Über die Bernoullischen Funktionen.

Von

Paul Böhmer in Berlin.

Inhalt.

1. Die Differenzengleichung

$$f_\mu(z+1) - f_\mu(z) = \mu z^{\mu-1} \tag{I}$$

ist bisher, soweit ich sehe, nur im Falle eines positiven ganzzahligen Index μ untersucht worden, wo sie rationale Lösungen, die sogenannten Bernoullischen Polynome, zuläßt, die der Nebenbedingung $f_\mu(1) = 0$ genügen. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß die Differenzengleichung auch für ein beliebiges komplexes μ stets Lösungen besitzt. Es soll ferner für ein beliebiges μ eine bestimmte Lösung aufgestellt werden, die eine analytische Funktion des Index darstellt und für ein positives ganzzahliges μ

in das μ^{te} Bernoullische Polynom übergeht. Diese partiellen Lösungen wollen wir fortab als *Bernoullische Funktionen* bezeichnen und mit dem Symbol $\varphi_\mu(z)$ belegen; für sie gilt ganz allgemein die Gleichung

$$\varphi_\mu(1) = 0.$$

Indem wir uns der Untersuchung der Gleichung (I) zuwenden, bemerken wir, daß (I) keine eindeutige Beziehung zwischen den beiden Funktionswerten linker Hand ausdrückt; um das letztere zu erreichen, müssen wir erst den Sinn von $z^{\mu-1}$ eindeutig festlegen. Zu diesem Zwecke führen wir in der komplexen z-Ebene einen Eindeutigkeitsschnitt vom Punkte $z = 0$ längs der reellen negativen Achse bis $z = \infty$; den so geschaffenen Bereich mit Ausschluß der Ränder nennen wir B. Indem wir festsetzen, daß $\log z$ auf der reellen positiven Achse reell und innerhalb des ganzen Bereiches stetig sein soll, erreichen wir, daß auch $z^{\mu-1}$ in B überall eindeutig und stetig ist. In gleicher Weise läßt sich auch der Wert des Symboles $(n+z)^{\mu-1}$, unter n eine ganze positive Zahl verstanden, im Bereiche B eindeutig und stetig festsetzen.

Ehe wir zur Aufstellung der Funktionen $\varphi_\mu(z)$ schreiten und damit den Existenzbeweis für die Lösungen der Differenzengleichung bei beliebigem μ führen, wollen wir noch eine Reihe von Eigenschaften ableiten, die den allgemeinen Lösungen zukommen, und die sich als Folge der in (I) zum Ausdruck kommenden Eigenschaft ergeben. Die Gleichung (I) selbst wollen wir fortan als die *Funktionalgleichung* bezeichnen.

2. Seien $F_\mu(z)$ und $f_\mu(z)$ zwei innerhalb von B oder innerhalb eines gemeinsamen Teilbereiches von B definierte verschiedene partikuläre Lösungen der Funktionalgleichung, so gelten die Gleichungen

$$F_\mu(z+1) - F_\mu(z) = \mu z^{\mu-1}$$

und

$$f_\mu(z+1) - f_\mu(z) = \mu z^{\mu-1}.$$

Da nach den oben getroffenen Verabredungen die rechten Seiten beider Gleichungen denselben Wert haben, ergibt sich aus der Gleichheit der linken Seiten

$$F_\mu(z+1) - f_\mu(z+1) = F_\mu(z) - f_\mu(z),$$

d. h. die Differenz

$$F_\mu(z) - f_\mu(z) = \omega(z)$$

ist eine im gemeinsamen Definitionsbereiche beider Lösungen periodische Funktion von z mit der Periode 1; oder mit anderen Worten: *Ist $f_\mu(z)$ eine Lösung von* (I), *so stellt auch jeder Ausdruck $F_\mu(z) = f_\mu(z) + \omega(z)$ eine Lösung dar,* sofern nur die willkürliche Funktion $\omega(z)$ der Periodizitätsbedingung $\omega(z+1) = \omega(z)$ genügt; zugleich *erschöpft dieser Ausdruck auch die Gesamtheit aller Lösungen* der Funktionalgleichung.

3. Gehören die Zahlen z und $-z$ beide dem Bereiche B an, so ist nach den früheren Festsetzungen sowohl $z^{\mu-1}$ wie $(-z)^{\mu-1}$ eindeutig bestimmt. Die Relation indessen, die zwischen diesen beiden Größen besteht, nimmt zwei verschiedene Formen an, je nachdem z eine Zahl der positiven (Fall A) oder der negativen z-Halbebene (Fall B) darstellt. (Der Grenzfall eines reellen z ist ausgeschlossen, da ja dann $-z$ auf dem Rande des Bereiches B liegt.)

Ist nämlich z eine Zahl der positiven Halbebene, so können wir, ohne den Bereich B zu verlassen, bei konstantem $|z|$ mittels Drehung um den Nullpunkt durch den Winkel $-\pi$ zu $-z$ übergehen; es ist also

$$(-z)^{\mu-1} = z^{\mu-1} e^{-i\pi(\mu-1)} = -z^{\mu-1} e^{-i\pi\mu}. \tag{A}$$

Ist z dagegen ein Punkt der negativen Halbebene, so muß die Drehung, soll der Bereich B nicht verlassen werden, im positiven Sinne erfolgen, d. h. es ist alsdann

$$(-z)^{\mu-1} = z^{\mu-1} e^{i\pi(\mu-1)} = -z^{\mu-1} e^{i\pi\mu}. \tag{B}$$

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Ableitung eines wichtigen Theorems, des *Ergänzungssatzes*, der eine Relation zwischen $f_\mu(z)$ und $f_\mu(1-z)$ darstellt, wobei wir voraussetzen wollen, daß $f_\mu(z)$ im ganzen Bereiche B existiert und die Funktionalgleichung befriedigt. Wir müssen hierbei, wie sich in der Folge sofort zeigen wird, die beiden Fälle unterscheiden, nämlich den Fall (A), wo z der positiven und $1-z$ somit der negativen Halbebene angehört, ein innerhalb von B von z zu $1-z$ verlaufender Weg also im negativen Sinne um den Nullpunkt herumgeht, und den Fall (B), wo das Entgegengesetzte stattfindet; je nachdem ändert sich nämlich die Form der Relation.

A. Wir ersetzen in der Gleichung

$$f_\mu(z+1) - f_\mu(z) = \mu z^{\mu-1}$$

die Größe z durch $-z$ und erhalten so

$$f_\mu(1-z) - f_\mu(-z) = \mu(-z)^{\mu-1} = -\mu z^{\mu-1} e^{-i\pi\mu}.$$

Multiplizieren wir die erste der vorstehenden Gleichungen mit $e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}$, und die zweite mit $e^{\frac{i\pi\mu}{2}}$, so folgt durch Addition

$$e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z+1) - e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z) + e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(1-z) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(-z) = 0,$$

oder anders geordnet

$$e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z+1) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(-z) = e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(1-z).$$

Hieraus fließt aber unmittelbar der Satz: Die in der positiven Halbebene definierte Funktion

$$\text{(II A)} \qquad e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z) - e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(1-z) = \omega_A(z)$$

ist eine in der positiven z-Halbebene periodische Funktion von der Periode 1.

B. Durch die entsprechende Schlußweise findet man, daß, falls z der negativen Halbebene angehört, die Funktion

$$\text{(II B)} \qquad e^{\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(z) - e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} f_\mu(1-z) = \omega_B(z)$$

eine periodische Funktion der Periode 1 ist.

4. Die Funktionen ω_A und ω_B lassen sich aber aus ihren bisherigen Definitionsbereichen hinaus fortsetzen. Durch die beiden Gleichungen (II A) und (II B) sind offenbar die beiden Funktionen innerhalb eines Bereiches C definiert, der aus dem Bereiche B hervorgeht, wenn man diesen durch einen weiteren Verzweigungsschnitt berandet, der beim Punkte $z = 1$ beginnend längs der positiven reellen Achse ins Unendliche geht. Zwischen den beiden Funktionen besteht nun im ganzen Bereiche C, wie sich unmittelbar aus den definierenden Gleichungen ergibt, die Relation

$$\omega_B(z) = -\,\omega_A(1-z)$$

oder

$$\omega_A(z) = -\,\omega_B(1-z).$$

Die fortgesetzten Funktionen sind aber in der Halbebene der Fortsetzung *nicht mehr periodisch**). Um das Verhalten von $\omega_A(z)$ in der negativen Halbebene zu ermitteln, bilden wir zunächst die Differenz $\omega_A(z+1) - \omega_A(z)$, wenden die Funktionalgleichung auf die beiden Teile an und berücksichtigen die Gleichung (B) der vorigen Nr.; das ergibt

$$\begin{aligned}\omega_A(z+1) - \omega_A(z) &= e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} f(z+1) - e^{\frac{\mu\pi i}{2}} f(-z) - e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} f(z) + e^{\frac{\mu\pi i}{2}} f(1-z)\\ &= \mu\left[e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} z^{\mu-1} - e^{\frac{\mu\pi i}{2}} (-z)^{\mu-1}\right]\\ &= \mu\left(e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} - e^{\frac{3\mu\pi i}{2}}\right) z^{\mu-1}\end{aligned}$$

*) Dieses zunächst auffallende Verhalten erklärt sich einfach dadurch, daß die Funktion $\omega_A(z) - \omega_A(z+1)$ sich auf Wegen, welche dem Bereich C angehören, überhaupt nicht von der positiven in die negative Halbebene fortsetzen läßt. Denn liegt z auf dem reellen Stück zwischen 0 und $+1$, so trifft $z+1$ den Schnitt $(1 \cdots + \infty)$. — Dasselbe Verhalten bezüglich der Periodizität zeigt z. B. die Funktion $(\sin z)^\mu$ bei nicht ganzzahligem μ, wenn man sie in einer Ebene betrachtet, welche von $-\infty$ bis 0 und von π bis ∞ aufgeschnitten ist.

oder schließlich

$$\omega_A(z+1) - \omega_A(z) = -2i\mu e^{\frac{\mu\pi i}{2}} \sin\mu\pi \cdot z^{\mu-1}.$$

Entsprechend gilt, falls z der positiven Halbebene zugehört, die Gleichung

$$\omega_B(z+1) - \omega_B(z) = 2i\mu e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} \sin\mu\pi \cdot z^{\mu-1}.$$

Zusammenfassend können wir sagen: *Die Funktionen* $\omega_A(z)$ *und* $\omega_B(z)$ *sind je in einer der beiden Halbebenen des Bereiches C periodische Funktionen, während sie in der anderen Halbebene, abgesehen von einem Zahlenfaktor, Lösungen von* (I) *darstellen.*

Wir können das Gleichungssystem (II) umgekehrt dazu benutzen, um die Größen $f_\mu(z)$ und $f_\mu(1-z)$ durch $\omega_A(z)$ und $\omega_B(z)$ auszudrücken; da die Determinante dieses linearen Systems sich zu $-2i\sin\mu\pi$ ergibt, ist die Auflösung an die Bedingung gebunden, daß μ keine ganze rationale Zahl ist. Wir finden unter dieser Einschränkung das Ergebnis

$$\begin{cases} f_\mu(z) = -\dfrac{e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}\omega_A(z) - e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\omega_B(z)}{2i\sin\mu\pi}, \\[2ex] f_\mu(1-z) = -\dfrac{e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\omega_A(z) - e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}\omega_B(z)}{2i\sin\mu\pi}. \end{cases}$$

Die vorstehenden Formeln stellen $f_\mu(z)$ und $f_\mu(1-z)$ als Summe zweier Ausdrücke dar, von denen jeder in einer Halbebene die Funktionalgleichung erfüllt, während der andere in derselben Halbebene periodisch ist.

5. Es ist nach (I), wenn wir unter k eine ganze positive Zahl und unter $k^{\mu-1}$ den Hauptwert verstehen,

$$f(kz) + \mu k^{\mu-1} z^{\mu-1} = f(kz+1),$$

und ferner ist

$$\sum_{\varrho=0}^{k-1} f\left(z + \frac{\varrho}{k}\right) + \mu z^{\mu-1} = \sum_{\varrho=0}^{k-1} f\left(z + \frac{\varrho+1}{k}\right).$$

Dividieren wir die erste Gleichung durch $k^{\mu-1}$, und ziehen wir die zweite davon ab, so folgt die für jedes z gültige Formel

$$\frac{f(kz)}{k^{\mu-1}} - \sum_{0}^{k-1} f\left(z + \frac{\varrho}{k}\right) = \frac{f(kz+1)}{k^{\mu-1}} - \sum_{0}^{k-1} f\left(z + \frac{1}{k} + \frac{\varrho}{k}\right) = \omega_M(z);$$

d. h. $\omega_M(z)$ ist eine in der ganzen z-Ebene periodische Funktion der Periode $\frac{1}{k}$. Das in der Formel

$$\text{(III)} \qquad \frac{f_\mu(kz)}{k^{\mu-1}} = \sum_0^{k-1} f_\mu\left(z+\frac{\varrho}{k}\right) + \omega_M(z)$$

zum Ausdruck kommende Theorem, das die Funktion des k-fachen Argumentes als eine Summe von Funktionen darstellt, die sämtlich dem Intervalle von z bis $z+1$ angehören, bezeichnen wir als das *Multiplikationstheorem.*

6. Differentiieren wir die Gleichung

$$f_{\mu+1}(z+1) - f_{\mu+1}(z) = (\mu+1)z^\mu$$

nach z, so erhalten wir nach Division durch $\mu+1$

$$\frac{1}{\mu+1}\frac{df_{\mu+1}(z+1)}{dz} - \frac{1}{\mu+1}\frac{df_{\mu+1}(z)}{dz} = \mu z^{\mu-1}.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung mit der der Gleichung (I) identisch ist, so entspringt

$$f_{\mu+1}(z+1) - \frac{1}{\mu+1}\frac{df_{\mu+1}(z+1)}{dz} = f_\mu(z) - \frac{1}{\mu+1}\frac{df_{\mu+1}(z)}{dz} = \omega_D(z);$$

auf Grund der vorstehenden Gleichung ist also $\omega_D(z)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1. Wir können das Ergebnis in folgendem Satze aussprechen:

Ist $f_{\mu+1}(z)$ irgend eine Lösung der Funktionalgleichung vom Index $\mu+1$, und $f_\mu(z)$ eine solche der Funktionalgleichung vom Index μ, so besteht die Gleichung

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{\mu+1}\frac{df_{\mu+1}(z)}{dz} = f_\mu(z) - \omega_D(z).$$

Verstehen wir, die Integrierbarkeit von $\omega_D(z)$ vorausgesetzt, unter Ω die Konstante

$$\Omega = \int_a^{a+1} \omega_D(z)\,dz,$$

so wird das Integral

$$\omega_J(z) = \int_a^z [\omega_D(z) - \Omega]\,dz$$

wieder eine periodische Funktion der Periode 1 sein. Hiernach liefert aber die Integration der Gleichung (IV) zwischen den Grenzen a und z das Ergebnis

$$\frac{1}{\mu+1}[f_{\mu+1}(z) - f_{\mu+1}(a)] = \int_a^z f_\mu(z)\,dz - \Omega(z-a) - \omega_J(z),$$

oder anders geordnet

$$\text{(V)} \qquad \int_a^z f_\mu(z)\,dz = \frac{1}{\mu+1}\left[f_{\mu+1}(z) - f_{\mu+1}(a)\right] + \Omega(z-a) + \omega_J(z).$$

7. Während die Aufstellung von Lösungen der Funktionalgleichung für ein positives ganzzahliges μ im allgemeinen Falle mit erheblichen Schwierigkeiten verknüpft ist, ist es, wenn $\Re(\mu) < 1$ vorausgesetzt wird, sehr leicht, die Gleichung (I) durch direkte Summation aufzulösen; wir betrachten zu diesem Zwecke die unendliche Reihe

$$U = \sum_0^\infty (n+z)^\lambda,$$

in welcher die Werte von z auf den Bereich B beschränkt sein sollen, sodaß nach früheren Festsetzungen jedes Reihenglied einen eindeutigen, endlichen Wert besitzt. Eine elementare Untersuchung der Konvergenz dieser Reihe führt zu folgendem Ergebnis:

Die Reihe U konvergiert, falls $\Re(\lambda) < -1$ ist, für alle z-Werte des Bereiches B; da diese Konvergenz in jedem endlichen Teilbereiche von B gleichmäßig ist, stellt U eine im ganzen Bereiche B analytische Funktion dar.

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf die Reihe U auch auf jedem im Inneren von B verlaufenden Wege gliedweise integriert werden, und hieraus folgt, daß die Reihe

$$V = \sum_0^\infty \left[(n+1)^{\lambda+1} - (n+z)^{\lambda+1}\right] = -(\lambda+1)\int_1^z U\,dz$$

im ganzen Bereiche B konvergiert, sobald $\Re(\lambda) < -1$; oder anders geschrieben: *Die Reihe*

$$\sum_0^\infty \left[(n+1)^\lambda - (n+z)^\lambda\right]$$

konvergiert im Bereiche B und stellt daselbst eine analytische Funktion dar, sobald $\Re(\lambda) < 0$ ist.

Hiernach stellt nun der Ausdruck

$$\text{(1)} \qquad \varphi_\mu(z) = \mu \sum_0^\infty \left\{\frac{1}{(n+1)^{1-\mu}} - \frac{1}{(n+z)^{1-\mu}}\right\},$$

sobald μ der Ungleichung

$$\Re(\mu) < 1$$

genügt, eine im Bereiche B analytische Funktion dar; und zwar erfüllt diese Funktion die funktionale Differenzengleichung. Um dies zu zeigen, bilden wir

$$\varphi_\mu(z+1) = \mu \sum_0^\infty \left\{ \frac{1}{(n+1)^{1-\mu}} - \frac{1}{(n+1+z)^{1-\mu}} \right\} = \mu \sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{n^{1-\mu}} - \frac{1}{(n+z)^{1-\mu}} \right\}$$

und ziehen $\varphi_\mu(z)$ davon ab; so ergibt sich

$$\varphi_\mu(z+1) - \varphi_\mu(z) = \mu \left[-1 + \frac{1}{z^{1-\mu}} + \sum_1^\infty \left\{ \frac{1}{n^{1-\mu}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\mu}} \right\} \right].$$

Da die hierin auftretende Summe bei der natürlichen Gliederanordnung, wie man sofort erkennt, den Wert 1 liefert, erhält man, wie es sein soll,

$$\varphi_\mu(z+1) - \varphi_\mu(z) = \mu z^{\mu-1}.$$

Wir bemerken noch, daß für alle Werte von μ, wie man unmittelbar aus der Definitionsgleichung abliest,

$$\varphi_\mu(1) = 0$$

ist.

Die so definierte Funktion $\varphi_\mu(z)$ bezeichnen wir als die Bernoullische Funktion vom Index μ.

8. Von der in Gleichung (1) gegebenen Definition von $\varphi_\mu(z)$ ausgehend können wir uns nun eine *Integraldarstellung für die Bernoullischen Funktionen* verschaffen, indem wir von der bekannten Formel

$$\frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-vt} t^{-\mu} \, dt = \frac{1}{v^{1-\mu}}$$

Gebrauch machen. Da die Konvergenz des vorstehenden Integrals außer an die Bedingung $\Re(\mu) < 1$ noch an die weitere $\Re(v) > 0$ geknüpft ist, beschränken wir jetzt z auf die rechte Halbebene, d. h. es soll fortan gelten

$$\Re(z) > 0.$$

Wir finden nun

$$\frac{1}{(n+1)^{1-\mu}} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(n+1)t} t^{-\mu} \, dt$$

und

$$\frac{1}{(n+z)^{1-\mu}} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^\infty e^{-(n+z)t} t^{-\mu} dt,$$

also

$$\varphi_\mu(z) = \frac{\mu}{\Gamma(1-\mu)} \sum_0^\infty \int_0^\infty [e^{-(n+1)t} - e^{-(n+z)t}] t^{-\mu} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \sum_0^\infty \int_0^\infty (e^{-zt} - e^{-t}) e^{-nt} t^{-\mu} dt.$$

Kehren wir die Reihenfolge von Summation und Integration um, so ergibt sich, da das herauskommende Integral unter den obigen Bedingungen gleichfalls konvergiert,

$$\varphi_\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt} - e^{-t}}{1 - e^{-t}} t^{-\mu} dt$$

oder

$$\varphi_\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt+t} - 1}{e^t - 1} t^{-\mu} dt; \tag{2}$$

zugleich wird

$$\varphi_\mu(z+1) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty \frac{e^{-zt} - 1}{e^t - 1} t^{-\mu} dt. \tag{3}$$

Übrigens kann man leicht direkt nachweisen, daß das gewonnene Integral die Funktionalgleichung erfüllt. Dazu braucht man nur die Differenz der letzten beiden Gleichungen zu bilden; man findet nacheinander

$$\varphi_\mu(z+1) - \varphi_\mu(z) = \frac{-1}{\Gamma(-\mu)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{-\mu} dt = \frac{-1}{\Gamma(-\mu)} \cdot \frac{\Gamma(1-\mu)}{z^{1-\mu}} = \mu z^{\mu-1}.$$

9. Auf Grund von (3) können wir $\varphi_\mu(z+1)$ sofort in eine *Potenzreihe* verwandeln, indem wir e^{-zt} nach Potenzen von z entwickeln und alsdann die vorgeschriebene Integration gliedweise ausführen. Dem Resultate können wir durch Anwendung der Gleichung

$$\int_0^\infty \frac{t^{\lambda-1}}{e^t - 1} dt = \zeta(\lambda)\Gamma(\lambda)$$

die Form geben:

$$\varphi_\mu(z+1) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)} \sum_1^\infty \left\{ (-1)^m \frac{\zeta(1-\mu+m)\Gamma(1-\mu+m)}{m!} z^m \right\}. \tag{4}$$

Um die Konvergenz der Reihe $\varphi_\mu(z+1) = \sum c_m z^m$, die ja die notwendige und hinreichende Bedingung für die Zulässigkeit der Ableitung bildet, nachzuweisen, suchen wir zunächst den Grenzwert

$$\lim_{m=\infty} c_m m^\mu = \frac{(-1)^m \zeta(1-\mu+m)\,\Gamma(1-\mu+m)}{\Gamma(-\mu)\,.\,m!\,m^{-\mu}}$$
$$= \frac{(-1)^m \zeta(1-\mu+m)\,\Gamma(1-\mu+m)}{\Gamma(-\mu)\;(m-1)!\;m^{1-\mu}}$$

auf. Wenn wir berücksichtigen, daß für jedes μ erstens

$$\lim_{m=\infty} \zeta(1-\mu+m) = 1,$$

und zweitens — nach einem bekannten Satze von Weierstraß —

$$\lim_{m=\infty} \frac{\Gamma(1-\mu+m)}{(m-1)!\;m^{1-\mu}} = 1$$

ist, so erhalten wir

$$\lim c_m m^\mu = \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\mu)}, \text{ also } \lim \frac{c_{m+1}}{c_m} = -1;$$

hieraus folgt aber sofort, daß die Reihe (4) konvergiert, und zwar innerhalb des Kreises mit dem Radius 1.

Da die Koeffizienten der Reihe (4) sämtlich ganze transzendente Funktionen von μ sind, und da ferner der eben geführte Konvergenzbeweis ganz unabhängig von dem Werte von μ ist, also auch nicht an die Beschränkung $\Re(\mu) < 1$ gebunden ist, so stellt die Reihe für jedes beliebige μ eine innerhalb des Konvergenzkreises analytische Funktion von s dar. Es gilt nun nachzuweisen, daß die Reihe auch für jedes μ die Funktionalgleichung erfüllt.

10. Zu diesem Zwecke definieren wir zunächst eine Funktion $\Phi_\mu(s+1)$ mittels des „Schleifenintegrals"

$$\Phi_\mu(s+1) = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i} \int_W \frac{e^{us}-1}{e^{-u}-1}\, u^{-\mu}\, du \qquad [\Re(s) > -1], \tag{5}$$

dessen Bedeutung wir folgendermaßen festlegen. Die komplexe Integrationsebene der u sei längs der Achse der negativen Zahlen aufgeschnitten, so daß in dem hierdurch gewonnenen Bereiche $u^{-\mu}$ eindeutig ist; und zwar legen wir dieser Potenz den Hauptwert bei. Der Integrationsweg führe nun von einem unendlich fernen Randpunkte der negativen u-Halbebene ganz im Inneren eines längs der reellen Achse sich erstreckenden Streifens von der beiläufigen Breite π zu einem Punkte der reellen positiven Achse und dann in einem entsprechenden Streifen der positiven Halbebene zu einem unendlich fernen Randpunkte zurück.

Da der Integrand nirgends unendlich wird und, falls nur $\Re(s) > -1$ ist, für $u = -\infty$ von unendlich hoher Ordnung verschwindet, konvergiert das Schleifenintegral für jeden beliebigen Wert von μ.

Ich behaupte nun, daß $\Phi_\mu(z)$ *erstens eine Lösung von (1) darstellt,* und daß *zweitens, wenn* $\Re(\mu) < 1$ *ist,* $\Phi_\mu(z+1)$ *identisch mit* $\varphi_\mu(z+1)$ *ist.*

Zieht man nämlich

$$\Phi_\mu(z) = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int\limits_W \frac{e^{uz-u}-1}{e^{-u}-1}\, u^{-\mu}\, du \qquad [\Re(z) > 0] \tag{5a}$$

von $\Phi_\mu(z+1)$ ab, so erhält man als Differenz

$$-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int\limits_W \frac{e^{uz}(1-e^{-u})}{e^{-u}-1}\, u^{-\mu}\, du = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int\limits_W e^{uz} u^{-\mu}\, du$$

$$= \frac{\Gamma(1+\mu)\cdot z^{\mu-1}}{2\pi i}\int\limits_{W'} e^{u} u^{-\mu}\, du;$$

da das zuletzt auftretende Integral, wie in der Fußnote gezeigt ist, nichts anderes als $2\pi i : \Gamma(\mu)$ ist*), so ist in der Tat

$$\Phi_\mu(z+1) - \Phi_\mu(z) = \mu z^{\mu-1}.$$

---

*) Der durch die Substitution $u' = uz$ aus W hervorgehende Weg W' bildet, da wir $\Re(z) > 0$ vorausgesetzt haben, mit der negativen reellen Achse einen spitzen Winkel; wir wollen seine Richtung durch die Gerade OP festlegen, wo O die Stelle $u = 0$, und P einen beliebigen Punkt des Schenkels bezeichnen soll. Alsdann betrachten wir folgenden auf der zum Integranden gehörigen Riemannschen Fläche geschlossenen Weg:

Wir gehen von dem der negativen Halbebene angehörenden Randpunkte A aus, ohne die Strecke AO zu schneiden, um O herum und zu dem entsprechenden Punkte A' der positiven Halbebene; von dort gehen wir längs der zur imaginären Achse gezogenen Parallelen, ohne die Riemannsche Fläche zu verlassen, bis zum Punkte B' des Strahles OP und alsdann, nach einmaliger Überschreitung der Strecke $B'O$, um O herum und auf der andern Seite der OB' entsprechenden Strecke OB bis zum Punkte B; endlich kehren wir geradlinig von B nach A zurück.

Da dieser (übrigens sich selbst schneidende) Weg keinen singulären Punkt des Integranden einschließt, haben wir nach dem Cauchyschen Satze

$$\int\limits_{AA'} + \int\limits_{A'B'} + \int\limits_{B'B} + \int\limits_{BA} = 0.$$

Lassen wir den Punkt A unbegrenzt nach links rücken, so geht

$$\int\limits_{AA'} \text{in} \int\limits_{W} \quad \text{und} \quad \int\limits_{B'B} \text{in} -\int\limits_{W'}$$

über, während die beiden übrigen Integrale gegen Null konvergieren. Somit ist

$$\int\limits_{W'} = \int\limits_{W};$$

da letzteres Integral aber bekanntlich mit $2\pi i : \Gamma(\mu)$ identisch ist, so ist die obige Behauptung erwiesen.

Unter der Einschränkung $\Re(\mu) < 1$ können wir den Integrationsweg des Schleifenintegrals (5) vollständig auf die Schnittränder zusammenziehen, da der Integrand alsdann bei $u = 0$ integrierbar bleibt; das Schleifenintegral geht so in die Summe zweier geradliniger Integrale über. Führen wir die reelle Variabele t durch die Gleichung $u = -t$ ein, so haben wir $u^{-\mu}$ im ersten Teilintegrale durch $t^{-\mu} e^{i\pi\mu}$, im zweiten durch $t^{-\mu} e^{-i\pi\mu}$ zu ersetzen; das ergibt

$$\Phi_\mu(z+1) = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\left\{-e^{i\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-tz}-1}{e^t-1}\,t^{-\mu}\,dt - e^{-i\pi\mu}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-tz}-1}{e^t-1}\,t^{-\mu}\,dt\right\}$$

$$= -\frac{\Gamma(1+\mu)\,2i\sin\mu\pi}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-tz}-1}{e^t-1}\,t^{-\mu}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{e^{-tz}-1}{e^t-1}\,t^{-\mu}\,dt.$$

Der letzte Ausdruck stimmt aber mit dem in Gleichung (3) überein, und damit ist auch die zweite Behauptung erwiesen.

Um eine Potenzreihe für $\Phi_\mu(z+1)$ zu erhalten, entwickeln wir in Gleichung (5) e^{uz} nach Potenzen von z und integrieren sodann gliedweise; wir erhalten so:

$$\Phi_\mu(z+1) = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\sum_{1}^{\infty}\left\{\frac{z^m}{m!}\int\limits_{W}\frac{u^{m-\mu}}{e^{-u}-1}\,du\right\}.$$

Nach einer Formel von Riemann ist aber bekanntlich

$$\int\limits_{W}\frac{u^{m-\mu}}{e^{-u}-1}\,du = -2i\sin(m-\mu)\pi\cdot\zeta(1+m-\mu)\,\Gamma(1+m-\mu)$$
$$= 2i(-1)^m\sin\mu\pi\cdot\zeta(1+m-\mu)\,\Gamma(1+m-\mu).$$

Berücksichtigt man noch den Ergänzungssatz der Γ-Funktion, so ergibt sich schließlich

$$\Phi_\mu(z+1) = \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\sum_{1}^{\infty}\left\{(-1)^m\frac{\zeta(1+m-\mu)\,\Gamma(1+m-\mu)}{m!}\,z^m\right\}.$$

Hieraus fließt aber folgender allgemeiner Satz: *Die durch die Reihe* (4) *definierte analytische Funktion von z stellt für jedes beliebige μ eine Lösung von (I) dar.*

Wir können der Reihe (4) endlich noch durch die Einführung einer sich im folgenden als zweckmäßig erweisenden Schreibweise eine etwas andere Gestalt geben.

Hierzu bemerken wir vorab, daß die ganze transzendente Funktion von λ

(6) $$B_\lambda = e^{-\frac{\lambda\pi i}{2}} \cdot \lambda\zeta(1-\lambda)$$

auf Grund bekannter Eigenschaften der ζ-Funktion für ein ganzzahliges positives gerades λ der λ^{ten} Bernoullischen Zahl gleich ist, für ungerades $\lambda > 1$ aber verschwindet, und daß ferner

$$B_0 = -1; \quad B_1 = \frac{i}{2}$$

ist. Die Gleichung (4) nimmt nun unter Benutzung der durch (6) eingeführten Schreibweise folgende Gestalt an:

$$\varphi_\mu(z+1) = -\sum_1^\infty \left\{(-1)^m e^{\frac{i\pi(\mu-m)}{2}} B_{\mu-m} \cdot \frac{\Gamma(-\mu+m)}{m!\,\Gamma(-\mu)} z^m\right\}$$

oder

(7) $$\varphi_\mu(z+1) = -\sum_1^\infty \left\{e^{\frac{i\pi(\mu-m)}{2}} B_{\mu-m} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-m+1)}{m!} z^m\right\}.$$

11. Nachdem wir so zu allgemein gültigen Darstellungen der Bernoullischen Funktionen gelangt sind, wie sie die Formeln (4), (5) und (7) liefern, wollen wir zunächst den Nachweis erbringen, daß unsere Funktionen $\varphi_\mu(z)$ für ganzzahliges positives μ mit den Bernoullischen Polynomen identisch sind. Wir gehen hierbei von der Integraldarstellung (5a)

$$\varphi_\mu(z) = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int_W \frac{e^{u(z-1)}-1}{e^{-u}-1} u^{-\mu} du$$

aus und beachten, daß im vorliegenden Falle der Integrand eine in der ganzen u-Ebene eindeutige Funktion darstellt; der Integrationsweg ist also eine geschlossene Kurve und läßt sich somit auf einen Kreis positiven Umlaufssinnes um die Stelle $u=0$ zusammenziehen.*) Hiernach ist aber $\varphi_\mu(z)$ nach dem Cauchyschen Satze identisch mit dem Koeffizienten von $u^{\mu-1}$ in der Entwickelung der Funktion

$$-\Gamma(1+\mu)\frac{e^{u(z-1)}-1}{e^{-u}-1} = \Gamma(1+\mu)\frac{e^{uz}-e^u}{e^u-1},$$

*) Diese Integralreduktion hat mir Herr Blumenthal brieflich mitgeteilt. Übrigens gelangt man auch leicht auf Grund der Potenzreihe (7) zu den Bernoullischen Polynomen, da bei ganzzahligem positivem μ die Reihe für $\varphi_\mu(z+1)$ mit dem Gliede z^μ abbricht; um aus ihr das Polynom $\varphi_\mu(z)$ zu erhalten, bedarf es nur der Subtraktion von $\mu z^{\mu-1}$. Es ist leicht zu ersehen, daß man im Falle $\mu=1$ auch hier wieder auf $\varphi_1(z) = z-1$ kommt.

also gleich

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\frac{d^{\mu-1}}{du^{\mu-1}}\left[\Gamma(1+\mu)\frac{e^{uz}-e^{u}}{e^{u}-1}\right]_{(u=0)}=\mu\frac{d^{\mu-1}}{du^{\mu-1}}\left(\frac{e^{uz}-e^{u}}{e^{u}-1}\right)_{(u=0)}.$$

Nun hat aber Schlömilch*) ganz allgemein die Bernoullischen Polynome durch die Gleichung

$$\varphi(z,\mu)=\mu\frac{d^{\mu-1}}{du^{\mu-1}}\left(\frac{e^{uz}-1}{e^{u}-1}\right)_{(u=0)}$$

definiert; und da die Differenz der beiden zu differentiierenden Ausdrücke den konstanten Wert 1 hat, so sind die beiden vorstehenden Definitionen für $\mu>1$ identisch; lediglich im Falle $\mu=1$ erhalten wir auf Grund der Definition von Schlömilch und in Übereinstimmung mit der von Raabe eingeführten Bezeichnungsweise $\varphi(z,1)=z$, während die erste Definition zu

$$\varphi_1(z)=z-1 \quad \text{und} \quad \varphi_1(z+1)=z$$

führt. Es dürfte sich empfehlen, die bisherige Festsetzung, die abweichend von der sonst gültigen Gleichung $\varphi_\mu(1)=0$ zu $\varphi(1,1)=1$ führt und außerdem mit der Definition der Bernoullischen Polynome als Potenzsummen nicht im Einklang steht, aufzugeben und an ihre Stelle die in der vorliegenden Arbeit aufgestellte Definition von $\varphi_1(z)$ treten zu lassen.

12. Für negative ganzzahlige Indizes stimmen die Bernoullischen Funktionen wesentlich mit den höheren Differentialquotienten von $\log\Gamma(z)$ überein, wie wir aus der in Gleichung (1) aufgestellten Definition ersehen können. Legen wir dort dem Index einen negativen ganzzahligen Wert bei, so können wir sowohl die von z abhängigen wie die konstanten Bestandteile einzeln summieren, da beide Reihen alsdann für sich konvergent sind. Wir erhalten so

$$\varphi_{-\mu}(z)=\mu\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^{\mu+1}}-\mu\zeta(\mu+1).$$

Nun ist aber

$$\frac{d^{\mu+1}\log\Gamma(z)}{dz^{\mu+1}}=(-1)^{\mu+1}\Gamma(1+\mu)\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^{\mu+1}},$$

und hieraus fließt für alle ganzzahligen positiven Werte von μ die Identität

$$(8)\qquad \varphi_{-\mu}(z)=\frac{(-1)^{\mu+1}}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{d^{\mu+1}\log\Gamma(z)}{dz^{\mu+1}}-\mu\zeta(1+\mu)\qquad [\mu=1,2,3,\cdots].$$

---

*) Schlömilch, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. I, S. 193 und Compendium Bd. II. 4. Aufl., S. 211 ff. Braunschweig 1895.

In dem bisher übergangenen Falle $\mu = 0$, für den die Funktionalgleichung in

$$f_0(z+1) - f_0(z) = 0$$

übergeht und somit jede beliebige periodische Funktion von z mit der Periode 1 als Lösung zuläßt, ist, wie jede unserer Darstellungen lehrt,

$$\varphi_0(z) = 0.$$

Während man nun bei jedem von Null verschiedenen Index die Lösungen der allgemeineren Differenzengleichung

$$(9) \qquad F_\mu(z+1) - F_\mu(z) = c z^{\mu-1},$$

unter c eine beliebige nicht verschwindende Konstante verstanden, mit Hilfe der Bernoullischen Funktionen in der allgemeinen Form

$$(10) \qquad F_\mu(z) = \frac{c}{\mu} \varphi_\mu(z) + \omega(z)$$

darstellen kann, wo $\omega(z)$ wieder eine willkürliche periodische Funktion mit der Periode 1 bedeutet, versagt diese Darstellung im Falle $\mu = 0$. Indessen wird man der Gleichung (10) auch dann für $\mu = 0$ einen Sinn unterlegen können, wenn der Ausdruck $\varphi_\mu(z) : \mu$ für $\mu = 0$ eine nicht identisch verschwindende Funktion von z zur Grenze hat. Diese Grenzfunktion läßt sich nun aber in der Tat leicht aus (1) ableiten; durch Vergleich dieser Reihenentwickelung mit der Partialbruchreihe für

$$\Psi(z) = \frac{d \log \Gamma(z)}{dz}$$

finden wir

$$(11) \qquad \lim_{\mu=0} \frac{\varphi_\mu(z)}{\mu} = \Psi(z) + C,$$

wo C die Eulersche Konstante bedeutet.

Mit Hilfe der Gleichungen (10) und (11) sind wir nun tatsächlich in der Lage, die allgemeine Lösung der Differenzengleichung (9) anzugeben.

13. Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Gestalt die in den Theoremen (II) bis (V) auftretenden periodischen Funktionen annehmen, wenn wir statt der allgemeinen Lösungen $f_\mu(z)$ die Bernoullischen Funktionen $\varphi_\mu(z)$ einsetzen. Dabei wollen wir aber vorläufig die Untersuchung der Funktionen $\omega_A(z)$ und $\omega_B(z)$ des Ergänzungssatzes aufschieben und uns demgemäß zuerst mit dem Multiplikationstheorem beschäftigen.

Um die Funktion $\omega_M(z)$ zu ermitteln, gehen wir am einfachsten von der durch Gleichung (5) gegebenen Darstellung aus; wir bekommen alsdann

$$\frac{\varphi_\mu(kz)}{k^{\mu-1}} = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i\, k^{\mu-1}} \int_W \frac{e^{kuz} - e^u}{1-e^u} u^{-\mu}\, du;$$

ferner erhalten wir für $\varphi_\mu\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)$, wenn wir in dem Integrale $u=ku'$ setzen,

$$\varphi_\mu\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i\, k^{\mu-1}}\int\limits_W \frac{e^{kuz}-e^{ku}}{1-e^{ku}}\, u^{-\mu}\, du.$$

Führen wir die in (III) vorgeschriebene Summation aus, so folgt nach leichter Umformung

$$\sum_0^{k-1}\varphi_\mu\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i\, k^{\mu-1}}\int\limits_W\left(\frac{e^{kuz}}{1-e^{u}}-\frac{k}{e^{-ku}-1}\right)u^{-\mu}\, du.$$

Somit erhalten wir für $\omega_M(z)$ den Wert

$$\omega_M(z)=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i\, k^{\mu-1}}\int\limits_W\left(\frac{k}{e^{-ku}-1}-\frac{1}{e^{-u}-1}\right)u^{-\mu}\, du,$$

und dieser Ausdruck läßt sich mittels der in Nr. 10 angegebenen Formel von Riemann auswerten; wir gelangen so zu

$$\omega_M(z)=-\frac{k^\mu-1}{k^{\mu-1}}\,\mu\,\zeta(1-\mu)=-\frac{k^\mu-1}{k^{\mu-1}}\,e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\,B_\mu.$$

Also gewinnen wir schließlich als Multiplikationstheorem der Bernoullischen Funktionen die Gleichung:

$$\text{(III*)}\qquad \frac{\varphi_\mu(kz)}{k^{\mu-1}}=\sum_0^{k-1}\varphi_\mu\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)-\frac{k^\mu-1}{k^{\mu-1}}\,e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\,B_\mu.$$

Wir machen von dieser Formel sofort eine beiläufige Anwendung zur Berechnung des Wertes $\varphi_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$. Setzen wir nämlich $k=2$ und $z=\frac{1}{2}$, so verschwindet die linke Seite sowie das zweite Glied der rechts stehenden Summe; wir erhalten daher

$$\varphi_\mu\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2^\mu-1}{2^{\mu-1}}\,e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\,B_\mu.$$

Aus der Gleichung (III*) kommt übrigens das *Multiplikationstheorem der Ψ-Funktion* heraus, sobald wir die Gleichung durch μ dividieren und unter Berücksichtigung von (11) und Beachtung des Zahlenwertes $B_0=-1$ zur Grenze $\mu=0$ übergehen; wir finden dabei

$$k\,[\Psi(kz)+C]=\sum_0^{k-1}\left[\Psi\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)+C\right]+k\log k$$

oder

$$\Psi(kz)=\frac{1}{k}\sum_0^{k-1}\Psi\left(z+\frac{\varrho}{k}\right)+\log k.$$

14. Um die Funktionen $\omega_D(z)$ und $\omega_J(z)$ der Formeln (IV) und (V) zu bestimmen, bedarf es, da ja $\omega_D(z) = \omega_D(z+1)$ ist, nur eines Vergleiches der Potenzreihen für $\varphi_\mu(z+1)$ und $\frac{1}{\mu+1} \cdot \frac{d\varphi_{\mu+1}(z+1)}{dz}$; da, wie man sich durch Ausführung der Differentiation überzeugt, die beiden Reihen Glied für Glied bis einzig auf das nur in der differentiierten Reihe auftretende konstante Glied übereinstimmen, ist $\omega_D(z)$ eine Konstante, und zwar ist

$$\omega_D = e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu .$$

Den gleichen Wert nimmt offenbar die Konstante Ω an, während $\omega_J(z)$ identisch verschwindet.

Hiernach erhalten wir für die Differentiation und Integration der Bernoullischen Funktionen folgende beiden Theoreme:

$$\text{(IV*)} \qquad \frac{1}{\mu+1} \frac{d\varphi_{\mu+1}(z)}{dz} = \varphi_\mu(z) - e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu$$

und

$$\text{(V*)} \qquad \int_a^z \varphi_\mu(z)\, dz = \frac{1}{\mu+1}[\varphi_{\mu+1}(z) - \varphi_{\mu+1}(a)] + e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu (z-a) .$$

Aus der Funktionalgleichung ergibt sich für $z=0$, sobald nur $\Re(\mu) > 0$ ist, $\varphi_{\mu+1}(0) = 0$. Wählen wir daher in diesem Falle als untere Integrationsgrenze 0, so erhalten wir die wichtigen Formeln

$$\left.\begin{array}{ll} (12) & \displaystyle\int_0^z \varphi_\mu(z)dz = \frac{1}{\mu+1}\varphi_{\mu+1}(z) + e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu z \\ \text{und} & \\ (13) & \displaystyle\int_0^1 \varphi_\mu(z)dz = e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu \end{array}\right\} \Re(\mu) < 0 .$$

15. Wir kommen nun zu dem Ergänzungssatze und stellen die Funktionen $\omega_A(z)$ und $\omega_B(z)$ zunächst unter der Bedingung auf, daß $\Re(\mu) < 1$ ist. Wir haben dann gemäß der Formel (1) folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(z) &= \mu \sum_0^\infty \{(n+1)^{\mu-1} - (z+n)^{\mu-1}\} \\ &= \mu \sum_1^\infty \{n^{\mu-1} - (z+n)^{\mu-1}\} - \mu z^{\mu-1} \end{aligned}$$

und

$$\varphi_\mu(1-z) = \mu \sum_0^\infty \{(n+1)^{\mu-1} - (n+1-z)^{\mu-1}\} .$$

Ist jetzt z eine Zahl der positiven z-Halbebene, so dürfen wir in Übereinstimmung mit unseren früheren Festsetzungen für die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$\varphi_\mu(1-z) = -\mu e^{-\mu\pi i} \sum_0^\infty \{(-n-1)^{\mu-1} - (z-n-1)^{\mu-1}\},$$

wofern wir nur dem Ausdruck $(-n-1)^{\mu-1}$ den Wert $-e^{\mu\pi i}(n+1)^{\mu-1}$ beilegen. Dann erhalten wir aber für $\omega_A(z)$ den Wert

$$\begin{aligned}\omega_A(z) &= e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} \varphi_\mu(z) - e^{\frac{\mu\pi i}{2}} \varphi_\mu(1-z)\\ &= \mu e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} \sum_1^\infty \{n^{\mu-1} - (z+n)^{\mu-1}\} - \mu e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} z^{\mu-1}\\ &\quad + \mu e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} \sum_0^\infty \{(-n-1)^{\mu-1} - (z-n-1)^{\mu-1}\}.\end{aligned}$$

Unter Zusammenfassung der beiden Summen gelangen wir schließlich zu

$$\text{(II A*)} \qquad \omega_A(z) = -\mu e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} \left\{ z^{\mu-1} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' [(z+n)^{\mu-1} - n^{\mu-1}] \right\},$$

wo der Akzent am Summenzeichen andeuten soll, daß $n=0$ auszulassen ist.

In entsprechender Weise läßt sich, falls z der negativen Halbebene angehört, die Formel herleiten:

$$\text{(II B*)} \qquad \omega_B(z) = -\mu e^{\frac{\mu\pi i}{2}} \left\{ z^{\mu-1} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' [(z+n)^{\mu-1} - n^{\mu-1}] \right\}.$$

Die beiden wesentlich durch denselben Ausdruck dargestellten, trotzdem aber völlig selbständigen Funktionen $\omega_A(z)$ und $\omega_B(z)$ sind im allgemeinen bei geradlinigem Fortschreiten vom Argumentwerte z zum Argumentwerte $z+1$, wie ich hier noch einmal ausdrücklich hervorheben möchte, nur je in einer der beiden Halbebenen periodisch und zeigen in der anderen das bereits in Nr. 4 erörterte Verhalten. Nur in den Fällen der Ganzzahligkeit von μ geht $\omega_A(z)$ in eine eindeutige, in der ganzen z-Ebene periodische Funktion über, die sich für negative μ leicht mit Hilfe der Kotangensfunktion ausdrücken läßt.

Zunächst finden wir für $\mu=0$, indem wir an Stelle von $\omega_A(z)$ den Grenzwert von $\omega_A(z):\mu$ für $\mu=0$ aufsuchen, den *Ergänzungssatz der Ψ-Funktion*

$$\Psi(z)-\Psi(1-z)=-\pi\operatorname{cotg}\pi z; \tag{14}$$

differentiiert man ferner diese Gleichung μ-mal hintereinander nach z, so kommt

$$\frac{d^{\mu+1}\log\Gamma(z)}{dz^{\mu+1}}+\frac{d^{\mu+1}\log\Gamma(1-z)}{dz^{\mu+1}}=-\frac{d^{\mu}\pi\operatorname{cotg}\pi z}{dz^{\mu}}.$$

Somit gelangen wir auf Grund der zwischen $\varphi(z)$ und $\Gamma(z)$ bestehenden Relationen zu dem Ergebnis

$$e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\varphi_{-\mu}(z)-e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}\varphi_{-\mu}(1-z)=\frac{e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}}{\Gamma(\mu)}\cdot\frac{d^{\mu}\pi\operatorname{cotg}\pi z}{dz^{\mu}}$$
$$+2i\sin\frac{\mu\pi}{2}\,\mu\zeta(1+\mu)\qquad[\mu=1,2,3\ldots].$$

16. Die vorstehend entwickelte Darstellung für die periodischen Funktionen des Ergänzungstheorems ist an die Bedingung $\Re(\mu)<1$ gebunden. Um auch zu solchen Formeln zu gelangen, die im Falle $\Re(\mu)\geqq 1$ Gültigkeit besitzen, leiten wir aus der Integraldarstellung (5a) der Bernoullischen Funktionen zunächst ein Schleifenintegral für $\omega_A(z)$ her. Wir erhalten aus den Gleichungen

$$\varphi_{\mu}(z)=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int_W\frac{e^{uz-u}-1}{e^{-u}-1}u^{-\mu}du\qquad[\Re(z)>0],$$

und

$$\varphi_{\mu}(1-z)=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int_W\frac{e^{-uz}-1}{e^{-u}-1}u^{-\mu}du\qquad[\Re(z)<1],$$

deren gemeinsamer Gültigkeitsbereich aus dem zwischen der imaginären Achse und der Geraden $\Re(z)=1$ gelegenen Streifen der z-Ebene besteht,

$$\omega_A(z)=e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}\varphi_{\mu}(z)-e^{\frac{\mu\pi i}{2}}\varphi_{\mu}(1-z)$$
$$\left.\begin{aligned}&=-\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int_W\left(e^{uz-u-\frac{\mu\pi i}{2}}-e^{-uz+\frac{\mu\pi i}{2}}\right)\frac{u^{-\mu}}{e^{-u}-1}du\\&\quad-\frac{\Gamma(1+\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\pi}\int_W\frac{u^{-\mu}}{e^{-u}-1}du.\end{aligned}\right\}[0<\Re(z)<1]$$

Den zweiten der gewonnenen Summanden können wir auf Grund der Riemannschen Formel (Nr. 10) leicht auswerten und erhalten unter Benutzung der Gleichung (6)

$$-\frac{\Gamma(1+\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}}{\pi}\int_W\frac{u^{-\mu}}{e^{-u}-1}du=(1-e^{\mu\pi i})B_{\mu}.$$

Der erste, von z abhängige Summand, für den wir kurz $F(z)$ schreiben wollen, ist in der ganzen positiven Halbebene periodisch und läßt sich somit in eine im gleichen Bereiche konvergente Exponentialreihe entwickeln, da $F(z)$ im Inneren dieser Halbebene frei von jeder Singularität ist und auf dem Rande wegen $\Re(\mu) \geqq 1$ nicht unendlich wird.

Setzen wir

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{2\pi i k z},$$

so lassen sich die Koeffizienten dieser Reihe in der Form

$$c_k = \int_0^1 F(z) e^{-2\pi i k z} dz$$

darstellen.

Um diese Entwicklungskoeffizienten auszuwerten, wenden wir in dem entstehenden Doppelintegrale die hier zulässige Umkehrung der Integrationsfolge an und erhalten folglich die Gleichungen:

$$c_k = -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i} \int_0^1 \int_W \left(e^{uz - u - \frac{\mu\pi i}{2}} - e^{-uz + \frac{\mu\pi i}{2}}\right) \frac{u^{-\mu} e^{-2\pi i k z}}{e^{-u} - 1} du\, dz$$

$$= -\frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i} \int_W \int_0^1 \left(e^{uz - u - \frac{\mu\pi i}{2}} - e^{-uz + \frac{\mu\pi i}{2}}\right) e^{-2\pi i k z} dz \cdot \frac{u^{-\mu}}{e^{-u} - 1} du$$

$$= \frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i} \int_W \left(\frac{e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}}{u - 2\pi i k} - \frac{e^{\frac{\mu\pi i}{2}}}{u + 2\pi i k}\right) u^{-\mu} du.$$

Wir wollen nun zeigen, daß, falls wir unter k eine positive Zahl verstehen,

$$\int_W \frac{u^{-\mu}}{u - 2\pi i k} du = -2\pi i (2\pi i k)^{-\mu} = -2\pi i e^{-\frac{\mu\pi i}{2}} (2\pi k)^{-\mu}$$

ist. Zu diesem Zwecke ergänzen wir den Schleifenweg durch Hinzunahme des unendlich großen, die Stelle $u = 0$ im negativen Sinne umlaufenden Kreises zu einem geschlossenen Wege; das Integral über diesen neuen Weg liefert aber denselben Wert, wie das über W erstreckte, da das Kreisintegral verschwindet. Ziehen wir nun den geschlossenen Weg auf einen den einzigen Pol $u = 2\pi i k$ des Integranden im negativen Sinne umlaufenden Kreis zusammen, so erhalten wir in der Tat den angegebenen Integralwert. Auf gleiche Weise ergibt sich

$$\int_W \frac{u^{-\mu}}{u+2\pi i k}\,du = -2\pi i(-2\pi i k)^{-\mu} = -2\pi i\, e^{\frac{\mu\pi i}{2}}(2\pi k)^{-\mu}.$$

Indem wir die beiden Teilresultate zusammenfassen, finden wir nach leichter Umformung die für positive k gültige Formel

$$c_k = -\frac{2\pi i}{\Gamma(-\mu)(2\pi k)^{\mu}}.$$

Ermitteln wir c_{-k} durch das gleiche Verfahren, so erhalten wir

$$c_{-k} = \frac{\Gamma(1+\mu)}{2\pi i}\int_W \left(\frac{e^{-\frac{\mu\pi i}{2}}}{u+2\pi i k} - \frac{e^{\frac{\mu\pi i}{2}}}{u-2\pi i k}\right) u^{-\mu}\,du = 0.$$

Endlich ist auch

$$c_0 = -\frac{\Gamma(1+\mu)\, 2i \sin\frac{\mu\pi}{2}}{2\pi i}\int_W u^{-\mu-1}\,du = 0,$$

da unter der Voraussetzung $\Re(\mu) \geqq 1$ das Integral verschwindet.

Somit ergibt sich schließlich

$$F(z) = -\frac{2\pi i}{\Gamma(-\mu)}\sum_1^{\infty}\frac{e^{2\pi i k z}}{(2\pi k)^{\mu}}.$$

17. Das vorstehende Resultat liefert uns zunächst nur die Exponentialreihe für $\omega_A(z)$; indessen erhält man aus dieser durch Umkehrung des Vorzeichens und Ersetzung von z durch $1-z$ (vergl. Nr. 4) sofort auch die Reihe für $\omega_B(z)$. Damit sind aber die beiden periodischen Funktionen des Ergänzungssatzes für $\Re(\mu) \geqq 1$ bestimmt, und wir können hiernach das Ergänzungstheorem der Bernoullischen Funktionen in folgender Form aussprechen:

$$\text{(II A}^{**}\text{)} \qquad \omega_A(z) = (1-e^{\mu\pi i})\, B_\mu - \frac{2\pi i}{\Gamma(-\mu)}\sum_1^{\infty}\frac{e^{2\pi i k z}}{(2\pi k)^{\mu}}$$

und

$$\text{(II B}^{**}\text{)} \qquad \omega_B(z) = -(1-e^{\mu\pi i})\, B_\mu + \frac{2\pi i}{\Gamma(-\mu)}\sum_1^{\infty}\frac{e^{-2\pi i k z}}{(2\pi k)^{\mu}}.$$

Dabei ist die Reihe (II A**) nur in der oberen, die Reihe (II B**) nur in der unteren Halbebene konvergent.

Für ganzzahliges positives μ vereinfachen sich diese Formeln sehr: wegen des Verschwindens von $1:\Gamma(-\mu)$ fällt nämlich der von z abhängige Term vollständig fort, und die übrig bleibende Konstante verschwindet für ganzzahliges $\mu > 1$ gleichfalls, da bei geradem μ der Faktor $1 - e^{\mu\pi i}$, bei ungeradem μ aber der Faktor B_μ gleich Null ist. Ist endlich $\mu = 1$, so erhält die Konstante den Wert $+i$ bezw. $-i$.

18. Wie eine genauere Untersuchung lehrt, findet die Konvergenz der in den Gleichungen (II**) auftretenden Exponentialreihen im Inneren der zugehörigen Halbebene nicht nur unter der Bedingung $\Re(\mu) \geqq 1$ statt, sondern bleibt für jedes μ bestehen; ist ferner $\Re(\mu) > 0$, so konvergiert die Reihe auch noch im reellen Randintervalle von $z = 0$ bis $z = 1$ und liefert bei der natürlichen Gliederanordnung den Funktionswert; nur hört die Konvergenz, falls $0 < \Re(\mu) \leqq 1$ ist, an den Intervallgrenzen 0 und 1 auf. *Ich behaupte nun, daß die Formeln* (II**) *für jeden Wert von μ gelten.*

Zum Beweise bilden wir unter Benutzung der Gleichung (IV*) der Nr. 14 die Differentialquotienten von $\omega_{A,\mu}(z)$ und $\omega_{B,\mu}(z)$ nach z; wir finden so

$$\omega_{A,\mu-1}(z) = [1 - e^{(\mu-1)\pi i}]\, B_{\mu-1} + \frac{i}{\mu}\,\frac{d\omega_{A,\mu}(z)}{dz}$$

und

$$\omega_{B,\mu-1}(z) = -[1 - e^{(\mu-1)\pi i}]\, B_{\mu-1} - \frac{i}{\mu}\,\frac{d\omega_{B,\mu}(z)}{dz}.$$

Setzt man nun die durch gliedweise Differentiation der Gleichungen (II**) entstehenden Reihen in diese Formeln ein, so kommt

$$\omega_{A,\mu-1}(z) = [1 - e^{(\mu-1)\pi i}]\, B_{\mu-1} - \frac{2\pi i}{\Gamma(1-\mu)} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i k z}}{(2\pi k)^{\mu-1}}$$

und

$$\omega_{B,\mu-1}(z) = -[1 - e^{(\mu-1)\pi i}]\, B_{\mu-1} + \frac{2\pi i}{\Gamma(1-\mu)} \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i k z}}{(2\pi k)^{\mu-1}};$$

da diese Formeln aber aus (II**) hervorgehen, wenn man dort μ durch $\mu - 1$ ersetzt, und da folglich die Exponentialreihen rechter Hand konvergieren, stellen sie auch wirklich die Funktionen der linken Gleichungsseiten dar; und damit ist die obige Behauptung erwiesen.

Da die in den Gleichungen (II**) gegebenen Darstellungen der Funktionen $\omega_A(z)$ und $\omega_B(z)$ unter der Voraussetzung $\Re(\mu) > 0$ als gemeinsamen Konvergenzbereich das reelle Intervall von 0 bis 1 besitzen, können wir aus ihnen durch Benutzung der letzten Formel von Nr. 4 eine Darstellung von $\varphi_\mu(z)$ herleiten, die im genannten reellen Intervalle Gültigkeit besitzt. Vereinigen wir aus den beiden in die Darstellung eingehenden Reihen die Glieder mit gleichem k, so erhalten wir für $\varphi_\mu(z)$ folgende Fouriersche Entwickelung

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi_\mu(z) = e^{\frac{\mu\pi i}{2}} B_\mu - 2\Gamma(1+\mu)\cos\frac{\mu\pi}{2}\sum_1^\infty \frac{\cos 2\pi k z}{(2\pi k)^\mu} \\ \qquad - 2\Gamma(1+\mu)\sin\frac{\mu\pi}{2}\sum_1^\infty \frac{\sin 2\pi k z}{(2\pi k)^\mu}. \end{cases}$$

Zusammenfassend können wir sagen: *Die vorstehende Fouriersche Reihe, deren Gültigkeit an die Bedingung* $\Re(\mu) > 0$ *gebunden ist, konvergiert ausschließlich für reelle Werte von* z *und stellt die Funktion* $\varphi_\mu(z)$ *im Intervalle* $0 < z < 1$ *dar; ist* $\Re(\mu) > 1$, *so konvergiert die Reihe auch an den Intervallgrenzen.* Für den Streifen $0 < \Re(\mu) \leqq 1$ ist außerdem die natürliche Gliederanordnung eine notwendige Bedingung für das Bestehen der Gleichung (15).

19. Zum Schluße wollen wir uns noch mit dem analytischen Charakter beschäftigen, den die Bernoullischen Funktionen als Funktionen des Index μ zeigen. Zunächst ist $\varphi_\mu(z)$ bei festem z eine analytische und zwar eindeutige Funktion der unbeschränkten komplexen Veränderlichen μ. Dies folgt unmittelbar vorerst bei Beschränkung des Arguments auf die Halbebene $\Re(z) > 0$ aus der Integraldarstellung (5a), und alsdann für die Punkte der anderen Halbebene durch Vermittelung der Funktionalgleichung. Da ferner $\varphi_\mu(z)$ für alle Argumente z, die dem Bereiche B angehören, endlich ist, welchen Wert man auch dem Index beilegen möge, so können wir als Schußergebnis den Satz aussprechen:

Die allgemeine Bernoullische Funktion $\varphi_\mu(z)$ *der beiden unabhängigen komplexen Veränderlichen* z *und* μ *ist, falls* z *auf den Bereich* B *beschränkt bleibt, eine ganze transzendente Funktion von* μ.

Als Funktion des Argumentes z betrachtet, weist die Bernoullische Funktion ein erheblich verwickelteres Verhalten auf, das darin begründet ist, daß nicht nur der Nullwert des Argumentes, sondern auch alle negativen ganzen rationalen Zahlen im allgemeinen Verzweigungsstellen bilden, und daß der Bereich B durchaus nicht den Existenzbereich von $\varphi_\mu(z)$ erschöpft. Die Frage nach den analytischen Fortsetzungen von $\varphi_\mu(z)$ über den Bereich B hinaus bleibt noch zu erledigen übrig.

Friedenau, im Juli 1909.