Zur Lehre von den Bewegungen des Auges.

Von

Dr. Georg Meissner.

(Mit 3 Figuren.)

Bei dem grossen Interesse, welches seit langer Zeit von so vielen Seiten den Bewegungen des Auges, der Physiologie der Augenmuskeln zugewendet wurde, ist es eine sehr auffallende Erscheinung, dass bis vor wenig Jahren alle Untersuchungen auf diesem Gebiete sich nur auf die Beantwortung von Fragen gerichtet haben, welche im Vergleich zu gewissen anderen nicht nur fernliegend und minder wichtig genannt werden müssen, sondern auch, was von übleren Folgen gewesen ist, zum Theil secundäre Fragen waren, solche, deren richtige Beantwortung erst nach der Lösung anderer Aufgaben möglich ist, und deren unrichtige Beantwortung zu manchfachen und sehr eingewurzelten Irrthümern geführt hat. Die Frage, von welcher jede Untersuchung über die Physiologie der Augenmuskeln unbedingt hätte ausgehen müssen, und mit deren Beantwortung zugleich eine grosse Zahl von Nebenfragen unmittelbar ihre Erledigung gefunden haben würden, blieb so weit unberücksichtigt, dass sie bis vor nicht gar langer Zeit gar nicht ein Mal aufgeworfen wurde. Anstatt die Bewegungen des Auges zuerst unter den einfachsten Umständen zu betrachten, anstatt die einfachsten, nächstliegenden Versuche auszubeuten, richtete man das Augenmerk fast lediglich auf die verwickelteren Verhältnisse, welche bei gleichzeitigen Bewegungen der Augen und des Kopfes eintreten. Von den bekannten Versuchen Hueck's kann man, so anregend sie gewesen sind, nicht anders sagen, als, dass sie einen verwirrenden Einfluss ausgeübt haben, dass nicht nur ihre Ergebnisse Irrthümer in die Physiologie gebracht, sondern auch die ihnen zum Grunde liegende Fragestellung und Idee lange Zeit verhindert haben, das eigentliche Ziel und den richtigen Weg dahin zu sehen. Eine allgemein verbreitete unglückliche Tradition trat einer unbefangenen Betrachtung der Augenmuskeln in den Weg, und sicherte den beiden sogenannten Musculis obliquis ihre unberechtigte Auszeichnung und einen gewissen Vorrang gleichsam vor den vier anderen Muskeln, welche mit vollem Rechte sowohl auf dieselbe Benennung, als auf dieselbe Berücksichtigung Anspruch machen konnten. Aber während die Wirkungen dieser vier Muskeln ohne Weiteres durchaus klar und daher weniger interessant zu sein schienen, während sie auch wohl schon allein dem Bedürfniss der gewöhnlichen Bewegungen des Auges vollständig zu entsprechen schienen, wendeten sich alle Versuche und Reflexionen hauptsächlich der Wirkung der Obliqui zu, deren besonderer Verlauf und resp. Ursprung, so wie gewissermassen Ueberzähligkeit durchaus eine ganz besondere Function, ja selbst die ihnen zugesprochene exceptionelle Stellung als unwillkührliche Muskeln zu postuliren schien. Nach den Ergebnissen theils anatomischer Untersuchungen, theils des Experimentes und der chirurgischen Erfahrungen wurde jedem Muskel seine bestimmte Funktion vindicirt, wobei die Urtheile gar oft seltsam auseinandergingen, und man vergass dabei durchaus zu untersuchen, ob denn jemals ein Muskel für sich allein am Auge thätig ist, ob die Bewegungen, welche man für die einfachsten, für die Hauptbewegungen halten wollte, überhaupt nur vorkommen; denn war das nicht oder nur höchst selten der Fall, so hätte das Suchen nach einer dem einzelnen Muskel zu ertheilenden Function nur den Zweck haben können, durch Auffindung seiner ihm allein zugehörigen Drehungsaxe seinen Antheil bei diesen oder jenen Bewegungen zu ermitteln, und zu dem Zweck waren die Experimente, wie sie angestellt wurden, nicht nur Umwege, sondern in den meisten Fällen Irrwege. Man vergass, dass, wie Gräfe*) sagt, was der Muskellagerung nach möglich ist, nicht factisch vorzukommen braucht. — Donders**) ist es, welcher zuerst sich die Frage stellte und ihre Beantwortung versuchte: Welche Bewegungen werden überhaupt dem Auge ertheilt; „denn erst wenn die Bewegung gegeben ist, lässt sich nach den bewegenden Kräften fragen".

Um diese Bewegungen erforschen zu können, ist im Allgemeinen nur nothwendig, ausser der jeweiligen Richtung der Sehaxe oder der Lage des Mittelpunktes der Netzhaut noch die gleichzeitige Lage irgend eines anderen Punktes des Auges zu kennen. Welcher Punkt zu dieser Beobachtung benutzt wird, ob ein Punkt der Iris, der Bulbusoberfläche, der Retina, ist an sich ganz gleichgültig; es kommt nur darauf an, einen solchen Punkt zu wählen und diejenige Art der Versuche zu benutzen, welche die grösstmögliche Genauigkeit zulassen. In dieser Beziehung verdienen die Versuche, welche einen Punkt der Netzhaut benutzen, unbedingt den Vorzug, sie allein lassen wirkliche Messungen zu, bei ihnen ist das Object der Beobachtung der Beobachter selbst. Aber auch hier giebt es wiederum verschiedene Versuchsweisen. Donders hat, angeregt durch eine Aeusserung Ruete's, die Nachbilder benutzt, um über die jeweilige Lage der im Nachbilde afficirten Netzhaut-

*) Beiträge zur Physiologie und Pathologie der schiefen Augenmuskeln. Archiv für Ophthalmologie I.

**) Beitrag zur Lehre von den Bewegungen des menschlichen Auges. Holländische Beiträge I.

punkte Aufschluss zu erhalten. Ob derartige Versuche den Grad von allerdings auch nur approximativer Genauigkeit bei den Messungen zulassen, welcher bei einer anderen, sogleich zu nennenden Versuchsart erreicht werden kann, bin ich nicht im Stande zu beurtheilen, weil ich durch zu kurzes Verweilen der Nachbilder von jenen Versuchen so gut wie ausgeschlossen bin. Die vor sieben Jahren erschienene Abhandlung von Donders enthält nur den Anfang zur Erledigung der aufgeworfenen Frage, und von den beiden Theilen, in welche dieselbe zerlegt wurde, ist der wichtigere und eigentlich fundamentale Theil noch übrig. Die Versuche, auf welche ich eben hindeutete, sind diejenigen, welche ich in meinen „Beiträgen zur Physiologie des Sehorgans (Leipzig. 1854.)" mitgetheilt habe, deren Ergebnisse dort zunächst und hauptsächlich nur zum Zweck der Ermittelung des Horopters angewendet wurden; sie bestehen in der Beobachtung der relativen Lagen der Doppelbilder, und ich habe dort schon angedeutet, dass und in welcher Weise sich diese Versuche auch für die Lehre von den Bewegungen des Auges verwerthen lassen.*) So fern ich versucht habe, das dort Angedeutete weiter auszuführen und den Beweis zu liefern für einige ausgesprochne Sätze, bildet die folgende Untersuchung eine Fortsetzung jener Schrift, und hinsichtlich der Ausführung der Versuche und der durch gewisse Rechnungen erst zu verwerthenden nächsten Ergebnisse derselben verweise ich auf die früher gege-

*) Ich muss hier bemerken, dass mir die oben citirte Abhandlung von Donders vor der Veröffentlichung meiner obengenannten Untersuchungen leider unbekannt war, und aus diesem Grunde von meiner Seite nicht der sonst naheliegende und nothwendige Anschluss an die Resultate, zu welchen Donders bereits gekommen war, versucht ist.

bene Auseinandersetzung. Ich habe die Versuche noch oftmals wiederholt und mit Hülfe eines besseren, genauere Messungen zulassenden Apparats (der übrigens der Art nach dem früher beschriebenen ganz gleich ist) die früheren Ergebnisse controlirt: letztere sind im Allgemeinen durchaus dieselben geblieben, und nur in Betreff der einzelnen numerischen Werthe, bei denen es jetzt nicht bloss auf relative Grössen ankommen durfte, werde ich zu einer Kritik am Schlusse Gelegenheit haben.

Die Frage, welche Bewegungen überhaupt dem Auge ertheilt werden, ist gleichbedeutend mit der Frage: Um welche Axen wird das Auge gedreht; und es ist im Folgenden der Versuch gemacht, neben der nothwendigen Erörterung gewisser die Physiologie des Sehorgans betreffender Momente, folgende Einzelfragen zu beantworten:

1) Ist es aus physiologischen Gründen möglich, dass das Auge um alle diejenigen Drehungsaxen wirklich gedreht werde, welche vermöge der Anordnung der Augenmuskeln, vermöge der rein mechanischen Verhältnisse möglich sind?

Aus der Entscheidung dieser Frage wird sich die zweite von selbst ergeben, nämlich:

2) Von welcher Art wird und muss die stattfindende Beschränkung der möglichen Drehungsaxen sein, und speciell, welche sind die Drehungsaxen, um die das Auge wirklich gedreht wird?

3) Welche Consequenzen ergeben sich aus dem Verhältniss der Lage dieser Drehungsaxen zu der Lage der Axen, um welche jeder einzelne Muskel, wenn er allein thätig wäre, das Auge drehen würde, in Bezug auf die Functionen der Augenmuskeln und auf die Art ihres Zusammenwirkens? — Diese letzte Frage wird hier jedoch nur ganz im Allgemeinen erörtert werden. —

§. 1.

Zur Beantwortung der ersten dieser drei Fragen ist zunächst nothwendig festzustellen, welche Drehungsaxen im Auge überhaupt vermöge der rein mechanischen Verhältnisse möglich sind, wobei die möglichst freie Disposition über das Gegebene, ohne besondere Rücksicht auf etwa in speciellen Fällen stattfindende Verhältnisse, vorausgesetzt werden darf.

Wir betrachten das Auge als eine um ihren festen Mittelpunkt drehbare Kugel. Die sechs Muskeln sind Zugkräfte, deren jede das Auge in einer bestimmten Richtung zu drehen strebt. Die Ebene, in welcher ein Muskel thätig ist, welche die Richtung seines Zuges enthält, ist bestimmt durch drei Punkte, durch den Ursprungspunkt, durch den Insertionspunkt*) des Muskels und durch den Drehpunkt, d. i. Mittelpunkt des Auges. Die Axe, um welche ein Muskel, wenn er allein thätig wäre, das Auge drehen würde, ist die auf der ebengenannten Drehungs- oder Muskelebene im Drehpunkte Senkrechte, oder der auf dieser Ebene senkrecht stehende Durchmesser des Auges. Um jeden Durchmesser einer freibeweglichen Kugel ist eine Drehung nach zwei einander gerade entgegengesetzten Richtungen möglich, und man pflegt eine jede dieser beiden Richtungen auf einen Halbmesser als Drehungsaxe zu beziehen, so zwar, dass diejenige Halbaxe des Durchmessers als Drehungsaxe betrachtet wird, um welche, vom Endpunkte der-

---

*) Der Ursprung und die Insertion der Augenmuskeln sind flächenartig, oder wenigstens linear ausgedehnt, und es ist daher, bei der approximativ parallelen Faserung der Muskeln, als Ursprungs- und Insertionspunkt der geometrische Mittelpunkt jener Linien zu betrachten. Vergl. hierüber A. Fick. Die Bewegungen des menschlichen Augapfels. Zeitschrift für rationelle Medicin. IV. 1854. p. 101. Beim Obliquus superior wird statt des Ursprungspunktes die Trochlea zu nehmen sein. —

selben aus gesehen, die Drehung in dem Sinne erfolgt, wie sich der Uhrzeiger dreht.*) Jeder Augenmuskel wird also um eine solche Halbaxe zu drehen streben. Da nun aber der eine der drei Punkte, durch welche die Muskelebene bestimmt wird, nicht unbeweglich ist, sondern seine Lage im Raume bei den Drehungen des Auges ändert, indem nämlich der Insertionspunkt eines Muskels mit dem Auge sich bewegt, und zwar keines Weges immer so, dass er innerhalb derselben durch Ursprungspunkt und Drehpunkt gehenden Ebene bleibt, so wird in den verschiedenen Lagen des Auges die Muskelebene eine verschiedene sein können (nicht in allen Lagen ist es nothwendig), und ebenso wird auch die Drehungs-Halbaxe des Muskels verschiedene Lagen haben können, je nach der augenblicklichen Lage des Auges. Es würde deshalb nothwendig sein, bei einer speciellen mechanischen Betrachtung zunächst eine bestimmte Stellung des Auges als Ausgangspunkt festzusetzen, eine Anfangsstellung, wie sie sich am Einfachsten in derjenigen darbieten würde, bei welcher alle Augenmuskeln im nicht contrahirten Zustande sich befinden. Eine solche Ruhelage genau zu ermitteln, würde einer besonderen Untersuchung bedürfen, und ich muss hier von vorn herein bemerken, dass dieselbe keineswegs für identisch zu halten ist mit der sogenannten Primärstellung des Auges; letztere ist ein Begriff, zu welchem bereits meine frühere Untersuchung über den Horopter führte, und dessen wir auch hier bald bedürfen werden, welcher aber nicht in unmittelbarem Zusammenhange mit der Mechanik der Augenmuskeln steht und auf dessen Definition und Verhältniss zu der Mechanik ich durchaus erst unten eingehen kann. Für die Erörterung

*) Diese Bezeichnungsweise wird im ganzen Verlauf des Folgenden beibehalten werden.

nun der hier zunächst interessirenden Verhältnisse ist es in der That nicht nothwendig, eine Untersuchung der Ruhelage des Auges vorzunehmen, wie sich sogleich herausstellen wird. Man pflegt gewöhnlich diejenige Stellung des Auges als Anfangsstellung zu betrachten, bei welcher die Sehaxe horizontal und rechtwinklig zur Frontalebene*) gerichtet ist. Wir können ohne Weiteres auch hier diese Augenstellung als Anfangsstellung wählen, zumal für diese die Lagen der Muskelebenen am Genauesten bekannt sind; und zwar verhalten dieselben sich in dieser Augenstellung so, dass es annähernd richtig ist, je zwei der Augenmuskeln gradezu als Antagonisten zu betrachten, wie es gewöhnlich geschieht und hier wenigstens die Betrachtung vereinfachen mag. Sollte der Antagonismus genau stattfinden, so müssten je zwei der Muskelebenen zusammenfallen, und je zwei Halbaxen in die Richtung eines Durchmessers fallen.

Befindet sich nun das Auge in der Ruhelage und ein Muskel ist im Begriff sich zu contrahiren, so ist die Kraft, mit welcher er am Auge zu wirken strebt, multiplicirt mit der Länge des Hebelarms, an welchem er wirksam zu denken ist, d. i. der Halbmesser des Auges (welcher also in jedem Falle und für jeden Muskel derselbe ist), das Drehungsmoment, und die Drehungs-Halbaxe des Muskels ist die Axe dieses Moments. Wenn wir nun vollkommen frei über sechs Drehungsmomente am Auge in seiner Ruhelage disponiren können, von denen nur je zwei in einer Ebene, diese aber in entgegengesetztem Sinne thätig sind, wenn wir dieselben in jeder möglichen Weise combiniren und gleichzeitig wirksam sein lassen können, und über die Stärke eines jeden Moments frei verfügen können (nur negative

*) Dieser Ausdruck ist den neuerlichst durch Henle in die Anatomie eingeführten Bezeichnungen entlehnt.

Werthe sind der Natur der Sache nach ausgeschlossen), so sind alle möglichen Fälle enthalten in acht Combinationen je dreier Momente, deren zugehörige Drehungsebenen nicht je zwei zusammenfallen. Indem wir, wie gewöhnlich, den Halbmesser des Auges als Einheit zum Grunde legen, denken wir die Grösse des Moments als Lineargrösse auf der Axe des Moments abgeschnitten; dann bedeutet die vorbehaltene freie Disposition über die Stärke der Momente, dass jedes derselben alle Werthe zwischen 0 und 1 haben kann. Die acht Combinationen nun der je drei gleichzeitig thätigen Momente entsprechen den acht Theilen, in welche die Kugel, das Auge, durch die Drehungshalbaxen der Muskeln zerlegt gedacht werden kann, die wir, obwohl sie ungleich sind, schlechtweg als Octanten bezeichnen können; und zwar so, dass in je einem Octanten die Axen aller derjenigen resultirenden Momente gelegen sind, welche durch je eine Art jener acht Combinationen der componirenden Momente entstehen können. Sind die drei componirenden Momente als Lineargrössen auf den drei ihnen zugehörigen Momentenaxen abgeschnitten, so ist die Axe des resultirenden Moments die Diagonale des Parallelepipeds resp. Parallelogramms, welches aus den combinirten Momentengrössen als Seiten gebildet wird, und die Länge dieser Diagonale ist die Lineargrösse des resultirenden Moments. Da nun, wie wir voraussetzten, über die Grössen der combinirten Momente frei verfügt werden kann, so kann die Axe des resultirenden Moments in dem Octanten, dem sie überhaupt angehört, jede beliebige durch den Mittelpunkt des Auges gehende Lage erhalten, und da dasselbe von jedem Octanten oder von jeder der acht Combinationen gilt, so kann die Axe des resultirenden Moments überhaupt jede beliebige durch den Mittelpunkt gehende Richtung haben, oder jeder Halbmesser des Auges kann Axe des resultirenden Moments sein. Die Ruhelage des Auges ist es, für welche zunächst dies allerdings nur gilt: wenn es, mit Berücksichtigung der schon oben erinnerten möglichen Lagenveränderungen der Momentenaxen bei Bewegungen des Auges, solche Augenstellungen gäbe, in denen zwei Momente nach Ebene und Richtung, in der sie thätig sind, zusammenfielen, dann würde in diesen Augenstellungen von Seiten der mechanischen Verhältnisse schon eine Beschränkung in der möglichen Zahl der Lagen der Axe des resultirenden Moments eintreten, sofern zwei der Ebene und Richtung nach zusammenfallende Momente gleich einem Momente von der Stärke der arithmetischen Summe derselben sind. Aber solche Fälle kommen nicht vor, es giebt keine Augenstellung, in welcher z. B. die Drehungshalbaxe des Obliquus superior mit der des Rectus inferior zusammenfiele, sondern in allen Augenstellungen wird es sechs differente Drehungshalbaxen der Muskeln geben,*) wenn auch ihre Lagen wechselnd sind; und so lange es sechs Drehungsmomente giebt, über die disponirt werden kann, so lange hat auch das eben Abgeleitete Geltung, dass nämlich die Axe des resultirenden Moments jeder beliebige Halbmesser des Auges sein kann, was also für jede Augenstellung als Ausgangspunkt von Drehungen gilt. Daher bedurfte es oben für diese ganz allgemeine Betrachtung gar nicht der genauen Feststellung der Ruhelage des Auges, die wir überhaupt nur, um irgend einen Ausgangspunkt zu haben, wählten. Wir werden nun im Folgenden nicht mit Drehungsmomenten, nicht mit Dre-

*) Es mag hier auch noch daran erinnert werden, dass auch in dem Falle eine der sechs Muskelaxen ausfallen würde, wenn die Augenstellung von der Art ist, dass die Richtung eines Muskelzuges nicht mehr den Bulbus tangirt, der Muskel also vom Auge ganz abgewickelt ist; indessen sind die Drehungen des Auges überhaupt nicht so ausgiebig, dass solche Augenstellungen vorkommen.

hungsbestreben und unendlich kleinen Drehungen zu thun haben, sondern mit endlichen Drehungen. Denken wir aber die endliche Drehung einer um ihren festen Mittelpunkt drehbaren Kugel aus lauter unendlich kleinen Drehungen zusammengesetzt, so erfolgt eine jede solche unendlich kleine Drehung um eine während des Zeitelements derselben feste Drehungsaxe, d. i. die augenblickliche Drehungsaxe. Diese augenblickliche Drehungsaxe ist für diejenige Lage, in welcher sich das Auge beim Beginn der unendlich kleinen Drehung befindet, die Axe des resultirenden Moments und zwar im Allgemeinen des aus den componirenden Momenten und aus der dem Auge bereits mitgetheilten Winkelgeschwindigkeit resultirenden Moments, von welcher letzteren wir jedoch wahrscheinlich practisch wenigstens, wenn auch theoretisch nicht ganz, abstrahiren können, weil angenommen werden darf, dass es in jedem Augenblicke des erneuten Muskelzuges bedarf, damit das Auge nicht zu Ruhe gelangt, oder gar in die Ruhelage zurücksinkt vermöge der Elasticität der am Auge befestigten Theile. Unter gewissen Voraussetzungen nun, welche wir später berühren wollen, kann die augenblickliche Drehungsaxe für die ganze Dauer einer endlichen Drehung eine und dieselbe bleiben, es kann in jedem Zeitelement die Drehung um dieselbe Axe erfolgen, d. h. es erfolgt die Drehung um eine im Raume und in der Kugel feste Drehungsaxe: wenn jene Voraussetzung, eine gewisse Bedingung, erfüllt ist, und es liegt vor der Hand gar kein Grund vor, dieses für das Auge von vorn herein in Abrede zu stellen, so kann also die Axe eines resultirenden Moments in irgend einer Stellung, z. B. in der Anfangsstellung des Auges, die feste Drehungsaxe für die ganze Dauer einer Drehung des Auges aus dieser Stellung sein, und da nun, wie wir sahen, jeder beliebige Halbmesser des Auges, in jeder Stellung desselben, Axe des resultirenden Moments sein kann, so kann vermöge der stattfindenden mechanischen Verhältnisse das Auge aus der Anfangsstellung sowohl, wie aus jeder anderen, um jeden beliebigen Halbmesser als Drehungsaxe eine endliche Drehung erleiden.

Da sich herausstellen wird, dass aus Gründen, welche sich aus der Physiologie des Auges oder des Sehorgans ergeben, eine sehr beträchtliche Beschränkung in der Zahl der mechanischer Seits möglichen Drehungsaxen stattfindet, so bedarf es hier keiner näheren Untersuchung, ob nicht vielleicht schon durch die Physiologie jedes einzelnen Augenmuskels eine Beschränkung in gewissen Fällen bedingt sein möchte, so fern es nämlich möglich ist, dass in dieser oder jener Augenstellung ein Muskel sich unter solchen Umständen befindet, dass er nicht mehr im Stande ist, das zu leisten, was die Stärke eines componirenden Moments zur Darstellung oder Erzeugung gewisser resultirender Momente von ihm verlangen würde. Es sollte, wie gesagt, diese Möglichkeit hier nur angedeutet werden, ohne dass es erforderlich ist, näher darauf einzugehen.

§. 2.

In Fig. 1. bedeutet der Punkt A den Mittelpunkt und Drehpunkt des Auges; AB ist die Richtung der Sehaxe in der Primärstellung. Der Begriff der Primärstellung muss, wie schon bemerkt, hier schon eingeführt werden, aber vor der Hand gewissermassen als eine willkührliche Annahme, so fern die Erklärung und Definiton desselben erst dann gegeben werden kann, wenn derselbe ganz von selbst aus den gefundenen Thatsachen zu Tage treten wird; vorläufig ist es genügend, daran zu erinnern, dass meine früher mitgetheilten Versuche ergaben, dass die durch einige ganz besondere

Eigenschaften ausgezeichnete Stellung des Auges, welche ich nach dem Vorgange von Listing die Primärstellung nannte, diejenige ist, bei welcher die Sehaxe 45° unter den Horizont geneigt und rechtwinklig zur Grundlinie*) gerichtet ist. Auf diese numerischen Werthe werde ich, so wie auf die übrigen früher erhaltenen, unten zurückkommen; im Folgenden wird die Primärstellung des Auges auch wohl als Primärstellung der Sehaxe schlechtweg bezeichnet werden.

Das Auge soll nun aus der Primärstellung so gedreht worden sein, dass die Sehaxe die ganz beliebig gewählte Richtung *AE* (Fig. 1.) erhalten hat. Da der Ausdruck Secundärstellung (so wie Tertiärstellung) für gewisse, ganz bestimmte Arten von Augenstellungen aufbewahrt werden muss, wie ich diese Ausdrücke auch schon früher in einem ganz bestimmten Sinne gebraucht habe, so kann ich die ganz beliebig gewählte Richtung *AE* der Sehaxe, welche für alle Richtungen derselben, ausser der primären, gilt, nicht anders, als mit dem Ausdruck: zweite Lage oder zweite Richtung bezeichnen, welcher also im Folgenden diese ganz allgemeine Bedeutung haben wird.

Es ist nun ganz gleichgültig, auf welchem Wege die Sehaxe oder ihr Endpunkt auf der Kugeloberfläche, der Punkt *B* in die Lage des Punktes *E* geführt worden ist, welche Zwischenlagen die Sehaxe eingenommen hat, bevor sie die Richtung *AE* erhielt: es giebt zufolge eines wichtigen von Euler**) gefundenen Satzes

---

*) Grundlinie ist der schon früher von mir gebrauchte Ausdruck für die die beiden Drehpunkte, hier also die beiden Augencentra verbindende Grade.

**) Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum. Novi commentarii academ. scient. imp. Petropolitanae. T. XX. 1776. pag. 202. Vergl. auch: Lexell, Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum. Daselbst pag. 248.

auf einer um ihren festen Mittelpunkt drehbaren Kugel nach irgend welchen, ganz beliebigen Drehungen derselben immer zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte der Oberfläche, welche nach vollendeter Bewegung wiederum dieselbe Lage im Raume eingenommen haben, welche sie vor der Drehung hatten. Dieser Satz ist aber gleichbedeutend mit dem: Es giebt für jede zweite Lage der um ihren Mittelpunkt drehbaren Kugel einen Durchmesser, um welchen als Axe gedreht die Kugel direct aus der primären Lage in die zweite übergeführt werden kann. — Hat demnach die Sehaxe die zweite Richtung *AE* erhalten, so giebt es einen Durchmesser des Auges, um welchen dasselbe aus der Primärstellung unmittelbar in jene zweite Lage (die indessen noch unbekannt ist) gedreht werden kann.

Um nun für irgend eine zweite Lage der Kugel diese in Frage stehende Drehungsaxe zu finden, bedarf es nur der Auffindung eines der Endpunkte derselben an der Kugeloberfläche, nämlich eines der beiden Punkte, welche, nachdem der Punkt *B* nach *E* gelangt ist, dieselbe Lage im Raume wieder erhalten haben, welche sie vor dieser Drehung hatten, die also auch während der Ueberführung von *B* nach *E* auf einem gewissen Wege in Ruhe bleiben konnten. Wir wollen uns zunächst an eine einfache geometrische Construction halten, wie sie sich aus dem Beweise des Euler'schen Satzes ohne Weiteres ergiebt.

Es sei in Fig. 1. *AD* (neben *AB*) ein zweiter beliebiger Halbmesser der Kugel, *D* also ein Punkt der Oberfläche. Wenn der Punkt *B* die zweite Lage *E* erhalten hat, so mag der Punkt *D* die zweite Lage *F* erhalten haben. Der Punkt der Kugeloberfläche nun, welcher während der Drehung in Ruhe bleiben konnte, ist offenbar derjenige, welcher gleiche räumliche Beziehungen zu den Halbmessern *AB* und *AD* einerseits, *AE* und *AF* anderseits hat. Verbindet man die erste und zweite Lage der beiden Punkte *B* und *E* durch die grössten Kreise *BE* und *DF*, errichtet im Mittelpunkt eines jeden der beiden Bögen rechtwinklig einen grössten Kreis, *PM* und *QN*, so ist der Punkt *O*, einer der beiden Duchschnittspunkte dieser beiden grössten Kreise, der gesuchte Punkt, und *AO* ist die Axe, um welche *AB* und *AD* direct in ihre zweiten Lagen *AE* und *AF* gedreht werden können. Dass der Punkt *O* eine und dieselbe Lage in Bezug auf *AB* und *AE* einerseits, auf *AD* und *AE* anderseits hat, ergiebt sich unmittelbar aus der Construction, wenn man die beiden gleichschenkligen sphärischen Dreiecke *OBE* und *ODF* construirt. Der Vollständigkeit wegen müssen noch zwei besondere Fälle kurz in Betracht gezogen werden, welche dann eintreten können, wenn die beiden grössten Kreise *PM* und *QN* zusammenfallen. Die Construction richtet sich dann darnach, ob ein grösster Kreis *BD*, welcher die beiden Punkte in ihrer primären Lage verbindet, die beiden zusammenfallenden Kreise *PQ* zwischen den beiden Punkten *P* und *Q* schneidet, oder erst in der Verlängerung von *PQ*, mit anderen Worten darnach, ob die beiden Punkte *B* und *D* sich in entgegengesetztem oder in gleichem Sinne bewegt haben. Haben sie sich in gleichem Sinne bewegt, schneiden die Verbindungslinien *BD* und *EF* den Kreisbogen *PQ* nicht, sondern erst dessen Verlängerung, so kann der gesuchte Punkt *O* nicht zwischen *P* und *Q* gelegen sein; auf dem grössten Kreise aber, dem der Bogen *PQ* angehört, muss er liegen, was nicht weiter des Beweises bedarf: es ist der Punkt, in welchem die beiden Verbindungskreise *BD* und *EF* verlängert sich schneiden. Dass dieser Durchschnittspunkt auf der Verlängerung der beiden zusammenfallenden Kreise *PQ* gelegen sein muss, ergiebt sich aus der Gleichschenkligkeit der beiden über *BD* und

EF entstandenen sphärischen Dreiecke von selbst. Ebenso bedarf es nur der Erwähnung, dass wenn die beiden Punkte *B* und *D* sich in entgegengesetztem Sinne bewegt haben, wiederum der Durchschnittspunkt der die beiden ersten und die beiden zweiten Lagen verbindenden Kreise der gesuchte Punkt *O* ist, welcher ebenfalls auf den beiden zusammenfallenden Kreisen *PQ*, und zwar zwischen *P* und *Q* selbst, gelegen sein muss.

Wenn nun von allen Punkten der Kugeloberfläche nur der eine Punkt *B* seiner ersten und zweiten Lage nach bekannt ist, so kann nur der geometrische Ort für den Punkt *O* oder für die fragliche Drehungsaxe gefunden werden. Der geometrische Ort für *O* ist allemal, wir wir eben sahen, der im Mittelpunkt des grössten Kreises *BE* rechtwinklig zu diesem stehende grösste Kreis *(PM)*, und der geometrische Ort für die Drehungsaxe die durch diesen grössten Kreis gelegte Ebene. Daraus folgt nun aber unmittelbar, dass, wenn es sich nur darum handelt, dem Punkte *B* durch einfache, continuirliche Drehung der Kugel die Lage *E* zu ertheilen, dies um unendlich viele verschiedene Drehungsaxen geschehen kann, um alle die Halbmesser nämlich als Drehungsaxen, deren Endpunkte in der einen Hälfte des grössten Kreises *PM* gelegen sind. So viel Drehungsaxen aber, so viel Wege giebt es für den Punkt *B*, um durch eine continuirliche Drehung nach *E* zu gelangen: unendlich viele, welche enthalten sind zwischen dem grössten Kreise *BE* selbst, bei welchem die Drehungsaxe rechtwinklig zu dem Halbmesser *AB* steht, und zwischen dem Kreise, dessen Durchmesser auf der Kugeloberfläche der Bogen *BE* ist, bei welchem die Drehungsaxe in der durch die drei Punkte *A*, *B* und *E* bestimmten Ebene liegt.

Wenn demnach beim Auge die erste und zweite Richtung der Sehaxe bekannt ist, so ist, bei übrigens völliger Freiheit, wie wir sie mechanischerseits für unsere Betrachtung gesichert haben, die Lage der Drehungsaxe nur ihrem geometrischen Orte nach bekannt, und es würde noch zwischen unendlich vielen Axen zu wählen sein. Da nun, wie wir sahen, durch die Kenntniss der ersten und zweiten Lage nur noch eines einzigen beliebigen zweiten Punktes der Kugeloberfläche die Lage der Kugel und der Drehungsaxe sogleich vollkommen bestimmt war, so ist umgekehrt einleuchtend, dass bei freier Disposition über die ihrem geometrischen Orte nach bekannten Drehungsaxen, die zweite Lage irgend eines beliebigen zweiten Punktes der Kugeloberfläche bei jeder Axe, welche von den möglichen zur Ueberführung von B nach E gewählt wird, eine andere, eine besondere sein wird. Ganz dasselbe gilt für das Auge. Während es aber bei einer überall gleichbeschaffenen, in jedem Punkte ihrer Oberfläche gleichwerthigen Kugel als gleichgültig gelten könnte, welche Lage irgend ein zweiter Punkt nach der Drehung einnimmt, wenn es eben nur darauf ankommen soll, einem Punkte B die Lage E zu ertheilen, so ist dies offenbar beim Auge nichts weniger, als gleichgültig. Denn obwohl allerdings alle Bewegungen des Auges zunächst ebenfalls als Bewegungen eines Punktes, nämlich des Punktes des deutlichsten Sehens oder kurz der Sehaxe, angesehen werden können, alle Drehungen als zum Zweck lediglich der Bewegung der Sehaxe ausgeführt betrachtet werden mögen, so ist doch das Auge keineswegs eine überall gleichbeschaffene, und in allen übrigen Punkten indifferente Kugel: es sind vielmehr besonders zwei, von einander ganz unabhängige, ja, wie sich herausstellen wird, in gewisser Beziehung einander entgegengesetzte Momente, welche eine sorgfältige Berücksichtigung der zweiten Lage irgend eines zweiten Punktes der Oberfläche beim Auge erheischen. Das eine Moment besteht darin, dass das Auge nicht frei in seiner Orbita liegt, sondern mit vielen Nachbartheilen und Organen in Verbindung steht, die zum Theil an dasselbe befestigt sind und keine freie, unbeschränkte Beweglichkeit besitzen. Das andere Moment aber, wohl bei weitem das wichtigere, besteht darin, dass die einzelnen Punkte der Netzhaut keinesweges alle gleichwerthig sind, sondern dass im Gegentheil jeder Punkt derselben die besondere Dignität besitzt, dass mit seiner qualitativen Erregung das Zustandekommen einer bestimmten Raumvorstellung gegeben ist, welche identisch mit derjenigen ist, die mit der qualitativen Erregung eines bestimmten Punktes der andern Netzhaut gegeben ist, so dass also, wenn ein Objektpunkt diese beiden den Raumwerthen nach identischen Retinapunkte qualitativ erregt, derselbe an ein und demselben Orte im Raume durch Vermittlung beider Augen wahrgenommen, d. h. einfach gesehen wird, dass aber, wenn ein Objectpunkt nicht zwei zusammengehörige, identische Netzhautpunkte zu erregen im Stande ist, was Folge seiner eignen Lage im Raume, aber natürlich auch Folge der Lage der beiden Netzhautpunkte sein kann, und der Objectpunkt also jedenfalls (wenn überhaupt zwei) zwei in der Raumvorstellung nicht gleichwerthige, nicht identische Netzhautpunkte erregt, derselbe mit zwei verschiedenen Raumwerthen in der Vorstellung ausgestattet ist, d. h. doppelt gesehn wird.

Dass diese beiden genannten Momente bei den Bewegungen des Auges Berücksichtigung überhaupt finden, kann gar keinem Zweifel unterworfen sein. Dann aber kann und muss nothwendig eine Beschränkung in der Zahl der Drehungsaxen, welche für die beiden Richtungen der Sehaxe AB und AE, (deren letztere für jede beliebige zweite Richtung gilt) zur Ueberführung aus der einen in die andere möglich sind, postulirt werden. Denn zunächst kann man schon ohne eine specielle Betrachtung ersehen, dass es unter den obengenannten unendlich vielen Wegen von *B* nach *E* sehr viele giebt, welche so beträchtliche Lagenveränderungen irgend eines zweiten Punktes *D* in der zweiten Stellung mit sich bringen würden, dass sowohl in seiner Orbita das Auge erheblichen Disorientirungen unterliegen würde, als auch hinsichtlich der Identitätsverhältnisse beider Netzhäute, sobald die beiden Augen im entgegengesetztem Sinne, convergirend, bewegt werden. Aber die Beschränkung muss noch weiter postulirt werden. Da die zweite Lage irgend eines Netzhautpunktes überhaupt nicht gleichgültig ist, so wird diejenige Lage, welche derselbe nach irgend einer beliebigen Drehung erhält, in jedem Falle, wenn dieselbe Bewegung ausgeführt ist, eine und dieselbe sein müssen. Sind überhaupt die identischen Netzhautpunkte bei den Drehungen der Augen gegenseitigen Disorientirungen ausgesetzt, sind nicht bei allen Richtungen der Sehaxe gleich günstige gegenseitige Lagen der beiden Netzhäute möglich, so werden diese Disorientirungen jedenfalls gesetzmässig und gleichförmig stattfinden müssen, und nicht bei einer und derselben Richtung der Sehaxe das eine Mal in höherem, das andere Mal in geringerem Masse. Konnten die Augen nicht ohne gewisse Disorientirungen der beiden Netzhäute (Doppelnetzhaut) bewegt werden, so kann wohl mit Sicherheit vermuthet werden, dass den daraus erwachsenden Nachtheilen für das Einfachsehen, für die Ausdehnung des Horopters, durch ein gewisses Verhältniss der Schärfe der Wahrnehmung einigermassen das Gleichgewicht gehalten wird, so dass die nach der Peripherie des Gesichtsfeldes immer weiter von einander weichenden Doppelbilder in proportionalem Verhältniss weniger scharf und deutlich erkannt werden, wie es ja in der That der Fall ist; und dann musste natürlich auch die Disorientirung eine bestimmte und regelmässige sein. Das heisst nun aber Nichts Anderes, als dass von allen den für eine bestimmte zweite Richtung der Sehaxe (*AE*) aus der Primärstellung *AB* möglichen Drehungsaxen nur eine einzige stets in Anwendung kommen soll; alle übrigen müssen, obwohl sie mechanisch möglich sein mögen, als für das Auge überflüssig und ihre Anwendung zweckwidrig erscheinen. Wenn nun damit also auch nur ein einziger Weg für den Punkt *B*, um nach *E* zu gelangen, gefordert ist, so ist hier, wie schon oben bemerkt, nur von einfachen, continuirlichen Drehungen die Rede, von solchen, auf welche sich eben der Euler'sche Satz bezieht. Auf unendlich vielen Umwegen, durch successive Drehungen um viele verschiedene Axen kann *B* ebenfalls schliesslich nach *E* gelangen, aber jede dieser einzelnen einfachen Drehungen muss mit der eben verlangten Gesetzmässigkeit erfolgen, und wenn zuletzt der Punkt *B* nach *E* kommt, muss das ganze Auge dieselbe Lage haben, als wenn die Sehaxe direct aus der Primärstellung in jene zweite Richtung gedreht worden wäre.

Dass diese a priori gestellten Anforderungen am Auge wirklich erfüllt sind, bedarf kaum der besondern Erwähnung. Die Versuche, welche ganz sichere Auskunft darüber geben und mir, so oft ich sie wiederholt habe, immer jenes Postulat gerechtfertigt haben, sind die früher mitgetheilten, welche die relativen Lagen der Doppelbilder messen. Vielleicht mag auch die Erörterung dieser Gesetzmässigkeit überflüssig und sie selbst von vorn herein als selbstverständlich erscheinen: hier musste jedoch davon ausgegangen werden, zumal die einfache Schlussfolgerung in Beziehung auf die Drehungsaxen bisher nicht daraus gezogen wurde. Die erste der anfangs aufgestellten Fragen haben wir demnach dahin beantwortet, dass jedenfalls eine Beschränkung der mechanisch möglichen Drehungsaxen am Auge stattfinden muss, und zwar eine so beträchtliche, dass von allen denen, welche zur Ueberführung aus der Primärstellung in irgend eine zweite Richtung der Sehaxe möglich sind, für deren Endpunkte ein Bogen von 180° der geometrische Ort ist, nur eine einzige in Anwendung kommen darf. Bei genauerer Erwägung der Consequenzen dieses Satzes und der vorhergehenden Reflexionen wird man finden, dass derselbe noch weit mehr involvirt, dass darin allein zum Theil schon die Lösung der beiden anderen oben hingestellten Fragen enthalten ist, und wir daher von hieraus direct zum Ziele gelangen könnten. Indessen ziehe ich es vor, das Ergebniss des Bisherigen noch nicht weiter auszubeuten, sondern erst später auf jenen Satz zurückzukommen, da es von Nutzen sein wird, zuvor auch auf einem andern, allerdings weiteren Wege, gleichfalls der Beantwortung jener Fragen näher zu kommen. Der Vortheil, welcher bei diesem Gange der Untersuchung erstrebt werden soll, wird sich später herausstellen, so fern die physiologische Bedeutung und der Werth des Gesetzes, wonach die Drehungen des Auges erfolgen, nach den hauptsächlichen Gesichtspunkten zu Tage treten werden.

§. 3.

Dass nach einem Prinzipe der Drehungen, nach einem Gesetze der Bewegungen des Auges gesucht werden muss, haben wir gesehen. Die nächste Frage wird die sein, von welcher Art das Gesetz sein wird. Die Zahl der möglichen Principe ist eben so gross, wie die Zahl der möglichen Drehungsaxen für eine bestimmte zweite Richtung der Sehaxe. Geometrisch wird jedes aller dieser möglichen Principe qualitativ von allen übrigen verschieden sein, und sich bestimmt definiren lassen; aber bei einem experimentellen Untersuchungsgange liegt der physiologische Gesichtspunkt näher, als der mathematische, und man wird von diesem Standpunkte aus geneigt sein müssen, das zu suchende Gesetz zunächst nach seinen physiologischen Consequenzen zu formuliren, bei den Drehungen des Auges die Realisirung gewisser physiologischer Anforderungen zuerst zu fordern, und darnach ein Gesetz über die Lage der Drehungaxen abzuleiten. Nach den physiologischen Consequenzen nun ist der bei weitem grösste Theil der möglichen Drehungsprincipe gleichartig, nicht qualitativ verschieden, so dass aus einer sehr grossen Zahl derselben jedes mit gleichem Rechte der Prüfung unterliegen könnte, ob es am Auge realisirt sei; und somit mag es auch von dieser Seite her gerechtfertigt sein, die folgenden Betrachtungen anzustellen, in welchen aus allen jenen möglichen Gesetzen zwei hervorgehoben werden sollen, welche, zunächst lediglich nach ihren physiologischen Consequenzen formulirt, in dieser Beziehung vor allen übrigen qualitativ ganz besonders und ausgezeichnet dastehen, und mit deren Erörterung sich das Gebiet, innerhalb welches die wirklichen Drehungsaxen des Auges zu suchen sind, enger begränzen wird.

In dem, wie bisher, als Kugel um den im Raume festen Mittelpunkt drehbar gedachten Auge nehmen wir zwei rechtwinklige Coordinatensysteme an. Das eine derselben wird im Auge fest und mit demselben beweglich gedacht; sein Anfangspunkt ist der Mittelpunkt oder Drehpunkt; die Axe der x fällt mit der Sehaxe zusammen, die Axe der y wird so gelegen gedacht, dass sie in der Primärstellung der Sehaxe, (diese nämlich nach experimenteller Ermittelung 45° unter den Horizont geneigt und rechtwinklig zur Grundlinie gerichtet), mit der Grundlinie zusammenfällt. Dadurch ist die Lage der Z^1Axe ebenfalls bestimmt. Auf eine Kritik der Primärstellung werde ich, wie gesagt, unten zurückkommen. Das zweite im Auge gedachte Coordinatensystem wird im Raume fest angenommen, sein Anfangspunkt ist ebenfalls der Mittelpunkt, und seine Axen fallen mit den gleichnamigen Axen des im Auge festen Systems in der Primärstellung zusammen. Die drei Axen dieses im Raume festen Systems sollen mit X, Y, Z bezeichnet werden, die des mit dem Auge beweglichen Systems mit X^1, Y^1, Z^1, oder auch noch mit dem Zusatz beweglich. Die positive Halbaxe der x (und x^1) ist nach vorn gerichtet, die positive Halbaxe der y (und y^1) nach innen, nasenwärts, die positive Halbaxe der z (und z^1) nach oben.

Fig. 2. stellt einen Octanten des linken Auges vor. A ist der Drehpunkt, AB, AC und AD bezeichnen der Reihe nach die positiven Halbaxen der x, y und z beider in der Primärstellung der Sehaxe (AB) zusammenfallenden Coordinatensysteme. Somit ist der dargestellte Octant beiläufig der innere obere der vordern Augenhälfte. — Die Sehaxe oder die bewegliche X^1 Axe soll aus der primären Richtung AB in die beliebig gewählte zweite Richtung AE übergeführt werden. Die Frage dabei ist also die, welche Lage bei dieser Drehung irgend ein anderer Punkt des Auges erhält: kennen wir dieselbe, so ist die Lage der Drehungsaxe bekannt. Es leuchtet nun ein, dass an die Stelle des Auges das in demselben fest und mit demselben beweglich gedachte Coordinatenystem gesetzt werden kann, und allein dessen Lagenveränderung in Betracht gezogen zu werden braucht. Wenn dann bekannt ist, welche Lage eine der beiden anderen Axen erhält, während die X^1 Axe in irgend eine zweite Lage aus der Primärstellung gedreht wird, so ist die Lage des ganzen Coordinatensystems und damit die des ganzen Auges bekannt. Es wird im Folgenden die bewegliche Z^1 Axe (AD in der

Primärstellung) zur Ermittelung der Lage des Coordinatensystems benutzt werden, da sich die davon ausgehenden Betrachtungen am Unmittelbarsten an die früher mitgetheilten Versuche anschliessen, deren Ergebniss immer als Kriterium benutzt werden muss.

Den beabsichtigten Effekt, welcher durch continuirliche Drehung des Auges um die unbekannte Axe erreicht werden soll, nämlich die Ueberführung der Sehaxe in die Richtung AE, wollen wir zunächst hervorgebracht denken durch zwei successive Drehungen um zwei zu einander rechtwinklige Axen des einen unserer beiden Coordinatensysteme selbst, und zwar um zwei Axen des beweglichen Systems. Statt des unbekannten diagonalen Weges des Punktes B nach dem Punkte E, denken wir die Bewegung aus zwei zu einander rechtwinkligen, successive erfolgenden Componenten zusammengesetzt. Dies kann offenbar dadurch geschehen, dass die Sehaxe AB zuerst durch eine Drehung um die negative Halbaxe der y^1 in die Richtung AH gebracht wird; durch diese Drehung ist die bewegliche Z^1Axe in die Lage von AF gelangt, und geschieht nun um diese Z^1Axe, und zwar um ihre positive Halbaxe eine Drehung, so wird AH, die Sehaxe, in die verlangte Lage AE gebracht werden. — Die erste dieser beiden successiven Drehungen der Sehaxe erfolgte in der XZEbene des festen und unbeweglichen Coordinatensystems, während derselben verblieb die Z^1Axe (AF) in der XZEbene des festen Systems. Für das zweite Tempo der Bewegung ist die bewegliche Z^1Axe selbst die Drehungsaxe, die Drehung der Sehaxe geschieht in der X^1Y^1Ebene, und es ist daher, wenn die Sehaxe oder X^1Axe die Schlussstellung AE erhalten hat, die Z^1Axe in der XZEbene des festen Systems geblieben.

Dies ist eine von den unendlich vielen Lagen, welche die Z^1Axe haben kann, wenn der X^1Axe die

Richtung AE ertheilt ist. Aber, so wie die durch diese Lage der Z^1Axe bestimmte Lage des beweglichen Coordinatensystems geometrisch vor allen übrigen hier möglichen Lagen ausgezeichnet ist, so ist, wie sich sogleich bei näherer Betrachtung herausstellen wird, auch in physiologischer Beziehung seine Lage, sobald wir sie auf das Auge übertragen, von ganz besonderer Eigenthümlichkeit, so, dass es vollkommen gerechtfertigt sein wird, die Frage zu stellen, warum das Auge nicht so bewegt wird, dass das Resultat der Drehung gleich dem in unserem Falle durch jene beiden successiven Drehungen erreichten ist. Wir setzen daher den Fall, das Auge würde aus der Primärstellung durch eine nicht aus successiven Drehungen in verschiedenen Richtungen zusammengesetzte, sondern durch eine einzige Bewegung so gedreht, dass, wenn AE die Richtung der Sehaxe geworden ist, die Z^1Axe des im Auge festen Coordinatensystems in der XZEbene des im Raume festen Coordinatensystems geblieben ist.

Die Ebene ACH, in welcher die Sehaxe AE gelegen ist, und welche rechtwinklig zu der Z^1Axe, AF, steht, ist die X^1Y^1 Ebene des beweglichen Coordinatensystems. In unserem Falle nun schneidet diese X^1Y^1 Ebene die YZEbene des festen Coordinatensystems in der Y^1Axe selbst (AC). Wenn nun die Sehaxe des anderen Auges auf denselben Punkt im Gesichtsfelde gerichtet ist, welchen das linke Auge mit der Richtung AE fixirt, so ist offenbar die Sehaxe des rechten Auges ebenfalls in der Ebene ACH oder in der X^1Y^1Ebene gelegen, denn unserer obigen Annahme zufolge fällt die YAxe des festen Coordinatensystems mit der Grundlinie, welche die beiden Augencentra verbindet, zusammen, und es wird daher eine für die symmetrische Stellung des rechten Auges gedachte X^1Y^1 Ebene mit der Ebene ACH in unserm linken Auge identisch sein. Die Ebene nun, in welcher bei binocularem Sehen die beiden Sehaxen gelegen sind, habe ich früher bei der Lehre vom Horopter die Visirebene genannt, und es wird zweckmässig sein, diese Bezeichnung auch hier beizubehalten. Somit ist die X^1Y^1 Ebene in unserem Falle mit der Visirebene identisch. (Es bedarf kaum der Erwähnung, dass die Ebene *ACH* unter allen Umständen die Visirebene für die Richtung *AE* der Sehaxe ist, dass aber mit dieser die X^1Y^1 Ebene nur in dem einzigen jetzt vorliegenden Falle identisch ist, da die Z^1 Axe in der XY Ebene liegt; bei jeder andern Lage der letztern oder des Auges sind beide Ebenen nicht identisch.

Wenn sich nun im fixirten Punkte eine zur Visirebene senkrecht stehende grade Linie befindet, so wird das Retinabild derselben in dem grössten Kreise gelegen sein, welcher, durch den Mittelpunkt der Retina gehend, rechtwinklig zu dem grössten Kreise gelegen ist, in welchem die Visirebene die Retina schneidet, oder, mit anderen Worten, eine durch jene Objectlinie und durch ihr Retinabild gelegte Ebene steht senkrecht zur Visirebene und geht durch den Mittelpunkt, Drehpunkt des Auges. Dass der Kreuzungspunkt der Lichtstrahlen oder die zu einem Punkte reducirten beiden Knotenpunkte (Listing) nicht mit dem Drehpunkte zusammenfallen, ist für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse gleichgültig. Ich werde später darauf zurückkommen. Da nun in unserem Falle die Visirebene *ACH* zugleich die X^1Y^1 Ebene ist, so ist die X^1Z^1 Ebene die ebengenannte Ebene, in welcher die Objectlinie und ihr Retinabild gelegen sind. In der Figur ist die Ebene *AEF* für unsern Fall die X^1Z^1 Ebene, und der grösste Kreis *EF* würde in seiner Verlängerung auf den hintern Umfang der Kugel das Retinabild jener Linie enthalten.

Ganz dasselbe, was für das linke Auge gilt, wird auch für das rechte bei binocularem Sehen gelten, und die beiden Retinabilder der zur Visirebene senkrechten Linie werden in den beiden X^1Z^1 Ebenen der beiden Augen gelegen sein. In dieser Ebene ist nun aber auch das Retinabild einer Linie gelegen, welche für die Primärstellung des Auges senkrecht zur Visirebene im fixirten Punkte steht. In der primären Richtung der Sehaxe, *AB*, ist die Ebene *ABC* oder die zusammenfallenden *XY* Ebenen beider Coordinatensysteme die Visirebene, und das Retinabild einer zu dieser Ebene in der Verlängerung von *AB* senkrechten Linie wird in dem grössten Kreise *BD*, in den zusammenfallenden *XZ* Ebenen beider Coordinatensysteme gelegen sein. Folglich wird in unserm Falle das Object in beiden Augenstellungen, in der primären, wie in der zweiten, *AE*, ein und dieselben Punkte der Retina erregen, wenn, wie wir voraussetzen, die Linie im Sehfelde für beide Augenstellungen in gleichen Verhältnissen zum Auge, im fixirten Punkte senkrecht zur Visirebene, steht. Da nun dasselbe auch für das zweite Auge stattfinden würde, so herrschen also zwischen den Doppelbildern jener Linie in der zweiten Augenstellung ganz dieselben räumlichen Relationen, welche in der Primärstellung vorhanden sind; d. h. lagen die beiden Retinabilder in der Primärstellung auf lauter je zwei identischen Punkten, deckten sich demnach die Doppelbilder in der Raumanschauung oder wurde die Linie einfach gesehen, so wird sie auch in der supponirten zweiten Augenstellung einfach gesehen werden; lagen in der Primärstellung in den beiden die Bilder enthaltenden grössten Kreisen ausser den beiden Mittelpunkten der Netzhäute keine identische Stellen, so dass die Doppelbilder sich nicht deckten, sondern vom fixirten Punkte aus unter einem gewissen Winkel divergirten, so werden sie auch in der zweiten Augenstellung divergiren, und zwar unter demselben Winkel. Es würde bei der supponirten Lage des Auges bei der zweiten Richtung der Sehaxe keine Disorientirung des Auges in Bezug auf das gemeinschaftliche Sehfeld beider Augen, oder in Bezug auf binoculares Sehen stattfinden, was wir auch so ausdrücken können, es würde in Bezug auf binoculares Sehen keine auf die optische Axe projicirte Drehung stattfinden. — Was so eben in Bezug auf eine Linie im Sehfelde abgeleitet wurde, muss unmittelbar auf das ganze Sehfeld übertragen werden: alle Punkte, welche im primären Sehfelde einfach gesehen werden, würden auch im Sehfelde der zweiten Stellung einfach gesehen (d. h. Objectpunkte, welche gleiche räumliche Relationen in den beiden Sehfeldern haben), und ebenso würden sich auch alle doppelt gesehenen Punkte ganz gleich verhalten in beiden Sehfeldern. Es ist dies die ganz besondere physiologische Eigenschaft der in Betracht gezogenen Augenstellung, auf welche ich oben hingedeutet habe, welche bei keiner der unendlich vielen übrigen möglichen Lagen der beweglichen Z^1Axe in der zweiten Augenstellung vorhanden ist.

Das Auge darf aber nicht ausschliesslich in seiner Beziehung zum Sehorgan betrachtet werden, nicht bloss als dessen peripherischer, Reiz empfangender und erregbarer Apparat; sondern dasselbe verdient auch lediglich für sich genommen, bloss als Körpertheil im Verhältniss zu den benachbarten und mit ihm in Verbindung stehenden Theilen berücksichtigt su werden, als Augapfel mit dem Stiel, dem Sehnerven, von der Conjunctiva bekleidet u. s. w. Um die Consequenzen, welche in dieser Beziehung die supponirte Augenstellung haben wird, abzuleiten, braucht nur die Lagenveränderung irgend eines Punktes der Iris z. B. verfolgt zu werden. Ein Punkt derselben, welcher in der Primärstellung grade senkrecht über der Mitte der Pupille gelegen ist, mag z. B. durch den Punkt *H* in Fig. 2. repräsentirt sein. Dieser Punkt liegt in der X^1Z^1Ebene des beweglichen Coordinatensystems, welches in der Primärstellung mit dem im Raume festen zusammenfällt. Da nun in der zweiten Augenstellung die bewegliche X^1Z^1Ebene die Lage der Ebene *AEF* hat, jener Punkt der Iris also nun in dem Kreise *EF* gelegen ist, welcher zwar senkrecht zur Visirebene, aber nicht senkrecht zur Ebene *ACB* steht, so wird einem wiederum grade vor der Pupille stehenden Beobachter jetzt jener Punkt nicht mehr senkrecht über deren Mitte, d. i. *E*, erscheinen, sondern diejenigen Punkte werden nun senkrecht über der Pupillenmitte liegen, welche in dem Kreisbogen *DE* enthalten sind, da die Ebene *AEK* (*EK* ist die Verlängerung von *ED*) senkrecht zu der Ebene *ACB* steht. Es wird somit der ins Auge gefasste Punkt der Iris und mit ihm das ganze Auge nach der vollführten Drehung eine Drehung um die Sehaxe selbst erlitten zu haben scheinen, wenn der Beobachter wiederum grade so vor dem Auge steht, wie während der Primärstellung, und zwar eine Drehung von der Grösse des Winkels, welchen die beiden Ebenen *AFE* und *ADE* mit einander einschliessen, indem nämlich bei dem vorläufig sphärisch vorausgesetzten Auge dieser Flächenwinkel gemessen wird durch den von zwei grössten Kreisen (*FE* und *DE*) eingeschlossenen Winkel *n*. — In der jetzt in Betracht gezogenen Rücksicht hat also das Auge eine auf die optische Axe projicirte Drehung von der Grösse des Winkels *n* erlitten.

Alle Theile nun, welche mit dem Augapfel fest verbunden sind, werden an dieser Drehung Theil genommen haben. Der Sehnerv ist mit dem einen Ende fest dem Augapfel verbunden, während das andere Ende als unbeweglich im Foramen opticum zu betrachten ist. In unserm supponirten Falle würde die Insertion des

Opticus am Auge eine Drehung um den Winkel n erlitten haben, beschrieben mit einem Radius, der der Entfernung des gelben Fleckes oder dessen Mittelpunktes vom Centrum des Mariotte'schen Fleckes gleich ist. Diese Drehung der Insertion wird sich als Torsion des mittleren in der Orbita verlaufenden Theiles den Sehnerven herausstellen, und von der sogleich zu besprechenden Grösse des Winkels n hängt es ab, wie gross diese Torsion sein würde, die, bei der geringen Länge des Drehungs-Radius leicht sehr erheblich werden kann. Die Conjunctiva ferner ist mit der Cornea und einem Theile der übrigen Bulbusoberfläche ganz genau und nicht verschiebbar verbunden; nach der Peripherie zu wird die Verbindung allmählich lockerer, bis sich die Haut ganz vom Bulbus abhebt, um die Augenlider zu bekleiden. Der mit dem Bulbus vereinigte Theil der Bindehaut wird an jener Drehung des Auges Theil nehmen, und in Folge dessen wird der zu den Lidern übergespannte Theil ebenfalls eine Torsion erleiden. Auch die Muskelinsertionen würden eine Lagenveränderung zu erleiden haben, die bei einigermassen excursiven Drehungen, bei denen der Winkel n eine beträchtliche Grösse erlangt, wie jene Torsionen sehr erheblich werden würde.

Es sind also die Consequenzen, welche die supponirte Augensstellung hat, sehr verschieden nach den beiden hauptsächlichen Beziehungen, in welchen das Auge betrachtet werden muss, und wir wollen sogleich versuchen, einfache und symmetrische Ausdrücke für die beiden Beziehungen zu gewinnen; vorher aber muss kurz die Grösse des Winkels n abgeleitet werden, theils weil dieselbe zur näheren Beurtheilung des eben Erörterten dienen kann, theils aber, weil dieser Winkel im weiteren Verlauf noch von Wichtigkeit sein wird, und eine unter allen Umständen vorhandene und für die Untersuchung nothwendige Constante bildet.

In dem sphärischen Dreiecke *FDE* ist, wenn der Winkel *EFD* mit *F* bezeichnet wird

$$\cot n \sin F + \cos F \cos FE = \cot FD \sin FE$$

daher

$$\cot n = \frac{\cot FD \sin FE - \cos F \cos FE}{\sin F}$$

Da nun $FE = 90^\circ$, mithin $\sin FE = 1$, $\cos FE = o$ ist, so ist

$$\cot n = \frac{\cot FD}{\sin F}$$

Der Bogen *FD* ist gleich dem Bogen *BH*, und dieser, oder der Winkel *d*, ist der Winkel, um welchen die Visirebene *(ACH)* gegen die *XY*Ebene des festen Coordinatensystems geneigt ist, welcher also bei jeder Augenstellung unmittelbar gemessen werden kann. Dieser Winkel ist auf der Kugeloberfläche mit *d* bezeichnet. Der Winkel *F* ist gleich dem Winkel *EAH*, d. i. der Winkel, um welchen jede der beiden Sehaxen bei binocularem Sehen in der Visirebene von der primären parallelen Richtung abweicht, mit anderen Worten, die Hälfte des Winkels, unter welchem die Sehaxen convergiren, der mit $2r$ bezeichnet werden soll, und der ebenfalls bei jeder Augenstellung unmittelbar beobachtet werden kann, sofern die Tangente von *r* gleich ist dem Verhältniss der halben Grundlinie (3 Cm. etwa) zu der Entfernung des fixirten Punktes von der Mitte der Grundlinie. Es ist also der Winkel *n*, wie zu erwarten war, Function der beiden Winkel, welche ich früher als Neigungs- und Convergenzwinkel der Sehaxe bezeichnet habe, aus denen sich jede zweite Richtung der Sehaxe zusammensetzt, nämlich $\cos n = \frac{\cot d}{\sin r.}$

Es tritt bei der angewendeten Art der Ableitung das Vorzeichen des Winkels *n* oder die Richtung der auf die optische Axe projicirten Drehungen nicht auf; es wäre dazu eine andere, aber weniger einfache Ableitung nothwendig gewesen. Aber es ist leicht ersichtlich, dass die auf die optische Axe projicirte Drehung dann auf die negative Halbaxe derselben bezogen werden muss, wenn, wie in dem gezeichneten Falle, die zweite Augenstellung durch die successiven Drehungen um die negative Halbaxe der y' und um die positive Halbaxe der z' oder (unterhalb der Primärstellung) wenn sie durch successive Drehungen um die positive Halbaxe der y' und um die negative Halbaxe der z' erreicht wurde; dass jene Drehung auf die positive Halbaxe der x' bezogen werden muss, wenn die zweite Stellung durch successive Drehungen um die beiden positiven oder um die beiden negativen Halbaxen der y' und z' erreicht wird. Dies heisst, dass, wenn die Sehaxe oberhalb der Primärstellung nach Innen, und wenn sie unterhalb der Primärstellung nach Aussen gerichtet ist, der Winkel n (welcher, wie gesagt, ein constantes Moment bleiben wird) auf die negative Halbaxe der Sehaxe zu beziehen ist; auf die positive Halbaxe dagegen, wenn die Sehaxe oberhalb der Primärstellung nach Aussen, und wenn sie unterhalb derselben nach Innen gerichtet ist.

Die Beziehung des Auges, für welche und in welcher der Winkel n nach Grösse und Vorzeichen, wie eben besprochen, vorhanden ist, in welcher nicht die Ebene *AFE*, sondern die Ebene *ADE* die verticale Norm ist, auf die sich die durch den Winkel n repräsentirte Drehung bezieht, kann kurz in der Weise ausgedrückt werden, dass man das Auge in Bezug auf das ihm allein angehörige, nicht beiden Augen gemeinschaftliche, Sehfeld betrachtet. Denken wir das in der Figur gezeichnete linke Auge allein thätig, das andere geschlossen, so wird eine Linie, welche diesem einen Auge senkrecht erscheinen soll, nicht in oder parallel der

Ebene *AFE* gelegen sein dürfen, sondern in oder parallel der Ebene *ADE*. Nun haben zwar die Identitätsverhältnisse der Netzhautpunkte durchaus keine Bedeutung bei monocularem Sehen, und es wird sich daher, mag die Lage des Auges sein, welche sie wolle, mag der Winkel *n* so gross sein, wie er wolle, in dem Sehfelde des einen Auges Nichts von der Lage des Auges bei der zweiten Richtung der Sehaxe offenbaren, und in so fern bedarf es einer Erklärung und einer Entschuldigung für die Bezeichnung, mit welcher jedoch kurz und symmetrisch das ausgedrückt werden mag, was eben hinsichtlich der mit dem Auge in Verbindung stehenden Theile, Sehnerv, Conjunctiva, auseinandergesetzt wurde, wenn wir sagen, das Auge hat in der supponirten Lage in Bezug auf das ihm allein angehörige, auf sein eignes Sehfeld eine auf die optische Axe projicirte Drehung von Grösse und Richtung des Winkels *n* erlitten, während es in Bezug auf das gemeinschaftliche Sehfeld beider Augen, in Bezug auf binoculares Sehen, keine auf die optische Axe projicirte Drehung erlitten hat.

Es unterliegt nun gar keinem Zweifel, dass die Lage des Auges, welche für die zweite Richtung der Sehaxe bisher vorausgesetzt wurde, durch eine Eigenschaft vor allen übrigen ausgezeichnet ist, und dass sie in Bezug auf binoculares Sehen die vortheilhafteste und, wenn der Ausdruck gestattet ist, zweckmässigste sein würde. Ich habe früher nachgewiesen, dass ein flächenartiger Horopter nur in der Primärstellung und in den Secundärstellungen des Auges existirt, und dass in allen Tertiärstellungen, wie die aus zwei Secundärstellungen, Neigung und Convergenz, zusammengesetzten Augenstellungen genannt wurden, und wie z. B. die in der Figur gezeichnete Richtung der Sehaxe *AE* eine solche ist, keine Horopterfläche, sondern nur eine mittlere Horopterlinie vorhanden ist. In der bisher vorausgesetzten Lage des Auges würde auch in der Tertiärstellung ein flächenartiger Horopter vorhanden sein, wie das oben bereits erörtert wurde, und zwar ausschliesslich nur bei dieser einzigen Lage des Auges, in welcher die Z^1Axe in der *XZ* Ebene des festen Coordinatensystems liegt; und das kann immerhin als das vortheilhafteste Verhältniss, welches überhaupt stattfinden könnte, bezeichnet werden. Unvermeidlich aber würde mit diesem Vorzuge der Nachtheil verbunden sein, welcher aus dem Winkel n für die mit dem Auge verbundenen Theile resultirt. Alle physiologischen Beziehungen (mit Ausnahme derjenigen hinsichtlich der Wirkung der Augenmuskeln), welche bei einer Augenstellung überhaupt in Betracht kommen können, sind in den beiden erörterten, binoculares und monoculares Sehfeld, erschöpft, und es würde vor der Hand auf die immerhin erlaubte Frage, weshalb die Tertiärstellungen nicht von der besprochenen, für binoculares Sehen vortheilhaftesten Art sind, nur die Antwort gegeben werden können, dass die durch den Winkel n bedingten Torsionen der mit dem Auge verbundenen Theile wohl zu beträchtlich für die Integrität dieser Theile gewesen sein würden. Aber diese Antwort dürfte besonders angesichts der wirklich stattfindenden Verhältnisse, wie sie unten betrachtet werden sollen, nicht genügend sein, und es ist nothwendig zur Beurtheilung nach allen Seiten und zur vollständigen Analyse der in Frage gestellten Verhältnisse auch das zu erwägen, was von Seiten der Mechanik vorausgesetzt werden müsste, welche Bedingungen hier erfüllt sein müssten, wenn die Lagen des Auges jenen physiologischen Anforderungen entsprechen sollten. Sollte nämlich der bedeutende Vorzug der betrachteten Lage des Auges dem Sehorgan zugewendet sein, so musste es als unbedingt nothwendig gefordert werden, dass das Auge die Bedingungen dazu nicht nur bei einer oder der anderen tertiären Richtung der Sehaxe erfüllte, sondern in allen, so dass also aus den erörterten Eigenthümlichkeiten ein Princip, wonach das Auge gedreht wurde, hätte gemacht werden müssen. Geometrisch nun war jene Stellung dadurch characterisirt, dass die Z^1Axe des beweglichen Coordinatensystems in der XZ Ebene des festen Systems lag. Wird dies zu einem Princip gemacht, so soll die Z^1Axe stets, in jeder Stellung des Auges, in der XZ Ebene liegen.

Man sieht nun sogleich, dass es gewisse Drehungen des Auges giebt, oder wenigstens geben kann, bei welchen ohne Weiteres dieses Prinzip eingehalten wird. Wenn nämlich die Z Axe und die Y Axe des festen Coordinatensystems (AD und AC) Drehungsaxen des Auges sein können, wenn die Sehaxe sowohl in der XY Ebene wie in der XZ Ebene des festen Coordinatensystems aus der Primärstellung herumgeführt werden kann, wenn diese Drehungen einbegriffen sind in dem Gesetze, welches wir suchen, so ist bei diesen beiden Arten von Drehungen, mag das Gesetz übrigens sein, welches es wolle, das bisher supponirte Gesetz ebenfalls eingehalten, so fern die in der Primärstellung mit der festen Z Axe zusammenfallende Z^1Axe in Ruhe bleibt, wenn die Z Axe selbst Drehungsaxe ist, und in der XZ Ebene sich bewegt, wenn die feste YAxe Drehungsaxe ist. Giebt es solche Drehungen, so giebt es auch zwei Arten von Augenstellungen, bei welchen dieselben Verhältnisse in Bezug auf binoculares Sehen stattfinden, wie in der Primärstellung, bei welchen der Horopter dieselbe Ausdehnung hat, wie in der Primärstellung. Ich habe nun früher nachgewiesen, dass es allerdings solche Augenstellungen giebt, es sind dies nämlich die sogenannten Secundärstellungen, zwei Arten derselben, bei deren einer die Sehaxe die primäre

Neigung von 45° unter den Horizont hat, aber jeden beliebigen Convergenzwinkel haben kann, bei deren anderer die Sehaxe jede beliebige Neigung haben kann, aber stets den primären Parallelismus mit der anderen Sehaxe wahren muss, stets rechtwinklig zur Grundlinie stehen muss. Somit giebt es also auch die eben geforderten Drehungen des Auges, einerseits um die Z Axe, andererseits um die Y Axe des im Raume festen Coordinatensystems; denn die eine der beiden diesen Axen zugehörigen Drehungsebenen der X^1 Axe oder Sehaxe ist die XY Ebene des festen Systems, welche mit der primären Neigung der Visirebene identisch ist, und die andere Drehungsebene der Sehaxe ist die XZ Ebene des festen Systems, welche der Annahme gemäss rechtwinklig zur Grundlinie (identisch mit der Y Axe) steht. Somit haben wir also beiläufig zwei Drehungsaxen, um welche das Auge wirklich gedreht wird, gefunden in der Z und Y Axe unseres festen Coordinatensystems, und dieses ist, wie sich später herausstellen wird, ein sehr wichtiger Umstand.

Sollte nun aber jenes Princip auch in allen übrigen Stellungen des Auges, ausser der Primärstellung und den Secundärstellungen, in allen Tertiärstellungen eingehalten sein, so musste die bewegliche Z^1 Axe z. B. auch während der ganzen Drehung der Sehaxe aus der Primärstellung in die Richtung AE in der XZ Ebene des festen Coordinatensystems bleiben, d. h. es musste, während der Punkt B sich nach E bewegte, der Punkt D den Theil FD des in der XZ Ebene gelegenen grössten Kreises beschreiben. Wenn aber die Drehung der Kugel, durch welche der Endpunkt der Z^1 Axe einen grössten Kreis in der XZ Ebene beschreibt, eine continuirliche Drehung um eine feste Axe sein soll, so kann durch dieselbe der Endpunkt der X^1 Axe auch nur gleichfalls in diesem grössten Kreise herumgeführt werden, und zwar beide Punkte um gleiche Winkel; für den Weg *FD* des Endpunktes der Z^1Axe kann die feste, in jedem Augenblicke der Bewegung dieselbe bleibende Drehungsaxe nur die *Y*Axe selbst sein. Da aber während dieser Bewegung der Z^1Axe von *AD* nach *AF* in der *XZ* Ebene, die X^1Axe von *AB* nach *AE* geführt werden soll, so kann diese Drehung der Kugel nicht um eine feste Drehungsaxe geschehen, welche während der ganzen Dauer der Bewegung eine und dieselbe Lage behält. Die Drehungsaxe, auf welche sich der Euler'sche Satz bezieht, um welche die Kugel so gedreht werden kann, dass *AB* nach *AE* und *AD* nach *AF* gelangt, erfüllt zwar in diesem einen Augenblicke die geforderte Bedingung, aber auch ausschliesslich nur bei dieser einen bestimmten Drehungsamplitüde, in keinem anderen Augenblicke der um sie stattfindenden Drehung. Der hier gestellten Forderung aber, dass in jedem Augenblicke der Drehung jene Bedingung erfüllt sein soll, kann überhaupt nicht durch eine continuirliche Drehung um eine feste Axe entsprochen werden, sondern in jedem Augenblicke der Drehung muss die Drehungsaxe eine andere sein, oder die augenblickliche Drehungsaxe ändert in jedem Zeitelement ihre Lage im Raume und in der Kugel. Obwohl dieses schon hinlänglich aus dem eben Erörterten hervorgeht, so mag doch hier noch eine Art des Beweises Platz finden, welche auch in anderer Beziehung von Nutzen sein wird.

Statt weniger einfacher Erörterungen kann hier ein Beweis dafür genügen, dass es für eine jede feste Drehungsaxe in der Kugel, welche nicht mit der *Y* Axe oder *Z* Axe selbst zusammenfällt, nur eine Drehungsamplitüde zwischen 0 und 180° giebt, welche die Bedingung erfüllt, dass die Z^1Axe in der *XZ* Ebene des festen Coordinatensystems liegt, an welche ja alle oben besprochnen Consequenzen geknüpft sind.

Wenn in Fig. 1. O wiederum den Endpunkt der Drehungsaxe bedeutet, um welche die Kugel so gedreht werden kann, dass gleichzeitig der Punkt B nach E, der Punkt D nach F gelangt, so ist der in den beiden sphärischen Dreiecken OBE und ODF mit φ bezeichnete Winkel die Drehungsamplitüde für jene zweite Lage der Kugel. Es wird nun noch die Annahme gemacht, AB ist die X^1Axe und AD die Z^1Axe eines in der Kugel festen, mit ihr beweglichen Coordinatensystems, wie in der bisherigen Betrachtung also für die Fig. 2.

Nun ist in dem sphärischen Dreiecke OBE

$$\cos BE = \cos BO \cos EO + \sin BO \sin EO \cos \varphi.$$

Da die beiden Seiten BO und EO gleich sind, so ist

$$\cos BE = \cos BO^2 + \sin BO^2 \cos \varphi.$$

BO aber ist nun offenbar Nichts Anderes, als der Winkel, welchen die Drehungsaxe (AO) mit der X^1Axe (AB) sowohl in ihrer primären, wie in ihrer zweiten Richtung einschliesst; an der Stelle der primären Richtung des beweglichen Coordinatensystems denken wir auch hier ein im Raume festes, und so ist denn BO der Winkel, den die Drehungsaxe mit der festen und beweglichen XAxe einschliesst. Bezeichnen wir nun die drei Winkel, durch welche überhaupt die Lage der Drehungsaxe im festen wie im beweglichen Coordinatensystem bestimmt ist, die ja für beide dieselben sein müssen, der Reihe nach mit a, b, c: so ist also

$$\cos BO = \cos a.$$

BE aber ist der Winkel, welchen die bewegliche X^1Axe mit der festen XAxe einschliesst, einer der neun Winkel, welche die Lage eines zweiten Coordinatensystems bestimmen, welcher mit α bezeichnet werden mag; dann ist also:

$$\cos \alpha = \cos a^2 + \sin a^2 \cos \varphi.$$

Wenn nun ganz analog in dem sphärischem Dreiecke ODF (AD und AF bedeuten die Z und Z^1Axe) DF

mit γ'' *) bezeichnet wird, als der Winkel, welchen die bewegliche Z^1Axe mit der festen ZAxe einschliesst, und $OD = OF$ mit c, wie schon angegeben, so ist:

$$\cos \gamma'' = \cos c^2 + \sin c^2 \cos \varphi.$$

Eine dritte analoge Gleichung wird erhalten für β' *), wenn damit der Winkel bezeichnet wird, welchen die bewegliche Y^1Axe mit der festen YAxe einschliesst, nämlich:

$$\cos \beta' = \cos b^2 + \sin b^2 \cos \varphi.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man

$$\frac{\cos \alpha - \cos a^2}{\sin a^2} = \frac{\cos \beta' - \cos b^2}{\sin b^2} = \frac{\cos \gamma'' - \cos c^2}{\sin c^2} = \cos \varphi. \quad (1)$$

Werden die Zähler und Nenner dieser drei unter sich gleichen Verhältnisse addirt, so ist das Verhältniss der beiden Summen gleich jedem einzelnen Verhältniss, daher

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta' + \cos \gamma'' - 1}{2} = \cos \varphi.$$

Die Winkel α, β', γ'', sind von den neun Winkeln, welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems zu dem festen bestimmen, die drei unabhängig veränderlichen Winkel, und diese allein bestimmen also mit jener Gleichung den Winkel φ, die Drehungsamplitüde, den Winkel um welchen eine Drehung stattfand, um das bewegliche Coordinatensystem aus der primären Lage in die durch α, β', γ'' bestimmte zweite Lage zu bringen. Dieser Winkel φ ist also, wie zu erwarten

*) Die Accente sind diesen Winkelbezeichnungen der Symmetrie halber beigesetzt, weil α, γ'' und β' drei unabhängig veränderliche von den neun mit $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ etc. gewöhnlich bezeichneten Winkeln sind. Die übrigen sechs Winkel werden unten in Betracht kommen.

war, ganz unabhängig von der Lage der Drehungsaxe, oder von den drei Winkeln a, b, c, welche vielmehr selbst in unten zu besprechender Weise abhängig sind von den übrigen sechs jener neun Winkel α, β, γ etc. Diese Unabhängigkeit des Winkels φ von den Winkeln a, b, c heisst Nichts weiter, als dass um jede Drehungsaxe einer Kugel eine Drehung von 360° stattfinden kann, oder dass jede Drehungsamplitüde möglich ist. Wenden wir nun die eben erhaltenen ganz allgemein gültigen Gleichungen auf den am Auge vorliegenden Fall an, so ist der Theil eines grössten Kreises, welcher die Punkte B und E in Fig. 2 verbindet, der Winkel α. Da die Ebene ACH, wie wir oben sahen, die bewegliche X^1Y^1 Ebene ist, so ist der Winkel β', derjenige nämlich, welchen die (in der Figur nicht gezeichnete) Y^1Axe mit der YAxe (AC) einschliesst, offenbar der Winkel, welcher den Winkel CAE zu 90° ergänzt, mithin $\beta' = EAH$. Der Winkel γ'', welchen die Z^1Axe mit der ZAxe einschliesst, ist der Winkel DAF, und dieser ist gleich dem mit d bezeichneten Winkel HAB. Da nun in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke EHB

$$\cos EB = \cos EH \cos d$$

ist, so ist also

$$\cos \alpha = \cos \beta' \cos \gamma''.$$

In unserem Falle also sind die drei Winkel α, β', γ'' nicht drei unabhängig veränderliche Winkel, sondern der Cosinus des einen ist das Product aus dem Cosinus der beiden anderen. Setzen wir nun den Werth $\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma''}$ für $\cos \beta'$ in die Doppelgleichung [1] (S. 39), so ist

$$\frac{\cos \alpha - \cos a^2}{\sin a^2} = \frac{\frac{\cos \alpha}{\cos \gamma''} - \cos b^2}{\sin b^2} = \frac{\cos \gamma'' - \cos c^2}{\sin c^2} = \cos \varphi'$$

wenn mit φ' die Drehungsamplitüde für den speciellen vorliegenden Fall bezeichnet wird.

Aus dem zweiten Verhältniss erhält man:

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma''} = \cos\varphi' \sin b^2 + \cos b^2.$$

Reducirt man die beiden anderen Verhältnisse auf $\cos\alpha$ und resp. $\cos\gamma''$ und dividirt dann, so wird

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma''} = \frac{\cos\varphi' \sin a^2 + \cos a^2}{\cos\varphi' \sin c^2 + \cos c^2}.$$

Mithin ist

$$\cos\varphi' \sin b^2 + \cos b^2 = \frac{\cos\varphi' \sin a^2 + \cos a^2}{\cos\varphi' \sin c^2 + \cos c^2}$$

Wird mit dem Nenner des Ausdrucks rechterseits multiplicirt und $\cos\varphi' - 1 = \psi$ gesetzt, so ist

$$\psi^2 \sin b^2 \sin c^2 + \psi (\sin b^2 + \sin c^2) + 1 = \psi \sin a^2 + 1$$

oder

$$\psi \sin b^2 \sin c^2 + \sin b^2 + \sin c^2 = \sin a^2.$$

Da nun die Summe der Quadrate der drei Sinus $= 2$ ist, so ist

$$\psi \sin b^2 \sin c^2 = 2 (\sin a^2 - 1),$$

mithin

$$\cos\varphi' - 1 = 2 \left(\frac{\sin a^2 - 1}{\sin b^2 \sin c^2}\right)$$

$$\cos\varphi' = 1 + 2 \left(\frac{\sin a^2 - 1}{\sin b^2 \sin c^2}\right)$$

In diesem Ausdruck ist der eingeklammerte Werth negativ, so lange der Winkel a, d. i. der Winkel, welchen die Drehungsaxe mit der X und X^1 Axe einschliesst, kleiner als 90^0 ist. Es ist also bei einer gegebenen Drehungsaxe, bestimmt durch die drei Winkel a, b, c, diejenige Drehungsamplitüde, welche der gestellten Bedingung (die Z^1 Axe in der XZ Ebene) genügt, eine ganz bestimmte, die, deren Cosinus gleich dem eben abgeleiteten Ausdruck, einer Funktion der drei Winkel a,

b, c ist.— Ich will noch hervorheben, dass, wenn der Winkel $a = 90^{0}$ und $\sin a^2 - 1 = 0$ wird, eine jene Bedingung erfüllende Drehungsamplitüde gar nicht existirt, da dann $\cos \varphi' = 1$ wird, und also nur dann, wenn $\varphi' = 0$ ist, d. h. wenn das bewegliche Coordinatensystem sich in der Primärstellung befindet, die Bedingung erfüllt ist. Wenn nämlich $a = 90^{0}$ ist, so liegt die Drehungsaxe in der YZEbene (die Coordinatenaxen selbst haben wir ausgeschlossen), und dann giebt es ausser der Primärstellung, in welcher die Z^1Axe mit der ZAxe zusammenfällt, keine Drehungsamplitüde, in welcher die Z^1Axe nicht ausserhalb der XZEbene läge. Dieses Ergebniss wird später wieder in Betracht kommen. Die Fälle, in welchen eine der Coordinatenaxen selbst die Drehungsaxe ist, sind in jener Gleichung nicht enthalten, nur wenn $\sin a = 0$ ist, die XAxe also die Drehungsaxe ist, ergiebt sich für $\varphi' = 180^{0}$, d. h. die Z^1Axe liegt in der Primärstellung und nach 180^{0} Drehung um die XAxe in der XZEbene; die beiden anderen Fälle, wenn die Z oder YAxe Drehungsaxe ist, bedürfen keiner Erörterung, es versteht sich von selbst, dass dann die Z^1Axe stets in der XZEbene gelegen ist.

Gehen wir zurück zu den mechanischen Voraussetzungen, welche das verlangte Princip der Bewegung des Auges erforderte, so musste also die Drehungsaxe in jedem Augenblicke der Bewegung eine andere sein, oder die augenblickliche Drehungsaxe musste selbst sich bewegen. Von dieser Bewegung derselben können wir im Allgemeinen Folgendes aussagen: der Winkel, welcher bisher mit φ' bezeichnet wurde, hat bei der augenblicklichen Drehungsaxe, welche nur die für ein Zeitelement der Bewegung feste Axe vorstellt, nicht die Bedeutung als Drehungsamplitüde, denn letztere ist für die augenblickliche Drehungsaxe nur ein Differential von φ'; greifen wir aber irgend eine augenblickliche Drehungsaxe von denen heraus, um welche in den einzelnen Zeitelementen die verlangte Drehung erfolgt, so bedeutet φ' den Winkel, welchen zwei sich im Endpunkt dieser augenblicklichen Drehungsaxe schneidende grösste Kreise einschliessen, von denen der eine diesen Endpunkt der augenblicklichen Drehungsaxe mit der primären Lage des Endpunktes z. B. der X^1Axe (Sehaxe) verbindet, der andere den Endpunkt der augenblichen Drehungsaxe mit der Lage des Endpunktes der X^1 Axe, welche derselbe nach der unendlich kleinen Drehung um jene augenblickliche Drehungsaxe erreicht hat. Es würde hier zu weit abführen, wenn wir aus obiger Gleichung

$$\varphi' = \text{arc cos} \left(1 + 2 \frac{\sin a^2 - 1}{\sin b^2 \sin c^2}\right)$$

die Differentialgleichung ableiten wollten, nach welcher sich die drei nicht von einander unabhängigen Grössen a, b, c verändern bei stetiger Zunahme des Winkels φ'. Die augenblickliche Drehungsaxe ist die Axe des aus den einzelnen an der Kugel zugleich wirksamen Drehungsmomenten resultirenden Moments*), um welche sich die Kugel in irgend einem Zeitelement wirklich dreht. Im Allgemeinen wird bei einer um ihren festen Mittelpunkt drehbaren Kugel die augenblickliche Drehungsaxe überhaupt so betrachtet, dass dieselbe in jedem Zeitelement der Bewegung ihre Lage im Raume und im Körper zugleich ändert (Poinsot**); und zwar wird diese Bewegung der augenblicklichen Drehungsaxe dargestellt durch die Rotation eines in der Kugel gedachten Kegels, dessen Spitze im Drehpunkt, auf einem im Raume fest gedachten Kegel, dessen Spitze gleichfalls im Drehpunkt: die augenblickliche Berührungslinie dieser

*) Von einer schon bestehenden Geschwindigkeit wird beim Auge abgesehen, wie schon oben bemerkt wurde.

**) Poinsot, Neue Theorie der Drehung der Körper. Uebersetzt von Schellbach. Berlin 1851.

beiden Kegel ist die augenblickliche Drehungsaxe. Der Radius der Grundflächen beider Kegel kann = 0 werden, die Kegel also zu Linien, dann ist die augenblickliche Drehungsaxe fest im Raume und im Körper, die Kugel dreht sich um eine feste Axe. In unserem Falle nun würden die Radien der beiden Kegelgrundflächen endliche Grössen sein, auf deren Bestimmung und Verhältniss zu einander hier jedoch ebenfalls nicht eingegangen werden kann. Es genügt, aus dem Angeführten zu ersehen, dass in unserm Falle die augenblickliche Drehungsaxe sich bewegen muss, und zwar in durchaus regelmässiger, streng gesetzmässiger Weise. Die Anforderung nun, welche dadurch an die Mechanik der Augenmuskeln gestellt wird, ist die, dass das Verhältniss der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten, welche in Bezug auf die festen oder beweglichen Coordinatenaxen stattfinden, oder welche den rechtwinkligen Componenten der augenblicklichen drehenden Bewegung entsprechen, in jedem Zeitelemente der Bewegung sich in bestimmter, gesetzmässiger Weise ändern muss, dass also das Verhältniss, in welchem die bei einer Drehung des Auges zugleich thätigen Muskeln wirksam sind, in jedem Augenblicke sich ändern muss, und zwar wiederum für jede Richtung, in welcher die Sehaxe bewegt werden soll, in besonderer, streng gesetzmässiger Weise. Eine Unveränderlichkeit der augenblicklichen Drehungsaxe setzt voraus, dass die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten der rechtwinkligen Componenten der Drehung während der ganzen Dauer der Bewegung in einem constanten Verhältniss stehen. (Dies ist die Bedingung, auf welche in der Einleitung schon hingewiesen wurde, welche beim Auge, wie wir sehen werden, nahezu erfüllt ist, wie das auch viel eher, als das Gegentheil, von vorn herein zu erwarten ist.)

Jetzt sind wir also im Stande, eine genügendere Antwort zu geben auf die Frage, weshalb die Drehungen des Auges nicht nach einem Princip erfolgen, welches unbestreitbar und erlaubter Weise als dasjenige bezeichnet werden kann, welches für binoculares Sehen oder für das Sehorgan von allen das vortheilhafteste und zweckmässigste sein würde: wir brauchen nicht anzustehen, dem einen schon besprochenen Moment, welches aus der Grösse des Winkels n für das monoculare Sehfeld resultirte, das zweite in der Mechanik begründete Moment hinzuzufügen, wonach die Realisirung jenes Princips einen äusserst complicirten Mechanismus beim Zusammenwirken der Augenmuskeln bei jeder einzelnen Bewegung erheischen würde, wie eben besprochen wurde, eine nach den kleinsten Zeitelementen und in der manchfachsten Weise gesetzmässig veränderliche Contractionsenergie jedes Augenmuskels, die auf entsprechend veränderliche Innervationsgrössen und auf den verwickeltsten physiologischen Mechanismus gleichsam in dem Centralorgan für die Augenbewegungen zurückgeführt werden müsste.

In der Lage des Auges, welche nun nach den wichtigsten Seiten hin besprochen ist, ist eine der Gränzen enthalten, zwischen welchen die wahre Lage des Auges in Tertiärstellungen der Sehaxe gesucht werden muss: es schliesst nämlich die bewegliche X^1Z^1 Ebene, bisher durch die Ebene AFE repräsentirt, mit der senkrecht zur festen XY Ebene stehenden Ebene ADE keinenfalls einen Winkel ein, welcher grösser ist als der Winkel n, so dass die wahre Lage der X^1Z^1 Ebene nicht über die Ebene AFE hinaus geneigt (in dem gezeichneten Falle nicht nach innen zu) gesucht werden kann. Dieses geht aus der folgenden Ueberlegung hervor. Es liegt, wie oben schon erörtert wurde, das Retinabild einer im fixirten Punkte senkrecht zur Visirebene stehenden Linie in dem grössten Kreise EF. Die Versuche ergeben nur, wie früher mitgetheilt ist, dass dieses Retinabild in Tertiärstellungen mit der Trennungslinie identischer Netzhauthälften oder mit dem grössten Kreise, in welchem das entsprechende Retinabild jener Linie in der Primärstellung enthalten ist, einen Winkel einschliesst. Dieser Winkel, von dessen Grösse noch ganz abstrahirt werden kann, ist von der Art (in Bezug auf seine Richtung), dass z. B. bei einer Tertiärstellung, wie die in Fig. 2. gezeichnete, in welcher die Sehaxe nach oben und innen (von der Primärstellung aus gerechnet) gerichtet ist, derselbe sich darstellt als eine auf die positive Halbaxe der X^1 oder der Sehaxe zu beziehende Drehung des Auges. Wenn die X^1Z^1 Ebene unter einem Winkel η gegen die Ebene ADE geneigt wäre, welcher grösser ist als der Winkel n, wenn also das Retinabild jener Linie allerdings einen Winkel mit der verticalen Trennungslinie identischer Netzhauthälften einschliessen würde, nämlich den Winkel $\eta - n$, so würde dieser Winkel so gelegen sein, dass er als eine auf die negative Halbaxe der x' projicirte Drehung angesehen werden müsste. Es kann somit der Winkel η, d. i. der Winkel, welchen die X^1Z^1 Ebene wirklich einschliesst mit der Ebene ADE, welchen wir suchen werden, nicht grösser sein, als der Winkel n; der Winkel n selbst kann es ebenfalls nicht sein, weil dieser ja, wie wir sahen, für binoculares Sehen gar keine auf die optische Axe zu projicirende Drehung zur Folge haben würde; es kann also der Winkel η nur kleiner sein als der Winkel n. Wir müssen jetzt untersuchen; ob der Winkel η nicht $= 0$ sein kann.

§. 4.

Die im vorigen Paragraphen besprochene Lage des Auges wurde zuerst erhalten dadurch, dass wir zwei successive Drehungen, und zwar zuerst eine Drehung um die Y^1Axe, dann um die Z^1Axe eintreten liessen. Um nun zu jener ersten Gränzlage, als welche sie am Schlusse des Paragraphen erkannt wurde, die zweite hinzuzufügen, vertauschen wir nur die Reihenfolge der beiden successiven Drehungen. Wird das bewegliche Coordinatensystem zuerst um die mit der festen gleichnamigen Axe zusammenfallende Z^1Axe gedreht, bis die X^1Axe die Richtung AK erhält (Fig. 2.), und geschieht dann eine Drehung um die Y^1Axe, welche nun selbst eine neue Lage in der festen XY Ebene erhalten hat (welche in der Figur nicht gezeichnet ist), so wird die X^1Axe ebenfalls wiederum in die Richtung AE gelangen; aber da die Z^1Axe jetzt an der zweiten Drehung participirt hat, so wird dieselbe nun die Lage AG erhalten (in dem Octanten der negativen x und negativen y), indem nämlich der Winkel $DG =$ dem Winkel EK ist, und die X^1Z^1Ebene, jetzt repräsentirt durch die Ebene AGE, steht senkrecht zu der XY Ebene des festen Systems.

War nun die im vorigen Paragraphen besprochne Gränzlage dadurch geometrisch characterisirt, dass die bewegliche Z^1Axe in der festen XZ Ebene lag, so ist die jetzt blos durch Vertauschung der Reihenfolge der beiden successiven Drehungen erhaltene Lage geometrisch dadurch characterisirt, dass die feste ZAxe in der beweglichen X^1Z^1Ebene liegt. Bei Uebertragung dieser Lage des Coordinatensystems auf das Auge, wird dieselbe sich wiederum als eine ganz besondere, zumal von der zuerst betrachteten verschiedene herausstellen. Wenn man aber von gewissen Dignitäten der Axen des beweglichen Coordinatensystems abstrahirt, die, sobald durch dasselbe das Auge repräsentirt wird, von selbst in die Betrachtung eingeführt werden, wenn man den Fall rein geometrisch nimmt, so ist die jetzt erhaltene Lage der Kugel nicht wesentlich verschieden von der früheren, denn sie kann auch dadurch characterisirt werden, dass jetzt die bewegliche Y^1Axe in der festen XYEbene geblieben ist, so wie vorher die Z^1Axe in der festen XZEbene. Dies hervorzuheben ist deshalb von Wichtigkeit, weil nun von vorn herein erwartet werden muss, dass die mechanischen Voraussetzungen für die jetzt in Frage gestellte Lage des Auges, sobald wir dieselbe zum Princip erheben wollten, keine durchgreifenden Verschiedenheiten darbieten werden von denen, welche jenes erste Princip verlangte. Die physiologischen Consequenzen aber, bei deren Berücksichtigung natürlich ganz besonders die verschiedene Dignität der Axen des beweglichen Systems in's Gewicht fällt, werden sehr verschieden sein.

Unmittelbar an das Frühere anknüpfend ist bekannt, dass das Retinabild der im fixirten Punkte zur Visirebene senkrechten Linie in den grössten Kreis FE fällt. Da jetzt aber die Lage der beweglichen X^1Z^1Ebene durch die Ebene AGE repräsentirt ist, so liegen die Retinapunkte, welche in der Primärstellung in dem verticalen Meridiane DB lagen und das Retinabild der entsprechenden Linie enthielten, jetzt in dem grössten Kreise GE. Entsprach DB (alle Kreise werden auf die Netzhautfläche fortgesetzt gedacht) der verticalen Trennungslinie identischer Netzhauthälften in der Primärstellung, so entspricht dieser nun, in der zweiten Lage, der Kreis GE, welcher mit dem Kreise, der das Retinabild jener Linie in der zweiten Lage enthält, nämlich mit FE, den Winkel n einschliesst. Wurde in der Primärstellung jene Linie einfach gesehen, so wird die entsprechende jetzt in der zweiten Lage in vom fixirten Punkt aus divergirenden Doppelbildern erscheinen, welche mit einander über und unter dem fixirten Punkte einen Winkel von der Grösse $= 2n$ einschliessen. Der Winkel n ist natürlich ganz derselbe, welcher schon früher, damals aber in Bezug auf das monoculare Sehfeld, in Betracht kam, dessen

$$\cot n = \frac{\cot d}{\sin r}.$$

Die jetzt in Frage stehende Lage des Auges würde also für das binoculare Sehen mit einer auf die optische Axe projicirten Drehung verbunden sein, von derselben Grösse, wie sie vorher in Bezug auf die mit dem Auge in Verbindung stehenden Theile vorhanden war. Dagegen hat in dieser letzteren Hinsicht jetzt keine auf die optische Axe projicirte Drehung stattgefunden, denn die X^1Z^1Ebene steht senkrecht zu der XYEbene des festen Coordinatensystems. Diese Lage des Auges bildet also in physiologischer Beziehung gradezu den Gegensatz zu der zuerst besprochnen; so wie letztere für binoculares Sehen die vortheilhafteste war, auf Kosten der für jedes einzelne Auge, für sich betrachtet, stattfindenden Drehung um den Winkel n, so ist erstere die vortheilhafteste Lage in dieser Beziehung, auf Kosten des binocularen Sehens, in welchem nun derselbe Winkel n sich geltend macht. Das Vorzeichen, welches der Winkel n jetzt erhalten muss, oder die Richtung, in welcher die auf die optische Axe projicirte Drehung jetzt für binoculares Sehen stattfindet, wird entgegengesetzt dem frühern sein müssen; denn für binoculares Sehen ist die Ebene AFE der Ausgangs- oder Beziehungspunkt, der Nullpunkt für diese Drehung; für das monoculare Sehfeld dagegen, wie wir die Beziehung oben bezeichnet haben, in welcher der Winkel n im vorigen Paragraphen auftrat, bildet die Ebene ADE den Ausgangs- oder Nullpunkt dieser Drehung um die optische Axe. Es muss also jetzt der Winkel n auf die positive Halbaxe der Sehaxe bezogen werden, wenn diese nach Innen und Oben, und wenn sie nach Aussen und Unten (auf die Primärstellung bezogen) gerichtet ist; dagegen auf die negative Halbaxe der Sehaxe, wenn sie nach Innen und Unten und wenn sie nach Aussen und Oben gerichtet ist.

Es wurde schon angedeutet, dass die mechanischen Voraussetzungen, welche ein nach der eben betrachteten Lage des Auges formulirtes Princip erfordern würde, dass nämlich in allen Stellungen die bewegliche X^1Z^1Ebene so gelegen sei, dass sie die feste ZAxe enthält, ganz ähnlich denen sind, welche für das zuerst betrachtete Princip gefunden wurden. Wir müssen sie aber doch etwas näher ins Auge fassen, zumal da es auf den ersten Blick wohl so scheinen könnte, als ob wir schon das wirkliche Gesetz, wonach sich das Auge dreht, gefunden hätten, sofern meine früheren Versuche ergaben, dass ein solcher Winkel, wie der Winkel n, für's binoculare Sehen in den Tertiärstellungen existirt, und auch die Abwesenheit einer Drehung um die optische Axe in Bezug auf die mit dem Auge verbundenen Theile der gewöhnlichen Annahme zu entsprechen scheint.

Auch bei dem jetzt zu besprechenden Princip giebt es für jede Drehungsaxe nur eine bestimmte Drehungsamplitüde φ'', in welcher jene Bedingung erfüllt ist, und zwar ist dieses φ'' durch ganz dieselbe Gleichung von den drei Winkeln a, b, c, welche die Lage der Drehungsaxe bestimmen, abhängig, weil zwischen diesen drei sonst unabhängig veränderlichen Winkel α, β', γ'' (vergl. oben) dieselbe Beziehung stattfindet, wie früher.

Es ist nämlich wiederum der Winkel, welchen die X^1Axe mit der XAxe einschliesst,

$$\alpha = EAB \text{ oder } EB.$$

$\beta' = KAB$ oder KB, denn die Y^1Axe liegt in der XYEbene und schliesst mit der YAxe den

Winkel ein, welcher den Winkel *CAK*, den die Projection der X^1Axe (*AK*) mit der *Y*Axe einschliesst, zu 90^0 ergänzt. — Endlich ist der Winkel

$$\gamma'' = GAD = EAK = EK.$$

Da nun in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke *EKB*

$$\cos EB = \cos KB \cos EK \text{ ist,}$$

so ist also

$$\cos \alpha = \cos \beta' \cos \gamma'',$$

dieselbe Beziehung, welche wir oben hatten.

Es findet daher auch wiederum zwischen der Drehungsamplitüde, welche der in Rede stehenden Bedingung genügt, welche, nur auf eine andere Axe bezogen (Y^1Axe), ganz dieselbe ist, wie früher, die Beziehung statt:

$$\cos \varphi'' = 1 + 2\left(\frac{\sin a^2 - 1}{\sin b^2 \sin c^2}\right).$$

Hiernach, bei diesen ganz gleichen Werthen für φ' (s. oben) und φ'', könnte es nun scheinen, als ob bei einer durch die drei Winkel a, b, c bestimmten Drehungsaxe eine und dieselbe Drehungsamplitüde $\varphi' = \varphi''$ sowohl der ersten, als der jetzt in Rede stehenden Bedingung genügte, worin ein Widerspruch enthalten sein würde. Dieser scheinbare Widerspruch wird sich aber sogleich erklären, wenn man berücksichtigt, dass die drei Winkel a, b, c die Lage der Drehungsaxe noch gar nicht vollkommen bestimmen, was erst jetzt in Betracht gezogen zu werden brauchte. In den durch die Cosinus der drei Winkel a, b, c ausgedrückten Coordinaten sind nämlich acht Drehungshalbaxen enthalten, wie sich das später noch besonders bei der Ableitung dieser drei Cosinus aus den neun Winkeln, welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems bestimmen, ergeben wird, wodurch man beiläufig ganz unwillkührlich und allein durch die Gleichungen auf die gebräuchliche Unterscheidung der beiden Halbaxen für die zwei Richtungen der Drehung um einen Durchmesser geführt wird. In jedem Octanten der Kugel nämlich kann eine durch die drei Winkel a, b, c bestimmte Drehungshalbaxe gelegen sein. Aus diesem Umstande wird sich jener Widerspruch erklären. Da alle die Lagen, in welche das bewegliche Coordinatensystem bei der Drehung um eine Halbaxe kommt, auch erreicht werden, in umgekehrter Reihenfolge, bei Drehung um die zugehörige andere Halbaxe, so vereinfacht sich hier die Betrachtung zunächst dahin, dass wir nur vier durch jene drei Winkel bestimmte Halbaxen zu berücksichtigen brauchen. Diese vier Halbaxen lassen sich nun aber hier für unseren Zweck noch wieder auf zwei reduciren, entsprechend φ' und φ''. Offenbar wird nämlich das bewegliche Coordinatensystem oder, wenn der Einfachheit wegen nur die Z^1Axe z. B. in Betracht gezogen wird, diese Axe bei der Drehung um die eine jener vier Halbaxen successive solche Lagen erhalten, deren Coordinaten auf den festen Axen dieselben sind, welche, mit entgegengesetztem Zeichen der x und y, die in derselben Aufeinanderfolge stattfindenden Lagen der Z^1Axe haben, wenn um diejenige der übrigen drei Halbaxen gedreht wird, welche der ersteren grade gegenüber in dem Octanten mit entgegengesetztem Zeichen der x und y liegt. Durch ein Beispiel wird dies anschaulicher werden: eine durch die drei Winkel a, b, c bestimmte Drehungsaxe soll in dem Octanten der positiven z und negativen x und y (Fig. 2.) gelegen sein; bei der Drehung um dieselbe soll bei der Drehungsamplitüde φ' die bewegliche Z^1Axe die Lage AF erhalten, also in der festen XZ Ebene liegen; ihre Coordinaten sind dann $+ z$, und $- x$. Wenn dann eine Drehung um eine durch dieselben drei Winkel a, b, c bestimmte Drehungsaxe geschieht, welche in dem Octanten der positiven z und der positiven x und y liegt, also jener ersten grade gegenüber, so wird bei derselben Drehungsamplitüde φ' (die Drehung stets im Sinne des Uhrzeigers gedacht) die Z^1Axe ebenfalls in der XZ Ebene liegen, und zwar werden die Coordinaten dieser Lage z' und x' gleich sein den vorigen Coordinaten z und x, aber x' wird positiv sein, während x negativ war. Daher fallen nun für unsere Betrachtung, in welcher es nicht auf die Vorzeichen der Coordinaten ankommt, sondern nur auf die Coordinatenebenen, die beiden eben besprochnen Fälle zusammen, für beide durch a, b, c bestimmte Halbaxen gilt ein und dasselbe φ'. So reduciren sich also jene vier Halbaxen hier auf zwei differente, indem nämlich für die beiden noch übrigenen der durch a, b, c bestimmten Halbaxen dasselbe gilt, wie für jene beiden; von ihnen ist die eine in dem Octanten der positiven x und negativen y, die andere in dem der negativen x und positiven y, beide mit positiven z, gelegen. Diese beiden Halbaxen sind nun nämlich diejenigen, für welche, wie das eben unsere Gleichungen ergeben, dieselbe Drehungsamplitüde $\varphi' = \varphi''$, bestimmt durch obige Function von a, b, c, nicht der Bedingung: Z^1Axe in der XZ Ebene, sondern dem Entgegengesetzten entspricht, nämlich unserm zweiten Prinzip: die feste ZAxe in der beweglichen $X^1 Z^1$ Ebene, oder die Y^1Axe in der XY Ebene. Obwohl also in den obigen Gleichungen

$$\cos \varphi' = \cos \varphi'' = 1 + 2 \left(\frac{\sin a^2 - 1}{\sin b^2 \sin c^2} \right)$$

der Werth der beiden Drehungsamplitüden ganz derselbe ist, so ist dennoch die Bedingung, welche diese Drehungsamplitüde erfüllt, eine ganz verschiedene, je nachdem die durch die Winkel a, b, c bestimmte Drehungsaxe in dem einen oder anderen Paar einander gegenüberliegender Octanten angenommen wird. In welchem derselben sie angenommen werden müsste für die Erfüllung der einen oder der anderen Bedingung durch φ', oder umgekehrt, welche der beiden Bedingungen φ' bei ganz bestimmter Drehungsaxe erfüllt, ist nicht aus den hier in Anwendung kommenden Gleichungen zu ersehen, und ein weiteres Eingehen hierauf würde hier nicht am Platze sein; die Beurtheilung ist indessen in jedem Falle einfach. Eine Drehungshalbaxe, für welche bei irgend einer Drehungsamplitüde die Z^1Axe in die Richtung AF gekommen ist, wird nur in dem Octanten der negativen x und y gesucht werden können, und ebenso eine Drehungshalbaxe, für welche bei irgend einer Amplitüde die Z^1Axe in die Lage AG gekommen ist, nur in dem Octanten der positiven x und negativen y.

Nach dieser, durch den Gang der Untersuchung nothwendig gewordenen Abschweifung kehren wir zu dem zweiten Princip zurück, welches bei den Drehungen des Auges eingehalten werden sollte. Dasselbe kommt also, wie wir sahen, in seinen mechanischen Voraussetzungen darin mit dem zuerst besprochnen Principe überein, dass die augenblickliche Drehungsaxe ebenfalls in jedem Zeitelement der Bewegung ihre Lage ändern muss; sie muss sich ebenfalls bewegen, und zwar im Allgemeinen in derselben Weise, wie im ersten Falle (in entgegengesetzter Richtung aber, worauf wir nicht näher eingehen). Diese wiederum durchaus gesetzmässige Bewegung der augenblicklichen Drehungsaxe würde also auch ganz analoge Anforderungen an die Wirkungsweise der einzelnen gleichzeitig thätigen Muskeln stellen, wie das oben angedeutet wurde.

Während es nun bei dem zuerst supponirten Bewegungsprincipe sogleich offenbar war, dass dasselbe am Auge nicht realisirt ist, weil die nächsten und allgemeinsten Ergebnisse der Versuche beweisen, dass jener in demselben bedingte Vorzug für das binoculare Sehen in der That nicht erreicht ist, sondern dass eine auf die optische Axe projicirte Drehung in den Tertiärstellungen stattfindet; so bedarf es dagegen bei dem zweiten in Frage gestellten Principe schon einer näheren Prüfung, um zu entscheiden, ob dasselbe realisirt ist oder nicht. Zunächst leuchtet sogleich ein, dass bei den Drehungen des Auges, durch welche die Sehaxe aus der Primärstellung in die oben schon als Secundärstellungen aufgeführten Richtungen gebracht wird, nämlich bei Drehungen um die Y und Z Axe selbst, auch dieses Princip, wie das erste, ohne Weiteres eingehalten ist, dass dasselbe für diese Drehungen ebenfalls in dem noch unbekannten allgemeinen Princip enthalten sein muss; die feste Z Axe liegt in allen Secundärstellungen in der beweglichen X^1Z^1 Ebene, und daher vereinigen denn auch die Secundärstellungen mit dem Vorzuge, den das erste Princip für das binoculare Sehen gewährte, den Vorzug, welchen das zweite Princip für das monoculare Sehfeld mit sich bringt: es findet bei diesen Stellungen eine auf die optische Axe projicirte Drehung weder in Bezug auf binoculares Sehen, noch in Bezug auf die mit dem Auge in Verbindung stehenden Theile statt. Ob nun das zweite Princip ein allgemeines ist, ob alle Bewegungen des Auges danach erfolgen, wird zu entscheiden sein, einerseits dadurch, dass das Auge dann in den Tertiärstellungen ebenfalls durchaus keine auf die optische Axe projicirte Drehung in seiner Orbita erleiden dürfte, anderseits durch den Winkel n, der beim binocularen Sehen vorhanden sein müsste. Das erste Kriterium ist sehr unsicher und trügerisch; es wird mehrfach behauptet, es sei durchaus keine Drehung z. B. eines markirten Irispunktes oder von Conjunctivalgefässen bei irgend welchen Bewegungen des Auges wahrzunehmen, und doch finden solche Drehungen statt, wie wir sehen werden, sie müssen stattfinden, wenn sie auch so klein sein mögen, dass sie sich der immer nur ungenau möglichen Beobachtung entziehen. Wir halten uns demnach wiederum an das binoculare Sehen, an den Winkel *n*, und zunächst muss verglichen werden, ob die Richtung der Drehung, der dieser Winkel entspricht, übereinstimmend ist mit der Richtung der Drehung, welcher der wirklich beim binocularen Sehen vorhandene Winkel (der Doppelbilder) entspricht.

In der gezeichneten Tertiärstellung, in welcher die Sehaxe nach oben und innen gerichtet ist, und das Retinabild einer in bekannter Weise gelegenen Linie in der Ebene *AFE* liegt, während die X^1Z^1Ebene durch die Ebene *AGE* repräsentirt wird, muss der Winkel *n* auf die positive Halbaxe der Sehaxe bezogen werden, wie schon oben erörtert, und allerdings stimmt hiermit die Richtung der auf die optische Axe projicirten Drehung überein, welche sich bei ähnlicher Augenstellung wirklich bei den Versuchen mit Doppelbildern herausstellt. So muss also die Grösse des Winkels *n* in Betracht gezogen und mit der Grösse der beobachteten Drehung verglichen werden. Es ist aber nicht nothwendig, hier die speciellen Rechnungen und Belege dafür aufzuführen, dass der Winkel *n* zu gross ist, um auch nur in der approximativen Weise, wie sie billig erwartet werden dürfte, mit der Beobachtung übereinzustimmen. Unten werden numerische Werthe des Winkels *n* folgen.

§. 5.

Es ist nun die zweite der Gränzen gefunden, zwischen denen die wahre Lage des Auges zu suchen ist, denn wir wissen jetzt ganz gewiss, dass die X^1Z^1 Ebene dann, wenn die X^1Axe die Richtung *AE* hat, nur zwischen den beiden Ebenen *AFE* und *AGE* gelegen sein kann.

Der Winkel n ist für binoculares Sehen nicht $= 0$, deshalb konnte AFE nicht die Lage der X^1Z^1 Ebene sein; das Vorzeichen des Winkels verwies die X^1Z^1 Ebene jedenfalls nach der Ebene AGE zu; und AGE selbst als X^1Z^1 Ebene ergiebt in dem Winkel n einen zu grossen Werth für die Disorientirung der Netzhäute bei binocularem Sehen. — So wie geometrisch die wahre Lage des Auges zwischen den beiden analysirten Gränzlagen liegen wird, so wird sie auch in ihren physiologischen Consequenzen nur die Mitte halten können zwischen denen der beiden Gränzlagen. Eine Tertiärstellung, in welcher die auf die optische Axe projicirte Drehung sowohl für's binoculare Sehen, wie für den Augapfel an und für sich gleich Null wäre, kann es nicht geben, die vollständige Erfüllung der einen dieser beiden Anforderungen kann nur auf Kosten der Vernachlässigung der anderen geschehen. Der Winkel n also ist, wie das schon oben angedeutet wurde, immer vorhanden; entweder konnte er ungetheilt allein im gemeinschaftlichen Sehfelde, oder ebenfalls ungetheilt, mit dem entgegengesetzten Zeichen (die Richtung der Drehung bedeutend), im monocularen Sehfelde vorhanden sein; die dritte Möglichkeit ist die, dass der Winkel n getheilt ist, ein Theil ist im gemeinschaftlichen Sehfelde als auf die optische Axe projicirte Drehung, von der Ebene AFE aus gerechnet, vorhanden, der andere im Sehfelde jedes einzelnen Auges ebenfalls als auf die optische Axe projicirte Drehung, die hier aber von der Ebene ADE aus gerechnet werden, also das entgegengesetzte Zeichen haben muss; und so ist es in der That am Auge der Fall. Es kommt nun also darauf an, die Grösse eines dieser beiden Theile des Winkels n zu bestimmen.

Die zweite der zu Anfang aufgestellten Fragen war, die Art der Einschränkung der Drehungsaxen, die Art des Gesetzes zu bestimmen. Wir wollen zunächst versuchen, hierauf eine Antwort aus dem bisherigen Ergebniss zu entnehmen. In den beiden im zweiten und dritten Paragraphen besprochnen Principien, wonach das Auge hätte gedreht werden können, wenn der Ausdruck erlaubt ist, wurde, ohne zunächst auf die Drehungsaxen selbst Rücksicht zu nehmen, vom physiologischen Gesichtspunkt ausgehend das Principielle in gewissen stets gleich bleibenden Lagenverhältnissen der an Stelle des Auges gesetzten Coordinatenaxen gesucht, Lagenverhältnisse der Z^1 Axe oder Y^1 Axe, welche bei allen möglichen Richtungen der X^1 Axe (Sehaxe) ein und dieselben bleiben sollten. Dies war a priori ein vollkommen gerechtfertigter Gang der Untersuchung; aber es stellte sich heraus, dass bei derartigen Principien die Drehungsaxen durchaus nicht unmittelbar auf irgend einen Theil der Kugel etwa beschränkt werden, dass sogar feste Drehungsaxen mit ihren einfacheren Voraussetzungen gar nicht ausreichen zur Realisirung solcher Principe, sondern dass die augenblickliche Drehungsaxe in jedem Zeitelement in der gesetzmässigsten Weise ihre Lage ändern, und ein dem entsprechendes äusserst complicirtes Zusammenwirken der Augenmuskeln stattfinden musste. Dass ganz analoge Verhältnisse verlangt sind, wenn irgend ein anderes Princip derselben Art realisirt sein sollte, wenn die Z^1 Axe z. B. irgend eine andere, aber auch wiederum für alle Stellungen gleichbleibende Lage haben sollte, ist durch die beiden betrachteten Beispiele bewiesen. Diese beiden, jedes in besonderer Weise, vortheilhaftesten Principe dieser Art, sind nun am Auge weder das eine noch das andere realisirt; mit grosser Wahrscheinlichkeit darf geschlossen werden, dass ein Hauptmoment gegen das eine wie gegen das andere dieser beiden Principe in den mechanischen Voraussetzungen, welche dasselbe machen würde, gelegen ist, zumal wenn man bedenkt, dass für die Realisirung des zuerst besprochenen, welches für binoculares Sehen das vortheilhafteste gewesen sein würde, die Befestigungsweise des Sehnerven und die der Conjunctiva etc. ebensowohl hätte adaptirt sein können, wie für das wirklich am Auge realisirte Princip, welches gleichfalls eine, wenn auch geringere Drehungs- oder Torsionsfähigkeit jenerTheile verlangt. So werden wir also darauf geführt, dass das Principielle, wornach wir suchen, überhaupt nicht in solchen bestimmten, constanten Lagenverhältnissen der einen oder anderen Coordinatenaxe gesucht werden muss, sondern vielmehr, denn hier giebt es nur eine Alternative, in bestimmten, stets gleichbleibenden Lagenverhältnissen der Drehungsaxe selbst, von der wir ausserdem, wie von vorn herein, nun aber berechtigt postuliren können, dass die augenblickliche Drehungsaxe für die ganze Dauer der Bewegung eine und dieselbe bleibt, die Drehungen um feste Axen erfolgen. Sucht man nun nach solchen constanten Lagenverhältnissen für jede Drehungsaxe, um die das Auge aus ein und derselben Anfangsstellung wirklich gedreht werden möchte, so bietet sich offenbar zunächst und als das Einfachste eine Ebene dar, in welcher alle diese Drehungsaxen vielleicht enthalten sein könnten.

Der geometrische Ort für die Drehungsaxe, welche der ersten (*AB*) und zweiten Richtung der Sehaxe *AE* entspricht, ist bekannt, denn der geometrische Ort für den Endpunkt derselben ist, wie wir oben sahen, der in der Mitte des Kreisbogens *BE* senkrecht zu demselben stehende grösste Kreis. Sucht man nun auf diesem geometrischen Orte die Endpunkte der beiden festen Drehungsaxen, um welche das Auge aus der Primärstellung in die beiden bekannten Gränzlagen (ohne Berücksichtigung der Zwischenlagen) geführt werden kann, so liegt, wie schon angeführt wurde, die Axe für die durch die Ebene *AFE* als X^1Z^1 Ebene characterisirte Gränzlage in dem Octanten der negativen x und y, die Axe für die durch die Ebene *AGE* als $X^1 Z^1$ Ebene charakterisirte Gränzlage in dem Octanten der positiven x und negativen y. Der die Endpunkte dieser beiden Axen verbindende Theil des grössten Kreises, jenes geometrischen Ortes, ist nur klein, jene Punkte liegen nahe beisammen, und zwischen diesen beiden Endpunkten schneidet der geometrische Ort die *XY* Ebene des festen Coordinatensystems. Die *XY* Ebene kann also die zu suchende Drehungsaxe für unsere zweite Richtung der Sehaxe enthalten, sie liegt innerhalb des bedeutend eingeschränkten geometrischen Orts. Wir werden sehen, dass die *XY* Ebene die Drehungsaxe enthalten muss.

Jetzt müssen wir eine Betrachtung wieder aufnehmen, welche schon im Anfang angestellt, aber unterbrochen wurde, weil es gut und nothwendig schien, auf ihr Endresultat durch die zwischengeschobenen Untersuchungen vorzubereiten und hinzuleiten. Es wurde nämlich schon besprochen, dass sowohl eine aprioristische Deduction, wie die experimentelle Erfahrung den Satz rechtfertigen, dass diejenige Lage, welche das Auge bei irgend einer zweiten Stellung der Sehaxe erhalten soll, eine constante sein muss, welche wiederkehrt, wie oft und auf welche Weise auch die Sehaxe in jene zweite Richtung gebracht wird; es soll also die Lage des Auges bei einer zweiten Richtung der Sehaxe ganz unabhängig sein von dem Wege, auf welchem die Sehaxe dahin geführt wurde. Gesetzt nun, z. B. die Drehungsaxe für diejenige Bewegung des Auges, durch welche die Sehaxe aus der primären Richtung *AB* (Fig. 3.) in die Richtung *AE* geführt wird, läge in der *XY* Ebene des festen Coordinatensystems *(AO)*. Dann steht also diese Drehungsaxe senkrecht zur primären und folglich auch zur zweiten oder tertiären Richtung der Sehaxe, und die Ebene, in welcher letztere gedreht wird, ist die durch die primäre und tertiäre Richtung gelegte Ebene, der Weg, welchen der Punkt *B* beschreibt, ist der grösste Kreis *BE*. — Könnte nun, um die Sehaxe aus der Primärstellung in eine andere zweite Lage, z. B. *AN* überzuführen, das Auge um eine nicht in der *XY*Ebene gelegene Drehungsaxe gedreht werden, also z. B. um eine in dem Octanten der drei positiven Coordinatenaxen gelegene Drehungsaxe, so wird der Punkt *B*, der Endpunkt der Sehaxe, bei dieser Bewegung einen Kreisbogen beschreiben, dessen Radius kleiner, als der Halbmesser der Kugel oder des Auges ist, er wird keinen grössten Kreis beschreiben, und jener Kreis mit kleinerem Radius wird nothwendig den grössten *BE* in irgend einem Punkte schneiden. Nehmen wir an, dieser Durchschnittspunkt sei der Punkt *E*; so wird also die Sehaxe *AB* aus der primären Richtung auch während der Drehung um jene zweite Drehungsaxe in die Richtung *AE* gelangen. Aber auf diesem Wege daselbst angekommen wird das Auge oder das dasselbe repräsentirende Coordinatensystem, nämlich die Y^1 und Z^1Axe, eine ganz andere Lage haben, als wenn durch Drehung um unsere erste, zur Sehaxe oder X^1Axe senkrechte Drehungsaxe die Sehaxe in die Richtung *AE* geführt wird. Wenn nun die Drehungsaxen für Bewegungen aus der Primärstellung überhaupt jede beliebige Lage haben könnten, so würde es noch unendlich viele solcher Wege geben auf denen die Sehaxe aus der Primärstellung durche eine einfache, continuirliche Drehung in die Richtung *AE* gelangen könnte, und jeder dieser Wege würde eine besondere, von den übrigen verschiedene Lage des Auges bedingen für die eine einzige Richtung *AE* der Sehaxe. Dies darf nicht stattfinden, und findet auch in der That nicht statt. Daher kann nun mit Sicherheit geschlossen werden, dass die Drehungsaxen in der Weise beschränkt sind, hinsichtlich ihrer Lage oder ihres geometrischen Ortes im Auge, dass die Sehaxe durch ununterbrochne, continuirliche Drehung um eine Axe aus der Primärstellung nur auf einem einzigen Wege in jede der Secundär- und Tertiärstellungen geführt werden kann; es dürfen sich die graden, ununterbrochnen Wege, welche der Endpunkt der Sehaxe von *B* aus nach allen Seiten hin radiär beschreiben kann, niemals durchschneiden. Soll diese Bedingung erfüllt sein, so müssen die Drehungsaxen, um welche das Auge aus der Primärstellung gedreht werden kann, in der Weise beschränkt sein, dass die Kreise, welche der Endpunkt der Sehaxe *B* um die Endpunkte aller Drehungsaxen als Centra auf der Kugeloberfläche beschreibt, sich entweder alle nur in einem Punkte überhaupt schneiden, nämlich im Punkte *B*, im Endpunkte der Sehaxe in der Primärstellung, oder sie müssen sich alle in denselben zwei Punkten schneiden, von denen der eine ebenfalls der Punkt *B* ist, der andere aber, gegenüberliegend, ausser dem Bereiche der Drehungsamplitüden liegt, die das Auge überhaupt erreichen kann. Sollten die Wege des Punktes *B* sich wirklich nur in dem einen Punkte *B* selbst schneiden, so würde der geometrische Ort für alle Drehungsaxen aus der Primärstellung die *XZ* Ebene des festen Coordinatensystems sein müssen, falls nämlich Symmetrie der Wege nach Aussen und nach Innen vorausgesetzt wird; dass aber dies nicht der geometrische Ort für die Drehungsaxen wirklich ist, wissen wir schon aus den beiden Gränzlagen und aus dem in engere Gränzen eingeschlossenen geometrischen Orte für die Drehungsaxe, welche der Richtung *AE* der Sehaxe entspricht. Es bleibt also der andere Fall übrig: Die Wege des Endpunktes der Sehaxe werden von der Art sein, dass sie sich im Allgemeinen zwei Mal schneiden in denselben beiden Punkten, aber der zweite Durchschnittspunkt wird ausserhalb des Bereichs der Drehungsamplitüden fallen. Nun ist der geometrische Ort für die Centra aller Kreise, in der Ebene, welche sich in denselben beiden Punkten schneiden sollen (die zusammenfallen können — jener erstgenannte Fall) die grade Linie, welche senkrecht auf der Verbindungslinie jener beiden Durchschnittspunkte steht; folglich ist der entsprechende geometrische Ort auf der Kugeloberfläche ein grösster Kreis, nämlich der geometrische Ort für die Endpunkte aller Drehungsaxen für Drehungen aus der Primärstellung dann aber ist der geometrische Ort für die Drehungsaxen selbst die Ebene, welche durch diesen grössten Kreis gelegt wird. Eine Ebene ist bestimmt, wenn zwei in ihr gelegene Linien bekannt sind; und nun brauchen wir gar nicht ein Mal weiter zu untersuchen, wie diese Ebene, der geometrische Ort für alle Drehungsaxen, um die das Auge aus der Primärstellung gedreht wird, gelegen sein möchte, wie sie sich verhalten könnte hinsichtlich der beiden Durchschnittspunkte aller Wege des Punktes B, (von denen der eine ausserhalb des Kreises fallen müsste, welcher alle möglichen Stellungen der Sehaxe einschliesst): — denn die Ebene ist schon bestimmt, wir kennen bereits zwei in ihr gelegene Linien, zwei Drehungsaxen. Diese sind die Y Axe und die Z Axe des festen Coordinatensystems, diejenigen Axen, um welche das Auge aus der Primärstellung in die Secundärstellungen gedreht wird, deren factische Existenz, wie oben schon besprochen, durch meine Versuche nachgewiesen worden ist. Ist nun unser Schluss richtig, dass eine Ebene der geometrische Ort für alle Drehungsaxen des Auges in der Primärstellung ist, so kann diese Ebene keine andere sein, als die XY Ebene des im Raume festen Coordinatensystems. Alle Halbmesser des Auges nun, welche in der XY Ebene des festen Coordinatensystems gelegen sind, stehen senkrecht zu der Sehaxe in ihrer Primärstellung (*AB*), und es steht daher jede Drehungsaxe, um welche das Auge aus der Primärstellung in irgend eine zweite Lage gedreht wird, senkrecht zur primären und zur zweiten, secundären oder tertiären, Richtung der Sehaxe, der Weg, welchen der Endpunkt der Sehaxe von der Primärstellung aus beschreibt, ist in jedem Falle ein grösster Kreis.

Bevor wir nun an dieses Resultat, obwohl es auf ganz sicherer Basis gebauet ist, noch den Massstab des Experiments anlegen, was im Allgemeinen freilich auch schon gesehen ist, indem grade der factische Nachweis jener Secundärstellungen ein so wichtiges Moment war, müssen wir noch eine andre Frage von grosser Bedeutung beantworten.

§. 6.

Die ganze bisherige Untersuchung bezog sich zunächst, wie das gleich von Anfang an und mehrfach im Verlauf hervorgehoben wurde, nur auf diejenigen Drehungsaxen, um welche das Auge aus der Primärstellung in irgend eine zweite Lage gedreht wird. Jetzt muss die Frage entstehen, um welche Drehungsaxe das Auge dann gedreht wird, wenn es aus einer zweiten Lage in eine andere zweite Lage übergeführt werden soll. Der Fall, in welchem das Auge aus einer zweiten Lage wieder in die Primärstellung zurückgedreht wird, bedarf keiner Erörterung: war es für die Hinbewegung eine positive Halbaxe, so ist es für die Herbewegung die zugehörige negative Halbaxe.

So wie wir oben von der Anforderung ausgingen, dass die Wege, welche die Sehaxe oder ihr Endpunkt von der Primärstellung aus nach allen Seiten hin beschreiben kann, von der Art sein sollten, dass sie sich niemals durchschneiden, ausser in dem Endpunkte der Sehaxe bei primärer Richtung und in einem gegenüberliegenden Punkte, der nicht in das Bereich der möglichen Drehungsamplitüden fällt, eine Anforderung, wie sie die grössten Kreise also erfüllen, die wir als die Wege erkannt haben; so werden wir nun auch die Anforderung stellen, dass, wenn das Auge aus einer zweiten Lage in eine andere zweite Lage gedreht wird, zwar der dann von der Sehaxe beschriebene Weg die von der Primärstellung ausgehenden natürlich durchschneiden darf, aber so beschaffen sein muss, dass, wenn die Sehaxe in irgend einem dieser Durchschnittspunkte mit den von der Primärstellung ausgehenden Wegen anlangt, die augenblickliche Lage des Auges oder des dasselbe repräsentirenden Coordinatensystems ganz dieselbe sei, welche das Auge haben würde, wenn es aus der Primärstellung direct in jene Lage gedreht worden wäre. Auch diese Anforderung an die Mechanik des Auges ist durch die Ergebnisse des Experiments durchaus gerechtfertigt, da sich gar kein Unterschied in der gegenseitigen Lage der beiden Netzhäute zeigt, je nachdem die Sehaxe auf diesem oder jenem Wege in irgend eine Stellung gelangt ist. Es fragt sich also nun, wie dann die Drehungsaxe für einen solchen Uebergang aus der einen in eine andere zweite Lage gelegen sein muss.

In Fig. 3. bedeutet AO die in der festen YZ Ebene gelegene Drehungsaxe, um welche sich das Auge dreht, wenn die Sehaxe aus der Primärstellung in die Richtung AE bewegt wird, und durch die Ebene APE ist die X^1Z^1 Ebene für diese Richtung der Sehaxe repräsentirt, welche, indem AP die Z^1 Axe bedeutet, die Lage des ganzen Auges bestimmt. — Wenn anderseits die Sehaxe die Richtung des in der festen XZ Ebene gelegenen Halbmessers AH hat, so ist das eine Secundärstellung des Auges, in welche es durch Drehung um die feste Y Axe selbst gelangt und wobei die Z^1Axe die Richtung AF hat, die X^1Z^1 Ebene mit der festen XZ Ebene zusammenfällt. Soll nun die Sehaxe aus der Richtung

AE in die Richtung *AH* übergeführt werden, so soll diese Bewegung also so geschehen, dass gleichzeitig die Z^1Axe aus der Richtung *AP* in die Richtung *AF*, die X^1Z^1Ebene aus der Lage *APE* in die der Ebene *AFH* (*XZ* Ebene) gelangt. — So wie nun oben für die Primärstellung die Anforderung gestellt werden musste, dass die von derselben ausgehenden Wege des Endpunktes der Sehaxe sich nur noch in einem, dem Punkte *B* gegenüberliegenden Punkte, der ausserhalb des Bereichs der Drehungsamplitüden liegt, schneiden dürfen, damit das Auge nicht bei gleicher Richtung der Sehaxe verschiedene Lagen erhalten kann, eine Anforderung, welche identisch ist damit, dass der geometrische Ort für alle Drehungsaxen, um welche das Auge aus der Primärstellung gedreht wird, eine Ebene ist: so ist nun diese Anforderung auch für jede beliebige andere Augenstellung schon darin enthalten, dass, wenn das Auge aus irgend einer zweiten Lage in eine andere gedreht wird, die Lage des Auges in dieser letzten zweiten Lage stets dieselbe sein soll, als wenn es aus der Primärstellung in dieselbe gelangt wäre. Für alle Bewegungen also, welche die Sehaxe von der Richtung *AE* aus machen kann, ist es ebenfalls eine Ebene, welche alle Drehungsaxen enthält, und ebenso ist für die Richtung der Sehaxe *AH* eine Ebene der geometrische Ort für alle Drehungsaxen, um welche das Auge aus dieser Lage (*AH*) gedreht werden kann.

Wenn nun die Sehaxe sich von *AE* nach *AH* bewegt, so ist eine negative Halbaxe, und wenn sie sich von *AH* nach *AE* bewegt, die zugehörige positive Halbaxe die Drehungaxe, ein Durchmesser also ist Drehungsaxe für die Bewegung der Sehaxe zwischen *AH* und *AE*. Für die Drehung um die positive Halbaxe muss diese in dem geometrischen Orte der Drehungsaxen für die Richtung *AH* als Ausgangspunkt, für die Drehung um die negative Halbaxe (von *AE* nach *AH*) muss dieselbe in dem geometrischen Orte der Drehungsaxen für die Richtung *AE* als Ausgangspunkt gelegen sein; da beide Halbaxen einen Durchmesser ausmachen, so ist dies der beiden geometrischen Oertern (beiden Ebenen) gemeinsame Durchmesser. — Kann derselbe gefunden werden, so sind alle die Drehungsaxen bekannt, um welche die Sehaxe aus der Richtung *AE* als Anfangsstellung und die, um welche sie aus der Richtung *AH* als Anfangs stellung gedreht wird, so fern jener Durchmesser oder die Drehungsaxe für die Bewegung zwischen *AE* und *AH* die Durchschnittslinie der beiden geometrischen Oerter, der beiden Ebenen, für alle jene Drehungsaxen ist, von welchen Ebenen die eine durch die *Y*Axe (*AC*) und jene Durchnittslinie,die andere durch den Halbmesser *AO* und jene Durchschnittslinie bestimmt ist.

Da bei der Drehung, um welche es sich handelt, der Punkt *E* nach *H*, und der Punkt *P* nach *F* bewegt werden soll, so kann die Drehungsaxe nach der Euler-schen Construction gefunden werden. ·Wird *E* mit *H*, *F* mit *P* durch grösste Kreise verbunden, in der Mitte der Bögen senkrechte Kreise construirt, von denen der eine durch den Punkt *F*, der andere durch den Punkt *E* gehen muss, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Kreise der Endpunkt der fraglichen Drehungsaxe. Ist der Punkt *Q* in Fig. 3. dieser Durchschnittspunkt, so ist *AQ*, oder vielmehr die zugehörige negative Halbaxe diejenige, um welche das Auge gedreht wird, um die Sehaxe aus der Richtung *AE* in die Richtung *AH* zu bringen. Die durch *AQ* und *AC* gelegte Ebene enthält alle die Drehungsaxen, um welchedas Auge aus der durch *AFE* als bewegliche X^1Z^1Ebene characterisirten Lage gedreht wird; die durch *AQ* und *AO* gelegte Ebene enthält alle Drehungsaxen für die Lage *APE* der X^1Z^1Ebene als Ausgangspunkt. Da nun nach dem oben gefundenen Gesetze für jede beliebige Augenstellung die Drehungsaxe gefunden werden kann, um welche das Auge aus der Primärstellung in dieselbe gedreht wird, so kann auch für jede beliebige Augenstellung die Drehungsaxe gefunden werden, um welche das Auge aus derselben in irgend eine andere gedreht wird.

Die Berechnung der Lage der Axe AQ ist nicht einfach, wie man es vielleicht hätte erwarten mögen; wenigstens ist es mir bisher nicht gelungen, einen einfachen allgemeinen Ausdruck dafür aufzufinden; die Lage von AQ und allen übrigen analogen Drehungsaxen lässt sich nicht mit kurzen Worten als ein Gesetz aussprechen, wie die Lage der Drehungsaxen für die Primärstellung. Die Lage von AQ ist aber zum Theil Consequenz jenes Gesetzes. Ist irgend eine zweite Lage des Auges, Secundär- oder Tertiärstellung, der Ausgangspunkt für Drehungen, so steht die Drehungsaxe nur dann senkrecht zur Sehaxe, wenn es sich darum handelt, entweder das Auge in die Primärstellung zurück, oder in irgend eine demselben grössten Kreise angehörige Richtung der Sehaxe zu führen, welcher der Weg für den Endpunkt der Sehaxe in jene zweite Lage aus der Primärstellung war. Bei allen übrigen Drehungen aus dieser zweiten Lage steht die Drehungsaxe nicht senkrecht zur Sehaxe, und der Endpunkt derselben beschreibt daher keine grössten Kreise. Jede Stellung der Sehaxe muss als Ausgangspunkt für Bewegungen nach unendlich vielen Richtungen betrachtet werden. Für alle diese Bewegungen aus einer Lage ist eine Ebene der geometrische Ort der Drehungsaxen. Nur für die Primärstellung steht diese Ebene senkrecht zur Richtung der Sehaxe; alle übrigen geometrischen Oerter schneiden diese Ebene und sich unter einander; die Durchschnittslinie mit jener, mit dem geometrischen Ort der Drehungsaxen für die Primärstellung ist die Drehungsaxe, um welche das Auge aus der Primärstellung in die betreffende zweite Lage gedreht wird, um deren geometrischen Ort der Drehungsaxen es sich handelt; die Durchnittslinie der geometrischen Oerter der Drehungsaxen für zwei zweite Lagen des Auges ist die Drehungsaxe, um welche das Auge aus der einen in die andere dieser beiden Lagen gedreht wird. Wie nun für jede einzelne Richtung der Sehaxe die Ebene gelegen ist, welche alle die Drehungsaxen für Bewegungen aus derselben als Anfangsstellung enthält, ist im Allgemeinen ohne specielle Rechnung gar nicht zu sagen.

Betrachten wir nun aber z.B. alle Secundärstellungen, welche das Auge nach und nach erlangt, wenn es um die *Z* Axe gedreht, wenn also die Sehaxe in der *XY* Ebene *(ABC)* herumgeführt wird; da alle die auf diesem Wege zu erreichenden Secundärstellungen darin mit einander übereinkommen, dass die eine *Z* Axe die Drehungsaxe ist, um welche das Auge aus der Primärstellung in sie gelangt, so müssen auch die geometrischen Oerter, welche für alle diese Secundärstellungen als Ausgangsstellungen die Drehungsaxen enthalten, sich untereinander in dieser *Z* Axe schneiden, da sie ja alle in dieser Linie die *YZ* Ebene schneiden müssen. Auf die Lage dieser geometrischen Oerter im Uebrigen wollen wir gar nicht speciell eingehen; man sieht aber sogleich, dass, je weiter die als Ausgangsstellung gewählte jener Secundärstellungen von der Primärstellung entfernt ist, je näher sie der Richtung *AC* (für die Sehaxe) gelegen ist, einen desto grösseren Winkel der geometrische Ort ihrer Drehungsaxen mit der *YZ* Ebene in der Durchschnittslinie *AD* bildet, und dass dieser Winkel $= 90^\circ$ ist, wenn die Sehaxe die Richtung *AC* selbst hat und diese Stellung Ausgangsstellung sein sollte; denn dann sind die der Primärstellung entsprechenden Verhältnisse, nur um 90° gedreht, wiedergekehrt; von *AC* aus müsste die Sehaxe wiederum lauter grösste Kreise beschreiben, die Drehungsaxen würden alle senkrecht zu der Richtung der Sehaxe stehen, sie würden alle in der *XZ* Ebene gelegen sein. Folglich würde zu den Drehungsaxen für diese Ausgangsstellung auch die primäre Richtung der Sehaxe selbst, nämlich die *X* Axe, gehören. Da wir nun einerseits wissen, dass, wie sogleich noch erörtert werden soll, eine jede Drehungsaxe im Auge nur für eine einzige ganz bestimmte Drehung, aus einer bestimmten Anfangsstellung in bestimmter Richtung, vorhanden ist, so können wir mit Sicherheit sagen, dass die *X* Axe, die primäre Richtung der Sehaxe, nur in dem einen einzigen Falle, der eben gefunden wurde, Drehungsaxe ist; da nun aber anderseits diese Augenstellung, bei welcher die Sehaxe die Richtung *AC* hat (so wie die grade entgegengesetzte nach aussen), niemals vorkommt, gänzlich ausser den Bereich der möglichen Drehungsamplitüden fällt, so ist die *X* Axe in der That niemals Drehungsaxe. — Dass nun gar für keine einzige Augenstellung die jeweilige zweite (secundäre oder tertiäre Richtung) der Sehaxe, X^1 Axe, selbst Drehungsaxe sein kann, geht aus dem, was im Allgemeinen über die Ebenen, die die geometrischen Oerter für die Drehungsaxen sind, zu ersehen ist, hinlänglich hervor. Wäre für irgend eine Augenstellung *AE* (die Sehaxe) selbst als Drehungsaxe möglich, so müsste ja der geometrische Ort aller Drehungsaxen für diese Anfangsstellung die Ebene *AEO* sein, denn *AO* ist die Drehungsaxe, um welche das Auge aus der Stellung *AE* in die Primärstellung zurückgeführt wird. Dass ein solcher geometrischer Ort nie, für keine Augenstellung vorkommen kann, lehrt eine einfache, hier nicht weiter anzustellende Betrachtung über die Lagen, in welche dann das Auge gelangen würde. Wir können ohne weitere Berechnung, und ohne dass es mir, wie gesagt, möglich ist, einen allgemeinen Ausdruck dafür anzugeben, sagen, dass für alle Augenstellungen als Ausgangsstellungen die geometrischen Oerter der Drehungsaxen, Ebenen also, nicht um sehr grosse Winkel von der rechtwinkligen Lage zur jeweiligen Richtung der Sehaxe abweichen; aber rechtwinklig zur Richtung der Sehaxe steht der geomerische Ort der Drehungsaxen nur für die Primärstellung, wenn nämlich nur die den Drehungsamplitüden nach möglichen Augenstellungen berücksichtigt werden. So viel können wir aber auch mit völliger Sicherheit aussagen, dass eine Drehung um die optische Axe als Drehungsaxe niemals vorkommt, dass das Auge weder um die primäre, noch um irgend eine zweite Richtung derselben, wenn diese Ausgangsstellung für Drehungen ist, gedreht wird. Wie die auf die optische Axe projicirten Drehungen zu Stande kommen, scheinbare Drehungen um dieselbe als Drehungsaxe, haben wir aus dem Bisherigen gesehen. Donders*) ist es übrigens, welcher zuerst die auf die optische Axe projicirten Drehungen als solche erkannt und erörtert hat.

In dem ersten Paragraphen wurde die Frage besprochen, ob alle die Drehungsaxen, welche mechanischerseits im Auge möglich sind, wirklich in Anwendung kommen. Die Antwort lautete, dass eine erhebliche Beschränkung stattfinden muss. Jetzt könnte es scheinen, als ob alle diese zu Anfang ausgeschlossenen drehungsaxen wieder zugelassen werden müssen. Aber das, was die Anordnung der Muskeln, bei freier Disposition über ihr Zusammenwirken zuliess, bestand nicht nur darin, dass überhaupt jeder Halbmesser des Auges Drehungsaxe sein könnte, sondern auch darin, dass für jede beliebige Stellung des Auges als Ausgangspunkt um jeden Halbmesser eine endliche Drehung erfolgen könnte. Wir betrachteten dann den geometrischen Ort,

*) Holländische Beiträge a. a. O.

welcher alle Drehungsaxen enthält, um welche das Auge mechanischerseits aus irgend einer Stellung in eine bestimmte andere Stellung gedreht werden könnte, und fanden dann, dass von allen in diesem geometrischen Orte, ebenfalls eine Ebene, enthaltenen Drehungsaxen nur eine einzige wirklich in Anwendung kommen darf, und diese Beschränkung der möglichen Drehungsaxen ist nicht nur ganz ungestört geblieben, sondern wir haben sie sogar für jede einzelne Augenstellung bewiesen, sofern der geometrische Ort, welcher alle die Drehungsaxen enthält, um welche das Auge aus einer bestimmten Stellung als Anfangsstellung gedreht wird, eine Ebene ist, und für jede bestimmte andere Stellung, in welche es aus jener übergeführt werden soll, nur eine Axe vorhanden ist. Da nun aber der letztgenannte geometrische Ort für jede Augenstellung eine besondere Ebene ist, so ist, wenn lediglich die Zahl der Drehungsaxen, die Summe, ohne ihre Bedeutung, in Betracht kommen soll, diese allerdings eine unendlich grosse, und man wird sagen können, dass jeder Halbmesser des Auges wirklich Drehungsaxe sein kann, aber jeder einzelne Halbmesser ist für eine einzige, ganz bestimmte Richtung der Bewegung der Sehaxe, und wiederum für diese nur jener einzige Halbmesser Drehungsaxe. Ein Mensch bildet durch Zusammenwirken seiner Augenmuskeln so viel einzelne Drehungsaxen, als er im Stande ist, in verschiedenen Richtungen seine Sehaxe zu bewegen, jede einzelne Augenstellung als Ausgangspunkt betrachtet. Ich werde unten hierauf zurückkommen. Wollte man einen Ausdruck für die Zahl der Drehungsaxen haben, so würde sich dieselbe leicht aus bekannten Combinationsformeln ergeben.

Handelt es sich nun darum, für zwei beliebige Richtungen der Sehaxe, wie *AE* und *AH*, die Drehungsaxe *AQ* aufzufinden, so kann dieses in folgender Weise geschehen. Der Punkt *Q* (Fig. 3) ist, wie gesagt, der Durchschnittspunkt zweier grössten Kreise, von denen der eine den Mittelpunkt des Bogens *EH* mit *F*, der andere den Mittelpunkt des Bogens *FP* mit *E* verbindet. Gehen wir, um die Zeichnung nicht zu sehr zu verwirren, zu der Fig. 1 zurück, so sind die beiden Kreise *PM* und *QN* in derselben die eben besprochnen, welche sich hier im Punkte *O* schneiden. Denkt man nun in Fig. 3 die beiden im Punkte *Q* stehenden sphärischen Dreiecke *FPQ* und *EHQ* construirt, welche den Dreiecken *EOB* und *DOF* in Fig. 1 entsprechen, so sind diese beiden Dreiecke gleichschenklige und ähnliche; die beiden Basen derselben *FP* und *EH*, verhalten sich wie die auf der Mitte dieser Bögen senkrecht stehenden Bögen. In unserem Falle nun, der speciell einfach gewählt ist, ist nicht nur *EH*, sondern auch *FP* unmittelbar bekannt, da *FP* der Winkel ϑ ist, d. i. der Winkel, welcher im binocularen Sehfelde als auf die optische Axe projicirte Drehung vorhanden ist; in anderen Fällen, wenn diese Identität nicht stattfindet, muss der Bogen zwischen Anfangs- und Endstellung der Z^1Axe, in unserem Falle *P* und *F*, erst berechnet werden. Sind nun aber *FP* und *EH* bekannt, so kann, da die sich im Punkte *Q* (Fig. 3) schneidenden (grössten) Kreisbögen jeder $= 90^0$ ist, mittelst einfacher Gleichungen das Dreieck *FPQ* oder *EHQ* berechnet werden. Damit ist der Winkel bekannt, welchen die Drehungsaxe *AQ* mit den beiden Halbmessern *AF* und *AP* einschliesst. Da die Lage dieser beiden als bekannt angesehen werden darf (sie kann nämlich in später anzugebender Weise gefunden werden), so lässt sich die Lage von *AQ* in dem festen Coordinatensystem berechnen. Aus der Gleichung für *AQ* und aus denen für *AO* und die *Y*Axe selbst würde man dann die Gleichungen für die beiden Ebenen erhalten, die alle Drehungsaxen für die beiden

Richtungen *AE* und *AH* der Sehaxe als Ausgangsstellungen enthalten. — Dieser Weg der Berechnung ist, zumal wenn der Fall nicht in der Weise einfach ist, dass die eine der beiden zweiten Lagen eine Secundärstellung ist, wie der dargestellte, umständlich nnd unpraktisch; wir werden unten einen andern, freilich nicht kürzern Weg kennen lernen.

§. 7.

Kehren wir zu dem Princip zurück, welches für die Drehungen des Auges aus der Primärstellung gefunden wurde; dies darf immerhin, trotz der verschiedenen und verwickelten Verhältnisse, welche im vorigen Paragraphen besprochen wurden, als das den Bewegungen des Auges zum Grunde liegende Gesetz bezeichnet werden, weil jene Verhältnisse, welche dann eintreten, wenn irgend eine zweite Lage des Auges als Anfangsstellung gewählt wird, in denselben Momenten begründet sind, für welche jenes Princip der kurzgefasste Ausdruck ist. Das Gesetz lautet also: Das Auge wird aus der Primärstellung stets um die Axe gedreht, welche auf der primären und zweiten (secundären oder tertiären) Richtung der Sehaxe senkrecht steht. Ich hatte schon früher*) angedeutet, ohne nähere Untersuchung, dass dieses Drehungsprincip sich wahrscheinlich aus den Ergebnissen der Versuche mit Doppelbildern würde ableiten lassen, und zugleich daran erinnert, dass damit der factische Nachweis für das von Listing bereits früher**) aufgestellte Princip geliefert

*) Beiträge zur Physiologie des Sehorgans. p. 95.

**) Ruete, Lehrbuch der Ophthalmologie. 2. Auflage. p. 37. In den kurzen Worten Listing's, welche Ruete hier wiedergegeben hat, sind gleiche Ausdrücke, deren ich mich bedient habe, in anderem Sinne gebraucht, wodurch eine, wie mir scheint, nur scheinbare Verschiedenheit zwischen Listing's Princip und dem sein würde. Auf die Erörterung eines hiehergehörigen falschen Schlusses, den ich früher gemacht habe, werde ich unten zurückkommen.

Ueberblicken wir noch ein Mal den Weg, auf welchen wir zu jenem Princip gelangten, so waren es nur zwei experimentell festgestellte Sätze, aus denen dasselbe sich ergab. 1) Die Constanz der Lage des Auges bei bestimmter Richtung der Sehaxe; diese verlangt eine Ebene als geometrischen Ort aller Drehungsaxen für eine bestimmte Anfangsstellung. 2) Die Ausmittlung der Secundärstellungen führte zur Kenntniss zweier in jener Ebene für die Primärstellung gelegenen Axen, wodurch diese Ebene als die zur primären Richtung der Sehaxe senkrechte bestimmt war. Obwohl daher nun streng genommen Nichts mehr übrig bleibt, woran der Massstab des Experiments nothwendiger Weise zu legen wäre, da schon der ganze Beweis auf experimenteller Basis ruhet, und obwohl jede Lage, welche das Auge bei bestimmter Richtung der Sehaxe hat, übereinstimmen muss mit der durch jenes Gesetz verlangten; so muss doch überhaupt die Prüfung der Theorie auf jede mögliche Weise, mit allen zu Gebote stehenden Mitteln vorgenommen werden, und hier zumal deshalb, weil noch einige Punkte, auf die zum Theil schon im früheren Verlauf der Untersuchung verwiesen werden musste, und von denen andere scheinbare Abweichungen von jenem Gesetze enthalten, im Zusammenhange zur Sprache kommen müssen.

Die Ergebnisse der Versuche, welche ich als ferneres Mittel zur Prüfung der Richtigkeit von Listing's Gesetz im Auge habe, sind die auf die optische Axe

hier nachgewiesenen stattfindet. Doch muss ich bemerken, dass eine weitere Erklärung und Erörterung von Listing's Gesetz dort nicht gegeben ist.

projicirten Drehungen, welche sich in allen Tertiärstellungen zeigen. Es wurde oben abgeleitet, dass, wenn die Richtung der Sehaxe durch *AE* (Fig. 3) vorgestellt ist, das Auge eine solche Lage haben muss, dass die X^1Z^1 Ebene des dasselbe repräsentirenden Coordinatensystems zwischen den beiden in bekannter Weise gelegenen Ebenen *AFE* und *ADE* gelegen ist, eine Lage, der die Drehungsaxe *AO* entspricht. Der Winkel n, eine constante in abstracto stets vorhandene Grösse (aber natürlich für jede einzelne Tertiärstellung von besonderem numerischen Werthe), wird daher getheilt, so zwar, dass der eine Theil, ϑ, auf die positive Halbaxe der Sehaxe als projicirte Drehung zu beziehen (da die Sehaxe nach Oben und Innen gerichtet ist), im binocularen Sehfelde, der andere Theil, η oder $n-\vartheta$, auf die negative Halbaxe der Sehaxe zu beziehen, in dem Sehfelde des einen Auges, d. h. in Bezug auf die Orbita und die mit dem Auge verbundenen Theile, vorhanden ist. Es geht aus dem Bisherigen hinlänglich hervor, dass das eben Gesagte nicht so zu verstehen ist, als ob eine zweifache auf die optische Axe zu projicirende Drehung mit ϑ und η bezeichnet werden sollte, sondern die überhaupt vorhandene projicirte Drehung kann ein Mal als Winkel ϑ von der Ebene *AFE* aus gerechnet, und ausserdem als Winkel η, von der Ebene *ADE* aus gerechnet, betrachtet werden. Welche von diesen beiden (ungleichen) Hälften des Winkels n zur Prüfung benutzt wird, ist, abgesehen von praktischen Gesichtspunkten, gleich; nur die eine braucht berechnet und beobachtet zu werden, da der Winkel n für jede Richtung der Sehaxe bekannt ist, so fern

$$\cot n = \frac{\cot d}{\sin r}$$

ist, worin d den Neigungswinkel der Visirebene in Bezug auf die feste XY Ebene, (d. i. die primäre Neigung der Visirebene), r den halben Convergenzwinkel der beiden Sehaxen bedeutet. Der Winkel η, d. h. die im monocularen Sehfelde auf die optische Axe projicirte Drehung, kann im Allgemeinen nur objectiv beobachtet werden, und eben hierin liegt die Möglichkeit begründet, vielleicht auch bei Thieren das Gesetz der Augenbewegungen zu ermitteln, wenn irgend ein im Raume festes Coordinatensystem im Auge zu Grunde gelegt und damit die beiden Ebenen *AFE* und *ADE* oder der Winkel n für eine bestimmte Richtung der Sehaxe bekannt wird; ich kann hierauf an diesem Orte nicht weiter eingehen.

Für das menschliche Auge ist, wie schon oben erörtert, der nur subjectiv zu beobachtende Winkel ϑ weit sicherer und leichter zu benutzen; es ist der Winkel, auf welchen sich ein grosser Theil meiner Versuche mit Doppelbildern bezieht, die Hälfte des Winkels, welchen bei Tertiärstellungen die divergirenden Doppelbilder einer im fixirten Punkte senkrecht zur Visirebene stehenden Linie mit einander einschliessen, über dessen indirecte Ermittelung und Messung, nämlich mittelst Doppelbildern einer hinter dem fixirten Punkte stehenden Linie, ich auf meine oben citirte Schrift (§. 4 — 16) verweise.

Für alle die Fälle, in welchen nicht aus anderweitigen Versuchsresultaten die Lage der Drehungsaxe bekannt ist (wie also für alle Drehungen aus der Primärstellung, für die wir bereits ein ganz bestimmtes Gesetz kennen, welches nur noch in einzelnen seiner Consequenzen geprüft werden soll), reicht neben der Kenntniss der Richtung der Sehaxe, die ja direct beobachtet wird, die Kenntniss des einen der beiden Winkel, ϑ oder η, hin, um für diese Richtung der Sehaxe die Lage des ganzen das Auge repräsentirenden Coordinatensystems und die Lage der Drehungsaxe für die Bewegung aus einer bekannten Anfangsstellung in die fragliche Lage berechnen zu können. Der hierbei einzuschlagende Weg ist derjenige, welcher einerseits dann angewendet werden muss, wenn es sich darum handelt, für zwei zweite Lagen des Auges, als Anfangs- und Endstellung, die Drehungsaxe zu finden, also für die im vorigen Paragraphen besprochnen Verhältnisse, und welcher anderseits der bei Thieren in hier nicht näher zu bezeichnender Weise anwendbare sein würde.

Ist AE (Fig. 3), wie bisher, eine beliebige Richtung der Sehaxe, so wird einerseits der Winkel beobachtet, unter welchem die Visirebene oder die durch die Sehaxe und die YAxe des im Raume festen Coordinatensystems gelegte Ebene gegen die feste XY Ebene geneigt ist, d. i. der Winkel HB oder d; anderseits der Winkel, unter welchem die Sehaxe in der Visirebene gegen die verticale Medianebene oder gegen die feste XZ Ebene convergirt, d. i. der Winkel EH oder r; durch diese beiden Winkel ist die Lage der Sehaxe oder der X^1Axe des beweglichen Coordinatensystems vollständig bestimmt. Denn wenn wir mit α, β, γ der Reihe nach die Winkel bezeichnen, welche die X^1Axe mit den festen positiven Coordinatenaxen einschliesst, so ist in dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke EHB

$$\cos \alpha \ (EB) = \cos r \cos d;$$

ferner ist

$$\beta \ (EC) = 90^\circ - r; \ \gamma = 90^\circ - EK$$

und schon durch α und β bekannt.

Ist nun der Winkel ϑ in bekannter Weise beobachtet, so ist damit der Winkel bekannt, welchen die Ebene AFE und die unbekannte X^1Z^1Ebene mit einander einschliessen; die Gleichung der Ebene AFE ist bekannt durch AE selbst und durch AF $(FD = d)$, und aus einer bekannten Beziehung zwischen dem Cosinus des Winkels ϑ und den Coefficienten der Gleichungen der beiden Ebenen AFE und der X^1Z^1Ebene findet sich der eine Coefficient der Gleichung der letzteren; die gleichfalls bekannte Ebene ADE schliesst den Winkel $n - \vartheta$ mit der X^1Z^1 Ebene ein, und somit findet sich in ähnlicher Weise aus der Gleichung der Ebene ADE und dem Winkel $n - \vartheta$ der andere Coefficient der Gleichung der X^1Z^1 Ebene. Da die X^1Axe bekannt ist, so kann nun die Gleichung für die Z^1Axe gefunden werden und damit also auch die drei Winkel α'', β'', γ'', welche die Z^1Axe mit den festen positiven Coordinatenaxen einschliesst. Die Gleichung der Y^1Axe endlich ist gegeben, da die Gleichung der X^1Z^1 Ebene bekannt ist. Somit sind also alle neun Winkel bekannt, welche die Lage des beweglichen Coordinatensystems in dem festen bestimmen, nämlich:

α, β, γ, (die X^1Axe mit den drei festen Axen)
α', β', γ', (die Y^1Axe „ „ „ „ „)
α'', β'', γ'', (die Z^1Axe „ „ „ „ „)

Mit Hülfe dieser neun Winkel wird nun die Lage der Drehungsaxe, um welche das bewegliche Coordinatensystem aus der Lage, welche das feste hat, in jene Lage gedreht wurde, folgendermassen bestimmt. Die Drehungsaxe ist derjenige Durchmesser der Kugel, welcher gleiche Lage in Bezug auf das feste und bewegliche Coordinatensystem hat. Sind a, b, c die Winkel, welche die Drehungsaxe mit den drei festen Coordinatenaxen der Reihe nach einschliesst, so sind das auch die Winkel, welche sie mit den gleichnamigen Axen des beweglichen Coordinatensystems einschliesst. Somit haben wir die bekannten Gleichungen für die Umwandlung eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes, deren Anfangspunkte zusammenfallen, als Beziehungen zwischen den drei unbekannten Winkeln a, b, c und obigen neun Winkeln, nämlich, indem wir zuerst das feste Coordinatensystem als Ausgangspunkt nehmen, für welches die durch cos a, cos b, cos c ausgedrückten Coordinaten der unbekannten Drehungsaxe dieselben sind, wie für das zweite Cordinatensystem:

$$\cos a = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \alpha' + \cos c \cos \alpha''$$
$$\cos b = \cos a \cos \beta + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \beta''$$
$$\cos c = \cos a \cos \gamma + \cos b \cos \gamma' + \cos c \cos \gamma''.$$

Da nun aber ebensowohl das bewegliche Coordinatensystem als Ausgangspunkt gewählt werden kann, für welches die Coordinaten der Drehungsaxe dieselben sind, und mit dessen drei Axen die Axen des festen Coordinatensystems dieselben neun Winkel einschliessen, aber in anderer Reihenfolge, sofern die feste XAxe mit den drei beweglichen Axen der Reihe nach die Winkel α, α', α'' u. s. w. einschliesst, so erhalten wir drei neue Gleichungen aus denselben Elementen, in denen nur die Coefficienten von cos a, cos b, cos c statt nach verticalen Reihen (vergl. oben), wie vorher, nach horizontalen Reihen sich combiniren; nämlich:

$$\cos a = \cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma$$
$$\cos b = \cos a \cos \alpha' + \cos b \cos \beta' + \cos c \cos \gamma'$$
$$\cos c = \cos a \cos \alpha'' + \cos b \cos \beta'' + \cos c \cos \gamma''$$

Werden diese drei Gleichungen mit den ersten drei vereinigt, indem die Summen rechterseits der Reihe nach gleich sind, so fällt in jeder der drei neuen Gleichungen jederseits ein Glied aus, und man erhält:

$$\cos b \cos \alpha' + \cos c \cos \alpha'' = \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma$$
$$\cos a \cos \beta + \cos c \cos \beta'' = \cos a \cos \alpha' + \cos c \cos \gamma'$$
$$\cos a \cos \gamma + \cos b \cos \gamma' = \cos a \cos \alpha'' + \cos b \cos \beta''$$

Diese Gleichungen formen sich in die folgenden um:

$$(\cos \alpha' - \cos \beta) \cos b = (\cos \gamma - \cos \alpha'') \cos c$$
$$(\cos \alpha' - \cos \beta) \cos a = (\cos \beta'' - \cos \gamma') \cos c$$
$$(\cos \gamma - \cos \alpha'') \cos a = (\cos \beta'' - \cos \gamma') \cos b$$

von welchen die dritte schon in den beiden ersten enthalten ist, und aus denen sich die Doppelgleichung ergiebt:

$$\frac{\cos a}{\cos \beta'' - \cos \gamma'} = \frac{\cos b}{\cos \gamma - \cos \alpha''} = \frac{\cos c}{\cos \alpha' - \cos \beta} \quad (1)$$

Setzt man nun jedes dieser drei unter sich gleichen Verhältnisse $= \frac{1}{\omega}$ und quadrirt dann die drei Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{\cos a^2}{(\cos \beta'' - \cos \gamma')^2} = \frac{\cos b^2}{(\cos \gamma - \cos \alpha'')^2}$$
$$= \frac{\cos c^2}{(\cos \alpha' - \cos \beta)^2} = \frac{1}{\omega^2}$$

Nun ist das Verhältniss der Summe der Zähler zu der Summe der Nenner ebenfalls $= \frac{1}{\omega^2}$; und daher, wenn der Kürze halber die Nenner der Reihe nach mit A^2, B^2, C^2 bezeichnet werden:

$$\frac{\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{1}{\omega^2};$$

wir gewinnen demnach zunächst einen Werth für die eingeführte Grösse ω, indem

$$\frac{1}{A^2 + B^2 + C^2} = \frac{1}{\omega^2}$$
$$\omega^2 = A^2 + B^2 + C^2$$
$$\omega = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Wird nun dieser Werth für ω in die Doppelgleichung (1) gesetzt, in welcher jedes Verhältniss gleich $\frac{1}{\omega}$ gesetzt wurde, so erhält man die drei Coordinaten der Drehungsaxe in Functionen jener sechs Winkel (drei unabhängig veränderliche fielen aus) ausgedrückt, nämlich:

$$\cos a = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos b = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos c = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

A, B, C bezeichnen hierin, wie angegeben, die Differenzen je zweier Cosinus der sechs Winkel, nämlich $A = \cos\beta'' - \cos\gamma'$, $B = \cos\gamma - \cos\alpha''$, $C = \cos\alpha' - \cos\beta$.

Es ist aber sogleich ersichtlich, dass den Coordinaten $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ nicht ein, sondern acht Halbmesser der Kugel entsprechen, indem das doppelte Zeichen des Nenners für jede der drei Coordinaten einen negativen und positiven Werth bedingt, und daher acht Combinationen dieser je drei Coordinaten möglich sind. Auf die Erörterung dieses Punktes wurde schon oben verwiesen. In jedem Octanten der Kugel kann eine durch dieselben drei Winkel a, b, c bestimmte Drehungsaxe gelegen sein, und man sieht also, wie die Gleichungen ganz ohne Weiteres und mit Nothwendigkeit auf die Unterscheidung von Drehungshalbaxen, je für eine der beiden möglichen Richtungen der Drehung um einen Durchmesser, führen, wie denn gewöhnlich die Drehung auf diejenige Halbaxe bezogen wird, um welche sie, vom Endpunkt derselben aus betrachtet, im Sinne der Drehung des Uhrzeigers erfolgt. — Welche von den vier ganzen Drehungsaxen im speciellen Falle genommen werden muss, was aus obigen Gleichungen nicht hervorgehen kann, ist immer aus den Vorzeichen der Coefficienten der Projectionsgleichungen für die beweglichen Coordinatenaxen zu ersehen. In dem Falle, wenn eine der Coordinaten der Drehungsaxe $= 0$ wird, z. B. $\cos a = 0$, sind nur zwei Durchmesser in den Gleichungen enthalten, welche beide in der YZ Ebene des festen Coordinatensystems liegen. Dieses müsste sich in allen den

Fällen ergeben, in denen die Drehungsaxe für die Primärstellung und irgend eine Tertiärstellung berechnet wird; es ist nämlich dann $A = 0$, oder $\cos\beta'' = \cos\gamma'$, indem der Winkel, den die Z^1Axe mit der YAxe einschliesst, gleich ist dem Winkel, den die Y^1Axe mit der ZAxe einschliesst. Für die Primärstellung einerseits und Secundärstellungen anderseits wird auch $\cos b$ oder $\cos c = 0$, es ist die Drehungsaxe entweder die ZAxe oder die YAxe selbst.

Wenn es sich nun darum handelt, für den Uebergang aus einer zweiten Lage in eine andere zweite Lage die Drehungsaxe zu finden, so müssen zunächst diese beiden Lagen selbst, oder die betreffenden neun Winkel für jede derselben, in der angegebenen Weise berechnet werden; dann muss eine dieser beiden Lagen des beweglichen Coordinatensystems, welche als zwei bewegliche Systeme zu betrachten sind, an die Stelle des im Raume festen Coordinatensystems gesetzt werden, indem man die neun Winkel, welche die Lage des anderen beweglichen Coordinatensystems in Bezug auf das im Raume feste System bestimmen, mit den gewöhnlichen Umwandlungsgleichungen in diejenigen neun Winkel verwandelt, welche die gegenseitige Lage der beiden beweglichen Coordinatensysteme ausdrücken; dann verfährt man mit diesen Elementen grade so, wie so eben angegeben wurde, erhält dann aber die Coordinaten der Drehungsaxe nicht in Bezug auf die im Raume festen Axen, sondern in Bezug auf die beiden beweglichen Coordinatensysteme, aus denen die für die im Raume festen Axen dann verwandelt werden müssen.

Da, wie wir oben fanden, durch die Ermittelung einer einzigen Drehungsaxe für irgend eine zweite Lage des Auges als Ausgangsstellung die Ebene bekannt wird, welche alle Drehungsaxen für diese Ausgangsstellung enthält, sofern eine zweite in dieser Ebene gelegene Axe immer als bekannt vorausgesetzt werden kann, nämlich die in der YZ Ebene gelegene, um welche das Auge aus der Primärstellung in jene zweite Lage, welche nun Ausgangsstellung sein soll, gedreht wird; so würden durch eine einzige in obiger Weise ausgeführte Berechnung sogleich alle die Wege oder Richtungen bekannt, welche der Endpunkt der Sehaxe von jener Ausgangsstellung aus beschreiben kann, unter denen, wie oben erörtert, nur zwei grade entgegengesetzt verlaufende Theile eines grössten Kreises sind, nämlich der zur Primärstellung zurück-, und der in derselben Linie von ihr weiter fortführende.

Sollte, um alle hier einschlägigen Fragen zu beantworten, auch die Grösse der Drehungsamplitüde bestimmt werden, welche in irgend einer zweiten Lage, sei es in Bezug auf die Primärstellung oder auf irgend eine andere zweite Lage, enthalten ist, so geschieht die Berechnung in der oben (§. 3.) schon angegebenen Weise. Drehungsamplitüde und Coordinaten der Drehungsaxe sind neben einander auf gleicher Linie bestimmt durch die neun Winkel, die die Lage des bewegten Coordinatensystems bestimmen: für die Drehungsamplitüde φ fanden wir oben den Ausdruck:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha + \cos \beta' + \cos \gamma'' - 1}{2}$$

und es sind diese drei Winkel α, β', γ'' diejenigen, welche aus den Gleichungen für die Coordinaten der Drehungsaxe ausfielen.

§. 8.

Wie schon bemerkt, würden wir nun auch auf dem im vorigen Paragraphen angedeuteten Wege, ohne irgend Etwas über die Lage der Drehungsaxen, um welche das Auge aus der Primärstellung gedreht wird, zu wissen, das Resultat erhalten müssen, dass für jede der Berechnung unterworfene dieser Drehungsaxen die Coordinate x oder $\cos a = 0$ ist, abgesehen von einem hier wesentlich in Betracht kommenden Moment, welches bald erörtert werden wird. Wir können aber zur Prüfung jenes Gesetzes einen kürzeren Weg einschlagen, der, wie sich zeigen wird, sogar nothwendiger Weise zur Elimination eines Fehlers angewendet werden muss.

Da wir nämlich aus anderen experimentellen Ergebnissen bereits wissen, dass alle Drehungsaxen für die Primärstellung als Ausgangsstellung in der YZ Ebene gelegen sind, so gehen wir hiervon aus, berechnen von dieser Seite her die Grösse des Winkels ϑ, wie sie die Theorie verlangt, und vergleichen diese berechnete Grösse mit der für dieselbe Richtung der Sehaxe beobachteten.

In Fig. 3. ist wiederum AE die Richtung der Sehaxe, und wir nehmen nun also als gegeben an, dass AO in der YZ Ebene die Drehungsaxe ist, um welche die Sehaxe aus der Richtung AB in diese Richtung AE gedreht wurde. AH und AL sind die Projectionen der Sehaxe AE auf die XZ und YZ Ebene. Der Winkel HB, dessen Cotangente der Coefficient der einen Projectionsgleichung ist, ist schon bekannt, es ist der Winkel d. Der Winkel LC, der auf der Kugeloberfläche mit m bezeichnet ist, wird leicht gefunden aus dem Dreiecke EKB, wie unten bei den numerischen Beispielen angegeben werden soll; wir setzen m vorläufig als bekannt voraus. Dann sind also die beiden Projectionsgleichungen von AE oder der X^1 Axe:

$$x = \cot d\, z$$
$$y = \cot m\, z$$

Daher ist die Gleichung der zu der X^1 Axe senkrecht stehenden Y^1Z^1 Ebene:

$$z = -\cot d\, x - \cot m\, y.$$

Nun müssen die Projectionsgleichungen der Z^1 Axe gefunden werden, welche die Form haben mögen:

$$x = p z$$
$$y = q z$$

in denen also p und q zu bestimmen sind (deren negatives Zeichen in dem vorliegenden Falle übrigens schon erwartet werden muss). Zwischen diesen Coefficienten und denen der Gleichung der $Y^1 Z^1$ Ebene findet die Beziehung statt:

$$\cot d\, p + \cot m\, q = -1. \quad (1)$$

Die Drehungsaxe AO nun, in der festen YZ Ebene gelegen, schliesst mit der Z Axe offenbar einen Winkel ein, welcher gleich dem Winkel m ist, so fern die Ebene ALB senkrecht zu AO steht, Drehungsebene der Sehaxe ist. Daher sind die drei Winkel, welche die Drehungsaxe AO der Reihe nach mit den festen positiven Coordinatenaxen einschliesst:

$$90^0,\ 90^0 + m \text{ und } m.$$

Wenn wir nun die drei Winkel, welche die bewegliche Z^1 Axe mit den drei festen Coordinatenaxen einschliesst, der Reihe nach mit α'', β'', γ'' bezeichnen, und berücksichtigen, dass der Winkel, den die Drehungsaxe AO mit der beweglichen Z^1 Axe einschliesst, nämlich OAP, derselbe ist, den sie mit der festen Z Axe einschliesst, also $= m$ ist, so haben wir für diesen Winkel die bekannte Gleichung:

$$\cos 90^0 \cos \alpha'' + \cos\ (90^0 + m) \cos \beta'' + \cos m \cos \gamma''$$
$$= \cos OAP = \cos m.$$

Mithin

$$\cos m \cos \gamma'' - \sin m \cos \beta'' = \cos m. \quad (2)$$

Nun findet zwischen den Winkeln, welche die Z^1 Axe mit den festen Axen einschliesst, nämlich α'', β'', γ'', und den Coefficienten der Projectionsgleichungen derselben Z^1 Axe, nämlich p und q, die Beziehung statt, vermöge welcher ist:

$$\cos \beta'' = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$
$$\cos \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

Setzen wir diese Werthe für $\cos\beta''$ und $\cos\gamma''$ in die Gleichung (2), so erhalten wir

$$\frac{\cos m - \sin m\, q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \cos m.$$

Daraus erhält man durch Quadriren und Umformen

$$\cos m^2 - 2\cos m \sin m\, q + \sin m^2\, q^2$$
$$= \cos m^2 + \cos m^2\, p^2 + \cos m^2\, q^2$$

Oder

$$(\sin m^2 - \cos m^2)\, q^2 - 2\cos m \sin m\, q = \cos m^2\, p^2$$

Mithin

$$p^2 = (\operatorname{tang} m^2 - 1)\, q^2 - 2\operatorname{tang} m\, q.$$

Oben erhielten wir die Gleichung

$$\cot d\, p + \cot m\, q = -1. \quad (1)$$

Wird dieselbe quadrirt und für p^2 der eben erhaltene Werth gesetzt, so ist

$$[(\operatorname{tang} m^2 - 1)\, q^2 - 2\operatorname{tang} m\, q] \cot d^2$$
$$= 1 + 2\cot m\, q + \cot m^2\, q^2$$

woraus sich durch Umformung ergiebt

$$[(\operatorname{tang} m^2 - 1)\cot d^2 - \cot m^2]\, q^2 - 2\,[\operatorname{tang} m \cot d^2 + \cot m]\, q$$
$$= 1.$$

Bezeichnen wir den Coefficienten von q^2 mit A, den Coefficienten von $2q$ mit B, so ist also

$$Aq^2 - 2Bq = 1$$

$$q^2 - 2\frac{B}{A}q + \left(\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{1}{A} + \left(\frac{B}{A}\right)^2$$

$$q - \frac{B}{A} = \pm\sqrt{\frac{1}{A} + \left(\frac{B}{A}\right)^2}$$

$$q = \pm\sqrt{\frac{1}{A} + \left(\frac{B}{A}\right)^2} + \frac{B}{A} \quad (\mathrm{I})$$

Für die numerische Berechnung mag hier sogleich bemerkt werden, dass, wie sich aus späteren die Grösse q enthaltenden Gleichungen ergiebt, die Quadratwurzel in dem eben erhaltenen Werthe für q in den Fällen, in welchen, wie in dem hier als Beispiel dienenden (Fig. 3), die Sehaxe nach Innen und Oben gerichtet ist, so wie, wenn sie nach Aussen und Oben gerichtet ist, negativ genommen werden muss, wodurch dann q selbst negativ wird, was, wie schon bemerkt, erwartet werden muss.

Für p ergiebt sich nun aus der Gleichung (1), indem also q negativ genommen werden soll:

$$p = -\left(\frac{1 - \cot m\, q}{\cot d}\right) \text{ (II)}$$

Die Coefficienten der Projectionsgleichungen der Z^1Axe sind also nun bekannt, $-p$ und $-q$, und da die Gleichungen für die X^1Axe ebenfalls bekannt sind, so können wir nun die Gleichung für die $X^1 Z^1$ Ebene finden, welche die Form haben möge

$$z = sx + ty.$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \cot d\, z \\ y = \cot m\, z \end{array}\right\} \text{ Projectionsgleichungen der } X^1\text{Axe.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -p\, z \\ y = -q\, z \end{array}\right\} \text{ Projectionsgleichungen der } Z^1\text{Axe.}$$

Dann finden die beiden Beziehungen statt

$$sp + tq = -1$$
$$s \cot d + t \cot m = 1.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ist:

$$s = -\left(\frac{1 + tq}{p}\right). \text{ (III.)}$$

Dieser Werth in die zweite Gleichung gesetzt giebt

$$t \cot m - \frac{(1 + tq) \cot d}{p} = 1.$$

Mithin

$$(p \cot m - q \cot d)\, t = p + \cot d$$

$$t = \frac{p + \cot d}{p \cot m - q \cot d} \text{ (IV.)}$$

Somit ist die Gleichung für die $X^1 Z^1$Ebene bekannt, und es kommt also nur noch darauf an, den Winkel ϑ zu finden, welchen diese Ebene mit der Ebene AFE einschliesst. Wenn die Gleichung der Ebene AFE die Form hat

$$z = ux + vy,$$

so ist der Coefficient

$$u = -\cot d, \quad \text{(V.)}$$

weil AF die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der XZ Ebene ist. Also ist

$$z = -\cot dx + vy.$$

Da nun in dieser Ebene die X^1Axe liegt, deren Projectionsgleichungen sind:

$$x = \cot d z$$
$$y = \cot m z$$

so ist

$$v \cot m - \cot d^2 = 1$$
$$v = \frac{1 + \cot d^2}{\cot m} \quad \text{(VI.)}$$

Die Gleichungen der beiden Ebenen, deren eingeschlossener Winkel ϑ gesucht wird, sind also, wenn wir für die Coefficienten die Zeichen s, t, u, v ohne Berücksichtigung der Vorzeichen beibehalten:

$$z = sx + ty$$
$$z = ux + vy$$

Dann findet zwischen ϑ und den Coefficienten dieser Gleichungen die Beziehung statt:

$$\cos \vartheta = \frac{1 + su + tv}{\sqrt{(1 + s^2 + t^2)(1 + u^2 + v^2)}} \quad \text{(VII.)}$$

Würden in diesem Ausdrucke an Stelle der Zeichen die vorher gefundenen Werthe, wie sie enthalten sind in den Gleichungen I bis VI, gesetzt, so würde der cos ϑ ausgedrückt in Functionen der beiden Winkel d und m, d. i. in den Coefficienten der Projectionsgleichungen der Sehaxe erscheinen. Damit ist unser Zweck erreicht, und es ist nun also nothwendig für einige specielle Fälle die sieben mit römischen Zahlen bezeichneten Gleichungen auszurechnen, nämlich die Werthe für die Grössen: p, q, s, t, u, v, um daraus schliesslich den Winkel ϑ zu finden, und diesen zu vergleichen mit dem an den Doppelbildern beobachteten. Von den beiden Winkeln d und m, in deren Functionen alle diese Grössen ausgedrückt werden, wird der eine, d, unmittelbar beobachtet; denn nach möglichst genauer Bestimmung der Primärstellung oder der primären Neigung der Visirebene ist d der Winkel, welchen die Visirebene bei irgend einer anderen Richtung der Sehaxe mit jener einschliesst, welcher positiv und negativ sein kann, wonach die Vorzeichen der Grössen p und q sich richten. Der Winkel m muss erst berechnet werden.

Der Winkel r oder EH wird beobachtet, indem tang r gleich ist dem Quotienten aus der halben Grundlinie dividirt durch die Entfernung des fixirten Punktes von der Mitte der Grundlinie. Nun ist in dem rechtwinkligen Dreiecke EBH:

$$\cos EB = \cos r \cos d,$$

und in dem Dreiecke LCE ist:

$$\cos (90^0 - r) = \cos (90^0 - EB) \cos m,$$

mithin

$$\cos m = \frac{\sin r}{\sin EB}.$$

Der Winkel r kann ebenfalls positiv oder negativ sein; positiv ist er bei allen symmetrischen Stellungen beider Augen, d. h. dann, wenn der fixirte Punkt gleich weit von beiden Augen entfernt ist. Ist r für das eine Auge negativ (wobei er für das andere immer positiv ist), so wird der Coefficient der einen Projectionsgleichung für die X^1Axe negativ. Bei solchen unsymmetrischen Augenstellungen muss natürlich immer für jedes Auge eine besondere Rechnung vorgenommen werden; doch ziehen wir hier nur die symmetrischen Augenstellungen in Betracht.

Meine früheren Versuche haben als Primärstellung diejenige ergeben, bei welcher die Sehaxe 45^0 unter den Horizont geneigt und rechtwinklig zur Grundlinie gerichtet ist. Ich habe, wie schon Eingangs gesagt, die Versuche in grosser Zahl von Neuem angestellt und zwar mit einem Apparat, welcher genauere Messungen, hauptsächlich der Neigung der Visirebene, zulässt, und was zunächst die Bestimmung der Primärstellung betrifft, so habe ich stets dasselbe Ergebniss, wie früher erhalten; es wurde dabei auch besonders darauf Rücksicht genommen, ob nicht vielleicht die beiden Sehaxen in der Primärstellung unter einem kleinen Winkel convergiren möchten, doch habe ich durchaus in allen Versuchen Parallelismus derselben gefunden. Es müssen zu derartigen Versuchen verkehrte Doppelbilder angewendet werden, deren Parallelismus man beurtheilt, während ein unendlich ferner Punkt fixirt wird. Ich beabsichtigte auch, die Versuche Anderer zur Controle zu benutzen, zumal, da es gar nicht unmöglich ist, dass geringe Verschiedenheiten in Bezug auf die primäre Neigung der Visirebene bei verschiedenen Individuen stattfinden: ich musste aber davon abstehen, irgend eine derartige Vergleichung und Controle anzustellen, sowohl hinsichtlich der Primärstellung, als hinsichtlich der Grösse der auf die optische Axe projicirten Drehung in den Tertiärstellungen, weil Diejenigen, welche ich an meinen Apparat führte, ganz unsicher in dem Urtheil über die relative Lage der Doppelbilder waren, ja meistens dieselben überhaupt nicht beachten konnten bei ruhiger und fester Fixation, und ich habe mich überzeugt, dass nur nach längerer Uebung sichere und brauchbare Resultate erlangt werden können; um so mehr aber muss ich den Wunsch wiederholen, es möchten sich auch Andere dieser Mühe unterziehen, da für die rein subjectiven Versuche dadurch allein eine Controle möglich ist, und bis zu derselben die Zahlen, wie schon früher erinnert, nicht auf allgemeine Geltung Anspruch machen können.

§. 9.

Nach der im vorigen Paragraphen angegebenen Methode habe ich nun für einige Richtungen der Sehaxe die numerische Berechnung jener sieben Grössen angestellt; es schien unnöthig, die ganze Rechnung hier zu detailliren, und führe ich daher nur die Werthe für jene Grössen auf. Die Zahl der Beispiele brauchte nicht gross zu sein, weil, wie schon bemerkt, die ganze Rechnung weniger den Zweck hatte, das oben gefundene Gesetz noch besonders zu bestätigen, als vielmehr auf die Erörterung einer scheinbaren Abweichung hinzuleiten; ausserdem würden schon zwei beliebig gewählte Beispiele des Beweises genug liefern können.

Der grösseren Einfachheit der Rechnung wegen einerseits, anderseits wegen grösserer Sicherheit der Beobachtung, habe ich Beispiele mit horizontaler Visirebene gewählt, in denen also der Winkel $d = 45^0$ ist: auf die Beweiskraft der Fälle hat diese Wahl durchaus keinen Einfluss.

W. $d = 45^0$. W. $r = 5^0$ (Convergenzwinkel der Sehaxen $= 10^0$)

log.	q	$= 0,7057868 - 2$
„	p	$= 0,9972636 - 1$
„	t	$= 1,4417109$
„	s	$= 0,3837467$
„	u	$= 0$
„	v	$= 1,2087640$
„	$\cos\vartheta$	$= 9,9996984$
	ϑ	$= 2^0 8'$

W. $d = 45^0$ W. $r = 8^0$ (C. W. d. S. $= 16^0$)

log q	$= 0{,}9063728 - 2$
„ p	$= 0{,}9929800 - 1$
„ t	$= 1{,}2363993$
„ s	$= 0{,}3852761$
„ u	$= 0$
„ v	$= 1{,}0023682$
„ $\cos\vartheta$	$= 9{,}9992697$
„ ϑ	$= 3^0 19'$

W. $d = 45^0$ W. $r = 10^0$ (C. W. d. S. $= 20^0$)

log q	$= 0{,}9947745 - 2$
„ p	$= 0{,}9891671 - 1$
„ t	$= 1{,}1361385$
„ s	$= 0{,}3822333$
„ u	$= 0$
„ v	$= 0{,}9042589$
„ $\cos\vartheta$	$= 9{,}9988806$
ϑ	$= 4^0 6'$

W. $d = 45^0$ W. $r = 15^0$ (C. W. d. S. 30^0)

log q	$= 0{,}1622357 - 1$
„ p	$= 0{,}9754111 - 1$
„ t	$= 0{,}9611024$
„ s	$= 0{,}3916521$
„ u	$= 0$
„ v	$= 0{,}7226442$
„ $\cos\vartheta$	$= 9{,}9974180$
ϑ	$= 6^0 15'$

W. $d = 45^0$ W. $r = 16^0$ (C. W. d. S. $= 32^0$)

log q	$=$	0,1870015 — 1
„ p	$=$	0,9720389 — 1
„ t	$=$	0,9326157
„ s	$=$	0,3929059
„ u	$=$	0
„ v	$=$	0,6931673
„ $\cos\vartheta$	$=$	9,9970588
ϑ	$=$	$6^0 40'$

W. $d = 45^0$ W. $r. = 17^0$ (C. W. d. S. $= 34^0$)

log p	$=$	0,2100535 — 1
„ q	$=$	0,9684200 — 1
„ t	$=$	0,9055576
„ s	$=$	0,3942509
„ u	$=$	0
„ v	$=$	0,6651510
„ $\cos\vartheta$	$=$	9,9966717
ϑ	$=$	$7^0 5'$

In diesen sechs Beispielen wächst also, bei horizontaler Visirebene, der Convergenzwinkel der Sehaxe, nämlich $2r$, von 10^0 bis 34^0, und gleichzeitig wächst der Winkel ϑ, d. i. die im binocularen Sehfelde vorhandene auf die optische Axe projicirte Drehung, von $2^0\ 8'$ bis $7^0\ 5'$. Bevor wir diese Resultate mit denen der Versuche vergleichen, ist es nothwendig, an eine zu Anfang dieser Untersuchung gemachte Voraussetzung zu erinnern. Das Auge wurde als Kugel betrachtet, und für ein solches Auge allein haben die absoluten Werthe für ϑ, wie sie eben gefunden wurden, Geltung. Der Winkel ϑ ist der Winkel, welchen das Retinabild einer im fixirten Punkte zur Visirebene senkrecht stehenden graden Linie mit der Trennungslinie identischer Netzhauthälften einschliesst. In Fig. 3 entspricht der grösste Kreis *FE* dem Retinabilde jener Linie, und der Kreis *PE* der Trennungslinie identischer Netzhauthälften. In einer Kugel nun wird der Flächenwinkel, welchen zwei durch das Centrum gehende Ebenen mit einander einschliessen, gemessen durch den Winkel, welchen die beiden grössten Kreise, die Durchschnittslinien jener beiden Ebenen mit der Kugeloberfläche, mit einander einschliessen. So berechneten wir den Winkel ϑ, indem wir ihn gleichsetzten dem Flächenwinkel zwischen den Ebenen *AFE* und *APE*. Dieser Winkel ϑ, dessen Schenkel rechtwinklig zur Durchschnittslinie *AE* der beiden Ebenen stehen, ist der grösste Winkel, den zwei je in einer der beiden Ebenen liegende Linien, die gleiche Winkel mit der Durchschnittslinie einschliessen, mit einander bilden können. Nun ist das Auge, und speciell der hintere Umfang, nicht sphärisch gekrümmt, sondern nahezu ellipsoidisch. Denken wir nun in dieser wahren Gestalt des Auges das in obiger Weise zu einer Kugel reducirte Auge eingeschlossen (oder umgekehrt), so werden wir die beiden Ebenen *AFE* und *APE* noch über die Kugeloberfläche hinaus fortgesetzt denken müssen, bis sie die Retina schneiden, und da ihnen diese nun jedenfalls eine von der Kugelgestalt abweichende Krümmung darbietet, so werden die beiden Durchschnittslinien der Ebenen *AFE* und *APE* mit der Retina, indem sie, wie jedenfalls angenommen werden darf, gleiche Winkel mit *AE* einschliessen, unter sich auf der Retinaoberfläche einen Winkel ϑ^1 bilden, welcher kleiner ist, als der Flächenwinkel zwischen *AFE* und *APE*, kleiner also, als der Winkel ϑ. — Andere Umstände sind hier nicht von Einfluss; obwohl der Kreuzungspunkt der Richtungsstrahlen nicht mit dem Drehpunkte zusammenfällt, so liegt er doch stets auf *AE*, und daher ist die Ebene *AFE* die Ebene, welche jene Objectlinie und ihr Retinabild enthält. Die Annahme, dass der Drehpunkt in das Centrum des zur Kugel reducirten Auges fällt, weicht kaum von der Wahrheit ab. — Somit darf also nicht nur, sondern muss nothwendiger Weise erwartet werden, dass die einzelnen berechneten absoluten Werthe für ϑ grösser sind, als die beobachteten für ϑ^1;*) aber anderseits müssen die relativen Werthe nahezu gleich auf beiden Seiten erwartet werden, d. h. die Proportion, in welcher der Winkel ϑ bei verschiedenen Richtungen der Sehaxe wächst oder abnimmt, muss ähnlich oder gleich derjenigen sein, in welcher ϑ^1 bei denselben Veränderungen der Sehaxenrichtung sich ändert. Dass das Vorzeichen der beiden Winkel ϑ und ϑ^1, oder das Vorzeichen der Halbaxe der Sehaxe, auf welche die durch jene Winkel repräsentirte projicirte Drehung zu beziehen ist, übereinstimmend ist, wenn die Ebene *APE* ($X^1 Z^1$) zwischen *AFE* und *ADE* gelegen ist, wurde oben schon nachgewiesen.

Bei der Mittheilung meiner früheren Versuche habe ich schon angeführt, dass die Fehler, die den einzelnen Zahlen anhaften, von der Art waren, dass sie zu geringe Werthe für den Winkel ϑ^1 ergeben haben.**) Meine später genauer angestellten Messungen haben dies bestätigt, und ich habe für die Richtungen der Sehaxe, für die oben die Berechnung angestellt worden ist, folgende Werthe für ϑ^1 erhalten:

---

*) Hierin liegt auch der Grund dafür, dass, wenn bei unbekannter Lage der Drehungsaxe diese nach der im 7. Paragraphen angegebenen Methode mit Hülfe des beobachteten Winkels ϑ^1 berechnet werden sollte, eine der Differenz zwischen ϑ und ϑ^1 entsprechende Correction nothwendig sein würde. (Vergl. pag. 84. §. 8.)

**) A. a. O. pag. 46.

d	$= 45^0$	„	„	„	„	„
r	$= 5^0$	$= 8^0$	$= 10^0$	$= 15^0$	$= 16^0$	$= 17^0$
ϑ^1	$= 0^0\,54'$	$= 1^0\,53'$	$= 2^0 37'$	$= 3^0\,10'$	$= 3^0\,50'$	$= 4^0\,30'$
ϑ	$= 2^0\,8'$	$= 3^0\,19'$	$= 4^0\,6'$	$= 6^0\,15'$	$= 6^0\,40'$	$= 7^0\,5'$

Die Werthe für ϑ^1 sind das Mittel aus einer grösseren Reihe von Versuchen; wer dieselben wiederholt hat, wird es in der Art der Versuche begründet finden, dass Schwankungen bis 30′ für ϑ^1 so gut wie unvermeidlich sind. Die oben berechneten Werthe sind neben ϑ noch ein Mal zur Vergleichung aufgeführt. Die absoluten Werthe zeigen eine ziemlich gleichmässige und constante Differenz, wie sie erwartet werden musste; dagegen ist das Verhältniss, in welchem ϑ^1 und ϑ wachsen, ein durchaus ähnliches, so weit überhaupt die Anforderungen gehen dürfen; und für diese Uebereinstimmung der relativen Werthe liefern auch die früher mitgetheilten zahlreicheren Beispiele Belege.

Somit glaube ich, dass nach Allem, was erörtert wurde, ganz besonders aber, wie ich wiederholen muss, nach dem, was die thatsächliche Feststellung der Secundärstellungen beweist, dass das oben abgeleitete Listing'sche Gesetz für die Drehungen des Auges als feststehend und bewiesen angenommen werden darf.

Es versteht sich nun auch von selbst, dass die andere Hälfte des Winkels n, nämlich η, d. i. die auf die optische Axe projicirte Drehung, wie sie im monocularem Sehfelde, objectiv, zu beobachten ist, wirklich in den Tertiärstellungen vorhanden ist; ihre Existenz ist durch die des Winkels ϑ nach Richtung und Grösse (sofern ϑ nicht $= n$) bewiesen. Entzieht sich der Winkel η, der also z. B. an einem markirten Punkte der Iris in oben angegebener Weise beobachtet werden könnte, der unmittelbaren Wahrnehmung, so kommt das lediglich auf Rechnung seiner geringen Grösse in den meisten Augenstellungen und der in der Natur der Sache begründeten Ungenauigkeit der Beobachtung. Da der Winkel η gleich $n - \vartheta$ ist, so kann er leicht gefunden werden. In der folgenden kleinen Tabelle ist der Winkel n, dessen Cotangente $= \frac{\cot d}{\sin r}$ für die obigen sechs Augenstellungen berechnet und η durch Subtraction von ϑ (natürlich nicht ϑ^1) gefunden.

d	$=45^0$	„	„	„	„	„
r	$=5^0$	$=8^0$	$=10^0$	$=15^0$	$=16^0$	$=17^0$
n	$=4^0\ 58'$	$=7^0\ 55'$	$=9^0\ 51'$	$=14^0 30'$	$=15^0 25'$	$=16^0 18'$
η	$=2^0\ 50'$	$=4^0\ 34'$	$=5^0\ 45'$	$=8^0\ 15'$	$=8^0 45'$	$=9^0\ 13'$

Ich bemerke in Bezug auf die gewählten Stellungen des Auges, dass die beiden letzten, bei denen der Convergenzwinkel der Sehaxen 32^0 und 34^0 ist, zu den äussersten gehören, welche erreicht werden können: für meine Augen ist 34^0 der grösste Convergenzwinkel, bei welchem nur noch mit einiger Mühe eine anhaltende Fixation zur Beobachtung von Doppelbildern möglich ist. Eine diesen Werthen von η entsprechende Beweglichkeit, Dehnbarkeit und Nachgiebigkeit müssen demnach alle die mit dem Bulbus in Verbindung stehenden Theile, Conjunctiva, Ciliarnerven, Sehnerv und besonders auch die Muskeln, besitzen, deren letzterer Insertionen daher auch nicht unbeträchtlich ihre Lage im Raume ändern, wodurch für jede einzelne Augenstellung die Lage der Axe, um welche ein Muskel allein zu drehen strebt, eine besondere wird, worauf ich zurückkommen werde. — Da die Gestalt des Augapfels auch an dem vorderen Umfange von der sphärischen abweicht, so würde der etwa an einem markirten Punkte oder einem Gefässchen in der Nähe der Cornea zu beobachtende Winkel η^1 ebenfalls kleiner ausfallen müssen, als der berechnete Winkel η. Gefässe, als Beobachtungsobjecte, welche weiter von der Cornea entfernt sind, werden eine geringere Grösse des Winkels η^1 noch aus anderem Grunde ergeben können; da nämlich die Befestigung der Conjunctiva nach der Peripherie zu allmählich lockerer wird, so wird sie sich dem entsprechend, je weiter von der Cornea entfernt, desto weniger bei jener durch η repräsentirten Drehung betheiligen. Die eigenthümliche, spannende und schmerzhafte Empfindung, welche bei sehr grossem Convergenzwinkel der Sehaxen und bei sehr starker Auf- oder Abwärtsneigung der Visirebene auftritt, wird, abgesehen von der Spannung der Muskeln, vielleicht auch in der bei derartigen Augenstellungen beträchtlichen Grösse des Winkels η begründet sein, mögen die Nerven der Conjunctiva oder die in der Orbita verlaufenden Nerven gezerrt die Vermittler der Empfindung sein.

Ein bekannter Versuch, die Eintrittsstelle des Sehnerven leuchtend wahrzunehmen, besteht darin, dass man bei geschlossenen Lidern möglichst rasch die Augen von einer Seite zur anderen wirft: während der Bewegung treten zwei leuchtende Flecke im dunkelen Sehfelde auf. Eine Bedingung gehört, wie mir scheint, noch zum Gelingen des Versuches: man darf die Augen nicht in der primären Neigung der Visirebene halten; dann erfolgt nämlich jene Bewegung in dieser primären Richtung, d. h, in der *XY* Ebene, das Auge gelangt in lauter Secundärstellungen, bei denen der Winkel η stets gleich Null ist. Macht man dagegen den Versuch z. B. bei horizontaler oder aufwärtsgeneigter Visirebene, so gelingt er, wenn recht rasch ausgeführt, und gewiss ist das Auftreten der leuchtenden Stellen wiederum in der rasch zu- und abnehmenden Grösse des Winkels η begründet, der, wie oben bemerkt, Torsion des peripherischen Endes des Sehnerven bedingt, die derselbe, wenn sie langsam und allmählig eintritt, ohne Reaction ertragen wird, wahrscheinlich aber nicht, wenn sie plötzlich bis zu hohem Grade erfolgt.

Endlich erinnere ich noch daran, dass der Mariotte'sche Fleck in doppelter Weise benutzt werden kann, um die auf die optische Axe projicirte Drehung als Winkel η auch subjectiv zu beobachten. Die beiden Winkel ϑ und η unterscheiden sich ja wesentlich durch den Beziehungspunkt, von wo aus jeder gemessen werden muss; ϑ, im binocularen Sehfelde zu beobachten, also lediglich subjectiv, wird von der Ebene *AFE* aus gerechnet. Die bei derselben Richtung der Sehaxe vorhandene Lage des Auges kann auch durch den Winkel η bezeichnet werden; dann wird eine auf die optische Axe projicirte Drehung an dem Auge selbst und seiner Umgebung beobachtet und von der Ebene *ADE* aus gerechnet. Der Winkel η, im Allgemeinen objectivzu beobachten, kann nun subjectiv ebenfalls am Mariotte'schen Fleck beobachtet werden: dies sind die von mir schon früher mitgetheilten Versuche (a. a. O. §. 40 und 44.) in denen das Bild eines Objects auf die Eintrittsstelle des Sehnerven gebracht wird, und man nun für verschiedene Augenstellungen den relativen Ort des Objects im Sehfelde ändern muss, je nachdem sich der Mariotte'sche Fleck um die optische Axe gedreht hat; die anderen Versuche werden mit Hülfe der Purkinje'schen Versuche gemacht, bei denen man in verschiedenen Augenstellungen den Mariotte'schen Fleck höher oder tiefer am äusseren Rande des Sehfeldes auftauchen sieht, Drehungen, welche sich an den Gefässen selbst ebenfalls wahrnehmen lassen.

Was nun den Begriff der Primärstellung des Auges betrifft, welchen wir gleich im Anfang dieser Untersuchung ohne Weiteres eingeführt haben, so wird die Erklärung und Bedeutung desselben im Verlauf sich ergeben haben. Es ist diejenige Augenstellung, welche man sich gewissermassen bei der Einrichtung der Bewegungen zum Grunde gelegt denken kann; als Ausgangspunkt gewählt sind die Lagen, in welche das Auge von ihr aus gelangt, die Norm für alle übrigen Bewegungen, von allen übrigen Stellungen als Ausgangsstellungen aus. Die Primärstellung darf in ihrer nächsten Beziehung zu den Bewegungen des Auges nur als prima inter pares bezeichnet werden, und es darf nicht die Bedeutung hereingezogen werden, als ob das Auge etwa vorzugsweise sich in dieser Stellung befinden müsste, als ob es leichter und häufiger aus dieser Stellung bewegt würde, als aus irgend einer anderen. Die Primärstellung ist höchst wahrscheinlich nicht die Ruhelage des Auges, und keinenfalls ist sie a priori dafür zu halten; sondern die Muskeln befinden sich wahrscheinlich dann in der Ruhelage, wenn die Visirebene horizontal gerichtet ist, wie man es gewöhnlich anzunehmen pflegt. Aber das Gesetz, wonach alle Drehungen erfolgen, kann angesehen werden, als wäre es zunächst für diese eine, aus allen übrigen Stellungen herausgegriffen, geschaffen, und daher lässt sich das Gesetz in der oben abgeleiteten Form ausdrücken, dass nämlich das Auge aus der Primärstellung stets um eine zur Sehaxe senkrechte Axe gedreht wird; die Lagen, welche das Auge auf diese Weise erhält, und die Sehaxe kann ja aus der Primärstellung in alle überhaupt möglichen Richtungen geführt werden, sind nun Regel, Gesetz für alle übrigen Bewegungen, die so geschehen, dass die Lagen des Auges bei bestimmten Richtungen der Sehaxe stets dieselben sind, welche Augenstellung auch Ausgangsstellung war, und zwar diejenigen, in welche das Auge aus der Primärstellung gelangt. Für die Physiologie des Sehorgans haben ausserdem die Primärstellung und die Secundärstellungen ihre besondere Bedeutung, welche besprochen wurde. Eben diese aus der Existenz der Primärstellung und der Secundärstellungen sich ergebenden Consequenzen für die Verhältnisse des Einfachsehens, für die Beschaffenheit des Horopters sind es, welche mit grosser Wahrscheinlichkeit als Gründe angesehen werden können dafür, dass grade jene, 45^0 unter den Horizont geneigte, Richtung der Sehaxe zur primären für die Mechanik des Auges gemacht worden ist, welche bei alleiniger Berüchsichtigung der Bewegungen, wie aus dem so eben Erörterten ersichtlich, wahrscheinlich eben sowohl jede andere Augenstellung hätte sein können. Im Allgemeinen erfordern nämlich die Augenstellungen mit abwärts gerichteter Sehaxe beim Menschen die grösste Ausdehnung des Horopters. Werden aufwärts geneigte Sehaxen benutzt, so sind sie auch in den meisten Fällen parallel oder nahezu parallel gerichtet, selten bedürfen wir der Convergenz der Sehaxen auf nahe liegende Punkte bei aufwärts gerichteter Visirebene; mithin sind solche Augenstellungen nahezu Secundärstellungen der einen Art, bei denen ja die Neigung der Visirebene überhaupt ohne Einfluss auf die Lage der Netzhaut und bei denen der Horopter eine Fläche ist.

Dagegen bedürfen wir bei abwärts gerichteter Visirebene meistens oder immer zugleich der Convergenz der Sehaxen: wäre nun die Primärstellung nicht selbst eine Stellung mit abwärts geneigter Sehaxe, läge sie also und die Secundärstellung der anderen Art nicht in der Nähe jener Augenstellungen mit Convergenz der Sehaxen, so würde in diesen, die so häufig andauernd und vorzugsweise von den meisten Menschen gebraucht werden müssen, eine erhebliche auf die optische Axe projicirte Drehung, ein Winkel ϑ von ansehnlicher Grösse vorhanden sein, der den grade dann gleichfalls so nothwendigen flächenartigen Horopter streng und mathematisch genommen zur Linie, praktisch genommen jedenfalls doch auf einen kleinen mittleren Theil des Sehfeldes reduciren würde. (Vergl. hierüber auch das a. a. O. §. 35 Gesagte.) Mag dieses Moment nicht das einzige sein, welches die Abwärtsneigung der primären Richtung der Sehaxe bedingte, mögen auch vielleicht in der Mechanik selbst noch Gründe für dieselbe enthalten sein, die Berechtigung des Angeführten als eines der Gründe liegt, wie mir scheint, auf der Hand.

In den Beiträgen zur Physiologie des Sehorgans (p. 93) habe ich einen falschen Schluss aus den Versuchen gezogen, indem ich meinte, dass Auge würde so gedreht, dass es stets eine und dieselbe Orientirung zu seinem eignen Gesichtsfelde behielte. Das Irrthümliche hierin ergiebt sich aus dem Bisherigen von selbst: ich war der Meinung, der Winkel η existirte nicht, oder eine auf die optische Axe projicirte Drehung existirte nicht als Winkel η, sondern nur als Winkel ϑ, der Winkel ϑ allein sei gleich dem Winkel n, wie es der Fall sein würde, wenn das zweite der beiden oben supponirten Bewegungsprincipe realisirt wäre, in welchem die feste Z Axe in der beweglichen X^1Z^1 Ebene lag. Eine genauere Untersuchung und Berechnung hatte ich damals noch nicht angestellt.

§. 10.

Nachdem wir nun versucht haben, die Bewegungen, welche dem Augapfel im Leben ertheilt werden, festzustellen, würde die Frage nach den bewegenden Kräften folgen. Wir kennen für jede einzelne Drehung des

Auges die Drehungsaxe, und zwar wissen wir von derselben nicht nur ihre Lage im Auge, sondern auch, dass diese Lage für die ganze Dauer einer einfachen Drehung constant bleibt, oder dass die augenblickliche Drehungsaxe in jedem Zeitelement der Bewegung eine und dieselbe ist. Die augenblickliche Drehun gsaxedes Auges nun kann, wie schon in der Einleitung bemerkt, angesehen werden als die Axe des aus den in dem Zeitelement am Auge wirksamen Drehungsmomenten resultirenden Moments, weil die Widerstände beim Auge so gross angeschlagen werden können, dass die dem Auge in dem vorhergehenden Augenblicke der Bewegung ertheilte Geschwindigkeit um dieselbe augenblickliche Drehungsaxe beim Beginn des folgenden Augenblickes gleich Null gesetzt werden kann, so dass das Auge in jedem Augenblicke der Drehung zu Ruhe kommen würde, wenn nicht immer von Neuem die Muskeln anzögen, und zwar, da die endliche Drehung um eine feste Axe erfolgt, in jedem Augenblicke mit der gleichen relativen Kraft. Ganz streng genommen kann allerdings wohl niemals die schon bestehende Geschwindigkeit gleich Null gesetzt werden, doch glaube ich, dass beim Auge diese die Betrachtung vereinfachende Annahme vorläufig erlaubt sein kann. Wie nun bei gegebener Axe des resultirenden Moments die componirenden Momente der Muskeln gefunden werden, darüber haben wir neuerlichst eine erschöpfende Untersuchung von A. Fick erhalten: „Die Bewegungen des menschlichen Augapfels" (Zeitschrift für rationelle Medicin, IV. Band. 1854. p. 101). Fick hat die Coordinaten der Ursprungs- und Insertionspunkte der Augenmuskeln in Bezug auf ein im Raume festes Coordinatensystem berechnet, welches letztere so gelegen angenommen wurde, dass es die Ruhelage des Auges, bei horizontal gradeaus gerichteter Sehaxe characterisirt, in

Bezug auf die Primärstellung eine Secundärstellung mit 45^0 aufwärts von der Primärstellung geneigter Sehaxe. (Ich bemerke hier, dass Fick eine andere Bezeichnung der einzelnen Axen hat, als ich oben angenommen habe, und dass ich der Fick'schen Nomenclatur gefolgt sein würde, wenn mir nicht andere Gründe die Abweichung wünschenswerth gemacht hätten; eine Umformung der einen in die andere Bezeichnung hat indess durchaus keine Schwierigkeiten.) Fick stellt dann die Gleichungen für die Axen auf, um welche jeder Muskel, wenn er allein thätig wäre, das Auge zu drehen strebt. Mit diesen Axen, deren Coordinaten in Bezug auf das im Raume feste System sich mit den Augenstellungen selbst ändern, wird dann zur Componirung gegebener augenblicklicher Drehungsaxen verfahren, wie mit Kräften, nach dem Parallelogramm oder Parallelepiped der Kräfte. Sollten nun z. B. für irgend eine Axe, um welche das Auge aus der Primärstellung gedreht wird, die componirenden Momente gefunden werden, so würde anzunehmen sein, ein im Auge festes, mit demselben bewegliches, Coordinatensystem sei zunächst aus der Ruhelage, d. h. aus Coincidenz mit dem Fick'schen im Raume festen System, in die Lage des in dieser Untersuchung zu Grunde gelegten festen Systems, d. h. in die Primärstellung gedreht; und indem nun die Insertionspunkte der Muskeln an dieser Bewegung Theil nahmen, sind also die von Fick berechneten Coordinaten dieser Punkte auf diesen im Auge festen Axen dieselben geblieben; diese Coordinaten müssen nun zurück verwandelt werden in die auf den Fick'schen, im Raume festen Axen, welche die Ruhelage des Auges repräsentiren, eine Transformation, welche einfach ist, weil die Axe der x des Fick'schen Systems mit der YAxe des die Primärstellung repräsentirenden Systems zusammenfällt. Nach dieser Umwandlung kennt man also die Lage der Muskelebenen und damit die der Muskelaxen für die Primärstellung bezogen auf die Ruhelage des Auges oder der Muskeln. Dann können mittelst der Fick'schen Gleichungen die componirenden Momente für eine bekannte Axe des resultirenden Moments berechnet werden. Aehnlich würde für jede beliebige andere Stellung des Auges als Ausgangsstellung für Drehungen zu verfahren sein, in denen die Lage des beweglichen Coordinatensystems ja stets in Bezug auf die Primärstellung, und durch diese auch in Bezug auf die Ruhelage (festes System von Fick) bekannt ist.

Sollen nun aber für eine gegebene Drehungsaxe oder Axe des resultirenden Moments die componirenden Momente berechnet werden, so muss, wie Fick speciell nachgewiesen hat, immer noch eine Annahme zu machen erlaubt sein; die Muskeln können sich nämlich auf unendlich vielerlei Weisen betheiligen, um das Auge um eine gegebene Axe zu drehen: während es eine einzige Art des Zusammenwirkens giebt, bei welcher um eine gegebene Axe mit dem möglichst kleinen Kraftaufwand die Drehung erfolgt, können sich diesen nothwendigen Wirkungen noch in unendlich vielen verschiedenen Graden überflüssige, sich gegenseitig aufhebende Wirkungen der Muskeln zugesellen, die auf das Resultat, auf die Drehung keinen Einfluss haben. Will man nun eine Berechnung der Drehungsmomente anstellen, so muss irgend eine Annahme über diese Verhältnisse gemacht werden, und Fick hat diejenige als die wahrscheinlichste hingestellt, wonach die Drehung mit der möglichst geringen Gesammtanstrengung ausgeführt wird; denn „jede überflüssige, d. h. zu der gewünschten Drehung nicht absolut nothwendige, Anstrengung wird in den Muskeln, die sie im Gleichgewicht halten, als Widerstand empfunden; es ist also wahrscheinlich dass sie die Seele sofort fallen lässt und nach einiger

Uebung gar nicht mehr versucht." Gräfe*) hat sich gegen diese Annahme erklärt und hält es für unzulässig, grade am Auge die Mitbewegungen ganz wegzuleugnen und die Associationen der Bewegungen lediglich auf das Zweckmässige zu beschränken, da bei allen übrigen Muskelgruppen des Körpers Mitbewegungen stattfinden. Obwohl allerdings von vorn herein kein Grund dafür vorliegt, dass die Augenmuskeln eine Ausnahme in dieser Beziehung machen sollten, als ob gleich von Anfang an das Kind nur den grade nothwendigen und zweckmässigen Kraftaufwand bei den Augenbewegungen machte, so scheint es mir doch mit Fick sehr wahrscheinlich, dass in dem Centrum für die Augenbewegungen Verhältnisse stattfinden, vermöge deren leichter, als sonst, das Ueberflüssige eliminirt wird; zwar vielleicht nicht bei allen Menschen in gleichem Grade, besonders aber da, wo häufige, rasche Augenbewegungen zur Gewohnheit geworden sind, und Gräfe vermuthet wohl mit Recht, dass Verschiedenheiten in diesen Verhältnissen die Unterschiede in der Rapidität und Leichtigkeit des Blickes zum Theil begründen. Aber wenn nun auch nicht ganz allgemein angenommen werden kann, dass die Drehungen des Auges stets mit dem geringsten Kraftaufwand gemacht werden, so muss doch, wie mir scheint, diese Annahme bei Berechnungen zum Grunde gelegt werden, da jedenfalls angenommen werden darf, dass es Menschen giebt, für die sie Geltung hat; denn das physiologische Interesse einer derartigen Rechnung würde doch wohl vielmehr darin liegen, zu wissen, welche Kraft und Combinationen gegebener Kräfte nothwendig sind, um dem Auge diese oder jene Bewegung zu ertheilen, als darin, für irgend einen speciellen Fall einen immer nur hypothetischen unnöthigen Kraftaufwand zu kennen.

*) A. a. O. p. 24.

Etwaige Mitbewegungen bei den Augenmuskeln in dem Sinne von Fick sind auch nicht völlig identisch und in jeder Beziehung vergleichbar den zwecklos associirten Bewegungen in anderen Muskelgruppen. Jene würden nämlich nicht nur zwecklos, sondern zweckwidrig sein, sie würden in den Muskeln, die jene im Gleichgewicht halten müssen, wenn das Resultat, die gewünschte Drehung, ungestört erfolgen soll, als Widerstand empfunden werden: die Mitbewegungen innerhalb anderer Muskelgruppen, so weit uns dieselben bekannt sind und welche gewöhnlich gemeint sind, pflegen sich nicht so, nicht als Widerstände zu verhalten; sie laufen gewissermassen nur nebenher, erhöhen zwar oft um Bedeutendes die Gesammtanstrengung, welche der Organismus auf irgend eine Bewegung verwendet, aber dieses nur durch ihr Auftreten, sie erhöhen im Allgemeinen nicht die zu leistende Arbeit der einzelnen für die intendirte Bewegung wesentlichen Muskeln. Zwar könnten bei jedem Gelenke, wie beim Auge, solche nicht bloss Mit- sondern Gegenbewegungen in Frage kommen; wir wissen über sie Nichts, aber die von Fick für die Augenbewegungen gemachte Annahme scheint mir für alle derartige Mitbewegungen als von vorn herein gestattet, besonders wenn man berücksichtigt, dass die Grösse des Querschnitts jedes einzelnen Muskels für irgend ein bestimmtes Mass der Widerstände oder des zu hebenden Gewichts adaptirt sein muss, ein Moment, welches besonders bei den Augenmuskeln der Berücksichtigung verdient und uns sogleich einen ferneren Anhaltspunkt liefern soll.

Ist nun in der erörterten Weise ein resultirendes Moment in die componirenden Momente der Muskeln zerlegt, so fragt es sich, was für Aufschluss wir dadurch über die Wirkungen der betheiligten Augenmuskeln erhalten. Drehungsmoment wird das Product aus der

Kraft P und der Länge des Hebelarms genannt. Vergleichen wir Drehungsmomente der Augenmuskeln und ihre resultirenden Momente, so ist die Länge des Hebelarms, d. i. der Halbmesser des Auges, stets dieselbe, und wir haben es nur mit P allein zu thun. Ist nun das als Einheit zu Grunde gelegte resultirende Moment z. B. in zwei rechtwinklige componirende Momente P' und P'' nach dem Parallelogramm der Kräfte zerlegt, so verhalten sich diese beiden wie die Cosinus der Winkel, welche ihre Momentenaxen mit der Axe des resultirenden Moments einschliessen,

$$\frac{P'}{P''} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

Es fragt sich nun, welchem physiologischen Begriffe dieses bekannte Verhältniss der Cosinus gleich zu setzen ist.

Donders*) hat vorgeschlagen, den quantitativen Antheil eines Muskels an einer Drehung dadurch zu bestimmen, dass in der nach vollendeter Bewegung erlangten Lage des Auges die Lagenveränderung der Muskelinsertionen ermittelt wird, wobei diejenigen Muskeln als die thätig gewesenen anzusehen sind, deren Insertionspunkt dem Ursprungspunkte näher gerückt ist: das Verhältniss der so zu findenden Verkürzung der betheiligten Muskeln ist das Verhältniss, in welchem dieselben Antheil an der Drehung nahmen. Dieser Vorschlag von Donders ist durchaus nicht so zu verstehen, was bereits Gräfe bemerkt hat, als ob das Quantum der Verkürzung eines Muskels ein Ausdruck für die Kraft sein sollte, mit welcher er thätig war; das Verhältniss der Verkürzung zweier als gleich zu betrachtender Augenmuskeln, die gleichzeitig sich zu verkürzen begannen und gleichzeitig ihre Wirkung einstellten, soll nur dem Verhältniss gleichgesetzt werden, in welchem

*) Holländische Beiträge I. p. 136.

sie sich bei der Drehung des Auges betheiligten. Wenn man diesen Antheil, den ein Muskel activ an der Drehung nahm, die von ihm entwickelte Kraft nennen will, seine Kraftäusserung, so ist dieser Begriff nicht identisch mit dem Begriffe Kraft, den wir mit P bezeichneten; sondern jener Antheil des Muskels an der Drehung ist nur die Arbeit, der Nutzeffect, die der Muskel geleistet hat; und das Verhältniss der Verkürzung der beiden Muskeln ist identisch mit dem Verhältniss der geleisteten Arbeit. Von hieraus kann man nun allerdings noch etwas weiter kommen. Zunächst muss ich ein Moment hervorheben, welches auch Donders schon berücksichtigt hat: die Insertionspunkte der Muskeln ändern während der Drehungen des Auges ihre Lage nicht nur innerhalb der ursprünglichen Muskelebene, wobei die Axe des Muskels eine und dieselbe Lage behält, sondern auch so, dass die Muskelebene und damit die Axe, um die der Muskel zu drehen strebt, in jedem Augenblicke der Drehung eine andere Lage erlangt. Da nun die Drehungen des Auges in der That um feste Axen erfolgen, oder da die augenblickliche Drehungsaxe eine und dieselbe Lage behält, so muss das Verhältniss, in welchem die betheiligten Muskeln zusammenwirken, in jedem Augenblicke, entsprechend der Lagenveränderung der Ebene, in der sie wirksam sind, schwanken, und die componirenden Momente können nicht in jedem Augenblicke dieselben sein. Bei kleinen Drehungsamplitüden kommt dies Moment wenig in Betracht, und für den Muskel gar nicht, dessen Insertionspunkt sich nur innerhalb der ursprünglichen Muskelebene bewegt. Wird aber von dem eben angeführten Umstande abgesehen, so wird man sagen können, dass das Verhältniss, in welchem sich zwei gleiche, ihre Wirkung zugleich beginnende und einstellende Augenmuskeln verkürzt haben, auch das Verhältniss ist, in welchem sie sich in jedem Augenblicke der Wirkung verkürzten, und in welchem sie das Zusammenwirken begannen. Verkürzt sich nun ein Muskel während eines Zeitelements z. B. um das Doppelte von dem, um welches sich in demselben Zeitelement ein anderer gleicher Muskel verkürzt, so wird man sagen können, dass der eine Muskel sich mit der doppelten Energie von der des anderen verkürzt hat. Fick hat das Drehungsmoment P' eines Muskels gradezu der Contractionsenergie gleichgesetzt; aber es ist nicht angegeben, was unter Contractionsenergie zu verstehen ist, und das möchte weiter in Frage kommen. In welchem Verhältniss die Energie und Lebhaftigkeit des der Contraction des Muskels zum Grunde liegenden chemischen Processes, deren Verschiedenheiten Unterschiede der Contractionsenergie bedingen können, zu der Contractionsenergie oder der zu leistenden Arbeit steht, wissen wir nicht; ausserdem kennen wir noch kein Maass für die Contractionsenergie, keine zum Grunde zu legende Einheit.

Man darf annehmen, dass Fälle vorkommen, in denen ein einziger Muskel das Auge dreht. Nennen wir nun mit Weber*) das Gewicht, welches einem sich zu contrahiren strebenden Muskel grade das Gleichgewicht hält, so dass der Muskel weder das Gewicht hebt, noch durch dasselbe ausgedehnt wird, die absolute, volle Kraft des Muskels, so ist diese, wie Weber nachgewiesen hat, lediglich dem Querschnitte des Muskels proportional, wobei ein bestimmter physiologischer Zustand der Muskelsubstanz vorausgesetzt wird. Diese absolute Kraft wird nur entwickelt, wenn der Muskel aus dem Zustand der Ruhe in den der Contraction überzugehen strebt. Alle sechs Augenmuskeln haben nun nahezu gleichen Querschnitt, welcher n heissen mag, was die

*) Artikel Muskelbewegung, Handwörterbuch der Physiologie.

Zahl der Primitivbündel bedeutet. Wenn nun unter Umständen ein Augenmuskel allein das Auge aus einer bestimmten Anfangsstellung zu drehen vermag, so wissen wir also, dass die einem menschlichen Muskel vom Querschnitt *n* entsprechende Kraft grösser ist, als das gehobene Gewicht, d. h. der um einen festen Punkt drehbare Augapfel mit den Widerständen, zu denen auch die durch die Bewegung angespannten Muskeln zu rechnen sind. Der Querschnitt des Augenmuskels wird von der Art sein müssen, dass, bis das Auge die grösstmögliche Drehungsamplitüde um die Axe jenes Muskels erlitten hat, die, mit der Contraction abnehmende, entwickelte Kraft noch grösser ist, als das Gewicht. Niemals aber hat der Augenmuskel mehr zu leisten, als dies, und daher darf angenommen werden, dass der Querschnitt des Muskels nicht grösser ist, als für die Drehung des Auges um die Muskelaxe selbst erforderlich ist, oder umgekehrt, dass das durch den drehbaren Augapfel repräsentirte Gewicht, nur um Weniges vergrössert, der absoluten Kraft eines Augenmuskels von *n* Primitivbündeln entsprechen würde. Ein unnützes Uebermaass von absoluter Kraft wird der Augenmuskel nicht haben. Aus derselben Stellung nun, aus welcher wir eben einen Muskel allein drehen liessen, kann das Auge nach unendlich vielen anderen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit gedreht werden. Bei allen diesen Drehungen aber ist das Gewicht, in welches der drehbare Augapfel mit den Widerständen übersetzt werden muss, ein und dasselbe; folglich reicht auch für alle diese Drehungen dieselbe Kraft aus, welche bei der Drehung um jene Muskelaxe erforderlich war, nämlich die absolute Muskelkraft von *n* Primitivbündeln. Findet aus jener Anfangsstellung eine Drehung mit bestimmter Geschwindigkeit um irgend eine Axe, die nicht Muskelaxe ist, statt, so können wir behaupten, dass die dann wirksame Kraft sich so verhalten muss, als ob ein Augenmuskel vom Querschnitt n um jene Axe, als seine eigne Muskelaxe, drehte. Es ist also bei jener Anfangsstellung jedes resultirende Moment P gleich der einem menschlichen Muskel vom Querschnitt n entsprechenden absoluten Kraft zu setzen. Verhalten sich nun zwei componirende Momente eines resultirenden wie $\frac{\cos a}{\cos b}$, so hat der eine der beiden Augenmuskeln mit einer Kraft gewirkt, oder der beginnende Muskelzug ist einer Kraft gleichzusetzen, welche gleich der absoluten Kraft eines menschlichen Muskels ist, der aus $n \cos a$ Primitivbündeln besteht, oder dessen Querschnitt sich zu dem des Augenmuskels verhält, wie $\frac{\cos a}{1}$; der andere Muskel hat mit der absoluten Kraft eines Muskels vom Querschnitt $n \cos b$ gewirkt. Es bedarf nicht der Erwähnung, dass dies durchaus nicht so zu verstehen ist, als ob sich von dem einen Muskel etwa nur $n \cos a$ Bündel, von dem andern $n \cos b$ Bündel contrahirt hätten, die übrigen in Ruhe geblieben wären: es müssen sich vielmehr alle Bündel des Muskels contrahiren, und zwar in jedem Abschnitte des Muskels; aber sie contrahiren sich bald mit grösserer, bald mit geringerer Energie, je nachdem die Drehungsaxe zu der Muskelaxe gelegen ist, und für diese Unterschiede können wir in obiger Weise ein absolutes Maass erhalten, indem die absolute Kraft eines Muskels von bestimmtem Querschnitt zu Grunde gelegt wird. Nach dem, was unter der absoluten Kraft eines Muskels zu verstehen ist, ist nun das, was wir mit den Ausdrücken $n \cos a$ und $n \cos b$ erhalten, nicht Leistung, Arbeit des Muskels, sondern es ist wirklich die im ersten Augenblicke der Bewegung am Auge wirkende, die das Drehungsbestreben äussernde Kraft P' und P'', oder, wenn verschiedene Energie, mit der die Bewegung ausgeführt werden kann, berücksichtigt werden soll, wenigstens diesen durchaus proportional; und wenn ein Muskel seine absolute Kraft nur beim Uebergange aus der Ruhe in den Zustand der Contraction äussern kann, wenn die entwickelte Kraft überhaupt mit der zunehmenden Verkürzung abnimmt, die Contractionsenergie zweier gleichzeitig wirksamer Muskeln also so gross sein muss, dass sie auch bei der grössten Drehungsamplitüde, mit der die Widerstände wachsen, noch ausreicht, so ist dieser Umstand auch involvirt und berücksichtigt, wenn die componirenden Momente in absoluten Muskelkräften von bestimmten Primitivbündelmassen ausgedrückt werden. Die der Betrachtung zum Grunde liegende Annahme ist die, dass ein Augenmuskel, der allein im Stande ist, das Auge zu drehen, ein resultirendes Moment, die Einheit, also allein darzustellen vermag, eben für diese Leistung, die die grösste ist, welche von ihm verlangt wird, in einem ganz bestimmten Verhältniss steht, so dass die seinem Querschnitt proportionale Kraft nicht überflüssig vorhanden ist. Ein solches Princip der Ersparniss scheint mir von vorn herein grade in dem Muskelsysteme sehr wahrscheinlich; doch müsste es experimentell geprüft werden; der nahezu gleiche Querschnitt aller Augenmuskeln bei einem Thiere scheint mir auch für Obiges zu sprechen, so wie eine den Dimensionen des Auges proportionale Ab- oder Zunahme des Querschnitts der Augenmuskeln bei verschiedenen Thieren. Immerhin mag die durch n repräsentirte Kraft so gross sein, dass sie auch unter gewissen Schwankungen des physiologischen Zustandes der Muskelsubstanz noch adäquat dem Gewichte ist, doch ist zu berücksichtigen, dass diesen Schwankungen auch die übrigen jeweilig auf der Seite der Widerstände befindlichen Muskeln unterworfen sind.

Was nun die Zahl der zur Bildung der resultirenden Momente nothwendigen Muskeln betrifft, so geht schon aus allem Erörterten hervor, dass die Fälle, in denen ein einziger Muskel allein ausreicht, um das Auge zu drehen, im Verhältniss zu allen übrigen verschwindend wenige sind, so dass eben nur die Möglichkeit dieser Fälle unbestreitbar ist. Da der geometrische Ort für alle Drehungsaxen bei gegebener Ausgangsstellung eine Ebene ist, so kann aus dieser Stellung das Auge nur dann um die Axe eines Muskels, durch dessen Contraction allein also, gedreht werden, wenn eine der sechs Muskelaxen in jene Ebene fällt. Betrachten wir wiederum die Primärstellung, für welche als Ausgangsstellung alle Axen in einer zum Horizont unter 45° nach vorn geneigten Ebene liegen, in welcher die Grundlinie gelegen ist, so fällt in diese Ebene keine einzige Muskelaxe: es müssen also zu allen Drehungen aus der Primärstellung mehr als ein Muskel beitragen. Die Fälle, in denen das Zusammenwirken von zwei Muskeln hinreicht, lassen sich ebenfalls ganz bestimmt angeben. Die Ebenen nämlich, welche durch die Axen je zweier Muskeln in der Primärstellung gelegt werden, schneiden jenen geometrischen Ort der Drehungsaxen; die Durchschnittslinien mit dieser Ebene können Drehungsaxen für Bewegungen aus der Primärstellung sein, und wenn sie es sind, so reichen die Axen der beiden Muskeln, denen die Ebene angehört, hin, um eine jener Drehungsaxen zu erzeugen, so lange, als nicht während der Drehung selbst der eine oder beide Insertionspunkte der beiden Muskeln ihre Lage so geändert haben, dass die Axe der Muskeln dadurch ihre Lage verändert hat. Solcher Durchschnittslinien der genannten Ebenen mit der Ebene, die die Drehungsaxen für die Primärstellung enthält, giebt es zwölf, folglich kann das Auge um zwölf Axen aus der Primärstellung durch Zusammenwirken von nur zwei Muskeln gedreht werden, oder zu drehen gestrebt werden; bei allen übrigen unendlich vielen Axen ist das Zusammenwirken von drei Augenmuskeln nothwendig. Für diejenigen Augenstellungen, deren geometrischer Ort der Drehungsaxen mit einer der durch zwei Muskelaxen gelegten Ebene zusammenfällt, was vorkommen kann, aber nicht vorzukommen braucht, würden die Muskeln dieser beiden Axen bei beginnender Drehung aus jener Anfangsstellung für alle Richtungen ausreichen. Jedenfalls aber muss für ein in seiner Beweglichkeit ausgebildetes Auge die Zahl der Fälle, in denen das Zusammenwirken von zwei Muskeln ausreicht, im Verhältniss zu der Zahl derer, in denen das Zusammenwirken von drei Muskeln nothwendig ist, als sehr gering angeschlagen werben. Fick hat diese Nothwendigkeit des Zusammenwirkens von drei Muskeln ebenfalls für viele Fälle nachgewiesen. (Vergl. die citirte Abhandlung.)

Die Frage, weshalb sechs Muskeln am Auge angebracht sind, bedarf nun gar keiner besonderen Erörterung mehr; vier Muskeln hätten zwar das Auge auch aus allen Stellungen nach allen übrigen Richtungen der Sehaxe hinführen können, aber ein Gesetz über das Wie war dann nicht möglich; die Anordnung der Muskeln und ihre jeweilige Lage war dann selbst Gesetz, es konnte nur das Eine geschehen, was der Muskellagerung nach eben möglich war; während bei sechs Muskeln, oder genauer bei sechs Drehungshalbaxen nicht Alles das geschehen darf, was der Muskellagerung nach möglich ist, sondern Dasjenige ausgewählt werden konnte und musste, was ein bestimmtes physiologisches Gesetz verlangte.

Alle sechs Augenmuskeln stehen auf vollkommen gleicher Stufe, alle haben denselben Werth, dieselbe Dignität für die Drehungen des Auges;*) keiner von ihnen nimmt physiologisch eine exceptionelle Stellung ein, weder in Bezug auf Wirksamkeit, noch in Bezug auf die Art und Weise, wie er zur Wirksamkeit veranlasst wird. Schon oben erinnerte ich daran dass man, die beiden sogenannten schiefen Augenmuskeln im Gegensatz zu den graden wohl als unwillkührliche Muskeln bezeichnet hat. Was soll da überhaupt willkührlich und unwillkührlich heissen? Wollte man den Begriff der Willkührlichkeit eines Muskels dahin definiren, dass die Wirksamkeit desselben vom Willen unmittelbar abhängig sei, so gäbe es am ganzen Leibe keinen willkührlichen Muskel. Wir intendiren Bewegungen, wir concipiren die Idee einer ausgeführten Bewegung, und sie wird ausgeführt, wie sie aber geschieht, ist vom Willen unabhängig; es ist möglich, dass manche Bewegungen durch die Wirkung eines Muskels geschehen, dennoch ist dieser Muskel nicht dem Willen unterworfen, sondern er dient nur dem Centrum für jene Bewegung, und auf dieses allein vermag der Wille zu wirken. Einen einzelnen Augenmuskel kann kein Mensch willkührlich bewegen, aber er kann eine Drehung intendiren, die dann auch durch einen physiologischen Mechanismus zu Stande kommt, zu welchem nur ein Augenmuskel nothwendig ist. Auch in dieser Beziehung verhalten sich alle Augenmuskeln gleich; wir könnten hinzufügen, vorläufig in Betreff der Bewegungen des Auges bei ruhendem, aufrechtem Kopfe. Eine unwillkührliche Drehung des Auges hat man bei Bewegungen des Kopfes suchen wollen, die der besonderen Wirkung der Obliqui zugeschrieben werden sollte. Abgesehen davon, dass die Behauptungen Hueck's

*) Vergl. auch Gräfe a. a. O. p. 23.

hinlänglich, und neuerlichst besonders von Donders*) widerlegt worden sind, wird man es auch wohl von vorn herein für höchst unwahrscheinlich halten müssen, dass, während die eigentlichen intendirten Drehungen des Auges nach einem ganz bestimmten und physiologisch so offenbar zweckmässigen Gesetze erfolgen, bei Bewegungen des Kopfes plötzlich Abweichungen von diesem Gesetze stattfinden sollten, Drehungen ganz anderer Art, nach einem neuen Gesetze, dessen Zweck in der That gar nicht einzusehen wäre. Neigen wir den Kopf auf die Schulter, so änderen wir absichtlich den Begriff von Oben und Unten, von Horizontal und Perpendiculär in unserem gemeinschaftlichen Sehfelde, wir schaffen uns ein neues Sehfeld, geneigt im Verhältniss zu dem früheren, und es kann nur Das als das Zweckmässige und als das wünschenswerthe Verhältniss erscheinen, wenn sich die Augen in Bezug auf dieses neue Sehfeld grade so verhalten, wie in Bezug auf das frühere bei aufrechtem Kopfe, wenn dieselben Bewegungsgesetze bei allen Stellungen des Kopfes gelten. Die Versuche, welche ich in dieser Beziehung mit Doppelbildern angestellt habe, bestätigen dies auch vollständig; doch würde es hier zu weit führen, die Erscheinungen detaillirt zu beschreiben. — Auch bei den Bewegungen des Kopfes von vorn nach hinten und umgekehrt müssen die Gesetze der einfachen Augenbewegungen gelten. Donders, welcher schon viel früher, als ich, die auf die optische Axe projicirte Drehung bei gewissen Bewegungen des Auges an den Nachbildern beobachtete und dieselbe als solche zuerst von einer Drehung um die Axe der Obliqui unterschied, hat bei seinen Versuchen Neigungen der Gesichtsfläche mit in die Untersuchung gezogen und ist zu einigen Ergebnissen hin-

*) A. a. O.

sichtlich des Einflusses solcher Bewegungen des Kopfes auf die Lagen des Auges gelangt, die auf ein zweites besonderes Gesetz für die Augenbewegungen unter solchen Umständen zu deuten scheinen. Ich glaube, dass zunächst die Bewegungen des Auges für sich, ohne alle Complication, einer Analyse unterworfen werden mussten, und dass man von den dabei gefundenen Thatsachen bei ferneren Untersuchungen ausgehen muss und allein mit Sicherheit ausgehen kann. Die Erscheinungen, welche die alleinigen Bewegungen des Auges zur Folge haben, können bei gleichzeitigen Bewegungen des Kopfes nicht sogleich klar und ungestört auftreten, und die Fehlerquellen können leicht unübersehbar werden. Bei Neigungen des Kopfes ist es schon äusserst schwer, die Stellung des Auges oder der Sehaxe selbst zu bestimmen, die doch immer das wichtigste Moment bleibt. Die Versuche von Donders habe ich nicht wiederholen können, da Nachbilder mir dazu nicht deutlich und lange genug zu Gebote stehen, und die Methode der Doppelbilder sich mit einiger Genauigkeit nur bei aufrechter Stellung des Kopfes in der früher beschriebenen Weise anwenden lässt. — Dass es am Sichersten und Einfachsten für meine Versuche war, dem Beobachtungsobjecte immer eine und dieselbe relative Lage im Sehfelde zu geben, nämlich eine zur jeweiligen Visirebene senkrechte Linie zu benutzen, anstatt etwa einer im Raume stets dieselbe Lage behaltenden, festen Linie, mit der Donders seine Versuche ausgeführt hat, geht aus der unmittelbaren und einfachen Anwendung hervor, welche wir in dieser Untersuchung von jenen Versuchen machen konnten: es schien überhaupt das Zweckmässigste zu sein, alle Umstände möglichst einfach und gleich zu halten, Nichts, als die Stellung der Augen in Wahrheit zu verändern, für diese Aenderungen also die entsprechenden Aenderungen der übrigen

Umstände vorzunehmen, dann waren die beobachteten Differenzen die unmittelbaren und sogleich rein dastehenden Consequenzen der veränderten Augenstellung.

So wie wir den Gebrauch unserer Muskelgruppen zu den verschiedenartigsten Bewegungen der Glieder durch Uebung allmählich erlernen, so werden wir auch den Gebrauch der Augenmuskelgruppe erst nach und nach lernen, und zwar wird das hier zu Erlernende darin bestehen, Drehungsaxen nach obigem Gesetze zu bilden. Jede neue Combination der Thätigkeiten von zwei oder drei Muskeln, jedes neue Zusammenwirken von verschiedenen Graden ihrer Contractionsenergie zu dem resultirenden der Einheit gleichen Moment nach jenem Gesetze ist eine neue Bewegung der Sehaxe. Je mehr Drehungsaxen ein Mensch für jede einzelne Augenstellung als Ausgangsstellung bilden kann, desto leichter, freier und rascher sind die Bewegungen seiner Augen, nach desto mehr Punkten des Sehfeldes kann er auf einem directen Wege mit seinen Sehaxen gelangen; und wenn, wie Gräfe meint, ein Theil der hieher gehörigen Verschiedenheiten des Blickes und der Augenbewegungen bei verschiedenen Menschen auf der geringeren oder grösseren Menge überflüssiger, sich gegenseitig aufhebender Anstrengungen einzelner Augenmuskeln beruht, so ist ein anderer Theil dieser so auffallenden und für die Physiognomie so bedeutungsvollen Unterschiede ganz gewiss in den Verschiedenheiten der Zahl und Lage der durch Uebung erlangten Drehungsaxen begründet; von ihnen hängen ab die sichtbare Schwerfälligkeit oder Leichtigkeit der Bewegungen, die Wege, die Curven, welche die Pupille beschreibt, um von einer Stellung in die andere zu gelangen, Momente, welche dem Blicke der Menschen und dem Ausdrucke ihrer Augen ihr eigenthümliches Gepräge und physiognomische Bedeutung verleihen. Ueber diesen anziehenden und interessanten

Gegenstand ist ganz besonders ein Abschnitt aus Johannes Müller's Physiologie des Gesichtssinns zu vergleichen. (Ueber die Bewegungen der Augen und über den menschlichen Blick. A. a. O. p. 241.) Daselbst ist auch hervorgehoben, dass wir nur mit Anstrengung und unter einem unangenehmen Spannungsgefühle grade Linien mit der Sehaxe beschreiben können, dass vielmehr Kreisbögen die natürlichen Wege derselben sind: sollen grade Linien im Sehfelde verfolgt werden, so kann die Bewegung keine continuirliche Drehung um eine feste Axe sein, sondern es ist dann eine aus lauter kleinen discontinuirlichen Drehungen um verschiedene Drehungsaxen zusammengesetzte Bewegung, welche das Auge gern aufgiebt.*) „Ein wohlgebildetes Auge geht, wo es immer kann, in Bogenlinien von einem Gegenstande zu anderen fixirend über. — — Das Auge muss von dem Reichthum seiner Bewegungen Gebrauch zu machen wissen, ohne deshalb luxuriös zu sein. Es verfolgt mit Leichtigkeit in einer gewissen Breite fixirend auch die seitlichen Gegenstände des Gesichtsfeldes, ohne dass das Haupt durch seine Bewegungen oder überhaupt der Körper durch seine Kehrungen dem Auge neue Gesichtsfelder biete. Die Beschränktheit der Bewegungen der Augen in einem und demselben Gesichtsfelde und das Bedürfniss, die Bewegungen der ersteren durch die Bewegungen des Kopfes zu ersetzen, ist immer ein Mangel des Blickes, der sich zu anderen Merkmalen gesellt, um den Ausdruck der Ungeschicklichkeit zu vollenden." (Joh.

*) Nur dann, wenn der Endpunkt der Sehaxe grösste Kreise beschreibt, verfolgt er im Sehfelde grade Linien, also bei allen Bewegungen von der Primärstellung aus; daher geschieht es ohne Anstrengung und dem Gesetze der einfachen Drehungen gemäss, bei abwärts geneigtem Blick, also z. B. in der beim Lesen gewöhnlichen Stellung der Augen, grade Linien im Sehfelde zu verfolgen.

Müller. a. a. O. p. 264.) „Vom Kinde werden alle näheren und ferneren Bilder, selbst wenn sie die Lust und den Gefallen desselben erregen, ohne Fixation bei parallelen Sehaxen mehr betrachtet, als deutlich gesehen; und darin ist der physiognomische Ausdruck des Kindesblickes begründet, der sich gleich bleibt in der Ruhe, wie in der Bewegung." (Das. p. 293.)

Ich habe früher darauf aufmerksam gemacht, dass sich Versuche mit Doppelbildern, ähnlich den von mir angestellten, auch für die Pathologie, für die Lehre vom Strabismus verwerthen lassen würden, deren Ergebnisse dann wiederum der Physiologie zu Hülfe kommen werden. Ich wusste nicht, dass dies bereits in ausgedehnter Weise von Gräfe*) geschehen war, welcher dadurch eine wichtige, genaue, bis dahin unbekannte oder wenigstens nur sehr unvollkommene, Untersuchungsmethode begründet hat, wie es die a. a. O. niedergelegten Resultate beweisen. Um bei Lähmungen und Contracturen von Augenmuskeln oder nach Durchschneidung des einen oder anderen quantitativ die Wirkung auf die Lage des Auges bei bestimmten Richtungen der Sehaxe bestimmen zu können, wird es zunächst erforderlich sein, Tabellen, wie ich sie früher in kleinem Maassstabe über die Grösse des Winkels ϑ, Abweichung der verticalen Trennungslinien, für gesunde Augen mitgetheilt habe, in grossem Maassstabe für eine möglichst grosse Zahl von Richtungen der Sehaxe zu entwerfen, die aber wohl nur nach den sich gegenseitig controlirenden Beobachtungen mehrer Individuen aufgestellt werden können.

Auch bei den Thieren (alle Wirbelthiere mit ausgebildetem Sehorgane haben wenigstens sechs Augenmuskeln) muss den Drehungen der Augen ein bestimm-

*) Archiv f. Ophth. I. Beitr. z. Physiol. u. Pathol. d. schiefen Augenmuskeln. — Ueber das Doppelsehen nach Schiel-Operationen etc.

tes Gesetz zum Grunde liegen, analog dem Listing'schen Gesetze für das menschliche Auge. Die Möglichkeit, dasselbe auf experimentellem Wege zu ermitteln, abgesehen von grossen practischen Schwierigkeiten, ist vorhanden, doch wird der Weg natürlich ein anderer sein müssen, als der beim Menschen mögliche. Bei den Thieren, denen binoculares Sehen möglich ist, kommen bei den Bewegungen der Augen dieselben beiden Rücksichten in Betracht, wie beim Menschen; aber im Einzelnen können die Verhältnisse wesentlich verschieden sein. Bei den Thieren, deren Augen so sehr seitlich liegen, dass sie kein gemeinschaftliches Sehfeld besitzen, fehlt jene gegenseitige Beziehung der beiden Netzhäute vollkommen, und man wird erwarten dürfen, dass das den Drehungen der Augen zum Grunde liegende Gesetz hier sehr verschieden ist, von dem bei jenen Thieren mit binocularem Sehen. Dies scheint auch schon aus den interessanten Versuchen Gräfe's am Kaninchen hervorzugehen. Versuche, welche über die Drehungen des Auges bei ruhendem Kopfe bei Thieren Aufschluss geben sollen, werden allerdings bedeutendere Schwierigkeiten, als beim Menschen, zu überwinden haben, doch stehen zur objectiven Beobachtung auch mehr Mittel, als beim Menschen, zu Gebote, z. B. die von Gräfe, und früher auch von Busch, angewendete Einführung einer Nadel in das Auge, deren Richtungsveränderungen beobachtet werden.

Göttingen, März 1855.

Berichtigungen:

Seite 24	Zeile 10	von unten:	statt	**unbeweglich** l. **beweglich.**
„ 25	„ 12	„ unten:	„	**X^1Axe** l. **YAxe**
„ 26	„ 10	„ oben:	„	**XYEbene** l. **XZEbene**
„ —	„ 14	„ unten:	„	**Lichtstrahlen** l. **Richtungsstrahlen.**
„ 30	„ 6	„ oben:	„	**den** l. **des.**
„ 31	„ 3	„ unten:	„	**cos n** l. **cot n.**
„ 72	„ 16	„ unten:	„	**dass jeder Halbmesser des Auges** l. **dass der grösste Theil der Halbmesser des Auges.**
„ 102	„ 4	von unten:		**Secundärstellung** l. **Secundärstellungen.**