# Ueber die Bedeutung der Dioptrie.

Von

Prof. Dr. A. Gullstrand

in Upsala.

Wenn man in der gewöhnlichen Linsenformel die Abstände sowohl des leuchtenden Punktes wie des Bildpunktes vom optischen Centrum der Linse in der Bewegungsrichtung des Lichtes positiv rechnet und demnach die Formel in folgender Weise schreibt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f},$$

wo also $f$ die Brennweite der Linse, $a$ und $b$ die Abstände des leuchtenden Punktes bezw. des Bildpunktes vom optischen Centrum bedeuten, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass der reciproke Werth der Bildpunktdistanz durch eine constante, nur von $f$, das ist nur von den Eigenschaften der Linse abhängige Vermehrung oder Verminderung — je nach dem Zeichen von $f$ — des entsprechenden Werthes für den leuchtenden Punkt erhalten wird. Die reciproken Werthe von Distanzen, welche in dieser einfachen Additionsformel einander gegenüber stehen, müssen commensurabel sein, oder mit anderen Worten die Brechkraft der Linse, welche durch den reciproken Werth der Brennweite gemessen wird, kann in einer und derselben Einheit ausgedrückt werden, wie die Convergenz des einfallenden bezw. gebrochenen Strahlenbündels, welche durch den reciproken Werth des entsprechenden Abstandes gemessen wird. Das

Maass der Convergenz eines Strahlenbündels in einem gegebenen Punkte, durch den reciproken Werth des Abstandes des Convergenzpunktes ausgedrückt, ist aber nichts Anderes als das Maass der Krümmung einer durch den gegebenen Punkt gehenden, auf sämmtlichen Strahlen senkrechten Fläche — der sogenannten Wellenfläche — in einem Normalschnitte. (Nach der in der Analyse gebräuchlichen Definition des Krümmungsmaasses einer Fläche als des Productes aus den Krümmungen der beiden Hauptnormalschnitte ist eine in genannter Weise ausgedrückte Convergenz nicht mit einer Flächenkrümmung, sondern mit der Krümmung einer Curve oder eines Flächenschnittes bezw. mit einer Flächenhauptkrümmung commensurabel.) Es leuchtet also ein, dass die Dioptrie, welche als Einheit nichts anderes ist, als der reciproke Werth des Meters, zum Messen sowohl der Brechkraft einer Linse wie namentlich auch der Convergenz eines Strahlenbündels in einem gegebenen Punkte und der Hauptkrümmung einer Fläche dienen kann.

Will man nun diese Rechnung mit Dioptrieen auf die Brechung in anderen optischen Systemen als unendlich dünnen Linsen anwenden, so geschieht dies ohne die geringste Schwierigkeit, so lange es sich nur um in Luft befindliche Systeme handelt. Man hat nur die Abstände $a$ und $b$ der Linsenformel von den betreffenden Hauptpunkten zu rechnen anstatt vom optischen Centrum der Linse oder, was dasselbe ist, die Convergenz des einfallenden und des gebrochenen Strahlenbündels in den betreffenden Hauptpunkten in Rechnung zu ziehen. Wenn man demnach unter Brechkraft des optischen Systems den reciproken Werth des Abstandes des betreffenden Hauptbrennpunktes vom Hauptpunkte und unter Convergenz des einfallenden bezw. gebrochenen Strahlenbündels den reciproken Werth des Abstandes des betreffenden Conjugatfocus vom Hauptpunkte versteht, so besteht das Brechungsgesetz unverändert fort:

die Convergenz des gebrochenen Strahlenbündels ist gleich der Convergenz des einfallenden + der Brechkraft des Systems.

Für den allgemeinen Fall aber, in welchem die beiden Brennweiten eines optischen Systems nicht gleich zu sein brauchen, ist es meines Wissens bisher nicht gelungen, die durch die Dioptrierechnung erzielbare Vereinfachung zu schaffen. Die für diesen Fall gültige Formel, welche, wenn die Abstände wie oben positiv gerechnet werden, in folgender Weise geschrieben wird:

$$\frac{F_{,,}}{b} = \frac{F_{,}}{a} + 1$$

ergiebt nämlich, dass die Convergenz des gebrochenen Strahlenbündels durch die Brechung in einem gegebenen optischen Systeme keinen constanten Zuwachs erhält, sondern bald vermehrt, bald vermindert wird, bald wieder unverändert bleibt. Der Versuch von Hällsten[1]), dieses Hinderniss zu umgehen, indem er die optischen Abstände von denjenigen conjugirten Punktepaaren rechnen wollte, für welche die Abstände von den betreffenden Hauptbrennpunkten gleich sind, musste daran scheitern, dass der erhaltene Werth für die Brechkraft: $\frac{1}{\sqrt{F_{,}F_{,,}}}$ nicht unmittelbar bei Berechnung der Bildgrösse Anwendung finden konnte, woraus also z. B. resultirte, dass keine Uebereinstimmung zwischen Brechkraft und Loupenvergrösserung vorhanden wäre.

Aber auch für den allgemeinen Fall lässt sich die Dioptrierechnung vorzüglich anwenden. Wenn wir die Brechungsindices des ersten und letzten Medium mit $n_{,}$ und $n_{,,}$ bezeichnen, so kann die bezügliche Formel in folgenden zwei Weisen dargestellt werden:

---

[1]) Die dioptrische Fähigkeit etc. Arch. f. Phys. u. Anat. Phys. Abth. Jahrg. 1880. S. 115.

$$\frac{n_{\prime\prime}}{b} = \frac{n_{\prime}}{a} + \frac{n_{\prime}}{F_{\prime}} = \frac{n_{\prime}}{a} + \frac{n_{\prime\prime}}{F_{\prime\prime}},$$

woraus sofort ersichtlich ist, dass der reciproke Werth der durch den betreffenden Brechungsindex dividirten ersten Conjugatfocaldistanz bei der Brechung einen nur von den optischen Eigenschaften des brechenden Systems abhängigen Zuwachs erhält, um nach der Brechung gleich dem reciproken Werthe der durch den bezüglichen Brechungsindex dividirten zweiten Conjugatfocaldistanz zu sein. Da eine Division der Conjugatfocaldistanz einer Multiplication der Convergenz gleichkommt, so ergiebt die Formel in dieser Gestalt ein einfaches Additionsverhältniss zwischen den beiden mit den bezüglichen Brechungsindices multiplicirten Convergenzwerthen und einer constanten, nur von den optischen Eigenschaften des brechenden Systems abhängigen Grösse.

Nun ist es aber von vornherein einleuchtend, dass ein Abstand eines leuchtenden Punktes oder eines Bildpunktes in einem bestimmten brechenden Medium nicht ohne Weiteres mit einem ähnlichen Abstande in einem anderen brechenden Medium verglichen werden kann, oder mit anderen Worten, dass ein Convergenzwerth oder eine Brechkraft zuerst auf Luft reducirt werden muss, bevor man sie mit der Dioptrie, welche als Einheit den reciproken Werth des Abstandes von 1 m in Luft darstellt, zu messen versucht. Dass der einzige Weg für eine solche Reduction, der zum Ziele führen könnte, die Multiplication des Convergenzwerthes, bezw. die Division des Abstandes mit dem betreffenden Brechungsindex ist, das geht ohne Weiteres aus den gegebenen Darstellungen hervor. Wenn nämlich das erste Medium Luft ist, $n_{\prime}$ mithin gleich 1, so ist $\frac{n_{\prime}}{a}$ ein Dioptrieenwerth, und die übrigen Quantitäten müssen auch in Dioptrieen gerechnet werden, wenn anders die Formel eine Additionsformel zwischen commensurablen

Grössen sein soll. Aber auch aus rein physikalischem Gesichtspunkte ist die auf genannte Weise bewerkstelligte Reduction auf Luft die einzige entsprechende. Aus der Linsenformel ersehen wir, dass eine Linse, deren beide Flächen eben sind, eine unendlich grosse Brennweite und die Brechkraft Null hat. In derselben Weise muss, falls überhaupt die Dioptrierechnung angewendet werden soll, auch eine einzige brechende Fläche, welche eben ist und folglich unendlich grosse Brennweiten hat, der Brechkraft Null entsprechen. Die Reduction auf Luft muss also der Veränderung entsprechen, welche eine gegebene Convergenz bei Uebergang aus dem betreffenden Medium in Luft durch Brechung in einer ebenen Fläche erfährt, und welche, durch die Formel $\frac{1}{a} = \frac{n}{b}$ dargestellt, nichts anderes ist als der Ausdruck für die oben geforderte Reduction. Wenn wir also folgende Bezeichnungen einführen:

$$\frac{n_{,}}{a} = A \qquad \frac{n_{,,}}{b} = B \qquad \frac{n_{,}}{F_{,}} = \frac{n_{,,}}{F_{,,}} = D$$

und die Abstände $a\,b\,F_{,}F_{,,}$ in Meter messen, so geben $A$, $B$, $D$ in Dioptrieen die Maasse der reducirten Convergenz des einfallenden und des gebrochenen Strahlenbündels, bezw. die Brechkraft des brechenden Systems, und das allgemein gültige Brechgesetz lautet einfach:

$$B = A + D$$

oder in Worten: Die reducirte Convergenz eines Strahlenbündels wird durch die Brechung in einem beliebigen optischen Systeme um den Betrag der Brechkraft des Systems vermehrt, wobei wir uns nur zu erinnern haben, dass die Convergenzwerthe sich auf die betreffenden Hauptpunkte beziehen. Dass bei divergenten Strahlenbündeln die Convergenz negatives Zeichen hat, und dass bei negativer Brechkraft des Systems eine Verminderung der reducirten Convergenz eintritt, indem das Wort „vermehrt" im Sinne einer algebraischen Addition genommen werden muss, darauf brauche ich wohl hier nicht aufmerksam zu machen.

Wird der Krümmungshalbmesser einer brechenden Fläche mit $r$ bezeichnet und in demselben Sinne wie die Convergenz positiv gerechnet, so dass eine solche Fläche positive Krümmung besitzt, wenn ihre Concavität nach der Seite gerichtet ist, nach welcher sich das Licht bewegt, so ergiebt sich nach dem oben Gesagten:

$$D = \frac{n_{,,} - n_{,}}{r},$$

wenn man sich der Ausdrücke:

$$F_{,} = \frac{n_{,} r}{n_{,,} - n_{,}} \qquad F_{,,} = \frac{n_{,,} r}{n_{,,} - n_{,}}$$

erinnert.

Bei der Zusammensetzung von verschiedenen brechenden oder spiegelnden Flächen zu einem optischen Systeme kann durch Einführung der Dioptrirechnung ebenfalls eine bedeutende Vereinfachung für die numerische Berechnung gewonnen werden. Wenn wir nämlich auch die Abstände der brechenden, bezw. spiegelnden Flächen von einander durch Division mit dem betreffenden Brechungsindex auf Luft reduciren — ich brauche für die auf diese Weise erhaltenen Abstände, bezw. Convergenzwerthe einfach den Ausdruck reducirt — so verschwinden sofort alle Brechungsindices aus der weiteren Rechnung. Die bekannten Formeln für die beiden Brennweiten eines aus zwei bekannten optischen Systemen zusammengesetzten Systems:

$$F_{,} = \frac{\varphi_{,} f_{,}}{\varphi_{,} + f_{,,} - d} \qquad F_{,,} = \frac{\varphi_{,,} f_{,,}}{\varphi_{,} + f_{,,} - d},$$

in welchen $f_{,}$ $f_{,,}$ $\varphi_{,}$ $\varphi_{,,}$ $F_{,}$ $F_{,,}$ die vordere, bezw. hintere Brennweite des ersten, bezw. zweiten, bezw. des aus beiden zusammengesetzten Systems und $d$ den Abstand zwischen dem zweiten Hauptpunkte des ersten und dem ersten Hauptpunkte des zweiten Systems bedeuten, werden mit der Dioptriebezeichnung, wenn wir mit $\delta_{,}$ den reducirten

Abstand $d$ bezeichnen, in folgender einfacher Weise geschrieben:

$$D_{12} = D_{,} + D_{,,} - \delta_{,} D_{,} D_{,,},$$

wobei $D_{12}$ $D_{,}$ $D_{,,}$ die Brechkraft des zusammengesetzten, bezw. des ersten und zweiten einfachen Systems bedeuten. Diese Formel ist auch allgemeingültig, die einzelnen Systeme mögen einfache brechende Flächen sein oder wieder aus zusammengesetzten optischen Systemen bestehen.

Um ein aus zwei bekannten Systemen zusammengesetztes System zu kennen, ist es aber nicht hinreichend, dass die Brechkraft gegeben ist; man muss auch die Oerter der Hauptpunkte berechnen können. Dies geschieht z. B. nach v. Helmholtz durch die Formeln:

$$h_{,} = \frac{d f_{,}}{d - \varphi_{,} - f_{,,}} \qquad h_{,,} = \frac{d \varphi_{,,}}{d - \varphi_{,} - f_{,,}},$$

in welchen $h_{,}$ den Abstand des ersten Hauptpunktes des ersten einfachen Systems von demjenigen des zusammengesetzten und $h_{,,}$ den Abstand des zweiten Hauptpunktes des zusammengesetzten Systems vom zweiten Hauptpunkte des zweiten einfachen Systems bedeuten, beide in der Bewegungsrichtung des Lichtes positiv gerechnet. Wir führen die Bezeichnungen $H'_{12}$ $H''_{12}$ der entsprechenden reducirten Abstände ein und rechnen sie positiv, wenn die Hauptpunkte des zusammengesetzten Systems auf der Bahn des Lichtes weiter nach vorn liegen als die entsprechenden Hauptpunkte des bezüglichen einfachen Systems, und erhalten für die Dioptrierechnung:

$$H'_{12} = \frac{\delta_{,} D_{,,}}{D_{12}} \qquad H''_{12} = -\frac{\delta_{,} D_{,}}{D_{12}}.$$

Bei dieser einfachen Procedur ist es eine leichte Sache, die nöthigen Formeln für weitere Zusammensetzungen anzugeben. Gesetzt, wir haben ein System von brechenden Flächen mit den Krümmungshalbmessern $r_{,}$ $r_{,,}$ $r_{,,,}$ . . . . ., welche brechende Medien von einander abgrenzen, deren Brechungsindices $n_{,}$ $n_{,,}$ $n_{,,,}$ $n_{IV}$ . . . sind, so dass $n_{,}$ demjenigen Medium angehört, das vor der Fläche $r_{,}$ liegt, und dass die Abstände der brechenden Flächen von einander längs der optischen Achse $d_{,}$ $d_{,,}$ .... sind, wobei $d_{,}$ der Abstand zwischen den Flächen $r_{,}$ und $r_{,,}$ ist, so wollen wir das aus den zwei ersten Flächen zusammengesetzte System mit dem Index 12 bezeichnen, das aus den drei ersten mit 13 und allgemein das aus den $m$ ersten Flächen zusammengesetzte System mit $1m$. Dies gilt nicht nur für die Werthe $D$ $H'$ und $H''$, sondern auch für die Werthe $\delta$. Während also z. B. $\delta_{,,,}$ den reducirten Abstand zwischen den Flächen $r_{,,,}$ und $r_{IV}$ bedeutet, verstehen wir unter $\delta_{13}$ den reducirten Abstand zwischen dem zweiten Hauptpunkte des aus den drei ersten Flächen zusammengesetzten Systems und der Fläche $r_{IV}$. Es gilt also allgemein:

$$\delta_{1m} = \delta_m - H''_{1m}$$

und speciell:

$$\delta_{12} = \delta_{,,} - H''_{12} = \delta_{,,} + \frac{\delta_{,} D_{,}}{D_{12}}$$

und wir haben demnach zuerst die Werthe $D_{12}$ $H'_{12}$ $H''_{12}$ und $\delta_{12}$ des Systems 12 gefunden. Bei Hinzufügung der folgenden Fläche $r_{,,,}$ haben wir die Formeln:

$$D_{13} = D_{12} + D_{,,,} - \delta_{12} D_{12} D_{,,,} \qquad H'_{13} = \frac{\delta_{12} D_{,,,}}{D_{13}}$$

$$H''_{13} = -\frac{\delta_{12} D_{12}}{D_{13}} \qquad \delta_{13} = \delta_{,,,} + \frac{\delta_{12} D_{12}}{D_{13}}$$

und auf diese Weise gehen wir von Fläche zu Fläche fort, bis wir schliesslich für das System $1m$ folgende Werthe erhalten:

$$D_{1m} = D_{1(m-1)} + D_m - \delta_{1(m-1)} D_{1(m-1)} D_m$$

$$H'_{1m} = \frac{\delta_{1(m-1)} D_m}{D_{1m}} \qquad H''_{1m} = -\frac{\delta_{1(m-1)} D_{1(m-1)}}{D_{1m}}$$

Während nun $H''_{1m}$ den reducirten Abstand des zweiten Hauptpunktes von der letzten Fläche angiebt, ist der reducirte Abstand des ersten Hauptpunktes von der ersten Fläche gleich:

$$H'_{12} + H'_{13} + H'_{14} + \ldots\ldots\ldots H'_{1m}.$$

Sollte eine der Flächen durch Spiegelung wirken anstatt durch Brechung, wenn es sich also z. B. darum handelt, das in der vorderen Linsenfläche entstandene Spiegelbild zu untersuchen, so hat man nur alle Brechungsindices derjenigen Medien, welche das Licht nach erfolgter Spiegelung durchläuft, negativ zu setzen. Alle Krümmungshalbmesser und Abstände sind in der Bewegungsrichtung des einfallenden Lichtes positiv zu rechnen, und die deducirten Formeln sind auch für solche Fälle unverändert gültig. Mögen wir die Rechnung am gewählten Beispiele demonstriren. Wir bezeichnen den Brechungsindex des Kammerwassers mit $n$, die Krümmungshalbmesser der Hornhaut und der vorderen Linsenfläche mit $R_{,}$ bez. $R_{,,}$ und den Abstand zwischen Hornhautscheitel und vorderem Linsenpol mit $d$. Wir haben also die vier Brechungindices $n_{,} = 1$ $n_{,,} = n$ $n_{,,,} = -n$ und $n_{IV} = -1$, die drei Flächen $r_{,} = R_{,}$ $r_{,,} = R_{,,}$ und $r_{,,,} = r_{,} = R_{,}$, denen die dioptrischen Werthe $D_{,} = \frac{n-1}{R_{,}}$, $D_{,,} = \frac{-2n}{R_{,,}}$, $D_{,,,} = \frac{-1+n}{R_{,}} = D_{,}$ entsprechen, sowie endlich die zwei reducirten Abstände $\delta_{,} = \frac{d}{n}$ und $\delta_{,,} = \frac{-d}{-n} = \delta_{,}$. Gemäss den oben deducirten Formeln erhalten wir unmittelbar:

$$D_{13} = D_{12} + D_{,,,} - \delta_{12} D_{12} D_{,,,} = D_{12} + D_{,} -$$
$$- D_{,} (\delta_{,,} D_{12} + \delta_{,} D_{,}) = (D_{12} + D_{,})(1 - \delta_{,} D_{,}) =$$
$$= (2D_{,} + D_{,,} - \delta_{,} D_{,} D_{,,})(1 - \delta_{,} D_{,}),$$
$$H''_{13} = -\frac{\delta_{12} D_{12}}{D_{13}} = -\frac{\delta_{,,} D_{12} + \delta_{,} D_{,}}{D_{13}} =$$
$$= -\delta_{,} . \frac{D_{12} + D_{1}}{D_{13}} = -\frac{\delta_{,}}{1 - \delta_{,} D_{,}}.$$

Da nun ein solches System nur einen Hauptpunkt hat, ist keine weitere Berechnung nöthig. Es ist aber leicht zu zeigen, dass die reducirte erste Hauptpunktsdistanz denselben Werth mit entgegengesetztem Zeichen hat, was dem Umstande entspricht, dass die erste und letzte Fläche in diesem Falle eine und dieselbe, und der Brechungsindex des letzten Mediums gleich dem des ersten mit umgekehrten Zeichen ist. Wir finden nämlich unter Berücksichtigung, dass

$$\delta_{12} = \delta_{,} . \frac{D_{12} + D_{,}}{D_{12}} = \frac{\delta_{,} D_{13}}{D_{12}(1 - \delta_{,} D_{,})}$$

ist, den Werth:

$$H'_{12} + H'_{13} = \frac{\delta_{,} D_{,,}}{D_{12}} + \frac{\delta_{12} D_{,,,}}{D_{13}} = \frac{\delta_{,}}{D_{12}} \left\{ D_{,,} + \frac{D_{,}}{1 - \delta_{,} D_{,}} \right\}$$
$$= \frac{\delta_{,}}{1 - \delta_{,} D_{,}} .$$

Den Ort des Hauptpunktes erhalten wir übrigens am einfachsten unter Berücksichtigung, dass der Hauptpunkt des ganzen Systems und der vordere Linsenpol in Bezug auf die Hornhaut conjugirte Punkte sind, durch die Formel:

$$\frac{1}{\delta_{,}} = \frac{1}{H} + D_{,} .$$

Den oben angegebenen Weg habe ich eben nur befolgt um die Anwendbarkeit der Methode auch für diejenigen Fälle zu demonstriren, wo eine der Flächen durch Spiegelung anstatt durch Brechung wirkt.

Das Gebiet der Dioptrierechnung erstreckt sich aber viel weiter. So lange überhaupt die Brechungsebene des Leitstrahles und ein Hauptmeridian des einfallenden Strahlenbündels mit einem Hauptmeridiane der brechenden Fläche zusammenfallen, ist auch die durch die Dioptrierechnung erzielbare Vereinfachung zu erhalten, die brechenden Systeme mögen centrirt sein oder nicht, die Incidenz rechtwinkelig oder schief, die Flächen sphärisch oder astigmatisch sein. Die einzige Einschränkung wäre, wenn die Hauptmeridiane des einfallenden Strahlenbündels und der brechenden Fläche, sowie bei schiefer Incidenz die Brechungsebene des Leitstrahles nicht zusammenfallen, aber diese Einschränkung ist nur scheinbar: die Dioptrierechnung bringt auch hier die gleiche Vereinfachung, aber bei der complicirteren Rechnung durch Auflösung der drei in solchen Fällen erforderlichen Gleichungen spielt diese Vereinfachung nur eine untergeordnete Rolle.

Bei der Brechung von astigmatischen Strahlenbündeln oder in astigmatischen Flächen hat man nämlich, wenn die genannte Bedingung erfüllt ist, nur die Werthe $A'$ $A''$ $D'$ $D''$ $B'$ $B''$ der beiden Hauptmeridiane besonders in Rechnung zu ziehen; und die für die Brechung bei schiefer Incidenz gültigen Formeln:

$$\frac{n_{,,} \cos^2 i_{,,}}{q'} = \frac{n_{,} \cos^2 i_{,}}{p'} + \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R'},$$

$$\frac{n_{,,}}{q''} = \frac{n_{,}}{p''} + \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R''},$$

in welchen $p'\,q'\,R'$ die conjugirten Brennweiten bezw. den Krümmungshalbmesser der brechenden Fläche in den bezüglichen mit der Brechungsebene des Leitstrahles zusammenfallenden Hauptmeridianen und $p''\,q''\,R''$ die entsprechenden Werthe für die auf der Brechungsebene senkrechten Hauptmeridiane, sowie $i_{,}$ und $i_{,,}$ Einfalls- bezw. Brechungswinkel darstellen, lassen sich ohne Schwierigkeit in die Form

$$B' = A' + D' \quad \text{und} \quad B'' = A'' + D''$$

überführen. Für die auf der Brechungsebene senkrechten Hauptmeridiane gelingt dies ohne Weiteres durch Einsetzen von

$$\frac{n_{,}}{p''} = A'', \quad \frac{n_{,,}}{q''} = B'' \quad \text{und} \quad \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R''} = D'',$$

wobei der Incidenzpunkt Hauptpunkt ist, mithin $H' = H'' = 0$, und die Abstände längs dem bei Brechung unter schiefer Incidenz an der Stelle der optischen Achse tretenden Leitstrahle zu messen sind. Dagegen müssen wir für die mit der Brechungsebene zusammenfallenden Hauptmeridiane einen anderen Weg einschlagen. Zwar lässt sich die angeführte Formel in ähnlicher Weise auf die Form

$$\frac{Q'}{q'} = \frac{P'}{p'} + 1$$

bringen, wobei

$$Q' = \frac{n_{,,} \cos^2 i_{,,} R'}{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}} \quad \text{und} \quad P' = \frac{n_{,} \cos^2 i_{,} R'}{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}$$

erhalten wird, aber da hier $Q'$ und $P'$ sich nicht wie $n_{,,}$ und $n_{,}$ verhalten, so ist der Incidenzpunkt an der Fläche nicht bei der Brechung in diesem Meridiane Hauptpunkt, sondern entspricht einem in gewissen Systemen mit getrennten Hauptpunkten existirenden Punkte, welcher sich selbst conjugirt ist. Nun muss nach der bekannten Brennpunktsgleichung für conjugirte Punkte das Product aus den Abständen dieses Punktes von den beiden Hauptbrennpunkten gleich dem Producte aus den beiden Hauptbrennweiten sein, mithin

$$Q' . P' = \frac{n_{,,} \cos^2 i_{,,} . R'}{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}} \cdot \frac{n_{,} \cos^2 i_{,} . R'}{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}} = \\ = \frac{n_{,,}}{D'} \cdot \frac{n_{,}}{D'},$$

woraus wir

$$D' = \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R' \cos i_{,,} \cos i_{,}}$$

erhalten. Die Oerter der Hauptpunkte finden wir am einfachsten durch Subtraction der Hauptbrennweiten von den Abständen der betreffenden Hauptbrennpunkte vom Incidenzpunkte. Es ergiebt sich:

$$H' = \frac{1}{n_{,}}\left(\frac{n_{,}}{D'} - P'\right) = \frac{1}{n_{,}}\left(\frac{n_{,}}{D'} - \frac{n_{,} \cos i_{,}}{\cos i_{,,}} \cdot \frac{1}{D'}\right) = \\ = \frac{1}{D'} \cdot \frac{\cos i_{,,} - \cos i_{,}}{\cos i_{,,}},$$

$$H'' = \frac{1}{n_{,,}}\left(Q' - \frac{n_{,,}}{D'}\right) = \frac{1}{n_{,,}}\left(\frac{n_{,,} \cos i_{,,}}{\cos i_{,}} \cdot \frac{1}{D'} - \frac{n_{,,}}{D'}\right) = \\ = \frac{1}{D'} \cdot \frac{\cos i_{,,} - \cos i_{,}}{\cos i_{,}}$$

für die reducirten Abstände der bezüglichen Hauptpunkte vom Incidenzpunkt, welche positiv gerechnet werden, wenn jene auf der Bahn des Lichtes weiter vorn liegen als dieser.

Nachdem nunmehr die Werthe $D'$ $H'$ $H''$ auch für die Brechung in den mit der Brechungsebene zusammenfallenden Hauptmeridiane bekannt sind, ist die Dioptrierechnung auch bei schiefer Incidenz in sphärischen oder astigmatischen Flächen nach den Formeln

$$B' = A' + D' \text{ und } B'' = A'' + D''$$

dieselbe wie bei Brechung in einer in Luft befindlichen Linse, und man kann z. B. die Brechung bei schiefem Durchgange durch ein centrirtes System von $n$ Flächen, dessen Achse vom Leitstrahl oder dessen Verlängerung geschnitten wird, ohne weiteres nach den für Zusammensetzung von optischen Systemen oben gegebenen Formeln durch die zwei Gleichungen

$$B'_{1n} = A'_{1n} + D'_{1n} \text{ und } B''_{1n} = A''_{1n} + D''_{1n}$$

berechnen, indem die Werthe $D_{1n}$ $H'_{1n}$ $H''_{1n}$ für beide Hauptmeridiane bekannt sind. Dass die Abstände zwischen den einzelnen brechenden Flächen hierbei nicht längs der optischen Achse des Systems, sondern längs dem Leitstrahle zu messen sind, brauche ich hier wohl nicht besonders zu erwähnen.

Wir haben also bisher gefunden, dass für alle Berechnungen der Brechung oder Spiegelung in optischen Systemen die Dioptrierechnung eine bedeutende Vereinfachung bringt, wenigstens wenn die Hauptmeridiane mit der Brechungsebene zusammenfallen, — unter der stillschweigend gemachten Annahme, dass $H'$ und $H''$ endliche Werthe haben. Dass aber diese Annahme keine Einschränkung bedeutet, oder mit anderen Worten, dass auch bei den sogenannten afocalen Systemen dieselben Vortheile durch die Dioptrierechnung gewonnen werden können, wird sogleich gezeigt werden.

Zuerst wollen wir aber untersuchen, wie sich diese Rechnung den Abbildungsproblemen gegenüber verhält. Wir können uns ja nicht im Allgemeinen damit begnügen, die Lage eines Bildpunktes nach der Brechung kennen zu lernen; die gewöhnliche Rechnung giebt uns auch die Grösse der Bilder, und wir müssen erwarten, dass die Dioptrierechnung auch bei dieser Berechnung ebenso allgemein anwendbar sei und womöglich auch ähnliche Vereinfachungen darbiete. In der That ist dies der Fall.

Wenn wir die lineare Grösse des Gegenstandes bezw. Bildes mit $\alpha$ bezw. $\beta$ bezeichnen, so nimmt die gewöhnliche Hauptpunktsgleichung für die Bildgrösse, welche in verschiedenen Weisen deducirt werden kann und auch vorübergehend bei v. Helmholtz vorkommt, nach Uebersetzung in die Dioptriesprache und mit Berücksichtigung der Richtung, in welcher wir die Abstände positiv rechnen, folgende Form an:

$$\beta B = \alpha A,$$

wobei gleiche Zeichen für $\alpha$ und $\beta$ directe, ungleiche aber umgekehrte Abbildung anzeigen. Diese einfache Formel gilt also zunächst für alle Fälle von Brechung oder Spiegelung in centrirten optischen Systemen, nur muss man Object und Bild von derselben Seite hin ansehen. Mit anderen Worten, die Formel giebt nicht nur die Bildgrösse, sondern durch das Zeichen von $\beta$, verglichen mit dem von $\alpha$, auch die Art der Abbildung an; die gewöhnliche Abbildung im Planspiegel ist z. B. einfach direct, wenn man sich nur das Object als durchscheinend vorstellt und in derselben Richtung ansieht wie das Spiegelbild; die Abbildung eines Gegenstandes durch ein positives System in der Camera ist umgekehrt, das Bild muss aber auf der durchleuchtenden Mattscheibe, nicht auf einem Schirme aufgefangen werden, oder im letzterwähnten Falle muss das Object von hinten angesehen werden, falls die Abbildung umgekehrt sein soll.

In astigmatischen Systemen kann von einer einheitlichen Abbildung im gewöhnlichen Sinne nicht die Rede sein. Aber Liniensysteme, welche den Hauptmeridianen parallel sind, werden durch solche Systeme in den betreffenden conjugirten Brennebenen, welche, wo Leitstrahl und optische Achse nicht zusammenfallen, auf jenen senkrecht stehen, nach denselben Regeln abgebildet. Hierbei kann es vorkommen, dass die Abbildung in einem Meridiane direct, im anderen aber umgekehrt ist, was aus dem Zeichen von $\beta'$ bezw. $\beta''$ in den beiden Gleichungen

$$\beta' B' = \alpha' A' \text{ und } \beta'' B'' = \alpha'' A''$$

hervorgeht.

Die Frage nach der optischen Abbildung kann in folgender Weise formulirt werden: wie verhält sich die Veränderung des Brechungswinkels zu derjenigen des Incidenzwinkels, wenn dieser bei unverändertem Incidenzpunkte um ein Unendlichkleines verändert wird? Die Differentialrechnung giebt uns die Antwort: wie $n_, \cos i_,$ sich zu $n_{,,} \cos i_{,,}$ verhält.

Für die Abbildung auf der Brechungsebene des Leitstrahles senkrechter Liniensysteme, d. h. für die Abbildung mittelst Strahlen, die in demjenigen Hauptmeridiane verlaufen, welcher mit dieser Ebene zusammenfällt, ergiebt sich demnach mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{\beta'}{q'} : \frac{\alpha'}{p'} = n_, \cos i_, : n_{,,} \cos i_{,,}.$$

Unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$q' = \frac{n_{,,}}{B'} + n_{,,} H'' = \frac{n_{,,} \cos i_, (D' - B') + n_{,,} \cos i_{,,} B'}{B' D' \cos i_,}$$

$$p' = \frac{n_,}{A'} + n_, H' = \frac{n_, \cos i_{,,} (D' + A') - n_, \cos i_, A'}{A' D' \cos i_{,,}}$$

$$B' = A' + D'$$

erhalten wir auch in diesem Falle für die Abbildung unsere einfache Formel:

$$\beta' B' = \alpha' A'.$$

Wenn es sich um die Abbildung von zur Brechungsebene parallelen Liniensystemen handelt, ergiebt sich die

Gültigkeit dieser Formel aus denselben Gründen wie bei rechtwinkeliger Incidenz, wenn man den Brechungsvorgang durch die Projection auf eine gegen die Brechungsebene senkrechte Ebene untersucht. Dass wiederum eine solche Formel, wenn sie für ein einfaches System gültig ist, auch bei Zusammensetzung von Systemen ihre Gültigkeit nicht verliert, das wird auf dieselbe Weise bewiesen, wie man nach der gewöhnlichen Darstellung beweist, dass die für die Abbildung durch eine einfache Linse geltenden Formeln auch für zusammengesetzte Linsensysteme gelten. Die Abbildungsformel hat also eine ebenso allgemeine Gültigkeit wie die Brechungsformel, d. h. sie gilt für alle einfachen oder zusammengesetzten Systeme von sphärischen oder astigmatischen Flächen bei centraler oder schiefer Incidenz, wofern nur sämmtliche Hauptmeridiane mit der Brechungsebene zusammenfallen bezw. auf ihr senkrecht stehen, und die Hauptpunkte des Systems in endlicher Entfernung gelegen sind.

Wenn aber bei der Zusammensetzung von zwei optischen Systemen die Summe $D_{,} + D_{,,} - \delta_{,} D_{,} D_{,,}$ gleich Null wird, so kann es entweder vorkommen, dass die Werthe $H'$ und $H''$ unendlich gross werden, oder dass sie die Form $\frac{0}{0}$ annehmen. In beiden Fällen handelt es sich um sogenannte afocale Systeme, aber während im ersten Falle die gegebenen Formeln nicht mehr anwendbar sind, behalten sie im letzten Falle ihre volle Gültigkeit bei. — Bei der Ableitung der Eigenschaften der afocalen Systeme geht man am bequemsten von den bekannten Brennpunktsgleichungen der Conjugatbrennweiten und der Bildgrösse aus. Wenn $l_{,}$ und $l_{,,}$, in der Bewegungsrichtung des Lichtes positiv gerechnet, die Abstände des Gegenstandes bezw. des Bildes von dem ersten bezw. zweiten Hauptbrennpunkte eines einfachen Systems mit den Hauptbrennweiten $f_{,}$ und $f_{,,}$ bedeuten, so gilt bekanntlich:

$$l_{,,} = -\frac{f_, f_{,,}}{l_,}, \qquad \frac{\beta^*}{\alpha} = \frac{f_,}{l_,} = -\frac{l_{,,}}{f_{,,}}$$

Für ein zweites System mit den Hauptbrennweiten $\varphi_,$ und $\varphi_{,,}$, dessen erster Hauptbrennpunkt mit dem zweiten des ersten Systems zusammenfällt, was der Bedingung $D_, + D_{,,} - \delta_, D_, D_{,,} = 0$ entspricht, gilt wiederum:

$$l_{,,,} = -\frac{\varphi_, \varphi_{,,}}{l_{,,}}, \qquad \frac{\beta}{\beta^*} = \frac{\varphi_,}{l_{,,}} = -\frac{l_{,,,}}{\varphi_{,,}}$$

woraus sich für das zusammengesetzte System ergiebt:

$$l_{,,,} = l_, \frac{\varphi_, \varphi_{,,}}{f_, f_{,,}}, \qquad \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{\varphi_,}{f_{,,}}.$$

Während nun die letzte dieser Formeln eine von den Conjugatbrennweiten ganz unabhängige Relation zwischen der Grösse des Bildes und derjenigen des Gegenstandes giebt, so bezieht sich die Formel für die conjugirten Brennweiten auf zwei im afocalen Systeme conjugirte Punkte, welche mit dem ersten Hauptbrennpunkte des ersten und dem zweiten Hauptbrennpunkte des zweiten Systems identisch sind. Wenn wir aber die Abstände von Gegenstand und Bild von zwei anderen conjugirten Punkten rechnen wollen, deren Abstände von jenen $m_,$ und $m_{,,,}$ sein mögen, so haben wir:

$$m_{,,,} = m_, \cdot \frac{\varphi_, \varphi_{,,}}{f_, f_{,,}}$$

und folglich:

$$l_{,,,} - m_{,,,} = (l_, - m_,) \frac{\varphi_, \varphi_{,,}}{f_, f_{,,}},$$

d. h. die Relationen zwischen den conjugirten Brennweiten sind davon unabhängig, auf welche conjugirten Punkte die Abstände von Gegenstand und Bild bezogen werden. Für die Dioptrierechnung erhalten wir also folgende einfache Formeln für ein afocales System:

$$B = k^2 A, \qquad \beta = \frac{\alpha}{k}, \qquad k = -\frac{D_{,,}}{D_,},$$

wobei die reducirten Convergenzen sich auf beliebige conjugirte Punkte beziehen. Der Factor $k$, welchen wir Vergrösserungscoefficient nennen, da er in den als Fernröhren bekannten afocalen Systemen das Maass der Vergrösserung angiebt, ist also zusammen mit den Brechungindices des ersten und letzten Mediums und den Oertern von zwei beliebigen conjugirten Punkten ausreichend, um das System zu kennzeichnen, und die absolute Grösse von $D_,$ und $D_{,,}$ ist vollkommen gleichgültig. Wenn wir die Oerter derjenigen conjugirten Punkte, von welchen aus wir die bezüglichen Abstände rechnen wollen, mit $K'_{12}$ bezw. $K''_{12}$ bezeichnen, so dass diese Werthe die reducirten Abstände der betreffenden Punkte von dem ersten Hauptpunkte des ersten bezw. von dem zweiten Hauptpunkte des zweiten einfachen Systems darstellen, so haben wir einfach:

$$K'_{12} = -\frac{1}{D'} + \varkappa, \qquad K''_{12} = \frac{1}{D''} + \frac{\varkappa}{k^2},$$

in welchen Ausdrücken $\varkappa$ eine beliebige Grösse darstellt.

Wenn $k = 1$ ist, werden die Formeln mit denen identisch, die für gewöhnliche Systeme gelten, wenn in ihnen $D = 0$ gesetzt wird. In diesen Fällen kann ein jeder Punkt als Hauptpunkt dienen, und, wenn noch dazu $n_{,,} = n_,$ ist, so ist der gegenseitige Abstand von Object und Bild immer dem Hauptpunktsinterstitium gleich. Ein solches afocales System bietet z. B. eine planparallele Glasplatte dar oder mein aus drei Linsen bestehendes Optometer, wenn es für Emmetropie eingestellt ist. Ein solches entsteht auch, wenn man zwei ähnliche afocale Systeme symmetrisch zusammensetzt, z. B. durch Zusammensetzung von zwei ähnlichen für unendlichen Abstand und emmetropische Augen eingestellten Fernröhren zu einem symmetrischen Systeme.

Ebene Flächen stellen immer afocale Systeme dar, in welchen der Incidenzpunkt sich selbst conjugirt ist, aber nur bei centraler Incidenz und für den auf der Brechungsebene senkrechten Hauptmeridian, bei schiefer Incidenz ist er Hauptpunkt. Wenn wir uns die ebene Fläche als durch Streckung einer krummen vorstellen, so finden wir, dass bei Abnahme der Krümmung in den beiden genannten Fällen nur der Brennpunkt, für den mit der Brechungsebene zusammenfallenden Hauptmeridian aber auch der Hauptpunkt in die Ferne rückt. Dies giebt also ein Beispiel dafür ab, dass eine einzige Fläche in gewisser Hinsicht ein afocales System ohne Hauptpunkte bilden kann. Hier ist $k = \frac{\cos i_{,}}{\cos i_{,,}}$, und wir finden demnach für die Brechung in einer ebenen Trennungsfläche:

$$B' = A' \frac{\cos^2 i_{,}}{\cos^2 i_{,,}}, \qquad \beta' = \alpha' \frac{\cos i_{,,}}{\cos i_{,}}, \qquad B'' = A'', \qquad \beta'' = \alpha''.$$

Selbstverständlich ist, wenn Spiegelung anstatt Brechung stattfindet, $n_{,,} = -n_{,}$ sowie $i_{,,} = -i_{,}$ und $\cos i_{,,} = \cos i_{,}$ zu setzen, was auch bei sphärischen und astigmatischen Flächen gilt. Bei Spiegelung unter schiefer Incidenz in einer ebenen Fläche ist folglich $k = 1$ und der Incidenzpunkt wieder Hauptpunkt.

Wenn bei der Zusammensetzung von drei oder mehr optischen Systemen das erste und zweite zusammen ein afocales System bildet, so könnte man wohl bisweilen durch Fortschreiten in entgegengesetzter Richtung die Schwierigkeiten überwinden, aber es kann geschehen, dass man auch hierbei auf ein afocales System stösst. Es ist also nöthig, die Regeln für die Zusammensetzung von afocalen Systemen nicht nur mit einander, sondern auch mit gewöhnlichen kennen zu lernen. Wir gehen von unserer Formel $D_{12} + D_{,,,} - \delta_{12} D_{12} D_{,,,} = D_{13}$ aus und ersetzen, da $D_{12} = 0$. $\delta_{12}$ aber unendlich gross ist, $\delta_{12} D_{12}$ durch das äquivalente $\delta_{,} D_{,} + \delta_{,,} D_{12}$. Falls nun das dritte System nicht afocal ist, mithin $\delta_{,,}$ einen endlichen Werth hat, ist $\delta_{,,} D_{12} = 0$, und wir finden: $D_{13} = D_{,,,} - \delta_{,} D_{,} D_{,,,}$. Die Bedingung dafür, dass $D_{12}$ ein afocales System ist, nämlich $\delta_{,} = \frac{D_{,} + D_{,,}}{D_{,} D_{,,}}$ giebt uns:

$$D_{13} = -\frac{D_{,} D_{,,,}}{D_{,,}} = \frac{D_{,,,}}{k},$$

und wir finden auf ähnliche Weise für den Ort des zweiten Hauptpunktes:

$$H''_{13} = -\frac{\delta_{12} D_{12}}{D_{13}} = -\frac{\delta_{,} D'}{D_{13}} = \frac{D_{,} + D_{,,}}{D_{,} D_{,,,}} = \frac{1-k}{D_{,,,}}.$$

Diese beiden Werthe sind also ganz unabhängig vom Abstande zwischen dem afocalen und dem dritten einfachen Systeme. Nicht so der Ort des ersten Hauptpunktes. Bei seiner Herleitung könnten wir auf ähnliche Weise verfahren wie oben, aber die Discussion der unter der Form $\frac{0}{0}$ auftretenden Werthe ist bei dieser Rechnung umständlicher, weshalb sich für die Wiedergabe hier folgende Rechnung besser eignet. Vom afocalen Systeme brauchen wir ausser dem Vergrösserungscoëfficienten nur die Oerter von zwei beliebigen conjugirten Punkten zu kennen. Die reducirte Distanz $\Delta$ wird zwischen dem zweiten dieser Punkte und dem ersten Hauptpunkte des dritten Systems gerechnet, und wir suchen den reducirten Abstand $H_{13}$ des ersten Hauptpunktes des Gesammtsystems von dem ersten der genannten Punkte. Die Gleichung für conjugirte Punkte im afocalen, bezw. im dritten einfachen System:

$$B_{12} = k^2 A_{12} \qquad B_{,,,} = A_{,,,} + D_{,,,}$$

geben unter Berücksichtigung, dass $\frac{1}{B_{12}} = \frac{1}{A_{,,,}} + \Delta$ ist, nach Einsetzung von $\frac{D_{,,,}}{1-k}$ und $\frac{1}{H^*_{13}}$ an die Stelle von $B_{,,,}$ und $A_{12}$ folgenden Werth:

$$H^*_{13} = \frac{k(1-k)}{D_{,,,}} + k^2 \Delta.$$

Noch viel einfacher gestaltet sich die Zusammensetzung von zwei afocalen Systemen. Wenn wir die bezüglichen Vergrösserungscoëfficienten mit $k_{,}$, $k_{,,}$ und $k_{12}$ und den reducirten Abstand zwischen dem zweiten von zwei beliebigen conjugirten Punkten des ersten und den ersten von zwei ebensolchen Punkten des zweiten Systems mit $\varDelta$ bezeichnen, so suchen wir zuerst den im Gesammtsystem dem ersten bekannten Punkte des ersten Systems conjugirten Punkt, indem wir:

$$K'_{12} = 0 \quad \text{und} \quad K''_{12} = -\frac{\varDelta}{k_{,,}^2}$$

setzen, wonach wir für die bezüglichen Systeme schreiben:

$$B_{,} = k_{,}^2 A_{,} \qquad \beta_{,} = \frac{\alpha_{,}}{k_{,}} \qquad B_{,,} = k_{,,}^2 A_{,,} \qquad \beta_{,,} = \frac{\alpha_{,,}}{k_{,,}}.$$

Da nun $B_{,} = A_{,,}$ und $\beta_{,} = \alpha_{,,}$ ist, so ergiebt sich der Vergrösserungscoëfficient des zusammengesetzten Systems einfach als das Product derjenigen der beiden primären afocalen Systeme:

$$k_{12} = k_{,} k_{,,}.$$

---

Wenn ich, um bessere Uebersichtlichkeit zu gewinnen, die oben gegebene Darstellung in Kürze zusammenfassen darf, so will ich zuerst daran erinnern, dass ich, von der gewöhnlichen Definition der Dioptrie als der Brechkraft einer in Luft befindlichen Linse von 1 Meter Brennweite ausgehend, auf Grund der Forderung, dass nur unter einander commensurable Grössen Gegenstand einer Addition sein können, die Identität dieser Definition mit der folgenden bewiesen habe:

Die Dioptrie ist die Einheit des reciproken Werthes einer durch Division mit dem betreffen- Brechungsindex reducirten, in Meter gemessenen Haupt- oder Conjugatbrennweite.

Weiter haben wir gefunden, dass die beiden Gesetze

$$B = A + D \qquad \beta B = \alpha A$$

für die Lage und Grösse des Bildes allgemeingiltig sind, die Systeme mögen einfach oder zusammengesetzt sein, die Brechung oder Spiegelung in sphärischen oder astigmatischen Flächen stattfinden, bei rechtwinkeliger oder schiefer Incidenz, sobald nur immer ein Hauptmeridian mit der Brechungsebene zusammenfällt, und $D$ von Null verschieden ist.

In den afocalen Systemen aber, welche durch die Gleichung $D = 0$ charakterisirt sind, erfolgt die Abbildung nach den Gesetzen:

$$B = k^2 A \qquad \beta = \frac{\alpha}{k}.$$

Für eine einfache brechende Fläche ist bei centraler Incidenz:

$$D = \frac{n_{,,} - n_{,}}{R}$$

und bei schiefer Incidenz in dem auf der Brechungsebene senkrechten Hauptmeridiane:

$$D = \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R_{,,}},$$

wobei der Incidenzpunkt Hauptpunkt ist. In dem mit der Brechungsebene zusammenfallenden Hauptmeridiane hat sich ergeben:

$$D = \frac{n_{,,} \cos i_{,,} - n_{,} \cos i_{,}}{R_{,} \cos i_{,,} \cos i_{,}}$$

und für die reducirten Abstände der Hauptpunkte vom Incidenzpunkt:

$$H' = \frac{1}{D} \cdot \frac{\cos i_{,,} - \cos i_{,}}{\cos i_{,,}} \qquad H'' = \frac{1}{D} \cdot \frac{\cos i_{,,} - \cos i_{,}}{\cos i_{,}}.$$

Eine ebene Fläche bildet ein afocales System, in welchem der Incidenzpunkt sich selbst conjugirt, und in welchem bei centraler Incidenz, sowie bei schiefer Incidenz in dem auf der Brechungsebene senkrechten Hauptmeridian, $k = 1$ ist, während für den mit der Brechungsebene zusammenfallenden Hauptmeridian der Vergrösserungscoëfficient folgenden Werth hat:

$$k = \frac{\cos i_{,}}{\cos i_{,,}}.$$

Bei der Zusammensetzung von optischen Systemen gelten unter den oben für die allgemeinen Abbildungsgesetze angeführten Bedingungen folgende Formeln:

$$D_{12} = D_{,} + D_{,,} - \delta_{,} D_{,} D_{,,} \qquad H'_{12} = \frac{\delta_{,} D_{,,}}{D_{12}}$$

$$H''_{12} = -\frac{\delta_{,} D_{,}}{D_{12}}.$$

Wenn hierbei $D_{12} = 0$ gefunden wird, ist das zusammengesetzte System afocal und der Vergrösserungscoëfficient:

$$k = -\frac{D_{,,}}{D_{,}}.$$

In solchen Systemen werden die den Dioptrienwerthen $A$ und $B$ entsprechenden Abstände von zwei beliebigen conjugirten Punkten gerechnet, deren Oerter durch die Relationen:

$$K'_{12} = -\frac{1}{D_{1}} + \varkappa \qquad \text{und} \qquad K''_{12} = \frac{1}{D_{,,}} + \frac{\varkappa}{k^2}$$

gegeben sind, in welchen $K'_{12}$ und $K''_{12}$ die reducirten Abstände von den bezüglichen Hauptpunkten der einfachen Systeme und $\varkappa$ eine beliebige Grösse darstellen.

Für die Zusammensetung eines afocalen Systems $D_{12} = 0$, dessen Vergrösserungscoëfficient $k$ ist, mit einem anderen $D_{,,,}$ gelten folgende Formeln:

$$D_{13} = \frac{D_{,,,}}{k} \qquad H^{*}_{13} = \frac{k(1-k)}{D_{,,,}} + k^2 \varDelta \qquad H''_{13} = \frac{1-k}{D_{,,,}}.$$

Wenn zwei afocale Systeme zusammengesetzt werden, so ist:

$$k_{12} = k_{,} k_{,,}$$

und die den Dioptrienwerthen $A$ und $B$ entsprechenden Abstände sind von den durch die Relationen:

$$K'_{12} = 0 \qquad K''_{12} = -\frac{\varDelta}{k_{,,}^2}$$

gegebenen oder von zwei anderen beliebigen conjugirten Punkten zu rechnen.

Wenn in einem Systeme eine oder mehrere Flächen durch Spiegelung wirken anstatt durch Brechung, so behalten sämmtliche Gesetze ihre Giltigkeit bei, und man hat sämmtliche Krümmungshalbmesser und Abstände in der Richtung des einfallenden Lichtes positiv zu rechnen, aber die Brechungsindices derjenigen Medien, welche das Licht nach einer ungeraden Anzahl von Reflexionen passirt, negativ zu setzen.

---

Diese einfache Darstellung der Dioptrik ist nur durch die Dioptrierechnung ermöglicht worden und erfordert, wie wir gesehen haben, nicht die geringste Aenderung, sondern nur eine Erklärung der gebräuchlichen Definition der Dioptrie. Allerdings wird der Begriff des reducirten Abstandes, bezw. der reducirten Convergenz angewendet, aber so äusserst einfach, wie dieser Begriff ist, wird wohl seine Anwendung kaum als eine Belästigung empfunden werden können, oder diese Belästigung wird wohl jedenfalls gegenüber der gewonnenen Vereinfachung nicht in Betracht kommen. In der oben gegebenen Darstellung ist der stricte Beweis sämmtlicher Sätze nur für diejenigen erbracht, welchen die bisher bewiesenen Sätze der Dioptrik geläufig sind. In der That war es unmöglich, die Beweise so vollständig zu geben, dass jeder ohne Vorkenntnisse der Darstellung hätte folgen können, oder der kleine Aufsatz hätte auf ein beträchtliches Volumen anschwellen müssen.

Der eigentliche Gewinn, den diese Vereinfachung der Ophthalmologie bringt, ist wohl die grössere Leichtigkeit, mit den Brechungsvorgängen im Auge zu rechnen, und die Klärung der Begriffe. Dass nämlich eine Klärung der Begriffe sehr von nöthen war, das ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, wie die „Glaskörperdioptrieen“ in der Litteratur gespukt haben, wie es ernstlich vorgeschlagen worden ist, den ophthalmometrisch gefundenen Hornhautastigmatismus unter Zugrundelegung der hinteren Brennweite in Dioptrieen zu rechnen, wie lange es gedauert hat, bis man den Unterschied zwischen der durch Extraction der Linse erhaltenen constanten Brechkraftsverminderung des optischen Systems und der Refractionsverminderung des Auges verstanden hat, und endlich wie sich Nagel selbst zu einer Anwendung der Dioptrierechnung auf das Auge gestellt hat. Er sagt nämlich im betreffenden Kapitel des Graefe-Saemisch'schen Handbuchs S. 260, nachdem er den reciproken Werth der Brennweite einer Linse als ihre Brechkraft bezeichnet hat: „Für eine einfache brechende Fläche giebt es keinen so einfachen Ausdruck, den man als ihre Brechkraft bezeichnen könnte“ und später: „Spricht man also von der Brechkraft des Auges in dem Sinne wie von der Brechkraft einer Linse, so kann das nur die Bedeutung eines Vergleiches haben,“ und dennoch hat er, wie aus den folgenden Zeilen ersichtlich ist, eingesehen, dass diese Brechkraft derjenigen einer Linse gleich kommt, deren Brennweite der vorderen Brennweite des Auges gleich ist.