9.

Sur une question de probabilité relative aux corrections des hauteurs barométriques.

(Par Mr. *C. Ramus*, prof. à Copenhague.)

Dans un baromètre à syphon, la température étant $=0$, soit la section intérieure du tube perpendiculaire à l'axe $=1$, la longueur entière de la colonne du mercure $=\lambda$, et celle du mercure soutenu par la pression atmosphérique $=q$, donc celle, qui est en équilibre de lui même, $\lambda - q = a$. Or, la pression atmosphérique restant la même, si la température change et devient $=\theta$, il arrive 1° que les deux longueurs q et $\lambda - q$ en se dilatant deviennent

$$1. \quad q(1+m\theta), \qquad (\lambda-q)(1+m\theta),$$

où $m = 0{,}0001802$; 2° que la dilatation du verre fait augmenter la section intérieure du tube, qui devient $(1+n\theta)^2$, où $n = 0{,}0000086$, ce qui n'altère en rien la première des deux quantités (1.) ou la hauteur barométrique. Ainsi le volume du mercure soutenu par la pression atmosphérique s'accroît de $q(1+m\theta)[(1+n\theta)^2-1]$ aux dépens de celui, qui est en équilibre de lui même, ensorte que la deuxième quantité (1.) devienne d'abord

$$(\lambda-q)(1+m\theta)-q(1+m\theta)[(1+n\theta)^2-1] = [\lambda-q(1+n\theta)^2](1+m\theta),$$

puis, en vertu de la dilatation du verre,

$$2. \quad \left[\frac{\lambda}{(1+n\theta)^2}-q\right](1+m\theta) = b.$$

La hauteur barométrique vraie, ou celle qui répond à la temperature $=0$, étant $q=\lambda-a$, la hauteur observée, répondant à la temperature θ, est $Q=\lambda-b$, qui se trouve dès que b est immédiatement observé au moyen d'une échelle appliquée à la branche ouverte. L'expression (2.) donne

$$3. \quad Q = q(1+m\theta) - \frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\,\theta\lambda,$$

d'où l'on tire la formule de correction, qui donne q exprimé en Q, θ, λ, m, n.

Quant à la quantité constante λ, qui depend de la masse du mercure contenu dans l'instrument, il est évidemment impossible d'en assigner la valeur de manière à faire disparaître l'influence de la chaleur. En effet, on n'en aurait la compensation exacte et générale, à moins que $Q = q$ ou en vertu de (3.)

$$\lambda = \frac{m(1+n\theta)^2}{m-n(2+n\theta)} q,$$

ce qui est absurde, θ et q étant variables, λ constant. Mais, la masse du mercure étant arbitraire, on peut demander, quelle est la valeur de λ la plus avantageuse. Comme dans aucune observation isolée on ne peut se dispenser de faire la correction relative à la chaleur, la question, pour qu'elle ait du sens, doit être exprimée comme suit: quelle est la valeur de λ propre à faire différer entre eux le moins possible les résultats moyens d'une très grande série d'hauteurs barométriques observées de celle des hauteurs y corréspondantes, réduites à la température O?

Regardons q et θ comme indépendants l'un de l'autre, ensorte que des valeurs quelconques de q et de θ aient des probabilités, qui soient des fonctions respectives de q et de θ. Ces fonctions étant désignées par $f(q)\,dq$ et $\varphi(\theta)\,d\theta$, la somme de toutes les différences des hauteurs barométriques observées et réduites dans un nombre infini des observations sera

$$\iint (Q-q) f(q) \varphi(\theta)\, dq\, d\theta,$$

ou en vertu de (3.)

$$\iint \left[qm\theta - \frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\theta\lambda \right] f(q)\varphi(\theta)\, dq\, d\theta,$$

l'intégrale relative à q et à θ étant prise entre des limites constantes, savoir les valeurs extrêmes de ces quantités dans le lieu d'observation, ou même $q=0$, $q=\infty$, $\theta=-\infty$, $\theta=+\infty$, parceque $f(q)$ et $\varphi(\theta)$ s'évanouissent hors des valeurs extrêmes de q et θ. Ainsi on aura une expression de la forme $A-B\lambda$ qui, suivant la condition demandée devra être $=0$, partant $\lambda = \frac{A}{B}$, c'est à dire

$$4. \quad \lambda = \frac{m\int_0^\infty q f(q)\, dq . \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \varphi(\theta)\, d\theta}{\int_0^\infty f(q)\, dq . \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2} \theta\varphi(\theta)\, d\theta}.$$

Les fonctions f et φ ne nous sont pas données; mais on peut connaître la hauteur barométrique moyenne $= M$ et la température moyenne $= \Theta$, ce qui rend possible la détermination approximative de la valeur λ. En effet on a

$$M = \frac{\int_0^\infty q f(q)\,dq}{\int_0^\infty f(q)\,dq}, \qquad \Theta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta\varphi(\theta)\,d\theta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\,d\theta},$$

et d'ailleurs $\int_0^\infty f(q)\,dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta)\,d\theta = 1$; partant

$$5. \quad \lambda = \frac{m\Theta M}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m-n(2+n\theta)}{(1+n\theta)^2}\theta\varphi(\theta)\,d\theta}.$$

Le dénominateur de cette expression, développé suivant des puissances ascendantes de n, devient

$$(m-2n)\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\varphi(\theta)\,d\theta-(2m-3n)n\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta$$

$$=(m-2n)\Theta\left[1-\frac{(2m-3n)n}{m-2n}\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right],$$

en négligeant les termes de l'ordre mn^2 et n^3. Ceci étant substitué dans (5.) donne

$$6. \quad \lambda = \frac{m}{m-2n}\left[1+\frac{(2m-3n)n}{m-2n}\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right]M$$

$$=1{,}10552147\left(1+0{,}00001765\cdot\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta}\right)M.$$

Si T est la valeur numérique de la plus grande des températures qui puissent réellement exister dans une série d'observations ordinaires, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta < T\int_{-\infty}^{+\infty}\theta\varphi(\theta)\,d\theta, \text{ partant } \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\theta^2\varphi(\theta)\,d\theta}{\Theta} > 0 \text{ et } < T.$$

Par exemple, en supposant $T=20$, on trouve

$$\lambda > 1{,}10552\,M \text{ et } < 1{,}10591\,M,$$

et en faisant $M=336$,

$$\lambda > 371{,}45472 \text{ et } < 371{,}58576.$$

Lorsque toutes les observations ont été faites sous des circonstances particuliéres, telles que la température soit constamment comprise entre deux limites fixes, dont l'inférieur $=t$, le supérieur $=T$, et que toutes les valeurs de θ dans cet intervalle soient également probables, on peut déterminer la valeur exacte de λ. Car dans ce cas on a $\varPhi(\theta) = \frac{1}{T-t}$, et les limites de l'intégration $-\infty$, $+\infty$, doivent être changés en t et T, ce qui donne $\Theta = \frac{T+t}{2}$ et

$$\lambda = \frac{\frac{1}{2}mn^2(T^2-t^2)M}{m\log\frac{1+nT}{1+nt} - \frac{(m-n)n(T-t)}{(1+nT)(1+nt)} - n^2(T-t)}.$$

Par un procédé semblable à celui, employé par Laplace à la détermination de la probabilité des erreurs des résultats moyens, on trouve

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-z^2}\,dz$$

comme exprimant la probabilité que dans un grand nombre $= s$ d'observations la différence des résultats moyens des hauteurs barométriques observées et réduites soit comprise dans l'intervalle

$$7. \quad (k+h)u \pm 2(k+h)z\sqrt{\left(\frac{v-u^2}{s}\right)},$$

λ ayant une valeur quelconque, $-h$ et k étant les valeurs extrèmes, l'une négative, l'autre positive, de $Q-q$, et les quantités u et v étant déterminées comme suit:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \int_{-h}^{k} x\psi(x)\,dx, \qquad v = \int_{-h}^{k} x^2\psi(x)\,dx, \\ \psi(x) &= \frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} f\left[\frac{x}{m\theta} + \frac{m-n(2+n\theta)}{m(1+n\theta)^2}\lambda\right].\frac{\varphi(\theta)}{\theta}\,d\theta \end{aligned}\right.$$

ensorte que $\psi(x)dx$ est la probabilité, que dans une observation quelconque $Q-q$ ait la valeur x. Lorsque s augmente à l'infini, la différence des deux résultats moyens, en convergeant, s'approche de $(k+h)u$. C'est donc la quantité qui, étant retranchée du résultat moyen des hauteurs barométriques observées donne celui des hauteurs réduites, lorsque le nombre des observations est infiniment grand. Donc, si l'on a une très grande série d'hauteurs barométriques observées et réduites, corréspondantes les unes aux autres, on trouve immédiatement $(k+h)u$, ce qui fait connaître u, et de là on trouve une limite supérieure de v, parceque $v > \xi u'$, ξ désignant la valeur numérique la plus grande de x, et u' la valeur numérique de u.

Si λ a la valeur (5.) ou (6.), l'intervalle (7.) converge nécessairement vers 0 lorsque s augmente à l'infini, d'où il suit $(k+h)\,u = 0$, partant $u=0$. Dans ce cas la limite supérieure de v ne peut plus être $\xi u'$ qui est $=0$; mais on a généralement $v<\xi^2\int_{-h}^{k}\psi(x)\,dx$ ou $v<\xi^2$. Ainsi, lorsque λ est égal à la valeur (5.) ou (6.), l'intervalle (7.) peut s'exprimer au moyen d'une petite extension comme suit:

$$\pm\frac{2(k+h)\xi z}{\sqrt{s}}.$$

Or suivant (3.) et (6.) on a à peu près $x=m(q-M)\theta+2mn\lambda\theta^2$, ce qui pour $\lambda=371{,}5$ donne $x=0{,}0001802\,(q-M)\theta+0{,}000001151\,44\,\theta^2$, d'où, en faisant $q-M=\pm 12$, $\theta=25$, on trouve $k=0{,}0547796$ et $h=0{,}0533404$, donc $2(k+h)\xi=0{,}0118455$. Soit par exemple $s=100$, $z=3$. On trouve la probabilité extrêmement petite

$$1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^3 e^{-z^2}\,dz = 0{,}0000221$$

pour que la différence des résultats moyens de 100 hauteurs barométriques observées et réduites tombe hors de l'intervalle

$$\pm\,0{,}00355.$$

Copenhague le 18 septembre 1840.