Sulle equazioni a derivate parziali del second' ordine a tre variabili indipendenti.

Di

G. Vivanti.

Il presente lavoro è un tentativo d'estensione alle equazioni con tre variabili indipendenti del metodo d'integrazione di Monge e Ampère. In questo caso — almeno fintantochè la geometria differenziale dello spazio rigato non sia più progredita — ci manca il prezioso concorso dell' intuizione geometrica, che ha permesso di raggiungere nella teoria delle equazioni a due variabili indipendenti la più grande semplicità ed eleganza*). Ciò valga a scusare la lunghezza dei calcoli che si dovranno sviluppare nel seguito.

Nel § 1 si stabilisce la forma generale delle equazioni che ammettono un integrale intermedio contenente una funzione di due argomenti.

Nel § 2 si riduce il problema della ricerca d'un integrale intermedio a quello dell' integrazione d'un sistema d'equazioni a differenziali totali non lineari.

Nel § 3 si determinano le condizioni sotto le quali questo sistema può ridursi ad un sistema lineare, e si effettua tale riduzione; nel successivo § 4 si passa da questo ad un sistema d'equazioni lineari omogenee a derivate parziali, e si studiano le proprietà di questo sistema e le sue condizioni d'integrabilità.

Nel § 5 si dimostra come i risultati ottenuti sieno validi anche quando, per l'annullarsi di qualche coefficiente, taluni dei passaggi analitici effettuati cessino di essere legittimi. Si studiano pure le trasformazioni di Legendre e di Ampère.

Nei §§ 6 e 7 si esaminano certi casi speciali, in cui è possibile la riduzione ad uno o più sistemi lineari anche sotto condizioni diverse

---

*) Vedasi l'eccellente opera di Goursat: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes*, T. I, Paris 1896.

da quelle trovate in generale. Il secondo di tali casi è quello dell' equazione lineare rispetto alle derivate seconde.

Finalmente nel § 8 si sviluppano due esempi ad illustrazione delle teorie esposte*).

---

*) Devo alla cortesia del Dott. Ed. von Weber dell' Università di Monaco l'indicazione di alcuni lavori che hanno qualche attinenza coll' argomento del presente scritto.

A. V. Bäcklund (*Ueber partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung, die intermediäre erste Integrale besitzen*, Math. Ann. XI p. 199—241, XIII p. 68—108; *Zur Theorie der Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, Math. Ann. XIII p. 411—428) studia con metodo essenzialmente geometrico le equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque e con un numero qualunque di variabili. Sia:

$$F(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots, p_{k_1, k_2, \ldots}, \ldots, p_{k_1, k_2, \ldots, k_m}, \ldots) = 0$$

un' equazione d'ordine m con n variabili indipendenti, essendo:

$$p_{k_1, k_2, \ldots, k_r} = \frac{\partial^r z}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_r}}.$$

Si indichi con f una funzione incognita delle z, x_i e delle derivate parziali di z sino all' ordine $(m-1)$-esimo, con $\frac{df}{dx_i}$ la derivata *totale* di f rispetto ad x_i, cioè la derivata presa tenendo conto che z e le sue derivate sono funzioni di x_i; $\frac{df}{dx_i}$ sarà una funzione lineare omogenea delle derivate parziali prime di f rispetto ai suoi argomenti avente per coefficienti derivate parziali di z sino all' ordine m. Fra le:

$$F = 0, \quad \frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{df}{dx_n} = 0$$

si eliminino n delle derivate di z d'ordine m, e si esprima che l'equazione risultante è soddisfatta identicamente rispetto alle restanti derivate di quest' ordine. Si otterrà così un sistema (A) d'equazioni omogenee a derivate parziali del primo ordine rispetto ad f considerata come funzione de' suoi argomenti. Perchè $F = 0$ ammetta un integrale primo generale, devono aver luogo le seguenti circostanze:

1° Il numero delle equazioni del sistema (A) dev' essere eguale a quello delle derivate di z d'ordine $m - 1$;

2° Le equazioni del sistema (A) devono ammettere ∞^n integrali comuni.

Se queste equazioni sono soddisfatte, *ciò che si può verificare per via puramente algebrica*, le ∞^n soluzioni del sistema (A) costituiscono l'integrale primo generale della $F = 0$.

V. Sersawy (*Die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Grundlinien einer allgemeinen Integrationsmethode*, Denkschr. d. Wiener Akad., Math.-Naturw. Cl., B. XLIX, T. II, p. 1—104) espone un metodo generale per l'integrazione d'una equazione a derivate parziali d'ordine qualunque e con un numero qualunque di variabili. Egli tenta di ridurre in ogni caso il problema all' integrazione d'un sistema d'equazioni ordinarie simultanee. Ciò però non è possibile in generale se non per le equazioni del primo ordine con un numero qualunque

§ 1.

Sia z una funzione delle tre variabili x_1, x_2, x_3, e poniamo:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_h} = p_{ih} = p_{hi}.$$

Sieno inoltre u, v, w tre funzioni delle z, x_i, p_i, φ una funzione arbitraria di due argomenti. Noi ci proponiamo di costruire l'equazione a derivate parziali del secondo ordine avente *l'integrale intermedio generale:*

(1) $$u = \varphi(v, w).$$

Perciò stabiliamo le seguenti notazioni:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z} = u_{x_i}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial v}{\partial z} = v_{x_i}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial w}{\partial z} = w_{x_i};$$

$$\frac{\partial u}{\partial p_i} = u_{p_i}, \qquad \frac{\partial v}{\partial p_i} = v_{p_i}, \qquad \frac{\partial w}{\partial p_i} = w_{p_i};$$

$$\begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{x_3} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{x_3} \end{vmatrix} = a, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & u_{p_3} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & v_{p_3} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & w_{p_3} \end{vmatrix} = d,$$

$$\begin{vmatrix} u_{x_2} & u_{x_3} & u_{p_i} \\ v_{x_2} & v_{x_3} & v_{p_i} \\ w_{x_2} & w_{x_3} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{1i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{x_3} & u_{x_1} & u_{p_i} \\ v_{x_3} & v_{x_1} & v_{p_i} \\ w_{x_3} & w_{x_1} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{2i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{p_i} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{p_i} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{p_i} \end{vmatrix} = b_{3i},$$

$$\begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_3} & u_{x_i} \\ v_{p_2} & v_{p_3} & v_{x_i} \\ w_{p_2} & w_{p_3} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{1i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_3} & u_{p_1} & u_{x_i} \\ v_{p_3} & v_{p_1} & v_{x_i} \\ w_{p_3} & w_{p_1} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{2i}, \qquad \begin{vmatrix} u_{p_1} & u_{p_2} & u_{x_i} \\ v_{p_1} & v_{p_2} & v_{x_i} \\ w_{p_1} & w_{p_2} & w_{x_i} \end{vmatrix} = c_{3i}.$$

Deriviamo ora la (1) rispetto alle tre variabili indipendenti x_1, x_2, x_3; avremo:

---

di variabili, e per quelle d'ordine qualunque con due variabili indipendenti; negli altri casi devono essere soddisfatte certe equazioni di condizione.

I rapporti tra il contenuto del presente lavoro e le ricerche di Bäcklund non sarebbero difficili a porsi in luce. Assai meno facile sarebbe un raffronto col metodo di Sersawy che, per la sua molta generalità, si fonda su sviluppi lunghi e complicati, l'analisi dei quali esigerebbe assai maggior spazio di quello di cui si possa qui disporre.

Citiamo ancora:

Hamburger, *Anwendung einer gewissen Determinantenrelation auf die Integration partieller Differentialgleichungen*, Journ. für die r. u. ang. Math. C, p. 390—404.

Beudon, *Sur l'extension de la méthode de Cauchy aux systèmes d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque*, Comptes Rendus de l'Ac. de Paris CXXI, p. 808—811.

$$u_{x_1} + p_{11} u_{p_1} + p_{12} u_{p_2} + p_{13} u_{p_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} [v_{x_1} + p_{11} v_{p_1} + p_{12} v_{p_2} + p_{13} v_{p_3}]$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w} [w_{x_1} + p_{11} w_{p_1} + p_{12} w_{p_2} + p_{13} w_{p_3}],$$
$$u_{x_2} + p_{12} u_{p_1} + p_{22} u_{p_2} + p_{23} u_{p_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} [v_{x_2} + p_{12} v_{p_1} + p_{22} v_{p_2} + p_{23} v_{p_3}]$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w} [w_{x_2} + p_{12} w_{p_1} + p_{22} w_{p_2} + p_{23} w_{p_3}],$$
$$u_{x_3} + p_{13} u_{p_1} + p_{23} u_{p_2} + p_{33} u_{p_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} [v_{x_3} + p_{13} v_{p_1} + p_{23} v_{p_2} + p_{33} v_{p_3}]$$
$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial w} [w_{x_3} + p_{13} w_{p_1} + p_{23} w_{p_2} + p_{33} w_{p_3}],$$

da cui eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial w}$ e scambiando, per maggior evidenza, le linee colle colonne nel determinante risultante:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} u_{x_1} + p_{11} u_{p_1} + p_{12} u_{p_2} + p_{13} u_{p_3}, & u_{x_2} + p_{12} u_{p_1} + p_{22} u_{p_2} + p_{23} u_{p_3}, & u_{x_3} + p_{13} u_{p_1} + p_{23} u_{p_2} + p_{33} u_{p_3}, \\ v_{x_1} + p_{11} v_{p_1} + p_{12} v_{p_2} + p_{13} v_{p_3}, & v_{x_2} + p_{12} v_{p_1} + p_{22} v_{p_2} + p_{23} v_{p_3}, & v_{x_3} + p_{13} v_{p_1} + p_{23} v_{p_2} + p_{33} v_{p_3}, \\ w_{x_1} + p_{11} w_{p_1} + p_{12} w_{p_2} + p_{13} w_{p_3}, & w_{x_2} + p_{12} w_{p_1} + p_{22} w_{p_2} + p_{23} w_{p_3}, & w_{x_3} + p_{13} w_{p_1} + p_{23} w_{p_2} + p_{33} w_{p_3} \end{vmatrix} = 0,$$

che è l'equazione del second' ordine cercata.

Poniamo:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = \Delta,$$

ed indichiamo con P_{ih} il minore complementare dell' elemento p_{ih} del determinante Δ; sarà $P_{ih} = P_{hi}$. Dopo ciò si ottiene sviluppando la (2):

$$a + b_{11} p_{11} + b_{22} p_{22} + b_{33} p_{33} + (b_{12} + b_{21}) p_{12} + (b_{13} + b_{31}) p_{13}$$
$$+ (b_{23} + b_{32}) p_{23} + c_{11} P_{11} + c_{22} P_{22} + c_{33} P_{33} + (c_{12} + c_{21}) P_{12}$$
$$+ (c_{13} + c_{31}) P_{13} + (c_{23} + c_{32}) P_{23} + d\Delta = 0.$$

Pertanto la forma generale delle equazioni considerate è:

$$(3) \quad R_{11} p_{11} + R_{22} p_{22} + R_{33} p_{33} + 2 R_{12} p_{12} + 2 R_{13} p_{13} + 2 R_{23} p_{23}$$
$$+ S_{11} P_{11} + S_{22} P_{22} + S_{33} P_{33} + 2 S_{12} P_{12} + 2 S_{13} P_{13}$$
$$+ 2 S_{23} P_{23} + T\Delta + U = 0;$$

e, se (1) è l'integrale intermedio, si ha:

$$(4) \qquad \frac{R_{ii}}{b_{ii}} = \frac{2 R_{ih}}{b_{ih} + b_{hi}} = \frac{S_{ii}}{c_{ii}} = \frac{2 S_{ih}}{c_{ih} + c_{hi}} = \frac{T}{d} = \frac{U}{a}.$$

Reciprocamente, data un' equazione (3), se si possono trovare tre funzioni u, v, w delle z, x_i e p_i le quali soddisfacciano alle (4), la (1) è un integrale intermedio della (3). Infatti in virtù delle (4) la (3) assume immediatamente la forma (2); ma, poichè il determinante funzionale delle u, v, w è nullo, deve esistere tra esse una relazione della forma (1).

Il problema della ricerca d'un integrale intermedio della (3) è ridotto così a quello della determinazione di tre funzioni u, v, w che soddisfacciano alle (4).

§ 2.

Dalle:

$$dp_i = p_{i1}\,dx_1 + p_{i2}\,dx_2 + p_{i3}\,dx_3$$

segue:

$$p_{11} = \frac{1}{dx_1}(dp_1 - p_{12}\,dx_2 - p_{13}\,dx_3),$$
$$p_{22} = \frac{1}{dx_2}(dp_2 - p_{23}\,dx_3 - p_{21}\,dx_1),$$
$$p_{33} = \frac{1}{dx_3}(dp_3 - p_{31}\,dx_1 - p_{32}\,dx_2).$$

Introducendo queste espressioni nelle P_{ih}, e ponendo:

$$p_{12}p_{13}\,dx_1 + p_{23}p_{21}\,dx_2 + p_{31}p_{32}\,dx_3 = \delta\Theta,$$

si trova:

$$P_{11} = \frac{1}{dx_2\,dx_3}\left[dp_2\,dp_3 - dp_2(p_{13}\,dx_1 + p_{23}\,dx_2) - dp_3(p_{12}\,dx_1 + p_{32}\,dx_3) + \delta\Theta\;dx_1\right],$$

$$P_{22} = \frac{1}{dx_3\,dx_1}\left[dp_3\,dp_1 - dp_3(p_{21}\,dx_2 + p_{31}\,dx_3) - dp_1(p_{23}\,dx_2 + p_{13}\,dx_1) + \delta\Theta\;dx_2\right],$$

$$P_{33} = \frac{1}{dx_1\,dx_2}\left[dp_1\,dp_2 - dp_1(p_{32}\,dx_3 + p_{12}\,dx_1) - dp_2(p_{31}\,dx_3 + p_{21}\,dx_2) + \delta\Theta\;dx_3\right],$$

$$P_{23} = \frac{1}{dx_1}\left[-p_{23}\,dp_1 + \delta\Theta\right],$$

$$P_{31} = \frac{1}{dx_2}\left[-p_{31}\,dp_2 + \delta\Theta\right],$$

$$P_{12} = \frac{1}{dx_3}\left[-p_{12}\,dp_3 + \delta\Theta\right],$$

inoltre:

$$\Delta = \frac{1}{dx_1}\begin{vmatrix} p_{11}\,dx_1 & p_{12} & p_{13} \\ p_{12}\,dx_1 & p_{22} & p_{23} \\ p_{13}\,dx_1 & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{dx_1}\begin{vmatrix} dp_1 & p_{12} & p_{13} \\ dp_2 & p_{22} & p_{23} \\ dp_3 & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{dx_1}(P_{11}\,dp_1 + P_{12}\,dp_2 + P_{13}\,dp_3)$$

$$= \frac{1}{dx_1\,dx_2\,dx_3}\Big\{dp_1\,dp_2\,dp_3 - (p_{21}\,dx_2 + p_{31}\,dx_3)\,dp_2\,dp_3 - (p_{32}\,dx_3 + p_{12}\,dx_1)\,dp_3\,dp_1 - (p_{13}\,dx_1 + p_{23}\,dx_2)\,dp_1\,dp_2 + (dp_1\,dx_1 + dp_2\,dx_2 + dp_3\,dx_3)\,\delta\Theta\Big\}.$$

Fatte queste sostituzioni, il primo membro della (3) non conterrà più altre derivate seconde che p_{12}, p_{13}, p_{23}, e sarà una funzione del 2^0 grado di queste. Scriviamo brevemente il risultato della sostituzione, moltiplicato per $dx_1\, dx_2\, dx_3$, così:

$$A + B + C = 0,$$

dove con A, B, C vogliamo indicare le parti del primo membro che sono rispettivamente dei gradi 0, 1, 2 rispetto alle p_{12}, p_{13}, p_{23}.

Troveremo

$$\begin{aligned} A &= R_{11}\, dp_1\, dx_2 dx_3 + R_{22}\, dp_2\, dx_3\, dx_1 + R_{33}\, dp_3\, dx_1\, dx_2 + S_{11}\, dx_1\, dp_2\, dp_3 \\ &\quad + S_{22}\, dx_2\, dp_3\, dp_1 + S_{33}\, dx_3\, dp_1\, dp_2 + T dp_1\, dp_2\, dp_3 + U dx_1\, dx_2\, dx_3, \\ C &= \delta\Theta [S_{11}\, dx_1^2 + S_{22}\, dx_2^2 + S_{33}\, dx_3^2 + 2 S_{12}\, dx_1\, dx_2 + 2 S_{13}\, dx_1\, dx_3 \\ &\quad + 2 S_{23}\, dx_2\, dx_3 + T(dp_1\, dx_1 + dp_2\, dx_2 + dp_3\, dx_3)] = K\delta\Theta, \\ B &= -H_1 p_{23} - H_2 p_{31} - H_3 p_{12}, \end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned} H_1 &= R_{22}\, dx_1\, dx_3^2 + R_{33}\, dx_1\, dx_2^2 - 2 R_{23}\, dx_1 dx_2 dx_3 \\ &\quad + S_{11}\, dx_1 (dp_2\, dx_2 + dp_3\, dx_3) + S_{22}\, dp_1\, dx_2^2 + S_{33}\, dp_1\, dx_3^2 \\ &\quad + 2 S_{23}\, dp_1\, dx_2\, dx_3 + T dp_1 (dp_2\, dx_2 + dp_3\, dx_3), \end{aligned}$$

e H_2, H_3 si deducono da H_1 permutando ciclicamente gli indici 1, 2, 3 e convenendo che R_{ik} ed R_{ki} abbiano lo stesso significato, e così S_{ik} ed S_{ki}.

Se formiamo la combinazione $H_1 - K dp_1$, troviamo che essa contiene il fattore dx_1; indicandone il valore con $L_1\, dx_1$, si ha:

$$\begin{aligned} L_1 = \frac{1}{dx_1} [H_1 - K dp_1] &= R_{22}\, dx_3^2 + R_{33}\, dx_2^2 - 2 R_{23}\, dx_2\, dx_3 \\ &\quad + S_{11} (-dp_1\, dx_1 + dp_2\, dx_2 + dp_3\, dx_3) \\ &\quad - 2 S_{12}\, dp_1\, dx_2 - 2 S_{13}\, dp_1\, dx_3 - T dp_1^2. \end{aligned}$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} L_2 = \frac{1}{dx_2} [H_2 - K dp_2] &= R_{33}\, dx_1^2 + R_{11}\, dx_3^2 - 2 R_{31}\, dx_3\, dx_1 \\ &\quad + S_{22} (-dp_2\, dx_2 + dp_3\, dx_3 + dp_1\, dx_1) \\ &\quad - 2 S_{23}\, dp_2\, dx_3 - 2 S_{21}\, dp_2\, dx_1 - T dp_2^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 = \frac{1}{dx_3} [H_3 - K dp_3] &= R_{11}\, dx_2^2 + R_{22}\, dx_1^2 - 2 R_{12}\, dx_1\, dx_2 \\ &\quad + S_{33} (-dp_3\, dx_3 + dp_1\, dx_1 + dp_2\, dx_2) \\ &\quad - 2 S_{31}\, dp_3\, dx_1 - 2 S_{32}\, dp_3\, dx_2 - T dp_3^2. \end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che, se:

$$u = \text{cost.}, \quad v = \text{cost.}, \quad w = \text{cost.} \tag{5}$$

sono tre integrali del sistema d'equazioni a differenziali totali:

(6) $A=0,\ L_1=0,\ L_2=0,\ L_3=0,\ dz-p_1dx_1-p_2dx_2-p_3dx_3=0,$

le u, v, w soddisfanno alle relazioni (4).

Dalla prima delle (5) segue:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial u}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial u}{\partial p_2}dp_2 \\ +\frac{\partial u}{\partial p_3}dp_3=0,$$

ossia, tenendo conto dell' ultima delle (6):

$$u_{x_1}dx_1+u_{x_2}dx_2+u_{x_3}dx_3+u_{p_1}dp_1+u_{p_2}dp_2+u_{p_3}dp_3=0.$$

Analogamente:

$$v_{x_1}\,dx_1+v_{x_2}\,dx_2+v_{x_3}\,dx_3+v_{p_1}\,dp_1+v_{p_2}\,dp_2+v_{p_3}\,dp_3=0,$$
$$w_{x_1}dx_1+w_{x_2}dx_2+w_{x_3}dx_3+w_{p_1}dp_1+w_{p_2}dp_2+w_{p_3}dp_3=0.$$

Risolvendo rispetto a dp_1, dp_2, dp_3 si ha, colle notazioni del paragrafo precedente:

$$dp_1=-\frac{1}{d}(c_{11}dx_1+c_{12}dx_2+c_{13}dx_3),$$
$$dp_2=-\frac{1}{d}(c_{21}dx_1+c_{22}dx_2+c_{23}dx_3),$$
$$dp_3=-\frac{1}{d}(c_{31}dx_1+c_{32}dx_2+c_{33}dx_3).$$

Introduciamo queste espressioni nella L_1; avremo:

$$\begin{aligned}L_1d^2=&(S_{11}c_{11}d-Tc_{11}^2)dx_1^2+(R_{33}d^2-S_{11}c_{22}d+2S_{12}c_{12}d-Tc_{12}^2)dx_2^2\\&+(R_{22}d^2-S_{11}c_{33}d+2S_{13}c_{13}d-Tc_{13}^2)\,dx_3^2\\&+\big(S_{11}(c_{12}-c_{21})\,d+2S_{12}c_{11}d-2Tc_{11}c_{12}\big)\,dx_1dx_2\\&+\big(S_{11}(c_{13}-c_{31})\,d+2S_{13}c_{11}d-2Tc_{11}c_{13}\big)\,dx_1dx_3\\&+\big(-2R_{23}d^2-S_{11}(c_{23}+c_{32})\,d+2S_{12}c_{13}d+2S_{13}c_{12}d\\&\qquad-2Tc_{12}c_{13}\big)\,dx_2dx_3.\end{aligned}$$

I coefficienti dei vari prodotti e potenze delle dx_1, dx_2, dx_3 dovendo essere nulli, si avrà:

$$S_{11}c_{11}d-Tc_{11}^2=0, \tag{7}$$
$$R_{33}d^2-S_{11}c_{22}d+2S_{12}c_{12}d-Tc_{12}^2=0, \tag{8}$$
$$R_{22}d^2-S_{11}c_{33}d+2S_{13}c_{13}d-Tc_{13}^2=0, \tag{9}$$
$$S_{11}(c_{12}-c_{21})\,d+2S_{12}c_{11}d-2Tc_{11}c_{12}=0, \tag{10}$$
$$S_{11}(c_{13}-c_{31})\,d+2S_{13}c_{11}d-2Tc_{11}c_{13}=0, \tag{11}$$
$$-2R_{23}d^2-S_{11}(c_{23}+c_{32})d+2S_{12}c_{13}d+2S_{13}c_{12}d-2Tc_{12}c_{13}=0. \tag{12}$$

Dalla (7) segue:

$$\frac{S_{11}}{c_{11}} = \frac{T}{d}; \tag{13}$$

mediante questa relazione si ha tosto dalle (10), (11):

$$\frac{2S_{12}}{c_{12}+c_{21}} = \frac{2S_{13}}{c_{13}+c_{31}} = \frac{T}{d}. \tag{14}$$

Sostituendo nelle (8), (9), esse divengono:

$$R_{33}d^2 - T(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0, \quad R_{22}d^2 - T(c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31}) = 0.$$

Per trasformare queste espressioni, possiamo ricorrere alla nota identità simbolica:

$$(\alpha\beta\gamma)(\alpha\delta\varepsilon) + (\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\varepsilon) + (\alpha\delta\beta)(\alpha\gamma\varepsilon) = 0\,{}^{*)}. \tag{15}$$

Ponendo in questa identità, dapprima:

$$\alpha_1 = u_{p_3}, \quad \alpha_2 = v_{p_3}, \quad \alpha_3 = w_{p_3}; \quad \beta_1 = u_{p_1}, \quad \beta_2 = v_{p_1}, \quad \beta_3 = w_{p_1};$$
$$\gamma_1 = u_{p_2}, \quad \gamma_2 = v_{p_2}, \quad \gamma_3 = w_{p_2}; \quad \delta_1 = u_{x_1}, \quad \delta_2 = v_{x_1}, \quad \delta_3 = w_{x_1};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_2}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_2}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_2},$$

poscia:

$$\alpha_1 = u_{p_2}, \quad \alpha_2 = v_{p_2}, \quad \alpha_3 = w_{p_2}; \quad \beta_1 = u_{p_3}, \quad \beta_2 = v_{p_3}, \quad \beta_3 = w_{p_3};$$
$$\gamma_1 = u_{p_1}, \quad \gamma_2 = v_{p_1}, \quad \gamma_3 = w_{p_1}; \quad \delta_1 = u_{x_3}, \quad \delta_2 = v_{x_3}, \quad \delta_3 = w_{x_3};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_1}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_1}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_1},$$

si ottiene:

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = db_{33}, \quad c_{11}c_{33} - c_{13}c_{31} = db_{22},$$

sicchè le relazioni precedenti divengono:

$$\frac{R_{33}}{b_{33}} = \frac{R_{22}}{b_{22}} = \frac{T}{d}. \tag{16}$$

Infine la (12) diviene, in virtù delle (13), (14):

$$2R_{23}d^2 = T[(c_{31}c_{12} - c_{11}c_{32}) + (c_{21}c_{13} - c_{11}c_{23})].$$

Poniamo nella identità (15), dapprima:

$$\alpha_1 = u_{p_2}, \quad \alpha_2 = v_{p_2}, \quad \alpha_3 = w_{p_2}; \quad \beta_1 = u_{p_3}, \quad \beta_2 = v_{p_3}, \quad \beta_3 = w_{p_3};$$
$$\gamma_1 = u_{p_1}, \quad \gamma_2 = v_{p_1}, \quad \gamma_3 = w_{p_1}; \quad \delta_1 = u_{x_1}, \quad \delta_2 = v_{x_1}, \quad \delta_3 = w_{x_1};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_2}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_2}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_2},$$

poscia:

$$\alpha_1 = u_{p_3}, \quad \alpha_2 = v_{p_3}, \quad \alpha_3 = w_{p_3}; \quad \beta_1 = u_{p_1}, \quad \beta_2 = v_{p_1}, \quad \beta_3 = w_{p_1};$$
$$\gamma_1 = u_{p_2}, \quad \gamma_2 = v_{p}, \quad \gamma_3 = w_{p_2}; \quad \delta_1 = u_{x_3}, \quad \delta_2 = v_{x_3}, \quad \delta_3 = w_{x_3};$$
$$\varepsilon_1 = u_{x_1}, \quad \varepsilon_2 = v_{x_1}, \quad \varepsilon_3 = w_{x_1};$$

---

*) Essa si otterrebbe p. es. facendo $U_1 = \beta$, $U_2 = \gamma$, $U_3 = \delta$, $U_4 = W = \alpha$, $V = \varepsilon$ nell' identità $B' = 0$ a pag. 75 dell' opera: Study, *Methoden zur Theorie der ternären Formen*, Leipzig 1889.

otterremo:

$$c_{31}c_{12}-c_{11}c_{32}=db_{32}, \qquad c_{21}c_{13}-c_{11}c_{23}=db_{23},$$

e quindi:

$$\frac{2R_{23}}{b_{23}+b_{32}}=\frac{T}{d}. \tag{17}$$

Raccogliendo le (13), (14), (16), (17), e le analoghe che si otterrebbero mediante la considerazione delle equazioni $L_2=0$, $L_3=0$, si ha:

$$\frac{S_{ii}}{c_{ii}}=\frac{2S_{ih}}{c_{ih}+c_{hi}}=\frac{R_{ii}}{b_{ii}}=\frac{2R_{ih}}{b_{ih}+b_{hi}}=\frac{T}{d}. \tag{18}$$

Dobbiamo ancora introdurre le espressioni trovate per dp_1, dp_2, dp_3 nell' equazione $A=0$. Il suo primo membro diventa una forma del 3^0 grado nei differenziali dx_1, dx_2, dx_3, ed è facile verificare che i coefficienti dei termini dx_i^3, $dx_i^2dx_h$ sono identicamente nulli in virtù delle (18). L'unico restante, cioè il coefficiente di $dx_1dx_2dx_3$, è:

$$\begin{aligned}&-R_{11}c_{11}d^2-R_{22}c_{22}d^2-R_{33}c_{33}d^2+S_{11}(c_{22}c_{33}+c_{23}c_{32})\,d\\&+S_{22}(c_{33}c_{11}+c_{31}c_{13})\,d+S_{33}(c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21})\,d\\&-T(c_{11}c_{22}c_{33}+c_{11}c_{23}c_{32}+c_{12}c_{21}c_{33}+c_{12}c_{23}c_{31}+c_{13}c_{21}c_{32}+c_{13}c_{22}c_{31})\\&+Ud^3.\end{aligned}$$

Mediante le (18) esso diviene:

$$\begin{aligned}T\{&-b_{11}c_{11}d-b_{22}c_{22}d-b_{33}c_{33}d+c_{11}(c_{22}c_{33}+c_{23}c_{32})\\&+c_{22}(c_{33}c_{11}+c_{31}c_{13})+c_{33}(c_{11}c_{22}+c_{12}c_{21})\\&-(c_{11}c_{22}c_{33}+c_{11}c_{23}c_{32}+c_{12}c_{21}c_{33}+c_{12}c_{23}c_{31}+c_{13}c_{21}c_{32}+c_{13}c_{22}c_{31})\}\\&+Ud^3,\end{aligned}$$

ossia:

$$T\left\{c_{11}\begin{pmatrix}-b_{11}d+c_{22}c_{33}\\-c_{23}c_{32}\end{pmatrix}+c_{22}\begin{pmatrix}-b_{22}d+c_{33}c_{11}\\-c_{31}c_{13}\end{pmatrix}+c_{33}\begin{pmatrix}-b_{33}d+c_{11}c_{22}\\-c_{11}c_{21}\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.-\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix}\right\}+Ud^3.$$

Ora, come si è trovato poc'anzi, le quantità che moltiplicano c_{11}, c_{22}, c_{33} sono nulle, sicchè eguagliando a zero il coefficiente considerato si ha:

$$Ud^3=T\begin{vmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{vmatrix}.$$

Indichiamo per un momento con ξ_i, η_i, ζ_i i minori complementari degli elementi u_{p_i}, v_{p_i}, w_{p_i} del determinante d; sarà:

$$c_{ih} = \xi_i u_{x_h} + \eta_i v_{x_h} + \zeta_i w_{x_h},$$

e il determinante che moltiplica T nell' ultima equazione risulterà essere il prodotto dei due determinanti:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_{x_1} & u_{x_2} & u_{x_3} \\ v_{x_1} & v_{x_2} & v_{x_3} \\ w_{x_1} & w_{x_2} & w_{x_3} \end{vmatrix}.$$

Il secondo di questi è a, il primo ha il valore d^2, sicchè si ha infine:

$$\frac{U}{a} = \frac{T}{d}. \tag{19}$$

Le equazioni (18), (19), che sono identiche alle (4), provano il nostro asserto.

§ 3.

Ridotto così il problema all' integrazione del sistema (6) d'equazioni a differenziali totali, conviene esaminare se e sotto quali condizioni sia possibile trasformare questo sistema in uno o più sistemi d'equazioni *lineari* a differenziali totali.

Cerchiamo di formare una combinazione lineare di due delle L, p. es. L_2 ed L_3, la quale sia decomponibile in due fattori lineari. È chiaro che, affinchè ciò abbia luogo, devono anzitutto elidersi i due termini contenenti dp_1; quindi, in generale, l'unica combinazione che potrà essere decomponibile sarà $-S_{33}L_2 + S_{22}L_3$. Poniamo:

$$\begin{aligned} -S_{33}L_2 + S_{22}L_3 = {} & (S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33})\,dx_1^2 + S_{22}R_{11}\,dx_2^2 - S_{33}R_{11}\,dx_3^2 \\ & + S_{33}T\,dp_2^2 - S_{22}T\,dp_3^2 - 2S_{22}R_{12}\,dx_1\,dx_2 \\ & + 2S_{33}R_{13}\,dx_1\,dx_3 + 2S_{33}S_{12}\,dx_1\,dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{13}\,dx_1\,dp_3 + 2S_{22}S_{33}\,dx_2\,dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{23}\,dx_2\,dp_3 + 2S_{33}S_{23}\,dx_3\,dp_2 \\ & - 2S_{22}S_{33}\,dx_3\,dp_3 \\ = {} & \frac{S_{33}}{T}(\alpha\,dx_1 + \beta\,dx_2 + \gamma\,dx_3 + T\,dp_2 + \delta\,dp_3) \\ & \quad (\alpha'\,dx_1 + \beta'\,dx_2 + \gamma'\,dx_3 + T\,dp_2 + \delta'\,dp_3). \end{aligned}$$

Si avranno le seguenti equazioni di condizione:

$$\frac{S_{33}}{T}\alpha\alpha' = S_{22}R_{22} - S_{33}R_{33}, \tag{20}$$

$$\frac{S_{33}}{T}\beta\beta' = S_{22}R_{11}, \tag{21}$$

$$\frac{S_{33}}{T}\gamma\gamma' = -S_{33}R_{11}, \tag{22}$$

$$(23)\qquad \frac{S_{33}}{T}\,\delta\delta' = -\,S_{22}T,$$

$$(24)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) = -\,2S_{22}R_{12},$$

$$(25)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) = 2S_{33}R_{13},$$

$$(26)\qquad S_{33}(\alpha + \alpha') = 2S_{33}S_{12},$$

$$(27)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\alpha\delta' + \alpha'\delta) = -\,2S_{22}S_{13},$$

$$(28)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\beta\gamma' + \beta'\gamma) = 0,$$

$$(29)\qquad S_{33}(\beta + \beta') = 2S_{22}S_{33},$$

$$(30)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\beta\delta' + \beta'\delta) = -\,2S_{22}S_{23},$$

$$(31)\qquad S_{33}(\gamma + \gamma') = 2S_{33}S_{23},$$

$$(32)\qquad \frac{S_{33}}{T}(\gamma\delta' + \gamma'\delta) = -\,2S_{22}S_{33},$$

$$(33)\qquad S_{33}(\delta + \delta') = 0.$$

Facciamo:

$$\frac{S_{22}}{S_{33}} = \lambda_1^2.$$

Dalle (23), (33) segue:

$$\delta = \lambda_1 T, \quad \delta' = -\,\lambda_1 T.$$

Dopo ciò le (26), (27) divengono:

$$\alpha + \alpha' = 2S_{12}, \quad -\,\alpha + \alpha' = -\,\frac{2S_{13}S_{22}}{S_{33}\lambda_1} = -\,2\lambda_1 S_{13},$$

e si ha di qui:

$$\alpha = S_{12} + \lambda_1 S_{13}, \quad \alpha' = S_{12} - \lambda_1 S_{13}.$$

Dalle (29), (30) segue:

$$\beta + \beta' = 2S_{22}, \quad -\,\beta + \beta' = -\,\frac{2S_{22}S_{23}}{S_{33}\lambda_1} = -\,2\lambda_1 S_{23},$$

quindi:

$$\beta = S_{22} + \lambda_1 S_{23}, \quad \beta' = S_{22} - \lambda_1 S_{23}.$$

E dalle (31), (32):

$$\gamma + \gamma' = 2S_{23}, \quad -\,\gamma + \gamma' = -\,\frac{2S_{22}}{\lambda_1} = -\,2\lambda_1 S_{33},$$

quindi:

$$\gamma = S_{32} + \lambda_1 S_{33} = \frac{1}{\lambda_1}(S_{22} + \lambda_1 S_{23}) = \frac{\beta}{\lambda_1},$$

$$\gamma' = S_{32} - \lambda_1 S_{33} = -\,\frac{1}{\lambda_1}(S_{22} - \lambda_1 S_{23}) = -\,\frac{\beta'}{\lambda_1}.$$

Pertanto la (28) è soddisfatta identicamente, e la (22) è una conseguenza della (21).

Restano le (20), (21), (24), (25). Introducendo le espressioni trovate, si ha dalla (20):

$$S_{33}(S_{12}^2 - \lambda_1^2 S_{13}^2) = T(S_{22} R_{22} - S_{33} R_{33}),$$

ossia, tenendo conto del valore di λ_1^2 e aggiungendo e togliendo nel primo membro $S_{11} S_{22} S_{33}$:

$$S_{22}(S_{11} S_{33} - S_{13}^2) - S_{33}(S_{11} S_{22} - S_{12}^2) = T(S_{22} R_{22} - S_{33} R_{33}).$$

Così dalle (21), (24), (25):

$$S_{22} S_{33} - S_{23}^2 = R_{11} T, \quad S_{12} S_{33} - S_{13} S_{23} = + R_{12} T,$$
$$S_{12} S_{23} - S_{13} S_{22} = R_{13} T.$$

Per scrivere queste equazioni, ed altre che troveremo in seguito, sotto forma più breve, noi porremo:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} = V, \qquad \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{vmatrix} = W,$$

e denoteremo con X_{ih} i minori del primo determinante, con Y_{ih} quelli del secondo. Le relazioni trovate prendono allora la forma seguente:

$$S_{22}\left[\frac{Y_{22}}{T} - R_{22}\right] = S_{33}\left[\frac{Y_{33}}{T} - R_{33}\right], \tag{34}$$

$$\frac{Y_{11}}{R_{11}} = \frac{Y_{12}}{R_{12}} = \frac{Y_{13}}{R_{13}} = T. \tag{35}$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} - S_{33} L_2 + S_{22} L_3 = \frac{S_{33}}{T} \{ & (S_{21} + \lambda_1 S_{31}) dx_1 + (S_{22} + \lambda_1 S_{32}) dx_2 \\ & + (S_{23} + \lambda_1 S_{33}) dx_3 + T\, dp_2 + \lambda_1\, T dp_3 \} \\ \times \{ & (S_{21} - \lambda_1 S_{31}) dx_1 + (S_{22} - \lambda_1 S_{32}) dx_2 \\ & + (S_{23} - \lambda_1 S_{33}) dx_3 + T\, dp_2 - \lambda_1\, T dp_3 \}. \end{aligned}$$

Affinchè anche le combinazioni analoghe:

$$- S_{11} L_3 + S_{33} L_1, \quad - S_{22} L_1 + S_{11} L_{22}$$

sieno decomponibili, dovranno essere soddisfatte le condizioni corrispondenti alle (34), (35). Le seconde possono scriversi:

$$\frac{Y_{ih}}{R_{ih}} = T; \quad (i, h = 1, 2, 3) \tag{36}$$

se queste sono soddisfatte lo è pure la (34), e così le sue analoghe.

Ponendo:

$$\frac{S_{33}}{S_{11}} = \lambda_2^2, \quad \frac{S_{11}}{S_{22}} = \lambda_3^2,$$

donde segue:

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \pm 1,$$

si avrà:

$$-S_{11}L_3+S_{33}L_1=\frac{S_{11}}{T}\{(S_{31}+\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}+\lambda_2 S_{12})dx_2 \\ +(S_{33}+\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3+\lambda_2 T\,dp_1\} \\ \times\{(S_{31}-\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}-\lambda_2 S_{12})dx_2 \\ +(S_{33}-\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3-\lambda_2 T\,dp_1\},$$

$$-S_{22}L_1+S_{11}L_2=\frac{S_{22}}{T}\{(S_{11}+\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}+\lambda_3 S_{22})dx_2 \\ +(S_{13}+\lambda_3 S_{23})dx_3+T\,dp_1+\lambda_3 T\,dp_2\} \\ \times\{(S_{11}-\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}-\lambda_3 S_{22})dx_2 \\ +(S_{13}-\lambda_3 S_{23})dx_3+T\,dp_1-\lambda_3 T\,dp_2\}.$$

Quindi al sistema d'equazioni $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$ potrà sostituirsi il sistema lineare:

$$(S_{21}+\lambda_1 S_{31})dx_1+(S_{22}+\lambda_1 S_{32})dx_2+(S_{23}+\lambda_1 S_{33})dx_3+T\,dp_2 \\ +\lambda_1 T\,dp_3=0,$$

$$(S_{31}+\lambda_2 S_{11})dx_1+(S_{32}+\lambda_2 S_{12})dx_2+(S_{33}+\lambda_2 S_{13})dx_3+T\,dp_3 \\ +\lambda_2 T\,dp_1=0,$$

$$(S_{11}+\lambda_3 S_{21})dx_1+(S_{12}+\lambda_3 S_{22})dx_2+(S_{13}+\lambda_3 S_{23})dx_3+T\,dp_1 \\ +\lambda_3 T\,dp_2=0,$$

dove i segni di λ_1, λ_2, λ_3 sono affatto arbitrari.

Moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente per $-\lambda_3$, $\lambda_3\lambda_1$, 1 e sommiamo; avremo:

$$(1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)[S_{11}dx_1+S_{12}dx_2+S_{13}dx_3+T\,dp_1]=0;$$

questa relazione sarà soddisfatta per tutte le combinazioni di segni delle λ_1, λ_2, λ_3, se si annulla il secondo fattore.

Tenendo conto anche dei risultati analoghi, si vede che il sistema $L_1=0$, $L_2=0$, $L_3=0$, quando si verificano le condizioni (36), è soddisfatto ogniqualvolta lo sia l' unico sistema lineare:

$$(37)\qquad\begin{cases} dp_1+\frac{1}{T}[S_{11}dx_1+S_{12}dx_2+S_{13}dx_3]=0,\\ dp_2+\frac{1}{T}[S_{21}dx_1+S_{22}dx_2+S_{23}dx_3]=0,\\ dp_3+\frac{1}{T}[S_{31}dx_1+S_{32}dx_2+S_{33}dx_3]=0.\end{cases}$$

Sostituendo in $A=0$, sviluppando e riducendo coll' aiuto delle (36), quest' equazione prende la forma:

$$\frac{1}{T^2}[-(R_{11}S_{11}+R_{22}S_{22}+R_{33}S_{33})T+S_{11}(S_{22}S_{33}+S_{23}^2) \\ +S_{22}(S_{33}S_{11}+S_{31}^2)+S_{33}(S_{11}S_{22}+S_{12}^2) \\ -(S_{11}S_{22}S_{33}+S_{11}S_{23}^2+S_{12}S_{23}S_{13}+S_{12}^2S_{33}+S_{13}S_{12}S_{23}+S_{13}^2S_{22}) \\ +UT^2]\,dx_1\,dx_2\,dx_3=0.$$

La quantità tra parentesi quadre può scriversi:

$$-(R_{11}S_{11}+R_{22}S_{22}+R_{33}S_{33})T+S_{11}(S_{22}S_{33}-S_{23}^2)+S_{22}(S_{33}S_{11}-S_{31}^2)$$
$$+S_{33}(S_{11}S_{22}-S_{12}^2)-W+UT^2;$$

ma in virtù delle (36) tutti i termini meno i due ultimi si distruggono.

Quindi l'equazione $A=0$ sarà identicamente soddisfatta se:

$$W=UT^2; \tag{38}$$

in caso diverso, essa si decomporrebbe nelle tre: $dx_1=0$, $dx_2=0$, $dx_3=0$, e si avrebbe, oltre alle (37) ed alla $dz-\sum_{i=1}^{3} p_i\,dx_i=0$, un' altra equazione, cioè 5 equazioni indipendenti, il che è impossibile.

Dalle (36), (38) possono dedursi altre equazioni che sono, in qualche modo, ad esse reciproche. Denotiamo per un istante con $|Y|$ il determinante delle Y_{ih}, con $\overline{Y}_{ih}$ il minore complementare di Y_{ih} in questo determinante; segue dalle (36):

$$\overline{Y}_{ih}=T^2X_{ih}, \quad |Y|=T^3V.$$

Ma $\overline{Y}_{ih}=WS_{ih}$, $|Y|=W^2$, quindi si ha:

$$WS_{ih}=T^2X_{ih}, \quad W^2=T^3V,$$

ossia per la (38):

$$\frac{X_{ih}}{S_{ih}}=U, \quad V=TU^2. \tag{39}$$

Su questa reciprocità ritorneremo più innanzi.

§ 4.

Il sistema d'equazioni a differenziali totali (37), al quale si deve intendere aggiunta l'equazione:

$$dz-p_1dx_1-p_2dx_2-p_3dx_3=0,$$

può trasformarsi in un sistema d'equazioni a derivate parziali*).

Sia $f(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3)=\text{cost.}$ un integrale del sistema (37); dovrà essere in virtù del sistema stesso:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial p_1}dp_1+\frac{\partial f}{\partial p_2}dp_2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial p_3}dp_3=0,$$

cioè, ponendo nel primo membro in luogo di dz, dp_1, dp_2, dp_3 le loro espressioni mediante dx_1, dx_2, dx_3, i coefficienti di questi ultimi differenziali dovranno essere nulli. Mediante tale sostituzione si ottiene:

*) Cfr. Goursat, op. cit. p. 57 e segg.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial f}{\partial z}\sum_{i=1}^{3}p_i dx_i-\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial p_h}\sum_{i=1}^{3}S_{ih}dx_i\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\frac{\partial f}{\partial p_h}\right]dx_i=0.$$

Si ha quindi il sistema:

$$(40)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{11}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{12}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{13}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{21}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{22}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{23}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}-\dfrac{1}{T}\left[S_{31}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}+S_{32}\dfrac{\partial f}{\partial p_2}+S_{33}\dfrac{\partial f}{\partial p_3}\right]=0.\end{cases}$$

Risolvendo rispetto a $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \frac{\partial f}{\partial p_3}$, e tenendo conto delle (36), (38), si può porre il sistema sotto la forma:

$$(41)\qquad\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial p_1}-\dfrac{1}{U}\Big[R_{11}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)+R_{12}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\\ \qquad\qquad+R_{13}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big]=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial p_2}-\dfrac{1}{U}\Big[R_{21}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)+R_{22}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\\ \qquad\qquad+R_{23}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big]=0,\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial p_3}-\dfrac{1}{U}\Big[R_{31}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)+R_{32}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\\ \qquad\qquad+R_{33}\Big(\dfrac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\dfrac{\partial f}{\partial z}\Big)\Big]=0.\end{cases}$$

Una proprietà importante del sistema (40) o (41) è la seguente: *Due integrali qualunque del sistema sono tra loro in involuzione.*

Sieno u, v due integrali del sistema (40); si avrà:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\frac{\partial u}{\partial p_h},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3}S_{ih}\frac{\partial v}{\partial p_h},$$

quindi:

$$[u, v] = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial p_i}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial p_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\sum_{i=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} S_{ih} \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial p_h} - \sum_{i=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} S_{ih} \frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial u}{\partial p_h}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{3}\sum_{h=1}^{3} (S_{ih} - S_{hi}) \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial p_h} = 0.$$

Il sistema (40) ammette tutt' al più 4 integrali indipendenti. Ora può dimostrarsi che, se esso ne ammette tre, ne ammette pure un quarto.

Sieno i tre integrali u, v, w. Poichè essi sono tra loro in involuzione, esiste una quarta funzione ϱ in involuzione con ciascuno di essi, cioè tale che:

$$[\varrho, u] = 0, \quad [\varrho, v] = 0, \quad [\varrho, w] = 0.$$

Sviluppando, e riprendendo le notazioni del § 1, si ha:

$$\sum_{i=1}^{3} (\varrho_{p_i} u_{x_i} - \varrho_{x_i} u_{p_i}) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} (\varrho_{p_i} v_{x_i} - \varrho_{x_i} v_{p_i}) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} (\varrho_{p_i} w_{x_i} - \varrho_{x_i} w_{p_i}) = 0.$$

Risolviamo rispetto a ϱ_{x_1}, ϱ_{x_2}, ϱ_{x_3}; otterremo:

$$\text{(42)} \qquad \varrho_{x_i} = \frac{1}{d} \sum_{h=1}^{3} c_{ih}\, \varrho_{p_h} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ora, se u, v, w sono tre integrali del sistema (40), o, ciò che è lo stesso, del sistema (37), essi soddisfanno alle (4); di più si può dimostrare che:

$$c_{ih} = c_{hi}, \quad b_{ih} = b_{hi}.$$

Si ha infatti:

$$c_{12} = \begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_3} & u_{x_2} \\ v_{p_2} & v_{p_3} & v_{x_2} \\ w_{p_2} & w_{p_3} & w_{x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} u_{p_2} & u_{p_3} & S_{21} u_{p_1} + S_{22} u_{p_2} + S_{23} u_{p_3} \\ v_{p_2} & v_{p_3} & S_{21} v_{p_1} + S_{22} v_{p_2} + S_{23} v_{p_3} \\ w_{p_2} & w_{p_3} & S_{21} w_{p_1} + S_{22} w_{p_2} + S_{23} w_{p_3} \end{vmatrix} = \frac{S_{12} d}{T},$$

$$c_{21} = \begin{vmatrix} u_{p_3} & u_{p_1} & u_{x_1} \\ v_{p_3} & v_{p_1} & v_{x_1} \\ w_{p_3} & w_{p_1} & w_{x_1} \end{vmatrix} = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} u_{p_3} & u_{p_1} & S_{11} u_{p_1} + S_{12} u_{p_2} + S_{13} u_{p_3} \\ v_{p_3} & v_{p_1} & S_{11} v_{p_1} + S_{12} v_{p_2} + S_{13} v_{p_3} \\ w_{p_3} & w_{p_1} & S_{11} w_{p_1} + S_{12} w_{p_2} + S_{13} w_{p_3} \end{vmatrix} = \frac{S_{12} d}{T} = c_{12};$$

e analoga sarebbe la dimostrazione per le altre c_{ih} e per le b_{ih}.

Dopo ciò la (42) può scriversi:

$$\varrho_{x_i} = \frac{1}{T}\sum_{h=1}^{3} S_{ih}\,\varrho_{p_h}; \quad (i = 1, 2, 3)$$

ne risulta che ϱ è un integrale del sistema (40).

Se il sistema (40) è completo, cioè ammette 4 integrali indipendenti u, v, w, ϱ, posto:

$$u = A_1, \quad v = A_2, \quad w = A_3, \quad \varrho = A_4,$$

dove A_1, A_2, A_3, A_4 sono costanti arbitrarie, ed eliminando p_1, p_2, p_3, si otterrà un integrale dell' equazione proposta con 4 costanti arbitrarie:

$$z = F(x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, A_3, A_4). \tag{43}$$

Vogliamo mostrare come da esso possa dedursi un integrale con tre funzioni arbitrarie*).

Indichiamo con F_{x_i}, $F_{x_i x_h}$ le derivate parziali prime e seconde della funzione F, e supponiamo che dalla (43) e dalle:

$$p_i = F_{x_i}(x_1, x_2, x_3, A_1, A_2, A_3, A_4) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

si deduca risolvendo rispetto alle A_i:

$$A_i = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3). \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Poniamo ancora:

$$F_{x_i x_h}(x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = \psi_{ih}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3).$$
$$(i, h = 1, 2, 3)$$

Se imaginiamo di avere un' equazione della forma (3) tale che, applicando ad essa il metodo sviluppato, si ottenga l'integrale (43), risulta dalle (37) che dovrà essere:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_h} = -\frac{S_{ih}}{T}.$$

Ma:

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_h} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_h} = F_{x_i x_h}(x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$$
$$= \psi_{ih}(x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3),$$

quindi:

$$-\frac{S_{ih}}{T} = \psi_{ih}.$$

Sia Ω il determinante delle ψ_{ih}, Ψ_{ih} il minore complementare di ψ_{ih} in questo determinante; avremo:

$$\frac{Y_{ih}}{T^2} = \Psi_{ih}, \quad -\frac{W}{T^3} = \Omega,$$

*) Goursat (op. cit., p. 13 e segg.) tratta la stessa questione per le equazioni a due variabili indipendenti, ma valendosi quasi esclusivamente di considerazion geometriche.

ossia per le (36), (38):

$$\frac{R_{ih}}{T}=\Psi_{ih}, \qquad -\frac{U}{T}=\Omega.$$

Pertanto l'equazione del second' ordine, la cui integrazione secondo il nostro metodo ci conduce alla (43), è:

$$\begin{aligned}&\Psi_{11}p_{11}+\Psi_{22}p_{22}+\Psi_{33}p_{33}+2\Psi_{12}p_{12}+2\Psi_{13}p_{13}+2\Psi_{23}p_{23}\\&-\psi_{11}P_{11}-\psi_{22}P_{22}-\psi_{33}P_{33}-2\psi_{12}P_{12}-2\psi_{13}P_{13}-2\psi_{23}P_{23}\\&+\Delta-\Omega=0.\end{aligned}$$

È facile vedere che essa può scriversi sotto la forma seguente:

$$(44)\qquad \begin{vmatrix} p_{11}-\psi_{11} & p_{12}-\psi_{12} & p_{13}-\psi_{13}\\ p_{12}-\psi_{12} & p_{22}-\psi_{22} & p_{23}-\psi_{23}\\ p_{13}-\psi_{13} & p_{23}-\psi_{23} & p_{33}-\psi_{33}\end{vmatrix}=0.$$

Ora nella (43) sostituiamo ad A_2, A_3, A_4 tre funzioni arbitrarie di A_1, $\lambda(A_1)$, $\mu(A_1)$, $\nu(A_1)$, e, posto:

$$(45)\quad z=F\big(x_1,x_2,x_3,A_1,\lambda(A_1),\mu(A_1),\nu(A_1)\big)=G(x_1,x_2,x_3,A_1),$$

determiniamo A_1 come funzione di x_1, x_2, x_3 mediante la condizione:

$$(46)\qquad \frac{\partial G}{\partial A_1}=0.$$

Avremo:

$$\begin{aligned}p_i&=\frac{\partial G}{\partial x_i}+\frac{\partial G}{\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i}=\frac{\partial G}{\partial x_i},\\ p_{ii}&=\frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i},\\ p_{ih}&=\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_h}+\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_h}=\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_h}+\frac{\partial^2 G}{\partial x_h\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_i};\end{aligned}$$

ma:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_i\partial x_h}=F_{x_ix_h}=\psi_{ih}, \quad (i,h=1,2,3)$$

quindi introducendo nel primo membro della (44) le espressioni trovate delle p_{ih} esso diviene:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_2\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_2\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial^2 G}{\partial x_3\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_3\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_3\partial A_1}\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\end{vmatrix}.$$

Questo determinante è identicamente nullo; quindi la (45), dove A_1 è determinata dalla condizione (46), è un integrale dell' equazione (44).

Trovato adunque un integrale (43), si ha da esso immediatamente un integrale con 3 funzioni arbitrarie:

$$z = F\big(x_1, x_2, x_3, A_1, \lambda(A_1), \mu(A_1), \nu(A_1)\big),$$

dove la funzione A_1 di x_1, x_2, x_3 è determinata dalla condizione:

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} + \frac{\partial F}{\partial \lambda(A_1)} \lambda'(A_1) + \frac{\partial F}{\partial \mu(A_1)} \mu'(A_1) + \frac{\partial F}{\partial \nu(A_1)} \nu'(A_1) = 0.$$

Se il sistema (40) non è completo, esso ammetterà tutt' al più due integrali u, v. Integrando il sistema $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ (o, nel caso che esista un solo integrale u, l'equazione $u = \text{cost.}$), si otterrà un integrale con una sola funzione arbitraria.

§ 5.

Abbiamo supposto tacitamente che taluni dei coefficienti dell' equazione (3), p. es. T, non sieno nulli. Vogliamo ora dire qualche cosa sopra questi casi d' eccezione.

È noto che, se con z', x_1', x_2', x_3' si indicano delle nuove variabili, e con p_i' le derivate parziali della z' rispetto alle x_i', ponendo:

$$z' = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - z, \quad x_i' = p_i, \tag{47}$$

se ne deduce:

$$z = \sum_{i=1}^{3} p_i' x_i' - z', \quad x_i = p_i'. \tag{48}$$

Le (47), (48) rappresentano la *trasformazione di Legendre.* Denotiamo con p_{ih}' le derivate seconde della z' rispetto alle x_i', e con P_{ih}', Δ' le espressioni analoghe alle P_{ih}, Δ. Avremo:

$$\begin{aligned} dx_i' = dp_i &= p_{i1}\,dx_1 + p_{i2}\,dx_2 + p_{i3}\,dx_3 \\ &= \sum_{h=1}^{3} p_{ih}(p_{h1}'\,dx_1' + p_{h2}'\,dx_2' + p_{h3}'\,dx_3'), \end{aligned}$$

quindi imaginando scritta questa relazione pei tre valori 1, 2, 3 di i ed eguagliando i coefficienti di dx_1', dx_2', dx_3':

$$\sum_{h=1}^{3} p_{1h} p_{h1}' = 1, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{1h} p_{h2}' = 0, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{1h} p_{h3}' = 0;$$

$$\sum_{h=1}^{3} p_{2h} p_{h1}' = 0, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{2h} p_{h2}' = 1, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{2h} p_{h3}' = 0;$$

$$\sum_{h=1}^{3} p_{3h} p_{h1}' = 0, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{3h} p_{h2}' = 0, \quad \sum_{h=1}^{3} p_{3h} p_{h3}' = 1.$$

Se risolviamo questi tre sistemi d' equazioni, otteniamo:

$$p_{ik} = \frac{P'_{ik}}{\Delta'}, \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

da cui, per note proprietà dei determinanti:

$$P_{ik} = \frac{p'_{ik}}{\Delta'}, \qquad \Delta = \frac{1}{\Delta'},$$

e reciprocamente:

$$p'_{ik} = \frac{P_{ik}}{\Delta}, \qquad P'_{ik} = \frac{p_{ik}}{\Delta}, \qquad \Delta' = \frac{1}{\Delta}.$$

In virtù di queste relazioni l'equazione (3), moltiplicata per Δ', diviene:

$$\begin{aligned} R_{11} P'_{11} + R_{22} P'_{22} + R_{33} P'_{33} + 2 R_{12} P'_{12} + 2 R_{13} P'_{13} + 2 R_{23} P'_{23} \\ + S_{11} p'_{11} + S_{22} p'_{22} + S_{33} p'_{33} + 2 S_{12} p'_{12} + 2 S_{13} p'_{13} + 2 S_{23} p'_{23} \\ + T + U\Delta' = 0, \end{aligned}$$

dove nei coefficienti devono intendersi introdotte le nuove variabili.

Di qui si vede che la trasformazione di Legendre muta un' equazione del tipo (3) in un' altra del medesimo tipo; e che, se si rappresenta l'equazione trasformata con:

$$\begin{aligned} (49) \quad R'_{11} p'_{11} + R'_{22} p'_{22} + R'_{33} p'_{33} + 2 R'_{12} p'_{12} + 2 R'_{13} p'_{13} + 2 R'_{23} p'_{23} \\ + S'_{11} P'_{11} + S'_{22} P'_{22} + S'_{33} P'_{33} + 2 S'_{12} P'_{12} + 2 S'_{13} P'_{13} \\ + 2 S'_{23} P'_{23} + T'\Delta' + U' = 0, \end{aligned}$$

si hanno le relazioni:

$$(50) \quad R_{ik} = S'_{ik}, \ S_{ik} = R'_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3); \qquad T = U', \quad U = T'.$$

Pertanto la reciprocità che abbiamo osservato più sopra esprime il fatto che la trasformazione di Legendre muta un' equazione integrabile col nostro metodo in un' equazione della stessa natura. Infatti mediante le (50) le (36), (38) divengono:

$$\frac{X'_{ik}}{S'_{ik}} = U', \quad V' = T' U'^2,$$

le quali $\big($cfr. le eq. (39)$\big)$ sono appunto le condizioni d' integrabilità della (49).

Se nell' equazione data T è nullo, ma non lo è U, noi potremo mediante la trasformazione di Legendre ottenere da essa un' altra equazione in cui T' non è nullo.

Applicando il nostro metodo all' equazione trasformata, si otterrebbe $\big($cfr. eq. (37)$\big)$:

$$dp'_i + \frac{1}{T'} [S'_{i1} dx_1' + S'_{i2} dx_2' + S'_{i3} dx_3'] = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$$

e quindi per le (49), (50):

$$dx_i + \frac{1}{U}[R_{i1}\,dp_1 + R_{i2}\,dp_2 + R_{i3}\,dp_3] = 0. \quad (i=1,2,3)$$

Ma queste equazioni si sarebbero potute ottenere direttamente risolvendo le (37) rispetto alle dx_i e tenendo conto delle (36), (38), e ad esse corrisponde il sistema d' equazioni a derivate parziali (41). Sicchè può dirsi che questo sistema è valido anche quando $T=0$, purchè però sia $U \neq 0$.

Un' altra trasformazione che conduce a risultati analoghi è la seguente, che può considerarsi come una generalizzazione della *trasformazione di Ampère:*

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = -p_3, \quad z' = z - p_3 x_3.$$

Se ne ricava facilmente:

$$p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = x_3,$$

e quindi:

$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; x_3 = p_3', \; z = z' - p_3' x_3', \; p_1 = p_1', \; p_2 = p_2', \; p_3 = -x_3'.$$

Inoltre:

$$dp_1' = dp_1, \quad dp_2' = dp_2, \quad dx_3' = -dp_3,$$

ossia:

$$\begin{aligned}
p'_{11}dx'_1 + p'_{12}dx'_2 + p'_{13}dx'_3 &= p_{11}dx_1 + p_{12}dx_2 + p_{13}dx_3 \\
&= p_{11}dx_1' + p_{12}dx_2' \\
&\quad + p_{13}(p'_{13}dx'_1 + p'_{23}dx'_2 + p'_{33}dx'_3), \\
p'_{12}dx'_1 + p'_{22}dx'_2 + p'_{23}dx'_3 &= p_{12}dx_1 + p_{22}dx_2 + p_{23}dx_3 \\
&= p_{12}dx_1' + p_{22}dx_2' \\
&\quad + p_{23}(p'_{13}dx'_1 + p'_{23}dx'_2 + p'_{33}dx'_3), \\
-dx_3' &= p_{13}dx_1 + p_{23}dx_2 + p_{33}dx_3 \\
&= p_{13}dx_1' + p_{23}dx_2' \\
&\quad + p_{33}(p'_{13}dx'_1 + p'_{23}dx'_2 + p'_{33}dx'_3),
\end{aligned}$$

da cui, eguagliando i coefficienti:

$$\begin{aligned}
p'_{11} &= p_{11} + p_{13}p'_{13}, & p'_{12} &= p_{12} + p_{13}p'_{23}, & p'_{13} &= +p_{13}p'_{33}, \\
p'_{12} &= p_{12} + p_{13}p'_{23}, & p'_{22} &= p_{22} + p_{23}p'_{23}, & p'_{23} &= +p_{23}p'_{33}, \\
0 &= p_{13} + p_{33}p'_{13}, & 0 &= p_{23} + p_{33}p_{23}, & 1 &= -p_{33}p'_{33},
\end{aligned}$$

e risolvendo:

$$p_{11} = \frac{P'_{22}}{p'_{33}}, \; p_{22} = \frac{P'_{11}}{p'_{33}}, \; p_{33} = -\frac{1}{p'_{33}}, \; p_{12} = -\frac{P'_{12}}{p'_{33}}, \; p_{13} = \frac{p'_{13}}{p'_{33}}, \; p_{23} = \frac{p'_{23}}{p'_{33}},$$

quindi:

$$P_{11} = -\frac{p'_{22}}{p'_{33}},\ P_{22} = -\frac{p'_{11}}{p'_{33}},\ P_{33} = \frac{\Delta'}{p'_{33}},\ P_{12} = \frac{p'_{12}}{p'_{33}},\ P_{13} = \frac{P'_{13}}{p'_{33}},$$
$$P_{23} = \frac{P'_{23}}{p'_{33}},\ \ \Delta = -\frac{P'_{33}}{p'_{33}}.$$

La (3) diviene adunque, moltiplicata per p'_{33}:

$$\begin{aligned} R_{11}P'_{22} + R_{22}P'_{11} - R_{33} - 2R_{12}P'_{12} + 2R_{13}p'_{13} + 2R_{23}p'_{23} - S_{11}p'_{22} \\ - S_{22}p'_{11} + S_{33}\Delta' + 2S_{12}p'_{12} + 2S_{13}P'_{13} + 2S_{23}P'_{23} \\ - TP'_{33} + Up'_{33} = 0, \end{aligned}$$

sicchè si ha:

$$(51)\quad \begin{aligned} & R_{11} = S'_{22},\ R_{22} = S'_{11},\ R_{33} = -U',\ R_{12} = -S'_{12},\ R_{13} = R'_{13}, \\ & R_{23} = R'_{23},\ S_{11} = -R'_{22},\ S_{22} = -R'_{11},\ S_{33} = T',\ S_{12} = R'_{12}, \\ & S_{13} = S'_{13},\ S_{23} = S'_{23},\ T = -S'_{33},\ U = R'_{33}. \end{aligned}$$

Quindi, se $T = 0$, $U = 0$, purchè le S_{ii} non sieno tutte nulle, la trasformazione di Ampère ci permette di passare ad un' equazione in cui $T' \neq 0$.

Se alcune delle S_{ii} sono nulle, le considerazioni del § 3 non sono più valide; ma, se due delle R_{ii} e T non sono nulle, si può applicare la trasformazione d'Ampère, e si ottiene così un' equazione in cui nessuna delle S'_{ii} è nulla.

Può vedersi anche qui che, se l'equazione primitiva soddisfa alle condizioni d' integrabilità (36), (38), la stessa cosa ha luogo per l'equazione trasformata.

Si ha infatti dalle (51):

$$\begin{aligned} & Y_{11} = -R'_{11}T' - S'^{2}_{23},\quad Y_{22} = -R'_{22}T' - S'^{2}_{13},\quad Y_{33} = X'_{33}, \\ & Y_{12} = -R'_{12}T' + S'_{13}S'_{23},\quad Y_{13} = R'_{12}S'_{23} + R'_{11}S'_{13}, \\ & Y_{23} = R'_{22}S'_{23} + R'_{12}S'_{13},\quad W = T'X'_{33} + R'_{11}S'^{2}_{13} + 2R'_{12}S'_{13}S'_{23} + R'_{22}S'^{2}_{23}, \end{aligned}$$

le quali espressioni, introdotte nelle (36), ci danno:

$$\begin{aligned} \frac{-R'_{11}T' - S'^{2}_{23}}{S'_{22}} = \frac{-R'_{22}T' - S'^{2}_{13}}{S'_{11}} = \frac{X'_{33}}{-U'} = \frac{-R'_{12}T' + S'_{13}S'_{23}}{-S'_{12}} = \frac{R'_{12}S'_{23} + R'_{11}S'_{13}}{R'_{13}} \\ = \frac{R'_{22}S'_{23} + R'_{12}S'_{13}}{R'_{23}} = -S'_{33}. \end{aligned}$$

Segue di qui anzitutto:

$$(52)\qquad R'_{11} = \frac{Y'_{11}}{T'},\quad R'_{22} = \frac{Y'_{22}}{T'},\quad X'_{33} = U'S'_{33},\quad R'_{12} = \frac{Y'_{12}}{T'};$$

sostituendo nel 5^0 e 6^0 membro si ha:

$$\frac{Y'_{12}S'_{23} + Y'_{11}S'_{13}}{T'R'_{13}} = \frac{Y'_{22}S'_{23} + Y'_{12}S'_{13}}{T'R'_{22}} = -S'_{33},$$

ossia, tenendo conto delle identità:

$$Y'_{11} S'_{31} + Y'_{12} S'_{32} + Y'_{13} S'_{33} = Y'_{21} S'_{31} + Y'_{22} S'_{32} + Y'_{23} S'_{33} = 0:$$

$$R'_{13} = \frac{Y'_{13}}{T'}, \quad R'_{23} = \frac{Y'_{23}}{T'}. \tag{53}$$

Dalle 1ª, 2ª e 4ª delle (52) si ha poi:

$$X'_{33} = R'_{11} R'_{22} - R'^2_{12} = \frac{1}{T'^2}(Y'_{11} Y'_{22} - Y'^2_{12}) = \frac{S'_{33} W'}{T'^2},$$

e paragonando colla 3ª:

$$W' = U' T'^2. \tag{54}$$

La (38) diviene:

$$T' X'_{33} + R'_{11} S'^2_{13} + 2 R'_{12} S'_{13} S'_{23} + R'_{22} S'^2_{23} = R'_{33} S'^2_{33},$$

ossia per le (52), (54):

$$W' S'_{33} + Y'_{11} S'^2_{13} + 2 Y'_{12} S'_{13} S'_{23} + Y'_{22} S'^2_{23} = R'_{33} S'_{33} T'.$$

Ora, essendo:

$$S'_{13} Y'_{13} + S'_{23} Y'_{23} + S'_{33} Y'_{33} = W',$$

si ha:

$$\begin{aligned} Y'_{11} S'^2_{13} + 2 Y'_{12} S'_{13} S'_{23} + Y'_{22} S'^2_{23} &= S'_{13}(Y'_{11} S'_{31} + Y'_{12} S'_{32}) \\ &\quad + S'_{23}(Y'_{21} S'_{31} + Y'_{22} S'_{32}) \\ = -(S'_{13} Y'_{13} + S'_{23} Y'_{23}) S'_{33} &= (S'_{33} Y'_{33} - W') S'_{33}, \end{aligned}$$

sicchè la relazione precedente ci dà:

$$R'_{33} = \frac{Y'_{33}}{T'}. \tag{55}$$

Le (52), (53), (54), (55) provano l' asserto.

Applicando all' equazione trasformata il nostro metodo, otterremo (eq. (37)):

$$dp'_i = -\frac{1}{T'}(S'_{i1} dx'_1 + S'_{i2} dx'_2 + S'_{i3} dx'_3), \quad (i = 1, 2, 3)$$

e introducendo di nuovo le variabili primitive:

$$\begin{aligned} dp_1 &= -\frac{1}{S_{33}}(R_{22} dx_1 - R_{12} dx_2 - S_{13} dp_3), \\ dp_2 &= -\frac{1}{S_{33}}(-R_{12} dx_1 + R_{11} dx_2 - S_{23} dp_3), \\ dx_3 &= -\frac{1}{S_{33}}(S_{13} dx_1 + S_{23} dx_2 + T dp_3). \end{aligned}$$

Se risolviamo queste equazioni rispetto a dp_1, dp_2, dp_3 tenendo conto delle (39), troviamo di nuovo le (37). Si vede adunque che queste sussistono anche nei casi d' eccezione considerati.

È facile del resto dimostrare direttamente che, *ogniqualvolta le condizioni* (36) *e* (38) (*o le equivalenti* (39)) *sono soddisfatte, qualunque* *integrale del sistema* (37), al quale si intende sempre aggiunta l'equazione $dz - \sum_{i=1}^{3} p_i dx_i = 0$, *è un integrale del sistema* (6). — Se infatti nelle A, L_1, L_2, L_3 in luogo delle dp_i si pongono i secondi membri delle (37), e si fa uso delle relazioni (36), (38), si verifica senza difficoltà che quelle espressioni risultano identicamente nulle.

Pertanto l'integrazione del sistema (37) ci conduce all' integrazione dell' equazione (3), sotto l' unica condizione che le (36), (38) sieno soddisfatte.

§ 6.

Quanto si è detto non esclude però che, in casi speciali, possano esistere altri modi di riduzione del sistema (6) ad uno o più sistemi lineari, sotto condizioni eventualmente diverse dalle (36), (38).

Noi svilupperemo il caso di $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$. Allora le L_i prendono la forma:

$$\begin{aligned} L_1 &= R_{22} dx_3^2 + R_{33} dx_2^2 - 2R_{23} dx_2 dx_3 - 2S_{12} dp_1 dx_2 - 2S_{13} dp_1 dx_3 \\ &\quad - T dp_1^2, \\ L_2 &= R_{33} dx_1^2 + R_{11} dx_3^2 - 2R_{13} dx_3 dx_1 - 2S_{23} dp_2 dx_3 - 2S_{12} dp_2 dx_1 \\ &\quad - T dp_2^2, \\ L_3 &= R_{11} dx_2^2 + R_{22} dx_1^2 - 2R_{12} dx_1 dx_2 - 2S_{13} dp_3 dx_1 - 2S_{23} dp_3 dx_2 \\ &\quad - T dp_3^2, \end{aligned}$$

e ciascuna di esse può essere decomponibile nel prodotto di due fattori lineari.

Supponiamo $T \neq 0$; e sia:

$$L_1 = -\frac{1}{T}(T dp_1 + \alpha dx_2 + \beta dx_3)(T dp_1 + \alpha' dx_2 + \beta' dx_3).$$

Dovrà essere:

$$\alpha + \alpha' = 2S_{12},\ \beta + \beta' = 2S_{13},\ \alpha\alpha' = -TR_{33},\ \alpha\beta' + \alpha'\beta = 2TR_{23},\ \beta\beta' = -TR_{22}.$$

Dalle 1ª, 2ª, 3ª, 5ª si ottiene, indicando con ε_3, ε_2' due coefficienti che possono prendersi eguali a $+1$ o a -1:

$$\alpha = S_{12} + \varepsilon_3 \sqrt{S_{12}^2 + TR_{33}},\quad \alpha' = S_{12} - \varepsilon_3 \sqrt{S_{12}^2 + TR_{33}},$$
$$\beta = S_{13} + \varepsilon_2' \sqrt{S_{13}^2 + TR_{22}},\quad \beta' = S_{13} - \varepsilon_2' \sqrt{S_{13}^2 + TR_{22}}.$$

Poniamo per brevità:

$$S_{23}^2 + TR_{11} = Z_1^2,\ S_{13}^2 + TR_{22} = Z_2^2,\ S_{12}^2 + TR_{33} = Z_3^2;$$

le precedenti potranno scriversi:

$$\alpha = S_{12} + \varepsilon_3 Z_3, \quad \alpha' = S_{12} - \varepsilon_3 Z_3;$$
$$\beta = S_{13} + \varepsilon_2' Z_2, \quad \beta' = S_{13} - \varepsilon_2' Z_2,$$

e dalla 4ª equazione di condizione si avrà:

$$\begin{aligned}2TR_{23} &= (S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)(S_{13} - \varepsilon_2' Z_2) + (S_{12} - \varepsilon_3 Z_3)(S_{13} + \varepsilon_2' Z_2)\\ &= 2S_{12}S_{13} - 2\varepsilon_3 \varepsilon_2' Z_2 Z_3,\end{aligned}$$

sicchè per la decomponibilità dovrà essere soddisfatta la condizione:

$$\varepsilon_3 \varepsilon_2' Z_2 Z_3 = S_{12} S_{13} - T R_{23},$$

ossia:

$$(S_{13}^2 + TR_{22})(S_{12}^2 + TR_{33}) = (S_{12} S_{13} - R_{23} T)^2,$$

od ancora, sviluppando e riducendo:

$$S_{12}^2 R_{22} + 2 S_{12} S_{13} R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = - T(R_{22} R_{33} - R_{23}^2) = - T X_{11}.$$

Se le analoghe condizioni sono soddisfatte anche per L_2, L_3, cioè se:

$$(56)\quad \begin{cases} \varepsilon_3 \varepsilon_2' Z_2 Z_3 = S_{12} S_{13} - T R_{23}, \quad \varepsilon_1 \varepsilon_3' Z_3 Z_1 = S_{12} S_{23} - T R_{13}, \\ \qquad\qquad \varepsilon_2 \varepsilon_1' Z_1 Z_2 = S_{13} S_{23} - T R_{12}, \end{cases}$$

ossia:

$$(57)\quad \begin{cases} S_{12}^2 R_{22} + 2 S_{12} S_{13} R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = - T X_{11}, \\ S_{23}^2 R_{33} + 2 S_{12} S_{23} R_{13} + S_{12}^2 R_{11} = - T X_{22}, \\ S_{13}^2 R_{11} + 2 S_{13} S_{23} R_{12} + S_{23}^2 R_{22} = - T X_{33}, \end{cases}$$

allora si ha il sistema lineare:

$$(58)\quad \begin{cases} dp_1 = - \frac{1}{T}\left[(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)\, dx_2 + (S_{13} + \varepsilon_2' Z_2)\, dx_3\right], \\ dp_2 = - \frac{1}{T}\left[(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1)\, dx_3 + (S_{12} + \varepsilon_3' Z_3)\, dx_1\right], \\ dp_3 = - \frac{1}{T}\left[(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)\, dx_1 + (S_{23} + \varepsilon_1' Z_1)\, dx_2\right]. \end{cases}$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{T^2} \{ &- R_{11} T dx_2\, dx_3 [(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)\, dx_2 + (S_{13} + \varepsilon_2' Z_2)\, dx_3] \\ &- R_{22} T dx_3\, dx_1 [(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1)\, dx_3 + (S_{12} + \varepsilon_3' Z_3)\, dx_1] \\ &- R_{33} T dx_1\, dx_2 [(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)\, dx_1 + (S_{23} + \varepsilon_1' Z_1)\, dx_2] \\ &- [(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)\, dx_2 + (S_{13} + \varepsilon_2' Z_2)\, dx_3] \\ &\quad . [(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1) dx_3 + (S_{12} + \varepsilon_3' Z_3)\, dx_1] \\ &\quad . [(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2) dx_1 + (S_{23} + \varepsilon_1' Z_1)\, dx_2] \\ &+ U T^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \}. \end{aligned}$$

Il coefficiente di $dx_1^2 dx_2$ entro le parentesi è:

$$- (S_{13} + \varepsilon_2 Z_2) \{ R_{33} T + (S_{12} + \varepsilon_3' Z_3)(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3) \},$$

esso è nullo se si prende $\varepsilon_3' = -\varepsilon_3$; analogamente si annullano tutti i coefficienti dei termini $dx_i^2 dx_h$ se:

(59) $$\varepsilon_1' = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2' = -\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3' = -\varepsilon_3.$$

Il coefficiente di $dx_1 dx_2 dx_3$ è, tenendo conto delle (59):

$$UT^2 - (S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1) \\ - (S_{12} - \varepsilon_3 Z_3)(S_{13} - \varepsilon_2 Z_2)(S_{23} - \varepsilon_1 Z_1),$$

ossia:

$$UT^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23} - 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 S_{23} Z_2 Z_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 S_{13} Z_3 Z_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 S_{12} Z_1 Z_2),$$

ossia ancora, per le (56):

$$UT^2 - 2S_{12}S_{13}S_{23} + 2S_{23}(S_{12}S_{13} - TR_{23}) + 2S_{13}(S_{12}S_{23} - TR_{13}) \\ + 2S_{12}(S_{13}S_{23} - TR_{12}),$$

sicchè abbiamo, oltre le (57), una nuova equazione di condizione:

(60) $$UT^2 + 4S_{12}S_{13}S_{23} - 2T(S_{12}R_{12} + S_{13}R_{13} + S_{23}R_{23}) = 0.$$

Il sistema (58) poi diviene, per le (59):

(61) $$\begin{cases} dp_1 = -\frac{1}{T}[(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)dx_2 + (S_{13} - \varepsilon_2 Z_2)dx_3], \\ dp_2 = -\frac{1}{T}[(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1)dx_3 + (S_{12} - \varepsilon_3 Z_3)dx_1], \\ dp_3 = -\frac{1}{T}[(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)dx_1 + (S_{23} - \varepsilon_1 Z_1)dx_2]. \end{cases}$$

Esso può trasformarsi nel sistema d'equazioni a derivate parziali:

(62) $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3)\frac{\partial f}{\partial p_2} - \frac{1}{T}(S_{13} - \varepsilon_2 Z_2)\frac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} + p_2\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{23} + \varepsilon_1 Z_1)\frac{\partial f}{\partial p_3} - \frac{1}{T}(S_{12} - \varepsilon_3 Z_3)\frac{\partial f}{\partial p_1} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} + p_3\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{1}{T}(S_{13} + \varepsilon_2 Z_2)\frac{\partial f}{\partial p_1} - \frac{1}{T}(S_{23} - \varepsilon_1 Z_1)\frac{\partial f}{\partial p_2} = 0. \end{cases}$$

Questo sistema in generale non è completo. Infatti, se esso fosse completo, si vede dalla sua forma che sarebbe anche jacobiano; ma d'altra parte, se si indicano per un istante con $X(f)$, $Y(f)$ i primi membri delle due prime equazioni, il coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial z}$ nella combinazione $X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big)$ è $X(p_2) - Y(p_1)$, ossia:

$$-\frac{1}{T}(S_{12} + \varepsilon_3 Z_3) + \frac{1}{T}(S_{12} - \varepsilon_3 Z_3),$$

ossia ancora $-2\varepsilon_3\frac{Z_3}{T}$. Perchè il sistema fosse completo, sarebbe necessario che fosse $Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0$, nel qual caso le (61) si ridurrebbero alle (37) e sarebbero soddisfatte le (36), (38).

Se insieme al sistema (62) si considera quello che si ottiene da esso mutando i segni di $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, si dimostra con un calcolo semplicissimo che due integrali qualunque dei due sistemi sono tra loro in involuzione. —

Quindi, se ciascuno dei due sistemi ammette tre integrali, indicandoli con u, v, w; u_1, v_1, w_1, saranno in involuzione tra di loro le funzioni $u - \varphi(v, w)$, $u_1 - \varphi_1(u_1, w_1)$, qualunque sieno le funzioni φ, φ_1. Integrando il sistema:

$$u = \varphi(v, w), \quad u_1 = \varphi_1(v_1, w_1),$$

si otterrà un integrale dipendente da due funzioni arbitrarie di due argomenti. Se uno solo dei sistemi, p. es. il primo, avesse 3 integrali u, v, w, l'integrazione dell' equazione:

$$u = \varphi(v, w)$$

ci condurrà parimenti ad un integrale dipendente da due funzioni di due argomenti.

Veniamo ora al caso in cui $T = 0$. Allora, se S_{12} e S_{13} non sono nulle, si avrà:

$$L_1 = (dp_1 + \alpha\, dx_2 + \beta\, dx_3)\,(\alpha' dx_2 + \beta' dx_3),$$

e dovrà essere:

$$\alpha' = -2S_{12}, \ \beta' = -2S_{13}, \ \alpha\alpha' = R_{33}, \ \alpha\beta' + \alpha'\beta = -2R_{23},$$
$$\beta\beta' = R_{22},$$

donde segue:

$$\alpha = -\frac{R_{33}}{2S_{12}}, \quad \alpha' = -2S_{12}, \quad \beta = -\frac{R_{22}}{2S_{13}}, \quad \beta' = -2S_{13},$$

e l' equazione di condizione:

$$S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = 0.$$

Si avrà dunque:

$$L_1 = \left(dp_1 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}dx_2 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}dx_3\right)(-2S_{12}dx_2 - 2S_{13}dx_3).$$

Se sono soddisfatte le equazioni:

$$(63) \qquad \begin{cases} S_{12}^2 R_{22} + 2S_{12}S_{13}R_{23} + S_{13}^2 R_{33} = 0, \\ S_{23}^2 R_{33} + 2S_{23}S_{12}R_{13} + S_{12}^2 R_{11} = 0, \\ S_{13}^2 R_{11} + 2S_{13}S_{23}R_{12} + S_{23}^2 R_{22} = 0, \end{cases}$$

si avrà:

$$L_1 = -2\left(dp_1 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}dx_2 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}dx_3\right)(S_{12}\,dx_2 + S_{13}\,dx_3) = -2\mu_1\nu_1,$$

$$L_2 = -2\left(dp_2 - \frac{R_{11}}{2S_{23}}dx_3 - \frac{R_{33}}{2S_{12}}dx_1\right)(S_{23}\,dx_3 + S_{12}\,dx_1) = -2\mu_2\nu_2,$$

$$L_3 = -2\left(dp_3 - \frac{R_{22}}{2S_{13}}dx_1 - \frac{R_{11}}{2S_{23}}dx_2\right)(S_{13}\,dx_1 + S_{23}\,dx_2) = -2\mu_3\nu_3.$$

Di qui possono dedursi 8 sistemi lineari diversi, e cioè:

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0; \quad \mu_1 = \mu_2 = \nu_3 = 0; \quad \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = 0;$$
$$\mu_3 = \mu_1 = \nu_2 = 0; \quad \mu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0; \quad \mu_2 = \nu_3 = \nu_1 = 0;$$
$$\mu_3 = \nu_1 = \nu_2 = 0; \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.$$

1°. $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Sostituendo in $A = 0$ si ottiene:

$$R_{11} dx_2 dx_3 \mu_1 + R_{22} dx_3 dx_1 \mu_2 + R_{33} dx_1 dx_2 \mu_3 + U dx_1 dx_2 dx_3 = 0.$$

Perchè quest' equazione sia soddisfatta identicamente, cioè perchè sieno nulli i coefficienti dei vari prodotti e potenze delle dx_i, si riconosce facilmente che devono essere nulle la U e due almeno delle R_{ii}, p. es.:

$$U = 0, \quad R_{11} = R_{22} = 0,$$

e quindi, per le (63):

$$R_{12} = 0.$$

2°. $\mu_1 = \mu_2 = \nu_3 = 0$. Se ne deduce:

$$dp_1 = \frac{R_{33}}{2S_{12}} dx_2 + \frac{R_{22}}{2S_{13}} dx_3, \qquad dp_2 = -\frac{R_{33}S_{23}}{2S_{12}S_{13}} dx_2 + \frac{R_{11}}{2S_{23}} dx_3,$$
$$dx_1 = -\frac{S_{23}}{S_{13}} dx_2,$$

e quindi:

$$\begin{aligned} A = {} & R_{11} dx_2 dx_3 \left(\frac{R_{33}}{2S_{12}} dx_2 + \frac{R_{22}}{2S_{13}} dx_3\right) \\ & - R_{22} \frac{S_{23}}{S_{13}} dx_2 dx_3 \left(-\frac{R_{33}S_{23}}{2S_{12}S_{13}} dx_2 + \frac{R_{11}}{2S_{23}} dx_3\right) \\ & - R_{33} \frac{S_{23}}{S_{13}} dp_3 dx_2^2 - U \frac{S_{23}}{S_{13}} dx_2^2 dx_3 \\ = {} & dx_2^2 \left[\left(\frac{R_{11} R_{33}}{2S_{12}} + \frac{R_{22} R_{33} S_{23}^2}{2S_{12}S_{13}^2} - U \frac{S_{23}}{S_{13}}\right) dx_3 - R_{33} \frac{S_{23}}{S_{13}} dp_3\right], \end{aligned}$$

sicchè dev' essere:

$$R_{33} = 0, \quad U = 0.$$

3°, 4°. Analogamente al 2°.

5°. $\mu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$. Se ne deduce:

$$dp_1 = \left(\frac{R_{33}S_{13}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{22}}{2S_{13}}\right) dx_3, \quad dx_1 = -\frac{S_{23}}{S_{12}} dx_3, \quad dx_2 = \frac{S_{13}}{S_{12}} dx_3,$$

$$\begin{aligned} A = {} & R_{11} dx_3^3 \left(\frac{R_{33}S_{13}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{22}}{2S_{13}}\right) \frac{S_{13}}{S_{12}} - R_{22} \frac{S_{23}}{S_{12}} dp_2 dx_3^2 \\ & - R_{33} \frac{S_{13}S_{23}}{S_{12}^2} dp_3 dx_3^2 - U \frac{S_{13}S_{23}}{S_{12}^2} dx_3^3 \\ = {} & dx_3^2 \left[\left(\frac{R_{11}R_{33}S_{13}}{2S_{12}^2} + \frac{R_{11}R_{22}}{2S_{13}} - U \frac{S_{13}S_{23}}{S_{12}^2}\right) dx_3 - R_{22} \frac{S_{23}}{S_{12}} dp_2 \right. \\ & \left. - R_{33} \frac{S_{13}S_{23}}{S_{12}^2} dp_3\right], \end{aligned}$$

sicchè dev' essere:

$$R_{22}=0,\quad R_{33}=0,\quad U=0,$$

e per le (63):

$$R_{23}=0.$$

6°, 7°. Analogamente al 5°.

8°. Le tre equazioni sono incompatibili.

Il sistema d'equazioni a derivate parziali corrispondente al sistema lineare $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{R_{33}}{2S_{12}}\frac{\partial f}{\partial p_2}+\frac{R_{22}}{2S_{13}}\frac{\partial f}{\partial p_3}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{R_{11}}{2S_{23}}\frac{\partial f}{\partial p_3}+\frac{R_{33}}{2S_{12}}\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{R_{22}}{2S_{13}}\frac{\partial f}{\partial p_1}+\frac{R_{11}}{2S_{23}}\frac{\partial f}{\partial p_2}=0.$$

Indichiamo queste equazioni con $X(f)=0$, $Y(f)=0$, $Z(f)=0$, ed osserviamo che, supposto $R_{11}=R_{22}=0$, esse si riducono a:

$$X(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{R_{33}}{2S_{12}}\frac{\partial f}{\partial p_2}=0,$$

$$Y(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{R_{33}}{2S_{12}}\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,$$

$$Z(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Ne segue:

$$X\big(Z(f)\big)-Z\big(X(f)\big)\equiv-Z\Big(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\Big)\frac{\partial f}{\partial p_2}=0,$$

$$Y\big(Z(f)\big)-Z\big(Y(f)\big)\equiv-Z\Big(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\Big)\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,$$

$$X\big(Y(f)\big)-Y\big(X(f)\big)\equiv\quad X\Big(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\Big)\frac{\partial f}{\partial p_1}-Y\Big(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\Big)\frac{\partial f}{\partial p_2}=0.$$

Se $Z\Big(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\Big)$ non è nullo, il sistema considerato è equivalente al sistema delle 5 equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial p_1}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial p_2}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial f}{\partial z}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_3}+p_3\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Poichè l'integrale di questo sistema, se esiste, non deve contenere nè p_1 nè p_2, la 3ª e la 4ª equazione si scompongono nelle seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

quindi dalla 5ª segue $\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$, sicchè il sistema non ammette alcun integrale. Dunque una condizione necessaria (ma non sufficiente) perchè il sistema ammetta qualche integrale è che sia:

$$Z\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right)=0.$$

Perchè il sistema sia completo, dev' essere:

$$X\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right)=Y\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right)=Z\left(\frac{R_{33}}{2S_{12}}\right)=0,$$

cioè $\frac{R_{33}}{2S_{12}}$ dev' essere un integrale del sistema stesso.

Si verifica facilmente che due integrali qualunque del sistema sono tra loro in involuzione. Quindi, se il sistema ammette almeno 3 integrali, potrà ottenersi un integrale della (3) dipendente da due funzioni arbitrarie di due argomenti.

§ 7.

Merita finalmente una considerazione speciale il caso in cui:

$$S_{11}=S_{22}=S_{33}=S_{12}=S_{13}=S_{23}=T=0,$$

in cui cioè l'equazione (3) è *lineare* rispetto alle derivate seconde.

In questo caso le formole (37) perdono ogni significato.

Le L_1, L_2, L_3 sono sempre decomponibili in fattori lineari.

Supposto dapprima che nessuna delle R_{ii} sia nulla, facciamo:

$$\begin{aligned}
L_1 &= R_{22}dx_3^2-2R_{23}dx_2dx_3+R_{33}dx_2^2\\
&=\frac{1}{R_{33}}(R_{33}dx_2+\alpha_1dx_3)(R_{33}dx_2+\beta_1dx_3),\\
L_2 &= R_{33}dx_1^2-2R_{13}dx_1dx_3+R_{11}dx_3^2\\
&=\frac{1}{R_{11}}(R_{11}dx_3+\alpha_2dx_1)(R_{11}dx_3+\beta_2dx_1),\\
L_3 &= R_{11}dx_2^2-2R_{12}dx_1dx_2+R_{22}dx_1^2\\
&=\frac{1}{R_{22}}(R_{22}dx_1+\alpha_3dx_2)(R_{22}dx_1+\beta_3dx_2).
\end{aligned}$$

Dovrà essere:

$$\alpha_1+\beta_1=-2R_{23},\quad \alpha_1\beta_1=R_{22}R_{33};\quad \alpha_2+\beta_2=-2R_{13},\quad \alpha_2\beta_2=R_{33}R_{11};$$
$$\alpha_3+\beta_3=-2R_{12},\quad \alpha_3\beta_3=R_{11}R_{22},$$

quindi, indicando con ε_1, ε_2, ε_3 dei coefficienti che possono assumere il valore ± 1:

$$\begin{aligned}
\alpha_1&=-R_{23}+\varepsilon_1\sqrt{-X_{11}}, & \beta_1&=-R_{23}-\varepsilon_1\sqrt{-X_{11}},\\
\alpha_2&=-R_{13}+\varepsilon_2\sqrt{-X_{22}}, & \beta_2&=-R_{13}-\varepsilon_2\sqrt{-X_{22}},\\
\alpha_3&=-R_{12}+\varepsilon_3\sqrt{-X_{33}}, & \beta_3&=-R_{12}-\varepsilon_3\sqrt{-X_{33}}.
\end{aligned}$$

Si avrà pertanto il sistema lineare, dove le ε possono prendere segni qualunque:

$$R_{33}dx_2 + (-R_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}})\,dx_3 = 0,$$
$$R_{11}dx_3 + (-R_{13} + \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}})\,dx_1 = 0,$$
$$R_{22}dx_1 + (-R_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}})\,dx_2 = 0.$$

Perchè queste tre equazioni possano coesistere, dev' essere:

$$(64)\quad R_{11}R_{22}R_{33} + (-R_{12} + \varepsilon_3\sqrt{-X_{33}})(-R_{13} + \varepsilon_2\sqrt{-X_{22}}) \times (-R_{23} + \varepsilon_1\sqrt{-X_{11}}) = 0,$$

che può anche scriversi:

$$(65)\quad R_{11}R_{23}^2 + R_{22}R_{13}^2 + R_{33}R_{12}^2 - 2R_{12}R_{13}R_{23} - R_{11}R_{22}R_{33} = 0\ ^{*}).$$

---

*) La riduzione a questa forma può farsi come segue.

Pongasi:

$$\frac{R_{23}}{R_{11}} = l_1, \quad \frac{R_{13}}{R_{22}} = l_2, \quad \frac{R_{12}}{R_{33}} = l_3; \qquad \frac{R_{22}R_{33}}{R_{11}^2} = m_1, \quad \frac{R_{33}R_{11}}{R_{22}^2} = m_2, \quad \frac{R_{11}R_{22}}{R_{33}^2} = m_3;$$

$$-\varepsilon_1\frac{\sqrt{-X_{11}}}{R_{11}} = -\varepsilon_1\sqrt{l_1^2 - m_1} = n_1, \quad -\varepsilon_2\frac{\sqrt{-X_{22}}}{R_{22}} = -\varepsilon_2\sqrt{l_2^2 - m_2} = n_2,$$
$$-\varepsilon_3\frac{\sqrt{-X_{33}}}{R_{33}} = -\varepsilon_3\sqrt{l_3^2 - m_3} = n_3;$$

$$l_1l_2l_3 = r, \quad \Sigma l_1^2l_2^2m_3 = s, \quad \Sigma l_1^2m_2m_3 = t, \quad n_1n_2n_3 = u, \quad \Sigma l_1l_2n_3 = v,$$
$$\Sigma l_1n_2n_3 = w,$$

dove le Σ rappresentano funzioni simmetriche. Si ha evidentemente:

$$(\alpha)\qquad m_1m_2m_3 = 1,$$

e la (64) può scriversi:

$$1 - (l_1 + n_1)(l_2 + n_2)(l_3 + n_3) = 0,$$

ossia:

$$(\beta)\qquad 1 - r - v - w - u = 0.$$

Si ha poi, tenuto conto della (α):

$$(\gamma)\quad u^2 = n_1^2n_2^2n_3^2 = (l_1^2 - m_1)(l_2^2 - m_2)(l_3^2 - m_3) = r^2 - s + t - 1,$$

$$(\delta)\quad v^2 = \Sigma l_1^2l_2^2n_3^2 + 2\Sigma l_1l_2n_3l_1l_3n_2 = \Sigma l_1^2l_2^2l_3^2 - \Sigma l_1^2l_2^2m_3 + 2l_1l_2l_3\Sigma l_1n_2n_3$$
$$= 3r^2 - s + 2rw,$$

$$(\varepsilon)\quad w^2 = \Sigma l_1^2n_2^2n_3^2 + 2\Sigma l_1n_2n_3l_2n_3n_1 = \Sigma l_1^2l_2^2l_3^2 - 2\Sigma l_1^2l_2^2m_3 + \Sigma l_1^2m_2m_3$$
$$+ 2n_1n_2n_3\Sigma l_1l_2n_3 = 3r^2 - 2s + t + 2uv.$$

Ricavando v dalla (β) e quadrando, si ottiene:

$$v^2 = (1 - r - u)^2 - 2(1 - r - u)\,w + w^2,$$

ossia per le (δ), (ε):

$$3r^2 - s + 2rw = (1 - r - u)^2 - 2(1 - r - u)\,w + 3r^2 - 2s + t + 2uv,$$

da cui riducendo:

$$2w = 2u(v + w) - s + t + (1 - r - u)^2,$$

e per le (β), (γ):

$$2w = 2u(1 - r - u) - s + t + (1 - r - u)^2$$
$$= 2u - 2ur - 2u^2 - s + t + 1 + r^2 + u^2 - 2r - 2u + 2ur = 2(1 - r),$$
$$v = 1 - r - u - w = -u.$$

Poniamo per brevità:

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\}=\frac{R_{13}\pm\sqrt{-X_{22}}}{R_{33}},\qquad \left.\begin{matrix}\mu_1\\ \mu_2\end{matrix}\right\}=\frac{R_{23}\pm\sqrt{-X_{11}}}{R_{33}},$$

dove i segni si possono scegliere indipendentemente per le due coppie di valori. Supposta soddisfatta la condizione (64), il sistema lineare trovato sarà equivalente all' uno o all' altro dei due sistemi, di *due* equazioni ciascuno:

$$dx_1-\lambda_i\,dx_3=0,\quad dx_2-\mu_i\,dx_3=0.\qquad (i=1,2)$$

Sostituiamo nella $A=0$; avremo:

$$R_{11}\mu_i dp_1\,dx_3^2+R_{22}\lambda_i dp_2\,dx_3^2+R_{33}\lambda_i\mu_i dp_3\,dx_3^2+U\lambda_i\mu_i dx_3^3=0;$$

ora:

$$\frac{R_{11}}{R_{33}}=\lambda_1\lambda_2,\qquad \frac{R_{22}}{R_{33}}=\mu_1\mu_2,$$

quindi l'equazione precedente diviene (dividendo per $R_{33}\,dx_3^2$):

$$\lambda_1\lambda_2\mu_i dp_1+\mu_1\mu_2\lambda_i dp_2+\lambda_i\mu_i dp_3+\frac{U}{R_{33}}\lambda_i\mu_i dx_3=0,$$

da cui dividendo per $\lambda_i\mu_i$ e ponendo $\{i,h\}=\{1,2\}$:

$$\lambda_h dp_1+\mu_h dp_2+dp_3+\frac{U}{R_{33}}dx_3=0.$$

Abbiamo pertanto i due sistemi:

(66) $$dx_1-\lambda_1 dx_3=0,\quad dx_2-\mu_1 dx_3=0,\qquad dp_3+\lambda_2 dp_1+\mu_2 dp_2+\frac{U}{R_{33}}dx_3=0;$$

(67) $$dx_1-\lambda_2 dx_3=0,\quad dx_2-\mu_2 dx_3=0,\qquad dp_3+\lambda_1 dp_1+\mu_1 dp_2+\frac{U}{R_{33}}dx_3=0.$$

Questi sistemi, dedotti nell' ipotesi che le R_{ii} sieno tutte diverse da zero, valgono anche nel caso in cui una delle R_{11}, R_{22}, od ambedue, sieno nulle. Infatti, se si introducono nelle:

$$L_1=0,\quad L_2=0,\quad L_3=0,\quad A=0$$

le espressioni di dx_1, dx_2, dx_3 ricavate dalle (66), (67), esse sono identicamente soddisfatte. Resta escluso il solo caso $R_{11}=R_{22}=R_{33}=0$, ma è facile vedere che in questo caso il nostro metodo non può con-

---

Dopo ciò segue dalle (γ), (δ):

$$r^2-s+t-1=3r^2-s+2r(1-r),$$

ossia riducendo:

$$t-2r-1=0.$$

Infine, se rimettiamo per t, r le loro espressioni, otteniamo appunto, dopo facili riduzioni, la formola (65).

durci ad alcun risultato. I sistemi (66), (67) possono trasformarsi nei seguenti sistemi d'equazioni a derivate parziali:

$$(68)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} - \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \mu_1 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{U}{R_{33}} \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \end{cases}$$

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} - \lambda_2 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial p_2} - \mu_2 \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \mu_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_1 p_1 + \mu_1 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} - \dfrac{U}{R_{33}} \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0. \end{cases}$$

Denotiamo con $X(f) = 0$, $Y(f) = 0$, $Z(f) = 0$ le tre equazioni (68). Avremo:

$$(70)\quad \begin{cases} X\big(Y(f)\big) - Y\big(X(f)\big) \equiv \big(-X(\mu_1) + Y(\lambda_1)\big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ X\big(Z(f)\big) - Z\big(X(f)\big) \equiv X(\lambda_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + X(\mu_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \qquad + X(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \qquad + \Big(Z(\lambda_1) - X\Big(\dfrac{U}{R_{33}}\Big)\Big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0, \\ Y\big(Z(f)\big) - Z\big(Y(f)\big) \equiv Y(\lambda_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + Y(\mu_2) \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \qquad + Y(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \qquad + \Big(Z(\mu_1) - Y\Big(\dfrac{U}{R_{33}}\Big)\Big) \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0. \end{cases}$$

Perchè il sistema sia completo (e quindi jacobiano), tutti i coefficienti di queste espressioni devono annullarsi. In particolare dev' essere:

$$\begin{aligned} 0 &= X(\lambda_2) = X(\mu_2) = Y(\lambda_2) = Y(\mu_2), \\ 0 &= X(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) = X(\lambda_2)\, p_1 + X(p_1)\, \lambda_2 + X(\mu_2)\, p_2 \\ &\qquad + X(p_2)\, \mu_2 + X(p_3) \\ &\qquad = \lambda_2 X(p_1) + \mu_2 X(p_2) + X(p_3) = \lambda_2 - \lambda_1, \\ 0 &= Y(\lambda_2 p_1 + \mu_2 p_2 + p_3) = Y(\lambda_2)\, p_1 + Y(p_1)\, \lambda_2 + Y(\mu_2)\, p_2 \\ &\qquad + Y(p_2)\, \mu_2 + Y(p_3) \\ &\qquad = \lambda_2 Y(p_1) + \mu_2 Y(p_2) + Y(p_3) = \mu_2 - \mu_1. \end{aligned}$$

Quindi, perchè il sistema sia completo, è necessario che sia:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \mu_2.$$

Queste condizioni non sono sufficienti. Può però dimostrarsi che, se esse sono soddisfatte e se il sistema ammette tre integrali indipendenti, esso ne ammette un quarto, e quindi è completo; in altre parole che, se il sistema non è completo, esso ammette tutt' al più 2 integrali indipendenti.

Indicheremo con λ il valore comune di λ_1, λ_2, con μ quello di μ_1, μ_2. Se il sistema non è completo, una almeno delle 3 combinazioni (70) non sarà identicamente nulla; se due non lo sono, il teorema è provato.

Supponiamo dunque che una sola delle combinazioni (70) non sia identicamente nulla; questa non può essere la prima, perchè, se le altre due sono identicamente nulle, si ha $X(\mu) = 0$, $Y(\lambda) = 0$. Sia dunque la seconda non identicamente nulla, e denotiamola con $W(f) = 0$, imaginandola prima divisa per $X(\lambda)$. Siccome $X(\mu) - Y(\lambda) = 0$, $Y(\lambda) = 0$, ne segue $X(\mu) = 0$, e quindi:

$$X(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) = \lambda X(p_1) + p_1 X(\lambda) + \mu X(p_2) + p_2 X(\mu) \\ + X(p_3) = p_1 X(\lambda),$$

sicchè si ha:

$$W(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{X(\lambda)} \left(Z(\lambda) - X\left(\frac{U}{R_{33}}\right)\right) \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Calcolando $X\big(W(f)\big) - W\big(X(f)\big)$, si trova che il coefficiente di $\frac{\partial f}{\partial z}$ in questa combinazione è $X(p_1)$, cioè 1; quindi essa non può essere identicamente nulla, ciò che prova l'asserto.

Se $X(\lambda) = 0$, si ha:

$$W(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0,$$

quindi:

$$Z\big(W(f)\big) - W\big(Z(f)\big) = - W(\lambda) \frac{\partial f}{\partial x_1} - W(\mu) \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ - W(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) \frac{\partial f}{\partial z} + W\left(\frac{U}{R_{33}}\right) \frac{\partial f}{\partial p_3} = 0.$$

Perchè questa combinazione fosse identicamente nulla, dovrebbe essere:

$$0 = W(\lambda), \qquad 0 = W(\mu),$$
$$0 = W(\lambda p_1 + \mu p_2 + p_3) = p_1 W(\lambda) + p_2 W(\mu) + 1,$$

equazioni che sono incompatibili. — Così il teorema è completamente dimostrato.

Se u è un integrale del sistema (68), v un integrale del sistema (69), si ha: $[u, v] = 0$.

Si ha infatti:

$$\frac{\partial u}{\partial p_1} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}, \qquad \frac{\partial u}{\partial p_2} = \mu_1 \frac{\partial u}{\partial p_3},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial u}{\partial z} = -\lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial u}{\partial p_3};$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_1} = \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}, \qquad \frac{\partial v}{\partial p_2} = \mu_2 \frac{\partial v}{\partial p_3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial v}{\partial z} = -\lambda_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial v}{\partial p_3},$$

quindi:

$$\begin{aligned}[u, v] = {} & \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \mu_1 \frac{\partial u}{\partial p_3}\left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ & + \frac{\partial u}{\partial p_3}\left[-\lambda_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial v}{\partial p_3}\right] \\ & - \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \frac{\partial v}{\partial p_3}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ & - \frac{\partial v}{\partial p_3}\left[-\lambda_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{U}{R_{33}} \frac{\partial u}{\partial p_3}\right] = 0.\end{aligned}$$

Quando $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$, si ha:

$$X_{11} = X_{22} = X_{33} = 0,$$

ossia:

$$R_{11} R_{22} = R_{12}^2, \quad R_{11} R_{33} = R_{13}^2, \quad R_{22} R_{33} = R_{23}^2,$$

e l'equazione di condizione (64) si riduce a:

$$R_{11} R_{22} R_{33} = R_{12} R_{13} R_{23},$$

da cui si ricava facilmente, mediante le precedenti:

$$R_{12} R_{33} = R_{13} R_{23}, \quad R_{13} R_{22} = R_{12} R_{23}, \quad R_{23} R_{11} = R_{12} R_{13},$$

ossia:

$$X_{12} = X_{13} = X_{23} = 0.$$

Inoltre:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{R_{13}}{R_{33}} = \sqrt{\frac{R_{11}}{R_{33}}}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \frac{R_{23}}{R_{33}} = \sqrt{\frac{R_{22}}{R_{33}}},$$

quindi:

$$\lambda_2 \mu_1 = \lambda_1 \mu_2 = \frac{R_{13} R_{23}}{R_{33}^2} = \frac{R_{12}}{R_{33}}.$$

Ora dalle (66) $\big($o (67)$\big)$ si ha, posto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$:

$$dx_1 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda^2 dp_1 + \lambda\mu\, dp_2 + \lambda\, dp_3\right],$$

$$dx_2 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda\mu\, dp_1 + \mu^2 dp_2 + \mu\, dp_3\right],$$

$$dx_3 = -\frac{R_{33}}{U}\left[\lambda\, dp_1 + \mu\, dp_2 + dp_3\right];$$

ne segue:

$$(71)\quad \begin{cases} dx_1 = -\frac{1}{U}\,[R_{11}dp_1 + R_{12}dp_2 + R_{13}dp_3], \\ dx_2 = -\frac{1}{U}\,[R_{12}dp_1 + R_{22}dp_2 + R_{23}dp_3], \\ dx_3 = -\frac{1}{U}\,[R_{13}dp_1 + R_{23}dp_2 + R_{33}dp_3]. \end{cases}$$

Le (36), (38) sono evidentemente soddisfatte per la nostra equazione, e però, se noi applichiamo a questa la trasformazione di Legendre, otterremo una nuova equazione per la quale le (36), (38) saranno pure soddisfatte. Si vede poi che il sistema (71) si trasformerà appunto nel sistema (37), e quindi il sistema (68) (o (69)) nel sistema (40). Se il primo è completo, lo sarà anche il secondo, e allora potremo ottenere per l'equazione trasformata un integrale con 3 funzioni arbitrarie (§ 4). Da questo potremo dedurre un integrale con tre funzioni arbitrarie (d'un argomento) dell' equazione primitiva. Se i sistemi (68), (69) sono diversi, e se ambidue, od uno, ammettono tre integrali indipendenti, si può ottenere un integrale dell' equazione con due funzioni arbitrarie di due argomenti.

§ 8.

Come applicazione delle teorie esposte svilupperemo due esempi.

I⁰. $$2p_3(p_1x_1 - p_2x_2)\,p_{22} - 4p_2^2x_3p_{33} - 4p_2p_3x_1p_{12}$$
$$- 2x_3(p_1x_1 - p_2x_2)\,(p_{22}p_{33} - p_{23}^2) - p_3x_1^2(p_{11}p_{22} - p_{12}^2)$$
$$- 4p_2x_1x_3(p_{13}p_{23} - p_{12}p_{33}) + x_1^2x_3 \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} + 4p_2^2p_3 = 0.$$

Si ha:

$$R_{11} = 0,\quad R_{22} = 2p_3(p_1x_1 - p_2x_2),\quad R_{33} = -4p_2^2x_3,$$
$$R_{12} = -2p_2p_3x_1,\quad R_{13} = 0,\quad R_{23} = 0,\quad S_{11} = -2x_3(p_1x_1 - p_2x_2),$$
$$S_{22} = 0,\quad S_{33} = -p_3x_1^2,\quad S_{12} = -2p_2x_1x_3,\quad S_{13} = 0,\quad S_{23} = 0,$$
$$T = x_1^2x_3,\quad U = 4p_2^2p_3,$$

quindi:

$$Y_{11} = 0,\quad Y_{22} = 2p_3x_1^2x_3(p_1x_1 - p_2x_2),\quad Y_{33} = -4p_2^2x_1^2x_3^2,$$
$$Y_{12} = -2p_2p_3x_1^3x_3,\quad Y_{13} = 0,\quad Y_{23} = 0,\quad W = 4p_2^2p_3x_1^4x_3^2.$$

È facile constatare che le condizioni (36), (38) sono verificate.
Il sistema (40) è:

$$
(72) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \dfrac{\partial f}{\partial z} + 2 \dfrac{p_1 x_1 - p_2 x_2}{x_1^2} \dfrac{\partial f}{\partial p_1} + 2 \dfrac{p_2}{x_1} \dfrac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_2} + p_2 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{2 p_2}{x_1} \dfrac{\partial f}{\partial p_2} = 0, \\
\dfrac{\partial f}{\partial x_3} + p_3 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \dfrac{p_3}{x_3} \dfrac{\partial f}{\partial p_3} = 0,
\end{cases}
$$

e si può verificare che esso è completo.

Il sistema ausiliario dell' ultima equazione è:

$$
\frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{0} = \frac{dx_3}{1} = \frac{dz}{p_3} = \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dp_3}{\frac{p_3}{x_3}};
$$

esso ammette gl' integrali:

$$
x_1 = \text{cost.}, \quad x_2 = \text{cost.}, \quad p_1 = \text{cost.}, \quad p_2 = \text{cost.}, \quad \frac{p_3}{x_3} = \text{cost.},
$$
$$
z - \frac{1}{2} p_3 x_3 = \text{cost.},
$$

quindi, posto:

$$
u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad u_3 = p_1, \quad u_4 = p_2, \quad u_5 = \frac{p_3}{x_3},
$$
$$
u_6 = z - \frac{1}{2} p_3 x_3,
$$

l'integrale generale dell' ultima equazione (72) è:

$$
f = F(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6).
$$

Ne segue:

$$
\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u_6}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_2} = \frac{\partial F}{\partial u_4},
$$

e la seconda delle (72) diviene:

$$
(73) \qquad \frac{\partial F}{\partial u_2} + u_4 \frac{\partial F}{\partial u_6} + 2 \frac{u_4}{u_1} \frac{\partial F}{\partial u_4} = 0.
$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$
\frac{du_1}{0} = \frac{du_2}{1} = \frac{du_3}{0} = \frac{du_4}{2 \frac{u_4}{u_1}} = \frac{du_5}{0} = \frac{du_6}{u_4};
$$

esso ammette gl' integrali:

$$
u_1 = \text{cost.}, \quad u_4 = \text{cost.}, \quad u_5 = \text{cost.}, \quad \frac{u_1 u_3}{2 u_4} - u_2 = \text{cost.},
$$
$$
u_6 - u_2 u_4 = \text{cost.}
$$

Ai due ultimi possono anche sostituirsi i seguenti:

$$
2 u_2 u_4 - u_1 u_3 = \text{cost.}, \quad u_6 - \frac{1}{2} u_1 u_3 = \text{cost.}
$$

Posto adunque:

$$v_1 = u_1 = x_1, \quad v_2 = u_4 = p_2, \quad v_3 = u_5 = \frac{p_3}{x_3},$$
$$v_4 = 2u_2u_4 - u_1u_3 = 2p_2x_2 - p_1x_1,$$
$$v_5 = u_6 - \frac{1}{2}u_1u_3 = z - \frac{1}{2}p_1x_1 - \frac{1}{2}p_3x_3,$$

l'integrale generale della (73), e quindi anche del sistema delle due ultime (72), sarà:

$$f = \Phi(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5).$$

Segue di qui:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_5}, \quad \frac{\partial f}{\partial p_1} = -x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5},$$
$$\frac{\partial f}{\partial p_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 2x_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_4},$$

e la prima delle (72) diviene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} - p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5} + p_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}$$
$$+ 2\frac{(p_1x_1 - p_2x_2)}{x_1^2}\left(-x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} - \frac{1}{2}x_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_5}\right) + \frac{2p_2}{x_1}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 2x_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_4}\right) = 0,$$

ossia introducendo le v_i e moltiplicando per $2v_1$:

$$2v_1\frac{\partial \Phi}{\partial v_1} + 4v_2\frac{\partial \Phi}{\partial v_2} + 6v_4\frac{\partial \Phi}{\partial v_4} + v_4\frac{\partial \Phi}{\partial v_5} = 0.$$

Il sistema ausiliario di questa equazione è:

$$\frac{dv_1}{2v_1} = \frac{dv_2}{4v_2} = \frac{dv_3}{0} = \frac{dv_4}{6v_4} = \frac{dv_5}{v_4};$$

esso ammette gl' integrali:

$$v_3 = \text{cost.}, \quad \frac{v_2}{v_1^2} = \text{cost.}, \quad \frac{v_4}{v_1^3} = \text{cost.}, \quad v_5 - \frac{1}{6}v_4 = \text{cost.},$$

quindi, rimettendo le variabili primitive, si hanno i seguenti 4 integrali indipendenti del sistema (72):

$$\frac{p_3}{x_3}, \quad \frac{p_2}{x_1^2}, \quad \frac{2p_2x_2 - p_1x_1}{x_1^3}, \quad z - \frac{1}{3}p_1x_1 - \frac{1}{3}p_2x_2 - \frac{1}{2}p_3x_3.$$

Se pertanto denotiamo con A, B, C, D 4 costanti arbitrarie, ed eliminiamo p_1, p_2, p_3 fra le equazioni:

$$\frac{p_3}{x_3} = 2C, \quad \frac{p_2}{x_1^2} = B, \quad \frac{2p_2x_2 - p_1x_1}{x_1^3} = -3A,$$
$$z - \frac{1}{3}p_1x_1 - \frac{1}{3}p_2x_2 - \frac{1}{2}p_3x_3 = D,$$

otterremo il seguente integrale dell' equazione proposta:

$$z = Ax_1^3 + Bx_1^2x_2 + Cx_3^2 + D,$$

dal quale si potrà ricavare col metodo esposto a suo luogo un integrale con 3 funzioni arbitrarie d'un argomento.

II. $7p_{11}+2p_{22}+p_{33}+9p_{12}+8p_{13}+3p_{23}-\frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3}=0.$

L'equazione è lineare rispetto alle derivate seconde, e si ha:

$$R_{11}=7,\quad R_{22}=2,\quad R_{33}=1,\quad R_{12}=\frac{9}{2},\quad R_{13}=4,\quad R_{23}=\frac{3}{2},$$

$$U=-\frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3},$$

quindi:

$$X_{11}=-\frac{1}{4},\quad X_{22}=-9,\quad X_{33}=-\frac{25}{4}.$$

La relazione (64) è soddisfatta se si pone:

$$\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=+1,\quad \text{o}\quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=-1.$$

Si trova:

$$\lambda_1=7,\quad \lambda_2=1,\quad \mu_1=2,\quad \mu_2=1,$$

sicchè si hanno i due sistemi d'equazioni a differenziali totali:

$$dx_1-7dx_3=0,\quad dx_2-2dx_3=0,$$

$$dp_3+dp_1+dp_2-\frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3}dx_3=0;$$

$$dx_1-dx_3=0,\quad dx_2-dx_3=0,$$

$$dp_3+7dp_1+2dp_2-\frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3}dx_3=0.$$

Dalle due prime equazioni del primo sistema segue:

$$dx_3=dx_1+dx_2-8dx_3,$$

sicchè la terza può scriversi:

$$dp_1+dp_2+dp_3-\frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3}(dx_1+dx_2-8dx_3)=0.$$

Si vede quindi che il primo sistema ammette i tre integrali:

$$x_1-7x_3=\text{cost.},\quad x_2-2x_3=\text{cost.},\quad \frac{p_1+p_2+p_3}{x_1+x_2-8x_3}=\text{cost.},$$

dai quali si deduce l'integrale intermedio dell' equazione proposta:

(74) $p_1+p_2+p_3=(x_1+x_2-8x_3)\,\varphi(x_1-7x_3,\ x_2-2x_3).$

Poichè il secondo sistema non ammette che due soli integrali, dovremo integrare quest' equazione. Il suo sistema ausiliario è:

$$\frac{dx_1}{1}=\frac{dx_2}{1}=\frac{dx_3}{1}=\frac{dz}{(x_1+x_2-8x_3)\,\varphi(x_1-7x_3,\ x_2-2x_3)}.$$

I tre primi membri ci danno gl' integrali:

$$x_1-x_3=u_1,\quad x_2-x_3=u_2,$$

dove u_1, u_2 sono costanti arbitrarie; dopo ciò si ha dai due ultimi membri:

$$dz = (u_1 + u_2 - 6x_3)\,\varphi(u_1 - 6x_3,\ u_2 - x_3)\,dx_3,$$

e quindi, posto:

$$(75)\qquad \int (u_1 + u_2 - 6x_3)\,\varphi(u_1 - 6x_3,\ u_2 - x_3)\,dx_3 = \psi(u_1, u_2, x_3),$$

e indicando con u_3 una terza costante arbitraria, si ha un terzo integrale:

$$z - \psi(x_1 - x_3,\ x_2 - x_3,\ x_3) = u_1.$$

Pertanto l'integrale della (74), e quindi anche dell' equazione proposta, è:

$$z = \psi(x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_3) + \chi(x_1 - x_3, x_2 - x_3),$$

dove ψ è una funzione legata alla funzione arbitraria di due argomenti φ dalla relazione (75), e χ è una nuova funzione arbitraria di due argomenti.

Messina, 7. giugno 1896.