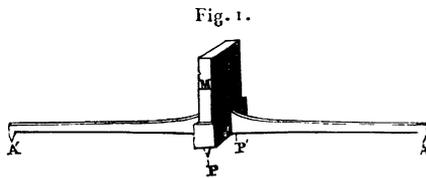


SUR LE LEVIER A RÉFLEXION;

PAR M. A. CORNU.

La nécessité de mesurer de petites longueurs en valeur absolue m'a conduit à employer un dispositif expérimental applicable à une foule de cas; je l'appellerai *levier à réflexion*, et décrirai une de ses applications à la mesure de petites épaisseurs et à celle de la *courbure* des surfaces cylindriques et sphériques: sous cette forme on peut le nommer le *sphéromètre à réflexion*.

Imaginons un fléau de balance (*fig. 1*) reposant sur un couteau



ou mieux sur deux pointes P, P' et présentant à chaque extrémité une pointe A et A'.

Il porte en son milieu un miroir plan parallèle à la ligne des deux pointes PP' et perpendiculaire à la ligne des deux autres AA'. Il est en équilibre instable lorsque la ligne AA' est horizontale; on allège la monture centrale de façon que le centre de gravité soit aussi près que possible de l'axe AA'.

Imaginons ce levier placé sur un plan et les quatre pointes réglées de façon à poser à la fois sur la surface d'un plan; plaçons sous les pointes P, P' une lame à faces parallèles (*fig. 2*), dont on veut connaître l'épaisseur; alors le levier ne portera plus sur les quatre pointes: on pourra le faire basculer autour de l'axe PP'.

Si l'on observe l'angle dont le levier se déplace dans cette rotation (ce qui est très-aisé avec une lunette et une échelle divisée se réfléchissant dans le miroir), on déduira de la longueur du levier l'épaisseur ε qu'on désire obtenir.

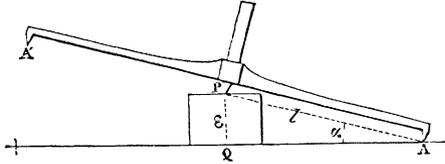
En effet, dans le triangle PAQ, on a

$$\sin \text{PAQ} = \frac{\varepsilon}{l},$$

l étant la demi-longueur du levier.

Le mouvement de bascule double cet angle, et la réflexion double encore une fois, de sorte qu'on observe quatre fois l'angle PAQ.

Fig. 2.



Si l'épaisseur est petite par rapport à la demi-longueur du levier, on pourra remplacer les sinus et tangentes par les arcs, de sorte que l'on pourra écrire

$$\varepsilon = l\alpha,$$

α étant le quart de l'angle mesuré sur l'échelle divisée, c'est-à-dire tel que

$$\frac{n - n'}{4D} = \alpha,$$

n et n' étant les points de division extrêmes visés par la lunette, et D la distance du miroir à l'échelle.

L'observation que nous venons de décrire suppose que les quatre pointes sont dans un même plan : on arrive assez aisément à cette condition en prenant pour AA' les pointes de deux vis à filet très-petit : avec quelques précautions dans la manœuvre, on arrive à serrer ou desserrer l'une d'elles de façon que le mouvement de bascule devienne de plus en plus petit, lorsque l'appareil est posé sur un plan.

Mais on peut se passer de ce réglage à l'aide d'une observation préliminaire. En effet, supposons que la ligne AA' soit située au-dessus de l'axe de rotation PP' à une distance h : lorsqu'on fera basculer le levier sur un plan, on observera un angle de rotation α_0 , tel que

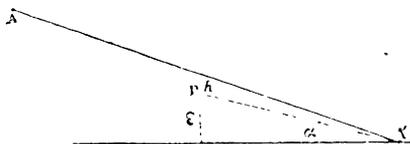
$$\sin \alpha_0 = \frac{h}{l} \quad \text{ou simplement} \quad \alpha_0 = \frac{h}{l},$$

d'où l'on conclura la quantité h .

Si maintenant on veut mesurer une autre épaisseur ε (fig. 3),

le déplacement angulaire du levier correspondra à la somme de l'angle α_0 et de l'angle α , qu'on aurait mesuré si h était nul.

Fig. 3.



On retranchera donc de la différence des lectures faites sur l'échelle divisée $n - n'$, lors de la mesure de l'épaisseur cherchée, la différence $n_0 - n'_0$, faite lors de l'observation initiale du levier seul; on aura alors

$$\varepsilon = l \times \frac{(n - n') - (n_0 - n'_0)}{4D}.$$

Ce dispositif a sur le sphéromètre ordinaire l'avantage d'une simplicité telle, que chacun peut aisément le construire de ses mains. Cet avantage, déjà fort important, n'est pas le principal. Le levier à réflexion a surtout pour but de permettre les *mesures absolues*, c'est-à-dire rapportées à l'unité de longueur vraie. Or l'unité de longueur est donnée soit par une règle étalonnée, soit par une machine à diviser. Comme le pas de la vis d'une telle machine est rarement métrique, on parvient, à l'aide d'un microscope placé sur le chariot de la machine, à déterminer la valeur métrique du pas de la vis, à l'aide d'une règle auxiliaire: ces deux instruments, règle et machine, sont donc équivalents.

Mais un sphéromètre à vis est excessivement difficile à comparer avec une machine à diviser ou avec une règle; en tout cas, les modes de comparaison usités jusqu'à ce jour sont très-indirects; si bien qu'en général on se contente de l'affirmation du constructeur pour la valeur du pas de la vis du sphéromètre, ce qui conduit quelquefois à des erreurs de 1 pour 100 et au delà pour la valeur absolue des quantités qu'on mesure.

Le levier à réflexion n'est point sujet à ces causes d'erreur.

La longueur $2l$ des deux pointes se détermine avec une machine à diviser; à $\frac{1}{100}$ de millimètre près: si $2l = 100^{\text{mm}}$ environ, on a une précision relative de $\frac{1}{100000}$. Comme le pas de la vis a pu être comparé à une bonne règle, la mesure réduite de $2l$ est absolue.

Il ne reste plus qu'à tracer ou à mesurer, avec la même machine les traits de l'échelle divisée qu'on emploiera et à vérifier, toujours avec la même machine à diviser, la règle avec laquelle on mesurera D , distance de l'échelle au plan de réflexion.

En général, il suffira de prendre $D = 1$ à 2 mètres; l'approximation de D sera d'au moins $\frac{1}{2}$ millimètre, c'est-à-dire $\frac{1}{2000}$ pour 1 mètre et $\frac{1}{4000}$ pour 2 mètres.

Quant à $n - n'$, comme on estime avec une bonne lunette $\frac{1}{10}$ de millimètre, il suffira de s'arranger de manière à avoir $n - n' > 100^{\text{mm}}$ pour avoir le millième comme erreur relative.

En résumé, il sera donc aisé d'obtenir une précision voisine du millième sur l'ensemble des opérations, ce qu'on est loin d'atteindre avec les sphéromètres.

Le levier à réflexion est surtout utile pour la mesure des courbures, et spécialement en Optique, dans le cas de la mesure des éléments géométriques des lentilles, objectifs, miroirs, etc.

Fig. 4.

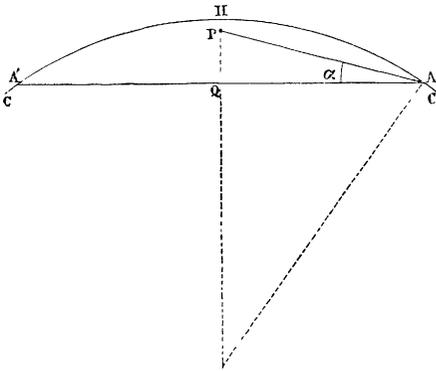
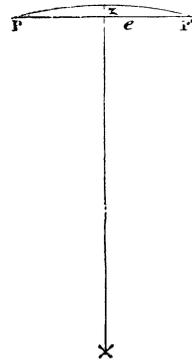


Fig. 5.



Prenons le cas le plus général d'une courbure sphérique à mesurer (*fig. 4*). Le mouvement de rotation du levier posé sur la surface à mesurer s'effectue autour de la ligne passant par les deux pointes. On détermine donc ainsi la flèche de l'arc compris entre les points touchés par les points A, A' .

Rigoureusement parlant, ce n'est pas cette flèche que l'on détermine, mais cette flèche diminuée de la flèche de l'arc transversal compris entre les deux pointes P, P' . Comme les pointes ne sont

écartées que de la quantité nécessaire à la stabilité du levier, la correction très-petite qu'elle nécessite (les flèches varient comme le carré des arcs) se fait à l'aide de la valeur approchée de la courbure.

Soit α l'angle PAA'; la flèche $f = PQ$ définie par cet angle est donnée par la formule

$$f = l \sin \alpha.$$

Le rayon ρ du cercle passant par les trois points A, P, A' satisfait à la condition

$$l^2 = f \times 2\rho;$$

et le vrai rayon de courbure R passant par les points A, A', H à celle-ci :

$$\overline{AQ}^2 = l^2 - f^2 = HQ \times (2R - HQ);$$

formule dans laquelle on a $HQ = f + z$, z étant la petite flèche produite par l'écartement $2e$ des pointes P, P'.

Donc on a aussi (*fig. 5*)

$$e^2 = z \times (2R - z) = 2Rz \text{ approximativement.}$$

On peut, comme z est excessivement petit, se contenter de la valeur approchée ρ du rayon R,

$$\rho = \frac{l^2}{2f},$$

d'où

$$z = \frac{e^2}{2R} = \frac{e^2}{2\rho} = \frac{e^2}{l^2} f.$$

Substituant dans \overline{AQ}^2 , il vient

$$l^2 - f^2 = (f + z) [2R - (f + z)],$$

d'où

$$2R = \frac{l^2 - f^2}{f \left(1 + \frac{e^2}{l^2}\right)} + f \left(1 + \frac{e^2}{l^2}\right).$$

Or on peut prendre aisément

$$\frac{e}{l} = 0,1, \quad \frac{e^2}{l^2} = 0,01 \quad \text{et} \quad \frac{e^4}{l^4} = 0,0001,$$

qu'on peut négliger; de plus $\frac{f}{l}$ est également très-petit : on peut donc négliger le produit $\frac{f^2 e^2}{l}$; développant en série le dénominateur, il vient, après avoir supprimé les termes négligeables,

$$2R = \frac{l^2}{f} \left(1 - \frac{e^2}{l^2} \right).$$

Substituant la valeur de f ,

$$R = \frac{l^2 \left(1 - \frac{e^2}{l^2} \right)}{l \sin \alpha}, \quad \text{ou approximativement} \quad \frac{l}{\alpha} \left(1 - \frac{e^2}{l^2} \right);$$

α étant toujours le quart de l'angle observé sur la surface courbe, diminué de l'angle observé sur un plan.

Si l'angle α était un peu notable, il vaudrait mieux le calculer, avec la Table de logarithmes, par la formule

$$2 \operatorname{tang} 2\alpha = \frac{n - n'}{D},$$

qu'on trouve aisément d'après la condition que l'échelle est normale au rayon visuel lorsque le levier est dans la position moyenne.

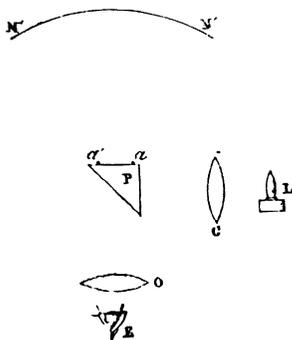
Pour s'habituer à l'usage du levier à réflexion, il est bon de l'employer à la mesure de la courbure d'un miroir concave, par exemple de la surface concave d'une lentille divergente. On a, en effet, une vérification très-délicate pour la mesure optique du rayon de courbure; on répète les observations jusqu'à ce qu'on obtienne la concordance des deux valeurs.

La détermination optique du rayon de courbure de la surface concave s'obtient aisément de la façon suivante : on dispose (*fig. 6*) un petit prisme hypoténuse P, de façon à renvoyer sur toute la surface du miroir MM' la lumière d'une lampe monochromatique (alcool salé), rendue convergente sur la face aa' par une lentille C.

On colle avec un peu de cire un fil métallique d'environ $\frac{1}{4}$ de millimètre de diamètre sur la face aa' en a , de façon que ce fil, parallèle aux arêtes, dépasse de 4 à 5 millimètres la surface horizontale du prisme. Après quelques tâtonnements, on arrive aisément à recevoir l'image conjuguée de la face a' du prisme au-dessus

de ce prisme et dans le plan de cette face. On aperçoit alors l'image du fil a' qui se projette sur l'image éclairée de la face du prisme et aussi le prolongement du fil a qui se détache sur le même fond brillant.

Fig. 6.



Avec un oculaire (qui n'a pas besoin d'être achromatique) d'autant plus puissant que le miroir concave sera plus parfait, on pourra observer le fil et son image côte à côte et régler la distance au miroir, de telle façon qu'ils soient bien dans un même plan perpendiculaire à l'axe principal du miroir.

Il suffit alors de mesurer la distance du centre du miroir au plan commun des deux images pour avoir le rayon de courbure cherché.

Pour les commodités et la précision de l'expérience, le prisme P, la lentille C, la lampe L et l'oculaire O doivent être disposés sur un même support qui glissera dans une coulisse dirigée suivant l'axe du miroir (¹).

(¹) La mesure absolue du rayon de courbure est fondée sur l'observation initiale du levier posé sur un plan parfait : il faut donc être assuré que cette dernière surface remplit cette condition ou au moins connaître cette courbure. Pour effectuer cette vérification, la méthode optique suivante est très-délicate. On choisit pour plan une lame de glace polie et l'on observe par réflexion sur sa surface l'image d'un objet éloigné ou la fente d'un collimateur, à l'aide d'une bonne lunette. Si l'on n'est pas obligé de modifier le tirage de la lunette pour voir l'objet directement et par réflexion, et surtout si l'image de cet objet est également nette sous toutes les incidences, la surface est suffisamment plane. Si l'image perd sa netteté, il faut rejeter la lame ou chercher si, dans certains azimuts de réflexion, la netteté des lignes perpendiculaires au plan d'incidence ne se conserve pas. Il arrive presque toujours qu'un de ces azimuts donne une image

Le levier optique se prête à une foule d'autres applications ; l'une des plus utiles est la mesure de la flèche des flexions des corps élastiques.

Je suis parvenu avec ce dispositif à estimer de semblables mouvements d'une petitesse comparable aux longueurs d'onde de la lumière : il suffit de diminuer suffisamment la longueur du bras de levier et d'augmenter à la fois la puissance de la lunette et la distance de l'échelle divisée. Au point de vue de la délicatesse, comme de la précision, l'appareil ne laisse donc rien à désirer : toutefois il ne faudrait pas se faire illusion sur les conditions géométriques de l'instrument et croire qu'on peut avoir à la fois l'extrême précision et l'extrême délicatesse : il y a là une question d'erreurs relatives facile à apprécier. En raccourcissant le levier, on perd en précision ce qu'on gagne en sensibilité.
