DIE GIBBS'SCHE ERSCHEINUNG IN DER THEORIE DER KUGELFUNKTIONEN.

Von **Hermann Weyl** (Göttingen).

Adunanza del 14 novembre 1909.

§ 1.

Voraussetzungen und Resultate.

Es sei auf einer Kugel vom Radius 1 eine stetige, geschlossene, doppelpunktslose Kurve $\mathfrak{C}$ gegeben, welche die Kugeloberfläche in zwei Stücke zerteilt, die wir kurz als das « Aeussere » $\mathfrak{A}$ und das « Innere » $\mathfrak{J}$ bezeichnen. Wir wollen noch annehmen, dass $\mathfrak{C}$ eine stetig variierende Tangente besitzt und von jedem grössten Kreis nur in einer beschränkten Anzahl, etwa höchstens m, Punkten geschnitten wird [1]). Es sei ferner in $\mathfrak{J}$ einschliesslich seiner Begrenzung $\mathfrak{C}$ eine daselbst stetig differenzierbare Funktion f^i definiert; d. h. es sei jedem Punkt von $\mathfrak{J}+\mathfrak{C}$ eine Zahl f^i so zugeordnet, dass die Werte von f^i längs jeder in $\mathfrak{J}+\mathfrak{C}$ verlaufenden Kurve $\mathfrak{c}$ mit stetiger Tangente eine einmal stetig differenzierbare Funktion der Bogenlänge von $\mathfrak{c}$ bilden [2]). Entsprechend sei in $\mathfrak{A}+\mathfrak{C}$ eine gleichfalls stetig differenzierbare Funktion f^a erklärt. Durch die Definition

$$\begin{aligned} f &= f^a \text{ in } \mathfrak{A}, \\ &= f^i \text{ in } \mathfrak{J}, \\ &= \frac{f^a+f^i}{2} \text{ auf } \mathfrak{C} \end{aligned}$$

erhalten wir dann eine auf der ganzen Kugel eindeutige Funktion f, die längs der Kurve $\mathfrak{C}$ einen einfachen Sprung erleidet; die Höhe $f^a - f^i$ dieses Sprunges werde, indem wir sie als Funktion der von einem festen, auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Anfangspunkt O aus gemessenen Bogenlänge s von $\mathfrak{C}$ auffassen, durch $h(s)$ bezeichnet.

---

[1]) Freilich wollen wir zulassen, dass $\mathfrak{C}$ ganze Stücke grösster Kreise — aber nur in endlicher Anzahl — enthält; die betreffenden grössten Kreise, denen diese Stücke angehören, sind alsdann natürlich von der Forderung, höchstens m Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam zu haben, entbunden.

[2]) Und zwar soll diese Bedingung der stetigen Differenzierbarkeit stets auch an den Enden der Kurve $\mathfrak{c}$, selbst wenn diese auf $\mathfrak{C}$ liegen, erfüllt sein.

Unsere Funktion f lässt sich bekanntlich in eine überall konvergente nach Kugelfunktionen fortschreitende « LAPLACE'sche » Reihe entwickeln; lassen wir diese Entwicklung mit den Kugelfunktionen n^{ter} Ordnung abbrechen, so geht eine auf der ganzen Kugelfläche stetig differenzierbare Funktion f_n hervor, welche mit wachsendem n gegen f konvergiert, und zwar gleichmässig in der Umgebung jeder nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegenen Stelle. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Art der Konvergenz von f_n gegen f in der Umgebung der Kurve $\mathfrak{C}$ zu bestimmen.

Um das Verhalten der Funktionen f_n in der Umgebung von $\mathfrak{C}$ bequemer beschreiben zu können, bediene ich mich eines besonderen Koordinatensystems. Unter (s, t) verstehe ich denjenigen Punkt P auf der Kugeloberfläche, den ich durch die folgende Vorschrift erhalte: Ich schreite auf $\mathfrak{C}$ von dem Anfangspunkt O aus den Bogen OS von der Länge s ab und gehe darauf von S aus auf dem durch S senkrecht zu $\mathfrak{C}$ gelegten grössten Kreise um das Stück t bis zum Punkte P; dabei hat man auf $\mathfrak{C}$ so fortzuschreiten, dass man das Aeussere zu seiner Rechten hat, wenn s positiv ist, im entgegengesetzten Sinne, falls s negativ ist, und ferner hat man auf dem grössten Kreise von S aus in das Gebiet $\mathfrak{A}$ hineinzugehen, falls t als positive, in das Gebiet $\mathfrak{J}$, falls t als negative Grösse gegeben war. Die Werte der Funktionen f, f_n im Punkte $P=(s, t)$ werden durch $f(s, t)$, bezw. $f_n(s, t)$ bezeichnet. Ist l die Länge der Kurve $\mathfrak{C}$, so besitzen diese Funktionen in Bezug auf s die Periode l. — Endlich schreibe ich stets

$$\frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi = \operatorname{Si}(x).$$

HAUPTSATZ. — *In der Umgebung der Kurve* $\mathfrak{C}$ [d. h. für

(1) $$0 \leqq s \leqq l, \qquad -t_0 \leqq t \leqq +t_0,$$

wo t_0 eine hinreichend klein gewählte, nur von $\mathfrak{C}$ abhängige positive Konstante bedeutet] *gilt die Gleichung*

$$f_n(s, t) \begin{cases} = f^a(s, t) - h(s)\operatorname{Si}(nt) + R_n(s, t) & (t \geqq 0) \\ = f^i(s, t) + h(s)\operatorname{Si}(-nt) + R_n(s, t) & (t \leqq 0) \end{cases}$$

in welcher die Grösse $R_n(s, t)$ mit wachsendem n für alle Punkte (s, t) des Gebietes (1) *gleichmässig gegen Null konvergiert.*

Dieser Satz gestattet, aus dem Bilde der Funktion $\operatorname{Si}(x)$ den Verlauf der Annäherungsfunktionen f_n genau zu überblicken. Wir können denselben, wenn wir — lediglich des leichteren Ausdrucks halber—durchweg $h(s) > 0$ annehmen, in folgender Weise beschreiben:

Für sehr grosse Werte von n erleidet die Funktion f_n in der Umgebung der Kurve $\mathfrak{C}$ einen steilen Absturz von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{J}$. Derselbe wird von aussen her durch eine Unzahl dichtgedrängter, steiler Ringwellen, welche die Kurve $\mathfrak{C}$ umgeben, vorbereitet und setzt sich nach innen zu in derselben stürmischen Weise fort. Das erste nach innen zu auf den Absturz folgende Wellental liegt um einen gewissen Betrag unterhalb des inneren Niveaus $f^i(s, 0)$, der mit wachsendem n gegen $h(s)|\operatorname{Si}(\pi)|$ konvergiert [3]), und der

[3]) Man beachte, dass $\operatorname{Si}(0)$, $\operatorname{Si}(2\pi)$, ... positiv und $\operatorname{Si}(\pi)$, $\operatorname{Si}(3\pi)$, ... negativ sind.

Abstand $|t|$ dieses Wellentiefs von der Kurve $\mathfrak{C}$ ist asymptotisch $= \frac{\pi}{n}$; d. h. ist für irgend einen festen Wert s $t_n(s)$ die dem absoluten Betrage nach kleinste negative Zahl t, für welche die Funktion $f(s, t)$ von t allein ein Minimum aufweist, so ist $t_n(s)$ für hinreichend grosses n eine stetige Funktion von s, und es konvergieren

$$-\frac{t_n(s)}{\frac{\pi}{n}} \quad \text{und} \quad -\frac{f(s,\ t_n(s)) - f^i(s,\ 0)}{h(s)|\mathrm{Si}(\pi)|}$$

mit wachsendem n gleichmässig in s gegen 1. Auf dieses Tal folgt, im asymptotischen Abstande $\frac{2\pi}{n}$ von der Kurve $\mathfrak{C}$ gelegen, ein Wellenberg, dessen asymptotische Höhe $h(s).|\mathrm{Si}(2\pi)|$ beträgt, darauf im Abstand $\frac{3\pi}{n}$ ein Wellental von der Tiefe $h(s).|\mathrm{Si}(3\pi)|$, u. s. f. — Nach aussen hin breitet sich um die Absturzlinie $\mathfrak{C}$ zunächst im asymptotischen Abstand $\frac{\pi}{n}$ ein Wellenberg aus, der sich in der Grenze für $n = \infty$ um $h(s).|\mathrm{Si}(\pi)|$ über das äussere Niveau $f^a(s, 0)$ erhebt; es folgt bei $t = \frac{2\pi}{n}$ ein Wellental, dessen Tiefe gegen $h(s).|\mathrm{Si}(2\pi)|$ konvergiert, darauf im Abstande $\frac{3\pi}{n}$ von $\mathfrak{C}$ wieder ein Wellenberg von der Höhe $h(s).|\mathrm{Si}(3\pi)|$, u. s. f.

Alles in Allem: jeder Durchschnitt $s = \text{const.}$ bietet genau dasselbe Bild dar, welches die durch die FOURIERreihe gelieferten Annäherungskurven einer mit einem Sprung behafteten Funktion *einer* Variablen in der Umgebung der Sprungstelle zeigen [« GIBBS'*sches Phänomen* » [4]]. Das Aussehen eines solchen Durchschnitts der Funktion f_n (bei sehr grossem n) erhält man aus einer die Funktion

$$z = -\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$$

darstellenden Figur, indem man diese in Richtung der t-Axe im Verhältnis $n:1$ zusammendrückt.

Führen wir auf der Kugel Polarkoordinaten ϑ [« Poldistanz »; variiert zwischen 0 und π] und φ [« (geographische) Länge »; variiert zwischen 0 und 2π] ein und ist unsere Funktion f insbesondere von solcher Art, dass sie allein von ϑ abhängt — die Unstetigkeitslinie $\mathfrak{C}$ ist alsdann notwendig ein Breitenkreis —, so können wir

$$f = F(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq +1)$$

setzen, wofern wir $x = \cos\vartheta$ als unabhängige Variable benutzen. Die Entwicklung von f nach Kugelfunktionen geht dann in eine Reihe nach LEGENDRE'schen Polynomen über, und wir bekommen aus unserem Hauptsatz das weitere Resultat:

---

[4]) J. W. GIBBS, FOURIER'*s Series* [Nature, Vol. LIX, p. 606 (27. April 1899)]; C. RUNGE, *Theorie und Praxis der Reihen* (Leipzig, Göschen, 1904), § 19; M. BÔCHER, *Introduction to the Theory of* FOURIER'*s Series* [Annals of Mathematics, Second Series, Vol. VII (1905-1906), S. 81-152], S. 123-132.

Ist a irgend eine Stelle im Innern des Intervalls $-1 \cdots +1$, F^+ eine für $a \leqq x \leqq +1$ erklärte stetig differenzierbare, F^- eine für $-1 \leqq x \leqq a$ erklärte, gleichfalls stetig differenzierbare Funktion, so lässt sich die Funktion F, welche für $-1 \leqq x < a$ mit F^-, für $a < x \leqq +1$ mit F^+ übereinstimmt und an der Stelle a den Wert $\frac{F^-(a)+F^+(a)}{2}$ annimmt, in eine Reihe nach LEGENDRE'schen Polynomen entwickeln:

$$F(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \cdots.$$

Ist F_n die n^{te} Partialsumme dieser Reihe und h der Sprung $F^-(a) - F^+(a)$, so gilt genauer

$$F_n(x) = F^-(x) - h.\,\mathrm{Si}\left(\frac{n(a-x)}{\sqrt{1-a^2}}\right) + R_n(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq a)$$

$$= F^+(x) + h.\,\mathrm{Si}\left(\frac{n(x-a)}{\sqrt{1-a^2}}\right) + R_n(x) \qquad (a \leqq x \leqq +1),$$

wobei $R_n(x)$ eine Funktion bedeutet, die mit wachsendem n gleichmässig im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ gegen Null konvergiert.

Der Verlauf der Annäherungskurven $y = F_n(x)$ wird also, wenn wir die Höhe h festhalten, in der Umgebung der Unstetigkeitsstelle a um so stürmischer sein, je näher a den Grenzen ± 1 des Intervalls liegt.

§ 2.

Rechnerische Durchführung eines speziellen Falles.

Zum Beweis der ausgesprochenen Sätze führen wir die Betrachtungen zunächst in einem ganz speziellen Falle durch, aus dem sich aber in § 3 dann leicht das allgemeine Resultat ergeben wird. Als Kurve $\mathfrak{C}$ wählen wir nämlich irgend einen grössten Kreis unserer Kugel, den wir als Aequator bezeichnen—die beiden Punkte, in welcher die auf der Aequatorebene im Kugelmittelpunkt errichtete Senkrechte die Kugeloberfläche durchstösst, werden entsprechend « Nord- » und « Südpol » genannt—, und f soll diejenige Funktion bedeuten, welche auf der nördlichen Halbkugel $= 1$, auf der südlichen Halbkugel $= 0$, auf dem Aequator $= \frac{1}{2}$ ist.

Es sei A ein (variabler) Punkt auf der nördlichen Halbkugel in der Nähe des Aequators, ϑ seine Winkeldistanz vom Nordpol. Führen wir auf der Kugel diejenigen Polarkoordinaten λ (Poldistanz), μ (Länge) ein, für welche A Pol ($\lambda = 0$) ist und der feste « Nordpol » durch $\lambda = \vartheta$, $\mu = \pi$ gegeben wird, so lautet die n^{te} Partialsumme der zu f gehörigen Kugelfunktionen-Reihe im Punkte A so:

$$f_n(\vartheta) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{dP_n(\cos\lambda)}{d\lambda} + \frac{dP_{n+1}(\cos\lambda)}{d\lambda}\right] f\,d\lambda\,d\mu.$$

oder, wenn wir $x = \cos\lambda$ schreiben,

$$f_n(\mathfrak{z}) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{(\mathfrak{H})} \left[\frac{dP_n(x)}{dx} + \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} \right] dx\, d\mu;$$

dabei ist $\mathfrak{H}$, die nördliche Halbkugel, durch die Ungleichung

$$x.\cos\mathfrak{z} - \left|\sqrt{1 - x^2}\right|.\sin\mathfrak{z}\cos\mu \geqq 0$$

gegeben. Die Ausführung der Integration nach μ ergibt

$$f_n(\mathfrak{z}) = \frac{1}{2} \int_{\sin\mathfrak{z}}^{1} \left(\frac{dP_n}{dx} + \frac{dP_{n+1}}{dx} \right) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{-\sin\mathfrak{z}}^{\sin\mathfrak{z}} \left(\frac{dP_n}{dx} + \frac{dP_{n+1}}{dx} \right) \rho\, dx,$$

wenn $\rho = \rho(x)$ denjenigen zwischen 0 und π gelegenen Winkel bezeichnet, für welchen

$$\cos\rho = -\operatorname{cotg}\lambda.\operatorname{cotg}\mathfrak{z} = -\frac{x}{\left|\sqrt{1 - x^2}\right|}.\operatorname{cotg}\mathfrak{z}$$

ist. Durch partielle Integration finden wir

$$\begin{aligned} f_n(\mathfrak{z}) &= \tfrac{1}{2}[P_n(1) + P_{n+1}(1) - P_n(\sin\mathfrak{z}) - P_{n+1}(\sin\mathfrak{z})] \\ &\quad + \frac{1}{2}[P_n(\sin\mathfrak{z}) + P_{n+1}(\sin\mathfrak{z})] - \frac{1}{2\pi} \int_{-\sin\mathfrak{z}}^{\sin\mathfrak{z}} (P_n + P_{n+1}) \frac{d\rho}{dx} dx \\ &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\sin\mathfrak{z}}^{\sin\mathfrak{z}} (P_n + P_{n+1}) \frac{d\rho}{dx} dx. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\sin\rho\, d\rho = -\frac{\operatorname{cotg}\mathfrak{z}}{\sin^2\lambda} d\lambda,$$

$$d\rho = -\frac{\cos\mathfrak{z}}{\sin\lambda} \frac{d\lambda}{\left|\sqrt{-\cos(\mathfrak{z} - \lambda)\cos(\mathfrak{z} + \lambda)}\right|},$$

mithin, wenn wir noch statt der Poldistanz $\mathfrak{z}$ die « nördliche Breite » $\frac{\pi}{2} - \mathfrak{z} = \alpha$ einführen,

$$\begin{aligned} f_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} [P_n(\cos\lambda) + P_{n+1}(\cos\lambda)] \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda - \alpha)\sin(\lambda + \alpha)}} \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} J_n(\alpha). \end{aligned}$$

Wir haben zu zeigen, dass, wie auch gleichzeitig n gegen ∞ und A von Norden her gegen den Aequator konvergiert, stets

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ \alpha=+0}} [J_n(\alpha) - \pi\,\mathrm{Si}(n\alpha)] = 0$$

wird.

Zur Durchführung des Beweises bedürfen wir zweier Integrale, deren Werte ich gleich an dieser Stelle angebe:

$$(2)\qquad \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}} = \pi \text{ [5]},$$

$$(3)\qquad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\alpha}{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\beta^2-\lambda^2)(\lambda^2-\alpha^2)}} = \frac{\pi}{2\beta} \qquad (0<\alpha<\beta) \text{ [6]}.$$

Das Integral (3) dient uns dazu, das folgende

$$(4)\qquad J^{\alpha,\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha).4\sin\frac{\beta+\lambda}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}} \qquad (0<\alpha<\beta)$$

für kleine Werte von α und β abzuschätzen. Aus der Entwicklung

$$\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \cdots$$

folgt nämlich, dass

$$(5)\qquad \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda}\frac{\lambda}{\alpha}\sqrt{\frac{(\lambda^2-\alpha^2)(\beta^2-\lambda^2)}{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha).4\sin\frac{\beta+\lambda}{2}\sin\frac{\beta-\lambda}{2}}}$$

eine in der Umgebung der Stelle ($\alpha=0$, $\lambda=0$, $\beta=0$) regulär-analytische Funktion der drei Variablen α, λ, β ist, deren Entwicklung so beginnt:

$$1 + \tfrac{9}{24}\lambda^2 + \tfrac{1}{24}\beta^2 + \text{(Glieder 4. Ordnung)}.$$

Es lässt sich daher eine ganz bestimmte Zahl $\beta_0 < \frac{\pi}{2}$ so angeben, dass für

$$0 < \alpha < \lambda < \beta < \beta_0$$

der Ausdruck (5) zwischen den Grenzen 1 und $1+\frac{1}{2}\beta^2$ liegt. Für das Integral (4) ergibt sich dann vermöge (3) die Abschätzung

$$(6)\qquad \frac{\pi}{2\beta} < J^{\alpha,\beta} < \frac{\pi}{2\beta} + \frac{\pi\beta}{4} \quad (\text{für } 0<\alpha<\beta<\beta_0).$$

---

[5]) Es geht nämlich, wie die soeben angestellten Rechnungen zeigen, das Integral $\frac{1}{2\pi}\int\int_{(\mathfrak{K})} \frac{dV}{dx}\,dx\,d\mu$ durch partielle Integration in

$$V(1) - \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{V(\cos\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}}$$

über, wenn $V(x)$ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion von x bedeutet. Nehmen wir speziell $V(x) = 1$, so ist damit (2) erwiesen.

[6]) Die Ausrechnung von (3) geschieht dadurch, dass man $\frac{1}{\lambda^2} = y$ als neue Integrationsvariable einführt; in der Tat verwandelt es sich dadurch, wenn für einen Moment $\frac{1}{\beta^2} = p$, $\frac{1}{\alpha^2} = q$ gesetzt wird, in

$$\frac{1}{2\beta}\int_{p}^{q} \frac{dy}{\sqrt{(y-p)(q-y)}}.$$

Wir nehmen jetzt für β eine beliebige feste positive Zahl $< \beta_0$ und zerlegen, indem wir annehmen, dass bereits $\alpha < \beta$ ist, das Integral $J_n(\alpha) = \int_\alpha^{\pi-\alpha}$ in die beiden Bestandteile $\int_\alpha^\beta + \int_\beta^{\pi-\alpha}$. Der zweite Summand ist, wenn

$$\mathrm{M}_n(\beta) = \max_{-1 \leqq x \leqq \cos\beta} \tfrac{1}{2} |P_n(x) + P_{n+1}(x)|$$

genommen wird, seinem absoluten Wert nach

$$\leqq \mathrm{M}_n(\beta) \int_\beta^{\pi-\alpha} \frac{\sin\alpha\, d\lambda}{\sin\lambda \sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}} \leqq \pi \mathrm{M}_n(\beta) \quad \text{[vergl. (2)]}.$$

Es ist bekannt [7]), dass $\mathrm{M}_n(\beta)$ bei festgehaltenem β mit wachsendem n gegen 0 konvergiert.

In dem ersten Teilsummanden

$$\int_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{P_n(\cos\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}} + \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{P_{n+1}(\cos\lambda)\,d\lambda}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}}$$
$$= I_n^{\alpha,\beta} + I_{n+1}^{\alpha,\beta}$$

führe ich die MEHLER'sche Formel

$$P_n(\cos\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_\lambda^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos t)}}\,dt = \frac{2}{\pi}\int_\lambda^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sqrt{4\sin\frac{t+\lambda}{2}\sin\frac{t-\lambda}{2}}}\,dt$$

ein und bekomme alsdann

$$I_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi}\iint \frac{\sin\alpha}{\sin\lambda} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sqrt{\sin(\lambda+\alpha)\sin(\lambda-\alpha)}\,2(\cos\lambda-\cos t)}\,dt\,d\lambda,$$

wobei das Doppelintegral 1) über das Dreieck $\alpha \leqq \lambda \leqq t \leqq \beta$, 2) über das Rechteck $\begin{matrix}\alpha \leqq \lambda \leqq \beta \\ \beta \leqq t \leqq \pi\end{matrix}$ zu erstrecken ist. Demgemäss zerfällt $I_n^{\alpha,\beta}$ wiederum in zwei Summanden

$$I_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi}\iint_{(\alpha \leqq \lambda \leqq t \leqq \beta)} + \frac{1}{\pi}\iint_{\left(\substack{\alpha \leqq \lambda \leqq \beta \\ \beta \leqq t \leqq \pi}\right)} = H_n^{\alpha,\beta} + R_n^{\alpha,\beta}. \tag{7}$$

Wir berechnen zunächst $R_n^{\alpha,\beta}$. Es ist, wie sich durch partielle Integration ergibt,

$$\left|\int_\beta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos t)}}\,dt\right| = \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left|\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos\beta)}} - \int_\beta^\pi \frac{1}{2}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t.\sin t}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos t)}^3}\,dt\right|$$
$$\leqq \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos\beta)}} + \int_\beta^\pi \frac{1}{2}\frac{\sin t\,dt}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos t)}^3}\right]$$
$$\leqq \frac{2}{n}\frac{1}{\sqrt{2(\cos\lambda-\cos\beta)}} \quad (\text{für } 0 < \lambda < \beta);$$

---

7) Siehe z.B.: C. JORDAN, *Cours d'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), 2ème édition, t. II (1894), pag. 236.

mithin

(8) $$|R_n^{\alpha,\beta}| \leqq \frac{2}{n\pi} j^{\alpha,\beta} \leqq \frac{1}{n\beta} + \frac{\beta}{2n} \qquad \text{[vergl. (6)].}$$

Für $H_n^{\alpha,\beta}$ erhalten wir, wenn wir mit der Integration nach λ zwischen den Grenzen α und t beginnen,

$$H_n^{\alpha,\beta} = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta j^{\alpha,t}.\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\,dt,$$

also wegen (6)

(9) $$\left|H_n^{\alpha,\beta} - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt\right| \leqq \int_\alpha^\beta \frac{t}{4}dt < \frac{1}{8}\beta^2.$$

Es ist aber

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt = \int_{\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)}^{\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)} \frac{\sin x}{x}dx = \int_{\alpha n}^\infty \frac{\sin x}{x}dx - \int_{\alpha n}^{\alpha n+\frac{\alpha}{2}} \frac{\sin x}{x}dx - \int_{\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)}^\infty \frac{\sin x}{x}dx;$$

da nun

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq 1, \qquad \left|\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right| = \left|\frac{\cos a}{a} - \int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx\right| \leqq \frac{2}{a}$$

ist, wird

(10) $$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt - \pi\,\mathrm{Si}(n\alpha)\right| \leqq \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\beta n}.$$

Aus (7) bis (10) folgt

$$\left|I_n^{\alpha,\beta} - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{Si}(n\alpha)\right| \leqq \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta^2}{8} + \frac{2}{n\beta} + \frac{\beta}{2n}$$

und schliesslich

$$|J_n(\alpha) - \pi\,\mathrm{Si}(n\alpha)| \leqq \pi\,\mathrm{M}_n(\beta) + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{4}{n\beta} + \frac{\beta}{n}.$$

Lassen wir hierin irgendwie simultan n gegen ∞ und α von positiven Werten her gegen 0 konvergieren, so ergibt sich

$$\limsup_{\substack{n=\infty\\ \alpha=+0}} |J_n(\alpha) - \pi\,\mathrm{Si}(n\alpha)| \leqq \frac{\beta^2}{4},$$

und zwar gilt diese Ungleichung, welche positive Zahl auch $\beta < \beta_0$ bedeuten mag. Es muss demnach

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ \alpha=+0}} [J_n(\alpha) - \pi\,\mathrm{Si}(n\alpha)] = 0$$

sein. Dies besagt, dass

(11) $$f_n\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - [1 - \mathrm{Si}(n\alpha)]$$

an der Stelle $\alpha = 0$ « *(rechtsseitig-) stetig* » gegen 0 konvergiert; da die stetige Konvergenz dieser Differenz zu 0 an einer auf der nördlichen Halbkugel gelegenen Stelle $A\left(0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ ohnehin feststeht, ergibt sich, dass (11) *gleichmässig im Intervall* $0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ *gegen Null strebt.* Damit ist unser Hauptsatz für die hier behandelte spezielle Funktion f bewiesen.

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Der allgemeine Fall, von dem in § 1 die Rede war, lässt sich auf den in § 2 behandelten durch infinitesimal-geometrische Betrachtungen zurückführen.

Es sei also jetzt $\mathfrak{C}$ eine beliebige Kurve von der in § 1 beschriebenen Art, welche die Kugeloberfläche in das « Aeussere » $\mathfrak{A}$ und das « Innere » $\mathfrak{J}$ zerlegt. Wir betrachten zunächst diejenige Funktion, welche in $\mathfrak{A}$ den Wert 1, in $\mathfrak{J}$ den Wert 0, auf $\mathfrak{C}$ den Wert $\frac{1}{2}$ hat, und bezeichnen sie mit $1^{\mathfrak{C}}$, bezw. mit $1^{\mathfrak{C}}(s, t)$, wenn wir die in § 1 eingeführten Koordinaten s, t in Evidenz setzen wollen. $1^{\mathfrak{C}}_n$ bedeutet die aus der Kugelfunktionen-Entwicklung von $1^{\mathfrak{C}}$ gewonnene Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung.

Wir fassen einen bestimmten Punkt C $(s = \sigma)$ auf der Kurve $\mathfrak{C}$ ins Auge und legen durch ihn den berührenden und den normalen grössten Kreis. Den ersteren nennen wir den Aequator; derselbe teilt die Kugeloberfläche in zwei Hälften, von denen diejenige, in die man gelangt, wenn man sich auf dem Normalkreis vom Kurvenpunkt aus nach $\mathfrak{A}$ hinein bewegt, als nördliche Halbkugel bezeichnet werde. 1^{σ} sei diejenige Funktion, welche auf der nördlichen Halbkugel $= 1$, auf der südlichen $= 0$, auf dem Aequator $= \frac{1}{2}$ ist, und 1^{σ}_n ihre durch die Kugelfunktionenreihe gelieferte Annäherungsfunktion n^{ter} Ordnung. Setzen wir in $1^{\sigma}_n(s, t)$ $s = \sigma$, d. h. betrachten wir die Werte derselben lediglich auf dem Normalkreis durch C, so geht die Funktion $1^{\sigma}_n(\sigma, t)$ hervor, die offenbar von σ unabhängig ist und nach § 2 der Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \left[1^{\sigma}_n(\sigma, t) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nt} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right] = 0$$

gleichmässig für $-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq +\frac{\pi}{2}$ genügt. Wir haben jetzt nachzuweisen, dass

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ t=0}} [1^{\mathfrak{C}}_n(\sigma, t) - 1^{\sigma}_n(\sigma, t)] = 0 \tag{12}$$

wird.

Ist μ_0 irgend eine positive Zahl $< \frac{\pi}{4}$, so kann man dazu zwei positive Zahlen $\rho_0 < \frac{\pi}{2}$ und t_0 finden, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Ist t irgend eine Zahl > 0 und $\leqq t_0$, A_t der Punkt mit den Koordinaten σ, t und sind λ (Poldistanz) und μ (Länge) diejenigen Polarkoordinaten, für welche A_t Pol ist und C die Länge $\mu = 0$ hat, so wird die Kurve $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kalotte $\lambda \leqq \rho_0$ von keinem der durch A_t laufenden Meridiane $\mu =$ const. getroffen, für welche

$$\frac{\pi}{2} + \mu_0 \leqq \mu \leqq \frac{3\pi}{2} - \mu_0 \tag{13}$$

ist. Hingegen schneiden die dem Winkelraum

$$\mu_0 \leqq \mu \leqq \frac{\pi}{2} - \mu_0 \tag{14}$$

angehörigen Meridiane, ebenso wie diejenigen, deren Länge μ zwischen $\frac{3\pi}{2}+\mu_0$ und $2\pi-\mu_0$ liegt, die Kurve $\mathfrak{C}$ innerhalb der Kalotte $\lambda \leqq \rho_0$ in einem und nur einem Punkte, und zwar unter einem von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel. — Alsdann ist die Poldistanz λ des Schnittpunktes im Intervall (14) eine stetige Funktion von μ, welche *monoton* von einem Anfangswert λ'_1 bis zu einem Endwert λ'_3 ansteigt. Bilden wir die eindeutige Inverse dieser Funktion, so erhalten wir den durch den Winkel (14) aus der Kurve $\mathfrak{C}$ ausgeschnittenen Bogen durch eine Gleichung

$$\mu = \mu'_1(\lambda), \qquad (\lambda'_1 \leqq \lambda \leqq \lambda'_3) \tag{15}$$

dargestellt. Wir können noch ρ_0 und t_0 von vornherein so klein gewählt annehmen, dass, wie auch der Punkt A_t auf dem Stück $0 < t \leqq t_0$ des Normalkreises $s=\sigma$ gewählt sein mag, der Bogen (15) ebenso wie der durch den Winkel

$$\frac{3\pi}{2}+\mu_0 \leqq \mu \leqq 2\pi-\mu_0 \tag{16}$$

aus $\mathfrak{C}$ ausgeschnittene Bogen keinen Punkt mit dem Aequator gemein hat.

$$\mu = \mu'_2(\lambda)$$

sei die Gleichung des Aequators in den gegenwärtig angenommenen (von t abhängigen) Polarkoordinaten. Es ist dann

$$\operatorname{tg}\lambda \,.\, \cos\mu'_2 = \operatorname{tg} t,$$

folglich

$$\frac{d\mu'_2}{d\lambda} = \frac{2}{\sin 2\lambda \,.\, \operatorname{tg}\mu'_2}\,. \tag{17}$$

Daraus ergibt sich für die Ableitung der Funktion (15) die Formel

$$\frac{d\mu'_1}{d\lambda} = \frac{2}{\sin 2\lambda \,.\, \operatorname{tg}\nu'_1}\,, \tag{18}$$

wo ν'_1 den bei A_t gelegenen Winkel desjenigen rechtwinkligen sphärischen Dreiecks bedeutet, dessen Hypotenuse von A_t nach dem Punkte $C_\lambda = [\lambda, \mu'_1(\lambda)]$ auf $\mathfrak{C}$ reicht und dessen eine Kathete der die Kurve $\mathfrak{C}$ in diesem Punkte C_λ berührende grösste Kreis ist.

Entwickeln wir jetzt die Funktion

$$1^{\mathfrak{C}} - 1^{\sigma} = g$$

nach Kugelfunktionen, so bekommen wir im Punkte A_t

$$1^{\mathfrak{C}}_n(\sigma, t) - 1^{\sigma}_n(\sigma, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{dP_n(\cos\lambda)}{d\lambda} + \frac{dP_{n+1}(\cos\lambda)}{d\lambda}\right] g\, d\lambda\, d\mu. \tag{19}$$

Dieses Doppelintegral über die ganze Kugel zerlegen wir in drei Teile, von denen sich *der erste* auf den Bereich $\lambda \geqq \rho_0$ erstreckt. Dieser Teil ist offenbar, da jeder Meridian $\mu = \text{const.}$ die Kurve $\mathfrak{C}$ in höchstens m Punkten, den Kreis $\lambda = \rho_0$ und den Aequator in je einem Punkte trifft, seinem absoluten Betrage nach

$$\leqq \frac{1}{2\pi}(m+2)\,\mathrm{M}_n(\rho_0)\int_0^{2\pi} d\mu = (m+2)\,\mathrm{M}_n(\rho_0).$$

Der zweite der Teile, in die wir das Doppelintegral (19) zerlegen, erstrecke sich über diejenigen Stücke der Kalotte $\lambda \leqq \rho_0$, welche den Winkeln (14) und (16) angehören. Hier ist die Funktion g überall $= 0$, wenn wir von zwei Kurvenvierecken $\mathfrak{V}_t$, $\mathfrak{V}'_t$ absehen, von denen z. B. das erste, $\mathfrak{V}_t$, durch die Linien

$$\mu = \mu_0 \quad \text{für} \quad \lambda'_0 \leqq \lambda \leqq \lambda'_1; \qquad \mu = \mu'_1(\lambda) \quad \text{für} \quad \lambda'_1 \leqq \lambda \leqq \lambda'_3;$$

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \mu_0 \quad \text{für} \quad \lambda'_3 \geqq \lambda \geqq \lambda'_2; \qquad \mu = \mu'_2(\lambda) \quad \text{für} \quad \lambda'_2 \geqq \lambda \geqq \lambda'_0$$

begrenzt ist; λ'_0, λ'_2 bezeichnet die aus

$$\operatorname{tg} \lambda'_0 . \cos \mu_0 = \operatorname{tg} t, \qquad \operatorname{tg} \lambda'_2 . \sin \mu_0 = \operatorname{tg} t$$

zu bestimmenden Winkel. Da offenbar die Zahlen

$$(20) \qquad \frac{\lambda'_1 - \lambda'_0}{t}, \qquad \frac{\lambda'_3 - \lambda'_2}{t}$$

mit nach 0 abnehmendem t gegen 0 konvergieren, wird von einem hinreichend kleinen t ab gewiss $\lambda'_1 < \lambda'_2$ sein; nur für solche Werte von t gilt die soeben gegebene Beschreibung von $\mathfrak{V}_t$. Die Funktion g ist in $\mathfrak{V}_t$ konstant $= -1$ oder konstant $= +1$, je nachdem dieses Gebiet ganz im Norden oder ganz im Süden des Aequators liegt. Wir haben demnach das Integral

$$(21) \qquad \pm \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathfrak{V}_t} \left[\frac{d P_n(\cos\lambda)}{d\lambda} + \frac{d P_{n+1}(\cos\lambda)}{d\lambda} \right] d\lambda \, d\mu$$

abzuschätzen. Indem wir zunächst nach μ integrieren und darauf eine partielle Integration zu Hülfe nehmen, bekommen wir für dieses Integral den Wert

$$\pm \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\lambda'_0}^{\lambda'_1} P_n(\cos\lambda) \frac{d\mu'_2}{d\lambda} d\lambda + \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} P_n(\cos\lambda) \frac{d(\mu'_2 - \mu'_1)}{d\lambda} d\lambda - \int_{\lambda'_2}^{\lambda'_3} P_n(\cos\lambda) \frac{d\mu'_1}{d\lambda} d\lambda \right]$$

+ einem analogen Ausdruck, in welchem P_n durch P_{n+1} ersetzt ist.

Sein absoluter Betrag ist daher (wegen $|P_n| \leqq 1$)

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\lambda'_0}^{\lambda'_1} \left| \frac{d\mu'_2}{d\lambda} \right| d\lambda + \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \left| \frac{d(\mu'_2 - \mu'_1)}{d\lambda} \right| d\lambda + \int_{\lambda'_2}^{\lambda'_3} \left| \frac{d\mu'_1}{d\lambda} \right| d\lambda \right] = V_t .$$

Machen wir von den Gleichungen (17) und (18) Gebrauch und bedenken, dass die Winkeldifferenz $\mu'_2(\lambda) - \nu'_1(\lambda)$ gleichmässig für $\lambda'_1 \leqq \lambda \leqq \lambda'_2$ und ferner die Quotienten (20) mit abnehmendem t gegen 0 konvergieren, so finden wir daraus, dass die von n unabhängige absolute obere Grenze V_t des Integrals (21) für $\lim t = +0$ gegen 0 strebt. Das Gleiche gilt für das entsprechende Integral über $\mathfrak{V}'_t$.

In *dem* Teil der Kalotte $\lambda \leqq \rho_0$ endlich, welcher keiner der beiden Bedingungen (14) und (16) genügt, trifft jeder dem Winkelraum (13) angehörige Meridian weder die Kurve $\mathfrak{C}$ noch den Aequator, sodass in dem Stück (13) der Kalotte identisch $g = 0$ ist. Alle übrigen Meridiane treffen die Kurve innerhalb der Kalotte je in höchstens m

Punkten, und daher muss der *dritte Teil* unseres Doppelintegrals (19) seinem absoluten Betrage nach

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\cdot(m+2).\,6\,\mu_0$$

sein.

Aus diesen Ueberlegungen resultiert

$$\limsup_{\substack{n=\infty\\ t=+0}} |1_n^{\mathfrak{C}}(\sigma,\,t) - 1_n^{\sigma}(\sigma,\,t)| \leqq \frac{3(m+2)}{\pi}\cdot\mu_0,$$

und da hierin μ_0 eine beliebige positive Zahl $< \frac{\pi}{4}$ war,

$$\lim_{\substack{n=\infty\\ t=+0}} [1_n^{\mathfrak{C}}(\sigma,\,t) - 1_n^{\sigma}(\sigma,\,t)] = 0.$$

Bei Annäherung der Grösse t von der negativen Seite gegen 0 gilt das Nämliche.

Die Stärke, mit welcher der Teil (21) unseres Integrals — oder vielmehr die von n unabhängige obere Grenze V_t seines absoluten Betrages — mit abnehmendem t gegen 0 konvergiert, hängt lediglich davon ab, wie rasch die Tangentenrichtung in einem variablen Kurvenpunkte C' gegen die Richtung der Tangente in C (des « Aequators ») strebt, wenn sich C' auf C zubewegt, und da die vorausgesetzte Stetigkeit der Tangentenrichtung von $\mathfrak{C}$ deren gleichmässige Stetigkeit zur Folge hat, so schliessen wir aus dieser Bemerkung, dass die Limesgleichung (12) nicht nur für jeden einzelnen Wert von σ, sondern sogar gleichmässig für $0 \leqq \sigma \leqq l$ statthat. Damit ist der Nachweis des Hauptsatzes aus § 1, sofern wir ihn auf die spezielle Funktion $1^{\mathfrak{C}}$ beziehen, erbracht.

Der Uebergang von $1^{\mathfrak{C}}$ zu einer beliebigen Funktion f von der in § 1 angenommenen Beschaffenheit lässt sich alsdann ohne alle Mühe vollziehen. Man hat dabei nur zu beachten, dass

$$f - h(\sigma).\,1^{\mathfrak{C}} \tag{22}$$

eine Funktion auf der Kugel ist, die in allen Punkten eines gewissen Stückes $-t_0 \leqq t \leqq +t_0$ des Normalkreises $s=\sigma$ stetig ausfällt, und diese Stetigkeitseigenschaft überdies der aus (22) durch Variation von σ entstehenden Funktionenschar in gleichmässiger Weise zukommt.

§ 4.

Folgerungen und weitere Fragestellungen.

Untersuchen wir statt der Partialsummen f_n, welche aus der Kugelfunktionenreihe der unstetigen Funktion f entspringen, deren *1.* HÖLDER'*sche Mittel*

$$f_n' = \frac{f_0 + f_1 + \cdots + f_n}{n+1}$$

so gelangen wir an Stelle der in unserm Hauptsatze angegebenen Formel zu der folgenden:

$$f'_n(s,\,t)\left\{\begin{array}{ll} = f^a(s,\,t) - h(s)\,\mathrm{Si}'(nt) + R'_n(s,\,t) & (t \geqq 0)\\ = f^i(s,\,t) + h(s)\,\mathrm{Si}'(-nt) + R'_n(s,\,t) & (t \leqq 0),\end{array}\right.$$

in der

$$\mathrm{Si}'(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin^2\frac{1}{2}\xi}{\xi^2}\,d\xi$$

gesetzt ist und die Grösse R'_n gleichmässig in der Umgebung der Kurve $\mathfrak{C}$ gegen o konvergiert.

Um dies nachzuweisen, genügt es offenbar, die Limesgleichung

$$(23)\qquad \lim_{\substack{n=\infty\\ t=+0}}\left[\mathrm{Si}'(nt) - \frac{\mathrm{Si}(0.t) + \mathrm{Si}(1.t) + \mathrm{Si}(2.t) + \cdots + \mathrm{Si}(nt)}{n+1}\right] = 0$$

darzutun. Nun ist gewiss

$$\left|\frac{\mathrm{Si}(0.t) + \mathrm{Si}(1.t) + \cdots + \mathrm{Si}(n.t)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)t}\int_0^{(n+1)t}\mathrm{Si}(\tau)\,d\tau\right| \leqq \frac{t}{\pi}.$$

Ferner erhalten wir für die Funktion $\frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{Si}(\xi)\,d\xi$ den Wert

$$\frac{1}{\pi x}\int_0^x\int_\xi^\infty \frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta\,d\xi = \frac{1}{\pi x}\Bigg[\iint\limits_{(0\leqq\xi\leqq\eta\leqq x)} + \iint\limits_{\left(\substack{0\leqq\xi\leqq x\\ x\leqq\eta<\infty}\right)}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\pi x}\left(\int_0^x \sin\eta\,d\eta + x\int_x^\infty \frac{\sin\eta}{\eta}\,d\eta\right)$$

$$= \frac{1-\cos x}{\pi x} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos x}{x} - \int_x^\infty \frac{\cos\eta}{\eta^2}\,d\eta\right)$$

$$= \frac{1}{\pi x} - \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{\cos\eta}{\eta^2}\,d\eta = \frac{1}{\pi}\int_x^\infty \frac{1-\cos\eta}{\eta^2}\,d\eta = \mathrm{Si}'(x).$$

Folglich ist der in Klammern gesetzte Ausdruck in Formel (23), da noch

$$0 < \mathrm{Si}'\big((n+1)t\big) - \mathrm{Si}'(nt) < \frac{t}{2\pi}$$

wird, seinem absoluten Betrage nach $< \frac{3t}{2\pi}$, und somit ist (23) bewiesen.

Danach zeigen die 1. Hölderschen Mittel $f'_n(s,\,t)$ in der Umgebung der Kurve $\mathfrak{C}$ ein wesentlich anderes Verhalten als die direkten Partialsummen f_n: Nehmen wir wieder etwa $h(s) > 0$ an, so gewährt $f'_n(s,\,t)$ für sehr grosse Werte von n den Anblick eines Plateaus $\mathfrak{A}$, das sich bei der Kurve $\mathfrak{C}$ in steilem, stufenförmigem Abfall zu dem Talkessel $\mathfrak{J}$ hinabsenkt; der Verlauf ist weit ruhiger als bei der entsprechenden Funktion $f_n(s,\,t)$. Beschränkt man sich auf einen Durchschnitt $s = \text{const.}$, so erhält man ein gutes Bild der obwaltenden Verhältnisse, indem man die Kurve

$$z = -\frac{2}{\pi}\int_0^t \frac{\sin^2\frac{\tau}{2}}{\tau^2}\,d\tau$$

in Richtung der t-Axe im Verhältnis $n:1$ zusammendrückt. Es ist vor allem zu beachten, dass diese Kurve $\left(\text{im Gegensatz zu der Funktion } \chi = -\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau\right)$ beständig in demselben Sinne abnimmt [8]).

Auf Grund der gewonnenen Resultate lässt sich das Verhalten der höheren HÖLDER'schen (oder CESÀRO'schen) Mittel in der Umgebung der Unstetigkeitslinie $\mathfrak{C}$ unschwer voraussagen.

Unsere Ergebnisse modifizieren sich dagegen, falls die Kurve $\mathfrak{C}$ nicht durchweg eine stetige Tangente besitzt, sondern an einer oder mehreren Stellen Ecken oder Spitzen aufweist, in der Umgebung dieser Singularitäten von $\mathfrak{C}$ wesentlich. Auf die Diskussion derartiger und noch komplizierterer (« mehrzipfliger ») Unstetigkeitspunkte möchte ich hier nicht eingehen [9]).

§ 5.

(Anhang). Die Gibbs'sche Erscheinung in der Theorie der Sturm-Liouvilleschen Reihen.

Das GIBBS'sche Phänomen tritt bei den STURM-LIOUVILLE'schen Entwicklungen auch in quantitativer Hinsicht genau in derselben Weise auf wie bei der FOURIERreihe. Denn sind z. B.

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ \ldots$$

diejenigen Lösungen der den Parameter λ enthaltenden Differentialgleichungsschar

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - q(x)u + \lambda u = 0 \qquad (0 \leqq x \leqq \pi),$$

[8]) Während diese Tatsachen, sinngemäss auf die FOURIERreihe einer einvariabligen Funktion übertragen, augenscheinlich mit dem von FEJÉR bemerkten Umstande in Zusammenhang stehen, dass die ersten arithmetischen Mittel einer solchen Reihe stets zwischen denselben Grenzen bleiben, zwischen denen die Werte der entwickelten Funktion variieren {FEJÉR, *Untersuchungen über* FOURIER*sche Reihen* [Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904), S. 51-69], S. 60; vergl. auch: FEJÉR, *Über die* FOURIER*sche Reihe* [Mathematische Annalen, Bd. LXIV (1907), S. 273-288], S. 284} sind dieselben hier insofern überraschend, als — wiederum nach FEJÉR {*Über die* LAPLACE*sche Reihe* [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), S. 76-109], S. 92 und 107} — im allgemeinen erst die 2. HÖLDER'schen Mittel einer Kugelfunktionenreihe die Grenzen, zwischen denen die entwickelte Funktion sich bewegt, nicht mehr verlassen. Ueberhaupt ist zu beachten, dass mit Bezug auf die GIBBS'sche Erscheinung nicht die 2. (wie man nach FEJÉR's Untersuchungen vermuten könnte), sondern die 1. arithmetischen Mittel die analogen Verhältnisse darbieten wie die 1. Mittel der FOURIERreihe.

[9]) Die in diesen Fällen obwaltenden Verhältnisse habe ich gleichfalls eingehend diskutiert; die Resultate dieser Untersuchung werde ich zur Veröffentlichung bringen, sobald das erforderliche Figurenmaterial hergestellt ist.

welche den festen Randbedingungen

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = 0, \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=\pi} = 0$$

genügen und durch

$$\int_0^\pi \varphi_n^2 \, dx = 1, \qquad \varphi_n(0) > 0$$

normiert sind, so gilt die Abschätzung

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi_n(x) = \cos nx + \frac{\sin nx}{2n} Q(x) + \Phi_n(x), \tag{24}$$

in der

$$Q(x) = \int_0^x q(\xi)\,d\xi - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi q(\xi)\,d\xi$$

gesetzt ist und die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(x)| \tag{25}$$

gleichmässig im Intervall $0 \leqq x \leqq \pi$ konvergiert. Diese asymptotische Darstellung ist auf einem von LIOUVILLE angegebenen Wege unter der Voraussetzung, dass $q(x)$ stetig und von beschränkter Schwankung ist, von Herrn HOBSON [10]) hergeleitet worden, welcher zeigte, dass unter dieser Voraussetzung

$$\Phi_n(x) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

wird [d. h. $|\Phi_n(x)|$ unterhalb einer Grenze $\frac{A}{n^2}$ liegt, in der A eine von n und x unabhängige Zahl bedeutet]. Lassen wir hingegen die Annahme, dass $q(x)$ von beschränkter Schwankung ist, fallen, so erhält man statt dessen, wie ich hier nicht näher ausführen möchte, die kompliziertere Formel

$$\Phi_n(x) = \frac{A_n(x)}{2n}\sin nx + \frac{B_n(x)}{2n}\cos nx + \frac{\alpha_n}{n} x \sin nx + \frac{\beta_n}{n}\cos nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

in der die vorkommenden Zeichen die folgende Bedeutung haben:

$$A_n(x) = \int_0^x q(\xi)\cos 2n\xi\,d\xi, \qquad B_n(x) = -\int_0^x q(\xi)\sin 2n\xi\,d\xi;$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\xi)\cos 2n\xi\,d\xi, \qquad \beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\xi)\sin 2n\xi\,d\xi.$$

Aus der Konvergenz von $\sum \alpha_n^2$ und $\sum \beta_n^2$ und der Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2(x) \leqq \frac{\pi}{2}\int_0^\pi q^2\,dx$$

folgt aber auch in diesem Falle die gleichmässige Konvergenz der Reihe (25).

---

[10]) E. W. HOBSON, *On a General Convergence Theorem, and the Theory of the Representation of a Function by Series of Normal Functions* [Proceedings of the London Mathematical Society, Second Series, Vol. VI (1908), S. 349-395], S. 379.

Aus der angegebenen Abschätzung von $\varphi_n(x)$ ist zu schliessen, dass die Differenz [11])

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) \int_0^\pi f(\xi)\,\varphi_\nu(\xi)\,d\xi - \sum_{\nu=0}^{n} \frac{2_\nu}{\pi} \cos \nu x \int_0^\pi f(\xi) \cos \nu \xi\, d\xi,$$

in der $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ eine beliebige, absolut integrierbare Funktion bedeutet, mit unbegrenzt wachsendem n gleichmässig gegen eine stetige Grenzfunktion $D(x)$ konvergiert [12]). Um dies einzusehen, genügt die Bemerkung, dass die beiden Reihen

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n x}{n} \int_0^\pi f(\xi) \cos n \xi\, d\xi, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2_n}{\pi} \frac{\cos n x}{n} \int_0^\pi f(\xi)\, Q(\xi) \sin n \xi\, d\xi$$

nichts Anderes sind als die FOURIERreihen der Funktionen

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi f(\xi)d\xi \quad (0 \leqq x \leqq \pi); \quad F(-x) = -F(x); \quad F(x+2\pi) = F(x),$$

$$G(x) = -\int_0^x f(\xi)Q(\xi)d\xi \quad (0 \leqq x \leqq \pi); \qquad G(-x) = G(x); \qquad G(x+2\pi) = G(x),$$

die beide für *alle* Werte des Arguments x stetig und von beschränkter Schwankung sind. Dass $D(x)$ identisch $= 0$ ist, ergibt sich dann [13]) schliesslich aus den leicht zu bestätigenden Gleichungen

$$\int_0^\pi D(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad \text{(für } n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{26}$$

Damit ist gezeigt, dass sich auf Grund der (erweiterten) HOBSON'schen Formel (24) alle Aussagen über Konvergenz und Divergenz der FOURIERreihe, insbesondere auch über die GIBBS'sche Erscheinung, auf die STURM-LIOUVILLE'schen Entwicklungen ohne weiteres übertragen.

Elmshorn (Preussen), den 3. Oktober 1909.

HERMANN WEYL.

---

[11]) Um eine einheitliche Schreibweise der Glieder der FOURIER'schen Reihe zu ermöglichen, führe ich das Symbol 2_n ein, das für $n = 0$ durch 1, für $n \neq 0$ aber durch 2 zu ersetzen ist.

[12]) Siehe auch HAAR, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme* (Inauguraldissertation, Göttingen 1909), S. 31.

[13]) In dem Beweis dieser Tatsache, dass aus den Gleichungen (26) das identische Verschwinden von $D(x)$ folgt {siehe KNESER, *Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik* [Mathematische Annalen, Bd. LVIII (1904), S. 81-147], S. 116} liegt meiner Auffassung nach der eigentliche Kernpunkt der Theorie der STURM-LIOUVILLE'schen Reihen.