: *Sopra alcune configurazioni*, etc.

On peut mettre une substitution quelconque sous la forme

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ k & l & m & \dots & p \end{array} \right| \quad (1)$$

(k, l, m, \dots, p étant, à l'ordre près, identiques à $1, 2, \dots, n$). La substitution peut donc s'exprimer par la transformation linéaire

$$\left. \begin{array}{l} \rho x'_1 = x_k \\ \rho x'_2 = x_l \\ \vdots \\ \rho x'_n = x_p. \end{array} \right\} \quad (2)$$

On voit très clairement que nous avons à faire à une homographie entre deux espaces à $n-1$ dimensions, que nous avons déjà étudiée dans le paragraphe précédent.

Les points doubles sont donnés par le déterminant

$$\left| \begin{array}{cccccc} -\rho x_1, & 0, & 0, \dots & x_k, \dots & & 0 \\ 0, & -\rho x_2, & 0, \dots & x_l, \dots & 0, \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0, & 0, & 0, \dots, & 0, \dots & 0, \dots & x_p, \dots & -\rho x_n \end{array} \right| = 0. \quad (3)$$

Les points doubles de cette homographie restent invariables par la substitution (1). Donc:

Théorème XII. En opérant une substitution quelconque sur les indices des coordonnées d'un point y_i , on obtient en général n points qui restent invariables.

9. Nous avons trouvé (n.° 3) certaines espèces de collinéations et d'homographies (n.° 4) que nous rencontrons ici comme des cas spéciaux d'une substitution quelconque.

a) *Considérons d'abord la substitution (12).*

En opérant cette substitution sur un point

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots, \quad y_n$$

on obtient le point

$$y_2, \quad y_1, \quad y_3, \dots, \quad y_n.$$

Dans ce cas nous avons donc une involution de première espèce; c'est à dire que les deux points sont situés sur une droite, qui passe par le point des coordonnées

$$1, \quad -1, \quad 0, \quad 0, \dots \quad 0 \equiv P_0^{(12)}$$

tandis que l'espace fondamental de l'involution est

$$x_1 - x_2 \equiv \Pi_{n-2}^{(12)} = 0.$$

Or, comme la pyramide fondamentale a $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes, il est clair, que nous avons $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$, situés respectivement sur ces droites et un égal nombre d'espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$. Il y a encore un autre groupe de $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{\prime(ik)}$, qui sont situés respectivement sur les arêtes de la pyramide fondamentale, dont les coordonnées sont de la forme

$$0, \quad 0, \dots \quad 1, \quad 0, \dots \quad 1, \quad 0, \dots \quad 0.$$

Par exemple les points $P_0^{(12)}$ et $P_0^{\prime(12)}$ sont situés sur l'arête $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$ et divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)}A_0^{(2)}$. Il y a aussi un autre groupe de $\frac{n(n-1)}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i + x_k = 0.$$

L'espace $\Pi_{n-2}^{(12)}$ contient tous les points $P_0^{(ik)}$, excepté ceux qui ont dans leurs indice supérieur seulement l'indice 1 ou l'indice 2; c'est à dire qu'il contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{\prime(ik)}$. En outre, il passe par tous les points $P_0^{\prime(ik)}$ qui n'ont ni l'indice 1, ni l'indice 2 ou ni l'un, ni l'autre. Il passe donc par $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$. La même chose a lieu pour les espaces $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$ par rapport aux points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{\prime(ik)}$.

Si l'on considère la surface à $n-2$ dimensions du 2^d degré

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \equiv S_{n-2}^2 = 0 \tag{1}$$

on voit facilement que les points $P_0^{(ik)}$ et $P_0^{\prime(ik)}$ ont pour espaces polaires, par rapport à la surface (1), les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ et $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$; c'est à dire que la figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{\prime(ik)}$ et par les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$, $\Pi_{n-2}^{\prime(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface (1). Donc:

Théorème XIII. Sur chaque arête de la pyramide fondamentale, par ex. $A_0^{(i)} A_0^{(k)} \equiv A_1^{(ik)}$ il y a deux points $P_0^{(ik)}, P'_0^{(ik)}$, dont les coordonnées sont respectivement $0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0$; $0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$, et qui divisent harmoniquement le segment $A_0^{(i)} A_0^{(k)}$. Il y a aussi pour chaque face à $n-3$ dimensions de la pyramide fondamentale, par exemple $A_{n-2}^{(i)} A_{n-2}^{(k)} \equiv A_{n-3}^{(ik)}$ deux espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}, \Pi'_{n-2}^{(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i \mp x_k = 0$$

qui passent par $A_{n-3}^{(ik)}$ et qui divisent harmoniquement les deux faces $A_{n-2}^{(i)}, A_{n-2}^{(k)}$. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(k)}$ passent par le point « unité » (le point qui a toutes les coordonnées égales à l'unité).

Un espace quelconque $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{(ik)}$ et $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P'_0^{(ik)}$. De même un espace $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ contient $\frac{(n-2)(n-3)}{2} + 1$ points $P_0^{(ik)}$ et $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ points $P'_0^{(ik)}$.

Théorème XIV. La figure formée par les points $P_0^{(ik)}, P'_0^{(ik)}$ et par les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}, \Pi'_{n-2}^{(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions $\Sigma x_i^2 \equiv S_{n-2}^2 = 0$.

Théorème XV. Les $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = N$ points qu'on obtient en permutant de toutes les manières possibles les indices $1, 2, 3, \dots, n$ des coordonnées d'un point S_0 dans l'espace R_{n-1} , et qui forment un groupe $(S_0)_N$, sont situés deux à deux sur $3 \cdot 4 \dots n = \frac{N}{2}$ droites, qui passent par un quelconque des points $P_0^{(ik)}$. Les deux points sur une de ces droites sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par l'espace $\Pi_{n-2}^{(ik)}$.

b) Voyons maintenant une substitution de la forme (12) (34).

Du point $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, \dots, y_n$ on passe au point

$$y_2, \quad y_1, \quad y_4, \quad y_3, \quad y_5, \dots, \quad y_n.$$

Pour cette substitution tous les points de la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)}$ et tous les points de l'espace à $n-3$ dimensions $\Pi_{n-2}^{(12)}, \Pi_{n-2}^{(34)}$ restent fixes. En effet, chaque point de la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)}$ a ses coordonnées de la forme

$$1, \quad -1, \quad \lambda, \quad -\lambda, \quad 0, \quad 0, \dots, \quad 0$$

où λ est un paramètre. Cela a lieu aussi pour chaque point de l'espace $\Pi_{n-2}^{(12)} \Pi_{n-2}^{(34)}$,

qui est donné par les deux équations

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0$$

c'est à dire que nous avons une *involution de 2^e espèce* (n.° 3). Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont donc situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites, qui rencontrent la droite $P_0^{(12)} P_0^{(34)} \equiv P_1^{(12)(34)}$ et l'espace $\Pi_{n-2}^{(12)} \Pi_{n-2}^{(34)} \equiv \Pi_{n-3}^{(12)(34)}$. Or le nombre des droites P_1 , qui passent par le point $P_0^{(12)}$ est $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, il y en a en tout $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$; donc:

Théorème XVI. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ déterminent $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ (où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont quatre indices différents de la série 1, 2, ... n), qui contiennent les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les espaces $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ déterminent $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ espaces $\Pi_{n-3}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, où se rencontrent les deux espaces $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)}, \Pi_{n-2}^{(\gamma\delta)}$.

Théorème XVII. Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites qui coupent une des droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et l'espace correspondant $\Pi_{n-3}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points sur une des $\frac{N}{2}$ droites sont divisés harmoniquement par la droite P_1 et par l'espace Π_{n-3} .

c) Il est évident que l'on peut faire des considérations analogues pour la substitution (12) (34) (56); passons néanmoins immédiatement à la substitution de la forme

$$(12)(34)\dots(m-1, m)$$

où m est naturellement un nombre pair plus petit ou égal à n , si n est pair.

Du point

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{m-1}, y_m, y_{m+1}, \dots, y_n$$

on passe au point

$$y_2, y_1, y_4, y_3, \dots, y_m, y_{m-1}, y_{m+1}, \dots, y_n.$$

On peut facilement vérifier, que les points de l'espace déterminé par les points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, \dots, P_0^{(m-1, m)}$, que je désigne par le symbole $P_{\frac{m}{2}-1}^{(12)(34)\dots(m-1, m)}$, se transfor-

ment en eux-mêmes, ainsi que les points de l'espace, où se rencontre les $\frac{m}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(12)}, \dots, \Pi_{n-2}^{(m-1, m)}$. Pour trouver le nombre des plans $P_2^{(12)(34) \dots 56}$, il suffit de séparer les indices 1234 des restants 5, 6, ..., n .

Or, avec ceux-ci on peut former $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ combinaisons de deux indices, et si nous les combinons avec (12) (34) nous obtenons $\frac{(n-4)(n-5)}{2}$ plans P_2 , qui ont la droite $P_4^{(12)(34)}$ commune. Si l'on fait la même chose pour toutes les $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^3}$ droites P_4 , on trouve que le nombre de plans P_2 est précisément $\frac{n(n-1)\dots(n-5)}{2^4 \cdot 3}$. En continuant ainsi on arrive à cette déduction, que le nombre des espaces $P_{\frac{m}{2}-1}$ et des espaces $\Pi_{n-\frac{m}{2}-1}$ est

$$\frac{n(n-1)(n-m+1)}{2^{\frac{m}{2}+1} \cdot 3 \cdot 4 \dots \frac{m}{2}}$$

si $n = m = 2t$ il en résulte que le nombre des espaces P_{t-1} , Π_{t-1} est

$$\frac{t(t+1)(t+2)\dots(2t-1)}{2^{t-1}}.$$

Donc:

Théorème XVIII. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ déterminent

$$\frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{m!}{2}}$$

espaces $P_{\frac{m}{2}-1}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, ($\alpha, \beta, \dots, \nu$ sont m indices de la série 123... n) qui passent par les points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}, \dots, P_0^{(\mu\nu)}$. On a un égal nombre d'espaces $\Pi_{n-\frac{m}{2}-1}^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, déterminés par l'intersection des $\frac{m}{2}$ espaces $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)} \dots \Pi_{n-2}^{(\mu\nu)}$, et qui sont les polaires des premiers par rapport à la surface $S_{n-2}^2 = 0$.

Si $n = 2t$ on a $\frac{t(t+1)\dots(2t-1)}{2^{t-1}}$ espaces $P_{t-1}^{(\alpha\beta)\dots(\tau\zeta)}$ ($\alpha, \beta, \dots, \tau, \zeta$ sont identiques à l'ordre près aux indices 1, 2, ..., n) et un égal nombre d'espaces $\Pi_{t-1}^{(\alpha\beta)\dots(\tau\zeta)}$.

Nous voyons que les espaces

$$\begin{aligned} x_\alpha - x_\beta &\equiv \Pi_{n-2}^{(\alpha, \beta)} = 0 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_\tau - x_\zeta &\equiv \Pi_{n-2}^{(\tau, \zeta)} = 0 \end{aligned}$$

passent par les points $P'_0^{(\alpha, \beta)} P'_0^{(\gamma, \delta)} \dots P'_0^{(\tau, \zeta)}$, donc:

Théorème XIX. Les espaces $\Pi_{i-1}^{(\alpha, \beta), (\gamma, \delta), \dots, (\tau, \zeta)}$ sont déterminés par les points $P'_0^{(\alpha, \beta)}, P'_0^{(\gamma, \delta)}, \dots, P'_0^{(\tau, \zeta)}$.

Théorème XX. Les N points du groupe $(S_0)_N$ sont situés, deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites qui rencontrent deux espaces correspondants quelconques $P_{\frac{m}{2}-1}, \Pi_{\frac{m}{2}-1}$. Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par les deux espaces.

De ce qui précède on tire aussi la déduction suivante:

Théorème XXI. Les points $P_0^{(i, k)}$ sont situés dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et, en conséquence, 3 à 3 sur les $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites d'intersection de cet espace avec les faces planes de la pyramide fondamentale; 6 à 6 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ plans et 10 à 10 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ espaces à trois dimensions, etc.

Les 6 points d'un tel plan sont les sommets d'un quadrilatère et les 10 points d'un tel espace à trois dimensions sont les sommets d'un pentaèdre.

Les points $P_0^{(i, k)}$ et $P_0^{(i, k)}$ d'une quelconque des faces planes de la pyramide fondamentale sont les sommets d'un quadrilatère, et ceux d'une quelconque des faces à trois dimensions forment trois tétraèdres d'un système desmique (*).

Il y a donc $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ de ces quadrilatères et $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ de ces systèmes desmiques.

§ 3.

Substitutions cycliques.

10. a) Nous considérons d'abord une substitution cyclique de tous les n indices, par exemple

$$(123\dots n).$$

(*) Voir A.: *Sopra alcune notevoli configurazioni*, etc. l. c.

Du point $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ on obtient les $n-1$ autres points

$$\left. \begin{array}{c} y_2 y_3 y_4 \dots y_1 \\ \vdots \\ y_1 y_2 y_3 \dots y_{n-1} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Or, ces points forment *un cycle projectif* (n.º 5) ou, en d'autres termes, *la substitution* $(1234\dots n)$ *donne une homographie cyclique d'ordre* n . En effet, les points doubles de l'homographie donnée par la substitution $(123\dots n)$ sont évidemment les n points

$$\left. \begin{array}{ccccc} 1, & 1, & 1, \dots, & 1, & 1 \\ r_n, & r_n^2, & r_n^3, \dots, & r_n^{n-1}, & 1 \\ r_n^2, & r_n^4, & r_n^6, \dots, & r_n^{n-2}, & 1 \\ \vdots & & & & \\ r_n^{n-1}, & r_n^{n-2}, & r_n^{n-3}, \dots, & r_n, & 1 \end{array} \right\} \quad (2)$$

où r_n est une racine n^{me} primitive de l'unité. Nous voyons qu'il y a dans chaque ligne verticale et dans chaque ligne horizontale de (2) toutes les racines n^{mes} de l'unité. Mais les n points (2) d'après le numéro 5 forment un cycle projectif de n points par rapport à la pyramide fondamentale, situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre; donc les faces à $n-2$ dimensions de la pyramide déterminée par les n points (2), peuvent être écrites sous la forme

$$\left. \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0 \\ r_n x_1 + r_n^2 x_2 + r_n^3 x_3 + \dots + x_n = 0 \\ \vdots \\ r_n^{n-1} x_1 + r_n^{n-2} x_2 + r_n^{n-3} x_3 + \dots + x_n = 0. \end{array} \right\} \quad (3)$$

On voit aussi que le cycle (2) est polaire du cycle (3) par rapport à la surface S_{n-2}^2 (n.º 7). Si nous calculons les coordonnées des n points (1) par rapport à la pyramide (3), nous voyons qu'elles sont précisément de la forme

$$\begin{array}{ccc} y'_1, & y'_2, \dots, & y'_n \\ r_n y'_1, & r_n^2 y'_2, \dots, & y'_n \\ \vdots & & \vdots \\ r_n^{n-1} y'_1, & r_n^{n-2} y'_2, \dots, & y'_n \end{array}$$

ce qu'il fallait démontrer. Donc :

Théorème XXII. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique de tous les n indices par ex. $(1234\dots n)$ forment un cycle projectif de n points par rapport à la pyramide fondamentale, cycle qui est situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Théorème XXIII. Les n points qu'on obtient en partant d'un point S_0 et opérant sur ce point la substitution cyclique $(123\dots n)$ forment aussi un cycle projectif par rapport à la pyramide des points doubles. Ces points sont situés sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment $\frac{N}{n}$ cycles projectifs, qui correspondent à la substitution $(123\dots n)$.

Or, les points de la forme (2), qui ont pour coordonnées les différentes puissances d'une racine primitive n^{me} de l'unité (mod n) sont en tout $\frac{N}{n}$. J'appelle (r_n) le groupe qu'ils forment.

Dans le groupe total des substitutions de n lettres il y en a $\frac{N}{n}$ de cycliques, qui contiennent tous les n indices.

On sait que la μ^{me} puissance d'une substitution S cyclique de l'ordre n est aussi une substitution cyclique si μ est premier avec n . Si n est premier il est clair que toutes les puissances de S sont des substitutions cycliques. Si n n'est pas premier, supposons que C représente la quantité des nombres premiers avec n .

Dans le premier cas on voit que les $\frac{N}{n}$ substitutions cycliques du groupe total déterminent $\frac{N}{n^2}$ homographies cycliques; dans le second cas elles en déterminent $\frac{N}{nC}$.

Théorème XXIV. Les $\frac{N}{n}$ substitutions cycliques du groupe total des substitutions de n lettres donnent lieu à $\frac{N}{n^2}$ homographies cycliques, si n est premier, et $\frac{N}{nC}$ si n n'est pas premier. Les points doubles de ces homographies sont $n-1$ points du groupe (r_n) et le point unité. Ces points forment un cycle projectif d'ordre n par rapport à la pyramide fondamentale, situé sur une courbe rationnelle W du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Théorème XXV. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment de $\frac{N}{n}$ ou de

$\frac{N}{nC}$ manières différentes $\frac{N}{n}$ cycles projectifs de n points, chaque cycle étant situé sur une courbe rationnelle W de $(n-1)^{\text{mo}}$ ordre.

b) Nous allons maintenant nous occuper des substitutions cycliques, qui contiennent moins de n indices, par exemple:

$$(1, 2, 3, \dots, s) \text{ où } s < n.$$

Du point

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \dots, \quad y_s, \quad y_{s+1}, \dots, \quad y_n$$

on obtient les points

$$\left. \begin{array}{cccccc} y_2, & y_3, & y_4, \dots, & y_1, & y_{s+1}, \dots, & y_n \\ \vdots & & & & & \vdots \\ y_s, & y_1, & y_2, \dots, & y_{s-1}, & y_{s+1}, \dots, & y_n. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Si nous projetons les s points (1) par la face A_{n-s-1}

$$x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0$$

de la pyramide fondamentale sur la face opposée A_{s-1} , on obtient sur celle-ci un cycle projectif de s points. On a donc une homographie (*) cyclique d'ordre s autour de l'espace A_{n-s-1} . Les espaces doubles de cette homographie sont les espaces R_{n-1} qui passent par A_{n-s-1} et par les s points suivants

$$\left. \begin{array}{cccccc} 1, & 1, & 1, \dots & 1, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s, & r_s^2, & r_s^3, \dots & r_s^{s-1}, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s^2, & r_s^4, & r_s^6, \dots & r_s^{s-2}, & 1, & 0, \dots, & 0 \\ r_s^{s-1}, & r_s^{s-2}, & r_s^{s-2}, \dots & r_s^s, & 1, & 0, \dots, & 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

Les $s-1$ derniers points de (2) sont situés sur l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et sur l'espace A_{s-1} . On obtient donc dans cet espace une homographie cyclique d'ordre s .

Théorème XXVI. Une substitution cyclique de $s < n$ indices donne une homographie cyclique d'ordre s autour d'une des faces A_{n-s-1} de la pyramide fondamentale. Les s espaces doubles R_{n-s} de cette homographie passent par

(*) De même que dans l'espace R_3 on peut avoir autour d'une droite des faisceaux de plans projectifs, de même dans l'espace R_{n-1} on peut avoir autour d'un espace, par ex. R_{n-s-1} des systèmes projectifs $s-1$ fois infinis.

A_{n-s-1} , par le point unité et respectivement par $s-1$ points, situés dans la face A_{s-1} opposée à A_{n-s-1} , dont les s coordonnées, désignées par les indices de la substitution, sont les différentes racines s^{mes} de l'unité.

Par ce qui précède, en posant $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = S$, on a :

Théorème XXVII. Autour d'une face A_{n-s-1} quelconque de la pyramide fondamentale on a $\frac{S}{s^2}$, si s est un nombre premier, ou bien $\frac{S}{sC}$, homographies cycliques d'ordre s , où C indique la quantité des nombres premiers avec s , et plus petits que s .

§ 4.

Théorèmes généraux sur les groupes qu'on obtient en permutant moins de n indices.

11. Du numéro précédent *b*) nous concluons qu'il y a $(n-2)$ espèces d'homographies cycliques, respectivement de l'ordre $n, n-1$, etc. 3. Or il est clair que dans toute la figure il y a $\frac{n(n-1)\cdots(n-s)}{2 \cdot 3 \cdots s}$ points, dont les s coordonnées sont les différentes racines s^{mes} de l'unité et dont les autres $n-s$ sont égales à zéro. Je dis que ces points forment un groupe (r_s) . On voit facilement, quelle que soit s ($s \leq n$), que les points de (r_s) sont situés dans l'espace unité

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \quad (1)$$

donc :

Théorème XXVIII. Tous les points des $n-2$ groupes r_s sont situés dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$.

12. Si l'on permute seulement s coordonnées d'un point S_0 , par exemple les s premières, on obtient $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s = S$ autres points, qui forment un groupe $(S_0)_s$ spécial. Je dis que ces S points sont situés sur un espace R_{s-1} . Il suffit de démontrer ce théorème pour $s = n-1$, et nous pourrons le démontrer ensuite pour s quelconque.

En effet, faisons passer par le point

$$y_1, \quad y_2, \dots, \quad y_n$$

et par l'espace R_{n-3} , où se rencontrent les deux espaces $\Sigma x_i = 0, x_n = 0$, un

espace R_{n-2} , dont l'équation peut se mettre sous la forme

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} - \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}}{y_n} x_n = 0. \quad (1)$$

On voit que si l'on permute toutes les $n-1$ coordonnées y_1, y_2, \dots, y_{n-1} on obtient $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-1$ points situés dans l'espace (1). Les espaces $\Sigma x_i = 0$ et $x_n = 0$ passent par les points du groupe (r_{n-1}) , qui ont la dernière coordonnée nulle; ces points seront donc aussi situés en (1).

Les $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) = \frac{N}{n}$ points $(S_0)_N$ situés dans l'espace (1) forment un groupe de points qui dépend des substitutions de $n-1$ indices; ils seront donc situés $\frac{N}{n(n-1)}$ à $\frac{N}{n(n-1)}$ sur $n-1$ espaces R_{n-3} , qui passeront par l'intersection de l'espace unité et de $x_n = 0$ avec une autre face quelconque $x_k = 0$ de la pyramide fondamentale. Le groupe de $\frac{N}{n(n-1)}$ points dans un tel espace R_{n-3} dépend aussi des permutations de $n-2$ indices. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment donc $n(n-1)$ groupes de $\frac{N}{n(n-1)}$ points, situés respectivement dans $n(n-1)$ espaces R_{n-3} , qui passent par l'intersection de deux faces $x_n = 0$ $x_k = 0$ avec l'espace $\Sigma x_i = 0$.

La loi est évidente, donc:

Théorème XXIX. Si l'on permute s coordonnées d'un point S_0 , par exemple les s premières, les $\frac{N}{(s+1)(s+2) \cdot \dots \cdot n}$ points, qui en résultent et qui appartiennent au groupe total $(S_0)_N$, sont situés sur un espace R_{s-1} . Cet espace passe par l'intersection de l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ et les $n-s$ faces

$$x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0$$

de la pyramide fondamentale.

Les $\frac{N}{(s+1)(s+2) \cdot \dots \cdot n}$ points forment un groupe $(S_0)_s$ qui dépend des permutations de s indices et auquel s'appliquent les théorèmes donnés pour $s = n$.

Théorème XXX. Les N points du groupe $(S_0)_N$ forment $(s+1)(s+2) \cdot \dots \cdot n$ groupes $(S_0)_s$ situés respectivement sur $(s+1)(s+2) \cdot \dots \cdot n$ espaces R_{s-1} , et qui passent par l'espace R_{s-2} , donné par

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_{s+1} = 0, \quad x_{s+2} = 0, \dots \quad x_n = 0.$$

En tout on peut former $(s+1)(s+2)\dots n \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s}$ de ces groupes avec les N points de $(S_0)_N$.

Corollaire I. Les N points de $(S_0)_N$ forment $4 \cdot 5 \dots n$ groupes $(S_0)_6$ de 6 points situés respectivement sur $4 \cdot 5 \dots n$ plans R_2 , passant par la droite où se rencontrent les espaces

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \dots \quad x_n = 0.$$

En tout on peut former avec N points $(S_0)_N$ $4 \cdot 5 \dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot 3}$ de ces groupes.

Corollaire II. Les N points de $(S_0)_N$ forment $5 \cdot 6 \dots n$ groupes $(S_0)_{24}$ de 24 points situés respectivement sur $5 \cdot 6 \dots n$ espaces R_3 , qui passent par le plan, où se rencontrent les espaces

$$\Sigma x_i = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0, \dots, \quad x_n = 0.$$

On a en tout $5 \cdot 6 \dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ de ces groupes.

§ 5

Représentation des groupes de substitutions.

13. On sait, par la théorie des substitutions, qu'un groupe quelconque des substitutions de n lettres peut être toujours représenté par une fonction et viceversa (*). Soit F une fonction qui représente un groupe A des substitutions des n lettres x_1, x_2, \dots, x_n d'ordre m . En posant

$$F = 0 \tag{1}$$

on a une surface, qui représente géométriquement seulement le groupe A , ou bien un groupe B de l'ordre m' , qui contient A . Le second cas arrive toujours lorsqu'il y a des substitutions T , qui opérées sur la fonction F la changent de signe sans changer pourtant sa valeur absolue. Si ces substitutions n'existent pas, la surface (1) représente seulement le groupe A ; si elles existent, il faudra ajouter à F une fonction F' symétrique des n lettres x_1, \dots, x_n à une seule

(*) JORDAN: *Théorie des substitutions*, § 5, pag. 50; ce théorème est dû à CAUCHY.

valeur. Dans ce cas

$$F + F' = 0 \quad (2)$$

représentera le seul groupe A .

Si nous considérons maintenant m fonctions semblables, c'est à dire m fonctions qui représentent le même groupe A de substitutions, en les égalant à zéro et en considérant l'intersection des surfaces, représentées par ces équations, nous obtiendrons une surface à $n - m - 1$ dimensions, qui représentera le même groupe A .

Cette surface pourra se réduire à une courbe, ou bien à un certain nombre de points. Donc:

Théorème XXXI. Chaque groupe de substitutions peut être représenté par une surface à $n - 2, n - 3, \dots, 2$ dimensions, ou par une courbe, ou bien aussi par un certain nombre de points.

Si nous considérons m fonctions, qui ne sont pas semblables, correspondant à m groupes $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)}$, et si nous représentons géométriquement ces m groupes par des surfaces à $n - 2$ dimensions; leur intersection représentera un groupe résultant de la fonction, qui est le produit des m fonctions données, plus une fonction symétrique à une seule valeur, s'il en est besoin.

On a aussi:

Théorème XXXII. Pour chaque groupe A de substitutions d'ordre p on obtient d'un point S_0 un groupe de p points $(S_0)_p$. Avec tous les N points du groupe total $(S_0)_N$ on peut former au moyen du groupe A , $\frac{N}{p}$ groupes $(S_0)_p^m$ ($m = 1, 2, \dots, \frac{N}{p}$).

Le groupe des $\frac{N}{2}$ substitutions paires nous donne deux groupes $(S_0)_{\frac{N}{2}}, (S_0)_{\frac{N}{2}}^2$, très intéressants. Si nous opérons sur un point quelconque d'un de ces deux groupes une substitution impaire, on obtient un point du second groupe. Si cette substitution est de la forme $(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)$, où le nombre des transpositions est impair et en outre si ces transpositions contiennent des lettres différentes, nous obtenons par exemple au moyen du point S_0 de $(S_0)_{\frac{N}{2}}$ un point S'_0 du groupe $(S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Les deux points S_0, S'_0 sont alors situés sur une droite qui coupe l'espace $P^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$ et l'espace correspondant $\Pi^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)}$, c'est à dire les espaces fondamentaux de l'involution donnée par la substitution $(\alpha\beta)(\gamma\delta)\dots(\mu\nu)$. Si la substitution est de la forme $(\alpha\beta)$ les deux points S_0, S'_0

sont situés sur une droite passant par le point $P_0^{(\alpha\beta)}$, et les points $S_0S'_0$ sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(\alpha\beta)}$ et par l'espace $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)}$; $P_0^{(\alpha\beta)}$ et $\Pi_{n-2}^{(\alpha\beta)}$ étant le centre et l'espace de l'involution donnée par la substitution $(\alpha\beta)$, donc:

Théorème XXXIII. Pour le groupe des $\frac{N}{2}$ substitutions paires le groupe $(S_0)_N$, qui provient d'un point quelconque S_0 , se décompose en deux pyramides de $\frac{N}{2}$ sommets $(S_0)_{\frac{N}{2}}^1, (S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Ces deux pyramides sont homologues de $\frac{n(n-1)}{2}$ manières différentes, les $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$ et les espaces correspondants $\Pi_{n-2}^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie.

Deux sommets des deux pyramides, situés sur une droite passant par $P_0^{(ik)}$, sont divisés harmoniquement par ce point et par l'espace correspondant $\Pi_{n-2}^{(ik)}$. Si l'on applique à un point quelconque d'une des deux pyramides une substitution impaire on obtient un point de l'autre.

14. Nous étudierons maintenant les surfaces à $n-2$ dimensions qui représentent le groupe total.

La surface la plus simple à $n-2$ dimensions qui représente le groupe total est l'espace unité

$$\Sigma x_i = 0. \quad (1)$$

Nous avons ensuite les surfaces

$$\Sigma x_i^2 = 0, \quad \Sigma x_i x_k = 0. \quad (2)$$

Il est clair que chaque surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions qui représente le groupe total appartient au faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0. \quad (3)$$

Si nous déterminons la surface de (3) qui passe par un point quelconque S_0 on voit qu'elle passera aussi par tous les points du groupe $(S_0)_N$. En outre, il est clair que les surfaces du faisceau (3) se touchent suivant une surface du 2^d degré à $n-3$ dimensions S_{n-3}^2 , située dans l'espace unité. Donc:

Théorème XXXIV. Un groupe quelconque $(S_0)_N$ de N points est situé sur une surface du 2^d degré à $n-2$ dimensions S_{n-2}^2 du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0.$$

Toutes les surfaces du faisceau se touchent suivant une surface du 2^d degré à $n-3$ dimensions S_{n-3}^2 , située dans l'espace

$$\Sigma x_i = 0.$$

à $C_p - 1$ dimensions

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_{C_p-1} f_{C_p} = 0$$

où $f_1, f_2, \dots, f_{C_p-1}$ sont des surfaces de p^{me} ordre qui n'appartiennent pas à une variété de dimensions moindre, et qui représentent le groupe total.

15. Nous avons vu que si l'on permute seulement s coordonnées, on obtient d'un point S_0 un groupe $(S_0)_s$ du groupe total $(S_0)_N$. Ce groupe est situé dans un espace R_{s-1} (n.º 12) et il correspond aussi aux permutations de s indices. Donc le groupe $(S_0)_s$ sera situé aussi sur une surface du 2^l degré à $s - 2$ dimensions, qui n'est autre chose, que l'intersection de R_{s-1} avec la surface du 2^d degré à $n - 2$ dimensions, déterminée par le groupe $(S_0)_N$. Donc:

Théorème XXXVI. Les $(s + 1)(s + 2) \dots n \frac{n(n-1) \dots (n-s+1)}{2 \cdot 3 \dots s}$ groupes $(S_0)_s$ (Théor. XXX), qu'on peut former avec les N points du groupe $(S_0)_N$, sont respectivement situés en autant de surfaces du 2^d degré et à $s - 2$ dimensions.

Corollaire I. Les $4 \cdot 5 \dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes $(S_0)_3$ de 6 points sont situés en autant de sections coniques.

Corollaire II. Les $5 \cdot 6 \dots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ groupes $(S_0)_{24}$ de 24 points sont situés respectivement en autant de surfaces de 2^d degré et à deux dimensions.

N'allons pas plus loin dans cette théorie; ce que nous en avons dit suffira pour le cas de 6 lettres que nous avons à considérer.

§ 6.

Projections sur un espace à trois dimensions et sur un plan.

16. Soient donnés n points quelconques d'un plan S_2 dans R_{n-1} , qui ne soient pas situés sur une droite, et projetons-les par un espace S_{n-4} , qui ne coupe pas S_2 . On obtient autour de l'espace S_{n-4} n espaces S_{n-3} , qui ne sont pas situés dans un même espace R_{n-2} . On pourra donc choisir d'une infinité de manières dans ces n espaces n points tels qu'ils soient situés dans l'espace R_{n-1} sans être situés dans un espace de dimensions moindre. Ces n points for-

ment une pyramide en R_{n-1} , la plus simple qui existe dans R_{n-1} ; on peut donc regarder les n points donnés du plan S_2 comme la projection des n sommets d'une infinité de pyramides en R_{n-1} . Et réciproquement, d'une telle pyramide on pourra obtenir par projection toutes les espèces de configurations de n ou bien moins de n points sur le plan (*). On voit que ce même raisonnement peut être appliqué au cas d'une configuration de n points dans l'espace à trois ou à plus de trois dimensions. Donc :

Théorème XXXVII. D'une pyramide fondamentale de n sommets de l'espace R_{n-1} on peut par projection obtenir toutes les espèces de pyramides ou polygones de n ou moins de n sommets de l'espace à trois ou à plus de trois dimensions et du plan (†).

PROJECTIONS DES GROUPES PRÉCÉDENTS SUR UN ESPACE S_3 .

17. Projetons maintenant les figures que nous avons étudiées en R_{n-1} dans les paragraphes précédents, par un espace S_{n-5} sur un espace quelconque S_3 , qui ne coupe S_{n-5} en aucun point. Si l'espace S_{n-5} est quelconque, la pyramide fondamentale sera projetée en S_3 sur une pyramide ${}_1A_0^{(1)}, {}_1A_0^{(2)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ générale.

Si l'on projette les groupes projectifs d'un nombre infini de points (n.º 4) on obtient en S_3 des groupes (P) analogues, mais qui ne sont plus projectifs, car pour les groupes projectifs dans l'espace à trois dimensions la pyramide fondamentale des points doubles doit se réduire à un tétraèdre. On voit donc que les groupes (P) sont une généralisation des groupes projectifs de l'espace à trois dimensions par rapport à une pyramide de n sommets. Ils sont situés sur des courbes transcendentes ou algébriques W' , qui sont les projections des courbes correspondantes dans l'espace R_{n-1} . Ces courbes W' sont aussi une généralisation des courbes W de l'espace à trois dimensions.

Le groupe $(y)_{m^{n-1}}$ sera projeté en un groupe ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ de S_3 . Le nombre des faces A_{s-1} de la pyramide fondamentale en R_{n-1} est $\frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{2\cdot 3\dots s}$, donc du théorème VI il résulte que :

Théorème XXXVIII. Les points ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ ($n = 2t$ ou $n = 2t + 1$) sont situés m à m sur $m^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-s+1)}{2\cdot 3\dots s}$ droites, où $s = 1, 2, 3, \dots, t$.

(*) Nous disons que deux configurations de m points dans un espace quelconque sont de la même espèce, quand les m points ont la même disposition dans les deux configurations.

(†) Voir le théorème général sur les configurations que j'ai donné dans mon Mémoire des Math. Annalen, p. 177.

Et si l'on pose dans le théorème VI $s=1, 2$ on obtient:

Théorème XXXIX. Les m^{n-1} points du groupe ${}_1(y)_{m^{n-1}}$ sont situés m à m sur m^{n-2} droites passant par un quelconque des sommets ${}_1A_0^i$ de la pyramide dans S_3 . Ils sont situés aussi m à m sur m^{n-2} droites, qui rencontrent une quelconque des $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes de cette pyramide.

Et du théorème VII on déduit:

Il y a un certain nombre (qui ne doit pas être difficile à déterminer) de systèmes de m^{n-2} cycles de m points situés sur des courbes algébriques W' . Si m est égal à n , les courbes W' sont des courbes rationnelles de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Les courbes W dans R_{n-1} ont toutes leurs singularités sur les sommets, sur les arêtes, etc. de la pyramide fondamentale; les courbes W' auront les mêmes singularités et en outre celles qui dérivent de la projection même. Dans mon *Mémoire des Math. Annalen* à la page 208 j'ai démontré que, d'une courbe rationnelle de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre dans R_{n-1} on peut obtenir par projection toutes les espèces de courbes rationnelles de $(n-1)^{\text{me}}$ ordre, ou d'ordre moindre, du plan et de l'espace à trois dimensions. On voit donc que l'on peut construire sur chaque courbe rationnelle du plan et de l'espace à trois dimensions des cycles de n points analogues à ceux que nous venons de trouver.

18. Des théorèmes XIII, XVI, XXI on a:

Théorème XL. Les deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ sont projetés en deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$, où les deux points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$ divisent harmoniquement les deux sommets ${}_1A_0^{(i)}$, ${}_1A_0^{(k)}$. De même, les droites $P_1^{\alpha\beta}(\gamma\delta)$ donnent par projection des droites ${}_1P_1^{\alpha\beta}(\gamma\delta)$, qui passent par les points ${}_1P_0^{\alpha\beta}$, ${}_1P_0^{\gamma\delta}$.

Les points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites, 6 à 6 sur $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ plans. Les 6 points d'un tel plan sont les sommets d'un quadrilatère.

Les points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$ sur une face plane de la pyramide fondamentale sont les sommets d'un quadrilatère, et ceux qui sont situés sur les 6 arêtes d'un tétraèdre de la pyramide forment un système desmique. Ils forment donc en tout $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ systèmes desmiques.

Des théorèmes XV, XVII, XXV on déduit:

Théorème XLI. En projetant un groupe quelconque $(S_0)_N$ de R_{n-1} sur S_3 on obtient un groupe de $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = N$ points ${}_1(S_0)_N$ dans S_3 , qui sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un quelconque des points ${}_1P_0^{(ik)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites, qui coupent une quelconque des droites ${}_1P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Ces N points forment de $\frac{N}{n^2}$ ou de $\frac{N}{nC}$ manières différentes $\frac{N}{n}$ cycles de n points, situés respectivement sur des courbes W' rationnelles du $(n-1)^{\text{me}}$ ordre.

Des corollaires I et II (n.° 16) on tire:

Théorème XLII. Les N points de ${}_1(S_0)_N$ forment $4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes ${}_1(S_0)_6$ de 6 points situés sur un égal nombre de coniques, dont les plans se rencontrent $4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$ à $4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$ suivant $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ droites situées respectivement sur les $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ faces de la pyramide ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ de S_3 .

Théorème XLIII. Les mêmes N points forment $5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ groupes de ${}_1(S_0)_{24}$ de 24 points situés en autant de surfaces du 2^d degré en S_3 . Et des théorèmes XXXII, XXXIII.

Théorème XLIV. Pour chaque groupe de substitutions A d'ordre p on obtient d'un point ${}_1S_0$ un groupe de p points ${}_1(S_0)_p$. Avec tous les N points ${}_1(S_0)_N$ on peut former $\frac{N}{p}$ groupes ${}_1(S_0)_p^m$, où $m = 1, 2, \dots, \frac{N}{p}$.

Théorème XLV. Le groupe ${}_1(S_0)_N$ se décompose en deux pyramides de $\frac{N}{2}$ sommets ${}_1(S_0)_{\frac{N}{2}}^1, {}_1(S_0)_{\frac{N}{2}}^2$. Les sommets de ces deux pyramides sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un point ${}_1(P_0)^{(ik)}$ quelconque.

Or à l'aide du théorème XXXVII on a:

Théorème XLVI. Pour chaque pyramide de n ou moins de n sommets dans l'espace à trois dimensions on obtient des configurations analogues à la précédente, que nous appelons de même classe.

Si nous projetons, par ex., par un espace S_{n-5} passant par le point $P_0^{(1n)}$, il est clair que la pyramide fondamentale dans R_{n-1} sera projetée en S_3 suivant

une pyramide de $n - 1$ sommets, parce que S_{n-5} et les deux points $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$ sont situés dans un espace S_{n-4} , qui rencontre S_3 en un seul point. En outre on voit aussi que les N points d'un groupe $(S_0)_N$ seront projetés en $\frac{N}{2}$ points; puisque les N points sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par le point $P_0^{(12)}$.

Si l'espace S_{n-5} est situé dans l'espace unité $\Sigma x_i = 0$, les points de cet espace seront projetés en S_3 sur le plan E_2 d'intersection de $\Sigma x_i = 0$ avec S_3 . Et du théorème XXVIII on aura que tous les points ${}_1(r_s)$ (où $s = 2, 3, \dots, n$) seront situés sur le plan E_2 .

PROJECTIONS SUR UN PLAN S_2 .

19. Nous devons projeter la figure par un espace S_{n-4} , chaque point P_0 de la figure projetée par S_{n-4} donne un espace S_{n-3} , qui rencontre S_2 en un point ${}_2P_0$, qui est la projection du premier point sur S_2 .

Je ne veux citer que les théorèmes les plus intéressants, les autres se déduisant de la même manière.

Théorème XLVII. Les n sommets de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(n)}$ dans R_{n-1} sont projetés en général par S_{n-4} sur S_2 en n sommets ${}_2A_0^{(1)}, \dots, {}_2A_0^{(n)}$ d'un polygone général. De même les points $P_0^{(ik)}, P_0'^{(ik)}$ sont projetés en deux groupes de $\frac{n(n-1)}{2}$ points ${}_2P_0^{(ik)}, {}_2(P_0)^{(ik)}$ divisant harmoniquement les deux sommets ${}_2A_0^{(i)}, {}_2A_0^{(k)}$ du polygone.

Les points ${}_2(P_0)^{ik}$ sont situés trois à trois sur $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ droites et forment $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ quadrilatères.

Les points ${}_2P_0^{(ik)}, {}_2P_0'^{(ik)}$ pris ensemble, forment $\frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ quadrilatères qui donnent lieu à $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ systèmes desmiques de quadrilatères ⁽¹⁾.

Théorème XLVIII. Les N points d'un groupe quelconque $(S_0)_N$ de R_{n-1} se projettent en N points d'un groupe ${}_2(S_0)_N$ sur le plan S_2 , qui sont situés deux à deux sur $\frac{N}{2}$ droites passant par un quelconque des points ${}_2P_0^{(ik)}$.

⁽¹⁾ Voir A.: *Sopra alcune notevoli config.* I. c., Mem. II, Parte II.

Théorème XLIX. Les N points d'un groupe ${}_2(S_0)_N$ forment $4 \cdot 5 \cdots n \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3}$ groupes ${}_2(S_0)_6$ de 6 points situés sur un égal nombre de coniques en S_2 .

Du théorème XXXVII nous obtenons :

Théorème L. Pour chaque polygone de n ou moins de n sommets du plan S_2 on obtient des configurations spéciales de même classe et desquelles résultent des théorèmes analogues aux précédents.

§ 7.

Application aux courbes et aux surfaces dans l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

20. Si nous considérons maintenant une surface F quelconque dans l'espace à trois dimensions du m^{me} ordre, nous savons qu'elle est déterminée par $\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} - 1$ points. Or en posant

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{2 \cdot 3} = n.$$

Ces n points, que nous désignons par ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$, sont toujours la projection des n sommets d'une infinité de pyramides fondamentales dans l'espace R_{n-1} (n.° 17). Soit donnée une de ces pyramides, par exemple $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(n)}$; alors par les substitutions de n lettres nous obtiendrons pour cette pyramide les groupes, que nous avons étudiés, dans les paragraphes précédents, par lesquels la pyramide fondamentale reste inaltérée. En projetant ses n sommets sur les n points donnés ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(n)}$ situés sur la surface F , on obtient aussi pour ces points des configurations analogues à celles que nous venons de trouver, et qui sont une simple expression géométrique des groupes des substitutions de n lettres.

La même chose a évidemment lieu pour les courbes situées dans l'espace R_3 ou bien sur le plan. Mais je remarque que en prenant sur chaque courbe ou sur chaque surface un nombre n' quelconque de points, ($n' \leq n$), on a des configurations pour les n' points de la courbe et de la surface, qui correspondent à la théorie des substitutions de n' lettres.

21. On peut regarder les n lettres x_1, x_2, \dots, x_n comme les paramètres homogènes qui déterminent une surface du m^{me} ordre, car nous savons que

toutes les surfaces dans R_3 du m^{me} ordre constituent une variété $n-1$ fois infinie et qui est représentée par l'équation

$$x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n = 0 \quad (1)$$

où f_1, f_2, \dots, f_n sont n surfaces tout à fait arbitraires et qui ne dépendent pas les unes des autres.

En permutant les paramètres x_1, x_2, \dots, x_n , comme nous l'avons fait pour les n coordonnées d'un point dans l'espace R_{n-1} , on obtient d'une surface quelconque $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = N$ surfaces du m^{me} ordre, qui donnent aussi une interprétation géométrique des substitutions de n lettres.

Cela a lieu aussi évidemment pour chaque courbe du m^{me} ordre sur le plan.

Si dans la variété (1) on pose $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ on voit que la surface

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 0$$

se transforme en elle-même. Elle représente donc la surface fondamentale de ces configurations.

Quoique dans ce chapitre nous n'ayons pas parlé de l'Hexagramme mystique, on s'aperçoit facilement que les propriétés que nous avons données servent de base pour traiter la question; comme nous le verrons dans les chapitres suivants. Nous montrerons ensuite, que les groupes des droites de PASCAL, des points de KIRKMAN, des six figures II, etc. donnent une expression géométrique particulière, bien simple et élégante des propriétés des groupes des substitutions de 6 lettres. Les figures que nous trouverons et qui représentent les mêmes groupes de 6 lettres nous conduisent à une extension nécessaire des groupes qui correspondent à l'Hexagramme mystique.

CHAPITRE II.

PREMIÈRE INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES GROUPES DES SUBSTITUTIONS
DE SIX LETTRES EN RELATION AVEC LES GROUPES DE L'HEXAGRAMME MYSTIQUE
DANS LES ESPACES À 5, 4, 3 DIMENSIONS ET DANS LE PLAN.

§ 1.

Groupes principaux de l'Hexagramme.**Emploi d'une notation nouvelle.**

22. Pour traiter la question par rapport aux espaces à 5, 4, 3 dimensions et au plan, il faut que je donne d'abord un résumé des groupes principaux de l'hexagramme. Je les emprunte à mon travail de 1877; cependant j'aurai recours ici à une notation nouvelle plus simple et plus conforme à la théorie des substitutions de six lettres.

Soient donc donnés 6 points 1, 2, 3, 4, 5, 6 fondamentaux d'une conique sur un plan. En joignant les 6 points deux à deux on obtient 15 droites, qu'on appelle les 15 côtés de l'hexagramme. Ces 15 côtés se rencontrent deux à deux, en dehors des 6 points fondamentaux, en 45 points P , qu'on désigne par le symbole $P_{ik,lm}$, où i, k, l, m sont quatre indices quelconques de la série 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On peut former avec les 6 points fondamentaux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, dont les côtés contiennent tous les 6 points.

TABLEAU DES TRIANGLES $\Delta_{\alpha\beta}$.

Δ_{12}	12 · 34 · 56	Δ_{23}	14 · 25 · 36	Δ_{35}	15 · 26 · 34
Δ_{13}	16 · 23 · 54	Δ_{24}	15 · 23 · 46	Δ_{36}	12 · 35 · 46
Δ_{14}	14 · 26 · 35	Δ_{25}	16 · 24 · 35	Δ_{45}	12 · 36 · 45
Δ_{15}	13 · 25 · 46	Δ_{26}	13 · 26 · 45	Δ_{46}	16 · 25 · 34
Δ_{16}	15 · 24 · 36	Δ_{34}	13 · 24 · 56	Δ_{56}	14 · 23 · 56.

Nous verrons plus loin quelle est la signification des deux indices $\alpha\beta$ des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

DROITES DE PASCAL.

23. Avec les 6 points de la conique fondamentale (ou bien avec 6 lettres) on obtient 720 permutations qui correspondent 12 à 12 aux 60 hexagones de l'hexagramme, ou bien aux 60 droites de PASCAL.

Si l'on considère, par exemple, l'hexagone 123456, ses côtés sont 12, 45, 23, 56, 34, 61, et les trois points $P_{12.45}$, $P_{23.56}$, $P_{34.61}$ sont situés sur la droite de PASCAL de l'hexagone 123456. Si l'on opère sur cet hexagone les deux substitutions cycliques inverses (123456) et (654321) on voit que la droite de PASCAL reste fixe. On peut représenter la droite de PASCAL de l'hexagone 123456 par le symbole

$$\left| \begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \end{array} \right| \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}.$$

C'est à dire que *chacune des 60 droites de PASCAL de la figure peut être représentée par l'ensemble de deux triangles $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$.*

Mais il y a un autre triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ qui joue un rôle important pour la droite de PASCAL 123456 ou bien $\Delta_{12}\Delta_{13}$; c'est le triangle $14 \cdot 25 \cdot 36 \equiv \Delta_{23}$. Il est clair qu'on peut indiquer toute de suite cet autre triangle lorsque l'hexagone ou le symbole de la droite de PASCAL est donné. J'ai appelé Δ_{23} le triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$ (*).

En opérant la substitution (14)(25)(36) sur les triangles Δ_{12} , Δ_{23} on voit qu'ils se transforment l'un dans l'autre, c'est à dire que la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$ ne change pas.

POINTS DE STEINER.

24. Si nous considérons l'hexagone 123456 et que nous laissons fixes les indices impairs 1, 3, 5, ou bien les indices pairs 2, 4, 6, en permutant de toutes les manières possibles les trois restants nous aurons les deux groupes suivants de 3 hexagones, savoir:

$$\begin{array}{cc} 123456 & 123654 \\ 143652 & 163452 \\ 163254 & 143256. \end{array}$$

(*) A., *Nuovi teoremi sull' Hex.*, n.º 7.

Les trois droites de PASCAL des trois premiers hexagones ont les symboles $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ et celles des trois autres, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$. Les trois premières droites se rencontrent en un point G_{123} de STEINER et les trois autres se coupent au point conjugué G_{456} . Les 20 points de STEINER se divisent en dix couples de points conjugués par rapport à la conique fondamentale (*).

Les deux points de STEINER G_{123} , G_{456} peuvent être représentés par un symbole unique, savoir

$$\begin{vmatrix} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Si nous regardons ce symbole comme un déterminant, les termes positifs de ce déterminant contiennent respectivement les indices 1, 3, 5; tandis que les termes négatifs contiennent respectivement les indices 2, 4, 6. Cependant il est intéressant de représenter les deux points de STEINER conjugués, séparément au moyen des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$; ainsi nous représentons le point G_{123} par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$ et le point conjugué par le symbole $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$. De ces symboles résulte immédiatement la détermination des droites de PASCAL qui passent par les deux points de STEINER. Nous verrons bientôt que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ sont donnés par les 6 figures II. J'appelle les triangles $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$ les triangles des points de STEINER G_{123} , G_{456} (**). Nous voyons aussi à l'inspection de ces symboles que le triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ des trois droites de PASCAL, qui se coupent en un point de STEINER G_{123} , par exemple de la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$, est précisément fourni par le troisième triangle Δ_{23} du symbole du point considéré G_{123} . En outre, remarquons que les trois sommets du triangle par exemple Δ_{23} , sont situés respectivement sur les trois droites de PASCAL $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$ qui passent par le point conjugué G_{456} . Donc:

Théorème LI. Les trois triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ des trois droites de PASCAL qui passent par un point de STEINER ont leurs sommets respectivement sur les trois droites de PASCAL qui passent par le point conjugué.

POINTS DE KIRKMAN.

25. Il y a une autre manière de permuter les 6 points fondamentaux de manière à ce que trois droites de PASCAL se rencontrent en un point.

(*) HESSE: *Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid*. Journal de CRELLE, vol. 24, p. 40.

(**) *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXII, l. c.

Si l'on considère l'hexagone 123456 correspondant à la droite de PASCAL Δ_{12} , Δ_{13} , en négligeant les 6 côtés de l'hexagone il reste encore 9 côtés avec lesquels on peut former les trois hexagones

$$135264, \quad 136425, \quad 153624$$

qui correspondent aux trois droites $\Delta_{14}\Delta_{15}$, $\Delta_{15}\Delta_{16}$, $\Delta_{14}\Delta_{16}$. Ces trois droites se rencontrent en un point de KIRKMAN.

Ce point peut être aussi représenté par l'ensemble de trois triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, savoir $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. On voit toute de suite la différence qui existe entre les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'un point de KIRKMAN et ceux des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'un point de STEINER. Dans les premiers le même indice est répété trois fois, les autres étant différents; tandis que pour les points de STEINER on a 3 indices différents, chacun répété deux fois.

On appelle le point $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ le point de KIRKMAN correspondant à la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

FIGURES II.

26. Ce sont six figures formées par 10 points de KIRKMAN et par les 10 droites correspondantes de PASCAL; trois droites de PASCAL passant en chacun des dix points et trois points étant sur chacune des dix droites. Les dix points et les dix droites sont pôles et polaires par rapport à une conique.

Je donne ici un tableau des 6 figures II et j'en donnerai ensuite une nouvelle notation au moyen des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

TABLEAU DES 6 FIGURES II.

I.		II.		III.	
G_{123}	123456 = p_{345}	G_{123}	125634 = p_{345}	G_{123}	163254 = p_{345}
G_{145}	135264 = p_{123}	G_{245}	153246 = p_{123}	G_{356}	153462 = p_{123}
G_{156}	136425 = p_{124}	G_{246}	154623 = p_{124}	G_{345}	156243 = p_{124}
G_{146}	153624 = p_{125}	G_{256}	135426 = p_{125}	G_{346}	135642 = p_{125}
G_{126}	124365 = p_{145}	G_{126}	126543 = p_{145}	G_{234}	142563 = p_{145}
G_{136}	154236 = p_{245}	G_{236}	136254 = p_{245}	G_{134}	132456 = p_{245}
G_{124}	126534 = p_{135}	G_{125}	124356 = p_{135}	G_{236}	146352 = p_{135}
G_{134}	145326 = p_{235}	G_{235}	163524 = p_{235}	G_{136}	123546 = p_{235}
G_{125}	125643 = p_{134}	G_{124}	123465 = p_{134}	G_{235}	143625 = p_{134}
G_{135}	132546 = p_{234}	G_{234}	132546 = p_{234}	G_{135}	154326 = p_{234}

IV.		V.		VI.	
G_{456}	$125436 = p_{345}$	G_{456}	$145632 = p_{345}$	G_{456}	$165234 = p_{345}$
G_{124}	$153264 = p_{123}$	G_{125}	$135246 = p_{123}$	G_{236}	$135462 = p_{123}$
G_{234}	$156423 = p_{124}$	G_{135}	$134625 = p_{124}$	G_{126}	$136245 = p_{124}$
G_{134}	$135624 = p_{125}$	G_{235}	$153426 = p_{125}$	G_{136}	$153642 = p_{125}$
G_{345}	$124563 = p_{145}$	G_{345}	$126345 = p_{145}$	G_{156}	$142365 = p_{145}$
G_{346}	$134256 = p_{245}$	G_{356}	$156234 = p_{245}$	G_{146}	$152436 = p_{245}$
G_{145}	$126354 = p_{135}$	G_{245}	$163542 = p_{135}$	G_{356}	$146532 = p_{135}$
G_{146}	$143526 = p_{235}$	G_{256}	$165324 = p_{235}$	G_{346}	$125346 = p_{235}$
G_{245}	$123645 = p_{134}$	G_{145}	$125463 = p_{134}$	G_{256}	$145623 = p_{134}$
G_{246}	$152346 = p_{234}$	G_{156}	$132564 = p_{234}$	G_{246}	$134526 = p_{234}$

Je fais observer que les indices des droites p n'ont rien de commun avec les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui désignent les 6 points fondamentaux, ou bien avec ceux qui désignent les 6 indices des 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ relatifs aux 6 figures II. Ce sont seulement des indices se rapportant aux dix droites et aux dix points d'une figure II. Par exemple sur la droite p_{345} sont situés les points de KIRKMAN K_{34} , K_{35} , K_{45} et elle correspond au point K_{12} . Le point K_{12} est le pôle de la droite p_{345} par rapport à la conique II de la figure à laquelle il appartient. Le point de STEINER qui est placé à côté de chaque droite de PASCAL désigne précisément le point de STEINER situé sur la droite.

Mais les propriétés des 6 figures II résultent bien plus clairement du tableau que je vais donner en représentant les droites de PASCAL par deux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$.

TABLEAU II DES 6 FIGURES II.

I.	II.	III.
$12 \cdot 34 \cdot 56 = \Delta_{12}$	$12 \cdot 34 \cdot 56 = \Delta_{12}$	$16 \cdot 23 \cdot 54 = \Delta_{13}$
$16 \cdot 23 \cdot 54 = \Delta_{13}$	$14 \cdot 25 \cdot 36 = \Delta_{23}$	$14 \cdot 25 \cdot 36 = \Delta_{23}$
$14 \cdot 26 \cdot 35 = \Delta_{14}$	$15 \cdot 23 \cdot 46 = \Delta_{24}$	$13 \cdot 24 \cdot 56 = \Delta_{34}$
$13 \cdot 25 \cdot 46 = \Delta_{15}$	$16 \cdot 24 \cdot 35 = \Delta_{25}$	$15 \cdot 26 \cdot 34 = \Delta_{35}$
$15 \cdot 24 \cdot 36 = \Delta_{16}$	$13 \cdot 26 \cdot 45 = \Delta_{26}$	$12 \cdot 35 \cdot 46 = \Delta_{36}$
$\equiv \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}$	$\equiv \Delta_{12} \Delta_{23} \Delta_{24} \Delta_{25} \Delta_{26}$	$\equiv \Delta_{13} \Delta_{23} \Delta_{34} \Delta_{35} \Delta_{36}$

III.	IV.	V.
$14 \cdot 26 \cdot 35 = \Delta_{14}$	$13 \cdot 25 \cdot 46 = \Delta_{15}$	$15 \cdot 24 \cdot 36 = \Delta_{16}$
$15 \cdot 23 \cdot 46 = \Delta_{24}$	$16 \cdot 24 \cdot 35 = \Delta_{25}$	$13 \cdot 26 \cdot 45 = \Delta_{26}$
$13 \cdot 24 \cdot 56 = \Delta_{34}$	$15 \cdot 26 \cdot 34 = \Delta_{35}$	$12 \cdot 35 \cdot 46 = \Delta_{36}$
$12 \cdot 36 \cdot 45 = \Delta_{45}$	$12 \cdot 36 \cdot 45 = \Delta_{45}$	$16 \cdot 25 \cdot 34 = \Delta_{46}$
$16 \cdot 25 \cdot 34 = \Delta_{46}$	$14 \cdot 23 \cdot 56 = \Delta_{56}$	$14 \cdot 23 \cdot 56 = \Delta_{56}$
$\equiv \Delta_{14} \Delta_{24} \Delta_{34} \Delta_{45} \Delta_{46}$	$\equiv \Delta_{15} \Delta_{25} \Delta_{35} \Delta_{45} \Delta_{56}$	$\equiv \Delta_{16} \Delta_{26} \Delta_{36} \Delta_{46} \Delta_{56}$

On voit donc par là que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dépendent des indices romains des 6 figures II. En outre, on voit facilement qu'à la droite de PASCAL, par exemple $\Delta_{12}\Delta_{13}$ de la figure I, correspond le point de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ de la même figure, que sur la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$ sont situés les points $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}$ et enfin que par le point de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$ passent les trois droites $\Delta_{14}\Delta_{15}$, $\Delta_{14}\Delta_{16}$, $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Il en résulte aussi qu'il n'est pas possible avec les 5 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ d'une figure II de former le symbole d'un point de STEINER. Ce tableau démontre également que les 10 droites de PASCAL d'une figure II ne passent par aucun des sommets des 5 triangles de la figure.

Deux figures II, par ex. I et II ont le triangle Δ_{12} commun et trois figures par ex. I, II, III ont deux à deux les trois triangles Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} communs déterminant le point de STEINER G_{123} ; tandis que les trois autres IV, V, VI ont deux à deux les triangles Δ_{45} , Δ_{46} , Δ_{56} communs, qui donnent le point conjugué G_{456} .

Nous faisons observer aussi que les 6 figures II sont symétriques par rapport aux 6 points fondamentaux, c'est à dire que les 120 permutations correspondantes aux dix droites de PASCAL d'une de ces figures sont symétriques par rapport aux 6 indices 1, 2, 3, 4, 5, 6; en d'autres termes on ne peut faire correspondre les 6 figures II respectivement aux 6 points fondamentaux ⁽¹⁾.

Les 6 figures II condensent en elles-mêmes toute la théorie de l'hexagramme.

DROITES DE CAYLEY.

27. Nous avons vu que les droites $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ passent par le point G_{123} et que les droites $\Delta_{45}\Delta_{46}$, $\Delta_{45}\Delta_{56}$, $\Delta_{46}\Delta_{56}$ passent par le point conjugué G_{456} .

⁽¹⁾ M. CAPORALI dans son travail récent, *Sull'Esaedro completo*, Atti della R. Acc. di Napoli 1881, a trouvé la belle propriété qu'il existe dans l'hexagramme 6 droites qui correspondent respectivement aux 6 figures II.

Nous avons vu aussi que ces deux points de STEINER peuvent être représentés par le symbole

$$\begin{vmatrix} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{vmatrix} \quad (1)$$

où les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 qui y sont contenus, se rapportent aux 6 points fondamentaux, tandis que les indices des triangles Δ se rapportent aux 6 figures II.

Or, considérons les deux groupes des trois points de KIRKMAN correspondants aux droites de PASCAL indiquées plus haut; ce sont

$$\begin{array}{ccc} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}, & \Delta_{24} \Delta_{25} \Delta_{26}, & \Delta_{34} \Delta_{35} \Delta_{36} \\ \Delta_{14} \Delta_{34} \Delta_{34}, & \Delta_{15} \Delta_{25} \Delta_{35}, & \Delta_{16} \Delta_{26} \Delta_{36}. \end{array}$$

Ces deux groupes de trois points sont situés sur deux droites c_{123} , c_{456} de CAYLEY, qui correspondent aux deux points de STEINER G_{123} , G_{456} . Les deux droites c_{123} , c_{456} ne sont pas conjuguées par rapport à la conique fondamentale (*).

D'après ce qui précède on voit qu'on peut représenter les droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} par le symbole sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} \Delta_{14} & \Delta_{36} & \Delta_{25} \\ \Delta_{26} & \Delta_{15} & \Delta_{34} \\ \Delta_{35} & \Delta_{24} & \Delta_{16} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Les triangles des termes positifs de ce déterminant représentent les trois points de KIRKMAN situés sur la droite c_{123} , tandis que les termes négatifs représentent les trois points de KIRKMAN situés sur la droite c_{456} .

En outre, je remarque qu'aucun triangle $\Delta_{\alpha\beta}$ du symbole (2) n'entre dans les symboles des points correspondants de STEINER G_{123} , G_{456} . Il est donc très facile, étant donnés deux points conjugués de STEINER G_{123} , G_{456} de déterminer les symboles (2) des droites de CAYLEY correspondantes.

On voit que les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ du symbole (2) et ceux du symbole (1), qui représente les deux points G_{123} , G_{456} , ne sont pas les mêmes; mais il n'est pas possible de disposer les indices dans tous les symboles (2) de ma-

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., n.º 6.

Annali di Matematica, tomo XI.

nière à ce qu'ils soient identiques aux indices des symboles correspondants (1), car cela reviendrait à faire correspondre les 6 figures II, desquelles dépendent les indices des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, aux points fondamentaux; ce qui n'est pas possible.

DES FIGURES DÉTERMINÉES PAR DEUX FIGURES QUELCONQUES II.
SYSTÈMES $[Zz]_m$ (*).

28. Nous avons vu (n.° 26) que deux figures II, par ex. I et II, ont le triangle Δ_{12} commun. Il n'y a aucune droite de PASCAL, de ces deux figures, qui passe par un quelconque des sommets du triangle Δ_{12} . Ces figures ont les points P suivants communs, savoir

$$13.24, \quad 14.23, \quad 15.26, \quad 35.46, \quad 16.52, \quad 36.54 (**)$$

qui sont situés trois à trois sur quatre droites de PASCAL, savoir $p_{345}^{\text{III}}, p_{123}^{\text{IV}}, p_{123}^{\text{V}}, p_{124}^{\text{VI}}$ qui appartiennent respectivement aux quatre autres figures II. Ces droites ont les symboles $\Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{14}\Delta_{24}, \Delta_{15}\Delta_{25}, \Delta_{16}\Delta_{26}$.

Il y a en outre deux quadrilatères de droites de PASCAL des deux figures, savoir

$$p_{345}^{\text{I}} p_{135}^{\text{I}} p_{134}^{\text{I}} p_{145}^{\text{I}}; \quad p_{346}^{\text{II}} p_{134}^{\text{II}} p_{135}^{\text{II}} p_{145}^{\text{II}}$$

qui sont donnés par les hexagones

$$\begin{array}{cccc} 123456, & 126534, & 125643, & 124365; \\ 125634, & 123456, & 124356, & 126543 \end{array}$$

et qui se coupent deux à deux aux 12 points P situés sur les côtés du triangle Δ_{12} , les sommets exceptés, et en outre aux quatre points de STEINER $G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}$ situés sur la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} commune aux deux figures I, II.

Ces droites sont représentées par les symboles

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \Delta_{12}\Delta_{14}, \Delta_{12}\Delta_{15}, \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{12}\Delta_{24}, \Delta_{12}\Delta_{25}, \Delta_{12}\Delta_{26}. \quad (1)$$

Les deux quadrilatères ont donc six points de KIRKMAN pour sommets, savoir

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}, \quad \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{16}; \\ \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{25}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{26}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{26}, \quad \Delta_{12}\Delta_{25}\Delta_{26}. \end{array} \right\} \quad (2)$$

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., n.° 10 et suivants.

(**) A., *ib.*, n.° 5.

Ces 12 points de KIRKMAN sont situés deux à deux sur 6 droites v_{12} , qui passent respectivement par les sommets du triangle Δ_{12} divisant harmoniquement ses côtés.

Par exemple les deux couples de points

$$\Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}; \quad \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}\Delta_{24}$$

sont situés sur deux droites v_{12} , qui passent par le sommet 12.34 du triangle Δ_{12} . Dans tout l'hexagramme on a 90 droites v_{12} (*).

Les trois droites v_{12}

$$\Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{25}; \quad \Delta_{12}\Delta_{14}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}\Delta_{26}; \quad \Delta_{12}\Delta_{15}\Delta_{16}, \quad \Delta_{12}\Delta_{25}\Delta_{26} \quad (3)$$

qui passent respectivement par les trois sommets du triangle Δ_{12} , se coupent en un point $Z_{12.2}^{IV}$, qui correspond à la droite p_{345}^{III} déterminée par les deux figures I et II (**). Je désigne le point $Z_{12.2}^{III}$ par le même symbole que la droite p_{345}^{III} , c'est à dire $\Delta_{13}\Delta_{23}$. En effet, nous verrons dans le paragraphe où nous traiterons des groupes des substitutions de six lettres, que les groupes de substitutions qui laissent inaltérée la droite p_{345}^{III} transforment le groupe (3) en lui-même; ou, ce qui revient au même, laissent le point $Z_{12.2}^{III}$ fixe.

J'ai démontré que les 90 droites v_{12} se rencontrent trois à trois en 60 points Z_2 qui, comme nous venons de le voir, peuvent être représentés par les mêmes symboles que les droites de PASCAL. Ces 60 points Z_2 sont situés trois à trois sur les 20 droites de CAYLEY; les trois points d'une telle droite, par exemple c_{123} , correspondent aux trois droites de PASCAL passant par le point G_{123} , donc les symboles de ces trois points sont

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \quad \Delta_{13}\Delta_{23}.$$

Les 60 points Z_2 sont aussi situés trois à trois sur 60 droites z_2 . Par ex. les trois points Z_2 qui correspondent aux trois droites de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{13}\Delta_{14}$ passant par le point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, sont situés sur un droite z_2 , qu'on peut désigner aussi par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$. Nous voyons donc par là que les points Z_2 correspondent aux droites de PASCAL et que les droites z_2 correspondent aux points de KIRKMAN; en outre la correspondance entre les points Z_2 et les droites z_2 est analogue à celle qui existe entre les droites de PASCAL et les points de KIRKMAN.

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXII.

(**) A., *ib*, théor. XXIV.

Les 60 droites z_2 passent trois à trois par les 60 points Z_2 , par ex. les trois droites $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{16}$ passent par le point Z_2 représenté par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$. En outre elles passent trois à trois par les 20 points de STEINER. Aux trois points de KIRKMAN $\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$, $\Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{26}$, $\Delta_{34}\Delta_{35}\Delta_{36}$ (n.° 27) situés sur la droite de CAYLEY c_{123} correspondent les trois droites z_2 , qui sont représentées par les mêmes symboles et qui passent par le point de STEINER G_{123} . Donc on peut représenter aussi les points de STEINER G_{123} , G_{456} par le même symbole (2) (n.° 27) que les droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} . On voit aussi que les points Z_2 et les droites z_2 forment 6 figures Π' , analogues à celles qui sont formées par les droites de PASCAL et par les points de KIRKMAN.

J'ai aussi démontré qu'il y a une infinité de systèmes analogues $[Zz]_m$ qui découlent l'un de l'autre au moyen de certaines droites v_{12} , v_{34} , etc. et de points V_{23} , V_{45} , etc. qui correspondent deux à deux aux points P du système PASCAL-KIRKMAN (*). Quoique ces systèmes aient leurs propriétés principales communes avec le système PASCAL-KIRKMAN ils ne sont cependant pas donnés par 6 points d'une conique. D'après mon Mémoire de 1877 ou d'après celui de CREMONA (**), on voit que notre symbolique peut être étendue aussi à tout système $[Zz]$.

29. Les deux figures I et II déterminent aussi une autre figure analogue à celle que nous venons d'étudier, c'est à dire qu'il y a deux quadrangles de points de KIRKMAN qui correspondent aux deux quadrilatères de droites de PASCAL du numéro précédent, savoir

$$\begin{array}{cccc} \Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{15}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{16}, & \Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}; \\ \Delta_{24}\Delta_{25}\Delta_{26}, & \Delta_{23}\Delta_{25}\Delta_{26}, & \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26}, & \Delta_{23}\Delta_{24}\Delta_{26} \end{array}$$

qui sont situés deux à deux sur les 4 droites de CAYLEY c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} . Ces droites passent par le point de SALMON S_{12} correspondant à la droite g_{12} des deux figures I, II. Or, dans les symboles des quatre droites c_{123} , c_{124} , c_{125} , c_{126} [(2) n.° 27] n'entre pas le triangle Δ_{12} , puisqu'il est contenu dans les symboles des points de STEINER correspondants, donc on peut représenter la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} et le point de SALMON S_{12} par le symbole Δ_{12} .

Il est vrai que dans la question proposée par l'Académie royale de Belgique, et à laquelle j'essaie de répondre par le présent travail, on ne demande pas

(*) A., *Nuovi teoremi*, etc., théor. XXIX.

(**) CREMONA, l. c.

d'étendre les groupes que j'ai trouvés dans mon Mémoire de 1877; mais par la notation même que j'ai donnée ici des 6 figures Π on voit et on verra mieux par la suite qu'elles sont très utiles sinon nécessaires.

§ 2.

**Groupes des substitutions de trois lettres
et interprétations géométriques.**

30. Nous passons maintenant à la détermination et à l'interprétation des groupes de 6 lettres, et nous montrerons en même temps la correspondance qui existe entre ces groupes et ceux de l'hexagramme. Nous donnerons ensuite une première interprétation, d'abord dans l'espace à 5 dimensions, puis, par projection, dans l'espace à 3 dimensions et dans le plan.

Mais dans la théorie des substitutions de 6 lettres est contenue la théorie des substitutions de 3, 4 et 5 lettres; il nous faut donc étudier tout d'abord les groupes des substitutions de 3, 4 et 5 lettres.

M. J. SERRET a donné les fonctions des groupes de 4, 5 lettres, et la fonction d'un groupe remarquable de 120 substitutions de 6 lettres qui est une exception du théorème de BERTRAND que « toute fonction de n lettres, qui a n valeurs distinctes est symétrique par rapport à $n - 1$ lettres » (*).

Nous déterminerons les groupes de 6 lettres en nous appuyant sur les groupes de l'hexagramme; nous verrons ainsi que les 6 fonctions de SERRET donnent précisément les groupes des 6 figures Π de l'hexagramme.

31. Les groupes qu'on peut former avec trois lettres x_1, x_2, x_3 ou bien avec trois indices 123, sont au nombre de trois seulement, savoir:

$$1, (12); \quad 1, (123), (132);$$

et le groupe total

$$1, (12), (13), (23), (123), (132).$$

Si nous considérons, donc comme dans le cas général, que $x_1 x_2 x_3$ sont les coordonnées d'un point S_0 sur un plan on obtient 6 points, savoir:

$$x_1 x_2 x_3, \quad x_2 x_3 x_1, \quad x_3 x_1 x_2, \quad x_1 x_3 x_2, \quad x_3 x_2 x_1, \quad x_2 x_1 x_3$$

(*) SERRET. Journal de LIOUVILLE, 1850, p. 70.

qui forment deux groupes séparés de trois points et qui représentent les permutations des trois indices 123 ou bien des trois lettres $x_1 x_2 x_3$.

Le théorème XIII nous apprend que sur les côtés du triangle fondamental il y a 6 points $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}; P_0'^{(12)}, P_0'^{(13)}, P_0'^{(23)}$; que $P_0^{(12)}$ et $P_0'^{(12)}$ sont situés sur le côté $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$ et divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Les coordonnées de ces six points sont respectivement

$$1-10, \quad 10-1, \quad 01-1; \quad 110, \quad 101, \quad 011;$$

les trois premiers points étant situés sur la droite unité

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Nous avons aussi un groupe de deux points (r_3) n.° 10

$$r_3 r_3^2 1, \quad r_3^2 r_3 1$$

où r_3 est une racine cubique de l'unité. On a donc des théorèmes XV et XXXIV:

Théorème LII. Les 6 points d'un groupe $(S_0)_6$ forment deux triangles homologues de trois manières différentes, les trois points $P_0^{(ik)}$ et les trois droites $\Pi_1^{(ik)}$, dont les équations sont de la forme

$$x_i - x_k = 0$$

étant centres et axes d'involution.

Dans ce cas, comme le groupe des trois substitutions paires est le groupe qu'on obtient par la substitution cyclique (123) nous voyons que les trois sommets d'un quelconque des deux triangles de $(S_0)_6$ donnent un cycle projectif de trois points par rapport au triangle qui a pour sommets le point unité et les deux points $r_3 r_3^2 1, r_3^2 r_3 1$ de la droite

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \tag{1}$$

Du numéro 10 il résulte que les deux autres côtés de ce triangle sont:

$$r_3 x_1 + r_3^2 x_2 + x_3 = 0 \tag{2}$$

$$r_3^2 x_1 + r_3 x_2 + x_3 = 0. \tag{3}$$

Les trois côtés (1), (2), (3) forment donc un cycle projectif de trois droites par rapport au triangle fondamental.

Les sommets forment aussi un cycle projectif et il n'est pas difficile de vérifier que ces points sont situés sur trois coniques W , qui passent respectivement par deux des sommets du triangle fondamental en y touchant les deux autres

côtés. La propriété corrélatrice a lieu aussi pour les côtés (1), (2), (3) du triangle des points doubles de l'homographie cyclique (123). Donc :

Théorème LIII. Les deux triangles du groupe $(S_0)_6$ donnent deux cycles projectifs de trois points et en même temps de trois droites par rapport au triangle des points doubles (111), $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$ de l'homographie cyclique de 3^{me} ordre déterminée par la substitution cyclique (123).

Les sommets d'un quelconque des deux triangles sont situés sur trois coniques W , qui passent respectivement par deux sommets d'un côté du triangle des points doubles en y touchant les deux autres côtés. (Les coniques sont imaginaires avec 4 points réels.)

Les sommets du triangle des points doubles donnent aussi un cycle projectif de trois points par rapport au triangle fondamental et sont situés sur trois coniques, qui passent respectivement par les deux sommets d'un côté du triangle fondamental en y touchant les deux autres côtés. (Les coniques dans ce cas sont réelles.)

Du théorème XXXIV on déduit :

Théorème LIV. Les 6 points d'un groupe quelconque $(S_0)_6$ sont situés sur une conique du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0.$$

Cette conique passe par les points $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$ et y touche les droites qui joignent le point unité à ces deux points.

32. Les 6 points d'un groupe $(S_0)_6$ forment un hexagone spécial qui a des propriétés intéressantes. Désignons en effet les 6 points

$$y_1 y_2 y_3, \quad y_2 y_3 y_1, \quad y_3 y_1 y_2; \quad y_2 y_1 y_3, \quad y_3 y_2 y_1, \quad y_1 y_3 y_2$$

respectivement par les indices 135, 246. Il est alors facile de prouver que les 9 points $P_{12.34}$, $P_{12.56}$, $P_{34.56}$; $P_{16.23}$, $P_{16.45}$, $P_{23.45}$; $P_{14.36}$, $P_{14.25}$, $P_{25.36}$ tombent respectivement sur les trois points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(13)}$; c'est à dire que les triangles Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} du paragraphe précédent se réduisent à ces trois points. Donc les droites de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$, $\Delta_{13}\Delta_{23}$ tombent sur la droite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

En outre par le point, par ex. $P_{12.34}$ ou $P_0^{(12)}$ passent encore trois droites de PASCAL, savoir :

$$p_{235}^{VI} = 125346, \quad p_{145}^V = 126345, \quad p_{345}^{IV} = 125436. \quad (1)$$

Chaque droite passant par le point $P_0^{(12)}$, ou bien chaque point situé sur la

droite

$$x_1 - x_2 \equiv \Pi_1^{(12)} = 0$$

doit avoir ses deux premières coordonnées égales, c'est à dire que les trois droites de PASCAL (1) forment un groupe de 6 droites réduit à 3. De même pour les 8 autres points P , qui tombent sur les points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$. On a donc 27 droites de PASCAL, qui forment trois à trois 9 groupes spéciaux de trois droites.

Il en reste encore 30 qui forment 6 à 6 cinq groupes $(p)_6$ de 6 droites, et qui ont les propriétés corrélatives de celles des 6 points d'un groupe quelconque $(S_0)_6$. Donc :

Théorème LV. Si les 6 points fondamentaux d'une conique forment un groupe $(S_0)_6$ tous les éléments, qui appartiennent au même groupe de l'hexagramme, par ex. toutes les droites de PASCAL, tous les points de KIRKMAN, etc. donnent des groupes de 6 ou de 3 éléments, qui ont les mêmes propriétés que le groupe $(S_0)_6$.

33. Du théorème XXXVI il suit que trois groupes $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe du 3^{me} ordre du système

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i^2 x_k + \mu x_1 x_2 x_3 = 0 \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Les trois courbes $\Sigma x_i^2 = 0$, $\Sigma x_i^2 x_k = 0$, $x_1 x_2 x_3 = 0$ coupent la droite unité aux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$; nous aurons donc :

Théorème LVI. Deux groupes quelconques $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe du 3^{me} ordre, qui appartient au système (1). Les courbes du système passent par les trois points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$.

Et par analogie :

Trois groupes quelconques $(S_0)_6$ sont situés sur une courbe de 4^{me} ordre, qui appartient au système

$$\Sigma x_i^4 + \lambda \Sigma x_i^3 x_k + \mu \Sigma x_i^2 x_k^2 + \nu \Sigma x_i^2 x_2 x_3 = 0$$

et qui touche la droite unité aux deux points $r_3 r_3^2 1$, $r_3^2 r_3 1$.

Si l'on suppose que le point $y_1 y_2 y_3$ soit situé sur la droite $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ on a :

Théorème LVII. Si le point S_0 tombe sur la droite unité, les 6 points du groupe $(S_0)_6$ sont situés sur cette droite et ils forment trois couples de points équidistants relativement aux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(23)}$. Ils forment aussi deux cycles projectifs de trois points par rapport aux points $(r_3 r_3^2 1)$, $(r_3^2 r_3 1)$.

§ 3.

Groupes des substitutions de quatre lettres
et interprétations géométriques.

34. Pour les groupes des substitutions de 4 et 5 lettres je me sers des résultats de M. J. SERRET (*). Il ne donne que les fonctions, ce qui revient au fond à donner les groupes; seulement en donnant les groupes on peut en tirer des conséquences, qui pour notre manière d'interpréter la théorie des substitutions sont fort intéressantes.

Nous laissons maintenant de côté les groupes, qui sont relatifs à 2 ou 3 lettres, et que nous avons déjà considérés. D'après SERRET on a alors les types suivants des fonctions de 4 lettres, à côté desquelles j'écris les groupes correspondants

$$\text{I.} \quad (x_1 + ax_3)(x_2 + ax_4) \\ 1, \quad (12)(34)$$

$$\text{II.} \quad (x_1 + x_2) + a(x_3 + x_4) \\ 1, \quad (12), \quad (34), \quad (12)(34).$$

Ce groupe est engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe total il y a trois de ces groupes.

$$\text{III.} \quad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) \\ 1, \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(23).$$

Ce groupe est aussi engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe total il n'y a qu'un groupe de ce genre.

$$\text{IV.} \quad (x_1 - x_3)(x_2 - x_4)[(x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2] \\ 1, \quad (13)(24), \quad (1234), \quad (1432).$$

Ce groupe est engendré par la substitution cyclique (1234).

$$\text{V.} \quad x_1x_2 + x_3x_4 \\ 1, \quad (12), \quad (34), \quad (12)(34), \quad (13)(24), \quad (14)(32), \quad (1423), \quad (1324).$$

(*) L. c.

Annali di Matematica, tomo XI.

Il est engendré par deux substitutions, par ex. (12), (13)(24). Dans le groupe total on a trois de ces groupes.

$$\text{VI.} \quad (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \\ 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142) \\ (234), (243), (134), (143).$$

C'est là le groupe des 12 substitutions paires, qui peut être engendré par deux substitutions par ex. (123), (124) ou bien (12)(34), (123).

VII. Groupe total

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

qui peut être engendré par les couples des substitutions

$$(13), (134); \quad (12), (1234); \quad (132), (1234); \quad (1234), (12)(34).$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

35. Du théorème XIII on déduit pour $n = 4$:

Théorème LVIII. Sur chaque arête du tétraèdre fondamental, par ex. $A_0^{(1)} A_0^{(2)} = A_1^{(12)}$, il y a deux points $P_0^{(12)}$, $P_0'^{(12)}$, dont les coordonnées sont 1, -1, 0, 0; 1, 1, 0, 0, et qui divisent harmoniquement les deux sommets $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Il y a aussi deux plans $\Pi_2^{(12)}$, $\Pi_2'^{(12)}$, dont les équations sont

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0$$

et qui passent par l'arête $A_0^{(3)} A_0^{(4)} = A_1^{(34)}$. Les 6 plans $\Pi_2^{(12)}$ passent tous par le point unité, tandis que les 6 points $P_0^{(12)}$ sont tous situés sur le plan unité. Chaque plan $\Pi_2^{(ik)}$ passera par deux points $P_0^{(ik)}$ et par un point $P_0'^{(ik)}$. De même pour tous les plans $\Pi_2^{(ik)}$ (*).

Je fais observer que les 12 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ forment trois tétraèdres, savoir:

$$P_0^{(12)}, P_0'^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0'^{(34)}, P_0^{(13)}, P_0'^{(13)}, P_0^{(24)}, P_0'^{(24)}, \\ P_0^{(14)}, P_0'^{(14)}, P_0^{(23)}, P_0'^{(23)}$$

dont les faces sont précisément les plans correspondants $\Pi_2^{(12)}$, $\Pi_2'^{(12)}$, $\Pi_2^{(34)}$, $\Pi_2'^{(34)}$, etc.

Ces trois tétraèdres, que je désigne par les symboles (P'), (P''), (P''') ont la propriété remarquable d'être homologues de quatre manières différentes, les

(*) J'énonce toujours ces théorèmes pour chaque cas particulier, parce que les figures qui en résultent jouissent de propriétés spéciales.

sommets et les faces opposées du troisième étant centres et plans d'homologie. Il y a aussi trois autres tétraèdres qui jouissent de la même propriété. Ce sont le tétraèdre fondamental (A) et les deux tétraèdres (B), (C) (*)

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1.
 \end{array}$$

Nous aurons à considérer cette figure dans le 3^me chapitre.

Du théorème XIV on déduit:

Théorème LIX. Les trois tétraèdres (P'), (P''), (P''') sont conjugués par rapport à la surface de 2^d degré

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv S_2^2 = 0.$$

Du théorème VI on a:

Théorème LX. Si l'on multiplie les coordonnées d'un point S_0 par les racines carrées de l'unité de toutes les manières possibles, on obtient 8 points qui déterminent deux tétraèdres homologues de quatre manières différentes, les sommets et les plans du tétraèdre fondamental (A) étant centres et plans d'homologie. Si le point S_0 est le point unité, on obtient deux tétraèdres (B) et (C) qui sont aussi conjugués par rapport à la surface S_2^2 .

En outre, du n.º 7 on obtient en changeant les signes de S_2^2 8 surfaces du 2^d degré, savoir:

$$\left. \begin{array}{ll}
 x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 & -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\
 -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \\
 -x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 \\
 x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0
 \end{array} \right\} \quad (1)$$

qui jouissent de propriétés analogues à celles des m^{n-1} surfaces du n.º 7; elles sont par ex. réciproques d'elles-mêmes par rapport à l'une quelconque d'entre elles (**).

(*) Voir A.: *Sopra alcune not. configur.*, l. c., Mém. II.

(**) A.: *Sopra alcune not. configur.*, l. c., Mém. II.

Du théorème X on déduit aussi:

Théorème LXI. Les deux tétraèdres (B) (C) sont conjugués par rapport à toutes les surfaces (1) (*).

36. Du théorème XV on déduit:

Théorème LXII. Les 24 points qu'on obtient en permutant les 4 coordonnées d'un point S_0 , sont situés deux à deux sur 6.12 droites, qui passent 12 à 12 par les points $P_0^{(ik)}$. Les deux points d'une telle droite sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par le plan $\Pi_2^{(ik)}$.

En opérant l'involution $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4) sur les coordonnées du point S_0 , on déduit des théorèmes XVI, XVII, XIX:

Théorème LXIII. Les 6 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 3 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4) qui contiennent les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les plans $\Pi_2^{(ik)}$ se rencontrent en trois droites $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ par lesquelles passent les deux plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}, \Pi_2^{(\gamma\delta)}$ et qui sont déterminées aussi par les deux points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\beta\gamma)}$. Les 6 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}, \Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ donnent deux à deux trois couples d'arêtes opposées respectivement des tétraèdres (P'), (P''), (P'''). Les trois droites $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ passent par le point unité, et les trois droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ sont situées sur le plan unité.

Théorème LXIV. Les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ sont situés deux à deux sur 3.12 droites, qui coupent 12 à 12 les droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les droites correspondantes $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points situés sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les deux points d'intersection.

Si l'on opère sur les coordonnées du point S_0 la substitution cyclique (1234) on obtient 4 points, qui forment d'après le n.° 10 un cycle projectif de 4 points par rapport au tétraèdre (1, 1, 1, 1) $(-i, -1, i, 1), (-1, 1, -1, 1), (i, -1, -i, 1)$, où $i = \sqrt{-1}$. En posant par ex. $i = r_4$, les faces de ce tétraèdre sont

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4 x_1 + r_4^2 x_2 + r_4^3 x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4^2 x_1 + x_2 + r_4^2 x_3 + x_4 &= 0 \\ r_4 x_1 + r_4^2 x_2 + r_4^3 x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(*) J'appelle aussi tétraèdre conjugué par rapport à une surface du 2^e degré un tétraèdre dont les sommets sont situés sur la surface et dont les faces sont les plans tangents en ces points.

les sommets et les faces de ce tétraèdre forment deux cycles projectifs de 4 points et de 4 plans. Ces 4 points sont situés sur une courbe W du 3^me ordre (théor. XXIII). Dans ce cas on voit que les cônes qui projettent cette courbe W sont simplement (n.° 4)

$$x_1 x_3 = x_2^2; \quad x_2 x_4 = x_3^2; \quad x_1 x_4^2 = x_3^3; \quad x_1^2 x_4 = x_2^3.$$

C'est donc une courbe W qui passe par les points $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, en y touchant les arêtes $x_1 = x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$ et qui a dans le premier le plan $x_1 = 0$, dans le second le plan $x_4 = 0$ comme plans osculateurs. Donc:

Théorème LXV. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique de 4 indices (1234), forment un cycle projectif de 4 points, qui sont situés sur une courbe W du 3^me ordre. Cette courbe passe par deux sommets du tétraèdre fondamental en y touchant deux arêtes, et ayant en ces deux points deux faces comme plans osculateurs.

En tout on a 3 homographies cycliques, où les points doubles sont le point unité et trois points du groupe (r_4) , qui ont pour coordonnées les différentes racines 4^mes de l'unité.

Théorème LXVI. Les 4 points qu'on déduit d'un point S_0 par l'homographie cyclique (1234) forment un cycle de 4 points, projectif par rapport au tétraèdre des points doubles de l'homographie.

En tout avec les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ on peut former de 3 manières différentes six cycles projectifs de 4 points.

37. Si nous opérons sur les coordonnées d'un point S_0 une substitution de 3 lettres, par ex. (123), d'après le théorème XXVI on obtient une homographie cyclique d'ordre 3 autour du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. D'après le théorème XXX nous voyons que:

Théorème LXVII. Les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ sont situés 6 à 6 sur 16 plans, qui passent 4 à 4 par les droites d'intersection du plan unité avec les faces du tétraèdre fondamental. Les 6 points situés sur un quelconque des 16 plans sont situés sur une conique et ont les mêmes propriétés que les 6 points $(S_0)_6$ du paragraphe précédent.

38. Interprétons maintenant les autres groupes de 4 lettres. Du groupe II nous déduisons que:

Théorème LXVIII. Si sur un point S_0 on opère successivement les deux involutions (12), (34) ou bien (12), (12)(34) ou encore (34), (12)(34), on obtient le même groupe de 4 points. Ces quatre points sont situés deux à deux

sur 4 droites, qui passent respectivement deux à deux par les deux points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(34)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur deux droites, qui s'appuient sur les deux droites $P_1^{(12)(34)}$, $\Pi_1^{(12)(34)}$ et ils y sont divisés harmoniquement.

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former de trois manières différentes 6 de ces groupes.

Pour le groupe III on a:

Théorème LXXIX. Si l'on opère sur un point S_0 successivement les deux involutions $(12)(34)$, $(13)(24)$ ou encore $(13)(24)$, $(14)(23)$ on obtient un autre groupe de 4 points; ces quatre points sont situés deux à deux sur 6 droites, qui coupent deux à deux respectivement les droites $P_1^{(12)(34)}$, $\Pi_1^{(12)(34)}$; $P_1^{(13)(24)}$, $\Pi_1^{(13)(24)}$; $P_1^{(14)(23)}$, $\Pi_1^{(14)(23)}$. Les deux points situés sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les deux droites P_1 , Π_1 qu'elle coupe.

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former d'une seule manière 6 de ces groupes.

Pour le groupe V on a:

Théorème LXX. Si l'on opère sur le point S , les deux involutions par ex. (12) , $(13)(24)$, on obtient un groupe de 8 points. Ces 8 points se divisent en deux groupes de 4 points du théorème LXXVIII, et en outre ils forment deux cycles projectifs de 4 points donnés par l'homographie cyclique (1324) .

Avec les 24 points $(S_0)_{24}$ on peut former de trois manières différentes 3 de ces groupes.

Du groupe VI on a:

Théorème LXXI. Si l'on opère sur le point S_0 successivement les deux homographies par ex. (123) , (124) , on obtient un groupe de 12 points $(S_0)_{12}$. Le groupe $(S_0)_{24}$ se décompose en deux de ces groupes $(S_0)_{12}^1$, $(S_0)_{12}^2$ qui sont homologues de 6 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les plans $\Pi_2^{(ik)}$ étant centres et plans d'homologie.

Et finalement:

Théorème LXXII. Si l'on opère sur le point S_0 successivement, par ex. l'involution (13) et l'homographie cyclique (124) , on obtient le groupe total $(S_0)_{24}$.

Du théorème XXXIV on déduit aussi:

Théorème LXXIII. Un groupe quelconque $(S_0)_{24}$ est situé sur une surface du 2^d degré du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, 4.$$

Les surfaces de ce faisceau se touchent suivant une conique du plan unité, passant par tous les points des groupes (r_4) , (r_3) .

Deux groupes sont situés sur une surface du 3^{me} ordre, quatre sur une surface du 4^{me} ordre, etc. (théorème XXXV).

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE SUR LE PLAN $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

39. J'indiquerai seulement les résultats qu'on obtient lorsque le point S_0 , $y_1 y_2 y_3 y_4$, est situé sur le plan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, que du reste nous pouvons regarder comme quelconque. Sur ce plan on a le quadrilatère donné par les 6 points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(14)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(24)}$, $P_0^{(34)}$, dont les côtés sont les droites d'intersection du plan avec les quatre faces $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ du tétraèdre fondamental. Nous pouvons prendre ce quadrilatère comme fondamental; alors entre les coordonnées d'un point y_1, y_2, y_3, y_4 on aura la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0 \quad (1)$$

qui est précisément la condition afin que le point soit situé sur le plan unité.

Nous considérons tout d'abord la conique où se rencontrent les surfaces du faisceau du théorème LXXIII, c'est à dire

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0 \quad (2)$$

ou bien d'après la relation (1)

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0. \quad (2')$$

Cette conique donc se transforme en elle-même par les permutations des quatre coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 , de manière qu'un de ses points quelconque donne un groupe de 24 points inscrit à la conique fondamentale.

Il est facile de voir que dans le plan il n'y a pas une autre conique qui jouisse des mêmes propriétés, tandis que dans l'espace à trois dimensions il y a une infinité de surfaces du 2^d degré qui se transforment en elles-mêmes.

Les 6 points $P_0^{(ik)}$ ont pour polaires, par rapport à la conique fondamentale, les 6 droites

$$\left. \begin{array}{ll} x_1 - x_2 = 0 & x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 & x_2 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 & x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (3)$$

d'intersection des plans $\Pi_2^{(ik)}$ avec $\Sigma x_i = 0$. Ces 6 droites se rencontrent 3 à 3 en 4 points $P_0^{(15)}$, $P_0^{(25)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$ dont les coordonnées sont:

$$(-3, 1, 1, 1), \quad (1, -3, 1, 1), \quad (1, 1, -3, 1), \quad (1, 1, 1, -3)$$

qui sont les pôles des côtés $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ du quadrilatère fondamental par rapport à la conique fondamentale. Les 10 points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(13)}$, $P_0^{(14)}$, $P_0^{(15)}$, $P_0^{(23)}$, $P_0^{(24)}$, $P_0^{(25)}$, $P_0^{(34)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$ sont situés 3 à 3 sur leurs polaires par

rapport à la conique fondamentale; ils forment donc une figure analogue à celle, qui est donnée par dix points de KIRKMAN et par les 10 droites correspondantes de PASCAL d'une figure II. Or, les 6 points $P_0^{(12)}, \dots, P_0^{(34)}$ forment un quadrilatère et les autres $P_0^{(15)}, P_0^{(25)}, P_0^{(35)}, P_0^{(45)}$ forment un quadrangle, qui est le polaire réciproque du quadrilatère par rapport à la conique fondamentale; en outre, le quadrangle et le quadrilatère sont conjugués par rapport à la conique (*) et n'ont aucun sommet et aucun côté commun; c'est à dire, que pris ensemble ils constituent la figure entière des 10 points et des 10 droites. Il est aussi facile de voir que cette figure se décompose en 5 groupes des quadrangles et des quadrilatères susdits. Cette propriété s'étend aussi aux figures II de l'hexagramme, on a donc:

Théorème LXXIV. Toute figure II d'un système quelconque $[Zz]_m$ de l'hexagramme se décompose de 5 manières différentes en un quadrangle et en un quadrilatère, qui sont conjugués et polaires réciproques par rapport à la conique II déterminée par la figure.

Le quadrangle d'un des 5 groupes a pour sommets 4 points Z_m et le quadrilatère a les 4 droites z_m correspondantes pour côtés.

Mais la figure des dix points $P_0^{(ik)}$ que nous venons de considérer n'est pas générale. En effet, la conique fondamentale passe par les huit points du groupe (r_3) de chaque côté du quadrilatère fondamental, et ces huit points divisent respectivement équi-harmoniquement les trois sommets de chaque côté, ce qui n'a pas lieu en général.

40. Si l'on permute toutes les coordonnées y_1, y_2, y_3, y_4 d'un point T_0 du plan unité, entre lesquelles a lieu la relation $\Sigma y_i = 0$ on obtient 24 points, qui sont aussi situés sur le même plan, et pour lesquels on a:

Théorème LXXV. Les 24 points d'un groupe $(T_0)_{24}$, situé sur le plan unité, sont situés deux à deux sur 12·6 droites qui passent 12 à 12 par les 6 points $P_0^{(ik)}$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$).

Le segment déterminé par les deux points est divisé harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et le point d'intersection avec la polaire de $P_0^{(ik)}$ par rapport à la conique fondamentale.

Les sommets du triangle diagonal du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$ sont précisément les trois points

$$(1, -1, -1, 1), \quad (-1, 1, -1, 1), \quad (-1, -1, 1, 1). \quad (1)$$

(*) J'emploie le mot *conjugué* dans le sens donné par M. P. SERRET dans sa *Géom. de direction*, 1869.

Nous avons vu (théorème LXIII) que les trois droites $\Pi_1^{(\sigma\beta)(\gamma\delta)}$ passent par le point unité, elles ne sont donc autre chose que les droites qui joignent le point unité avec les trois points (1). En effet, les coordonnées d'un point de la droite $\Pi_1^{(12)(34)} \equiv P_0^{(12)}P_0^{(34)}$ sont de la forme $1, 1, \lambda, \lambda$; cette droite passe donc par le point unité $1, 1, 1, 1$ et par le point $1, 1, -1, -1$. Par conséquent en interprétant le groupe II sur le plan on tire:

Théorème LXXVI. Les 24 points de $(T_0)_{24}$ sont situés deux à deux sur 12·3 droites qui passent 12 à 12 par les sommets du triangle diagonal du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$ et ils sont divisés harmoniquement par ces sommets et les droites diagonales opposées.

Si l'on opère sur un point T_0 de $\Sigma x_i = 0$ l'homographie cyclique (123), on obtient trois points d'un cycle projectif par rapport au triangle des points doubles qui sont $P_0^{(45)}$, $(r_3, r_3^2, 1, 0)$, $(r_3^2, r_3, 1, 0)$, et en remarquant que dans le groupe total des substitutions on a 8 substitutions cycliques de la forme $(\alpha\beta\gamma)$, qui donnent 4 homographies cycliques, puisque les substitutions inverses (123), (132) donnent lieu à la même homographie cyclique, on a:

Théorème LXXVII. Les 24 points du groupe $(T_0)_{24}$ forment de quatre manières différentes huit cycles projectifs de trois points, donnés par les quatre homographies cycliques du 3^{me} ordre du groupe total.

Pour le groupe III on obtient:

Théorème LXXVIII. Les 24 points $(T_0)_{24}$ forment 6 quadrangles ayant pour triangle diagonal celui du quadrilatère des points $P_0^{(ik)}$.

Des théorèmes LXVII, LXX, LXXI on déduit aussi:

Théorème LXXIX. Les 24 points $(T_0)_{24}$ sont situés 6 à 6 sur 16 coniques passant 4 à 4 par les 4 points dont trois coordonnées sont égales aux racines cubiques de l'unité, tandis que la quatrième est nulle.

Théorème LXXX. En opérant sur le point T_0 successivement les deux homographies (123), (124) on obtient 12 points d'un groupe $(T_0)_{12}$. Les 24 points $(T_0)_{24}$ forment donc deux polygones de douze sommets, qui sont homologues, les 6 points $P_0^{(ik)}$ et les trois sommets du triangle diagonal de leur quadrilatère d'une part et leurs polaires par rapport à la conique fondamentale d'autre part étant centres et axes d'homologie.

On peut construire le groupe total $(T_0)_{24}$ au moyen de deux involutions, par exemple (13), (12)(34).

Cette figure, que nous avons obtenue sur le plan unité, n'est qu'une projection de la figure considérée de l'espace R_3 faite par le point unité.

PROJECTION SUR UN PLAN QUELCONQUE
PAR UN POINT ÉGALEMENT QUELCONQUE DE L'ESPACE R_3

41. Si nous projetons par un point quelconque R_0 la figure de l'espace sur un plan R_2 , nous obtenons une figure plus générale que celle du plan unité; ces figures pourtant appartiennent à la même classe.

Ainsi avec le tétraèdre fondamental on obtient sur le plan R_2 un quadrangle ${}_1A_0^{(a)}, \dots, {}_1A_0^{(d)} \equiv {}_1(A)$ sur les côtés duquel sont projetés les 6 points $P_0^{(ik)}$ et $P_0'^{(ik)}$. Les premiers sont situés trois à trois sur quatre droites, qui sont la projection des droites d'intersection du plan unité avec les faces du tétraèdre fondamental. Si l'on projette sur R_2 les sommets des deux tétraèdres (B) , (C) du n.° 35, on obtient sur le plan deux quadrangles ${}_1(B)$, ${}_1(C)$ tels que leurs sommets sont respectivement situés deux à deux sur seize droites passant quatre à quatre par les sommets du quadrangle ${}_1(A)$. La même chose a lieu évidemment pour les couples de quadrangles ${}_1(A) {}_1(B)$, ${}_1(A) {}_1(C)$ par rapport aux sommets de ${}_1(C)$ ou de ${}_1(B)$.

Or, si nous nous souvenons de la figure commune à deux figures Π , par ex. I et II de l'hexagramme (n.° 28), on voit que la figure de ces trois quadrangles ${}_1(A)$, ${}_1(B)$, ${}_1(C)$ est précisément la corrélative de celle donnée par les droites

$$P_{345}^I P_{135}^I P_{134}^I P_{145}^I, \quad P_{345}^{II} P_{135}^{II} P_{134}^{II} P_{145}^{II}$$

et du triangle Δ_{12} avec la droite de STEINER g_{12} .

Théorème LXXXI. Les 24 points ${}_1(S_0)_{24}$ qu'on obtient en projetant de R_0 sur R_2 un groupe $(S_0)_{24}$ de l'espace sont situés deux à deux sur $6 \cdot 12$ droites passant 12 à 12 par les points $P_0^{(ik)}$, et ils sont aussi situés 6 à 6 sur 16 coniques.

Les deux droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, $\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, dans le cas du numéro précédent, sont projetées par le point unité sur une droite et en un point, car la droite Π_1 passe elle-même par le point unité; tandis que dans le cas général actuel les droites en question sont projetées sur R_2 suivant deux droites ${}_1P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ${}_1\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$.
Donc:

Théorème LXXXII. En projetant les deux points du groupe ${}_1(S_0)_{24}$ qui ont les coordonnées

$$y_\alpha y_\beta y_\gamma y_\delta, \quad y_\beta y_\alpha y_\delta y_\gamma$$

on obtient sur R_2 deux points du groupe ${}_1(S_0)_{24}$, qui sont divisés harmoniquement par les deux droites ${}_1P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ${}_1\Pi_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$.

On pourrait donner aussi au point de projection R_0 ou au plan R_2 des positions spéciales par rapport au tétraèdre fondamental, et on obtiendrait dès lors des configurations spéciales de la même classe.

§. 4.

Groupes des substitutions de 5 lettres.**Interprétations géométriques dans l'espace à 4, 3 dimensions et dans le plan.**

42. Je donne ici seulement les groupes des substitutions qui contiennent toutes les 5 lettres.

$$\text{I.} \quad (x_1 + r x_2 + r^2 x_3 + r^3 x_4 + r^4 x_5)^5$$

où r est une racine de l'équation

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = 0$$

$$1, \quad (12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).$$

Ce groupe est engendré par la substitution (12345).

$$\text{II.} \quad (x_1 + x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

$$1, \quad (12), \quad (345), \quad (354), \quad (12)(345), \quad (12)(354).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (345) ou bien par la substitution (12)(345). Dans le groupe total il y a 10 de ces groupes.

$$\text{III.} \quad (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

$$1, \quad (345), \quad (354), \quad (12)(34), \quad (12)(35), \quad (12)(45).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (345). Dans le groupe total il y a 10 de ces groupes.

$$\text{IV.} \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$1, \quad (345), \quad (354), \quad (12), \quad (34), \quad (35), \quad (45), \quad (12)(34), \\ (12)(35), \quad (12)(45), \quad (12)(345), \quad (12)(354).$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (35). Il y a aussi 10 de ces groupes dans le groupe total.

$$\begin{aligned}
\text{V.} \quad y = & x_1^2(x_2x_5 + x_3x_4) + x_2^2(x_1x_3 + x_4x_5) + x_3^2(x_1x_5 + x_2x_4) + \\
& + x_4^2(x_1x_2 + x_3x_5) + x_5^2(x_1x_4 + x_2x_3) \\
& 1, \quad (13)(45), \quad (14)(23), \quad (15)(24), \quad (12)(35), \\
& (25)(34), \quad (2354), \quad (1325), \quad (1452), \quad (1534), \quad (2453), \\
& (1243), \quad (1435), \quad (1523), \quad (1254), \quad (1342) \\
& (12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).
\end{aligned}$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(35), (1325). Il y a dans le groupe total 6 de ces groupes.

En posant

$$v = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

la fonction

$$\text{VI.} \quad v y$$

nous donne le groupe

$$\begin{aligned}
1, \quad (13)(45), \quad (14)(23), \quad (15)(24), \quad (12)(35), \quad (25)(34), \\
(12345), \quad (13524), \quad (14253), \quad (15432).
\end{aligned}$$

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (13)(45), (14)(23). On a 6 de ces groupes.

$$\text{VII.} \quad v.$$

Cette fonction représente le groupe de 60 substitutions paires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (23)(45) ou bien par les substitutions cycliques (12345) et (ikl) (*i, k, l* sont trois indices de la série 1, 2, 3, 4, 5). Naturellement il n'y a qu'un seul de ces groupes.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ESPACE R_4 À 4 DIMENSIONS.

43. Pour $n = 5$ du théorème XIII on déduit:

Théorème LXXXIII. Il y a sur chaque arête de la pyramide fondamentale par ex. $A_0^{(1)}A_0^{(2)} \equiv A_1^{(12)}$ deux points $P_0^{(12)}$, $P_0'^{(12)}$ dont les coordonnées sont 1 — 1 0 0 0, 1 1 0 0 0, et qui divisent harmoniquement le segment déterminé par les deux sommets $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$.

Les 10 points $P_0^{(ik)}$ sont situés trois à trois sur 10 droites, qui déterminent 5 quadrilatères. Les 20 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ sont situés trois à trois sur 30 droites qui avec les 10 premières forment 10 quadrilatères.

Il y a aussi deux espaces à trois dimensions $\Pi_3^{(12)}$, $\Pi_3^{(34)}$, qui passent par le plan d'intersection des faces $x_1=0$, $x_2=0$, et les divisent harmoniquement.

Les 10 espaces $\Pi_3^{(ik)}$ passent par le point unité, tandis que les dix points $P_0^{(ik)}$ sont situés sur l'espace unité.

Chaque espace $\Pi_3^{(ik)}$ passe par 3 points $P_0^{(ik)}$ et par quatre points $P_0^{(i'k)}$.

La figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{(i'k)}$, $\Pi_3^{(ik)}$, $\Pi_3^{(i'k)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface

$$\Sigma x_i^2 = 0.$$

En posant dans le n.º 5 $m=2$, $n=5$ du point unité, on obtient $2^4=16$ points, savoir:

$$\begin{array}{c|cccccc|cc|ccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
 3 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 4 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 12 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 5 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 13 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
 6 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 14 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 7 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 15 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\
 8 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 16 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1.
 \end{array} \tag{1}$$

Ces points n'ont pas les propriétés analogues à celles des points que nous avons trouvés au n.º 35 pour $n=4$. Il est facile de s'assurer que les espaces polaires de ces 16 points par rapport à la surface $\Sigma x_i^2=0$ ne contiennent aucun de ces points.

Si nous considérons par ex. les deux espaces $\Pi_3^{(12)}$, $\Pi_3^{(1'2)}$, dont les équations sont

$$x_1 - x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 0$$

on voit que chacun d'eux contient huit points différents du groupe (1). Donc:

Théorème LXXXIV. Si d'un point quelconque en R_4 , par ex. du point unité, on change les signes des coordonnées de toutes les manières possibles, on obtient 16 points $(B)_{16}$. Les points sont situés 8 à 8 respectivement sur les 20 espaces $\Pi_3^{(ik)}$, $\Pi_3^{(i'k)}$, tellement que deux de ces espaces correspondants les contiennent tous. Par chaque point du groupe $(B)_{16}$ passent 10 des 20 espaces $\Pi_3^{(ik)}$ $\Pi_3^{(i'k)}$.

Ces 16 points sont aussi situés 4 à 4 sur 40 plans, qui passent 10 à 10 par chacun d'eux.

Les couples de points

1, 12; 2, 13; 3, 14; 4, 15; 5, 16; 6, 11; 7, 10; 8, 9

sont situés sur 8 droites passant par le sommet $A_0^{(4)}$ de la pyramide fondamentale, donc:

Théorème LXXXV. Les 16 points de $(B)_{16}$ sont situés deux à deux sur 5·8 droites passant 8 à 8 par les sommets de la pyramide fondamentale.

44. Des théorèmes du n.º 9 on déduit:

Théorème LXXXVI. Les 120 points qu'on obtient en permutant les coordonnées d'un point S_0 dans l'espace R_4 sont situés deux à deux sur 10·60 droites, qui passent 60 à 60 par les points $P_0^{(ik)}$. Les deux points sur une de ces droites sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et par l'espace correspondant $\Pi_3^{(ik)}$.

Théorème LXXXVII. Les 120 points du groupe $(S_0)_{120}$ sont aussi situés deux à deux sur 15·60 droites, qui coupent 60 à 60 chacune des 15 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et le plan correspondant $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ en deux points. Ces points divisent harmoniquement les deux points de $(S_0)_{120}$.

Théorème LXXXVIII. Les 120 points du groupe $(S_0)_{120}$ sont situés 6 à 6 sur 200 plans, qui passent 20 à 20 par les droites où l'espace unité rencontre les faces planes de la pyramide fondamentale. Les 6 points d'un tel plan sont situés sur une conique et ont les mêmes propriétés que celles du groupe $(S_0)_6$ du § 2.

Ils sont aussi situés 24 à 24 sur 25 surfaces du 2^d degré à 2 dimensions, dont les espaces à 3 dimensions passent 5 à 5 par les plans d'intersection de l'espace unité avec les faces de la pyramide fondamentale. Les 24 points d'une telle surface ont les mêmes propriétés que celle du groupe $(S_0)_{24}$ du paragraphe précédent.

45. Du groupe I et du théorème XXIII on déduit:

Théorème LXXXIX. Si l'on opère sur un point S_0 de R_4 l'homographie cyclique (12345) on obtient 5 points d'un cycle projectif. Les points doubles de l'homographie sont le point unité et 4 points qui ont pour coordonnées les racines 5^{mes} de l'unité.

Pour le groupe II on a:

Théorème XC. Si l'on opère sur un point S_0 successivement une involu-
tion, par ex. (12), et l'homographie cyclique (345) on obtient un groupe de 6 points, qui sont situés deux à deux sur 3 droites passant par le point $P_0^{(12)}$ et qui forment deux cycles projectifs de 3 points.

Avec les 120 points du cycle $(S_0)_{120}$ on peut former de dix manières différentes 20 de ces groupes.

Pour le groupe III on obtient:

Théorème XCI. En appliquant au point S_0 successivement l'involution $(12)(34)$ et l'homographie cyclique (345) , on obtient un groupe de 6 points, qui sont situés deux à deux sur 3 droites rencontrant 3 à 3 les droites $P_1^{(12)(34)}$, $P_1^{(12)(35)}$, $P_1^{(12)(45)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Ils forment aussi deux cycles projectifs de trois points.

Avec les 120 points de $(S_0)_{120}$ on peut former de 10 manières différentes 20 de ces groupes.

Pour le groupe IV:

Théorème XCII. En opérant sur un point S_0 successivement les deux involutions $(12)(34)$ et (35) , on obtient un groupe de 12 points, situés deux à deux sur 24 droites, qui passent 6 à 6 par les points $P_0^{(12)}$, $P_0^{(34)}$, $P_0^{(35)}$, $P_0^{(45)}$. Ils sont situés aussi deux à deux sur 10 droites, qui coupent 6 à 6 les droites $P_1^{(12)(34)}$, $P_1^{(12)(35)}$, $P_1^{(12)(45)}$ et les plans correspondants Π_2 ; ils forment quatre cycles projectifs de 3 points.

Du groupe V:

Théorème XCIII. En opérant sur le point S_0 successivement l'involution $(12)(35)$ et l'homographie cyclique (1325) on obtient 20 points.

Ces 20 points sont situés deux à deux sur 50 droites, qui coupent 10 à 10 les 5 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ donnés par les 5 involutions de la forme $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ du groupe V. Ils forment aussi 4 cycles projectifs de 5 points.

Avec les 120 points $(S_0)_{120}$ on peut former de 6 manières différentes 6 de ces groupes.

En égalant à zéro les 6 fonctions y on obtient 6 surfaces à 3 dimensions du 4^{me} degré, qui représentent le groupe V.

De même pour le groupe VI. Pour le demi-groupe on a:

Théorème XCIV. En opérant sur le point (S_0) successivement les deux involutions $(12)(34)$, $(23)(45)$, on obtient un groupe de 60 points $(S_0)_{60}^1$. Le groupe $(S_0)_{120}$ se décompose en deux de ces groupes $(S_0)_{60}^1$, $(S_0)_{60}^2$ qui sont homologues de 15 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les espaces $\Pi_3^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie.

Et finalement pour le groupe total on voit qu'en opérant sur le point S_0 successivement l'involution (12) et l'homographie cyclique (12345) on obtient tous les points du groupe.

On déduit aussi des théorèmes du n.º 14 qu'un groupe quelconque de 120 points $(S_0)_{120}$ est toujours situé sur une surface du 2^d degré du faisceau

$$\Sigma x_i^2 + \lambda \Sigma x_i x_k = 0$$

et ainsi de suite.

INTERPRÉTATION DANS L'ESPACE UNITÉ
ET DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS QUELCONQUE.

46. Si nous supposons qu'un point T_0 soit situé dans l'espace unité, ses coordonnées y_1, y_2, \dots, y_5 doivent satisfaire à la relation

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 0. \quad (1)$$

Dans l'espace unité on a les 10 points $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(14)}, P_0^{(15)}, P_0^{(23)}, P_0^{(24)}, P_0^{(25)}, P_0^{(34)}, P_0^{(35)}, P_0^{(45)}$, qui sont situés 6 à 6 sur 5 plans, c'est à dire sur les plans où l'espace unité rencontre les faces à trois dimensions de la pyramide fondamentale dans R_4 .

Considérons analoguement au n.º 39 la surface

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \quad \Sigma x_i = 0 \quad (2)$$

par laquelle passent toutes les surfaces du faisceau déterminé par les groupes $(S_0)_{120}$ de R_4 . L'équation (2) peut s'écrire aussi sous la forme

$$\Sigma x_i^2 + \Sigma x_i x_k = 0 \quad i, k = 1, 2, 3, 4. \quad (3)$$

Théorème XCV. Un point quelconque T_0 de la surface (2), que j'appelle fondamentale, donne un groupe $(T_0)_{120}$ inscrit à la surface. Cela n'a pas lieu pour tout groupe $(T_0)_{120}$ situé sur l'espace unité.

Les plans polaires des 10 points $P_0^{(ik)}$ par rapport à la surface fondamentale ont leurs équations de la forme

$$x_i - x_k = 0. \quad (4)$$

Il n'est pas difficile de voir que ce sont précisément les plans d'intersection des espaces $\Pi_3^{(ik)}$, passant par le point unité, avec l'espace $\Sigma x_i = 0$. Les 10 plans (4) se coupent 6 à 6 en 5 points, $P_0^{(16)}, P_0^{(26)}, P_0^{(36)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$ dont les coordonnées sont:

$$\begin{aligned} (-4 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1), & \quad (1 \ -4 \ 1 \ 1 \ 1), & \quad (1 \ 1 \ -4 \ 1 \ 1), \\ (1 \ 1 \ 1 \ -4 \ 1), & \quad (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -4). \end{aligned}$$

Ces points sont les pôles des faces du pentaèdre fondamental, où sont situés 6 à 6 les 10 points $P_0^{(ik)}$. Ces 5 points forment donc un pentagone gauche de l'espace unité, qui est conjugué par rapport à la surface fondamentale ainsi que le pentaèdre fondamental.

Or les 10 points $P_0^{(ik)}$ et les 5 points $P_0^{(16)}, P_0^{(26)}, P_0^{(36)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$, forment dans l'espace à 3 dimensions la figure analogue à celle que nous avons trouvée au n.º 39. Si nous désignons le plan polaire de $P_0^{(12)}$ par le symbole $\Pi_2^{(12)}$, on voit qu'il passe par les points $P_0^{(34)}, P_0^{(35)}, P_0^{(36)}, P_0^{(45)}, P_0^{(46)}, P_0^{(56)}$; il en est de même pour les plans polaires des autres points $P_0^{(\alpha\beta)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Je remarque aussi que les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites $D_1^{(\alpha\beta\gamma)}$, qui contiennent les trois points $P_0^{(\alpha\beta)}, P_0^{(\beta\gamma)}, P_0^{(\alpha\gamma)}$ et qui passent 4 à 4 par les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$. Ces 20 droites sont situées à leur tour 4 à 4 sur les 15 plans Π_2 . Done:

Théorème XCVI. Les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ de l'espace unité à trois dimensions ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) sont situés 3 à 3 sur 20 droites $D_1^{(\alpha\beta\gamma)}$ et 6 à 6 sur leurs plans polaires $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$ par rapport à la surface fondamentale.

Les 20 droites D_1 passent 4 à 4 par les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ et sont situées 4 à 4 sur les 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$.

Les 15 points $P_0^{(\alpha\beta)}$ et les 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)}$ forment une figure réciproque d'elle-même par rapport à la surface fondamentale. Elle est analogue à la figure complète de deux tétraèdres homologues, de même qu'une figure Π de l'hexagramme constitue la figure complète de deux triangles homologues dans le même plan ⁽¹⁾.

Théorème XCVII. La figure précédente se décompose en 6 groupes d'un pentaèdre et d'un pentagone complets, qui n'ont commun aucun sommet, ni aucune face, et qui, pris ensemble, constituent la figure entière. Ce pentagone et ce pentaèdre sont conjugués et polaires réciproques par rapport à la surface fondamentale ⁽²⁾.

La figure que nous venons de considérer n'est pas identique à la figure générale complète de deux tétraèdres homologues, car la surface fondamentale rencontre les 10 droites D_1 , où sont situés les premiers dix points $P_0^{(ik)}$, ($i, k = 1, 2, 3, 4, 5$), aux points (r_3) , dont trois coordonnées sont les racines cubi-

⁽¹⁾ Voir A., *Behandlung der project. Verhältnisse*, etc. Math. Annalen, vol. 19.

⁽²⁾ Voir A., Math. Annalen, l. c., p. 192, § 5. *Polar figuren in Bezug auf eine (n-1) dimensionale F_{n-1}* .

ques de l'unité et les deux autres sont nulles. La surface passe aussi par les points des groupes (r_4) , (r_5) , où r_4 et r_5 sont racines primitives 4^{m^e} et 5^{m^e} de l'unité.

Les points du groupe	(r_3)	sont au nombre de	20
"	"	(r_4)	" 30
"	"	(r_5)	" 24.

Au moyen de cette surface et de l'icosaèdre, M. KLEIN a résolu l'équation du 5^{m^e} degré (*). Cependant il n'a donné aucune indication sur l'étude des groupes de 5 lettres, comme nous l'avons fait ici. Je cite ce travail très important de KLEIN, pour montrer que les recherches, qui nous occupent dans le présent travail, ont aussi un grand intérêt en algèbre.

47. Pour étudier maintenant les propriétés des 120 points d'un groupe $(T_0)_{120}$, situé dans l'espace unité, il suffit de suivre la même méthode que celle suivie pour le cas $n=4$.

Nous trouvons:

Théorème XCVIII. Les 120 points $(T_0)_{120}$ sont situés 2 à 2 sur 10·60 droites, passants 60 à 60 par les 10 points $P_0^{(ik)}$ ($i, k=1, 2, 3, \dots, 5$). Deux points sur une telle droite sont divisés harmoniquement par le point $P_0^{(ik)}$ et par le plan $\Pi_2^{(ik)}$ correspondant.

Si nous considérons l'involution (12)(34), on sait alors que dans l'espace R_4 les deux points que l'on déduit d'un point quelconque S_0 sont situés sur une droite, qui coupe $P_1^{(12)(34)}$ et le plan correspondant $\Pi_2^{(12)(34)}$.

Or, en projetant par le point unité sur l'espace $\Sigma x_i=0$, les deux points sont projetés en deux points d'un groupe $(T_0)_{120}$, car les groupes $(T_0)_{120}$ de l'espace $\Sigma x_i=0$ peuvent être considérés comme la projection des groupes $(S_0)_{120}$ de R_4 faite par le point unité. Ces deux points sont situés sur une droite, qui coupe la droite $P_1^{(12)(34)}$ et la droite d'intersection de $\Sigma x_i=0$ avec le plan $\Pi_2^{(12)(34)}$, puisque ce plan passe par le point unité. Donc:

Théorème XCIX. Les 120 points $(T_0)_{120}$ d'un groupe dans $\Sigma x_i=0$ sont situés deux à deux sur 10·60 droites, qui rencontrent 60 à 60 les 10 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les droites Π_1 d'intersection de $\Sigma x_i=0$ avec les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$. Les deux points sur une telle droite sont divisés harmoniquement par les droites P_1, Π_1 .

Si le point R_0 de projection est un point quelconque, il est clair que ce

(*) Math. Annalen, vol. 12, pag. 545. Eine neue Auflösung der Gleich. 5^{ten} Grades.

théorème n'a pas lieu, parce que les plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ ne passent pas par R_0 . Dans ce cas, on obtient dans l'espace R_3 , où l'on projette, une pyramide quelconque de 5 sommets ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(5)} \equiv {}_1(A)$. Sur ses arêtes il y a 10 points ${}_1P_0^{(ik)}$ et 10 points ${}_1P_0'^{(ik)}$, tels que ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ divisent harmoniquement les deux sommets ${}_1A_0^{(i)}, {}_1A_0^{(k)}$.

Les 10 points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 10 droites, qui forment 5 quadrilatères, et 6 à 6 sur 5 plans. Les 20 points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$ sont encore situés 3 à 3 sur 30 droites, qui forment avec les 10 premières 10 quadrilatères.

Si nous projetons les 16 points $(B)_{16}$ (théor. LXXXIV) sur R_3 on obtient un groupe de 16 points ${}_1(B)_{16}$, qui sont situés deux à deux sur 40 droites passants 8 à 8 par les 5 sommets ${}_1A_0^{(1)}, \dots, {}_1A_0^{(5)}$ de ${}_1(A)$.

Si l'on fait la projection de ce groupe par le point unité sur l'espace unité, ces 16 points étant 8 à 8 sur les espaces

$$x_i - x_k = 0 \quad (1)$$

on a :

Théorème C. En projetant le groupe $(B)_{16}$ du point unité, on obtient sur l'espace unité 15 points [car le point unité est lui-même un point du groupe $(B)_{16}$], qui sont situés 7 à 7 sur les 10 plans où les espaces (1) coupent $\Sigma x_i = 0$, c'est à dire sur les 10 plans polaires Π_2 des 10 points $P_0^{(ik)}$ par rapport à la surface fondamentale.

Si nous considérons les trois espaces

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - x_3 = 0, \quad x_2 - x_3 = 0 \quad (2)$$

ils passent par un plan, puisque les trois points correspondants $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}$ sont situés sur la droite, où $\Sigma x_i = 0$ rencontre la face $A_2^{(123)}$ de la pyramide fondamentale en R_4 . Il est facile de voir sur le tableau des points $(B)_{16}$ (n.° 43), que les trois espaces (2) contiennent respectivement les points

$$\begin{aligned} &1, 2, 9, 10, 11, 14, 15, 16; \quad 1, 3, 7, 8, 11, 13, 15, 16 \\ &1, 4, 5, 6, 11, 12, 15, 16. \end{aligned}$$

On voit donc que les points 1, 11, 15, 16 sont situés sur un plan et que les projections sur $\Sigma x_i = 0$ de 11, 15, 16 sont situées sur une droite, qui est une des arêtes du pentagone formé par les dix plans Π (*).

(*) C'est à dire que les 15 points sont donnés par les 5 sommets de ce pentagone et les 10 points de rencontre de ses côtés avec les faces opposées.

Les groupes de 120 points $(T_0)_{120}$ dans $\Sigma x_i = 0$, ou bien dans un espace quelconque R_3 , ont communes leurs propriétés, qui dérivent du théor. LXXXVII.

On peut étudier leurs groupes de la même manière que nous avons traité les groupes $(T_0)_{24}$ sur le plan dans le paragraphe précédent.

PROJECTION SUR UN PLAN R_2 .

48. Pour projeter les figures de l'espace R_4 sur un plan R_2 il faut projeter par une droite R_1 , qui ne coupe pas R_2 . On déduira ainsi, de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(5)}$, un pentagone ${}_2A_0^{(1)}, \dots, {}_2A_0^{(5)}$, et des groupes de 120 points ${}_2(S_0)_{120}$, dont les propriétés se déduisent facilement des théorèmes précédents. Les configurations qu'on obtient dans R_2 sont naturellement une expression géométrique de la théorie des substitutions de 5 lettres.

En donnant à la droite de projection R_1 , ou bien au point R_0 de projection sur un espace R_3 , des positions spéciales par rapport à la pyramide fondamentale en R_4 , on a, d'après le théorème XXXVII:

Théorème CI. Pour chaque pentagone ou tétraèdre dans R_3 , ou bien pour chaque triangle, quadrangle, pentagone complet dans le plan, on obtient des configurations de la même classe, qui sont une expression géométrique de la théorie des substitutions de 5 lettres.

§ 5.

Groupes des substitutions de 6 lettres en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique.

49. Former les groupes des substitutions de n lettres est un des problèmes les plus difficiles de la théorie des substitutions, et il est, en général, loin d'être résolu. Cependant, dans des cas particuliers, on peut, ou par une méthode, ou par l'autre déterminer des groupes; c'est ainsi, par ex., que SERRET a trouvé les fonctions de 4, 5 lettres et les 6 fonctions de 6 lettres. Mais nous n'avons pas seulement besoin des fonctions et de l'ordre des groupes qu'elles représentent, nous avons besoin aussi de connaître la forme des substitutions d'un groupe, afin d'en tirer ensuite des conséquences pour nos figures géométriques; comme nous venons de le faire pour $n = 4, 5$.

Pour trouver les groupes principaux de 6 lettres et les groupes qui y sont contenus, nous nous appuyerons sur la connaissance des groupes de l'hexagramme même. J'en donnerai seulement les résultats, comme pour $n=4$, $n=5$; on aura en tout cas presque toujours une vérification géométrique dans l'hexagramme, si l'on tient compte de la notation que j'ai donnée au § 1 de ce chapitre. Pour établir les substitutions je pars toujours de l'hexagone 123456.

GROUPES DES TRIANGLES $\Delta_{\alpha\beta}$, DES DROITES DE STEINER-PLÜCKER
ET DES POINTS DE SALMON.

I. Il y a dans l'hexagramme 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ (n.º 22); ces triangles représentent un groupe de 48 substitutions. Si nous considérons, par ex., le triangle $\Delta_{12} \equiv 12 \cdot 34 \cdot 56$, on a le groupe suivant:

1, (12)(34), (12)(56), (34)(56), (13)(24), (14)(23), (1423)(56)
 (1324)(56), (15)(26), (1625)(34), (16)(25), (1526)(34), (35)(46)
 (12)(3645), (12)(3546), (36)(45), (135)(246), (145)(236), (146)(235)
 (136)(245), (153)(264), (164)(253), (163)(254), (154)(263)
 (12), (34), (56), (12)(34)(56), (1324), (1423), (14)(23)(56)
 (13)(24)(56), (1526), (16)(25)(34), (1625), (15)(34)(26), (12)(35)(46)
 (3645), (3546), (12)(36)(45), (135246), (145236), (146235)
 (136245), (153264), (164253), (163254), (154263).

Dans ce groupe, il y a 24 substitutions paires et 24 impaires. Les 48 permutations obtenues, en partant de l'hexagone 123456, sont les suivantes:

123456,	345612,	561234;	214356,	435621,	562143;
213465,	346521,	652134;	124365,	436512,	651243;
341256,	563412,	125634;	432156,	564321,	215643;
342165,	653421,	216534;	431256,	654312,	126543;
432165,	654321,	216543;	341265,	653412,	126534;
431256,	564312,	125643;	342156,	563421,	215634;
214365,	436521,	652143;	123465,	346512,	651234;
213456,	345621,	562134;	124356,	435612,	561243.

Or, d'après le premier tableau des 6 figures II et d'après le n.° 23, on voit que ces permutations correspondent 6 à 6 aux droites de PASCAL

$$p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I \quad p_{345}^{II} p_{134}^{II} p_{135}^{II} p_{145}^{II}$$

ou bien

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \Delta_{12}\Delta_{14}, \Delta_{12}\Delta_{15}, \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \Delta_{12}\Delta_{24}, \Delta_{12}\Delta_{25}, \Delta_{12}\Delta_{26}, \quad (1)$$

qui forment les deux quadrilatères des deux figures I et II, dont les côtés se rencontrent deux à deux sur les côtés du triangle Δ_{12} et aux 4 points de STEINER $G_{123}, G_{124}, G_{125}, G_{126}$ de la droite de STEINER-PLÜCKER G_{12} .

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (3645) et (135246). Il transforme le triangle Δ_{12} en lui-même, de même que l'ensemble des deux quadrilatères (1) et la droite de STEINER G_{12} et le point de SALMON S_{12} .

Dans le groupe total il y a 15 de ces groupes.

Ce groupe peut être représenté par la fonction

$$\Delta_{12} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_4 + x_5 x_6. \quad (2)$$

On a donc 15 fonctions du 2^d degré $\Delta_{\alpha\beta}$, qui correspondent aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme. Il est clair que ces fonctions jouent dans la théorie des substitutions de 6 lettres un rôle analogue à celui des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dans la théorie de l'hexagramme.

II. Les 24 substitutions paires du groupe I forment naturellement aussi un groupe; il est donné par les 24 premières substitutions et par les 24 premières permutations du groupe I. Ces dernières correspondent 3 à 3 aux droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I, II.

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (1526)(34). Ce groupe est le seul que l'on rencontre dans le groupe I.

GROUPES DES DROITES DE PASCAL ET DES POINTS Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m}$
ET DES DROITES z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m+1}$.

50. Soit, par ex., donnée la droite $p_{345}^I = 123456 = \Delta_{12}\Delta_{13}$, elle représente le groupe:

$$\text{III. } 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264), \\ (165432), (16)(25)(34), (15)(24), (14)(23)(56), (13)(46), \\ (12)(36)(45), (26)(35).$$

Ce groupe contient douze substitutions qui correspondent aux douze permuta-

tions de la droite de PASCAL. Il peut être engendré par les deux substitutions (123456), (13)(46). Il contient 6 substitutions paires et 6 impaires.

Si au lieu de considérer la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$ on considère la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, qui a pour triangle Δ le triangle Δ_{12} (n.° 23), on voit que le groupe qu'elle représente, en partant de l'hexagone 163254, est contenu dans celui qui correspond au triangle Δ_{12} . Nous avons vu qu'il y a quatre droites de PASCAL, qui ont le même triangle Δ_{12} , ce sont :

$$\Delta_{13}\Delta_{23}, \quad \Delta_{14}\Delta_{24}, \quad \Delta_{15}\Delta_{25}, \quad \Delta_{16}\Delta_{26}.$$

Les groupes qui représentent ces 4 droites, si l'on part non pas de la permutation 123456 mais d'une quelconque de leurs permutations, appartiennent au groupe I du triangle Δ_{12} .

Si l'on applique les substitutions du groupe III à une autre droite de PASCAL, qui ne soit pas $\Delta_{12}\Delta_{13}$, on obtient douze permutations, qui n'appartiennent pas à la même droite de PASCAL.

Dans le groupe total, il y a donc 60 groupes III, qui sont contenus 4 à 4 dans les 15 groupes I.

Cette décomposition des groupes nous sera très utile pour l'interprétation géométrique.

Nous avons vu aussi (n.° 28) que les trois droites v_{12} , qui se rencontrent au point $Z_{345.2}^I$, correspondant à la droite p_{345}^I (*), ont les symboles

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{25} \\ \Delta_{23} & \Delta_{34} & \Delta_{35} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{25} & \Delta_{26} \\ \Delta_{23} & \Delta_{35} & \Delta_{36} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \Delta_{23} & \Delta_{24} & \Delta_{26} \\ \Delta_{23} & \Delta_{34} & \Delta_{36} \end{array} \right|.$$

Si nous appliquons à ces symboles les substitutions du groupe III, ce groupe de 3 droites v_{12} reste invariable; donc le point $Z_{345.2}^I$ reste aussi inaltéré. On peut le représenter, en conséquence, par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$ de la droite correspondante de PASCAL.

Le groupe de la droite de PASCAL peut être représenté par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}.$$

IV. Le groupe des 6 substitutions paires de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$ est

$$1, \quad (13)(46), \quad (26)(35), \quad (135)(246), \quad (153)(264), \quad (15)(24)$$

(*) Au n.° 28 nous avons trouvé les symboles des droites v_{12} , qui passent par le point $Z_{345.2}^{II}$; on en déduit le symbole des droites v_{12} passant par le point $Z_{345.2}^I$ en changeant l'indice 1 avec 2.

qui peut être engendré par deux substitutions, savoir: (13)(46), (26)(35), ou bien (135)(246), (13)(46).

Si nous opérons les substitutions de ce groupe sur l'hexagone 163254 de la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, on obtient 6 permutations, qui correspondent trois à trois aux deux droites $\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{12}\Delta_{23}$. Donc ce groupe laisse inaltéré le point de STEINER G_{123}

V. 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), (153)(264),
(165432).

Ce groupe contient 3 substitutions paires et 3 impaires, et il est engendré par la substitution cyclique (123456).

VI. 1, (135)(246), (153)(264).

Ce groupe contient les 3 substitutions paires du groupe précédent, et il est engendré par (135)(246).

VII. 1, (13)(46), (14)(25)(36), (16)(25)(43).

Ce groupe contient 4 substitutions du groupe III, et il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions.

On voit aussi qu'il contient deux substitutions paires et deux impaires.

Dans le groupe III il y a 6 de ces groupes.

51. Dans ce numéro nous donnons d'autres groupes, qui sont contenus dans le groupe Δ_{12} .

VIII. 1, (12)(34), (12)(56), (34)(56).

Ce groupe contient 4 substitutions paires, qui appartiennent au groupe I. Il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Le groupe I contient un seul de ces groupes.

Les 4 permutations sont

123456, 214356, 213465, 124365,

qui correspondent aux droites $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{15}$, $\Delta_{12}\Delta_{16}$ de la figure I. Ce groupe laisse par suite inaltéré le quadrilatère formé par ces quatre droites.

IX. 1, (12)(34), (1625)(34), (12)(56), (1526)(34),
(16)(25), (34)(56), (15)(26).

Ce groupe contient 8 substitutions paires du groupe de Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (1625)(34). Dans le groupe I il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations sont :

123456, 654312, 213465, 564321, 214356,
653421, 124365, 563412,

qui correspondent respectivement aux droites des deux quadrilatères des deux figures ΠI et Π . Ce groupe laisse donc aussi inaltérés la droite de STEINER-PLÜCKER et le point de SALMON.

X. 1, (12), (34)(56), (12)(34)(56).

Ce groupe contient deux substitutions paires et deux impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux quelconques des trois dernières substitutions. Dans le groupe Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 4 permutations

123456, 213456, 124365, 214365

correspondent aux droites du quadrilatère de la première figure, que nous avons considéré plus haut.

XI. 1, (12), (3645), (34)(56), (3546), (12)(3645),
(12)(34)(56), (12)(3546).

Ce groupe contient 4 substitutions paires et 4 impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12) (3645). Dans le groupe Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations sont :

123456, 213456, 126534, 124365, 125643,
216534, 214365, 215643

qui correspondent aux 8 droites de PASCAL des deux quadrilatères des figures ΠI et Π . Ce groupe laisse aussi inaltérés la droite G_{12} de STEINER-PLÜCKER et le point de SALMON S_{12} .

XII. 1, (12), (14)(23)(56), (56)(1423), (1324)(56),
(34), (13)(24)(56), (12)(34).

Ce groupe contient 4 substitutions paires et 4 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (14)(23)(56). Dans le groupes Δ_{12} il y a 3 de ces groupes.

Les 8 permutations qu'on obtient de 123456 sont:

123456, 213456, 432165, 342165, 431265,
 341265, 124356, 214356,

qui correspondent aux droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I et II, dont les côtés se coupent respectivement sur les côtés du triangle Δ_{12} . Donc ce groupe laisse aussi inaltérés la droite G_{12} et le point S_{12} .

XIII. 1, (1423)(56), (12)(34), (1324)(56).

Ce groupe contient les 4 substitutions paires du groupe XII et il peut être engendré par la substitution (1423)(56). Dans le groupe I il y a 3 de ces groupes.

Les 4 permutations

123456, 431265, 214356, 342165

correspondent aux 4 droites

$p_{345}^1 p_{145}^{II} p_{135}^I p_{135}^{II}$ ou $\Delta_{12}\Delta_{13}$, $\Delta_{12}\Delta_{26}$, $\Delta_{12}\Delta_{14}$, $\Delta_{12}\Delta_{25}$.

XIV. 1, (12), (135246), (154)(263), (12)(34)(56)
 (145)(236), (164253), (135)(246), (154263), (34)(56), (145236)
 (164)(253), (146)(235), (163254), (136245), (153)(264)
 (153264), (12)(34), (163)(254), (56), (12)(56), (146235)
 (34), (136)(245).

Ce groupe contient 12 substitutions paires et 12 impaires du groupe Δ_{12} , et il peut être engendré par deux substitutions, par ex: (12), (135246).

On ne peut former avec les substitutions de Δ_{12} qu'un seul de ces groupes.

Les 24 permutations en partant de l'hexagone 123456 sont:

123456, 345621, 562143, 214365, 436512, 651234,
 213456, 345612, 561243, 124365, 436521, 652134,
 435621, 652143, 346512, 561234, 562134, 214356,
 651243, 123465, 213465, 435612, 124356, 346521,

qui correspondent aux huit droites de PASCAL des deux quadrilatères des deux figures I et II. Ce groupe transforme donc en eux-mêmes la droite G_{12} et le point S_{12} .

XV. 1, (12)(34), (135)(246), (153)(264), (146)(235),
 (154)(263), (145)(236), (164)(253), (163)(254), (12)(56),
 (34)(56), (136)(245).

Ce groupe contient les 12 substitutions paires du groupe précédent, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12)(34), (135)(246). On ne peut former avec les substitutions de Δ_{12} qu'un seul groupe semblable.

Les 12 permutations sont:

123456, 345612, 561234, 214356, 435621, 562143,
436512, 652134, 651243, 213465, 124365, 346521,

qui correspondent aux 4 droites du quadrilatère de la première figure II.

GROUPES DES POINTS DE STEINER ET DES DROITES DE CAYLEY.

52. Soient donnés les deux points de STEINER $G_{123} G_{456}$, qui sont représentés par le symbole

$$\begin{array}{ccc|c} 12 & 34 & 56 & \\ \hline 45 & 61 & 23 & (\text{n.}^\circ 24) \\ \hline 36 & 25 & 14 & \end{array} \quad (1)$$

ou bien chacun respectivement par les symboles $\Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{23}$, $\Delta_{45} \Delta_{46} \Delta_{56}$.

Les deux points $G_{123} G_{456}$, ou mieux les 72 permutations correspondantes aux 6 droites de PASCAL, qui passent trois à trois par ces deux points, forment un groupe de 72 substitutions, savoir:

XVI. 1, (135)(246), (153)(264), 15)(24), (13)(46),
(26)(35), (35)(46), (15)(26), (13)(24), (135)(264), (153), (246),
(264), (135), (153)(246), (15)(46), (13)(26), (24)(35), (1256)(34),
(14)(2365), (1632)(45), (16)(2345), (14)(2563), (12)(3654),
(1436)(25), (16)(23), (12)(3456), (1236)(45), (1634)(25),
(1432)(56), (16)(2543), (1234)(56), (1452)(36), (1456)(23),
(1254)(36), (1652)(34),
(123456), (14)(25)(36), (16)(54)(32), (16)(25)(34), (14)(23)(56),
(12)(36)(45), (125436), (165234), (145632), (145236), (163254),
(12)(34)(56), (16)(23)(45), (125634), (143652), (143256), (123654),
(163452), (35), (15)(246), (13)(264), (135)(24), (153)(46), (26),
(246)(35), (15)(264), (13), (135)(26), (153)(24), (46), (264)(35),
(15), (13)(246), (135)(46), (153)(26), (24).

Les 6 droites de PASCAL qui passent par G_{123} et G_{456} sont :

$$\begin{aligned} \Delta_{12}\Delta_{13} &= 123456, & \Delta_{12}\Delta_{23} &= 125634, & \Delta_{13}\Delta_{23} &= 163254 \\ \Delta_{45}\Delta_{46} &= 125436, & \Delta_{45}\Delta_{56} &= 145632, & \Delta_{46}\Delta_{56} &= 165234. \end{aligned}$$

Ce groupe contient 36 substitutions paires et 36 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (1256)(34) ou (13), (123456). Il y a, dans le groupe total, 10 de ces groupes.

Si l'on effectue les substitutions de ce groupe sur un hexagone correspondant à une droite de PASCAL, qui ne passe ni par G_{123} , ni par G_{456} , on obtient 72 permutations, qui ne correspondent pas aux 6 droites de PASCAL de deux points conjugués de STEINER. En effet, en opérant la substitution (35), par ex. sur l'hexagone 135264 de la droite p_{123}^I passant par le point G_{145} (§ 1 de ce chapitre) on obtient l'hexagone 153264 de la droite p_{123}^{IV} , qui passe par le point G_{124} .

XVII. Les 36 substitutions paires du groupe précédent forment un groupe, qui peut être aussi engendré par deux substitutions, par ex. (1256)(34), (15)(24), ou (1256)(34), (12)(3456).

Si nous considérons le groupe XII comme engendré par les deux substitutions (13), (14)(23)(56), on obtient un groupe de 8 substitutions, contenu dans le groupe XVI. Dans ce groupe, il y en a 9 semblables, qui dépendent des substitutions (1256)(34), (14)(2365), (45)(1632), (16)(2345), (12)(3654), (25)(1436), (1654)(23), (1432)(56), (1452)(36).

$$\begin{aligned} \text{XVIII.} \quad & 1, (123456), (135)(246), (14)(25)(36), \\ & (153)(264), (165432), (13)(24), (145632), (35)(46), (125436), \\ & (15)(26), (165234), (143256), (163452), (123654), (15)(46), \\ & (24)(35), (13)(26), (125634), (16)(23)(45), (143652), (153)(246), \\ & (135), (264), (135)(264), (153), (246), (163254), (12)(34)(56), \\ & (145236), (26)(35), (15)(24), (13)(46), (16)(25)(34), (14)(23)(56), \\ & (12)(36)(45). \end{aligned}$$

Ce groupe contient 18 substitutions paires et 18 impaires. Il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (123456), (13)(24).

Les 36 permutations, que l'on obtient en partant de l'hexagone 123456, correspondent précisément aux 36 hexagones des 3 droites de PASCAL, qui passent par le point G_{123} .

Dans le groupe XVI, il n'y a qu'un seul de ces groupes.

Le point de STEINER G_{123} a pour symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$ (n.° 24), donc on peut représenter le groupe XVIII par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_3x_6 + x_2x_5 + x_1x_4) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23} \quad (2)$$

tandis que le point conjugué G_{456} est représenté par la fonction

$$(x_1x_2 + x_4x_5 + x_3x_6)(x_3x_4 + x_6x_1 + x_2x_5)(x_5x_6 + x_2x_3 + x_1x_4) \equiv \Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}. \quad (3)$$

Nous appelons ces deux fonctions: deux fonctions conjuguées.

Le produit de ces deux fonctions représente le groupe XVI.

Nous avons vu, au n.° 27, que les deux droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} sont représentées par le symbole

$$\left| \begin{array}{ccc} \Delta_{14} & \Delta_{36} & \Delta_{25} \\ \Delta_{26} & \Delta_{15} & \Delta_{34} \\ \Delta_{35} & \Delta_{24} & \Delta_{16} \end{array} \right|. \quad (4)$$

Or, comme le groupe XVI transforme le groupe des 6 triangles $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$ en lui-même, de même le symbole (4) se transformera en lui-même; donc le groupe XVI transforme en lui-même le couple des deux droites de CAYLEY c_{123} , c_{456} , de même que la conique Σ_{1235} , qui a pour triangles conjugués les triangles 135, 246 des 6 points fondamentaux.

XIX. Le groupe des 18 substitutions paires du groupe XVIII peut être engendré par deux substitutions, par ex. (135), (246).

$$\begin{aligned} \text{XX. } & 1, (35), (153)(264), (135)(246), (15)(246), (13), \\ & (264)(35), (153), (264), (135)(264), (246), (153)(246), (135), \\ & (15)(264), (246)(35), (13)(246), (13)(264), (15). \end{aligned}$$

Ce groupe contient 9 substitutions paires et 9 impaires, il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (153)(264). On a dans le groupe XVI deux de ces groupes, qui correspondent aux deux groupes des substitutions

$$(13), (15), (35); \quad (24), (26), (46).$$

Les 18 permutations que l'on obtient en partant de l'hexagone 123456 sont:

$$\begin{array}{cccccc} 123456, & 561234, & 345612, & 543612, & 321456, & 165234, \\ 521436, & 163254, & 365214, & 143652, & 541632, & 325416, \\ 563214, & 145632, & 341652, & 523416, & 125436, & 361254, \end{array}$$

qui correspondent aux 6 droites de PASCAL passant par G_{123} et G_{456} .

XXI. Les 9 substitutions paires du groupe précédent peuvent être engendrées par deux substitutions par ex. (135)(246), (135)(264).

Les 9 permutations qui résultent de l'hexagone 123456 correspondent aux 3 droites de PASCAL du point G_{123} .

Ce groupe transforme en lui-même le point de STEINER G_{123} et naturellement aussi le point conjugué.

XXII. 1, (35), (15)(26), (153)(26), (13)(26), (135),
(15), (26), (26)(35), (153), (135)(26), (13).

Ce groupe contient 6 substitutions paires et 6 impaires, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex. (35), (15)(26), ou (35), (153)(26).

Dans le groupe XVI il y a 6 de ces groupes, comme on le voit en remarquant que le groupe XXII correspond à la substitution (135)(26), ou (153)(26).

Les 12 permutations, en partant de l'hexagone 123456, sont:

123456, 125436, 561432, 361452, 325416, 163452,
165432, 321456, 365412, 563412, 521436, 523416.

Elles correspondent aux 6 droites de PASCAL, qui passent par $G_{123}G_{456}$.

XXIII. Le groupe des 6 substitutions paires du groupe précédent peut être engendré par les deux substitutions (15)(26), (135).

Les 6 permutations correspondantes, obtenues en partant de l'hexagone 123456, appartiennent aux trois droites de PASCAL, qui passent par G_{123} .

GROUPES DES 6 FIGURES II.

53. Considérons par ex. la figure I. Nous avons vu (n.° 26) que cette figure peut être représentée par le symbole

$$\left| \begin{array}{l} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 16 \cdot 23 \cdot 45 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \\ 13 \cdot 25 \cdot 46 \\ 15 \cdot 24 \cdot 36 \end{array} \right| = \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14} \Delta_{15} \Delta_{16}.$$

Elle se compose de 10 droites de PASCAL, qui donnent 120 permutations. Ces 120 permutations forment précisément le groupe suivant:

XXIV. 1, (135)(246), (153)(264), (15)(24), (13)(46),
 (26)(35), (23564), (15)(36), (16243), (16435), (15623), (24)(16),
 (13426), (14)(35), (15462), (15346), (14)(26), (13542),
 (25)(46), (13265), (12453), (12645), (13)(25), (24653),
 (34)(56), (145)(236), (136)(254), (165)(234), (14563), (25436),
 (156)(243), (12364), (16352), (16)(23), (124)(356), (152)(364),
 (126)(354), (15234), (14632), (146)(235), (154)(263), (12)(34),
 (14256), (13654), (162)(345), (16)(45), (134)(256), (142)(653),
 (12536), (16524), (132)(456), (136)(245), (164)(253), (12)(56),
 (23)(45), (125)(346), (143)(265), (14325), (123)(465), (26345);
 (123456), (14)(25)(36), (165432), (16)(25)(34), (14)(23)(56),
 (12)(36)(45), (132546), (126534), (1452), (145326), (1254),
 (134652), (2365), (163245), (125643), (124365), (164523), (2563),
 (154236), (1634), (143562), (1436), (162354), (156342),
 (1246), (135264), (1532), (1526), (1324), (12)(35)(46),
 (2534), (1465), (13)(26)(45), (1345), (146253), (2654),
 (3645), (1625), (13)(24)(56), (136425), (1653), (2456),
 (2435), (15)(23)(46), (1263), (1235), (152463), (2643),
 (3546), (15)(26)(34), (1423), (142635), (1543), (2346),
 (1356), (153624), (1642), (16)(24)(35), (1564), (1362).

Ce groupe contient 60 substitutions paires et 60 substitutions impaires, et il peut être engendré par deux substitutions, par ex.

$$(14)(23)(56), \quad (12453).$$

Dans le groupe total, il y a 6 de ces groupes.

XXV. *Le groupe des 60 substitutions paires du groupe précédent peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (12453).*

On peut représenter le groupe de la figure I par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) \\
(x_1x_3 + x_2x_5 + x_4x_6)(x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}.$$

Ce sont précisément les 6 fonctions données par J. SERRET (*). Donc:

Théorème CII. Les 6 fonctions symétriques de J. SERRET par rapport à 6 lettres, et qui ont 6 valeurs, donnent le même groupe des 6 figures Π de chaque système $[Zz]_m$ de l'hexagramme.

En effet, les points Z_2, Z_3 , etc. et les droites z_2, z_3 , etc. ont respectivement les mêmes symboles des droites de PASCAL et des points de KIRKMAN.

Si l'on applique les substitutions de ces groupes à un hexagone qui n'appartient pas à la figure I, on obtient 120 permutations, qui ne correspondent pas aux 10 droites de PASCAL d'une même figure Π . Pour le constater, il suffit d'opérer la substitution (16243) sur l'hexagone (125634) de la droite p_{345}^{II} ; on obtiendra l'hexagone 645213 de la droite p_{134}^{V} . *Il serait intéressant d'étudier les propriétés de ces groupes des droites de PASCAL, qui en résultent, par rapport à la conique Π de la figure I.* Nous avons vu, dans les paragraphes précédents, qu'en permutant les coordonnées d'un point on obtient des involutions ou bien des homographies cycliques; *ici les droites de PASCAL, qui dérivent des 120 substitutions du groupe XXIV ne jouissent-elles donc pas de certaines propriétés polaires par rapport à la conique Π de la figure I?*

Les 10 droites de PASCAL de la figure I même ont des propriétés polaires. *En existe-t-il ici de correspondantes?* On peut se faire aussi la même demande pour tous les groupes les plus intéressants.

GROUPES DES POINTS DE KIRKMAN ET DES DROITES Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m}$
ET DES POINTS Z DES SYSTÈMES $[Zz]_{2m+1}$.

54. Soit donné par ex. le point de KIRKMAN

$$\left| \begin{array}{l} 12 \cdot 34 \cdot 56 \\ 45 \cdot 61 \cdot 23 \\ 14 \cdot 26 \cdot 35 \end{array} \right| = \Delta_{12} \Delta_{13} \Delta_{14},$$

qui correspond à la droite de PASCAL

$$(136425) = \Delta_{15} \Delta_{16}.$$

Les trois droites de PASCAL, qui passent par ce point, donnent 36 permutations; mais elles ne donnent pas un groupe, comme pour un des points de STEINER, parce que 36 n'est pas un diviseur de 120 (**). Dans une figure Π on a dix

(*) L. c.

(**) On sait par la théorie des substitutions que l'ordre m' d'un groupe contenu dans un autre d'ordre m doit être un diviseur de m .

points de KIRKMAN, et l'on trouve que le groupe le plus grand qui transforme le point de KIRKMAN en lui-même est de 12^{me} ordre. La droite de PASCAL se transforme en elle-même par le groupe III de 12 substitutions, mais celui-ci n'est pas l'analogue de celui du point de KIRKMAN.

En effet, le groupe du point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ est le suivant:

XXVI. 1, (26)(35), (56)(13)(24), (152463), (16)(45),
 (126)(354), (14)(25)(36), (14)(23)(56), (12)(34), (162)(345),
 (15)(23)(46), (136425).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (56)(13)(24), et il contient 6 substitutions paires et 6 impaires du groupe XXIV.

Les 12 permutations obtenues, en partant de 123456, sont:

123456,	341265,	541623,	623541,	265341,	456123,
432165,	214356,	614532,	532614,	356214,	165432,

qui appartiennent aux droites de PASCAL passant par le point $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$.

Il y a dans le groupe XXIV 10 tels groupes et dans le groupe total 60.

XXVII. Les 6 substitutions paires du groupe précédent forment un groupe, qui peut être engendré par deux substitutions, par ex. (26)(35), (16)(45).

Nous avons vu, (n.° 28), que les droites z_2, z_4 , etc. des systèmes $[Zz]_{2m}$ et les points Z_{2m+1} sont représentés par les mêmes symboles que les points de KIRKMAN. Donc les groupes des points de KIRKMAN sont aussi les groupes qui correspondent aux droites z_2, z_4 , etc. et aux points Z_{2m+1} .

On peut représenter le groupe du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ par la fonction

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) = \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}.$$

XXVIII. Le groupe de 360 substitutions paires peut être engendré par deux substitutions, par ex. (126), (12345).

Les 360 permutations que l'on obtient en partant d'un hexagone quelconque, appartiennent 6 à 6 aux 60 droites de PASCAL.

Enfin nous avons:

XXIX. Le groupe total de 720 substitutions peut être engendré par deux substitutions, par ex. (12), (123456).

Nous avons donc ces deux théorèmes:

Théorème CIII. Les groupes de 3, 4, 5, 6 lettres considérés peuvent être tous engendrés par deux substitutions.

Théorème CIV. Tout groupe de 3, 4, 5, 6 lettres considéré, qui contient des substitutions paires et impaires, les contient en égal nombre.

Ces groupes pour $n=6$ et ceux que nous avons trouvés pour $n=3, 4, 5$ sont la base de toute configuration analogue à celle de l'hexagramme. On voit aussi, en même temps, que celui-ci n'est qu'une expression *particulière* de ces groupes. Nous obtiendrons maintenant des configurations, qui en sont une expression *générale*.

Les groupes, que nous venons de donner, sont aussi très intéressants pour l'hexagramme lui-même, comme nous l'avons dit au n.° 53, après le théorème CI.

§ 6.

Interprétation géométrique dans l'espace R_5 en correspondance avec l'hexagramme.

55. Nous n'avons plus maintenant qu'à exprimer géométriquement les conséquences, qui résultent immédiatement des groupes précédents, et nous obtiendrons dans R_5 une véritable extension des groupes de l'hexagramme mystique. Mais cette extension peut être faite dans R_5 de différentes manières, d'après le § 5 du premier chapitre.

En effet, si nous permutons les 6 coordonnées y_1, \dots, y_6 , d'un point S_0 dans R_5 , nous obtenons 720 points. Si sur les coordonnées on opère les 12 substitutions du groupe III de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, on obtient 12 points, qui correspondent à cette droite.

Mais nous savons qu'il y a 120 points dont les coordonnées sont les 6 racines 6^{mes} de l'unité (n.° 5), et qui forment un groupe réduit de 120 points. Si nous considérons les deux points

$$r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, \quad r, r_6^5, r_6^4, r_6^3, r_6^2, r_6$$

où r_6 , par ex. est $= -r_3$, étant r_3 une racine cubique de l'unité. Ce couple se transforme en lui-même par les 12 substitutions de la droite $\Delta_{12}\Delta_{13}$; donc on peut faire correspondre aux 60 droites de PASCAL les 60 couples des 120 points (r_6).

Nous avons vu qu'aux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent (n.° 49) 15 fonctions $\Delta_{\alpha\beta}$. Si nous posons ces fonctions $= 0$ nous obtenons 15 surfaces du 2^d degré à 4 dimensions, qui représentent les 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'hexagramme. Ces 15

surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ dans R_5 jouent précisément un rôle analogue à celui des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ dans l'hexagramme. En projetant ensuite sur un espace à 4, 3 dimensions et sur un plan nous obtiendrons des extensions de notre figure dans ces espaces.

On peut trouver aussi dans ces extensions l'analogue à la conique, où sont situés les 6 points fondamentaux de l'hexagramme. En permutant les 6 points de toutes les manières possibles, la conique se transforme en elle-même. Si nous supposons donnée une courbe, ou une surface à 2, à 3, ou bien à 4 dimensions dans R_5 , qui passe par les 6 sommets de la pyramide fondamentale, et qui se transforme en elle-même par les permutations des 6 coordonnées, *cette courbe ou cette surface à 2, 3, 4 dimensions est dans l'espace R_5 le représentant de la conique fondamentale de l'hexagramme.*

56. Avant de passer à l'étude des surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, nous voulons étudier les propriétés des 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$, que l'on obtient en partant d'un point quelconque S_0 et en permutant ses 6 coordonnées y_1, \dots, y_6 de toutes les manières possibles.

On voit clairement maintenant pourquoi nous avons dû interpréter d'abord les groupes pour $n = 3, 4, 5$, car les propriétés des groupes $(S_0)_6, (S_0)_{24}, (S_0)_{120}$ des § 2, 3, 4 de ce chapitre sont les mêmes que pour les points des groupes de $(S_0)_{720}$, lorsqu'on y permute seulement 3, 4 ou 5 coordonnées.

Du théorème XIII et suivants on obtient pour $n = 6$.

Théorème CV. Sur chaque arête de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(6)}$ (que nous désignerons simplement par les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6) dans R_5 , par ex. $A_0^{(1)} A_0^{(2)} \equiv A_1^{(12)}$, il y a deux points $P_0^{(12)}, P_0^{\prime(12)}$, dont les coordonnées sont 1, $-1, 0000, 110000$, qui divisent harmoniquement le segment $A_0^{(1)} A_0^{(2)}$. Il y a pour chaque face à trois dimensions de la pyramide, par ex. $A_4^{(1)} A_4^{(2)} \equiv A_3^{(12)}$, deux espaces $\Pi_4^{(12)} \Pi_4^{\prime(12)}$ dont les équations sont de la forme

$$x_1 \mp x_2 = 0$$

et qui passent par $A_3^{(12)}$ divisant harmoniquement les deux faces $A_4^{(1)} A_4^{(2)}$.

On a en tout 15 points $P_0^{(ik)}$ et 15 points $P_0^{\prime(ik)}$ et un nombre égal d'espaces à 4 dimensions $\Pi_4^{(ik)}, \Pi_4^{\prime(ik)}$.

Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ passent par le point unité, tandis que les 15 points $P_0^{(ik)}$ sont situés sur l'espace unité $\Sigma x_i = 0$.

Un espace $\Pi_4^{(ik)}$ quelconque contient 7 points $P_0^{\prime(ik)}$ et 6 points $P_0^{(ik)}$, et un espace $\Pi_4^{\prime(ik)}$ 6 points $P_0^{\prime(ik)}$ et 7 points $P_0^{(ik)}$.

Les 15 points $P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur les 20 droites d'intersection de l'espace unité avec les faces planes de la pyramide fondamentale. Ils sont

situés 6 à 6 sur les 15 plans d'intersection de l'espace unité avec les 15 faces à trois dimensions de la pyramide fondamentale. Les 6 points sur un de ces plans sont les sommets d'un quadrilatère (*). Sur chaque face plane de la pyramide fondamentale on a 3 points $P_0^{(ik)}$ et 3 points $P_0'^{(ik)}$, qui sont les sommets d'un quadrilatère. Les 30 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$, pris ensemble, sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui sont 4 à 4 les côtés de 35 quadrilatères, y compris les 15 quadrilatères que nous avons considérés plus haut.

Théorème CVI. La figure formée par les points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ et par les espaces $\Pi_4^{(ik)}$, $\Pi_4'^{(ik)}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface $\Sigma x_i^2 = S_4^2 = 0$.

Théorème CVII. Les 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$ que l'on obtient en permutant les 6 coordonnées d'un point quelconque S_0 de toutes les manières possibles, sont situés deux à deux sur 15 · 360 droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points $P_0^{(ik)}$. Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par l'espace correspondant $\Pi_4^{(ik)}$.

Théorème CVIII. Les 15 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 60 droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre indices de la série 123456), qui contiennent les points $P_0^{(\alpha\beta)}$, $P_0^{(\gamma\delta)}$. De même les espaces $\Pi_4^{(ik)}$ déterminent 60 espaces à 3 dimensions $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, qui sont les espaces polaires des droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ par rapport à S_4^2 .

Théorème CIX. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur 60 · 360 droites, qui coupent 360 à 360 les 60 droites P_1 et les espaces correspondants Π_3 . Les deux points d'une de ces droites sont divisés harmoniquement par les espaces P_1 et Π_3 qu'elle rencontre.

Théorème CX. Les 15 points $P_0^{(ik)}$ déterminent 15 plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\lambda)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 123456), passant par les trois points $P_0^{(\alpha\beta)}$, $P_0^{(\gamma\delta)}$, $P_0^{(\varepsilon\lambda)}$. Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ déterminent 15 plans $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\lambda)}$. Ces 15 plans sont aussi déterminés par les points $P_0^{(\alpha\beta)}$, $P_0^{(\gamma\delta)}$, $P_0^{(\varepsilon\lambda)}$.

Les 15 plans P_2 et les 15 plans correspondants Π_2 sont polaires par rapport à la surface S_4^2 (*) (*).

(*) Si l'on projette la figure des points $P_0^{(ik)}$ dans un espace à 3 dimensions on obtient la figure complète de deux tétraèdres homologues. Voir n.º 46.

(*) Par rapport à une surface à 4 dimensions et du 2^d degré en R_5 un point a pour espace polaire un espace à 4 dimensions, une droite un espace à 3 dimensions, et un plan a pour polaire un plan.

(*) Voir mon Mém. des Math. Annalen. Abschnitt III, ($n - 1$)-dimensionale Flächen 2^{m-1} Grades F_{n-1}^2 , p. 184 et suivantes.

Théorème CXI. Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur 15·360 droites, qui coupent 360 à 360 les 15 plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\zeta)}$. Les deux points, sur une telle droite, sont divisés harmoniquement par les deux plans qu'elle rencontre.

Théorème CXII. Les points doubles de l'homographie donnée par une substitution cyclique, par ex. (123456), forment par rapport à la pyramide fondamentale un cycle projectif de 6 points, qui est situé sur une courbe W rationnelle du 5^{me} ordre.

Les 120 substitutions cycliques d'ordre 6 du groupe total donnent 60 homographies cycliques, dont les points doubles sont le point unité et 5 points du groupe (r_6) .

Théorème CXIII. Les 720 points $(S_0)_{720}$ forment de 60 manières différentes 120 cycles projectifs de 6 points, situés sur des courbes W rationnelles de 5^{me} ordre.

Théorème CXIV. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 6 à 6 sur 2400 plans passant 120 à 120 par les 20 droites d'intersection de l'espace unité avec les faces planes de la pyramide fondamentale. Les 6 points sur un de ces plans sont situés sur une conique, et ils ont les mêmes propriétés que les 6 points d'un groupe $(S_0)_6$ du § 2 de ce chapitre.

Théorème CXV. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 24 à 24 sur 450 espaces à 3 dimensions passant 30 à 30 par les 15 plans d'intersection de l'espace unité avec les 15 faces à 3 dimensions de la pyramide fondamentale. Les 24 points d'un tel espace sont situés sur une surface du 2^d degré à 2 dimensions et ils ont les mêmes propriétés que les 24 points du groupe $(S_0)_{24}$ du § 3 de ce chapitre.

Théorème CXVI. Les 720 points $(S_0)_{720}$ sont situés 120 à 120 sur 36 espaces à 4 dimensions, passant 6 à 6 par les espaces à 3 dimensions où l'espace unité coupe les 6 faces à 4 dimensions de la pyramide fondamentale.

57. Des groupes $(y)_{m^{n-1}}$ du n.^o 5, en posant $m=2$, $n=6$, on a des groupes $(y)_{32}$ de 32 points obtenus en changeant les signes des 6 coordonnées d'un point quelconque de toutes les manières possibles. Si l'on part du point unité (comme nous l'avons fait pour $n=4, 5$) on obtient un groupe de 32 points, qui se séparent en deux groupes $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ de 16 points, de même que dans le cas $n=4$ on a deux groupes de 4 points (B) et (C) .

TABLEAU DES DEUX GROUPES $(B)_{16}$, $(C)_{16}$.

$(B)_{16}$							$(C)_{16}$						
B_1	1	1	1	1	1	1	C_1	-1	-1	-1	1	1	1
B_2	-1	-1	1	1	1	1	C_2	-1	-1	1	-1	1	1
B_3	-1	1	-1	1	1	1	C_3	-1	-1	1	1	-1	1
B_4	-1	1	1	-1	1	1	C_4	-1	-1	1	1	1	-1
B_5	-1	1	1	1	-1	1	C_5	-1	1	-1	-1	1	1
B_6	-1	1	1	1	1	-1	C_6	-1	1	-1	1	-1	1
B_7	1	-1	-1	1	1	1	C_7	-1	1	-1	1	1	-1
B_8	1	-1	1	-1	1	1	C_8	1	-1	-1	-1	1	1
B_9	1	-1	1	1	-1	1	C_9	1	-1	-1	1	-1	1
B_{10}	1	-1	1	1	1	-1	C_{10}	1	-1	-1	1	1	-1
B_{11}	1	1	-1	-1	1	1	C_{11}	-1	1	1	1	1	1
B_{12}	1	1	-1	1	-1	1	C_{12}	1	-1	1	1	1	1
B_{13}	1	1	-1	1	1	-1	C_{13}	1	1	-1	1	1	1
B_{14}	1	1	1	-1	-1	1	C_{14}	1	1	1	-1	1	1
B_{15}	1	1	1	-1	1	-1	C_{15}	1	1	1	1	-1	1
B_{16}	1	1	1	1	-1	-1	C_{16}	1	1	1	1	1	-1

On passe d'un point d'un des deux groupes à un point du même groupe par le changement d'un nombre pair de signes, tandis que l'on passe d'un point de $(B)_{16}$ à un point de $(C)_{16}$, et viceversa, par le changement d'un nombre impair de signes.

Avec l'espace unité $\Sigma x_i = 0$ on obtient aussi deux groupes d'espaces à 4 dimensions $(B)_{16}$, $(\Gamma)_{16}$, dont les coordonnées sont précisément égales à celles des points de $(B)_{16}$ et de $(C)_{16}$.

Il est facile de voir que chaque espace de $(B)_{16}$ ou $(\Gamma)_{16}$ contient 10 points de $(C)_{16}$ ou de $(B)_{16}$. Par exemple l'espace

$$x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 0$$

contient les 10 points $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}$.

Si nous considérons les deux espaces $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4'^{(12)}$

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 0$$

on voit que le premier contient les 16 points:

$$B_1 B_2 B_{11} B_{12} B_{13} B_{14} B_{15} B_{16}, \quad C_1 C_2 C_3 C_4 C_{13} C_{14} C_{15} C_{16}$$

et le second les 16 points:

$$B_3 B_4 B_5 B_6 B_7 B_8 B_9 B_{10}, \quad C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12}.$$

Donc:

Théorème CXVII. En changeant de toutes les manières possibles les signes des coordonnées d'un point S_0 , par ex. du point unité, on obtient deux groupes de 16 points $(B)_{16}, (C)_{16}$. On passe d'un point d'un des deux groupes à un point du même groupe par le changement d'un nombre pair de signes, et l'on passe à un point de l'autre groupe par le changement d'un nombre impair de signes.

L'espace unité donne lieu à deux groupes de 16 espaces à 4 dimensions $(B)_{16}, (\Gamma)_{16}$, qui sont les polaires réciproques de $(B)_{16}$ et $(C)_{16}$ par rapport à la surface $\Sigma x_i^2 \equiv S_4^2 = 0$.

Théorème CXVIII. Les espaces de $(B)_{16}$ ou de $(\Gamma)_{16}$ passent respectivement par dix points de $(C)_{16}$ ou de $(B)_{16}$.

Les 32 points $(B)_{16}, (C)_{16}$ sont situés 16 à 16 sur les 30 espaces $\Pi_4^{(ik)}, \Pi_4'^{(ik)}$. Un de ces espaces contient 8 points de l'un et 8 de l'autre groupe. Deux espaces correspondants, par ex. $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4'^{(12)}$, pris ensemble, contiennent tous les 32 points.

Les 15 espaces $\Pi_4^{(ik)}$ forment la figure corrélatrice des 15 points $P_0^{(ik)}$. De même que les points, par ex. $P_0^{(12)}, P_0^{(13)}, P_0^{(23)}$ sont situés sur une droite, de même les espaces $\Pi_4^{(12)}, \Pi_4^{(13)}, \Pi_4^{(23)}$ passent par un espace à 3 dimensions. Or, ces trois espaces passent par les 8 points $B_1, B_{14}, B_{15}, B_{16}, C_1, C_{14}, C_{15}, C_{16}$, c'est à dire que les 32 points sont situés 8 à 8 sur 20 espaces à 3 dimensions passant par le point unité, car il y a 20 droites où sont situés 3 à 3 les 15 points $P_0^{(ik)}$. Mais il en arrive de même pour chaque point des deux groupes $(B)_{16}, (C)_{16}$, parce que la figure de 32 points est symétrique par rapport à ses points, donc:

Théorème CXIX. Les 32 points $(B)_{16}, (C)_{16}$ sont situés 8 à 8 sur 80 espaces à 3 dimensions, qui passent 20 à 20 par chacun d'eux.

Si nous considérons les 6 espaces

$$\left. \begin{array}{lll} x_1 - x_2 = 0, & x_1 - x_3 = 0, & x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0, & x_2 - x_4 = 0, & x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

ils passent par un plan, car les 6 points correspondants $P_0^{(ik)}$ sont situés sur un plan. Ces 6 espaces passent par les points $B_1 B_{16} C_{15} C_{16}$, qui sont par conséquent sur un plan. Or, nous avons 15 groupes (1), donc nous avons 15 plans passants par le point unité et contenant encore 3 autres points des deux groupes. Mais cela a lieu aussi pour chacun des 32 points, donc :

Théorème CXX. Les 32 points de $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ sont distribués 4 à 4 sur 60 plans passant 15 à 15 par chacun d'eux.

58. Si l'on considère les 9 espaces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = 0, & \quad x_4 + x_5 = 0, & \quad x_3 + x_6 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, & \quad x_5 + x_6 = 0, & \quad x_1 + x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0, & \quad x_6 + x_1 = 0, & \quad x_2 + x_5 = 0, \end{aligned}$$

on voit qu'ils passent par le point 1, -1, 1, -1, 1, -1, ou bien C_6 . C'est un point qui ne varie pas par les substitutions du groupe des deux points de STEINER G_{123} , G_{456} , donc :

Théorème CXXI. Les 10 points du groupe $(C)_{16}$, dont les coordonnées ont trois signes positifs et trois négatifs, représentent dans R_5 les 10 couples des points de STEINER.

On s'assure facilement sur les coordonnées elles-mêmes des 32 points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ de la vérité des théorèmes suivants :

Théorème CXXII. Les 120 droites qui joignent deux à deux les 16 points de $(B)_{16}$ ou de $(C)_{16}$ passent 4 à 4 respectivement par les 30 points $P_0^{(ik)}$, $P_0^{(lk)}$.

Théorème CXXIII. Les deux groupes $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ sont homologues de 6 manières différentes, les sommets et les faces opposées à 4 dimensions de la pyramide fondamentale étant centres et espaces d'homologie.

Si l'on considère la surface

$$\Sigma x_i^2 \equiv S_4^2 = 0$$

et si l'on change les signes de toutes les manières possibles dans son équation, on obtient 32 surfaces, qui forment aussi deux groupes $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$, dont les propriétés résultent du n.º 7. Une des propriétés les plus remarquables est la suivante, qu'on peut vérifier très facilement.

Théorème CXXIV. Une quelconque des 32 surfaces $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$ du 2^d degré et à 4 dimensions, qui se déduisent en changeant les signes de toutes les manières possibles dans l'équation de l'une d'entre elles, par ex. $\Sigma x_i^2 = 0$, est polaire réciproque d'elle-même par rapport à chacune des autres surfaces.

On a aussi :

Théorème CXXV. La figure de 32 points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ a par rapport aux 32 surfaces $(S_b)_{16}$, $(S_c)_{16}$, la même figure polaire réciproque des 32 espaces $(B)_{16}$ $(\Gamma)_{16}$.

DES 15 SURFACES $\Delta_{\sigma\beta}$ DU 2^d DEGRÉ À 4 DIMENSIONS

ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX TRIANGLES $\Delta_{\sigma\beta}$ DE L'HEXAGRAMME.

59. Nous avons vu (n.° 48) que le groupe du triangle Δ_{12} peut être représenté par une fonction Δ_{12} , et si, d'après le n.° 13 (chap. I), nous posons

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{12} = 0 \quad (1)$$

on obtient une surface du 2^d degré à 4 dimensions dans R_5 , qui représente le groupe du triangle Δ_{12} . Donc :

Théorème CXXVI. Aux 15 triangles $\Delta_{\sigma\beta}$ de l'hexagramme mystique correspondent dans R_5 15 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}$ de 2^d degré à 4 dimensions, dont les équations sont de la forme

$$x_\alpha x_\beta + x_\gamma x_\delta + x_\epsilon x_\lambda = 0.$$

TABLEAU DES SURFACES $\Delta_{\sigma\beta}$.

$$\begin{array}{lll} x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{12} = 0, & x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 \equiv \Delta_{23} = 0, & x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_4 \equiv \Delta_{35} = 0, \\ x_1x_6 + x_2x_3 + x_5x_4 \equiv \Delta_{13} = 0, & x_1x_5 + x_2x_3 + x_4x_6 \equiv \Delta_{24} = 0, & x_1x_2 + x_3x_5 + x_2x_4 \equiv \Delta_{36} = 0, \\ x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5 \equiv \Delta_{14} = 0, & x_1x_6 + x_2x_4 + x_3x_5 \equiv \Delta_{25} = 0, & x_1x_2 + x_3x_6 + x_4x_5 \equiv \Delta_{45} = 0, \\ x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_6 \equiv \Delta_{15} = 0, & x_1x_3 + x_2x_6 + x_4x_5 \equiv \Delta_{26} = 0, & x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4 \equiv \Delta_{46} = 0, \\ x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6 \equiv \Delta_{16} = 0, & x_1x_3 + x_2x_4 + x_5x_6 \equiv \Delta_{34} = 0, & x_1x_4 + x_2x_3 + x_5x_6 \equiv \Delta_{56} = 0. \end{array}$$

Une surface quelconque $\Delta_{\sigma\beta}$, par ex. Δ_{12} , passe par les 6 sommets de la pyramide fondamentale, de même que les côtés des triangles $\Delta_{\sigma\beta}$ de l'hexagramme passent par les 6 points fondamentaux de la conique. La surface Δ_{12} contient aussi les faces $A_2^{(135)}$, $A_2^{(136)}$, $A_2^{(145)}$, $A_2^{(146)}$, $A_2^{(235)}$, $A_2^{(245)}$, $A_2^{(246)}$ que je désigne simplement par les symboles 135, 136, 145, 146, 235, 245, 246; elle passe, en conséquence, par les 12 arêtes

$$13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 35, 36, 45, 46.$$

Les arêtes 12, 34, 56 manquent donc; ce sont celles données par les produits x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6 , qui se trouvent dans l'équation de la surface Δ_{12} (*). Donc:

Théorème CXXVII. Chaque surface $\Delta_{\alpha\beta}$, par ex. $x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$, passe par les huit faces planes 135, 136, 145, 146, 235, 236, 245, 246 et par douze arêtes, les arêtes 12, 34, 56 exceptées, de la pyramide fondamentale.

L'espace polaire d'un point quelconque y_i de R_5 par rapport à Δ_{12} est:

$$y_1x_2 + y_2x_1 + y_3x_4 + y_4x_3 + y_5x_6 + y_6x_5 = 0 \quad (2)$$

si le point y_i est le sommet 1 de la pyramide fondamentale, on voit que (2) devient l'espace $x_2 = 0$ lui-même; donc:

Théorème CXXVIII. Les 6 espaces à 4 dimensions tangents à une surface $\Delta_{\alpha\beta}$ aux sommets de la pyramide fondamentale, sont ses 6 faces elles-mêmes, à 4 dimensions.

Si l'on considère une surface du 2^e degré dont l'équation est

$$a_{11}x_1^2 + \dots + a_{66}x_6^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{56}x_5x_6 = 0$$

son équation en coordonnées u_i corrélatives est:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{16} & u_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{26} & u_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{16} & a_{23} & a_{36} \dots & a_{66} & u_6 \\ u_1 & u_2 & u_3 \dots & u_6 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Le déterminant (3) pour la surface Δ_{12} se réduit à l'équation

$$u_1u_2 + u_3u_4 + u_5u_6 = 0. \quad (4)$$

Il est facile de voir que la surface Δ_{12} est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \equiv S_4^2 = 0. \quad (5)$$

Il suffit d'écrire la condition pour que l'espace polaire d'un point y_i par rapport à S_4^2 , c'est à dire

$$\Sigma y_i x_i = 0$$

(*) Les surfaces du 2^e degré à 3 dimensions ont un système de ∞^3 droites, celles à 4 dimensions ont deux systèmes de ∞^3 plans, etc. Voir mon Mém. des Math. Annalen, p. 189, Anzahl der linearen Räume, die in einer $(n-1)$ -dimensionalen F_{n-1}^2 enthalten sind, etc.

touche la surface (4); le point y_i est alors situé sur la surface Δ_{12} elle-même. Donc:

Théorème CXXIX. Toute surface $\Delta_{\alpha\beta}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport à la surface fondamentale $S_1^2 \equiv \Sigma x_i^2 = 0$ (1).

60. Du groupe I n.° 49 on déduit:

Théorème CXXX. En opérant sur un point quelconque S_0 dans R_5 successivement les deux homographies cycliques (3645), (135246), on obtient 48 points, qui forment un groupe $(S_0)_{12}^4$. Ces 48 points correspondent aux 48 permutations des droites de PASCAL

$$\Delta_{12}\Delta_{13}, \quad \Delta_{12}\Delta_{14}, \quad \Delta_{12}\Delta_{15}, \quad \Delta_{12}\Delta_{16}; \quad \Delta_{12}\Delta_{23}, \quad \Delta_{12}\Delta_{24}, \quad \Delta_{12}\Delta_{25}, \quad \Delta_{12}\Delta_{26}$$

des deux figures I et II.

Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ forment de 15 manières différentes 15 groupes $(S_0)_{\gamma\beta}^m$ ($m=1, 2, \dots, 15$) par rapport aux 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Théorème CXXXI. Les 48 points du groupe $(S_0)_{12}^4$ sont situés deux à deux sur 3·24 droites, passant 24 à 24 par les 3 points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0^{(56)}$, centres des involutions de première espèce (12), (34), (56) du groupe Δ_{12} .

Les 48 points de $(S_0)_{12}^4$ sont situés deux à deux sur 9·24 droites coupant 24 à 24 les droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les espaces correspondants $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, qui sont les espaces fondamentaux des 9 involutions de 2^e espèce contenues dans le groupe Δ_{12} .

Théorème CXXXII. Les 48 points de $(S_0)_{12}^4$ sont situés sur 7·24 droites coupant 24 à 24 les plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\zeta)}$ et les plans correspondants $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon\zeta)}$, qui sont les espaces fondamentaux des 7 involutions de 3^{me} espèce contenues dans le groupe Δ_{12} .

Les 8 substitutions cycliques d'ordre 6 de Δ_{12} se divisent en 4 couples, où une substitution d'un couple est une puissance de l'autre, donc:

Théorème CXXXIII. Les 48 points de $(S_0)_{12}^4$ forment de 4 manières différentes 8 cycles projectifs de 6^{me} ordre, par rapport aux pyramides des points doubles des 4 homographies cycliques du groupe Δ_{12} .

Les 6 substitutions cycliques du 4^{me} ordre du groupe Δ_{12} forment aussi 3 couples, de la même manière que les 8 substitutions cycliques de 6^{me} ordre, donc:

Théorème CXXXIV. Les 48 points de $(S_0)_{12}^4$ forment de 3 manières différentes 12 cycles projectifs du 4^{me} ordre du groupe Δ_{12} .

De même pour les autres groupes $(S_0)_{12}^m$.

(1) On peut, si l'on veut, prendre cette surface comme surface correspondante de la conique fondamentale de l'hexagramme.

Théorème CXXXV. Si le point S_0 tombe sur une des surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, les 720 points de $(S_0)_{720}$ se distribuent 48 à 48 sur les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Le groupe II donne:

Théorème CXXXVI. Si, sur le point S_0 , on opère successivement l'involution (13)(24) et l'homographie (1526)(34) on a 24 points du groupe $(S_0)_{12}^4$. Dans toute la figure on a $2 \cdot 15 \cdot 15$ de ces groupes.

DES 60 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ DE 4^{me} ORDRE ET À TROIS DIMENSIONS
ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX DROITES DE PASCAL,
AUX DROITES Z_{2m+1} ET AUX POINTS Z_{2m} .

61. Considérons la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$, elle nous a donné le groupe III (n.° 50). Ce groupe est représenté par la fonction $\Delta_{12}\Delta_{13}$. Si nous l'égalons à zéro

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13} = 0 \quad (1)$$

elle nous donne l'ensemble de deux surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , et d'après le n.° 13 leur intersection nous représente le groupe III. Cette intersection est évidemment une surface du 4^{me} ordre et à 3 dimensions (*).

Les deux surfaces de 2^d degré Δ_{12} , Δ_{13} passent par les surfaces planes de la pyramide fondamentale

$$\begin{array}{cccccccc} 135, & 136, & 145, & 146, & 235, & 236, & 245, & 246 \\ 124, & 125, & 134, & 135, & 246, & 256, & 346, & 356. \end{array}$$

Elles passent donc par les deux mêmes faces 135, 246 et en outre par les arêtes 14, 25, 36, qui ne sont pas situées sur les deux faces.

Ces trois arêtes sont données par les 3 couples des indices de la surface Δ_{23} .

Nous avons vu que les points Z_{2m} et les droites Z_{2m+1} ont les mêmes symboles de droites de PASCAL, donc:

Théorème CXXXVII. Aux 60 droites de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, ou aux 60 points Z_{2m} et aux droites Z_{2m+1} , correspondent 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ à 3 dimensions et du 4^{me} ordre, suivant lesquelles se coupent deux à deux les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$. Une de ces surfaces, par ex. $\Delta_{12}\Delta_{13}$ contient les faces 135, 246 et les arêtes 14, 25, 36 de la pyramide fondamentale (**).

(*) Voir mon Mém. des Math. Annalen, p. 187, *Büschel von (n - 1)-dimen. Flächen F_{n-1}^2* .

(**) Voir aussi n.° 67.

62. Le groupe III donne :

Théorème CXXXVIII. Si l'on opère, sur un point quelconque S_0 , l'involution (13)(46) et l'homographie cyclique (123456), on obtient un groupe de 12 points $(S_0)_{12, 13}^1$, qui correspondent aux 12 hexagones de la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

Les 720 points $(S_0)_{720}$ forment de 60 manières différentes, 60 de ces groupes $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$ ($p = 1, 2, \dots, 60$).

Théorème CXXXIX. Ces 12 points sont situés deux à deux sur 3·6 droites, qui coupent 6 à 6 les droites $P_1^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et les espaces correspondants $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ fondamentaux de 3 involutions des 2^d espèce du groupe III (n.° 50).

Théorème CXL. Ils sont aussi situés deux à deux sur 4·6 droites, qui coupent 6 à 6 les plans $P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon)}$, $\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\epsilon)}$ fondamentaux des 4 involutions de 3^{me} espèce du groupe III.

Théorème CXLI. Ils forment deux cycles projectifs de 6^{me} ordre correspondants à l'homographie cyclique de 6^{me} ordre du groupe III.

Des autres groupes IV, V, VI de la droite de PASCAL on peut aussi obtenir des groupes spéciaux de points.

Du groupe VII on déduit :

Théorème CXLII. Si l'on opère, sur le point S_0 , successivement les deux involutions (13)(46), (14)(25)(36), on obtient 4 points de $(S_0)_{12, 13}^1$, situés deux à deux sur 4 droites, qui coupent deux à deux les plans $P_2^{(14)(25)(36)}$, $P_2^{(16)(25)(34)}$ et les plans correspondants fondamentaux des deux involutions de 3^{me} espèce du groupe V. Ils sont situés deux à deux sur deux droites, qui coupent la droite $P_1^{(12)(46)}$ et l'espace $\Pi_3^{(13)(46)}$ fondamentaux de l'involution (13)(46) du groupe.

Les 12 points du groupe $(S_0)_{12, 23}^1$ forment de 6 manières différentes 3 de ces groupes.

Naturellement les autres groupes $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$ ont les mêmes propriétés.

Si le point S_0 est le point $r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, 1$, en opérant sur ce point l'homographie cyclique (123456), il reste inaltéré, et si nous opérons sur lui l'involution (13)(46) et l'homographie cyclique (123456), qui engendrent le groupe $(S_0)_{12, 13}^1$, on obtient deux points, savoir :

$$r_6, r_6^2, r_6^3, r_6^4, r_6^5, 1; \quad 1, r_6^5, r_6^4, r_6^3, r_6^2, r_6.$$

On peut par conséquent faire correspondre aussi ces deux points à la droite de PASCAL $\Delta_{12}\Delta_{13}$. Donc :

Théorème CXLIII. Les 120 points du groupe (r_6) , dont les coordonnées sont les 6 racines 6^{mes} de l'unité, correspondent deux à deux aux 60 droites de PASCAL.

Ils sont situés 8 à 8 sur les 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$.

Pour démontrer la dernière partie de ce théorème il suffit de remarquer que la surface, par ex. Δ_{12}

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0$$

passé par le point $1, -r_3, r_3, -r_3^2, r_3^2, -1$ (r_3 étant une racine cubique de l'unité). Le groupe correspondant de 48 points se réduit pour ce point à 8. Ces 8 points correspondent aux droites de PASCAL des deux quadrilatères donnés par les deux figures ΠI et ΠII , c'est à dire $p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I, p_{345}^{II} p_{134}^{II} p_{135}^{II} p_{145}^{II}$.

63. Du groupe VIII on a :

Théorème CXLIV. Si l'on opère, sur le point S_0 , deux involutions quelconques de 2^{de} espèce du groupe VIII, on obtient 4 points. Ces 4 points sont situés deux à deux sur 6 droites coupant deux à deux les espaces fondamentaux des trois involutions du groupe.

Ce sont les 4 points correspondants aux 4 droites de PASCAL de la figure I $p_{345}^I p_{135}^I p_{134}^I p_{145}^I$.

Les 48 points d'un groupe quelconque $(S_0)_{\alpha\beta}$ forment d'une seule manière 12 de ces groupes.

De même le groupe IX nous donne 8 points du groupe $(S_0)_{12}$ correspondant aux 8 droites de PASCAL des deux quadrilatères donnés par les deux figures I et II. On peut les engendrer avec l'involution (12)(34) et l'homographie (1625)(34).

Avec les 48 points d'un groupe $(S_0)_{\alpha\beta}$ on peut former des trois manières différentes 6 de ces groupes.

De même, des groupes X, XI, XII, XIII, on obtient respectivement des groupes de 4, 8, 8, 4 points, dont les propriétés peuvent être établies de la même manière que pour les groupes précédents.

Enfin le groupe XIV nous donne :

Théorème CXLV. Si l'on opère, sur le point S_0 , l'involution (12) et l'homographie cyclique (135246), on obtient un groupe de 24 points de $(S_0)_{12}^I$, situés deux à deux sur 3·12 droites et passants 12 à 12 par les trois points $P_0^{(12)}, P_0^{(34)}, P_0^{(56)}$. Ces 24 points correspondent aux 8 droites des deux quadrilatères des deux figures I et II.

Les 48 points d'un groupe quelconque $(S_0)_{12}^m$ forment d'une seule manière deux de ces groupes.

DES 20 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ DU 6^me ORDRE À 2 DIMENSIONS
 ET DES GROUPES DE $(S_0)_{720}$ CORRESPONDANTS AUX 20 POINTS DE STEINER
 ET AUX DROITES DE CAYLEY.

64. Nous avons vu, n.° 52, que le groupe du point de STEINER G_{123} peut être représenté par la fonction $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$. Or en posant cette fonction égale à zéro, on a

$$\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23} \equiv (x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_3x_6 + x_2x_5 + x_1x_4) = 0.$$

D'après le n.° 13, l'intersection des trois surfaces $\Delta_{12} = 0$, $\Delta_{13} = 0$, $\Delta_{23} = 0$ représente le groupe XVIII.

Les trois surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{23} passent respectivement par les huit faces

$$\begin{array}{cccccccc} 135, & 136, & 145, & 146, & 235, & 236, & 245, & 246, \\ 124, & 125, & 134, & 135, & 246, & 256, & 346, & 356, \\ 123, & 126, & 135, & 156, & 234, & 246, & 345, & 456. \end{array}$$

Elles passent donc toutes les trois par les faces 135, 246 de la pyramide fondamentale. Elles passent aussi par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$ des 10 points du groupe $(C)_{16}$, qui représentent les groupes des 10 couples de points de STEINER (théorème CXX). L'intersection de 3 surfaces quelconques du 2^e degré à 4 dimensions en R_5 est une surface de 8^me ordre à 2 dimensions. Dans notre cas les trois surfaces passent par les deux plans 135, 246, qui font donc partie de la surface d'intersection, par conséquent elles se coupent en outre dans une surface de 6^me ordre et à 2 dimensions. Cette surface passe naturellement par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$.

Au point de STEINER G_{456} correspond une surface $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$, qu'on peut appeler la conjuguée de la première. Elle passe aussi par le point $-1, 1, -1, 1, -1, 1$, donc :

Théorème CXLVI. Aux 20 points de STEINER $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ correspondent en R_5 20 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^me ordre et à deux dimensions, situées respectivement sur les trois surfaces de 2^d degré $\Delta_{\alpha\beta}$, $\Delta_{\alpha\gamma}$, $\Delta_{\beta\gamma}$.

Théorème CXLVII. Les surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$, $\Delta_{\delta\epsilon}\Delta_{\delta\lambda}\Delta_{\epsilon\lambda}$, qui correspondent à deux points conjugués de STEINER, passent par celui des 10 points du groupe $(C)_{16}$ (théor. CXX), qui représente le groupe des deux points de STEINER.

65. Du groupe XVI il résulte :

Théorème CXLVIII. En opérant, sur le point S_0 , l'involution (13) et l'homographie cyclique (123456), on obtient un groupe de 72 points $(S_0)_{123...456}^1$, qui

correspondent aux 72 hexagones des 6 droites de PASCAL passant par les deux points de STEINER G_{123} , G_{456} .

Les 720 points de $(S_0)_{720}$ forment 10 de ces groupes $(S_0)_{\sigma\beta\gamma, \delta\epsilon\lambda}^q$ ($q = 1, 2, \dots, 10$), qui correspondent aux dix couples des points de STEINER, ainsi qu'aux dix couples des droites de CAYLEY.

Théorème CXLIX. Les 72 points du groupe $(S_0)_{123, 456}^4$ sont situés deux à deux sur $6 \cdot 36$ droites passant 36 à 36 par les points $P_0^{(ik)}$, centres des 6 involutions de première espèce du groupe XVI.

Ils sont situés deux à deux sur $10 \cdot 36$ droites, qui rencontrent 36 à 36 les espaces fondamentaux P_1, Π_3 des 10 involutions de 2^{de} espèce du groupe.

Théorème CL. Les 72 points du groupe $(S_0)_{123, 456}^4$ forment de 6 manières différentes 12 cycles projectifs de 6 points par rapport aux pyramides des points doubles des 6 homographies cycliques du groupe.

En effet, les 12 substitutions cycliques du groupe XVI déterminent précisément six homographies cycliques.

Ils forment aussi de deux manières différentes 24 cycles de 3 points correspondant aux deux homographies cycliques (135), (246) du groupe.

Le groupe XVII des substitutions paires de XVI nous donne un groupe de 36 points de $(S_0)_{123, 456}^4$, donc :

Théorème CLI. Les deux groupes, que l'on obtient de $(S_0)_{123, 456}^4$, sont évidemment homologues pour chacun des 6 points $P_0^{(ik)}$ et des espaces correspondants $\Pi_4^{(ik)}$ du théorème CXLIX.

Du groupe XVIII on obtient :

Théorème CLII. En opérant sur le point S_0 l'involution (12)(34) et l'homographie cyclique (123456) on a 36 points du groupe $(S_0)_{123, 456}^4$ correspondant aux trois droites de PASCAL de G_{123} , tandis que les 36 restants correspondent à celles de G_{456} . Les propriétés de ces deux groupes de 36 points résultent, comme pour les autres, de la nature des substitutions du groupe XVIII.

Si le point S_0 tombe sur une des 20 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\sigma\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$, les 720 points $(S_0)_{720}$ se distribuent 36 à 36 sur les 20 surfaces.

Du groupe XX on obtient en partant du point (S_0) , 18 points, qui correspondent aux 6 droites de PASCAL de G_{123} , G_{456} .

Avec les 72 points de $(S_0)_{123, 456}^4$ on peut former de deux manières différentes 4 de ces groupes.

Du groupe XXI on obtient 9 points contenus dans les 18 points précédents et correspondants aux trois droites de G_{123} , tandis que les 9 restants correspondent aux trois droites de G_{456} .

Du groupe XXII on déduit de S_0 12 points du groupe $(S_0)_{323 \cdot 456}^4$. Les 72 points de $(S_0)_{123 \cdot 456}^4$ forment de 6 manières différentes 6 de ces groupes. Ces 12 points correspondent aussi aux 6 droites de PASCAL de G_{123} , G_{456} .

Du groupe XXIII on a de S_0 un groupe de 6 points contenus dans les 12 points précédents; ils correspondent aux droites de PASCAL de G_{123} .

Ces propriétés s'étendent naturellement à tout groupe $(S_0)_{\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\lambda}^a$.

DES 6 CONFIGURATIONS II QUI CORRESPONDENT AUX 6 FIGURES II
DU SYSTÈME PASCAL-KIRKMAN OU D'UN SYSTÈME QUELCONQUE $[Zz]_m$.

66. Nous avons vu au n.° 53 que le groupe d'un figure II, par ex. de la figure I, est représenté par une des fonctions de SERRER, savoir: $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16}$. En posant

$$(x_1x_2+x_3x_4+x_5x_6)(x_1x_6+x_2x_3+x_4x_5)(x_1x_4+x_2x_6+x_3x_5)(x_1x_3+x_2x_5+x_4x_6)(x_1x_5+x_2x_4+x_3x_6)=0 \\ \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}\Delta_{15}\Delta_{16};$$

les 5 surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} , Δ_{15} , Δ_{16} , prises ensemble, passent par toutes les 15 faces planes de la pyramide fondamentale; elles passent aussi toutes par les 6 sommets; leurs points d'intersection ultérieurs forment une configuration II, qui correspond à la figure I de l'hexagramme. Donc:

Théorème CLIII. Aux six figures II d'un système quelconque $[Zz]_m$, ou bien du système PASCAL-KIRKMAN, correspondent en R_5 , 6 configurations II, qui sont données respectivement par les points d'intersection de 5 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}\Delta_{\alpha\epsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$, les sommets de la pyramide fondamentale exceptés.

Du groupe XXIV on a:

Théorème CLIV. Si l'on opère sur le point S_0 successivement l'involution (14)(23)(53) et l'homographie (12453), on obtient 120 points formant un groupe $(S_0)_1$ relativement aux dix droites de PASCAL de la figure I.

Les 720 points du groupe $(S_0)_{720}$ forment, de 6 manières différentes, 6 de ces groupes, qui correspondent aux six figures II d'un système quelconque $[Zz]_m$.

Théorème CLV. Les 120 points de $(S_0)_1$ sont situés deux à deux sur 15·60 droites, qui coupent 60 à 60 les espaces fondamentaux P_1 et Π_1 des 15 involutions de 2^e espèce du groupe.

Ils sont situés deux à deux sur 10·60 droites rencontrant 60 à 60 les plans fondamentaux P_2 , Π_2 des 10 involutions de 3^{me} espèce du groupe.

Les 20 substitutions cycliques d'ordre 6 de XXIV (n.° 53) forment 10 couples des substitutions, dont l'une est une puissance de l'autre.

Les 24 substitutions de 5^{me} ordre se séparent en 6 groupes de 4 substitutions, dont l'une est une puissance des autres, comme par ex.

$$(23564), (25436), (26345), (24653).$$

En outre, les 30 substitutions de 4^{me} ordre du groupe se séparent en 15 couples, en sorte qu'une des substitutions d'un tel couple est une puissance de l'autre; comme, par ex., les deux substitutions du couple (2365), (2563). Donc:

Théorème CLVI. Les 120 points de $(S_5)_1$ forment de 10 manières différentes 20 cycles projectifs de 6 points, par rapport aux pyramides des points doubles des 10 homographies cycliques du groupe.

Ils forment aussi de 6 manières différentes 24 cycles projectifs de 5 points par rapport aux 6 homographies cycliques d'ordre 5 du groupe.

Enfin ils se séparent, de 15 manières différentes, en 30 cycles projectifs de 4 points par rapport aux 15 homographies cycliques de 4^{me} ordre du groupe.

Du groupe XXV on obtient 60 points du groupe précédent, engendrés par l'involution (26)(35) et par l'homologie cyclique (12453).

DES 60 SURFACES $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ DU 8^{me} ORDRE À 2 DIMENSIONS
ET DES GROUPES DE $(S)_{720}$ QUI CORRESPONDENT AUX 60 POINTS DE KIRKMAN,
AUX 60 POINTS Z_{2m+1} OU AUX 60 DROITES z_{2m} .

67. Si nous considérons maintenant un point de KIRKMAN, par ex. $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$, il correspond à la droite de PASCAL $\Delta_{15}\Delta_{16}$, ou aux points Z_{2m} et aux droites z_{2m+1} représentés par le symbole $\Delta_{15}\Delta_{16}$ (n.° 50). Le groupe de ce point de KIRKMAN peut être représenté, comme nous l'avons vu, par le produit des trois fonctions Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} . En posant

$$(x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6)(x_4x_5 + x_6x_1 + x_2x_3)(x_1x_4 + x_2x_6 + x_3x_5) \equiv \Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14} = 0 \quad (1)$$

on obtient une surface, qui représente le groupe du point de KIRKMAN. Les trois surfaces Δ_{12} , Δ_{13} , Δ_{14} passent toutes par les arêtes 13, 25, 36, 15, 24, 35 de la pyramide fondamentale. Ces 6 arêtes sont données précisément par les 6 côtés de l'hexagone de la droite de PASCAL correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$, ou bien de la surface $\Delta_{15}\Delta_{16}$

$$(x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_6)(x_1x_5 + x_2x_4 + x_3x_6) = 0.$$

Les surfaces Δ_{15} , Δ_{16} passent toutes les deux par les 9 arêtes restantes, données par les 3 surfaces (1), ou bien par les 9 côtés des trois hexagones des droites de PASCAL passant par le point de KIRKMAN (n.° 25). Les trois surfaces se ren-

contrent donc suivant une surface à 2 dimensions de 8^{me} ordre, qui représente le groupe du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$. Cette surface passe par les 6 arêtes données par les 6 couples des indices des deux surfaces Δ_{15} , Δ_{16} de la surface correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Celle-ci passe par les 9 arêtes restantes (*). La surface $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ correspond aussi aux points Z_{2m+1} et aux droites z_{2m} de l'hexagramme, qui ont le même symbole, de même que la surface $\Delta_{15}\Delta_{16}$ correspond aux points Z_{2m} et aux droites z_{2m+1} du même symbole $\Delta_{15}\Delta_{16}$. Donc :

Théorème CLVII. Aux 60 points de KIRKMAN, aux 60 points Z_{2m+1} et aux 60 droites z_{2m} correspondent, en R_5 , 60 surfaces du 8^{me} ordre à deux dimensions, données par l'intersection de trois surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, $\Delta_{\alpha\gamma}$, $\Delta_{\alpha\delta}$.

Théorème CLVIII. À la surface $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ est relative la surface de 4^{me} ordre à 3 dimensions $\Delta_{\alpha\varepsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$.

La surface $\Delta_{\alpha\mu}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ passe par les 6 arêtes de la pyramide fondamentale données par les six couples des indices des deux surfaces $\Delta_{\alpha\varepsilon}$, $\Delta_{\alpha\lambda}$. La surface $\Delta_{\alpha\varepsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ passe par les 9 arêtes restantes, déterminées par les couples des indices des trois surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$.

Le point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ et la droite de PASCAL correspondante $\Delta_{15}\Delta_{16}$ appartiennent à la figure I (n.° 26); de même les surfaces correspondantes $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$ et $\Delta_{15}\Delta_{16}$ appartiennent à la configuration I; c'est à dire que ces surfaces passent par les points de cette configuration. Donc :

Théorème CLIX. Les 10 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ et les 10 surfaces correspondantes $\Delta_{\alpha\varepsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ relatives aux 10 points de KIRKMAN et aux 10 droites de PASCAL d'une des 6 figures II, ou bien aux dix points Z et à leurs droites z d'un système quelconque $[Zz]_m$, passent par les points de la configuration correspondante II.

Les 10 droites de PASCAL d'une figure II passent 3 à 3 par les 10 points de KIRKMAN de la figure, et ceux-ci sont situés 3 à 3 sur les 10 droites de PASCAL correspondantes (n.° 26), donc :

Théorème CLX. Les dix surfaces à 3 dimensions $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ d'une configuration II en R_5 se coupent 3 à 3 aux dix surfaces $\Delta_{\alpha\delta}\Delta_{\alpha\varepsilon}\Delta_{\alpha\lambda}$ de la même configuration, et ces dix surfaces sont situées 3 à 3 sur les dix surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$.

68. Le groupe XXVI donne :

Théorème CLXI. Si l'on opère, sur le point S_0 , successivement les deux involutions (26)(35), (56)(13)(24), on obtient un groupe de 12 points $(S_0)_{12.13.14}^4$ relatifs aux droites de PASCAL du point de KIRKMAN $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{14}$.

(*) Voir n.° 61.

Avec les 120 points du groupe $(S_0)_1$ (n.° 66) on peut former 10 de ces groupes correspondants aux dix points de KIRKMAN de la figure I.

Théorème CLXII. Les 12 points du groupe $(S_0)_{12-13-14}^1$ sont situés deux à deux sur 3·6 droites, qui rencontrent 6 à 6 les espaces fondamentaux P_1 et Π_3 des 3 involutions de 2^e espèce du groupe.

Ils sont aussi situés deux à deux sur 4·6 droites coupant les plans fondamentaux P_2 , Π_2 des involutions de 3^{me} espèce du groupe.

Ils forment aussi deux cycles projectifs de 6 points par rapport à l'homographie cyclique de 6^{me} ordre du groupe.

Si le point S_0 tombe sur une des 60 surfaces $\Delta_{\sigma\beta}\Delta_{\sigma\gamma}\Delta_{\sigma\delta}$ les 720 points de $(S_0)_{720}$ se disposent 12 à 12 sur ces surfaces.

Du groupe XXVII on déduit un groupe de 6 points contenus dans le groupe précédent.

Le groupe XXVIII de toutes les substitutions paires donne:

Théorème CLXIII. Si l'on opère sur le point S_0 les homographies cycliques (126), (12345), on obtient 360 points $(S_0)_{360}$. Les 720 points forment deux de ces groupes.

Ces deux groupes sont homologues de 15 manières différentes, les points $P_0^{(ik)}$ et les espaces $\Pi_4^{(ik)}$ étant centres et espaces d'homologie (théor. XXXIII).

Le groupe total donne:

Théorème CLXIV. En opérant sur le point S_0 l'involution (12) et l'homographie cyclique (123456), on obtient le groupe entier $(S_0)_{720}$.

69. Nous avons vu, (n.° 26), que trois figures Π de l'hexagramme, par ex. I, II, III, déterminent le point de STEINER G_{123} , tandis que les trois autres ont le point G_{456} commun. On trouve aussi dans R_5 la propriété correspondante.

Théorème CLXV. Trois configurations Π en R_5 , par ex. I, II, III, déterminent la surface $\Delta_{12}\Delta_{13}\Delta_{23}$, tandis que les autres déterminent la surface conjuguée $\Delta_{45}\Delta_{46}\Delta_{56}$.

Deux figures Π , par ex. I et II, ont le triangle Δ_{12} commun, (n.° 28), donc:

Théorème CLXVI. Deux configurations Π dans R_5 , I et II par ex., sont situées sur la surface Δ_{12} .

Les deux figures Π déterminent aussi les 4 points G_{123} , G_{124} , G_{125} , G_{126} situés sur la droite de STEINER-PLÜCKER g_{12} , qui a pour symbole Δ_{12} , (n.° 28), donc:

Théorème CLXVII. Deux configurations Π , I et II par ex., dans l'espace R_5 , déterminent les 4 surfaces à 2 dimensions et de 6^{me} ordre relatives aux 4 points de STEINER G_{123} , G_{124} , G_{125} , G_{126} , qui sont situées sur la surface du 2^d ordre à 4 dimensions Δ_{12} .

Donc les surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent aussi aux droites de STEINER-PLÜCKER et aux points de SALMON.

Nous voyons que cette interprétation, dans l'espace à 5 dimensions, est la véritable extension de la figure de PASCAL pour les courbes et les surfaces qui se transforment en elles-mêmes, de même que la conique fondamentale dans l'hexagramme se transforme en elle-même par les permutations des 6 points fondamentaux.

§ 7.

Projections des figures obtenues dans l'espace à 5 dimensions sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

70. Nous pourrions projeter d'abord sur un espace à 4 dimensions quelconque et d'un point quelconque, ou bien du point unité sur l'espace unité. Les figures que l'on obtiendrait seraient aussi des expressions géométriques de la théorie des substitutions de 6 lettres dans l'espace à 4 dimensions.

Cependant, je veux, pour ne pas entrer dans des développements trop longs, faire seulement des projections sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

PROJECTION SUR L'ESPACE À 3 DIMENSIONS S_3 .

Les configurations, que nous venons d'étudier dans R_5 , nous donnent le moyen d'obtenir des configurations différentes de la même classe sur l'espace à 3 dimensions, par la méthode développée dans le chapitre I, § 6.

La projection d'une figure quelconque de R_5 sur un espace à 3 dimensions, que nous supposons tout à fait arbitraire, doit s'effectuer au moyen d'une droite de projection S_1 , qui ne coupe pas S_3 . En effet S_1 et S_3 dans R_5 sont deux espaces corrélatifs, tandis qu'un plan et un espace à 3 dimensions se coupent en général en un point (n.º 1).

Nous supposons que la droite S_1 et l'espace S_3 n'aient aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(6)}$ de R_5 , que nous avons aussi désignée simplement par les 6 indices 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nous commençons par projeter la pyramide sur S_3 . On en obtient un hexagone ${}_1(A)$ complet. Les points $P_0^{(ik)}, P_0'^{(ik)}$ seront projetés en 30 points ${}_1P_0^{(ik)}, {}_1P_0'^{(ik)}$, situés deux à deux sur les arêtes de l'hexagone ${}_1(A)$ fondamental et divisants

harmoniquement le segment déterminé sur l'arête par les deux sommets. Les propriétés projectives restent en effet inaltérées par projection, donc:

Théorème CLXVIII. Si l'on projette, par une droite S_1 les figures précédentes sur un espace S_3 qui ne rencontre pas S_1 , dans R_5 ; de la pyramide fondamentale $A_0^{(1)}, \dots, A_0^{(6)}$ on obtient sur S_3 un hexagone complet ${}_1(A)$ tout à fait général, si la droite S_1 et l'espace S_3 n'ont aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale.

Des 15 points $P_0^{(ik)}$ et 15 points $P_0'^{(ik)}$ résultent dans R_5 30 points ${}_1P_0^{(ik)}$, ${}_1P_0'^{(ik)}$, qui sont situés deux à deux sur les 15 arêtes de l'hexagone ${}_1(A)$, en en divisant harmoniquement les deux sommets.

Les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites, qui forment 15 quadrilatères. Les points ${}_1P_0^{(ik)}$ et ${}_1P_0'^{(ik)}$ pris ensemble sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui sont les côtés de 20 autres quadrilatères.

Théorème CLXIX. Des 720 points $(S_0)_{720}$ de R_5 résulte par projection sur S_3 , un groupe de 720 points ${}_1(S_0)_{720}$, situés deux à deux sur 15 · 360 droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ (théor. CVII).

Si nous considérons dans R_5 les deux points $S_0 S_0^{(1)}$ de coordonnées

$$y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$y_2 y_1 y_4 y_3 y_5 y_6$$

ils sont situés sur une droite passant par $P_0^{(ik)}$ et sont divisés harmoniquement par $P_0^{(ik)}$ et par l'espace $\Pi_4^{(ik)}$. Or, on ne peut pas projeter univoquement l'espace Π_4 sur l'espace S_3 ; donc à l'involution (12) de R_5 ne correspond pas une involution de S_3 .

Si nous considérons les deux points

$$S_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$S_0^{(2)} y_2 y_1 y_4 y_3 y_5 y_6$$

qui se correspondent dans l'involution (12)(34), la droite, qui les joint, coupe la droite $P_1^{(12)(34)}$ et l'espace $\Pi_3^{(12)(34)}$. Or, on peut projeter univoquement la droite P_1 et l'espace Π_3 , mais la projection de ce dernier sera l'espace S_3 même, c'est à dire que dans S_3 nous n'avons pas l'involution correspondante à (12)(34).

Enfin, si nous considérons les deux points

$$S_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6$$

$$S_0^{(3)} y_2 y_1 y_4 y_3 y_6 y_5$$

qui se correspondent dans l'involution (12)(34)(56), on voit qu'ils sont situés sur une droite, qui rencontre les deux plans fondamentaux $P_2^{(12)(34)(56)}$ et $\Pi_2^{(12)(34)(56)}$ de l'involution. Or, ces deux plans seront projetés par la droite S_1 sur S_3 suivant deux plans ${}_1P_2^{(12)(34)(56)}$, ${}_1\Pi_2^{(12)(34)(56)}$, qui passeront respectivement par les deux groupes de points ${}_1P_0^{(12)}$, ${}_1P_0^{(34)}$, ${}_1P_0^{(56)}$; ${}_1P_0^{(12)}$, ${}_1P_0^{(34)}$, ${}_1P_0^{(56)}$. Les deux points projections de $S_0S_0^3$ diviseront harmoniquement ces deux plans. Donc :

Théorème CLXX. Les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ déterminent 60 droites ${}_1P_0^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ et 15 plans ${}_1P_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\lambda)}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont identiques à l'ordre près aux indices 123456) tandis que les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$ déterminent 15 plans ${}_1\Pi_2^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)(\varepsilon\lambda)}$.

Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ sont situés deux à deux sur 60·360 droites rencontrant 360 à 360 les 60 droites ${}_1P_1$.

Ils sont situés deux à deux sur 15·360 droites, qui coupent harmoniquement 360 à 360 les plans correspondants ${}_1P_2$ et ${}_1\Pi_2$ en deux points.

Si nous projetons un cycle projectif de 6 points de R_5 sur S_3 , nous obtenons aussi un groupe de 6 points, situé sur une courbe rationnelle ${}_1W$, et de même pour les cycles de 5, 4 et 3 points.

En permutant les trois premières coordonnées du point S_0 , on obtient 6 points situés sur un plan de R_5 , qui passe par la droite où l'espace unité coupe la face $A_2^{(123)}$ de la pyramide fondamentale, donc le théorème CXIV nous donne :

Théorème CLXXI. Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ en S_3 sont situés 6 à 6 sur 2400 plans, qui passent 120 à 120 par les 20 droites des 20 faces de l'hexagone ${}_1(A)$ fondamental, où sont situés 3 à 3 les 15 points ${}_1P_0^{(ik)}$. Les 6 points sur un de ces plans forment deux triangles homologues de trois manières différentes, les trois points ${}_1P_0^{(ik)}$ situés sur le plan, étant centres d'homologie.

Si nous permutons seulement les premières quatre coordonnées de S_0 en R_5 , on obtient 24 points situés dans un espace à trois dimensions, qui passe par le plan où l'espace unité coupe la face à 3 dimensions $A_3^{(1234)}$. Les 24 points sont situés d'après le théor. CXIV, sur une surface de 2^d degré à deux dimensions, qui sera projetée en S_3 suivant une surface du 2^d degré; donc :

Théorème CLXXII. Les 720 points ${}_1(S_0)_{720}$ en S_3 sont situés 24 à 24 sur 450 surfaces du 2^d degré, qui correspondent 30 à 30 aux 15 tétraèdres que l'on peut former avec les 6 sommets de l'hexagone fondamental.

71. Si nous projetons maintenant sur S_3 les deux groupes de points $(B)_{16}$, $(C)_{16}$ (n.° 51) nous obtenons :

Théorème CLXXIII. Les 32 points $(B)_{16}$ $(C)_{16}$ sont projetés en S_3 suivant 32 points ${}_1(B)_{16}$, ${}_1(C)_{16}$. Ces derniers points sont situés 4 à 4 sur 120 plans, qui passent 15 à 15 par chacun d'eux (théor. CXX).

Les 120 droites, qui joignent deux à deux les points de ${}_1(B)_{16}$ ou de ${}_1(C)_{16}$, passent 4 à 4 respectivement par chaque point ${}_1P_0^{(ik)}$ et ${}_1P_0''^{(ik)}$ ⁽¹⁾ (théor. CXXII).

Théorème CLXXIV. Les points de ${}_1(B)_{16}$ avec les points ${}_1(C)_{16}$ sont situés deux à deux sur 6·16 droites, qui passent 16 à 16 par les sommets de l'hexagone fondamental ${}_1(A)$ (théor. CXXIII).

72. Si nous considérons les groupes formés par les 720 points de $(S_0)_{720}$, nous obtiendrons facilement par projection les groupes correspondants sur S_3 . Cependant on ne peut pas avoir dans S_3 les surfaces correspondantes des surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$, parce que les surfaces sont à 4 dimensions; de même on ne peut pas avoir le correspondant des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$. Mais on peut projeter les 20 surfaces de 6^{me} ordre à 2 dimensions $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ et les 60 surfaces de 8^{me} ordre à 2 dimensions $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$, et enfin on peut aussi projeter les 6 configurations Π , qui correspondent aux 6 figures Π .

Théorème CLXXV. Les 20 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^{me} ordre à 2 dimensions (n.° 64) sont projetés sur S_3 suivant 20 surfaces ${}_1\Delta_{\alpha\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\beta\gamma}$ de 6^{me} ordre, qui correspondent aux 20 points de STEINER et aux 20 droites de CAYLEY.

Théorème CLXXVI. Les 6 configurations Π (n.° 66) sont projetées sur S_3 suivant 6 configurations ${}_1\Pi$, qui correspondent aux 6 figures Π d'un quelconque des systèmes $[Zz]_m$ de l'hexagramme.

Théorème CLXXVII. Les 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}\Delta_{\alpha\delta}$ de 8^{me} ordre à 2 dimensions (n.° 67) sont projetées sur S_3 suivant 60 surfaces ${}_1\Delta_{\alpha\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\alpha\delta}$ de 8^{me} ordre. Celles-ci correspondent aux 60 points de KIRKMAN, aux 60 points Z_{2m+1} ou aux 60 droites z_{2m} .

Théorème CLXXVIII. Les 60 surfaces ${}_1\Delta_{\alpha\beta}{}_1\Delta_{\alpha\gamma}{}_1\Delta_{\alpha\delta}$ passent respectivement 10 à 10 par les 6 configurations ${}_1\Pi$.

Dans S_3 on a aussi d'autres configurations de points ou d'autres courbes et surfaces qui représentent les groupes de l'hexagramme, d'après ce que nous avons démontré, sur les groupes en général, dans le premier chapitre (n.°s 17 et 18).

En projetant les 120 points (r_6) , on obtient en S_3 120 points qui correspondent deux à deux aux 60 droites de PASCAL (n.° 55).

73. On peut donner à S_1 et à l'espace S_3 des positions spéciales par rapport à la pyramide fondamentale; on obtiendra en S_3 des hexagones spéciaux, ou bien d'après le n.° 17, des pentagones ou des tétraèdres.

⁽¹⁾ De la Note n.° 57, on déduit que les 15 plans passant par un des points, par ex., de ${}_1(B)_{16}$, passent par les 15 côtés d'un hexagone formé avec 6 points du groupe ${}_1(C)_{16}$ et en outre respectivement par les autres points de ${}_1(B)_{16}$.

Nous voyons, par ex., que si la droite S_1 passe par le point unité dans R_5 , la figure en S_3 se particularise; mais la pyramide se projette toujours sur S_3 suivant un hexagone ${}_1(A)$ général. En effet, le point unité peut être regardé comme un point quelconque de l'espace R_5 . Dans ce cas les espaces $\Pi_3^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$ sont situés dans des espaces à 4 dimensions avec la droite S_1 de projection; tous leurs points seront projetés sur les plans d'intersection de ces espaces avec S_3 . Dans ce cas donc nous avons aussi dans S_3 les involutions correspondantes aux involutions de 2^e espèce de R_5 ⁽¹⁾.

D'après le théorème XXXVII nous avons:

Théorème CLXXIX. Pour tout tétraèdre, pentagone et hexagone complet dans l'espace à 3 dimensions, on obtient des configurations de la même classe que l'hexagramme mystique, et dont les propriétés résultent des théorèmes précédents.

Toutes les courbes ou surfaces à deux dimensions de R_5 , qui se transforment en elles-mêmes, seront projetées suivant des courbes ou des surfaces pour lesquelles les groupes, que nous venons d'étudier, ont les propriétés analogues à celles que les groupes de l'hexagramme ont par rapport à la conique fondamentale.

PROJECTION SUR UN PLAN S_2

74. Nous projetons maintenant par un plan R_2 quelconque de R_5 sur un plan S_2 , et nous supposons d'abord que R_2 et S_2 n'aient aucune position spéciale par rapport à la pyramide fondamentale. On a:

Théorème CLXXX. En projetant par un plan R_2 sur un autre plan S_2 , qui ne coupe pas R_2 , les figures de R_5 ; de la pyramide fondamentale, résulte un hexagone général ${}_2(A)$. Des 30 points $P_0^{(ik)}$, $P_0'^{(ik)}$ résultent 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ situés deux à deux sur les côtés de l'hexagone ${}_2(A)$, et qui en divisent harmoniquement les deux sommets.

Les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 20 droites et ils sont 6 à 6 les sommets de 15 quadrilatères.

Les 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ sont situés 3 à 3 sur 80 droites, qui déterminent 20 autres quadrilatères.

⁽¹⁾ Dans ce cas les 32 points $(B)_{16}$ $(C)_{16}$ sont projetés en 31 points, c'est à dire en 15 points ${}_1(B)_{15}$ et 16 points ${}_1(C)_{16}$. Du théor. CXX on déduit qu'il y a un hexagone complet de 6 points de ${}_1(C)_{16}$, dont les côtés passent par les points ${}_1(B)_{15}$.

Les 120 points (r_0) étant situés sur l'espace unité, si la droite S_1 est contenue dans l'espace unité, les 120 points ${}_1(r_0)$ sont situés sur un plan, ainsi que les 15 points ${}_1P^{(ik)}$, etc.

Théorème CLXXXI. Les 720 points d'un groupe $(S_0)_{720}$ de R_5 sont projetés en 720 points d'un groupe ${}_2(S_0)_{720}$ de S_2 . Ces 720 points sont situés deux à deux sur $15 \cdot 360$ droites, qui passent 360 à 360 par les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Ils sont situés 6 à 6 en 2400 coniques, qui passent 120 à 120 par les points projections des points (r_3) , situés sur une des 20 droites, où sont disposés 3 à 3 les points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Les deux points de (r_3) d'une de ces droites divisent équi-anharmoniquement ses trois points ${}_2P_0^{(ik)}$.

Les 6 points d'une de ces coniques ont les mêmes propriétés que les 6 points $(S_0)_6$ du § 2 de ce chapitre.

Ainsi tous les groupes de points de $(S_0)_{720}$ dans l'espace R_5 , par ex., les groupes $(S_0)_{\alpha\beta}^m$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma}^p$; $(S_0)_{\alpha\beta\gamma}^q$; $(S_0)_{\alpha\beta\gamma, \delta\epsilon\lambda}^r$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \alpha\epsilon, \alpha\lambda}^s$; $(S_0)_{\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta}^k$, etc. qui correspondent aux groupes des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, des droites de PASCAL, des points de STEINER et de leurs couples, des 6 figures Π , des points de KIRKMAN, etc. nous donnent par projection sur S_2 les groupes correspondants.

On aura aussi dans le plan S_2 des groupes spéciaux; par ex., en projetant les 120 points (r_3) , on obtient sur le plan 120 points correspondants deux à deux aux 60 droites de PASCAL, etc.

D'après le théorème XXXVII on déduit:

Théorème CLXXXII. Pour tout triangle, quadrangle, pentagone, hexagone du plan on obtient des configurations de points, de droites et de courbes de la même classe que l'hexagramme mystique.

Ce théorème a lieu aussi quand l'hexagone est inscrit à une conique.

Toutes les courbes de R_5 qui se transforment en elles-mêmes, seront projetées suivant des courbes planes, pour lesquelles les groupes plans, que nous venons d'étudier, ont des propriétés analogues à celles que les groupes de l'hexagramme ont par rapport à la conique fondamentale.

Par la méthode que nous avons suivie jusqu'à présent pour $n = 3, 4, 5, 6$ on peut discuter aussi complètement les configurations, qui correspondent à n quelconque, soit dans l'espace R_{n-1} , soit dans un espace de dimensions moindre.

Nous avons donné déjà quelques propriétés fondamentales de ces configurations dans le chapitre I. Par exemple, pour le cas $n = 10$, ou $n = 20$, etc. on obtiendra des configurations analogues pour 10 points quelconques d'une surface du 2^d degré, ou pour 20 points quelconques d'une surface de 3^{me} ordre, etc.

CHAPITRE III.

AUTRES INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES DES GROUPES
DES SUBSTITUTIONS DE 6 LETTRES.

§ 1.

Interprétation géométrique au moyen de 6 complexes linéaires
de droites deux à deux en involution dans R_3 .

75. Soient donnés 6 complexes linéaires de droites $x_1=0, x_2=0, \dots, x_6=0$ deux à deux en involution. Pour que y_1, y_2, \dots, y_6 soient les coordonnées d'une droite, il faut que soit satisfaite la relation quadratique

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_6^2 = 0. \quad (1)$$

Si y_1, y_2, \dots, y_6 ne satisfont pas à cette relation, l'équation

$$y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_6 x_6 = 0, \quad (2)$$

représente un complexe linéaire général.

Les 6 complexes linéaires ont, deux à deux, deux directrices communes, qui forment, 6 à 6, 15 tétraèdres, que KLEIN appelle *fondamentaux*. Leurs sommets et leurs faces sont distincts, de manière qu'on a 60 sommets et 60 faces. Par exemple, les deux complexes $x_1=0, x_2=0$ ont pour directrices les deux droites :

$$1, \quad \pm i, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 0$$

que l'on peut désigner par le symbole 12. Le tétraèdre donné par les six directrices 12, 34, 56 peut être représenté par le symbole 12·34·56, de même que le triangle Δ_{12} de l'hexagramme. Nous désignerons aussi ce tétraèdre par le symbole θ_{12} (¹).

(¹) Une droite dans l'espace à 3 dimensions a 6 coordonnées p_{ik} , où $p_{ik} = (y_i z_k - y_k z_i)$, étant $y_1, y_2, y_3, y_4; z_1, z_2, z_3, z_4$ deux points quelconques de la droite. Si u_i, v_i sont les coordonnées de deux plans passant par la droite, on a $\pi_{ik} = u_i v_k - u_k v_i$. Entre les coordonnées p_{ik} et π_{ik} il existe les relations

$$R = p_{12} p_{34} + p_{31} p_{24} + p_{14} p_{23} = 0, \quad p_{12} : p_{34} : p_{31} : p_{24} : p_{14} : p_{23} = \pi_{34} : \pi_{12} : \pi_{24} : \pi_{31} : \pi_{23} : \pi_{14}$$

KLEIN a démontré qu'étant donné un complexe du 2^e degré $\Omega = 0$, on peut transformer li-

76. En permutant les coordonnées y_1, y_2, \dots, y_6 d'une droite p de toutes les manières possibles, on obtient 720 droites, car la relation (1) reste toujours inaltérée. Si l'on considère encore deux droites y'_i, y''_i , qui rencontrent la pre-

néairement R et Q en deux équations contenant seulement les carrés de 6 variables p_{ik} , lorsque les racines du déterminant de la forme $R + \lambda\Omega$, égalé à zéro, sont distinctes. (Inaug. Dissertation: *Ueber die Transformation der allg. Gleichungen 2^{ten} Grades zwischen Linien-coordinaten auf eine canonische Form.* Bonn, 1868). De manière que R peut prendre la forme:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 0 \quad (2)$$

où x_1, x_2, \dots, x_6 sont six complexes linéaires en involution. (Voir aussi KLEIN, *Math. Ann.*, vol. 2). On trouve beaucoup de propriétés nouvelles sur cette figure dans mon Mémoire. *Sopra alcune notevoli configurazioni*, ecc. Mem. II, Atti della R. Acc. dei Lincei, 1881.

Si nous considérons comme tétraèdre fondamental le tétraèdre θ_{12} , les formules de transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i sont:

$$\left. \begin{aligned} p_{12} &= x_1 + ix_2, & p_{31} &= x_3 + ix_4, & p_{14} &= x_5 + ix_6 \\ p_{34} &= x_1 - ix_2, & p_{24} &= x_3 - ix_4, & p_{23} &= x_5 - ix_6 \end{aligned} \right\} i = \sqrt{-1} \quad (1)$$

d'où:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34}, & x_3 &= p_{31} + p_{24}, & x_5 &= p_{14} + p_{23} \\ x_2 &= i(p_{34} - p_{12}), & x_4 &= i(p_{24} - p_{31}), & x_6 &= i(p_{23} - p_{14}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Étant donné le complexe linéaire

$$A p_{14} + B p_{24} + C p_{34} + D p_{23} + E p_{31} + F p_{12} = 0 \quad (3)$$

on en détermine l'équation en coordonnées x_i au moyen des formules (2); on a:

$$x_1(C + F) + ix_2(F - C) + x_3(B + E) + ix_4(E - B) + x_5(D + A) + ix_6(A - D) = 0 \quad (3')$$

ou bien en posant:

$$\left. \begin{aligned} C + F &= a_1, & i(F - C) &= a_2, & B + E &= a_3, & i(E - B) &= a_4, \\ A + D &= a_5, & i(A - D) &= a_6 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

on déduit:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_6 x_6 = 0. \quad (3)$$

Des formules (4) il résulte:

$$\left. \begin{aligned} A &= a_5 - ia_6, & D &= a_5 + ia_6, & B &= a_3 + ia_4, & E &= a_3 - ia_4, \\ C &= a_1 + ia_2, & F &= a_1 - ia_2. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

DIRECTRICES DE DEUX COMPLEXES LINÉAIRES DE DROITES.

Étant donnés en général deux complexes linéaires de droites, dont les coefficients sont $ABCDEF, A'B'C'D'E'F'$, ils déterminent un faisceau de complexes dans lequel les deux directrices sont deux complexes spéciaux; donnés par les deux racines de l'équation:

$$(A'D' + B'E')\mu^2 + [(A'D + A'D') + (B'E + B'E')]\mu + (AD + EB) = 0 \quad (5)$$

(PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes*, pag. 69).

mière en un même point P , en opérant toutes les permutations paires de 6 lettres sur les coordonnées y_i, y'_i, y''_i , on obtient trois groupes de 360 droites, qui se coupent 3 à 3 suivant 360 points formant un groupe $(P)_{360}$. En opérant sur les coordonnées y_i, y'_i, y''_i les permutations impaires, on a trois groupes de 360 droites, situées 3 à 3 sur 360 plans d'un groupe $(\Pi)_{360}$, qui est relié au groupe $(P)_{360}$. Donc ⁽¹⁾:

Théorème CLXXXIII. En permutant de toutes les manières possibles les 6 coordonnées y_1, y_2, \dots, y_6 d'une droite p , on obtient 720 droites d'un groupe

Par les formules (4) on en déduit:

$$(a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2)\mu^2 + (a_3a'_3 + a_4a'_4 + a_5a'_5 + a_6a'_6)\mu + (a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) = 0. \quad (5')$$

étant $a_1, a_2, \dots, a_6; a'_1, a'_2, \dots, a'_6$ les coordonnées des deux complexes.

FORMULES DE TRANSFORMATION ENTRE LES COORDONNÉES D'UNE DROITE
ET CELLES DE SA POLAIRE PAR RAPPORT À UN COMPLEXE LINÉAIRE DE DROITES.

Soit:

$$Ap_{14} + Bp_{24} + Cp_{34} + Dp_{23} + Ep_{31} + Fp_{12} = 0. \quad (6)$$

Les formules de transformation entre un point x_1, x_2, x_3, x_4 et son plan focal, ou polaire u_1, u_2, u_3, u_4 , par rapport à ce complexe sont d'après PLÜCKER:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= Du_4 + Cu_2 - Bu_3, & x_2 &= Eu_4 - Cu_1 + Au_3, \\ x_3 &= Fu_4 + Bu_1 - Au_2, & x_4 &= -(Du_1 + Eu_2 + Fu_3) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

et, par conséquent, en considérant la droite p_{ik} qui joint deux points x_i, x'_i , on obtient les formules de transformations demandées, savoir:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x_1x'_2 - x'_1x_2) &= \rho p_{12} = C(Cp'_{34} + Dp'_{23} + Bp'_{24} + Ap'_{14} + Ep'_{13}) - \\ &\quad - (BE + AD)p'_{12} \\ \rho(x_3x'_4 - x'_3x_4) &= \rho p_{34} = F(Bp'_{24} + Dp'_{23} + Ap'_{14} + Ep'_{13} + Fp'_{12}) \\ &\quad - (BE + AD)p'_{34}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

De même pour les autres coordonnées. Au moyen des formules de transformation (2) on obtient:

$$\rho x_1 = - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2)x'_1 + a_1(a_2x'_2 + a_3x'_3 + a_4x'_4 + a_5x'_5 + a_6x'_6), \text{ etc.}$$

⁽¹⁾ En effet, si l'on opère sur les coordonnées d'une droite y_i une permutation paire on a alors une homographie parmi les points de l'espace, car le déterminant donné par la permutation est négatif; tandis que si l'on opère une permutation impaire le déterminant est positif, et, par conséquent, on obtient une réciprocité entre les points et les plans de l'espace, de manière que si une droite passe par un point, la droite correspondante est située sur un plan.

(p)₇₂₀. Un point P donne lieu à un groupe de 360 points (P)₃₆₀ et de 360 plans (Π)₃₆₀. Et, réciproquement, un plan du groupe (Π)₃₆₀ donne lieu aux deux mêmes groupes (Π)₃₆₀ et (P)₃₆₀.

Les deux groupes sont corrélatifs.

DES 15 TÉTRAÈDRES ET DES SURFACES DE 2¹ DEGRÉ $\theta_{\alpha\beta}$.

77. Le groupe d'un triangle $\Delta_{\alpha\beta}$, par exemple du triangle Δ_{12} de l'hexagramme, ou bien de la surface Δ_{12} de l'espace à 5 dimensions du chapitre précédent, est aussi le groupe appartenant au tétraèdre θ_{12} de cette figure. Donc:

Théorème CLXXXIV. Les 15 tétraèdres fondamentaux $\theta_{\alpha\beta}$ correspondent aux 15 triangles $\Delta_{\sigma\beta}$ de l'hexagramme.

Si l'on considère les trois complexes linéaires:

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 + x_4 = 0, \quad x_5 + x_6 = 0$$

ou bien

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0, \quad x_5 - x_6 = 0$$

d'après la règle donnée par KLEIN (*) (¹), il est facile de voir qu'ils déterminent une surface de 2¹ degré, dont l'équation est:

$$x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 \equiv \theta_{12} = 0.$$

Cette surface admet aussi le même groupe que le triangle Δ_{12} , donc:

Théorème CLXXXV. Aux 15 triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ correspondent aussi 15 surfaces de 2^d degré $\theta_{\alpha\beta}$, qui ont respectivement le tétraèdre $\theta_{\sigma\beta}$ comme conjugué.

Théorème CLXXXVI. La surface $\theta_{\sigma\beta}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport aux 6 surfaces dont les symboles ne contiennent ni l'indice α ni β .

La polaire réciproque de la surface $\theta_{\sigma\beta}$ par rapport à une des 8 autres

(*) L. c., pag. 209.

(¹) Si on a un complexe $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_6x_6 = 0$, on appelle la quantité $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_6^2$ l'invariant du complexe. Si l'on considère un autre complexe $b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_6x_6 = 0$, la quantité $a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_6b_6$ s'appelle l'invariant simultané des deux complexes. Si on a trois complexes linéaires, et A_{11} , A_{22} , A_{33} sont leurs invariants et A_{12} , A_{13} , A_{23} leurs invariants simultanés, l'hyperboloïde qu'ils déterminent, est donné par le déterminant:

$$\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ f_2 & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ f_3 & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

surfaces $\theta_{\alpha\gamma}, \dots, \theta_{\alpha\lambda}, \theta_{\beta\gamma}, \dots, \theta_{\beta\lambda}$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \lambda$ sont identiques, à l'ordre près, aux indices 1, 2, 3, 4, 5, 6), par ex, à la surface $\theta_{\alpha\gamma}$, est la surface $\theta_{\beta\gamma}$ ⁽¹⁾.

Théorème CLXXXVII. Du point P on obtient au moyen du groupe du triangle Δ_{12} (n.° 49) 24 points $(P)'_{\Delta_{12}}$ et 24 plans $(\Delta)'_{\Delta_{12}}$ des groupes $(P)_{360}$, $(\Pi)_{360}$. Les 24 points de $(P)_{\Delta_{12}}$ forment 6 tétraèdres conjugués par rapport à la surface θ_{12} . Les faces de ces tétraèdres sont les 24 plans de $(\Pi)'_{\Delta_{12}}$.

Si le point P par exemple correspond à la droite $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$, la face opposée Π , du tétraèdre, qui a pour sommet le point P , est donnée par la droite $y_2, y_1, y_4, y_3, y_6, y_5$.

Les 360 points de $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 15 manières différentes 15 de ces groupes ⁽²⁾.

⁽¹⁾ En opérant la transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i , l'équation de la surface θ_{12} devient :

$$-p_{12}^3 + p_{34}^3 - p_{31}^3 + p_{24}^3 - p_{14}^3 + p_{23}^3 = 0$$

ou en coordonnées de points :

$$-y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3 = 0$$

(A., *Sopra alcune notevoli conf.*, etc., l. c., Mém. II). La droite $p_{12}, p_{34}, p_{31}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$ a, par rapport à cette surface, la droite polaire $p_{34}, -p_{12}, p_{24}, -p_{31}, p_{23}, -p_{14}$, ou bien la droite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ a pour droite polaire la droite $x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5$.

On obtient la surface polaire de la surface

$$\theta_{45} \equiv x_1 x_2 + x_3 x_6 + x_4 x_5 = 0$$

par rapport à θ_{12} en remplaçant au lieu de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ les coordonnées $x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, x_5$, qui est, comme on le voit, la surface θ_{45} elle-même. La surface polaire de $\theta_{12} \equiv x_1 x_6 + x_2 x_3 + x_4 x_5 = 0$ par rapport à la surface θ_{12} est la surface

$$\theta_{23} = x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0.$$

⁽²⁾ Supposons qu'au point z_1, z_2, z_3, z_4 correspond la droite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, que l'on trouve en joignant le point z_i avec un autre point z'_i , on a, au moyen des 24 substitutions paires du groupe Δ_{12} (n.° 49), les 24 droites et du point z_i les 24 points correspondants suivants, accompagnés avec les droites de PASCAL correspondant aux 24 hexagones représentés par les 24 droites.

I.	z_1, z_2, z_3, z_4	$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$	p_{245}^I
	$iz_4, -z_3, z_2, iz_1$	$x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6$	p_{175}^I
	$iz_3, z_4, iz_1, -z_2$	$x_2 x_1 x_3 x_4 x_6 x_5$	p_{134}^I
	$iz_2, iz_4, -z_4, z_3$	$x_1 x_2 x_4 x_3 x_6 x_5$	p_{146}^I
II.	$z_1, z_3, z_2, -z_4$	$x_3 x_4 x_1 x_2 x_5 x_6$	p_{245}^{II}
	$-iz_4, -z_2, z_3, iz_1$	$x_4 x_3 x_2 x_1 x_5 x_6$	p_{134}^{II}
	$iz_2, -z_4, iz_1, -z_3$	$x_1 x_3 x_1 x_2 x_6 x_5$	p_{145}^{II}
	$iz_3, -iz_1, z_4, z_2$	$x_3 x_4 x_2 x_1 x_6 x_5$	p_{135}^{II}

De ce théorème on tire:

Théorème CLXXXVIII. Les 360 points $(P)_{360}$ sont situés 15 à 15 sur les 360 plans de $(\Pi)_{360}$, et, réciproquement, ceux-ci passent 15 à 15 par les 360 points $(P)_{360}$.

Les 15 points situés sur un de ces plans Π forment 15 triangles $\Delta'_{\alpha\beta}$ conjugués respectivement par rapport aux 15 coniques d'intersection du plan Π avec les 15 surfaces $\theta_{\alpha\beta}$ ⁽¹⁾.

III.	$-z_1, z_4, z_3, z_2$	$x_5 x_6 x_3 x_4 x_1 x_2$	p_{345}^{II}
	$iz_2, -z_3, z_4, -iz_1$	$x_6 x_5 x_4 x_3 x_1 x_2$	p_{145}^{II}
	$iz_3, z_2, -iz_4, -z_4$	$x_6 x_5 x_3 x_4 x_2 x_1$	p_{135}^{II}
	$iz_4, -iz_1, -z_2, z_3$	$x_5 x_6 x_4 x_3 x_2 x_1$	p_{134}^{II}
IV.	$z_1, -z_2, z_4, z_3$	$x_1 x_2 x_5 x_6 x_3 x_4$	p_{345}^{II}
	$iz_3, -z_4, -z_2, iz_1$	$x_2 x_1 x_6 x_5 x_3 x_4$	p_{135}^{II}
	iz_4, z_3, iz_1, z_2	$x_2 x_1 x_5 x_6 x_4 x_3$	p_{134}^{II}
	$-iz_2, iz_1, -z_3, z_4$	$x_1 x_2 x_6 x_5 x_4 x_3$	p_{145}^{II}
V.	$z_1, -z_3, -z_4, z_2$	$x_3 x_4 x_5 x_6 x_1 x_2$	p_{345}^{I}
	$iz_2, z_4, -z_3, iz_1$	$x_4 x_3 x_6 x_5 x_1 x_2$	p_{145}^{I}
	$-iz_4, z_2, iz_1, z_3$	$x_4 x_3 x_5 x_6 x_2 x_1$	p_{135}^{I}
	$-iz_3, iz_1, -z_2, -z_4$	$x_3 x_4 x_6 x_5 x_2 x_1$	p_{134}^{I}
VI.	$-z_1, -z_4, z_2, z_3$	$x_5 x_6 x_1 x_2 x_3 x_4$	p_{345}^{I}
	$iz_3, -z_2, -z_4, -iz_1$	$x_6 x_5 x_2 x_1 x_3 x_4$	p_{134}^{I}
	$iz_2, z_3, -iz_4, z_4$	$x_6 x_5 x_1 x_2 x_4 x_3$	p_{145}^{I}
	$-iz_4, -iz_1, -z_3, z_2$	$x_5 x_6 x_2 x_1 x_4 x_3$	p_{135}^{I}

Les 24 substitutions impaires du groupe Δ_1 , donnent 24 plans. Nous avons vu qu'à la droite $x_2, x_4, x_4, x_3, x_6, x_5$ correspond le plan des coordonnées $-z_1, z_2, z_3, z_4$. Ce plan est évidemment le plan polaire du point z_1, z_2, z_3, z_4 par rapport à la surface

$$\theta_{12} = -y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0$$

et il contient en outre les trois autres points du tétraèdre I. Le plan polaire du point $iz_4, -z_3, z_2, iz_1$ passe aussi par les trois autres points de I; donc le tétraèdre I est un tétraèdre conjugué par rapport à la surface θ_{12} , et les faces de ce tétraèdre sont des plans du groupe $(\Pi)_{\Delta_{12}}$.

⁽¹⁾ Nous avons vu, qu'en se rapportant au tétraèdre θ_{12} , à la droite $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ correspond le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$. La droite, qui correspond au pôle de ce plan, par rapport à la surface θ_{12} , s'obtient, d'après ce qui précède, en opérant sur les indices de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ la substitution (12) (34) (56) donnée par les indices de θ_{12} ; de même pour les autres surfaces $\theta_{\alpha\beta}$. Pour obtenir les trois droites correspondant aux points du groupe $(P)_{\Delta_{12}}$

On sait que les six pôles d'un plan Π par rapport aux 6 complexes fondamentaux sont situés sur une conique, et qu'ils n'ont aucune autre particularité (*). On déduit :

Théorème CLXXXIX. Les 15 points P d'un plan Π sont situés respectivement sur les 15 côtés de l'hexagramme H , déterminé par les 6 pôles du plan par rapport aux 6 complexes fondamentaux (²).

situés sur le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$, il suffit d'opérer sur les indices de la droite donnée les substitutions (56), (34), (12). Si l'on fait cette opération pour toutes les surface θ_{z_i} , on trouve seulement 15 droites correspondant à 15 points P situés sur le plan Π donné, car en effet on a seulement 15 transpositions $(\alpha\beta)$, et le théorème est ainsi démontré.

Les 15 droites du plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$ sont :

$$\begin{array}{lll} (12) & x_1 x_2 x_4 x_3 x_6 x_5 & (23) & x_3 x_4 x_4 x_2 x_6 x_5 & (35) & x_2 x_1 x_4 x_5 x_6 x_3 \\ (13) & x_2 x_3 x_4 x_1 x_6 x_5 & (24) & x_4 x_1 x_2 x_3 x_6 x_5 & (36) & x_2 x_1 x_4 x_6 x_3 x_5 \\ (14) & x_2 x_4 x_1 x_3 x_6 x_5 & (25) & x_5 x_1 x_4 x_3 x_6 x_2 & (45) & x_2 x_1 x_5 x_3 x_6 x_4 \\ (15) & x_3 x_5 x_4 x_3 x_6 x_1 & (26) & x_6 x_1 x_4 x_3 x_2 x_5 & (46) & x_2 x_1 x_6 x_3 x_4 x_5 \\ (16) & x_2 x_6 x_4 x_3 x_1 x_5 & (34) & x_3 x_1 x_3 x_4 x_6 x_5 & (56) & x_2 x_1 x_4 x_3 x_5 x_6 \end{array}$$

On sait que le rapport anharmonique des 4 points d'intersection d'une droite avec les faces d'un tétraèdre est égal au rapport anharmonique des plans passant par les sommets et par la droite. Au moyen des substitutions du groupe Δ_{12} le tétraèdre θ_{12} se transforme en lui-même, donc : les 48 droites, qui dérivent d'une droite donnée, coupent les 4 faces du tétraèdre θ_{12} en 4 points d'un même rapport anharmonique, car une substitution nous donne, comme nous l'avons vu, une homographie ou bien une réciprocité de l'espace.

(*) KLEIN, Math. Annalen, vol. 2, l. c.

(²) Étant donné un complexe linéaire

$$A p_{14} + B p_{24} + C p_{34} + D p_{23} + E p_{31} + F p_{12} = 0$$

le pôle du plan u_1, u_2, u_3, u_4 par rapport à ce complexe est, d'après PLÜCKER (l. c., pag. 31)

$$\begin{aligned} y_1 &= D u_4 + C u_2 - B u_3, & y_2 &= E u_4 - C u_1 + A u_3, & y_3 &= F u_4 + B u_1 - A u_2, \\ y_4 &= -(D u_1 + E u_2 + F u_3). \end{aligned}$$

Si nous considérons le complexe $x_i = 0$ ou $p_{12} + p_{34} = 0$ on a $C = F = 1, A = B = D = E = 0$ d'où

$$y_1 = u_2, \quad y_2 = -u_1, \quad y_3 = u_4, \quad y_4 = -u_3.$$

Si le plan donné est le plan $-z_1, z_2, z_3, z_4$ le pôle est évidemment $z_2, z_1, z_4, -z_3$.

Les pôles de ce plan par rapport aux autres complexes fondamentaux $x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_6 = 0$ sont $z_2, z_1, -z_4, z_3; z_3, -z_1, z_1, z_2; z_3, z_4, z_1, -z_2; z_4, z_3, -z_2, z_1; z_4, -z_3, z_4, z_1$. Les coordonnées des points de la droite des deux premiers points sont : $z_2(1 + \lambda), z_1(1 + \lambda), z_4(1 - \lambda), z_3(\lambda - 1)$.

En posant $\lambda = -i$, nous obtenons précisément le point $iz_2, iz_1, -z_4, z_3$ qui est un des 15 points P du plan Π considéré.

Théorème CXC. Si le point P tombe sur une des surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, les 360 points de $(P)_{360}$ se distribuent 24 à 24 sur ces surfaces, et les 360 plans de $(\Pi)_{360}$ sont tangents 24 à 24 en ces mêmes points aux mêmes surfaces.

GROUPES CORRESPONDANT AUX DROITES DE PASCAL.

78. Aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, qui déterminent une droite de PASCAL, correspondent les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$ et les deux surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$. Ces deux surfaces se rencontrent suivant une courbe C^4 de 4^{me} ordre qui correspond à la droite de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$. Donc :

Théorème CXCI. Aux 60 droites de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$ correspondent 60 courbes C^4 de 4^{me} ordre $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\gamma}$, qui sont l'intersection de deux surfaces $\theta_{\alpha\beta}$, $\theta_{\alpha\gamma}$.

Théorème CXCII. Les 6 points P de $(P)_{360}$ et les 6 plans Π de $(\Pi)_{360}$, déterminés par le groupe de la droite de PASCAL $\Delta_{\alpha\beta}\Delta_{\alpha\gamma}$, forment deux figures polaires réciproques par rapport à la surface $\theta_{\beta\gamma}$.

Les 360 points $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 60 manières différentes 60 de ces groupes (1).

Théorème CXCIII. Si le point P tombe sur une des 60 courbes $\theta_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\gamma}$, les 360 points de $(P)_{360}$ se distribuent 6 à 6 sur ces courbes.

GROUPES CORRESPONDANT AUX POINTS DE STEINER.

79. Le groupe des deux points de STEINER G_{123} , G_{456} (n.° 52) est représenté par la surface du 2^e degré

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv x_2^2 + x_4^2 + x_6^2 = 0 \equiv S_{135} \quad (1)$$

qui a pour tétraèdres conjugués les tétraèdres

$$\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}; \quad \theta_{45}, \theta_{46}, \theta_{56}.$$

Les dix surfaces (1) ont été trouvées par KLEIN (*) (2). Donc :

(1) Nous avons vu, au n.° 50, qu'en partant de la droite de PASCAL $163254 = \Delta_{13}\Delta_{23}$ les 12 permutations correspondantes sont contenues dans le groupe Δ_{12} . Or, des 6 permutations paires on obtient les 6 permutations impaires en opérant la substitution (12)(34)(56); on sait aussi qu'en opérant cette même substitution sur la droite $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ correspondant au point z_1, z_2, z_3, z_4 , on obtient la droite $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$, qui correspond au plan polaire de ce point par rapport à la surface Δ_{12} . Mais (12)(34)(56) est une substitution du groupe de la droite $\Delta_{13}\Delta_{23}$, donc la droite $x_2x_5x_4x_1x_6x_3$, qui résulte de $x_1x_6x_3x_2x_5x_4$, est la polaire de cette droite par rapport à la surface Δ_{12} .

(*) KLEIN, l. c., pag. 209.

(2) A., *Sopra alcune notevoli config.*, etc., l. c., Mem. II.

Théorème CXCVI. Un quelconque des 10 couples de points de STEINER est représenté par une des dix surfaces $S_{\sigma\beta\gamma}$ fondamentales de KLEIN.

Une surface $S_{\sigma\beta\gamma}$ a pour conjugués les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\gamma}, \theta_{\beta\gamma}; \theta_{\delta\alpha}, \theta_{\delta\beta}, \theta_{\delta\gamma}$, qui forment une figure identique aux deux ternes des tétraèdres (A), (B), (C); (P'), (P''), (P''') du n.° 35.

Théorème CXCV. Les 6 surfaces $\theta_{\alpha\beta}, \theta_{\sigma\gamma}, \theta_{\beta\gamma}; \theta_{\delta\alpha}, \theta_{\delta\beta}, \theta_{\delta\gamma}$ sont polaires réciproques d'elles-mêmes par rapport à la surface $S_{\alpha\beta\gamma}$ de KLEIN.

Une surface $\theta_{\alpha\beta}$ est polaire réciproque d'elle-même par rapport aux 4 surfaces $S_{\sigma\beta\gamma}, S_{\sigma\beta\delta}, S_{\sigma\beta\epsilon}, S_{\sigma\beta\lambda}$. L'ensemble de ces 4 surfaces correspond à la droite de STEINER-PLÜCKER $g_{\alpha\beta}$ et au point de SALMON $S_{\alpha\beta}$ (1).

Théorème CXCVI. En opérant sur le point P les substitutions du groupe XVI, on obtient un groupe de 36 points et des 36 plans de $(\Pi)_{360}$.

Les 36 points sont situés 4 à 4 sur les 36 plans et ceux-ci passent 4 à 4 par les 36 points.

Les 360 points de $(P)_{360}$ et les 360 plans $(\Pi)_{360}$ forment de 10 manières différentes 10 de ces groupes (2).

Théorème CXCVII. Si le point P tombe sur une des 10 surfaces $S_{\sigma\beta\gamma}$, les points $(P)_{360}$ se distribuent 36 à 36 sur ces surfaces, tandis que les plans $(\Pi)_{360}$ sont 36 à 36 tangents en ces mêmes points aux mêmes surfaces.

(1) En opérant la transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i , l'équation de la surface $S_{123} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ devient:

$$p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{23}^2 + p_{24}^2 + p_{14}^2 + p_{34}^2 = 0$$

ou bien en coordonnées de points:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

Une droite qui a les coordonnées $p_{12}, p_{24}, p_{31}, p_{24}, p_{14}, p_{23}$ ou $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ a pour droite polaire, par rapport à cette surface la droite $p_{34}, p_{12}, p_{24}, p_{31}, p_{23}, p_{14}$ ou $x_4, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6$.

Trouvons maintenant la surface polaire de $0_{13} \equiv x_1x_6 + x_2x_3 + x_4x_5 = 0$ par rapport à cette surface. En remplaçant x_1, x_2, \dots, x_6 par $x_1, -x_2, x_3, -x_4, x_5, -x_6$, on obtient la surface 0_{13} elle-même. Donc le théorème est démontré.

(2) On obtient, au moyen des 72 substitutions du groupe XVI (n.° 52), 36 points P et 36 plans Π . Au point z_1, z_2, z_3, z_4 correspond toujours la droite $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$; mais dans le groupe XVI il y a la substitution (12)(34)(56), donc parmi les 36 plans il y a aussi le plan correspondant à la droite $x_2x_1x_4x_3x_6x_5$. Ce plan d'après la Note, pag. 221 contient les 4 points correspondant aux droites

$$x_2x_3x_4x_1x_6x_5, \quad x_6x_1x_4x_3x_2x_5, \quad x_2x_1x_4x_5x_6x_3, \quad x_4x_1x_2x_3x_6x_5,$$

qui sont aussi contenus parmi les 36 points P ; donc le théorème est démontré.

GROUPES CORRESPONDANT AUX FIGURES II.

80. Théorème CXCVIII. Le groupe d'une figure II, par exemple I, est représenté dans l'espace par l'ensemble des 5 tétraèdres, $\vartheta_{12}, \vartheta_{13}, \vartheta_{14}, \vartheta_{15}, \vartheta_{16}$, ou bien des 5 surfaces des mêmes symboles.

Les arêtes de ces 5 tétraèdres contiennent tous les 60 sommets et par elles passent toutes les 60 faces des 15 tétraèdres $\vartheta_{\alpha\beta}$.

Théorème CXCLIX. Les 60 points P de $(P)_{360}$, donnés par le groupe d'une figure II, par ex. III, déterminent 5 · 15 tétraèdres qui sont conjugués 15 à 15 par rapport aux surfaces $\vartheta_{13}, \vartheta_{23}, \vartheta_{34}, \vartheta_{35}, \vartheta_{36}$, et dont les faces sont des plans II (1).

81. Si l'on considère le complexe linéaire

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

que j'appelle le complexe unité, on voit facilement qu'il se transforme en lui-même par les permutations des 6 coordonnées. Il y a deux groupes très-intéressants de 6 droites qui se transforment en eux-mêmes par les permutations des 6 coordonnées; ils sont formés par les directrices communes aux 6 complexes fondamentaux et au complexe unité.

Les deux directrices de $x_1 = 0$ et du complexe unité ont les coordonnées

$$\pm \sqrt{-5}, 1, 1, 1, 1, 1 \quad (2).$$

(1) D'après la Note (1) pag. 220 on voit que la droite $x_5 x_4 x_1 x_6 x_3 x_2$ correspond au pôle du plan correspondant à la droite $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$ par rapport à la surface $\vartheta_{23} \equiv x_1 x_4 + x_3 x_5 + x_3 x_6 = 0$. Considérons les 4 droites suivantes:

$$x_5 x_4 x_1 x_6 x_3 x_2, \quad x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5, \quad x_2 x_1 x_4 x_6 x_3 x_5, \quad x_5 x_1 x_4 x_3 x_6 x_2. \quad (*)$$

Les points relatifs aux trois dernières droites sont contenus dans le plan correspondant à la droite $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$. Ces points P forment avec le point correspondant à la droite $x_5 x_4 x_1 x_6 x_3 x_2$ un tétraèdre conjugué par rapport à la surface ϑ_{23} , comme il n'est pas difficile de le voir d'après les règles données à la Note (2) pag. 219. Mais les 4 droites (*) appartiennent au groupe de la figure III; les 60 points P qui en résultent forment, en conséquence, 15 tétraèdres conjugués par rapport à ϑ_{23} , et dont les faces sont 60 plans II. La droite qui correspond au plan des trois points relatifs aux trois dernières droites de (*), est $x_2 x_1 x_4 x_3 x_6 x_5$, qui n'appartient pas au groupe de la figure III avec celles des 60 points P .

(2) En effet, si l'on détermine dans ce cas la valeur de μ dans l'équation (5) de la Note à pag. 216, et qu'on substitue ensuite dans l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + \mu x_1 = 0,$$

on obtient les deux directrices $\pm \sqrt{-5}, 1, 1, 1, 1, 1$. En opérant sur une de ces droites,

82. Si l'on considère un complexe quelconque, par exemple

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n + x_4^n + x_5^n + x_6^n = 0$$

qui se transforme en lui-même par les permutations des 6 coordonnées, sa surface focale (Brennfläche), se transforme aussi en elle-même, c'est à dire chaque point P de la surface détermine un groupe $(P)_{360}$ inscrit à la surface, de même qu'un plan Π tangent à la surface détermine un groupe $(\Pi)_{360}$ circonscrit.

Cette surface a les mêmes propriétés par rapport aux 15 tétraèdres fondamentaux $\theta_{\alpha\beta}$, aux surfaces $\vartheta_{\alpha\beta}$ et aux 10 surfaces $S_{\sigma\beta\gamma}$.

SECTION DE LA FIGURE AVEC UN PLAN.

83. Soit donné un plan Π ; ses six pôles par rapport aux 6 complexes fondamentaux soient 1, 2, 3, 4, 5, 6. On a les théorèmes suivants:

Théorème CC. Les 15 couples de directrices des 6 complexes fondamentaux coupent un plan Π en deux groupes de 15 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$, situés deux à deux sur les 15 côtés de l'hexagramme H , déterminé par les six pôles 1, 2, 3, 4, 5, 6 du plan Π par rapport aux six complexes.

Les deux points, par ex. $T^{(12)}$, $T'^{(12)}$, divisent harmoniquement le segment 12 ⁽¹⁾.

Théorème CCI. Les 30 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ sont situés trois à trois sur les 60 droites d'intersection du plan Π avec les 60 faces des 15 tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$.

Ils sont aussi de 10 manières différentes les sommets de 6 quadrilatères, donnés par un des 10 sextuples de tétraèdres $\theta_{\sigma\beta}\vartheta_{\alpha\gamma}\theta_{\beta\gamma}$, $\theta_{\delta\epsilon}\vartheta_{\delta\lambda}\theta_{\epsilon\lambda}$.

Il y a aussi 6 groupes de 5 de ces quadrilatères, dont les 30 sommets sont les 30 points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ ⁽²⁾.

Ces 30 points ne forment évidemment pas la figure analogue à celle des 30 points ${}_2P_0^{(ik)}$, ${}_2P_0'^{(ik)}$ du n.° 74, car ceux-ci sont situés 3 à 3 sur 80 droites et en outre les points $P_0^{(ik)}$ ne forment pas la même figure que les 15 points ${}_2P_0^{(ik)}$, tandis que les points $T^{(ab)}$ ont les mêmes propriétés que les 15 points $T^{(ab)}$.

par exemple $+\sqrt{5}$, 1, 1, 1, 1, 1, toutes les substitutions des 5 indices 23456, elle reste inaltérée, tandis que les tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$ se transforment en eux-mêmes, ou l'un dans l'autre, donc: Les droites des deux groupes considérés coupent respectivement les 15 tétraèdres en quatre points d'un même rapport unharmonique. Un point d'une droite d'un des deux groupes donne un groupe de 360 points distribués 36 à 36 sur les 6 droites du groupe, et 360 plans passant 36 à 36 par les mêmes droites.

⁽¹⁾ On sait que les pôles d'un plan par rapport à deux complexes linéaires de droites sont situés sur la droite qui joint les deux points d'intersection du plan avec les directrices des deux complexes, et on sait aussi que les pôles divisent harmoniquement ces deux points (PLÜCKER, l. c.).

⁽²⁾ Cela résulte évidemment de la figure même des 15 tétraèdres $\theta_{\alpha\beta}$.

Théorème CCII. Les 10 surfaces de KLEIN $S_{\alpha\beta\gamma}$ rencontrent le plan Π suivant les 10 coniques Σ_{abc} qui ont pour triangles conjugués deux triangles, dont les sommets sont trois de 6 points fondamentaux de l'hexagramme H (1).

Théorème CCIII. Les 6 quadrilatères des dix sestuples de points $T^{(ab)}$ $T'^{(ab)}$ sont respectivement conjugués par rapport aux 10 coniques Σ_{abc} (2).

Théorème CCIV. Les 15 surfaces $\theta_{\alpha\beta}$ rencontrent le plan Π suivant 15 coniques $\theta_{\alpha\beta}$. Par rapport à la conique θ_{12} sont conjugués le triangle Δ'_{12} (voir le théor. CLXXXVIII) et le quadrilatère $T^{(12)}$, $T'^{(12)}$; $T^{(34)}$, $T'^{(34)}$; $T^{(56)}$, $T'^{(56)}$.

(1) La surface S_{123} ou S_{456} correspond au couple des points de STEINER G_{123} , G_{456} dont le symbole est:

$$\left. \begin{array}{ccc} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 52 & 14 \end{array} \right\} \quad (\text{n.}^\circ \text{ 24}). \quad (1)$$

La surface S_{123} a pour tétraèdres conjugués les tétraèdres 0_{12} , 0_{13} , 0_{23} ; 0_{45} , 0_{46} , 0_{56} qui sont donnés par les lignes horizontales et verticales de (1).

En rapportant toute la figure au tétraèdre 0_{12} , au moyen des formules de transformation entre les coordonnées p_{ik} et x_i (n.º 76), on trouve que les autres couples des directrices 13, 15, 35; 24, 26, 46 ont les coordonnées:

$$\begin{array}{ll} \text{pour 13} & p_{12} = 1, \quad p_{31} = \pm i, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = 1, \quad p_{24} = \pm i, \quad p_{23} = 0; \\ \text{"} \quad 15 & p_{12} = 1, \quad p_{31} = 0, \quad p_{14} = \pm i, \quad p_{34} = 1, \quad p_{24} = 0, \quad p_{23} = \pm i; \\ \text{"} \quad 35 & p_{12} = 0, \quad p_{31} = 1, \quad p_{14} = \pm i, \quad p_{34} = 0, \quad p_{24} = 1, \quad p_{23} = \pm i; \\ \text{"} \quad 24 & p_{12} = i, \quad p_{31} = \mp 1, \quad p_{14} = 0, \quad p_{34} = -i, \quad p_{24} = \pm 1, \quad p_{23} = 0; \\ \text{"} \quad 26 & p_{12} = i, \quad p_{31} = 0, \quad p_{14} = \mp 1, \quad p_{34} = -i, \quad p_{24} = 0, \quad p_{23} = \pm 1; \\ \text{"} \quad 46 & p_{12} = 0, \quad p_{31} = i, \quad p_{14} = \mp 1, \quad p_{34} = 0, \quad p_{24} = -i, \quad p_{23} = \pm 1; \end{array}$$

tandis que l'équation de la surface S_{123} est:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 = 0.$$

On démontre facilement que cette surface contient les directrices des couples 13, 15, 35; 24, 26, 46. (Voir A., *Sopra alcune notevoli config.*, etc., l. c., Mem. II.) Donc une surface $S_{\alpha\beta\gamma}$ passe par les directrices des six couples qui ne sont pas compris dans le symbole correspondant (1).

Maintenant coupons la figure avec le plan Π . Les points $T^{(ab)}$, $T'^{(ab)}$ situés sur les côtés 13, 15, 35; 24, 26, 46 de l'hexagramme des six pôles, par ce qui précède, appartiennent à la conique d'intersection du plan Π avec la surface S_{123} . En conséquence, les points 1, 3; 3 et 5 sont divisés harmoniquement par cette conique, c'est à dire que le point 3 a pour polaire la droite 15; de même pour les autres sommets des triangles 135, 246. On voit aussi que les indices abc des coniques Σ se rapportent aux points fondamentaux de l'hexagramme, tandis que les indices $\alpha\beta\gamma$ des surfaces S de KLEIN se rapportent aux 6 indices des figures Π .

(2) Cela résulte évident par la figure même des tétraèdres $0_{\alpha\beta}$ et des surfaces de KLEIN.

84. Théorème CCV. Les pôles $S^{(ab)}$ $S'^{(ab)}$ du plan Π par rapport aux deux complexes $x_a \pm x_b = 0$ sont situés sur les côtés ab de l'hexagramme H divisant harmoniquement les segments ab et $T^{(ab)}$ $T'^{(ab)}$.

Théorème CCVI. Le pôle $S^{(123)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ est le point d'intersection des trois droites $1S^{(23)}$, $2S^{(13)}$, $3S^{(12)}$, qui joignent les points fondamentaux 1, 2, 3 respectivement aux points $S^{(23)}$, $S^{(13)}$, $S^{(12)}$.

Théorème CCVII. Le pôle $S^{(1234)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ est l'intersection des 4 droites $1S^{(234)}$, $2S^{(124)}$, $3S^{(124)}$, $4S^{(123)}$. Par ce point passent aussi les trois droites $S^{(12)}S^{(34)}$, $S^{(13)}S^{(24)}$, $S^{(14)}S^{(23)}$.

Théorème CCVIII. Le pôle $S^{(12345)}$ du plan Π par rapport au complexe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$ est l'intersection des 5 droites

$$1S^{(2345)}, \quad 2S^{(1345)}, \quad 3S^{(1245)}, \quad 4S^{(1234)}.$$

Par ce point passent aussi les 10 droites $S^{(ab)}S^{(cde)}$ (a, b, c, d, e étant, identiques à l'ordre près, aux indices 12345).

Théorème CCIX. Le pôle $S^{(123456)}$ du plan Π par rapport au complexe unité $\Sigma x_i = 0$ est le point de rencontre des 6 droites

$$1S^{(23456)}, \quad 2S^{(13456)}, \quad 3S^{(12456)}, \quad 4S^{(12356)}, \quad 5S^{(12346)}, \quad 6S^{(12345)}.$$

Par ce point passent en outre les 15 droites $S^{(ab)}S^{(cdef)}$ et les 20 droites $S^{(abc)}S^{(def)}$ ($abcdef$ étant, identiques à l'ordre près, aux indices 123456).

De même on peut obtenir les pôles par rapport aux autres complexes

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 \pm x_6 = 0. \quad (1)$$

Les équations des 6 complexes polaires des 6 complexes fondamentaux par rapport au complexe unité sont:

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0 \\ \vdots & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ces complexes sont naturellement deux à deux en involution.

De même si l'on détermine les six complexes polaires par rapport à un quelconque des autres complexes (1).

On peut facilement construire les 6 pôles 1', 2', 3', 4', 5', 6' du plan de

section Π par rapport aux 6 complexes (2). Les droites $11'$, $22'$, $33'$, $44'$, $55'$, $66'$ doivent passer évidemment par le point $S^{(123456)}$ déjà déterminé. La droite $11'$ doit passer aussi, comme nous l'apprend le théorème précédent, par le point $S^{(23456)}$. Étant A le point harmonique de $S^{(23456)}$ par rapport aux points 1 , $S^{(123456)}$; le point $1'$ est le point harmonique de A par rapport à 1 et $S^{(23456)}$ ⁽¹⁾. Les 6 points $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$, $6'$ déterminent un autre hexagramme H' , qui est relié au premier par le pôle du complexe unité. En continuant à faire avec l'hexagramme H' les mêmes opérations indiquées dans les théorèmes précédents pour l'hexagramme H , on obtient un autre hexagramme H'' , et une suite de nouveaux complexes et par conséquent d'hexagrammes, deux hexagrammes consécutifs ayant les mêmes propriétés que H , H' .

Si l'on donne enfin au plan Π des positions spéciales par rapport aux tétraèdres $\theta_{\sigma\beta}$ fondamentaux, on obtient des hexagrammes spéciaux, qu'il serait intéressant d'étudier.

§ 2.

Autre extension des groupes de l'hexagramme pour 6 points d'une courbe gauche de 3^{me} ordre.

85. Soient donnés 6 points $1, 2, 3, 4, 5, 6$ d'une courbe gauche C^3 de 3^{me} ordre. Nous avons donné déjà une extension des groupes de l'hexagramme dans le chapitre II, § 7, en projetant les figures de l'espace à 5 dimensions R_5 sur l'espace à 3 dimensions.

Les théorèmes de CHASLES et CREMONA sur la C^3 , obtenus au moyen du théo-

⁽¹⁾ En effet, le point $S^{(23456)}$ est le pôle du plan Π par rapport au complexe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_1 = 0,$$

tandis que A est le pôle du plan Π par rapport au complexe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_1 = 0$$

ou

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0.$$

On voit donc que le pôle $1'$ du plan Π par rapport au complexe

$$-2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

est précisément le point harmonique de A par rapport à 1 , $S^{(23456)}$.

rème de PASCAL, peuvent encore fournir par projection une nouvelle extension des propriétés de l'hexagramme.

Étant donné un septième point 7 quelconque de la courbe, les trois points du schéma

12 · 457

23 · 576

34 · 761

si le point 7 se déplace sur la courbe, les plans correspondants passent par une sécante fixe p de la courbe C^3 , qui correspond donc à la droite de PASCAL de l'hexagone 123456, que nous avons désignée aussi par le symbole $\Delta_{12}\Delta_{13}$.

On obtient ainsi 60 sécantes p , qui correspondent au 60 hexagones gauches de C^3 et aux 60 droites de PASCAL. Elles peuvent être représentées par les mêmes symboles que celles-ci.

On déduit tout simplement par projection de l'hexagramme même (*) les théorèmes suivants:

Théorème CCX. À trois droites de PASCAL, se rencontrant en un point de STEINER ou en un point de KIRKMAN, correspondent trois sécantes p , situées sur un hyperboloïde qui contient la courbe C^3 .

Aux 20 points de STEINER G et aux 60 points de KIRKMAN K correspondent respectivement 20 et 60 hyperboloïdes G, K .

Théorème CCXI. À quatre points de STEINER, situés sur une droite de STEINER-PLÜCKER $g_{\alpha\beta}$, correspondent 4 hyperboloïdes, qui se coupent suivant une sécante $g_{\alpha\beta}$ de C^3 .

Théorème CCXII. À trois points de KIRKMAN situés sur une droite de CAYLEY $c_{\alpha\beta\gamma}$, correspondent trois hyperboloïdes K , qui se rencontrent suivant une sécante $c_{\alpha\beta\gamma}$ de la courbe C^3 .

Théorème CCXIII. À quatre droites de CAYLEY passant par un point de SALMON $S_{\alpha\beta}$ correspondent 4 sécantes $c_{\alpha\beta\gamma}$ situées sur un hyperboloïde.

Théorème CCXIV. Aux 6 figures II correspondent 6 figures de 10 sécantes trois à trois sur 10 hyperboloïdes K , qui passent trois à trois par les 10 sécantes p .

(*) D'après la remarque faite au n.º 6, une courbe gauche de 3^me ordre est toujours contenue dans un espace à 3 dimensions.

Des systèmes $[Zz]_m$ en nombre infini on déduit aussi par projection un nombre infini de systèmes de 60 sécantes z de C^3 et de 60 hyperboloïdes Z passant par la courbe C^3 .

J'ai donné ces théorèmes pour faire voir que l'on peut aussi généraliser les groupes de l'hexagramme de cette manière pour la C^3 .

On peut aussi faire correspondre aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, par ex. 12·34·56 l'hyperboloïde déterminé par les côtés 12, 34, 56 de l'hexagone de C^3 . On a alors 15 hyperboloïdes $\Delta_{\alpha\beta}$. Ils se coupent deux à deux suivant 60 courbes de 4^{me} ordre, qui passent toutes par les 6 sommets de l'hexagone. À un point de STEINER ou à un point de KIRKMAN correspondent deux points, etc.

Si nous projetons l'hexagone 1, 2, 3, 4, 5, 6 de C^3 par un point quelconque S_0 sur un plan, on obtient sur ce plan 6 points, qu'on peut regarder en général comme quelconque. Au moyen de la géométrie descriptive, nous pouvons aussi déterminer les projections p' des 60 droites p , c' des 20 droites c , et g' des 15 droites g . De même, on peut construire les contours apparents des 20 hyperboloïdes G et des 60 hyperboloïdes K , qui sont simplement des coniques touchant respectivement trois droites p' . Les coniques S touchent aussi 4 à 4 les droites g' et les coniques K touchent trois à trois les 20 droites c' .

On voit que cela donne aussi une extension des groupes de l'hexagramme pour 6 points quelconques du plan. Ces six points se réduisent à 5 lorsqu'on prend le point de projection S_0 sur un des 15 côtés de l'hexagramme de C^3 . La courbe même est projetée sur une courbe rationnelle de 3^{me} ordre C^3 (1).

§ 3.

Théorème analogue à celui de Pascal pour 8 points de la courbe rationnelle du 4^{me} ordre dans l'espace à 4 dimensions. — Corollaire (2).

86. Cette courbe est déterminée par 7 points quelconques de l'espace R_4 . Soit 8 un autre point de la courbe et considérons l'octagone 12345678, et

(1) On voit clairement par ce qui précède, que la méthode très simple que j'ai développée dans ce paragraphe n'a rien à faire avec les méthodes que j'ai développées dans les paragraphes précédents.

(2) A., Math. Annalen, vol. 19, l. c. On trouve développé dans ce Mémoire les propriétés principales des courbes rationnelles d'un espace de dimensions quelconques. Le théorème que je donne ici se déduit par projection de la propriété de 7 points d'une cubique gauche.

formons le schéma

$$\left. \begin{array}{l} 123 \cdot 567 = A_0^{(1)} \\ 234 \cdot 678 = A_0^{(2)} \\ 345 \cdot 781 = A_0^{(3)} \\ 456 \cdot 812 = A_0^{(4)} \end{array} \right\} \quad (1)$$

On voit que les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$, où se rencontrent respectivement, les plans 123, 567, etc. des couples (1) (car dans R_4 deux plans en général se rencontrent seulement en un point), forment un cycle; c'est à dire que si l'on continue à former, en partant de 456 · 812, un autre couple de plans de la même manière qu'on a formé le second couple du premier, ou le troisième du second, on obtient le premier couple. Ce schéma a donc les mêmes propriétés que le schéma

$$\begin{array}{l} 12 \cdot 45 \\ 23 \cdot 56 \\ 34 \cdot 61 \end{array}$$

de la droite de PASCAL de l'hexagone 123456 dans le plan R_2 .

On peut démontrer le théorème suivant:

Théorème CCV. Si 12345678 sont huit points quelconques de la courbe rationnelle C^4 dans l'espace à 4 dimensions R_4 et que l'on forme le schéma

$$\begin{array}{l} 123 \cdot 567 \\ 234 \cdot 678 \\ 345 \cdot 781 \\ 456 \cdot 812 \end{array}$$

les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$ où se rencontrent respectivement les plans des quatre couples du schéma forment un tétraèdre, dont les 4 faces coupent les diagonales 15, 26, 37, 48 de l'octagone.

Le 4 points déterminent un espace S_3 à trois dimensions. Dans tout l'octa-gramme il y a 2520 de ces espaces.

Corollaire. Si les droites 12, 34, 56, 78 sont tangentes à la courbe C^4 , les quatre points $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$, $A_0^{(4)}$ sont situés sur un plan, qui ne passe par aucun des 4 points de contact, et qui n'est pas contenu dans l'espace à trois dimensions déterminé par ces quatre points.

Ces théorèmes se laissent aussi étendre aux courbes rationnelles C^6, C^8, \dots, C^{2m} des espaces R_6, R_8, \dots, R_{2m} . Dès lors le passage de C^{2m} à C^{2m+1} se fait comme dans le théorème CHASLES-CREMONA pour C^3 qu'on déduit de C^2 . La projection dans R_3 et R_2 donne des théorèmes pour les courbes rationnelles (¹).

Leipzig, juillet 1881.

ADDITION.

AUTRES GROUPES DE SIX LETTRES.

87. Dans le groupe I des triangles Δ_{12} , n.° 49, il y a aussi les trois groupes suivants :

VIII* 1, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56), (34)(56).

Dans le groupe I il y a un seul de ces groupes, et il ne peut pas être engendré par deux substitutions. On peut l'engendrer par trois substitutions, par ex. (12), (12)(34), (12)(56).

VIII * 1, (1625), (16)(25)(34), (12)(56), (1526),
(34)(56), (15)(26)(34), (12)(34).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (1625), (16)(25)(34). Dans le groupe I il y a trois de ces groupes.

VIII*** 1, (12), (34), (56), (12)(34), (12)(56),
(34)(56), (12)(34)(56), (15)(26), (16)(25), (15)(26)(34),
(16)(25)(34), (1625), (1526), (1625)(34), (1526)(34).

Ce groupe contient 8 substitutions paires et 8 impaires, et il ne peut pas être engendré par deux substitutions. Dans le groupe I il y a trois de ces groupes.

Dans le groupe des points de STEINER, par ex. XVIII, est contenu le groupe

(¹) J'ai démontré dans mon *Mémoire des Math. Annalen*, l. c., que d'une courbe rationnelle C^n de R_n , on déduit par projection toutes les espèces des courbes rationnelles de n^m ou d'un ordre moindre de l'espace R_3 et du plan.

suivant des 18 substitutions :

1, (135), (246), (153), (264), (135)(246), (135)(264), (153)(246),
 (153)(264), (14)(25)(36), (163254), (125634), (143652), (145236),
 (165432), (16)(23)(45), (12)(34)(56), (123456).

Ce groupe peut être engendré par deux substitutions, par ex. (135), (123456) ou bien (135), (12)(34)(56). Il contient 9 substitutions paires et 9 impaires.

Dans le groupe XVIII il y a deux de ces groupes.

Une chose très utile à faire ce serait d'étudier les groupes géométriques, que nous venons de trouver, par la méthode synthétique, et comme celle-ci rend les choses plus visibles, on pourra trouver peut-être des théorèmes sur ces groupes qui échappent à l'analyse et qui auront leurs correspondants dans la théorie des substitutions.

TABLE DES MATIÈRES (*).

PRÉAMBULE et PRÉFACE	Pag. 93-102
--------------------------------	-------------

CHAPITRE I.

Généralités sur l'interprétation géométrique de la théorie
des substitutions de n lettres.

§ 1.

*Étude de la correspondance projective entre deux espaces à $n - 1$ dimensions
dans un espace à $n - 1$ dimensions.*

Nr. 1.	Notations	Pag.	111
" 2-3.	Homographies	"	112
" 4.	Homographies cycliques	"	115
" 5-6.	Théorèmes sur les groupes de m^{n-1} points qu'on obtient en multipliant de toutes les manières possibles les coordonnées homogènes y_1, y_2, \dots, y_n d'un point dans R_{n-1} par les racines m^{es} de l'unité	"	117
" 7.	Théorèmes qui dérivent si au lieu de considérer un point, on considère une surface à $n - 2$ dimensions du 2^{d} degré	"	119

§ 2.

" 8-9.	<i>Interprétation géométrique d'une substitution quelconque, particulièrement de la forme (12) (34)... (m-1, m)</i>	"	120
--------	---	---	-----

§ 3.

" 10.	<i>Substitutions cycliques</i>	"	126
-------	--	---	-----

§ 4.

" 11-12.	<i>Théorèmes généraux sur les groupes qu'on obtient en permutant moins de n indices</i>	"	130
----------	--	---	-----

§ 5.

" 13-15.	<i>Représentation des groupes de substitutions</i>	"	132
----------	--	---	-----

§ 6.

Projections sur un espace à trois dimensions et sur un plan.

" 16.	Généralités	"	136
" 17-18.	Projections sur un espace à trois dimensions	"	137
" 19.	Projections sur un plan	"	140

(*) Cette table est un peu plus détaillée que celle qui est jointe au travail envoyé par moi à l'Académie de Belgique.

§ 7.

Nr. 20-21.	<i>Application aux courbes et aux surfaces dans l'espace à 3 dimensions et sur le plan</i>	Pag.	141
------------	--	------	-----

CHAPITRE II.

**Première interprétation géométrique des groupes
des substitutions de 6 lettres en relation avec les groupes de l'Hexagramme mystique
dans les espaces à 5, 4, 3 dimensions et dans le plan.**

§ 1.

	<i>Groupes principaux de l'Hexagramme. — Emploi d'une notation nouvelle.</i>		
Nr. 22.	Généralités	Pag.	143
" 23.	Droites de Pascal	"	144
" 24.	Points de Steiner	"	ivi
" 25.	Points de Kirkman	"	145
" 26.	Figures Π	"	146
" 27.	Droites de Cayley	"	148
" 28-29.	Des figures déterminées par deux figures quelconques Π . Systèmes $[Zz]_m$	"	150

§ 2.

" 30-33.	<i>Groupes des substitutions de trois lettres et interprétations géométriques</i>	"	153
----------	---	---	-----

§ 3.

	<i>Groupes des substitutions de quatre lettres et interprétations géométriques.</i>		
" 34.	Groupes de 4 lettres	"	157
" 35-38.	Interprétation géométrique dans l'espace à trois dimensions	"	158
" 39-40.	Interprétation géométrique dans le plan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$	"	163
" 41.	Projection sur un plan quelconque par un point également quelconque de l'espace R_3	"	166

§ 4.

	<i>Groupes des substitutions de 5 lettres. — Interprétations géométriques dans l'espace à 4, 3 dimensions et dans le plan.</i>		
" 42.	Groupes des substitutions de 5 lettres	"	167
" 43-45.	Interprétation géométrique dans l'espace R_4 à 4 dimensions	"	168
" 46-47.	Interprétation dans l'espace unité et dans un espace à trois dimensions quelconque	"	172
" 48.	Projection sur un plan	"	176

§ 5.

	<i>Groupes des substitutions de 6 lettres en relation avec l'Hexagramme.</i>		
" 49.	Généralités. — Groupes des triangles $\Delta_{\alpha\beta}$, des droites de Steiner-Plücker et des points de Salmon	"	176
" 50-51.	Groupes des droites de Pascal et des points Z des systèmes $[Zz]_{2m}$ et des droites z des systèmes $[Zz]_{2m+1}$	"	178
" 52.	Groupes des points de Steiner et des droites de Cayley	"	188
" 53.	Groupes des 6 figures Π	"	186
" 54.	Groupes des points de Kirkman et des droites z des systèmes $[Zz]_{2m}$ et des points Z des systèmes $[Zz]_{2m+1}$	"	188

§ 6.

Interprétations géométriques dans l'espace R_5 en correspondance avec l'Hexagramme.

Nr. 55-56.	Propriétés générales des 720 points $(S)_{720}$ qu'on obtient dans l'espace R_5 en permutant les 6 coordonnées homogènes d'un point	Pag.	190
" 57-58.	Deux groupes de 16 points $(B)_{16}, (C)_{16}$	"	193
" 59-60.	Des 15 surfaces $\Delta_{\alpha\beta}$ du 2 ^d degré à 4 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$, correspondant aux triangles $\Delta_{\alpha\beta}$ de l'Hexagramme.	"	197
" 61-63.	Des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta}$ du 4 ^m e ordre à 3 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ correspondant aux droites de Pascal, aux droites z_{2m+1} et aux points Z_{2m}	"	200
" 64-65.	Des 20 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\gamma} \Delta_{\beta\gamma}$ du 6 ^m e ordre à 2 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ correspondant aux 20 points de Steiner et aux droites de Cayley	"	203
" 66.	Des 6 configurations Π qui correspondent aux 6 figures Π du système Pascal-Kirkman ou d'un système quelconque $[Zz]_m$	"	205
" 67-69.	Des 60 surfaces $\Delta_{\alpha\beta} \Delta_{\gamma\delta} \Delta_{\epsilon\zeta}$ du 8 ^m e ordre à 2 dimensions et des groupes de $(S)_{720}$ qui correspondent aux 60 points de Kirkman, aux 60 points Z_{2m+1} ou aux 60 droites z_{2m}	"	206

§ 7.

Projections des figures obtenues dans l'espace à 5 dimensions sur l'espace à 3 dimensions et sur le plan.

" 70-73.	Projections sur l'espace à 3 dimensions.	"	209
" 74.	Projection sur un plan.	"	213

CHAPITRE III.

Autres interprétations géométriques des groupes des substitutions de 6 lettres.

§ 1.

Interprétation géométrique au moyen de 6 complexes linéaires deux à deux en involution dans R_3 .

Nr. 75-76.	Généralités.	Pag.	215
" 77.	Des 15 tétraèdres et des surfaces de 2 ^d degré $\theta_{\alpha\beta}$	"	218
" 78.	Groupes correspondant aux droites de Pascal.	"	222
" 79.	Groupes correspondant aux points de Steiner.	"	ivi
" 80-82.	Groupes correspondant aux figures Π	"	224
" 83-84.	Section de la figure avec un plan	"	225

§ 2.

" 85	<i>Autre extension des groupes de l'hexagramme pour 6 points d'une courbe gauche du 3^me ordre.</i>	"	228
------	---	---	-----

§ 3.

" 86.	<i>Théorème analogue à celui de Pascal pour 8 points de la courbe rationnelle du 4^me ordre dans l'espace à 4 dimensions. — Corollaires</i>	"	230
" 87.	ADDITION. — Autres groupes de six lettres	"	232