Symmetrische Functionen.

Von

P. Gordan in Erlangen.

Die symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung sind ganze Functionen ihrer Coefficienten.

Von diesem Fundamentalsatze macht man in allen Gebieten der Algebra Gebrauch, besonders bei der Bildung der Resolventen und der Resultanten.

Bei der Durchführung der betreffenden Aufgaben sind oft verwickelte Rechnungen nothwendig; in einfacheren Fällen kann man sich auch der Tafeln bedienen.

Zur Erleichterung der hiebei auftretenden Operationen haben viele bedeutende Mathematiker u. A. Cayley und Betti Relationen zwischen symmetrischen Functionen entwickelt. In der letzten Zeit hat Herr Mac-Mahon im Amerikanischen Journal Volume 11, 12, 14 eine Reihe ausgedehnter Arbeiten veröffentlicht. Besonders hat er sich mit der Waring'schen Formel beschäftigt, welche die Summen der Potenzen der Wurzeln durch die Coefficienten ausdrückt.

Diese Arbeiten habe ich nun in der nachstehenden Untersuchung fortzuführen gestrebt, indem ich nicht nur die Potenzsummen s als Functionen $s(a)$ der Coefficienten a darstellte, sondern umgekehrt die Coefficienten a als Functionen $\psi(s)$ der Potenzsummen untersuchte.

Will man für irgend welche Functionen

$$\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_n$$

der Wurzeln einer oder mehrerer Gleichungen die Resolvente

$$\Xi = (x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\ldots$$

aufstellen, so kann man diesen Process in 2 Theile auflösen:

1. Man bestimme die Potenzsumme

$$S_g = \xi_1^g + \xi_1^g \cdots \xi_n^{g_n}.$$

2. Man rechne die Functionen $\psi(S)$ aus, es sind die Coefficienten der gesuchten Gleichung.

Der Prozess die S zu finden entspricht der Bildung der Logarithmen gegebener Reihen und die Aufsuchung der Functionen ψ der Bildung ihrer Exponentialfunctionen.

Durch dieses Verfahren habe ich zweierlei Resultate gewonnen:

1. Ich habe die Resultanten zweier Gleichungen die Discriminante einer Gleichung und verschiedene Resolventen in expliciter Form dargestellt.
2. Ich habe die numerischen Coefficienten, welche in diesen Bildungen auftreten, explicite dargestellt.

Die erste Aufgabe ist nun schon längst mittelst Determinanten gelöstt. Aber diese Art Lösung ist nur von formaler Bedeutung, da die Berechnung von Determinanten bei einer grösseren Anzahl von Reihen für die Praxis nicht durchgeführt werden kann.

1. Capitel.

Die Functionen s und ψ.

§ 1.

Definition der Functionen s und ψ.

Die einfachsten symmetrischen Functionen von Variabeln

$$\xi_1\ \xi_2 \ldots$$

sind ihre Elementarfunctionen a und ihre Potenzsummen s, sie sind durch die Formeln definirt:

$$f(x, a) = \sum_g a_g x^g = \prod_\varrho (1 - \xi_\varrho x)$$

$$s_g = \sum_\varrho \xi_\varrho{}^g.$$

Man kann die a aus den s und die s durch die a berechnen; dieser Vorgang möge durch die Formeln angedeutet werden:

$$s_g = s_g(a); \quad a_g = \psi_g(s)$$

aus ihnen folgt:

$$s_g\left(\psi(s)\right) = s_g; \quad \psi_g\left(s(a)\right) = a_g.$$

Beispiele.

1) $f(x, a) = (1-x)^n$; $s_g = n$; $a_g = (-1)^g \binom{n}{g}$;

2) $f(x, a) = 1 - x^n$; $s_g = n$ oder 0 je nachdem g den Factor n hat oder nicht. $a_g = 1, -1, 0$ je nachdem $g = 0, n$ oder $\gtrless 0, n$ ist.

§ 2.

Die Producte p.

Die Producte der a bezeichne ich durch

$$p_\varkappa(a) = a_1^{\varkappa_1} a_2^{\varkappa_2} \ldots$$

und ordne sie nach ihrem Gewichte

$$g = \varkappa_1 + 2\varkappa_2 \ldots$$

der Art, dass Producte p von kleinerem Gewichte voranstehen. Bei p' von gleichem Gewichte stehen die voran, bei denen

$$h = \varkappa_1 + \varkappa_2 \cdots$$

einen grösseren Werth hat.

Vorstehende p gelten für einfacher, spätere für verwickelter. Das einfachste p vom Gewichte g ist $a_1{}^g$ das verwickelste a_g.

Den Process $a_\varrho a_\sigma$ durch $a_{\varrho+\sigma}$ zu ersetzen, nenne ich Faltung, und den umgekehrten $a_{\varrho+\sigma}$ durch $a_\varrho a_\sigma$ zu ersetzen, Spaltung; beide ändern das Gewicht nicht. Spaltung erzeugt einfachere p, Faltung verwickeltere.

Durch fortgesetzte Faltung erhält man aus $a_1{}^g$ alle p vom Gewichte g und ebenso durch fortgesetzte Spaltung von a_g.

Eine besondere Art von Faltung und Spaltung ist das Ersetzen von $a_{\varrho+1}$ und $a_1 a_\varrho$ durch einander. Spaltet man so in $p_\varkappa$ alle Factoren ausser den a_1 also $h - \varkappa_1$ Factoren, so erhält man:

$$P = a_1^{h}{}_1^{+\varkappa_2} a_2^{\varkappa_3} a_3^{\varkappa_4} \ldots$$

und P erzeugt durch Faltungen, bei denen $a_1^{h_1}$ betheiligt ist, ausser $p_\varkappa$ solche p, welche durch specielle Spaltungen aus $p_\varkappa$ entstehen.

Beispiel.

$$a_1^{m-\varrho} . a_\varrho \text{ erzeugt durch Faltung } a_1^{m-\varrho-1} a_{\varrho+1} \text{ und } a_1^{m-\varrho} a_\varrho$$

und

$$a_1^{m-\varrho-1} a_{\varrho+1} \text{ dnrch Spaltung } a_1^{m-\varrho} a_\varrho ;$$

$$a_1^{m-1} . a_1 \text{ erzeugt durch Faltung } a_1^{m-2} a_2 \text{ und } a_1^m$$

und

$$a_1^{m-2} a_2 \text{ durch Spaltung } a_1^m.$$

§ 3.

Zusammengesetzte ξ.

Die Variabeln ξ können auch aus anderen zusammengesetzt sein; wir wollen fünf Beispiele anführen.

1. Beispiel.

Die ξ seien Quotienten von Variabeln

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m; \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m,$$

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho}.$$

Es wird dann:

$$s_g = \sum_{\varrho,\sigma} \left(\frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho}\right)^g,$$

$$\prod_{g=1}^{g=mn} \psi_g(s)\, x^g = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} \prod_{\sigma=1}^{\sigma=n} \left(1 - \frac{\beta_\sigma}{\alpha_\varrho} x\right).$$

Sind $\alpha\beta$ die Wurzeln von Gleichungen

$$f(x, a) = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} (1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = \prod_{\sigma=1}^{\sigma=n} (1 - \beta_\sigma x)$$

so ist:

$$s_g = s_{-g}(a)\, s_g(b).$$

2. Beispiel.

Die ξ sind die Quotienten der Wurzeln

$$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_m$$

der Gleichung:

$$f(x, a) = \prod_{\varrho=1}^{\varrho=m} (1 - \alpha_\varrho x),$$

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \frac{\alpha_\sigma}{\alpha_\varrho} \qquad\qquad \varrho \gtrless \sigma.$$

Es wird:

$$s_g = s_g(a)\, s_{-g}(a) - m,$$

$$\sum_{g=0}^{g=m(m-1)} \psi_g(s) x^g = \prod_{\varrho,\sigma} \left(1 - \frac{\alpha_\sigma}{a_\varrho} x\right).$$

3. Beispiel.

Die ξ sind Producte aus ν Reihen von Variabeln

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots, \quad \beta_1 \beta_2 \ldots, \quad \gamma_1, \gamma_2 \ldots$$

den Wurzeln von:

$$f(x, a) = \prod_\varrho (1 - a_\varrho x),$$

$$f(x, b) = \prod_\varrho (1 - \beta_\varrho x),$$

$$f(x, c) = \prod_{\varrho} (1 - \gamma_\varrho x),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\xi_{\varrho_1, \varrho_2 \cdots \varrho_\nu} = \alpha_{\varrho_1} \beta_{\varrho_2} \gamma_{\varrho_3} \cdots.$$

Wir erhalten:

$$S_g = \sum \xi^g = s_g(a)\, s_g(b)\, s_g(c) \cdots.$$

Die Gleichung deren Wurzeln die ξ sind, sei

$$f(x, a, b, c \cdots) = f(x, A) = \prod_{\varrho} (1 - \xi_\varrho x),$$

so dass:

$$A_g = \psi_g(S); \quad s_g(A) = S_g,$$

$$f(x, a, b, c \cdots) = \prod_{\varrho} f(\alpha_\varrho x, b, c \cdots)$$

wird.

In dem speciellen Falle:

$$f(x, a) = 1 - x$$

wird:

$$f(x, a, b, c \cdots) = f(x, b, c \cdots).$$

Den $\log f(x, a, b, c)$ bezeichne ich durch $\vartheta(x, a, b, c)$, seine Reihenentwicklung lautet:

$$\vartheta(x, a, b, c) = -\sum_{g} \frac{1}{g} S_g x^g.$$

4. Beispiel.

$$f(x, a) = \prod_{\varrho} (1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = (1 - x)^n.$$

Die ξ sind die Producte der:

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m \text{ und } n \text{ Zahlen } \beta_1 = \beta_2 \cdots \beta_n = 1,$$

also n Mal die Variabeln α. Somit ist

$$f(x, a, b) = f^n(x, a),$$

$$s_g = n \cdot s_g(a).$$

Die Coefficienten von $(1 - x)^n$ sind die $\psi\big(s(b)\big)$

$$\psi_g\big(s(b)\big) = (-1)^g \frac{n!}{g!\,(n-g)!}$$

und die Coefficienten von f^n die $\psi\big(n s(a)\big)$

$$\psi_g\big(n s(a)\big) = \sum_{\varkappa} \frac{n!}{(n-h)!} \frac{1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa(a),$$

$$\psi_g\big(n s(a)\, s(b)\big) = \sum_{k} \frac{n!}{(n-h)!} \frac{1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa\Big(\psi\big(s(a)\, s(b)\big)\Big).$$

5. Beispiel.

$$f(x, a) = \prod_\varrho (1 - \alpha_\varrho x); \quad f(x, b) = 1 - x^n.$$

Die ξ sind die Producte der:

$$\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_m \quad \text{und} \quad 1 \;\; \varepsilon \;\; \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n-1}$$

wo

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}.$$

Wir erhalten

$$\xi_{\varrho,\sigma} = \varepsilon^\varrho \alpha_\sigma,$$

$$f(x, a, b) = \prod_\varrho f(\varepsilon^\varrho x, a) = \prod_\varrho (1 - \alpha_\varrho^n x^n),$$

$$S_g = \begin{cases} 0 & \text{für } g \not\equiv 0, \text{ mod. } n, \\ n s_g(0) & \;\;,, \;\; g \equiv 0, \;\;\;,, \;\; n. \end{cases}$$

Die Coefficienten von $f(x, a, b)$ sind die $\psi_g(S)$; sie verschwinden wenn g nicht durch n theilbar ist, für die $\psi_{gn}(S)$ haben wir die Formel:

$$\psi_{gn}(S) = \psi_{gn}\big(n s(a)\big).$$

§ 4.

Die Waring'sche Formel.

Aus den Formeln:

$$f(x, a) = \prod_\varrho (1 - \nu_\varrho x);$$

$$f(x, A) = \prod_\varrho (1 - \xi_\varrho x) = \prod (1 - \alpha_{\varrho_1} \beta_{\varrho_2} \gamma_{\varrho_3} \cdots x)$$

folgt

$$\log f(x, a) = \vartheta(x, a) = -\sum_g \frac{1}{g} s_g(a) x^g,$$

$$\log f(x, a, b, c \;\cdots) = \vartheta(x, a, b, c \cdots) = -\sum_g \frac{1}{g} S_g x^g,$$

wo

$$S_g = s_g(a) s_g(b) s_g(c) \cdots.$$

Die Entwicklung des Logarithmus liefert:

$$\log f(x, a) = \sum_1 \frac{(-1)^{h-1}}{h} (a_1 x + a_2 x^2 \cdots)^h = \sum_{k'} (-1)^{h-1} \frac{(h-1)!}{\varkappa_1! \, \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa(a) x^g,$$

$$\log f(x, a, b \cdots) = \sum_k (-1)^h \frac{(h-1)!}{\varkappa_1! \, \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa(A) x^g.$$

Vergleicht man die Coefficienten von x^g, so erhält man die Formeln:

$$s_g(a) = \sum_\varkappa (-1)^h \frac{(h-1)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots} p_\varkappa(a),$$

$$S_g = \sum_\varkappa (-1)^h \frac{(h-1)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots} p_\varkappa(A).$$

Die $p_\varkappa$ haben das Gewicht von g.

Beispiel.

$$\prod_p (1 - \alpha_\varrho x) = \frac{1-e^x}{x}.$$

Wurzeln α: $\frac{1}{2i\pi}, \frac{1}{4i\pi} \dots$

$$a_g = \frac{1}{(g+1)!}; \quad s_{2g} = \sum \frac{(-1)^g}{2^{2g-1}\pi^{2g}}; \quad s_{2g+1} = 0,$$

$$\sum_\varrho \frac{1}{\varrho^{2g}} = (-1)^g 2^{2g-1}\pi^{2g} \sum_\varkappa (-1)^h \frac{(h-1)!}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots} \left(\frac{1}{2!}\right)^{\varkappa_1} \left(\frac{1}{3!}\right)^{\varkappa_2}.$$

§ 5.

Entwicklung der ψ.

Aus der Formel:

$$f = e^\vartheta$$

folgen diese:

$$f = \sum_h \frac{\vartheta^h}{h!},$$

$$f(x, a) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\dots} p_\varkappa\big(s(a)\big)\, x^g,$$

$$f(x, A) = f(x, a, b, c\dots) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\dots} p_\varkappa(S)\, x^g$$

und, wenn man die Coefficienten von x^g vergleicht:

$$a_g = \psi_g\big(s(a)\big) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!,\dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\dots} p_\varkappa\big(s(a)\big),$$

$$A_g = \psi_g(S) \quad = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\dots} p_\varkappa(S).$$

Für die Resultante R der Gleichungen:

$$f(x, a), \quad f(x, b)$$

nnd für die Discriminante Δ einer Gleichung $f(x, a)$ folgen hieraus die Formeln:

$$R = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{h+mn}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}\, a_m^n \left(s_{-1}(a)\, s_1(b)\right)^{\varkappa_1} \left(s_{-2}(a)\, s_2(b)\right)^{\varkappa_2} \ldots,$$

$$\Delta = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^{h}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2}\ldots}\, a_m^{m-1} \left(s_{-1}(a)\, s_1(a) - m\right)^{\varkappa_1} \left(s_{-2}(a)\, s_2(a) - m\right)^{\varkappa_2} \ldots.$$

Die 1. Summe erstreckt sich über die Producte, deren Gewicht $\leqq mn$ ist, und die 2. über die, deren Gewicht $\leqq m \cdot m - 1$ ist.

§ 6.

Die Newton'schen Formeln.

Vergleicht man in der Formel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{d\vartheta}{dx} = 0$$

die Coefficienten der Potenzen von x, so wird:

$$0 = a_0 s_g + a_1 s_{g-1} \cdots g a_g$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$0 = a_0 s_g(a) + a_1 s_{g-1}(a) \ldots a_{g-1} s_1(a) + g a_g.$$
$$0 = \psi_0(s)\, s_g + \psi_1(s)\, s_{g-1} \ldots \psi_{g-1}(s) s_1 + g \psi_p(a),$$
$$0 = A_0 S_g + A_1 S_{g-1} \qquad \ldots A_{g-1} S_{g-1} + g A_g.$$

Sie dienen zur schrittweisen Berechnung der a, A aus den s, S, also der Resultante und Discriminante

$$A_1 + A_2 \cdots.$$

2. Capitel.

Relationen zwischen den $s(a)$ und $\psi(s)$.

§ 1.

Die $\psi\left(s(a) + s(b)\right)$.

Die Coefficienten des Productes

$$f(x, a)\, f(x, b)$$

sind nach der Formel:

$$-\log\left(f(x, a)\, f(x, b)\right) = \sum_g \frac{1}{g} \left(s_g(a) + s_g(b)\right) x^g$$

die Functionen:

$$\psi\left(s(a) + s(b)\right).$$

Es ist:

$$\psi_g\left(s(a)+s(b)\right)=\sum_{\varrho,\sigma} a_\varrho b_\sigma,$$

$$\psi_g\Big(s(a)\left(s(b)+s(c)\right)\Big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\left(s(a)\,s(b)\right)\psi_\sigma\left(s(a)\,s(c)\right).$$

Die Summen erstrecken sich über alle ϱ, σ, bei denen

$$\varrho+\sigma=g$$

ist, also a_g durch Faltung aus $a_\varrho a_\sigma$ entsteht.

1. Beispiel.

$$f(x,b)=1-x.$$

$$s_g(b)=1;\quad \psi_g\left(s(a)+1\right)=a_g-a_{g-1},$$

$$\psi_g\Big(\left(s(a)+1\right)s(b)\Big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\left(s(a)\,s(b)\right)b_\sigma.$$

2. Beispiel.

$$f(x,b)=1-xy.$$

$$s_g(b)=y^g;\quad \psi_g\left(s_\varrho(a)+y^\varrho\right)=a_g-y\,a_{g-1},$$

$$\psi_g\Big(\left(s_\varrho(a)+g^\varrho\right)s_\varrho(b)\Big)=\sum_{\varrho,\sigma}\psi_\varrho\left(s(a)\,s(b)\right)\;g^\sigma b_\sigma.$$

3. Beispiel.

$$(1-x)^n.$$

$$s_g(b)=n;\quad \psi_g\left(s(a)+n\right)=\sum_{\varrho}(-1)^\varrho\frac{n!}{\varrho!\,(n-\varrho)!}\,a_{g-\varrho},$$

$$\psi_g\Big(\left(s(a)+n\right)s(b)\Big)=\sum_{\varrho}\psi_\varrho\left(s(a)\,s(b)\right)\psi_\sigma\left(n\,s(b)\right),$$

$$=\sum_{\varrho,\varkappa}\frac{n!}{(n-h)!}\,\frac{1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots}\,p_\varkappa(b)\,\psi_\varrho\left(s(a)\,s(b)\right).$$

§ 2.

Differentiation nach den s.

Differentiirt man die Formel:

$$f=e^\vartheta$$

nach s_ϱ und nach $s_1^{\varkappa_1}s_2^{\varkappa_2}\ldots$, so wird:

$$\frac{df}{ds_\varrho}=-\frac{x^\varrho}{\varrho}f;\quad \frac{d_hf}{ds_1^{\varkappa_1}ds_2^{\varkappa_2}\ldots}=\frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}\,x^g f.$$

Vergleicht man hier die Coefficienten der Potenzen von x, so folgt:

$$\frac{d\psi_l(s)}{ds_\varrho} = \frac{da_l}{ds_\varrho(a)} = -\frac{1}{\varrho}\, a_{l-\varrho},$$

$$\frac{d_h\psi_l(s)}{ds_1^{\varkappa_1}\, ds_2^{\varkappa_2}\ldots} = \frac{d_h a_l}{d\big(s_1(a)\big)^{\varkappa_1} d\big(s_2(a)\big)^{\varkappa_2}\ldots} = \frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\ldots}\, a_{l-g},$$

$$\frac{dA_l}{ds_\varrho(a)} = -\frac{1}{\varrho}\,\frac{S_\varrho}{s_\varrho(a)}\, A_{l-\varrho},$$

$$\frac{d_h A_l}{d\big(s_1(a)\big)^{\varkappa_1} d\big(s_2(a)\big)^{\varkappa_2}\ldots} = \frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\ldots}\, A_{l-g}\, p_\varkappa\left(\frac{S}{s(a)}\right).$$

§ 3.

Differentiation nach den a.

Differentiirt man die Formel:

$$\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = -\log f$$

nach a_ϱ und den Factoren von $a_1^{\alpha_1} a_2^{\varkappa_2}\ldots$ so wird:

$$\frac{d}{da_\varrho}\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = -\, x^\varrho f\big(x, \psi(-s)\big),$$

$$\frac{d_h}{da_1^{\varkappa_1}\, da_2^{\varkappa_2}\ldots}\sum_l \frac{1}{l}\, s_l\, x^l = (-1)^h\, (h-1)!\, x^g f\big(x, \psi(-s\big)$$

und vergleicht man die Coefficienten von x^l, so hat man

$$\frac{ds_l}{da_\varrho} = -\, l\, \psi_{l-\varrho}(-s),$$

$$\frac{d_h\, s_l}{da_1^{\varkappa_1}\, da_2^{\varkappa_2}\ldots} = (-1)^h\, (h-1)\, l\,.\,l\, \psi_{l-g}(-s).$$

Ferner ist:

$$\frac{dA_r}{da_\varrho} = \sum_l \frac{dA_r}{ds_l(a)}\,\frac{ds_l(a)}{da_\varrho} = \sum_l \frac{S_l}{s_l(a)}\, A_{r-l}\, \psi_{l-\varrho}\big(-s(a)\big)$$

und im Besonderen:

$$\frac{dA_r}{da_r} = \frac{S_r}{s_r(a)}.$$

§ 4.

Die Producte der s.

Die $p_\varkappa(s)$ sind ganze Functionen der s vom Gewichte g, ich bezeichne in ihnen die Coefficienten der $p_\lambda(a)$ durch:

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\ 2^{\lambda_2}\dots \end{pmatrix}$$

setze also:

$$p_\varkappa\big(s(a)\big) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\ 2^{\lambda_2}\dots \end{pmatrix} p_\lambda(a),$$

$$p_\varkappa(S) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\ 2^{\lambda_2}\dots \end{pmatrix} p_\lambda(A).$$

Die Summen erstrecken sich über alle p_λ, welche durch fortgesetzte Spaltung aus $p_\varkappa$ entstehen. Die Zahl

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\ 2^{\lambda_2}\dots \end{pmatrix}$$

st der Coefficient von $p_\lambda(a)$ in $p_\varkappa\big(s(a)\big)$ oder verschwindet, je nachdem $p_\varkappa$ durch fortgesetzte Spaltung p_λ erzeugt oder nicht.

Beispiele.

$$\begin{pmatrix} g \\ 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \end{pmatrix} = (-1)^h g \frac{(\varkappa-1)!}{\varkappa_1!\ \varkappa_2!\dots},$$

$$\begin{pmatrix} g \\ g \end{pmatrix} = -g; \quad \begin{pmatrix} 2\varrho \\ \varrho^2 \end{pmatrix} = \varrho; \quad \begin{pmatrix} \varrho+\sigma \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = \varrho+\sigma,$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1}\ 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^g \end{pmatrix} = (-1)^g,$$

$$\begin{pmatrix} \varrho^2 \\ \varrho^2 \end{pmatrix} = \varrho^2; \quad \begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = \varrho\sigma$$

$$\begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^2 \\ \varrho,\ \sigma \end{pmatrix} = 0,$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\begin{pmatrix} \varrho,\ \sigma \\ \lambda,\ \mu \end{pmatrix} = 0,$$

wenn $\varrho, \sigma, \lambda, \mu$ verschieden sind.

§ 5.

Die Producte der $\psi\left(s(a)+s(b)\right)$.

Die Producte

$$p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)=p_\varkappa\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=\varrho} a_\nu\, b_{\nu-\varrho}\right)$$

sind ganze Functionen der a, b; ich bezeichne in ihnen die Coefficienten der $p_\lambda(a)\, p_\mu(b)$ durch:

$$\left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\dots \mid 1^{\mu_1}\, \mu_2 \dots\end{matrix}\right)$$

setze also:

$$p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)=\sum_{\lambda,\mu}\left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\dots \mid 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2} \dots\end{matrix}\right) p_\lambda(a)\, p_\mu(b).$$

Die $p_\varkappa$ entstehen durch Faltung aus den $p_\lambda p_\mu$; bei diesem Processe werden die Factoren von p_λ mit denen von p_μ zu Factoren von $p_\varkappa$ gefaltet; das $p_\varkappa$ besitzt ausser von p_λ und p_μ übernommenen Factoren nur solche, die durch Faltung entstehen.

Die Symbole:

$$\left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\dots \mid 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2} \dots\end{matrix}\right)$$

bedeuten die Coefficienten der $p_\lambda(a)\, p_\mu(b)$ *in* $p_\varkappa\left(\psi\left(s(a)+s(b)\right)\right)$ oder verschwinden, je nachdem $p_\varkappa$ durch obige Faltungen aus $p_\lambda p_\mu$ entsteht oder nicht; sie genügen der Relation

$$\left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\dots \mid 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2} \dots\end{matrix}\right)=\left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1}\, 2^{\varkappa_2}\dots \\ 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2}\dots \mid 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2} \dots\end{matrix}\right).$$

Beispiele.

$$\left(\begin{matrix} \varkappa^m \\ 1^{\lambda_1}\, 2^{\lambda_2}\dots \mid 1^{\mu_1}\, 2^{\mu_2} \dots\end{matrix}\right)=\frac{m!}{(m-h)!\,\varkappa_1!\,\varkappa_2!},$$

wo:

$$h=\lambda_1+\lambda_2\dots;\quad \mu_{m-\nu}=\lambda_\nu,$$

$$\left(\begin{matrix} 1^{m-\varrho} & \varrho \\ 1^{m-\varrho} \mid & \varrho\end{matrix}\right)=1 \quad \text{für} \quad \mu_{m-\nu}=\lambda_\nu,$$

$$\left(\begin{matrix} 1^{m-\varrho} & \varrho \\ 1^{m-\varrho} \mid & \varrho\end{matrix}\right)=1 \quad \text{für} \quad \varrho>1,$$

$$\left(\begin{matrix} 1^{m-\varrho-1} & \varrho+1 \\ 1^{m-\varrho} \mid & \varrho\end{matrix}\right)=1,$$

3. Capitel.

Die V.

§ 1.

Definition der V.

In der Summe

$$f(x, a, b) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}\, p_\varkappa\big(s(a)\, s(b)\big)\, x^g$$

$$= \sum_{\varkappa, \mu} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}\, p_\varkappa\big(s(a)\big) \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\mu(b)\, x^g$$

bezeichne ich den Coefficienten von $x^g p_\mu(b)$ durch:

$$V_{1^{\mu_1} 2^{\mu_2}} \ldots (a) = V_{(\mu)}(a).$$

Er hat den Werth:

$$V_{(\mu)}(a) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\varkappa\big(s(a)\big)$$

$$= \sum_{\varkappa, \lambda} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \ldots, 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} p_\lambda(a).$$

Die 1. Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung aus p_μ entsteht und die 2. Summe über alle $\varkappa$, λ, bei denen $p_\varkappa$ aus p_λ und p_μ durch Faltung erzeugt wird.

Vergleicht man in der Formel:

$$f(x, a, b) = \prod_{\varrho} (\alpha_\varrho x, b) = \sum_{(\mu)} p_\mu(b)\, V_{(\mu)}(a)$$

auf beiden Seiten die Coefficienten von:

$$p_\mu(b) = b_{\nu_1} b_{\nu_2} \ldots$$

so wird:

$$V_{(\mu)}(a) = \sum \alpha_1^{\nu_1} \alpha_2^{\nu_2} \ldots$$

die Summe erstreckt sich über alle Combinationen der α, bei denen die Producte $\alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots$ verschieden sind.

Beispiele.

$$a_1^g,\ a_g,\ a_\varrho \cdot a_\varrho;\quad a_\varrho \cdot a_\sigma \quad \text{für} \quad \varrho \gtrless \sigma$$

erzeugen durch Faltung:

$$p_\varkappa(a);\ a_g;\ a_\varrho^2,\ a_{2\varrho};\ a_\varrho a_\sigma,\ a_{\varrho+\sigma}$$

denen diese V entsprechen:

$$V_{1^g}(a) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots 1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_2}\dots} \binom{1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_2}\dots}{1^g} p_{\varkappa}\big(s(a)\big)$$

$$= (-1)^g \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\dots 1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_2}\dots} p_{\nu_1}\big(s(a)\big) = (-1)^g a_g,$$

$$V_g(a) = -\frac{1}{g}\binom{g}{g} s_g(a) = s_g(a),$$

$$V_{\varrho^2}(a) = \frac{1}{2\varrho^2}\binom{\varrho^2}{\varrho^2} s_\varrho^2(a) - \frac{1}{2\varrho}\binom{2\varrho}{\varrho^2} s_{2\varrho}(a)$$

$$= \frac{1}{2} s_\varrho^2(a) - \frac{1}{2} s_{2\varrho}(a),$$

$$V_{\varrho,\sigma}(a) = \frac{1}{\varrho\sigma}\binom{\varrho,\ \sigma}{\varrho,\ \sigma} s_\varrho(a)\, s_\sigma(a) - \frac{1}{\varrho+\sigma}\binom{\varrho+\sigma}{\varrho,\ \sigma} s_{\varrho+\sigma}(a)$$

$$= s_\varrho(a)\, s_\sigma(a) - s_{\varrho+\sigma}(a).$$

§ 2.

Die Differentialquotienten der V.

Vergleicht man in der Formel (vgl. § 2, 2. Cap.):

$$\frac{\partial f(x, a, b)}{\partial s_\varrho(0)} = -\frac{x^\varrho}{\varrho} s_\varrho(b) f(x, a, b)$$

die Coefficienten von $x^g p_\nu(b)$ so wird

$$\frac{\partial V_{(\varkappa)}(a)}{\partial s_\varrho(a)} = \sum_{i,\varkappa} \frac{(-1)^{h-1}(h-1)!}{i_1!\, i_2!} \frac{1}{\varrho} V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle i, k, bei denen:

$$p_i p_\varkappa = p_\nu$$

ist. Man kann diese Formel auch durch diese ersetzen:

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial V_{(k)}(a)}{d a_\lambda} a_{\lambda-\varrho} = \sum_{i,\varkappa} \frac{(-1)^h (h-1)!}{i_1!\, i_2! \dots} V_{(\varkappa)}(a)$$

und aus ihr diese ableiten:

$$\frac{\partial V_{(\nu)}(a)}{\partial a_\lambda} = \sum_{\varrho, i, k} \frac{(-1)^h (h-1)!}{i_1!\, i_2! \dots} V_{(\varkappa)}(a)\, \psi_{\varrho-\lambda}\big(-s(a)\big).$$

§ 3.

Summen von Coefficienten.

Die Summen der Coefficienten der V in der Formel:

$$f(x, a, b) = \sum_g \psi_g\big(s(a)\, s(b)\big)\, x^g = \sum_\lambda p_\lambda(a)\, V_{(\lambda)}(b)\, x^g$$

hat den Werth:

$$f(x, e) = \sum_\lambda p_\lambda(a)\, x^g = \sum_\lambda (a_1 x)^{\lambda_1} (a_2 x^2)^{\lambda_2} \ldots = \prod_\varrho \frac{1}{1 - a_\varrho x^\varrho}.$$

Sein Logarithmus ist:

$$\vartheta(x, e) = -\sum_g \frac{1}{g}\, s_g(e)\, x^g = -\sum_\varrho \log(1 - a_\varrho x^\varrho) = \sum_{\varrho, \sigma} \frac{1}{\sigma}\, a_\varrho^\sigma x^{\varrho\sigma}$$

und demnach:

$$s_g(e) = -\sum_{\varrho, \sigma} \varrho\, a_\varrho^\sigma.$$

Die Summe erstreckt sich über alle ϱ, σ, für welche

$$\varrho\sigma = g$$

ist.

§ 4.

Producte der V.

Aus den Formeln:

$$f\Big(x,\ a,\ \psi\big(s(b) + s(c)\big)\Big) = \sum_{g, \varkappa} p_\varkappa\Big(\psi\big(s(b) + s(c)\big)\Big)\, V_{(\varkappa)}(a)\, x^g,$$

$$f\Big(x,\ a,\ \psi\big(s(b) + s(c)\big)\Big) = f(x, a, b)\, f(x, a, c),$$

$$p_\varkappa\Big(\psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big) = \sum_{\lambda, \mu} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) p_\lambda(b)\, p_\mu(c)$$

folgt diese:

$$f(x, a, b)\, f(x, a, c) = \sum_{g, \varkappa, \lambda, \mu} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, x^g\, V_{(\varkappa)}(a)$$

$$= \sum_{g, \lambda, \mu} p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, V_{(\lambda)}(a)\, V_{(\mu)}(a)\, x^g$$

und wenn man die Coefficienten von

$$p_\lambda(b)\, p_\mu(c)\, x^g$$

vergleicht:

$$V_\lambda(a)\, V_\mu(a) = \sum_\varkappa \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix} \right) V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung aus $p_\lambda\, p_\mu$ entsteht.

1. Beispiel.

$$V_{1^m}\, V_{1^{\varkappa_2}\, 2^{\varkappa_3} \dots} \quad \text{wo} \quad m = \nu_1 + \nu_2 \dots .$$

$$V_{1^m}(a) = (-1)^m a_m;$$

da durch Faltung von

$$a_1^m \cdot a_1^{\nu_2} a_2^{\nu_3} \cdots$$

u. A. $p_\nu(a)$ entsteht, so kommt rechter Hand $V_{(\nu)}$ vor, so dass man hat:

$$V_{(\nu)}(a) = (-1)^m a_m\, V_{1^{\nu_2} 2^{\nu_3} \dots}(a) - \sum_\varkappa \begin{pmatrix} & 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^m \mid & 1^{\nu_2} 2^{\nu_3} \dots \end{pmatrix} V_{(\varkappa)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ aus p_ν durch Spaltungen von $a_{\varrho+1}$ in $a_1\, a_\varrho$ entsteht.

Die Formel drückt $V_{(\nu)}$ durch einfachere V desselben Gewichtes und das $V_{1^{\nu_2} 2^{\nu_3} \dots}$ von niederem Gewichte aus.

2. Beispiel.

$$V_{1^\varrho}\, V_{g-\varrho} \quad \text{wo} \quad g - \varrho > 1.$$

$$V_{1^\varrho} = (-1)^\varrho a_\varrho; \quad V_{g-\varrho} = s_{g-\varrho},$$

$$(-1)^\varrho a_\varrho s_{g-\varrho}(a) = \sum_\varkappa \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \dots \\ 1^\varrho \mid g - \varrho \end{pmatrix} V_{(\varkappa)}(a),$$

$a_1^\varrho \cdot a_{g-\varrho}$ erzeugt durch Faltung $a_1^\varrho\, a_{g-\varrho}$ und $a_1^{\varrho-1} a_{g-\varrho+1}$; die Coefficienten:

$$\begin{pmatrix} 1^\varrho & g-\varrho \\ 1^\varrho \mid & g-\varrho \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1^{\varrho-1} & g-\varrho+1 \\ 1^\varrho \mid & g-\varrho \end{pmatrix}$$

haben den Werth 1; es wird mithin:

$$a_\varrho s_{g-\varrho}(a) = (-1)^\varrho\, V_{1^\varrho g-\varrho}(a) - (-1)^{\varrho-1}\, V_{1^{\varrho-1} g-\varrho+1}(a),$$

und durch Summation:

$$V_{1^m g-m}(a) = (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_\varrho\, s_{g-\varrho}(a).$$

§ 5.

Werthe der V für specielle $f(x, a)$.

1. $f(x, a) = 1 - x$,

$$f(x, a, b) = f(x, b); \quad a_0 = 1; \quad a_1 = -1; \quad a_\varrho = 0 \quad \text{für} \quad \varrho > 1,$$

$$\sum_\varkappa p_\varkappa(b)\, V_{(\varkappa)}(a) x^g = \sum_g b_g x^g.$$

Die $V_{(\varkappa)}(a)$ haben den Werth 1 oder 0, je nachdem $p_\varkappa$ nur einen Factor hat oder mehrere.

Folgerung.

Der Factor von a_1^g verschwindet in $V_{(\varkappa)}$, wenn $p_\varkappa$ mehr als einen Factor hat und hat den Coefficienten $(-1)^g$, wenn $p_\varkappa(a) = a_g$ ist.

$$2.\quad f(x, a) = (1-x)^n.$$

$$a_g = (-1)^g \frac{n!}{(n-g)!\, g!} = (-1)^g \frac{n \cdot n-1 \cdots n-g+1}{1 \cdot 2 \cdots g},$$

$$f(x, a, b) = f^n(x, b),$$

$$\sum_\varkappa p_\varkappa(b)\, V_{(\varkappa)}(a)\, x^g = \sum_\varkappa \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots} p_\varkappa(b)\, x^g,$$

$$V_{(\varkappa)}(a) = \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots}.$$

Für $n = -1$ wird $a_g = 1$

$$V_{(\varkappa)}(a) = (-1)^h \frac{h!}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots}.$$

Folgerung.

Die Summen der Coefficienten in $V_{(\varkappa)}(a)$ ist $(-1)^h \frac{h!}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots}$ also gleich den Coefficienten von $p_\varkappa(a)$ in $f^{-1}(x, a)$.

$$3.\quad \vartheta(x, a) = x.$$

$$f(x, a) = e^x; \quad a_\varrho = \frac{1}{\varrho!},$$

$$\vartheta(x, a, b) = s_1(b)x = -b_1 x,$$

$$f(x, a, b) = e^{-b_1 x},$$

$V_{(\varkappa)}(a)$ hat die Werthe $\frac{(-1)^g}{g!}$ oder 0, je nachdem $p_\varkappa(a) = a_1^g$ ist oder nicht.

$$4.\quad \vartheta(x, a) = x + x^2 y.$$

$$s_1(a) = -1; \quad s_2(a) = -2y; \quad s_\varrho(a) = 0 \quad \text{für } \varrho > 2,$$

$$f(x, a) = e^{x+x^2 y} = \sum_{\varkappa\lambda} \frac{y^\lambda x^g}{\varkappa!\, \lambda!},$$

$$a_g = \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{y^\lambda}{\varkappa!\, \lambda!} = \sum_\lambda \frac{y^\lambda}{(g-2\lambda)!\, \lambda!},$$

$$s_1(a)s_1(b) = -s_1(b);\ s_2(a)s_2(b) = -2ys_2(b);\ s_\varrho(a)s_\varrho(b) = 0 \text{ für } \varrho > 2,$$

$$\vartheta(x, a, b) = -b_1 x + (b_1^2 - 2b_2)x^2 y,$$

$$f(x, a, b) = -e^{-bx+(b_1^2-2b_2)x^2y} = \sum_{\varkappa,\lambda} (-1)^\varkappa b_1^\varkappa (b_1^2-2b_2)^\lambda \frac{x^g y^\lambda}{\varkappa!\,\lambda!}$$

$$= (-1)^\varrho \sum_{\lambda,\mu} (-1)^\mu 2^\mu b_1^{g-2\mu} b_2^\mu \binom{\lambda}{\mu} \frac{x^g y^\lambda}{\varkappa!\,\lambda!},$$

$$V_{1^{g-2\mu}2^\mu}(a) = (-1)^{g-\mu} \frac{2^\mu}{\mu!} \sum_\lambda \frac{y^\lambda}{(g-2\lambda)!\,(\lambda-\mu)!}.$$

$V_{(\varkappa)}(a) = 0$, wenn $p_\varkappa$ einen Factor hat, dessen Index > 2 ist.

5. $f(x, a) = 1 - x^n$.

$a_0 = 1$; $\quad a_n = -1$; $\quad s_{ng}(a) = n$; $\quad s_{ng}(a)\, s_{ng}(b) = n s_{ng}(b)$.

Die übrigen a, $s(a)$, $s_g(a)\, s_g(b)$ verschwinden.

In $V_{(\varkappa)}(a)$ erhält man durch die Substitution $a_n = -1$ den Coefficienten von $(-a_n)^{g n}$ also, wenn g nicht durch n theilbar ist, die Zahl 0.

Ist

$$p_\varkappa(a) = a_{\nu_1} a_{\nu_2} \ldots$$

und

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}; \quad \varepsilon_\varrho = \varepsilon^\varrho,$$

so wird

$$V_{(\varkappa)}(a) = \sum \varepsilon_{i_1}^{\nu_1} \varepsilon_{i_2}^{\nu_2} \ldots.$$

§ 6.

$V\Big(\psi\big(s(a)+s(b)\big)\Big)$.

Durch Vergleichung der Coefficienten von

$$x^g \text{ und } p_{(\nu)}(c)\, x^g$$

in den Formeln:

$$f\Big(x, \psi\big(s(a)+s(b)\big)\Big) = f(x, a)\, f(x, b),$$

$$f\Big(x, \psi\big(s(a)+s(b)\big), c\Big) = f(x, a, c)\, f(x, b, c)$$

erhält man die Formeln:

$$\psi_g\big(s(a)+s(b)\big) = \sum_\varrho a_\varrho b_{g-\varrho},$$

$$V_{(\nu)}\Big(\psi\big(s(a)+s(b)\big)\Big) = \sum_{\lambda,\mu} V_{(\lambda)}(a)\, V_{(\mu)}(b),$$

Die 2. Summe erstreckt sich über alle $\lambda\mu$, für welche:

$$p_\nu = p_\lambda p_\mu$$

ist.

1. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x.$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = -1; \quad V_g(b) = s_g(b) = 1.$$

Die übrigen b und $V(b)$ verschwinden.

$$\psi\left(s(a) + 1\right) = a_g - a_{g-1},$$

$$V_{(\nu)}(a_g - a_{g-1}) = \sum_{\lambda,\mu} V_{(\lambda)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle λ, μ, für welche

$$p_\nu(a) = a_\mu p_\lambda(a)$$

ist.

2. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - xy.$$

$$b_0 = 1; \quad b_1 = y, \quad V_g(b) = s_g(b) - y^g.$$

Die übrigen b und $V(b)$ verschwinden.

$$\psi_g\left(s_\varrho(a) + y^\varrho\right) = a_g - y\,a_{g-1},$$

$$V_{(\varkappa)}(a_\varrho - y\,a_{\varrho-1}) = \sum_{\lambda,\mu} y^\mu V_{(\lambda)}(a).$$

Die Summe erstreckt sich über alle λ, μ, bei denen.

$$p_\nu(a) = a_\mu p_\lambda(a)$$

ist.

3. Beispiel.

$$f(x, b) = (1 - xy)^n.$$

$$b_\varrho = (-1)^\varrho \frac{n \cdot n-1 \cdots n-\varrho+1}{1 \cdot 2 \cdots \varrho},$$

$$s_g(b) = n y^g,$$

$$V_{(\varkappa)}(b) = \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots} y^g,$$

$$\psi_g\left(s_\varrho(a) + n y^\varrho\right) = \sum_\sigma (-1)^\sigma \frac{n \cdot n-1 \cdots n-\sigma+1}{1 \cdot 2 \cdots \sigma} a_{g-\sigma} y^\sigma,$$

$$V_{(\nu)}\left(\psi\left(s_\varrho(a) + n y^\varrho\right)\right) = \sum_{\lambda,\mu} \frac{n \cdot n-1 \cdots n-h+1}{\mu_1!\, \mu_2!} y^g V_{(\lambda)}(a).$$

4. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x^n y.$$

$$b_0 = 1; \quad b_n = -y; \quad s_{ng}(b) = n y^g.$$

Die übrigen b und $s(b)$ verschwinden.

$V_{(\varkappa)}(b)$ ist der Coefficient von $a_n^{\frac{g}{n}}$ in $(-y)^{\frac{g}{n}} V_{(\varkappa)}(a)$ und verschwindet, wenn g nicht durch n theilbar ist.

$$\psi_g\left(s_\varrho(a) + s_\varrho(b)\right) = a_g - y a_{g-n},$$

$$V_{(\varkappa)}(a_\varrho - y a_{\varrho-n}) = \sum_{\lambda,\mu} V_{(\lambda)}(\alpha) V_{(\mu)}(b).$$

§ 7.

$V(a, b)$.

In der Formel

$$f(x, a, b, c) = \sum_\nu V_{(\nu)}\left(\psi\left(s(a)\, s(b)\right)\right) p_\nu(c)\, x^g$$

bezeichne ich den Coefficienten V durch:

$$V_{(\nu)}\left(\psi\left(s(a)\, s(b)\right)\right) = V_{(\nu)}(a, b),$$

er hat den Werth

$$V_{(\nu)}(a,b) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots} p_\varkappa\left(s(a)\, s(b)\right)$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda,\mu} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \cdots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} p_\lambda(a)\, p_\mu(b).$$

1. Anmerkung.

Der Coefficient von $p_\mu(b)\, p_\nu(c)$ in $f(x, a, b, c)$ ist gleichzeitig der von $p_\mu(b)$ in $V_{(\nu)}(a, b)$ und der von $p_\nu(b)$ in $V_{(\mu)}(a, b)$.

2. Anmerkung.

Aus jeder Relation zwischen den V kann man weitere ableiten, indem man a durch $\psi\left(s(a)\, s(b)\right)$ ersetzt, da durch diesen Process $V(a)$ in $V(a, b)$ übergeht.

1. Beispiel.

$$f(x, b) = 1 - x.$$

$b_0 = 1$; $b_1 = -1$. Die übrigen b verschwinden.

$$s_g(b) = 1; \quad \psi_g\left(s(a)\, s(b)\right) = a_g,$$

$$V_{(\nu)}(a, b) = V_{(\nu)}(a).$$

2. Beispiel.

$$f\,.(x,b) = (1-x)^n.$$

$$s_g(b) = n; \quad f(x,a,b) = f^n(x,a)$$

$$\psi_g\big(s(a)\,s(b)\big) = \psi_g\big(n\,s(a)\big) = \sum_{\varkappa} \frac{n\,.\,n\,.\,1 \ldots n-h+1}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots}\, p_\varkappa\big(s(a)\big)$$

$$V_{(\nu)}(a,b) = V_{(\nu)}\Big(\psi\big(n\,s(a)\big)\Big)$$

$$= \sum_{\varkappa} \frac{(-n)^h}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\ldots 1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_2}\ldots} \binom{1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_2}\ldots}{1^{\nu_1}\,2^{\nu_2}\ldots}\, p_\varkappa\big(s(a)\big).$$

3. Beispiel.

$$f(x,b) = 1 - x^n.$$

$$f(x,a,b) = \prod_{\varrho} f(\varepsilon^\varrho x, a) = \prod_{\varrho} (1 - \alpha_\varrho^n\, x^n) = \sum_g A_g\, x^{ng}$$

$$s_{ng}(b) = n; \quad s_{ng}(a) = s_g(A)$$

$$A_g = \psi_{ng}\big(n\,s_{n\varrho}(a)\big) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_{1n}!\,\varkappa_{2n}!\ldots 1^{\varkappa_1}\,2^{\varkappa_{2n}}\ldots}\, p_\varkappa\big(s_{n\varrho}(a)\big).$$

Die übrigen $s(b)$ und $\psi\big(s(a)\,s(b)\big)$ verschwinden. $V_{(\nu)}(a,b)$ entsteht aus $V_{(\nu)}(a)$ dadurch, dass man die a_{ng} durch A_g und die andern a durch 0 ersetzt; es hat, wenn das Gewicht von p_ν durch n theilbar ist, den Werth:

$$V_{(\nu)}(a,b) = \sum_{\varkappa} \frac{(-1)^h}{\varkappa_{1n}!\,\varkappa_{2n}!\ldots 1^{\varkappa_n}\,2^{\varkappa_n}\ldots} \left(\begin{matrix} n^{\varkappa_n}\,(2n)^{\varkappa_{2n}}\ldots \\ 1^{\nu_1}\,2^{\nu_2}\ldots \end{matrix}\right) p_\varkappa\big(s_{n\varrho}(a)\big)$$

und verschwindet, wenn diess nicht der Fall ist. Wenn alle Indices von p_ν durch n theilbar sind: $\nu_{n\varrho} = \mu_\varrho$ so wird unsere Formel:

$$V_{(\nu)}(a,b) = V_{(\mu)}(A).$$

4. Capitel.

Die numerischen Coefficienten in $f(x,a,b\ldots)$.

§ 1.

Die Symbole $\alpha\beta\ldots$.

Die in § 2, 1. Capitel definirten Functionen $f(x,a,b\ldots)$ sind ganze Functionen der Variabeln

$$x,\ a,\ b,\ c\ \ldots$$

also Aggregate der Producte

$$x^g p_\lambda(a)\, p_\mu(b)\, p_\nu(c) \ldots .$$

Ich will ihre numerischen Coefficienten mit

$$p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta)\, p_\nu(\gamma) \ldots$$

bezeichnen also:

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} x^g p_\lambda(a\alpha)\, p_\mu(b\beta)\, p_\nu(c\gamma) \ldots$$

setzen.

Da $f(x, a, b, c \ldots)$ sich nicht ändert, wenn man die a, b, c mit einander vertauscht, so ändert sich auch $p(\alpha)p(\beta)p(\gamma) \ldots$ nicht, wenn man die α, β, γ mit einander vertauscht, z. B. hat man:

$$p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta) = p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\alpha).$$

Die $p(\alpha)p(\beta)p(\gamma) \ldots$ sind ganze Functionen der Symbole $\alpha, \beta, \gamma \ldots$. Quotienten, bei denen der Nenner nicht Theiler des Zählers ist, verschwinden.

Die $p_\lambda(\alpha)\, p_\mu(\beta) \ldots$ bedeuten die numerischen Coefficienten, wenn $p_\lambda, p_\mu \ldots$ dasselbe Gewicht g haben und verschwinden, wenn dies nicht der Fall ist.

§ 2.

Die $p(\alpha)$.

Da

$$f(x, a) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$$

in unserer Bezeichnung:

$$f(x, a) = \sum_{\varkappa} p_\varkappa(a\alpha)\, x^g$$

ist, so haben die α_g den Werth 1

$$\alpha_g = 1,$$

während die übrigen $p_\varkappa(\alpha)$ verschwinden:

$$p_\varkappa(\alpha) = 0,$$

wenn $p_\varkappa(a) \gtrless a_g$ ist.

Wenn $f(x) = 1 - x$ ist, so ist (1. Cap. § 3)

$$f(x, a, b) = f(x, b)$$

und wenn:

$$f(x) = 1 + a_1 x$$

ist, so ist:

$$f(x, a, b) = f(-a_1, x, b).$$

In unserer Bezeichnung wird in diesem Falle:

$$f(x, a, b) = \sum (a_1 \alpha_1)^g p_\lambda(\beta b) x^g,$$

mithin ist:

$$\alpha_1^g p_\lambda(\beta) = (-1)^g p_\lambda(\alpha),$$

also

$$\alpha_1^g \beta_g = (-1)^g$$

$$\alpha_1^g p_\lambda(\beta) = 0,$$

wenn $p_\lambda(a) \gtrless a_g$ ist.

§ 3.

Die Werthe der $p(\alpha) p(\beta) p(\gamma)$.

Trägt man in die Formel (§ 5, 1. Cap.)

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \varkappa_1! \varkappa_2! \ldots} p_\varkappa\big(s(a) s(b) s(c) \ldots\big) x^g$$

für die $p_\varkappa\big(s(a)\big)$, $p_\varkappa\big(s(b)\big) \ldots$ ihre Werthe (§ 4, 2. Cap.)

$$p_\varkappa\big(s(a)\big) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} p_\lambda(a)$$

$$p_\varkappa\big(s(b)\big) = \sum_\mu \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\mu(b)$$

$$p_\varkappa\big(s(c)\big) = \sum_\nu \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix} p_\nu(c)$$

ein, so wird

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\varkappa, \lambda, \mu, \nu} \frac{(-1)^h}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix}$$
$$p_\lambda(a) p_\mu(b) p_\nu(c) x^g.$$

Vergleicht man diese Formel mit

$$f(x, a, b, c \ldots) = \sum_{\lambda, \mu, \nu} p_\lambda(a\alpha) p_\mu(b\beta) p_\nu(c\gamma) x^g,$$

so wird:

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) p_\nu(\gamma) \cdots = \sum_\varkappa \frac{(-1)^h}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots \end{pmatrix}.$$

Die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung gleichzeitig aus p_λ, p_μ, $p_\nu \ldots$ entsteht.

Beispiele.

Aus

$$a_g;\ a_\varrho \cdot a_\varrho;\ a_\varrho \cdot a_\sigma$$

für $\varrho \gtrless \sigma$ entsteht durch Faltung:

$$a_g;\ a_\varrho^2,\ a_{2\varrho};\ a_\varrho,\ a_\sigma \cdot a_{\varrho+\sigma};$$

es wird:

$$\alpha_g\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \binom{g}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{g}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho^2\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \frac{1}{2} \binom{\varrho^2}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho^2}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots$$

$$\cdots - \frac{1}{2} \binom{2\varrho}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{2\varrho}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma\, p_\lambda(\beta)\, p_\mu(\gamma) \cdots = \binom{\varrho, \sigma}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho, \sigma}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots$$

$$\cdots - \binom{\varrho + \sigma}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots} \binom{\varrho + \sigma}{1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots} \cdots,$$

$$\alpha_\varrho^2 \beta_\varrho^2 = \frac{1}{2} \varrho^2 - \frac{1}{2} \varrho,$$

$$\alpha_\varrho^2 \beta_\sigma \beta_\tau = -\varrho$$

wenn $\sigma \gtrless \tau$,

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma \beta_\varrho \beta_\sigma = \varrho\sigma - (\varrho + \sigma)$$

wenn $\varrho \gtrless \sigma$,

$$\alpha_\varrho \alpha_\sigma \beta_{\varrho_1} \beta_{\sigma_1} = -(\varrho + \sigma)$$

wenn $\varrho, \sigma, \varrho_1, \sigma_1$ verschieden sind.

§ 4.

Die Wurzeln der Einheit.

Die symmetrischen Functionen der Potenzen $\varepsilon_\varrho = \varepsilon^\varrho$ von

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i \sin\frac{2\pi}{n}$$

sind im § 5 3. Cap. berechnet worden. In unserer Bezeichnung ist das dort gefundene Resultat durch die Formel gegeben:

$$\sum \varepsilon_1^{\nu_1} \varepsilon_2^{\nu_2} \cdots = (-\alpha_n)^{\frac{g}{n}} \beta_{\nu_1} \beta_{\nu_2} \ldots .$$

§ 5.

Die V.

Aus den Formeln:

$$f(x, a, b) = \sum_{\nu} p_\nu(b) V_{(\nu)}(a) x^g = \sum_{\lambda, \nu} p_\lambda(a\alpha) p_\nu(b\beta) x^g$$

$$f(x, a, b, c) = \sum_{\nu} p_\nu(c) V_{(\nu)}(a, b) x^g = \sum_{\lambda, \mu, \nu} p_\lambda(a\alpha) p_\mu(b\beta) p_\nu(c\gamma)$$

folgt:

$$V_{(\nu)}(a) = p_\nu(\beta) \sum_{\lambda} p_\lambda(a\alpha)$$

$$V_{(\nu)}(a, b) = p_\nu(\gamma) \sum_{\lambda, \mu} p_\lambda(a\alpha) p_\mu(b\beta).$$

Die Summen erstrecken sich über alle λ, μ bei denen p_λ und p_μ dieselben Faltungsprodukte $p_\varkappa$ erzeugen wie p_ν. Den Relationen zwischen den V entsprechen solche für die $p(\alpha) p(\beta) p(\gamma) \ldots$.

Beispiele.

Nach dem 3. Cap. wird:

für $f(x, a) = (1-x)^n$: $V_{(\nu)}(a) = \dfrac{n \cdot n-1 \ldots n-h+1}{\nu_1! \, \nu_2! \ldots}$,

„ $f(x, a) = \dfrac{1}{1-x}$: $V_{(\nu)}(a) = (-1)^\nu \dfrac{h!}{\nu_1! \, \nu_2! \ldots}$,

„ $f(x, a) = e^x$: $V_{1^g}(a) = \dfrac{(-1)^g}{g!}$.

$$V_{(\nu)}(a) = 0 \text{ für } p_\nu(a) \gtrless a_1^g.$$

$$V_{(\nu)}\Big(\psi\big(s(a) + s(b)\big)\Big) = \sum_{\varrho, \sigma} V_{(\lambda)}(a) V_{(\mu)}(b).$$

Hieraus ergeben sich diese Relationen zwischen den $p(\alpha) p(\beta) p(\gamma)$:

$$\frac{n \cdot n-1 \ldots n-h+1}{\varkappa_1! \, \varkappa_2! \ldots} = p_\varkappa(\beta) \sum_{\lambda} \left(\frac{n}{1} \alpha_1\right)^{\lambda_1} \left(\frac{n \cdot n-1}{2} \alpha_2\right)^{\lambda_2} \left(\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{3!} \alpha_3\right)^{\lambda_3} \cdots,$$

$$0 = p_\lambda(\beta) \left(\sum_{\lambda} p_\lambda(\alpha) - \frac{h}{g} \alpha_g\right),$$

$$\beta_1^g \sum_{\lambda} p_\lambda\left(\frac{\alpha_\varrho}{\varrho!}\right) = \frac{(-1)^g}{g!},$$

$$p_\varkappa(\beta) \sum_{\lambda} p_\lambda\left(\frac{\alpha_\varrho}{\varrho!}\right) = 0 \text{ für } p_\varkappa(a) \gtrless a_1^g,$$

$$p_\nu(\beta) \sum_{\varkappa} \left(\begin{matrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \mid 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{matrix}\right) p_\varkappa(\alpha) = \sum_{\varrho, \sigma} p_\varrho(\alpha) p_\lambda(\beta) \cdot p_\sigma(\alpha) p_\mu(\beta).$$

Die Summen erstrecken sich in der letzten Formel über alle $\varkappa, \varrho, \sigma$, bei denen $p_\varkappa$ durch Faltung aus $p_\lambda p_\mu$ entsteht und

$$p_\varrho p_\sigma = p_\nu$$

ist.

§ 6.

Reduction der $p(\alpha)\,p(\beta)\ldots$.

Der Formel (§ 4, 3. Cap.)

$$V_{(\nu)}(a) = (-1)^m a_m V_{1^{\nu_2}2^{\nu_3}\ldots}(a) = \sum_\varkappa \binom{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}{1^m \mid 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots} V_{(\varkappa)}(a)$$

entspricht diese:

$$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = p_\lambda(\beta)\left\{\frac{(-1)^m}{\beta_m}\alpha_1^{\nu_2}\alpha_2^{\nu_3}\cdots - \sum_\varkappa \binom{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}{1^m \mid 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots} p_\varkappa(\alpha)\right\}.$$

In ihr ist:

$$m = \nu_1 + \nu_2 \ldots$$

und die Summe erstreckt sich über alle $\varkappa$, bei denen $p_\varkappa$ aus p_ν durch specielle Spaltungen von $a_{\varrho+1}$ in $a_1 a_\varrho$ entsteht.

Da die Glieder rechter Hand einfacher sind, so ist dies eine Reductionsformel für $p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta)$.

Ist τ der höchste in p_λ auftretende Index und $m > \tau$, so ist:

$$\frac{1}{\beta_m} p_\lambda(\beta) = 0.$$

Reducirt man die $p_k(\alpha)$ weiter, so erhält man Formeln, in denen das Product vor der Summe verschwindet. Schliesslich gelangt man zu dem verschwindenden Symbol

$$\alpha_1^g\, p_\varkappa(\beta).$$

Hieraus folgt der Satz:

„$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = 0$, wenn die Anzahl der Factoren von p_ν grösser als die Indices in p_λ ist."

Im Falle

$$m = \tau$$

verschwinden alle Glieder der Summe, es wird:

$$p_\nu(\alpha)\,p_\lambda(\beta) = \frac{(-1)^m}{\beta_m}\alpha_1^{\nu_2}\alpha_2^{\nu_3}\ldots p_\lambda(\beta).$$

Beide Sätze bleiben bestehen, wenn man mit symbolischen Factoren $p(\gamma)$ multiplicirt.

§ 7.

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta).$$

Der Formel (§ 4, 3. Cap.) zwischen den V:

$$V_{1^m g-m}(a) = (-1)^m \sum_{\varrho=0}^{\varrho=m} a_\varrho V_{g-\varrho}(a)$$

entspricht diese zwischen den $p(\alpha)p(\beta)$:

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta) = (-1)^m p_r(\beta) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m} \frac{1}{\beta_\varkappa} \alpha_{g-\varkappa}.$$

Um sie zu transformiren, setze ich zunächst $m = \tau$; es wird dann:

$$0 = p_r(\beta) \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\tau} \frac{1}{\beta_\varkappa} \alpha_{g-\varkappa},$$

so dass man unsere Formel so schreiben kann:

$$\begin{aligned}\alpha_1^m \alpha_{g-m} p_r(\beta) &= (-1)^{m-1} p_r(\beta) \sum_{\varkappa=m+1}^{\varkappa=\tau} \frac{1}{\beta_\varkappa} \alpha_{g-\varkappa} \\ &= (-1)^{m-1} p_r(\beta) \left\{ \frac{1}{\beta_\tau} \alpha_{g-\tau} + \sum_{\varkappa=m+1}^{\varkappa=\tau-1} \frac{1}{\beta_\varkappa} \alpha_{g-\varkappa} \right\}.\end{aligned}$$

Im Besonderen hat man:

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} \beta_1^n \beta_{g-n} = \begin{cases} 0 & \text{für } m+n \geqq g, \\ (-1)^{m+n-1} & \;\text{„}\; m+n < g. \end{cases}$$

§ 8.

Zusammenstellung von Formeln für $p(\alpha)p(\beta)$.

Die $p(\alpha)p(\beta)$ sind durch die Formel:

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) = \sum_h \frac{(-1)^h}{\varkappa_1! \varkappa_2! \ldots 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{\varkappa_1} 2^{\varkappa_2} \ldots \\ 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots \end{pmatrix}$$

definirt; ausserdem sind im Obigen noch verschiedene Recursionsformeln zu ihrer Berechnung gegeben. Hier sollen noch einmal die hierbei tauglichsten Formeln zusammengestellt werden; sie genügen zur übersichtlichen Berechnung in allen einfachen Fällen.

$$p_\lambda(\alpha) p_\mu(\beta) = p_\lambda(\beta) p_\mu(\alpha),$$

$$\alpha_1^{\varkappa_1} \alpha_2^{\varkappa_2} \ldots \beta_1^{\lambda_1} \beta_2^{\lambda_2} \ldots \beta_\tau^{\lambda_\tau} = 0, \quad \text{wenn } \lambda_1 + \lambda_2 \ldots > \tau,$$

$$\alpha_1^m \alpha_{g-m} \beta_1^n \beta_{g-n} = \begin{cases} 0, & \text{wenn } m+n \geqq g, \\ (-1)^{m+n-1}, & \text{wenn } m+n < g, \end{cases}$$

$$\alpha_1^{\lambda_1}\alpha_2^{\lambda_2}\ldots\beta_1^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\ldots\beta_\tau^{\mu_\tau}=(-1)^\tau\alpha_1^{\lambda_2}\alpha_2^{\lambda_3}\ldots\beta_1^{\mu_1}\beta_2^{\mu_2}\ldots\beta_\tau^{\mu_\tau-1},$$
$$\text{wenn } \lambda_1+\lambda_2\cdots=\tau,$$

$$\alpha_\varrho^2\beta_\varrho^2=\frac{1}{2}\varrho^2-\frac{1}{2}\varrho,$$

$$\alpha_\varrho^2\beta_\sigma\beta_\tau=-\varrho,\quad\text{wenn } \sigma\gtrless\tau,$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma\beta_\varrho\beta_\sigma=\varrho\sigma-(\varrho+\sigma),\quad\text{wenn } \varrho\gtrless\sigma,$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma\beta_{\varrho_1}\beta_{\sigma_1}=-(\varrho+\sigma),\quad\text{wenn } \varrho,\sigma,\varrho_1,\sigma_1$$

verschieden sind.

$$\alpha_\varrho^2 p_\varkappa(\beta)=\frac{1}{2}\binom{\varrho^2}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}-\frac{1}{2}\binom{2\varrho}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}.$$

$$\alpha_\varrho\alpha_\sigma p_\varkappa(\beta)=\binom{\varrho,\sigma}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots}-\binom{\varrho+\sigma}{1^{\varkappa_1}2^{\varkappa_2}\ldots},\quad\text{wenn } \varrho\gtrless\sigma,$$

$$\alpha_1^m\alpha_{g-m}p_r(\beta)=(-1)^{m-1}p_r(\beta)\left\{\frac{1}{\beta_\tau}\alpha_{g-\tau}+\sum_{\varrho=m+1}^{\varrho=\tau-1}\frac{1}{\beta_\varrho}\alpha_{g-\varrho}\right\},$$

$$p_\varrho(\alpha)p_\sigma(\beta)=p_\sigma(\beta)\left\{(-1)^m\frac{1}{\beta_m}\alpha_1^{\varrho_2}\alpha_2^{\varrho_3}\cdots-\sum_\lambda\binom{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\ldots}{1^m\mid 1^{\varrho_2}2^{\varrho_3}\ldots}\right\},$$

wo $m=\varrho_1+\varrho_2\ldots.$