Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven.

Von

E. Salkowski in Charlottenburg.

Die Theorie der algebraisch rektifizierbaren Raumkurven ist durch die Untersuchungen von Herrn Stäckel, die in zwei in diesen Annalen*) veröffentlichten Abhandlungen zusammengefaßt sind, wesentlich gefördert worden. Während in der Ebene die algebraisch rektifizierbaren Kurven, d. h. diejenigen algebraischen Kurven, deren Bogenlänge algebraisch mit den Koordinaten zusammenhängt, durch die Evoluten aller algebraischen Kurven gegeben sind, ist eine Raumkurve nur dann algebraisch rektifizierbar, wenn sie die Evolute einer *Stäckelschen Kurve* ist. Dabei soll unter Stäckelschen Kurven diejenige Klasse algebraischer Raumkurven verstanden werden, bei denen der Sinus des Torsionswinkels

$$w' = \int \tau \, ds$$

algebraisch mit den Koordinaten zusammenhängt. Der Name rechtfertigt sich durch die Bedeutung, die jener Kurvenklasse in den Untersuchungen von Herrn Stäckel zukommt.

Diesen Untersuchungen verdanken wir neben der Kenntnis einer Reihe ausgezeichneter Eigenschaften auch eine explizite Darstellung der algebraisch rektifizierbaren Raumkurven. Aber so sinnreich auch der Gedankengang ist, der zum Ziele führte, und so fruchtbar er sich für manche andere Fragestellung erweist, so scheinen doch für das vorliegende Problem die gefundenen Schlußformeln nicht die nötige Einfachheit zu besitzen, um weiteren Untersuchungen als Grundlage zu dienen.

Die Absicht der vorliegenden Arbeit ist nun in erster Linie, auf einem neuen direkten Wege zu einer analytischen Darstellung der algebraisch rektifizierbaren Raumkurven zu gelangen und an sie einige

*) P. Stäckel, Über algebraisch rektifizierbare Raumkurven. Math. Ann. 43, 171—184. 1893.
P. Stäckel, Über algebraische Raumkurven. Math. Ann. 45, 341—370. 1894.

weitere Fragestellungen anzuknüpfen. Dann aber kam es mir darauf an zu zeigen, wie die oben erwähnte Stäckelsche Untersuchungsmethode nur einer leichten Modifikation bedarf, um in Verbindung mit einem von mir an anderer Stelle*) mitgeteilten Formelsystem eine ganze Gruppe von Problemen zu erledigen. Insbesondere handelt es sich dabei um die explizite Darstellung vielfach untersuchter Kurvenklassen, deren Gleichungen bisher nur mit Quadraturen behaftet, also wenig brauchbar gegeben wurden. Ich nenne in dieser Hinsicht das in die Lehrbücher**) übergegangene Problem der Kurven mit gegebener Indikatrix der Tangenten, bezw. Binormalen, die geodätischen Linien auf Kegelflächen und auf denjenigen abwickelbaren Flächen, deren Gratlinie eine Kegelgeodätische ist.

I. Eigenschaften und Gleichungen der algebraisch rektifizierbaren Kurven.

Wenn eine algebraische Raumkurve die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = f(s), \quad \tau = \varphi(s)$$

besitzt, und es sind f und φ algebraische Funktionen ihres Arguments, so ist die Kurve algebraisch rektifizierbar. Denn die Krümmung einer algebraischen Kurve hängt immer algebraisch mit den Koordinaten zusammen, ebenso die Torsion; aus einer der natürlichen Gleichungen ergibt sich dann sofort, daß auch s algebraisch mit den Koordinaten zusammenhängt. Dieselbe Überlegung gilt, wenn es sich um eine Kurve der Schar

$$f(\varkappa, \tau, s) = 0$$

handelt:

Alle algebraischen Kurven einer Kurvenklasse, die durch eine algebraische natürliche Gleichung

$$f(\varkappa, \tau, s) = 0$$

charakterisiert ist, sind algebraisch rektifizierbar.

Eine Ausnahme bilden die Kurvenklassen, die durch eine Gleichung zwischen Krümmung und Torsion allein definiert sind

$$F(\varkappa, \tau) = 0.$$

Es ist offenbar, daß *jede* algebraische Kurve zu einer derartigen Klasse gehört, deren Gleichung man erhält, wenn man aus den Formeln für $\varkappa$ und τ den Parameter eliminiert.

---

*) E. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 7, 83—87.

**) Vgl. z. B. G. Scheffers, Theorie der Kurven. S. 240—251.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, daß die algebraisch rektifizierbaren Kurven die einzigen sind, deren natürliche Gleichungen ebenfalls algebraisch sind. Hieraus ergibt sich insbesondere sofort der Stäckelsche Satz, daß jede algebraische geodätische Linie auf einer Kegelfläche algebraisch rektifizierbar ist.

Die *analytische Darstellung* aller algebraisch rektifizierbaren Raumkurven erhält man am einfachsten durch Auflösung der Mongeschen Gleichung, die zwischen den Koordinaten und der Bogenlänge einer Raumkurve besteht:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Setzt man nämlich

$$\frac{dx - i\,dy}{ds + dz} = \frac{ds - dz}{dx + i\,dy} = u,$$

$$x + iy = v',$$

$$s + z = w',$$

so erhält man die Lösungsformeln:

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= v' + (uw' - w),\\ iy &= v' - (uw' - w),\\ z &= w' - (uv' - v),\\ s &= w' + (uv' - v), \end{aligned}\right.$$

Gleichungen, in denen v und w willkürliche Funktionen von u bedeuten.

Auf diese Form läßt sich die Darstellung einer beliebigen Raumkurve bringen, und es drücken sich u, v, w dann folgendermaßen durch ihre Koordinaten und die Bogenlänge aus:

$$u = \frac{dx - i\,dy}{ds + dz},$$

$$v = \frac{1}{2}\left\{(x + iy)u - (s - z)\right\},$$

$$w = \frac{1}{2}\left\{(s + z)u - (x - iy)\right\}.$$

Hieraus ergibt sich, daß man alle algebraisch rektifizierbaren Raumkurven erhält, wenn man in dem Gleichungssystem (A) für v und w beliebige algebraische Funktionen von u einsetzt. Die Formeln (A) sind kürzlich von Herrn de Montcheuil*) unter Heranziehung von flächentheoretischen Hilfsmitteln hergeleitet worden; wegen ihrer Bedeutung für die Theorie der Kurven schien aber die einfache direkte Ableitung nicht überflüssig. Der ihnen anhaftende Mangel, daß reelle Kurvenpunkte nicht reellen

*) De Montcheuil, Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Bulletin de la Soc. Math. de France 33, 170—171. 1905.

Werten des Parameters entsprechen, läßt sich nur heben, wenn man auch Eliminationen zuläßt. Da diese aber in strengem Sinne nicht als ausführbare Operationen angesehen werden dürfen, auch die Formeln ihre natürliche Symmetrie verlieren, sei auf eine solche Transformation verzichtet. Die von Serret*) angegebenen Lösungsformeln weisen den genannten Übelstand nicht auf; sie scheinen indessen wegen ihres komplizierten Baues nicht weiter nutzbar zu sein.

Die in den Formeln (A) hervortretende Analogie mit gewissen Fundamentalformeln der Liniengeometrie ist nicht zufällig. Bezeichnen $\xi_1, \cdots, \xi_6$ die Kleinschen Linienkoordinaten in einem Raum, dessen Punktkoordinaten u, v, w sind, so besteht für jede Kurve dieses Raumes

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad w = w(t)$$

das Gleichungssystem

$$\sum_1^6 \xi_i^2 = 0, \tag{1}$$

$$\sum_1^6 d\xi_i^2 = 0, \tag{2}$$

während

$$\left\{\begin{aligned} \varrho\xi_1 &= v' + (uw' - wu'), \\ i\varrho\xi_2 &= v' - (uw' - wu'), \\ \varrho\xi_3 &= w' + (vu' - uv'), \\ i\varrho\xi_4 &= w' - (vu' - uv'), \\ \varrho\xi_5 &= u' + (wv' - vw'), \\ i\varrho\xi_6 &= u' - (wv' - vw') \end{aligned}\right. \tag{3}$$

zu setzen ist. Diese Gleichungen, in denen ϱ ein willkürlicher Faktor ist, lösen also das Problem der Minimalkurven auf der Fläche (1) des sechsdimensionalen Raumes. Man erhält nun alle Minimalkurven des vierdimensionalen Raumes, wenn man in den Gleichungen (2)

$$d\xi_5^2 + d\xi_6^2 = 0,$$

also etwa

$$d\xi_5 + i d\xi_6 = 0$$

setzt. Hieraus ergibt sich

$$\varrho = \frac{2u'}{\xi_5 + i\xi_6}$$

und damit für die Darstellung der Minimalkurven eines vierdimensionalen Raumes das Gleichungssystem

---

*) J. A. Serret, Sur l'intégration de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Journ. de Mathématiques (1) 13, 353—360.

$$x_1 = \frac{2\xi_1}{\xi_5 + i\xi_6}, \quad x_2 = \frac{2\xi_2}{\xi_5 + i\xi_6}, \quad x_3 = \frac{2\xi_3}{\xi_5 + i\xi_6}, \quad x_4 = \frac{2\xi_4}{\xi_5 + i\xi_6},$$

in denen $\xi_1, \cdots, \xi_6$ die Kleinschen Linienkoordinaten einer Raumkurve bedeuten. Die Formeln gehen in die früher hergeleiteten über, wenn man u als unabhängige Variable wählt.

II. Ein System von Grundformeln der Kurventheorie.

Die elegante Form der Gleichungen (A) erweist sich für manche Fragen der Kurventheorie als nützlich. Es seien daher die Ausdrücke für die Fundamentalgrößen einer Raumkurve, die aus ihnen folgen, zur bequemeren Anwendung zusammengestellt. Man setze

$$\frac{v''}{w''} = \varphi.$$

Bogenelement:

$$ds = w''(u\varphi + 1).$$

Richtungskosinus der Tangente:

$$a = \frac{\varphi + u}{u\varphi + 1}, \quad ib = \frac{\varphi - u}{u\varphi + 1}, \quad c = \frac{1 - u\varphi}{1 + u\varphi}.$$

Richtungskosinus der Binormale:

$$a' = -\frac{i}{2}\,\frac{\varphi'(1 - u^2) - (1 - \varphi^2)}{(1 + u\varphi)\sqrt{\varphi'}},$$

$$b' = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(1 + u^2) + (1 + \varphi^2)}{(1 + u\varphi)\sqrt{\varphi'}},$$

$$c' = +i\,\frac{\varphi' u - \varphi}{(1 + u\varphi)\sqrt{\varphi'}}.$$

Richtungskosinus der Hauptnormale:

$$a'' = \frac{(1 - u^2)\varphi' + (1 - \varphi^2)}{2\sqrt{\varphi'}(1 + u\varphi)},$$

$$ib'' = \frac{(1 + u^2)\varphi' - (1 + \varphi^2)}{2\sqrt{\varphi'}(1 + u\varphi)},$$

$$c'' = -\frac{u\varphi' + \varphi}{\sqrt{\varphi'}(1 + u\varphi)}.$$

Krümmung:

$$\varkappa = \frac{2\sqrt{\varphi'}}{w''(1 + u\varphi)^2}.$$

Torsion:

$$\tau = \frac{2i\,w''^3}{\varkappa^2\,ds^6}\begin{vmatrix} u & 1 & 0 \\ \varphi & \varphi' & \varphi'' \\ -1 & \varphi & 2\varphi' \end{vmatrix},$$

$$\tau = i\,\frac{2\varphi'(u\varphi' - \varphi) - \varphi''(1 + u\varphi)}{2\varphi'(1 + u\varphi)^2 w''}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt für das Verhältnis von Torsion und Krümmung der Ausdruck

$$\frac{\tau}{\varkappa} = i\,\frac{2\varphi'(u\varphi' - \varphi) - \varphi''(1 + u\varphi)}{4\varphi'\sqrt{\varphi'}},$$

der in der Form

$$\frac{d\frac{\tau}{\varkappa}}{du} = -\,i\,\frac{\{\varphi, u\}\,(u\varphi + 1)}{4\sqrt{\varphi'}},$$

geschrieben werden kann, wobei unter $\{\varphi, u\}$ die Schwarzsche Derivierte zu verstehen ist.

Aus diesen Gleichungen lassen sich eine große Anzahl von Tatsachen unmittelbar ablesen oder durch leichte Rechnung gewinnen.

Die *Minimalkurven* erhält man für $\varphi = -\frac{1}{u}$, so ist also

$$w'' = -uv''$$

zu setzen, woraus sich die bekannte Darstellung der Kurven ergibt, wenn

$$v = f'(u)$$

angenommen wird.

Die *Kurven der Krümmung Null* ergeben sich für $\varphi = \text{const.}$ Die Durchführung der Rechnung zeigt, daß sie die Kurven in den Minimalebenen sind, die erst kürzlich Herr Study*) als Kurven mit verschwindender Krümmung erkannt hat, nachdem sie von Lie in seiner Klassifikation der Raumkurven übersehen worden sind.

Die Kurven, für die das Verhältnis von Torsion und Krümmung konstant ist, sind durch die Gleichung

$$\{\varphi, u\} = 0$$

charakterisiert, d. h. φ ist eine lineare gebrochene Funktion von u. Nach einfacher Rechnung, die v und w bestimmt, erhält man die allgemeinen Schraubenlinien.

III. Die geodätischen Linien auf Rotationsflächen und die Kurven des linearen Komplexes.

Die geodätischen Linien der Rotationsflächen können als diejenigen Raumkurven definiert werden, deren Hauptnormalen einem speziellen linearen Komplex angehören. Sie sind daher die Integralkurven der Gleichung

$$b''x - a''y = 0,$$

aus der sich durch Integration ihre Mongesche Gleichung

*) E. Study, Kritische Betrachtungen über Lies Invariantentheorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen. Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver. 17, 125—142 (1908).

$$bx - ay = k$$

ergibt, eine Gleichung, die den Inhalt des Clairautschen Satzes ausmacht. Sie sind die Kurven eines besonderen quadratischen Komplexes, den Herr Segre*) genauer erforscht hat.

Unser Gleichungssystem (A) ordnet nun diese Kurven den Kurven eines linearen Komplexes zu. Sind nämlich v und w so bestimmt, daß durch die Gleichungen (A) eine Kurve eines linearen Komplexes mit vertikaler Achse dargestellt wird, so besteht die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx = k\,dz.$$

Setzt man nun

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad z_1 = is,$$

so wird

$$s_1 = iz_1$$

und

$$x_1\,dy_1 - y_1\,dx_1 = ki\,ds_1,$$

$(x_1 y_1 z_1)$ sind also die Koordinaten einer geodätischen Linie auf einer Rotationsfläche. Insbesondere geht jede algebraisch rektifizierbare Kurve eines linearen Komplexes wieder in eine algebraisch rektifizierbare Geodätische über. Beispiele dafür lassen sich leicht angeben.

IV. Beziehung zwischen den Koordinaten und dem Krümmungs- bezw. Torsionswinkel einer Raumkurve.

Schon Herr Stäckel hat bemerkt, daß man die Raumkurven in der Weise analytisch darstellen kann, daß zwischen den Koordinaten ihrer Punkte und dem Torsionswinkel

$$w' = \int \tau\,ds$$

von Quadraturen freie Relationen bestehen. Dasselbe gilt nun auch für den Krümmungswinkel

$$w = \int \varkappa\,ds.$$

Beide Ergebnisse lassen sich an die Theorie der Minimalkurven knüpfen und an die bekannte Tatsache, daß diese auf verschiedene Weise explizit dargestellt werden können, etwa durch die Formeln

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} \xi &= V' \cos v - V'' \sin v, \\ \eta &= V' \sin v + V'' \cos v, \\ \zeta &= i(V + V''). \end{aligned}$$

*) C. Segre, Sur les droites qui ont des moments donnés par rapport à des droites fixes. J. f. Math. 97, 95—110.

Setzt man nämlich

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

so besteht die Gleichung

$$\text{(II)} \qquad -\left(\frac{d\varrho}{\varrho}\right)^2 = d\left(\frac{\xi}{\varrho}\right)^2 + d\left(\frac{\eta}{\varrho}\right)^2 + d\left(\frac{\zeta}{\varrho}\right)^2.$$

Interpretiert man nun

$$a = \frac{\xi}{\varrho}, \quad b = \frac{\eta}{\varrho}, \quad c = \frac{\zeta}{\varrho}$$

als die Richtungskosinus der Tangente einer Raumkurve, so wird der *Krümmungswinkel* w, der aus

$$dw^2 = da^2 + db^2 + dc^2$$

zu berechnen ist, in der Form

$$w = i \log \varrho$$

erhalten.

Wenn man dagegen

$$a' = \frac{\xi}{\varrho}, \quad b' = \frac{\eta}{\varrho}, \quad c' = \frac{\zeta}{\varrho}$$

als Richtungskosinus der Binormalen einer Raumkurve auffaßt, so erhält man den *Torsionswinkel*

$$w' = i \log \varrho$$

in expliziter Form.

Einer jeden Minimalkurve ($\xi\,\eta\,\zeta\,\varrho$) entspricht also einerseits eine Schar von Raumkurven mit gegebener Indikatrix der Tangenten, so daß der Krümmungswinkel sich ohne Quadratur darstellt, auf der anderen Seite eine Schar von Raumkurven mit gegebener Indikatrix der Binormalen nebst Darstellung des Torsionswinkels.

Da nun im nächsten Abschnitt alle Raumkurven mit gegebener Tangenten- bezw. Binormalenindikatrix gefunden werden, so ist nachgewiesen, daß sich jede Raumkurve so darstellen läßt, daß ihre Koordinaten und der Krümmungswinkel, bezw. ihre Koordinaten und der Torsionswinkel durch endliche Gleichungen verknüpft sind.

Daß die zur rechnerischen Durchführung des angegebenen Gedankenganges erforderlichen Operationen ihre Übersichtlichkeit nicht verlieren, zeigen die von mir a. a. O.*) unter der unnötig einschränkenden Bedingung $\varkappa = \text{const.}$, bezw. $\tau = \text{const.}$ aufgestellten Formelsysteme, denen die Gleichungen (I) zugrunde gelegt sind.

Auch zwischen dem *Winkel der ganzen Krümmung* w'' und den Richtungskosinus der Hauptnormalen a'', b'', c'' bestehen endliche Gleichungen

*) E. Salkowski, Schraubenlinien und Loxodromen. Sitzungsber. der Berl. Math. Ges. 7, 83—87.

derselben Art, doch erfordert die Bestimmung der zugehörigen Tangentenrichtungsgrößen und damit die der Koordinaten noch eine Quadratur, so daß die Schlußbemerkung der genannten Arbeit in diesem Sinne abzuändern ist.

V. Explizite Darstellung bemerkenswerter Klassen von Raumkurven.

1. *Kurven mit vorgegebener Indikatrix der Tangenten.* Wenn die sphärische Indikatrix der Tangenten einer Raumkurve gegeben ist, so kennt man die Richtungskosinus a, b, c ihrer Tangenten als Funktionen eines Parameters t. Durch die Gleichung

$$dw^2 = da^2 + db^2 + dc^2$$

ist der Kontingenzwinkel dw zu finden, sodann ergeben sich durch einfache ausführbare Operationen die Richtungskosinus a', b', c' der Binormale und a'', b'', c'' der Hauptnormale.

Setzt man nun noch das Gesetz, nach welchem sich der Abstand der Schmiegungsebene vom Anfangspunkt der Koordinaten ändert, willkürlich fest, setzt also

$$a'x + b'y + c'z = \varphi(t),$$

so ist die Darstellung der Raumkurve durch wiederholte Differentiationen und Auflösung eines Systems linearer Gleichungen gewonnen. Es wird nämlich

$$\begin{aligned} a''x + b''y + c''z &= \frac{d\varphi}{dw'}, \\ ax + by + cz &= -\varphi\frac{dw'}{dw} - \frac{d}{dw}\left(\frac{d\varphi}{dw'}\right). \end{aligned}$$

Es gilt also der Satz:

Alle Kurven, die dieselbe Indikatrix der Tangenten besitzen

$$a = a(t), \quad b = b(t), \quad c = c(t),$$

werden explizit durch die Formeln

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} x &= -\left\{\varphi\frac{dw'}{dw} + \frac{d}{dw}\left(\frac{d\varphi}{dw'}\right)\right\} a + \varphi a' + \frac{d\varphi}{dw'} a'', \\ y &= -\left\{\varphi\frac{dw'}{dw} + \frac{d}{dw}\left(\frac{d\varphi}{dw'}\right)\right\} b + \varphi b' + \frac{d\varphi}{dw'} b'', \\ z &= -\left\{\varphi\frac{dw'}{dw} + \frac{d}{dw}\left(\frac{d\varphi}{dw'}\right)\right\} c + \varphi c' + \frac{d\varphi}{dw'} c'', \end{aligned}$$

dargestellt, in denen φ eine beliebige Funktion des Parameters bedeutet.

Dieses auch für andere Zwecke äußerst nützliche Schlußverfahren ist einem von Herrn Stäckel*) eingeschlagenen Gedankengange nachgebildet.

Sucht man alle *Raumkurven mit gegebener Indikatrix der Binormalen,*

*) Math. Ann. Bd. 45 a. a. O.

so findet man durch ausführbare Rechnungen a, b, c; a'', b'', c''; dw, dw' und kann dann dieselben Formeln anwenden.

Bei der Bestimmung aller *Raumkurven, die dasselbe sphärische Bild der Hauptnormalen* $a'' = a''(t)$, $b'' = b''(t)$, $c'' = c''(t)$ besitzen, führt das Verfahren nicht zur Umgehung jeglicher Quadratur, da hier die Richtungskosinus der Tangente und Binormale nicht eindeutig bestimmbar sind, sondern eine Integration erfordern.

Es ist nämlich

$$a\,dw + a'\,dw' = -\,da''$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

und, wenn

$$\cos\theta = \frac{dw}{\sqrt{dw^2 + dw'^2}}, \quad \sin\theta = \frac{dw'}{\sqrt{dw^2 + dw'^2}}$$

gesetzt wird:

$$dw''^2 = dw^2 + dw'^2 = \sum da''^2,$$
$$a\cos\theta + a'\sin\theta = -\frac{da''}{dw''},$$
$$(-a\sin\theta + a'\cos\theta)\,d\theta = -\,d\,\frac{da''}{dw''} - a''\,dw'',$$
$$d\theta^2 = \sum\left(d\,\frac{da''}{dw''}\right)^2 + dw''^2.$$

Hieraus ergibt sich θ durch eine Quadratur, sodann

$$a = \quad\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{da''}{dw''}\right) + a''\,\frac{dw''}{d\theta}\right\}\sin\theta - \frac{da''}{dw''}\cos\theta,$$
$$a' = -\left\{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{da''}{dw''}\right) + a''\,\frac{dw''}{d\theta}\right\}\cos\theta - \frac{da''}{dw''}\sin\theta$$

nebst den analogen Ausdrücken für b, b', c, c'. Jetzt lassen sich die vorher gefundenen Formeln anwenden.

2. *Geodätische Linien auf Kegelflächen.* Obwohl diese Linien wiederholt untersucht worden sind, scheint eine von Quadraturen freie Darstellung ihrer kartesischen Koordinaten erst ganz neuerdings*) gegeben zu sein. Sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre rektifizierenden Ebenen sich in einem Punkte, der Kegelspitze, schneiden. Wählt man diese zum Nullpunkt, so ist demnach:

$$a''x + b''y + c''z = 0.$$

Multipliziert man mit dw' und integriert, so ergibt sich

$$a'x + b'y + c'z = -\,p,$$

d. h. die Schmiegungsebenen haben vom Anfangspunkt einen konstanten

*) Schauff, Diss., Münster 1906. Die dort von flächentheoretischen Prinzipien ausgehende Ableitung unterscheidet sich indessen wesentlich von den hier verfolgten Gedankengängen.

Abstand. Andererseits ergibt sich aus der ersten Gleichung durch Differentiation:

$$ax + by + cz = + p\,\frac{dw'}{dw},$$

so daß

$$x = p\left(a\,\frac{dw'}{dw} - a'\right),$$

$$y = p\left(b\,\frac{dw'}{dw} - b'\right),$$

$$z = p\left(c\,\frac{dw'}{dw} - c'\right)$$

die gesuchte explizite Darstellung ist. Diese läßt sofort eine zweite charakteristische Eigenschaft der Kurven hervortreten, wenn man aus ihr das Bogenelement der Kurve bestimmt:

$$ds = p\,d\left(\frac{dw'}{dw}\right),$$

d. h. die Bogenlänge ist eine ganze lineare Funktion des Verhältnisses von Torsion und Krümmung. Man kann übrigens auch diese längst bekannte Eigenschaft als Ausgangspunkt wählen, um dieselben Endgleichungen zu erhalten. Für jede Raumkurve wird nämlich

$$x = \int a\,ds, \quad y = \int b\,ds, \quad z = \int c\,ds,$$

also

$$x = as - \int s\varkappa a''\,ds.$$

Da nun nach Voraussetzung bei passender Wahl des Anfangspunktes der Bogenlänge

$$\frac{\tau}{\varkappa} = \frac{s}{p}$$

ist, so wird

$$\varkappa s = p\tau,$$

woraus sich sofort die vorhin gefundenen Ausdrücke für x, y, z ergeben.

Von speziellem Interesse scheint ein anderes Formelsystem, das eine neue charakteristische Eigenschaft unserer Kurven enthüllt.

In einer Ebene sei eine Gerade, auf Polarkoordinaten bezogen, durch die Gleichung

$$r\cos(\varphi - \varphi_0) = p$$

gegeben. Ihre Länge sei von dem dem Nullpunkt am nächsten gelegenen Punkte gerechnet, so daß

$$s = p\,\mathrm{tg}\,(\varphi - \varphi_0)$$

wird. Biegt man nun die Ebene in einen Kegel, dessen Spitze der Nullpunkt ist, so geht die Gerade in eine Geodätische über, und es wird

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Die Mantellinien des Kegels haben die Richtungskosinus $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, und der Winkel zweier benachbarter Mantellinien wird demgemäß durch

$$d\varphi^2 = \left(d\,\frac{x}{r}\right)^2 + \left(d\,\frac{y}{r}\right)^2 + \left(d\,\frac{z}{r}\right)^2$$

ausgedrückt, eine Gleichung, die mit der Formel (I) des vorigen Abschnitts übereinstimmt, wenn

$$\varphi = -i\log\varrho,$$

$$\frac{x}{r} = \frac{\xi}{\varrho}, \quad \frac{y}{r} = \frac{\eta}{\varrho}, \quad \frac{z}{r} = \frac{\zeta}{\varrho}$$

gesetzt wird. Nach kleiner Rechnung findet man:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{A\varrho^2 + B}, \\ y &= \frac{\eta}{A\varrho^2 + B}, \\ z &= \frac{\zeta}{A\varrho^2 + B}, \\ s &= \frac{i}{2\sqrt{AB}}\,\frac{A\varrho^2 - B}{A\varrho^2 + B}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen ist unmittelbar ersichtlich, daß jede algebraische Geodätische auf einer Kegelfläche algebraisch rektifizierbar sein muß. Wenn man ferner beachtet, daß, wenn ein Kegel durch eine homogene Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

dargestellt ist, auch

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

ist, so hat man den Satz:

Die geodätischen Linien eines Kegels sind bekannt, wenn man seine Minimalkurven kennt.

3. *Geodätische Linien auf den Tangentenflächen von Schraubenlinien.* Da die Hauptnormalen einer Kurve den Binormalen ihrer rektifizierenden Gratlinie parallel sind, so ist für die vorliegenden Kurven

$$a''^2 + b''^2 - k^2c''^2 = 0,$$

d. h. die Indikatrix der Hauptnormalen ist ein Kreis, und da

$$da^2 + db^2 - k^2dc^2 = 0,$$

so ist die Indikatrix ihrer Tangenten eine *sphärische* Schraubenlinie; man kann daher setzen:

$$\begin{aligned} a &= \frac{n+1}{2n+1}\cos nt - \frac{n}{2n+1}\cos(n+1)t, \\ b &= \frac{n+1}{2n+1}\sin nt - \frac{n}{2n+1}\sin(n+1)t, \\ c &= \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1}\cos\frac{t}{2}; \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\frac{dw}{dt} = \sqrt{n(n+1)} \sin\frac{t}{2}, \qquad \frac{dw'}{dt} = \sqrt{n(n+1)} \cos\frac{t}{2}, \quad k = 2\sqrt{n(n+1)},$$

$$a'' = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2(n+1)} \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t, \qquad a' = \frac{n}{2n+1} \sin(n+1)t + \frac{n+1}{2n+1} \sin nt,$$

$$b'' = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t, \qquad b' = -\frac{n}{2n+1} \cos(n+1)t - \frac{n+1}{2n+1} \cos nt,$$

$$c'' = \frac{-1}{(2n+1)}, \qquad c' = -\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \sin\frac{t}{2}.$$

Die Formeln (B) ergeben dann:

$$x = \left(a' - a \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\varphi + \left(2\sqrt{n(n+1)}\, a'' \cos\frac{t}{2} - a\right)\frac{\varphi'}{2n(n+1)\cos^2\frac{t}{2}} - \frac{a}{n(n+1)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}\varphi'',$$

$$y = \left(b' - b \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\varphi + \left(2\sqrt{n(n+1)}\, b'' \cos\frac{t}{2} - b\right)\frac{\varphi'}{2n(n+1)\cos^2\frac{t}{2}} - \frac{b}{n(n+1)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}\varphi'',$$

$$z = \left(c' - c \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\varphi + \left(2\sqrt{n(n+1)}\, c'' \cos\frac{t}{2} - c\right)\frac{\varphi'}{2n(n+1)\cos^2\frac{t}{2}} - \frac{c}{n(n+1)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}}\varphi'',$$

$$ds = -d\left\{\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2} + \frac{1}{n(n+1)\sin\frac{t}{2}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'}{\cos\frac{t}{2}}\right)\right\} - \operatorname{tg}\frac{t}{2}\,d\varphi.$$

Die Kurven sind also immer algebraisch rektifizierbar, wenn φ eine ganze rationale Funktion von $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ ist.

Für $\varphi = \text{const.}$ reduziert sich die rektifizierende Schraubenlinie auf einen Punkt, die abwickelbare Schraubenfläche auf einen geraden Kreiskegel. Man erhält demgemäß die geodätischen Linien dieser Fläche in der Form

$$x = p\,\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{(2n+1)\sin\frac{t}{2}}, \qquad y = p\,\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{(2n+1)\sin\frac{t}{2}},$$

$$z = p\,\frac{2\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)\sin\frac{t}{2}}, \qquad s = p\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Ein zweiter Sonderfall von speziellem Interesse sind die Kurven konstanter Krümmung, die unter ihnen vorkommen. Es sind dies die einzigen algebraischen Raumkurven konstanter Krümmung, die bis jetzt bekannt sind.*)

4. *Kurven, deren rektifizierende Ebenen von einem festen Punkte einen konstanten Abstand besitzen.* Diese Kurven, die von Pirondini**) und Schell***) betrachtet sind, können als die geodätischen Linien von abwickelbaren Flächen aufgefaßt werden, deren Gratlinie von einem Punkte äquidistante Schmiegungsebenen besitzt, also eine geodätische Linie eines Kegels ist.

Ihre Gleichungen folgen aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} a''x + b''y + c''z &= -p, \\ a'x + b'y + c'z &= -pw' - q, \\ ax + by + cz &= +\frac{dw'}{dw}(pw' + q) \end{aligned}$$

von denen die zweite durch Integration, die dritte durch Differentiation aus der definierenden ersten Gleichung hervorgeht. Man erhält so

$$\begin{aligned} x &= (pw' + q)\left(a\frac{dw'}{dw} - a'\right) - pa'', \\ y &= (pw' + q)\left(b\frac{dw'}{dw} - b'\right) - pb'', \\ z &= (pw' + q)\left(c\frac{dw'}{dw} - c'\right) - pc'', \\ s &= (pw' + q)\frac{dw'}{dw} - pw. \end{aligned}$$

Die Darstellung der Bogenlänge in endlicher Form umgeht die notwendige Quadratur nur scheinbar, da es im allgemeinen nicht möglich ist, Krümmungs- und Schmiegungswinkel gleichzeitig mit dem Richtungskosinus der Tangente explizit zu verbinden.

---

*) E. Salkowski, Zur Transformation von Raumkurven. Math. Ann. Bd. 66, S. 517—547.

**) G. Pirondini, Sulle linee a doppia curvatura. Giornale di Mat. 26, 1886.

***) W. Schell, Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung. Arch. der Math. u. Phys. (3) 5, 4—9.