Zur Frage der geometrischen Gestalt der normalen Hornhautoberfläche.

Von

J. Aebly,

Zürich.

(Eingegangen am 25. März 1922.)

Das Problem, eine geometrische Fläche zu finden, welche die Gestalt der normalen menschlichen Hornhaut in möglichst großer Ausdehnung möglichst genau darstellt, ist schon vor etlichen Dezennien von *v. Helmholtz* in Angriff genommen worden. Er kam bekanntlich zu dem Resultat, daß ein dreiaxiges Ellipsoid die Gestalt der Hornhaut am besten darstelle und hat auch die Formeln entwickelt, mittels deren sich Größe und Lage der Axen aus am Lebenden ausgeführten Messungen berechnen lassen. Indes ist die Übereinstimmung zwischen der Hornhautoberfläche und dem berechneten Ellipsoid, wie namentlich spätere Messungen gezeigt haben, doch nicht so gut, daß nicht Zweifel geäußert worden wären, ob die gestaltlichen Verhältnisse der Hornhaut tatsächlich überhaupt mit genügender Annäherung durch ein Ellipsoid wiedergegeben werden. Es ist jedoch, so viel ich aus der Literatur ersehen konnte, nie der Versuch gemacht worden, an Stelle eines Ellipsoids eine andere Fläche zu setzen und sie auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen, ausgenommen die Kugelfläche, die aber absolut nicht befriedigen kann.

Ich will daher im folgenden versuchen, das Problem von einem etwas allgemeinern Standpunkt aus zu betrachten:

Es soll eine Fläche gefunden werden, die sich in einer bestimmten Zone der Hornhaut möglichst genau und gleichmäßig anschmiegt.

Die Frage, was wir unter »möglichst genau und gleichmäßig« verstehen sollen, wollen wir noch offen lassen und uns damit begnügen, daß wir eine anschauliche Vorstellung davon haben.

In der obigen Fassung ist das Problem nun vollkommen unbestimmt. Zu einer eindeutigen Lösung kommen wir erst dann, wenn wir bestimmte Voraussetzungen machen, denen die Fläche zu genügen hat. Ich habe nun verschiedene Bedingungen als Ausgangspunkt genommen, wodurch ich zu verschiedenen Flächen gekommen bin, von denen ich einige kurz erwähnen will, um dann diejenige Lösung etwas genauer zu besprechen, die mir, wenn auch noch nicht ideal, so doch immerhin beachtenswert erscheint.

Der erste Versuch ging aus von der Annahme, daß das Volumen der Vorderkammer konstant sei. Es sollte dann diejenige Fläche gefunden werden, die bei gegebener, konstanter Grundfläche und konstantem Volumen die kleinste Oberfläche ergab. Um möglichst einfache Verhältnisse zu erhalten, wurde dabei vorerst von der Ungleichheit der beiden Hauptmeridiane abgesehen und die Hornhaut als Rotationsfläche betrachtet. Als Basis wurde, ebenfalls von den tatsächlichen Verhältnissen abweichend, eine Ebene gewählt, die normal zur optischen Axe liegt, deren genauere Lage (Entfernung vom Scheitel der Fläche) noch unbestimmt gelassen wurde. So vereinfacht lautete das Problem dann: Es sollen diejenigen ebenen Kurven gefunden werden, die durch 2 Punkte gehen und bei ihrer Rotation um eine gegebene Axe ein gegebenes Volumen mit der kleinst möglichen Oberfläche umschließen. Von den beiden Punkten ist der eine fest gegeben, der andere nur der Bedingung unterworfen, auf der Rotationsaxe zu liegen.

Das ist ein Problem, das die Variationsrechnung ohne Schwierigkeiten löst. Man kommt auf die Flächen kostanter mittlerer Krümmung. Die Meridiankurven sind im allgemeinen Fall gewisse Rollkurven, die unter besonderen Umständen, d. h. wenn die erste Integrationskonstante gleich Null ist, in Kreise übergehen. Die Rollkurven lassen sich den Verhältnissen der Hornhaut nicht anpassen. Was den Kreis, bzw. die Kugelfläche betrifft, so ist er als Näherung ungenügend, liefert aber durch eine, bzw. zwei affine Transformationen ein Rotations- bzw. dreiaxiges Ellipsoid, d. h. die Lösung, die bis jetzt bekannt ist.

Auch die Einführung einer weiteren Bedingung, der die Minimalfläche zu genügen hätte, lieferte kein brauchbares Resultat, da die erhaltenen Kurven zu kompliziert waren. Die Gestalt eines hängenden Tropfens schien mir mit der Oberfläche der normalen Hornhaut und auch mit gewissen pathologischen Formen (Keratokonus) eine so große Ähnlichkeit zu haben, daß ich versuchte auf Grund der Kapillaritätstheorie die Gleichung einer solchen Oberfläche zu bestimmen. Die erhaltenen Gleichungen waren aber zu kompliziert, so daß ich das Problem auf einem anderen Wege in Angriff nahm.

Den Ausgangspunkt bildete die Tatsache, daß die Krümmung der Hornhaut vom Scheitel aus nach allen Richtungen hin zuerst sehr langsam, dann immer stärker abnimmt, wobei die zentrale Zone sich nur sehr wenig von einem Kreise unterscheidet. Die gesuchte (Meridian-) Kurve muß also neben der Symmetrie vor allem diese Eigenschaft aufweisen. Beziehen wir die Kurve auf die Symmetrieaxe als y-Axe und die Tangente im Scheitel als x-Axe, so stellt sich die Bedingung z. B. in folgender Form dar

$$\varrho = \varrho_0 + f(\quad) \text{ oder } \varrho = \varrho_0 f(\quad)$$

wo ϱ der Krümmungsradius im Punkte (x, y), ϱ_0 der Krümmungsradius im Scheitel ist; $f(\ )$ bedeutet eine vorerst noch unbestimmte Funktion einer unbestimmten Veränderlichen. Wir werden beide so bestimmen, daß sie den oben erwähnten Bedingungen genügen. Außerdem soll die Differentialgleichung möglichst einfach werden. Als Veränderliche wählen wir dabei zweckmäßig eine Größe, die leicht mit hinreichender Genauigkeit zu messen ist. Das ist der Winkel φ der Normalen mit der y-Axe, der gleich dem Winkel der Tangente mit der x-Axe ist. Diesen Bedingungen genügt die Gleichung

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos\varphi}$$

bzw die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \varrho_0 (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$1 + y'^2 = \varrho_0 y''.$$

Setzt man noch $y' = p$, so hat man

$$1 + p^2 = \varrho_0 p'$$

$$\frac{dp}{1 + p^2} = \frac{dx}{\varrho_0}$$

$$\operatorname{arc\,tg} p = \frac{x}{\varrho_0} + C_1.$$

Für $x = 0$, ist $p = 0$, daher $C_1 = 0$.
Setzt man für p wieder den Wert y', bzw. dy/dx, so erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\frac{x}{\varrho_0}$$

$$dy = \operatorname{tg}\frac{x}{\varrho_0}\cdot dx.$$

Bezeichnet man den natürlichen Logarithmus mit ln, so hat man

$$y = -\varrho_0 ln \cos\frac{x}{\varrho_0} + C_2$$

C_2 ist Null, da für $x = 0$, $y = 0$ ist. Man hat also schließlich

$$y = -\varrho_0 ln \cos\frac{x}{\varrho_0}$$

Das ist die Gleichung einer *Kettenlinie gleichen Widerstandes* (K. g. W.). Unter einer *Kettenlinie* versteht man die Kurve, die ein vollkommen biegsamer, homogener und unausdehnbarer Faden unter der Einwirkung der Schwere bildet, wenn er an 2 Punkten befestigt wird. Ist der Querschnitt des Fadens so, daß er an jedem Punkte proportional der dort herrschenden Spannung ist, also dem Zerreißen infolge der Schwere an jedem Punkte gleichen Widerstand leistet, so daß die Wahrscheinlichkeit des Zerreißens für jeden Punkt gleich ist, so bildet der Faden unter den oben erwähnten Bedingungen eine K. g. W. Bei der Kettenlinie ist die Spannung am größten an der Basis, am kleinsten am Scheitel. Der Faden muß also bei der K. g. W. an der Basis am dicksten, am Scheitel am dünnsten sein. Das ist auch bei einem Oberflächenstreifen der Hornhaut der Fall, den wir uns durch 2 sehr nahe aneinanderliegende Meridiane aus der Fläche herausgeschnitten denken können, da die Hornhaut bekanntlich an der Basis merklich dicker ist, als an der Kuppe.

Wir gehen wohl nicht fehl, wenn wir in dieser Eigenschaft der Hornhaut nichts Zufälliges vermuten, sondern den Ausdruck einer Beanspruchung auf Zug, die an der Basis am größten, an der Kuppe am kleinsten ist, so daß also die Hornhaut ein (elastisches) Gewölbe darstellen würde, das dem Zerreißen an allen Punkten denselben Widerstand darbieten würde. Auch die Anordnung der elastischen Fasern in der Richtung der Meridiane entspricht diesem Umstande. Die vergleichende Forschung an den Augen aller Klassen in Luft lebender Wirbeltiere würde die kausale Deutung der Hornhautgestalt sehr fördern können.

Eigentlich müßte man a priori erwarten, daß für die Hornhaut nicht nur eine Form in Betracht kommt, die in optischer Hinsicht möglichst günstig ist, sondern daß auch noch gewissen Anforderungen an die mechanische Beanspruchung, vor allem wohl betreffs der Zugfestigkeit so gut als möglich Rechnung getragen wird. In dieser Hinsicht ist nun eine Fläche wie die von uns gefundene entschieden günstiger, als eine Minimalfläche, wie wir sie zuerst gesucht hatten, denn eine Verbiegung der Fläche, wie sie während des Lebens infolge von kleineren und größeren Gewalteinwirkungen häufig ist, wäre bei einer Minimalfläche ungünstig, da sehr leicht die Elastizität der Hornhaut überschritten werden könnte, wenn der Inhalt der Vorderkammer nicht genügend rasch nach hinten ausweichen könnte. Auch Betrachtungen über die Genese der Hornhaut lassen es als sehr wahrscheinlich erscheinen, daß sie sich unter der Einwirkung von Spannungskräften gebildet habe.

Bevor wir die Brauchbarkeit unserer Hypothese an einem durchgerechneten Beispiel zeigen, wollen wir einige Eigenschaften der K. g. W. betrachten. Ist s die Länge des Bogens vom Scheitelpunkte an gerechnet, so ist die »natürliche Gleichung« der Kurve, wenn ϱ und ϱ_0 die gleiche Bedeutung haben, wie oben:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{2}\left(e^{\frac{s}{\varrho_0}} + e^{-\frac{s}{\varrho_0}}\right) = \varrho_0 \operatorname{Cof} \frac{s}{\varrho_0}$$

Der Krümmungsradius ist also gleich dem hyperbolischen Cosinus (Coſ = cosinus hyperbolic.) des Quotienten aus Bogenlänge und Krümmungsradius am Scheitel. Vergleichen wir die Krümmung der K. g. W. für kleine Bogenlängen mit der eines Kreises, der die Kurve im Scheitel berührt (Krümmungskreis), so haben wir

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{\varrho_0}{2}\left(2 + 2\frac{s^2}{2!\,\varrho_0{}^2} + 2\frac{s^4}{4!\,\varrho_0{}^4} + \cdots\right) - \varrho_0$$

$$\varrho - \varrho_0 = \varrho_0\left(\frac{s^2}{2!\,\varrho_0{}^2} + \frac{s^4}{4!\,\varrho_0{}^4} + \cdots\right).$$

Ist die Bogenlänge dem Krümmungsradius gegenüber klein, so daß wir die Glieder von 4. und höherer Ordnung vernachlässigen können, so hat man

$$\varrho - \varrho_0 = \frac{s^2}{2\,\varrho_0}.$$

Der begangene Fehler ε ist dabei annähernd $\frac{s^4}{4!\,\varrho_0{}^4}$ oder genauer

$$\varepsilon < \frac{\varrho_0}{4!}\left(\frac{s}{\varrho_0}\right)^4 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{5\,\varrho_0}\right)^2}.$$

Nehmen wir z. B. für die optische Zone der Hornhaut einen Durchmesser von 4 mm längs eines Meridians gemessen und $\varrho_0 = 8$ mm, so beträgt der Unterschied gegenüber dem Kreis bzw. der Kugelfläche an der Peripherie dieser Zone zirka 0,0028 mm, also nicht einmal 3 μ, während er innerhalb der optischen Zone noch kleiner ist. Entwickelt man in der auf 2 senkrechte Axen bezogenen Gleichung der Kurve den cos und ln in unendliche Reihen, bei denen die Glieder von der 4. Ordnung ab vernachlässigt werden, so erhält man

$$y = \varrho_0 \frac{x^2}{\varrho_0{}^2}$$

$$x^2 = \varrho_0\, y.$$

Das ist eine Parabel, die sich in der Umgebung des Scheitels der Kurve sehr eng anschmiegt.

Da die Hornhaut keine Rotationsfläche ist, wird man statt der durch Rotation der K. g. W. erzeugten Fläche besser eine durch affine Transformation daraus hervorgegangene wählen. Wir legen dabei die xy-Ebene so, daß sie mit der Tangentialebene an den Scheitel der Fläche zusammenfällt; dann ist die positive z-Axe die Axe der Fläche. Die x- bzw. y-Axe sollen die Meridiane schwächster, bzw. stärkster Krümmung berühren, deren Krümmungsradien a, bzw. b seien ($a > b$). Um eine möglichst einfache Gleichung für die Fläche zu erhalten, ist es besser, an Stelle der Cartesischen die Polarkoordinaten ϱ und φ zu wählen unter Beibehaltung von z. Der Pol soll dabei mit dem Nullpunkt, die Polaraxe mit der oben definierten $+x$-Axe zusammenfallen. Denkt man sich außerdem noch die Ellipse gezeichnet, deren Axen (a und b) mit der x- und y-Axe zusammenfallen, wobei r der zur Anomalie φ gehörige Halbmesser der Ellipse ist, so lautet die Gleichung der Fläche

$$z = -r\ln\cos\frac{\varrho}{r},$$

wo

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{b^2}{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}.$$

Da im allgemeinen weder der horizontale noch der vertikale Meridian der Hornhaut durch den Scheitel gehen, auch ihre Richtungen nicht parallel zu den Hauptmeridianen sind, können wir strenggenommen die obigen Gleichungen der Meridiankurven der Fläche nicht als für den horizontalen und vertikalen Meridian gültig betrachten, da wir den Scheitel der Fläche mit dem Scheitel der Hornhaut zusammenfallen lassen wollen. In erster Annäherung kann man sich aber damit begnügen, daß man die Symmetrieaxe nicht durch den Schnittpunkt der beiden Meridiane gehen läßt, sondern sie auf jedem Meridian in passender Weise verschiebt. An die Stelle des Winkels φ tritt dann der um den konstanten Betrag $\pm\varphi_0$ vermehrte Winkel $(\varphi \pm \varphi_0)$.

Als Grundlage für die Berechnung habe ich die *Gullstrand*'schen Messungen an einer »typisch normalen Hornhaut« gewählt, die in *Helmholtz*'s Handbuch der physiol. Optik, 3. Aufl., Band I S. 268 ff. angegeben sind. *Gullstrand* hat nicht die aus den Messungen erhaltenen Krümmungsradien der betr. Hornhautelemente gewählt, sondern die aus diesen berechneten Dioptrienwerte. Die Umrechnung geschah nach der Formel

$$D = \frac{1000}{\varrho}(n-1) \qquad n = 1{,}3375.$$

Da nach der Definition der reziproke Wert des Krümmungsradius einer Kurve als »Krümmung« der Kurve in dem betr. Punkt bezeichnet wird, so sind die *Gullstrand*'schen Werte den Krümmungen proportional. Wir werden also, um die Umrechnung zu ersparen, bei unserer Kurve ebenfalls die entsprechenden, der Krümmung proportionalen Werte berechnen. Wir finden so

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos(\varphi \pm \varphi_0)}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0}\cos(\varphi \pm \varphi_0)$$

$$D = D_0 \cos(\varphi \pm \varphi_0).$$

D ist für verschiedene Werte von φ bekannt. Wir können also nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Werten für D die Werte von D_0 und φ_0 berechnen, aus denen wir dann zur Prüfung der Brauchbarkeit unserer Annahme die ausgeglichenen Werte von D berechnen können. Man wird dabei zu etwas verschiedenen Werten von D_0 und φ_0 kommen je nach der Größe der Zone, für die wir die Ausgleichung vornehmen.

Da nach der Angabe *Gullstrands* die D-Werte seiner Tabelle nur Näherungswerte sind, hat es keinen Zweck, die sehr mühsame Ausgleichung an diesen Werten vorzunehmen. Es genügt, wenn man gute Näherungswerte findet. Die Berechnung solcher Näherungswerte ist ja an und für sich für die weitere Ausführung der Rechnung nötig, so daß damit schon der erste Schritt für eine evtl. weitergehende Ausgleichung gemacht ist. Ich habe aus diesem Grunde auch auf größere Genauigkeit verzichtet und die Berechnung mit dem Rechenschieber durchgeführt (»Vierstellen«-Rechenschieber, Syst. Busse). Der Fehler beträgt im allgemeinen nicht mehr als 0,05 Dioptrien, also eine für die in Betracht kommende Genauigkeit genügende Näherung.

Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf. Der Scheitel der K. g. W. liegt für den vertikalen Meridian 4° 16′ nach unten, für den horizontalen Meridian 4° 50′ temporalwärts.

φ		Vertikal beob.	Vertikal berechn.	Vertikal Diff.		Horizontal beob.	Horizontal berechn.	Horizontal Diff.
38° 56′						27,9		
34° 4′		41,7				28,4	34,6	
29° 14′		35,2	36,7	— 1,5		37,4	36,8	+ 0,6
24° 25′		37,7	38,6	— 0,9		40,9	38,8	+ 2,1
19° 33′	oben	39,8	40,2	— 0,4	innen (nasal)	42,5	40,8	+ 1,7
14° 37′		41,7	41,6	+ 0,1		42,8	41,9	+ 0,9
9° 41′		42,8	42,7	+ 0,1		43,5	43,0	+ 0,5
4° 50′		43,3	43,4	— 0,1		43,8	43,8	0,0
0° 0′		44,5	44,0	+ 0,5		44,2	44,2	0,0
4° 50′		43,6	44,1	— 0,5		43,4	44,4	— 1,0
9° 41′		43,8	43,8	0,0		43,8	44,2	— 0,4
14° 37′		43,4	43,3	+ 0,1		44,0	43,7	+ 0,3
19° 33′	unten	42,2	42,4	— 0,2	außen (temporal)	43,5	42,9	+ 0,6
24° 25′		41,2	41,3	— 0,1		43,6	41,8	+ 1,8
29° 14′		40,2	39,9	+ 0,3		41,2	40,5	+ 0,7
34° 4′		36,6	38,1	— 1,5		38,8	38,8	0.0
38° 56′		28,5				32,3		

Die Übereinstimmung ist zwar nicht gerade ideal, aber auch nicht schlecht zu nennen. Bei der Beurteilung ist auf das früher hervorgehobene Moment Rücksicht zu nehmen, d. h. es müßten statt des horizontalen und vertikalen Meridians die beiden Hauptmeridiane der Kurve gewählt werden. Der Verlauf der Werte ist aber an sich so unregelmäßig, daß es fraglich ist, ob überhaupt eine gesetzmäßig formulierbare Kurve eine viel weitergehende Annäherung gibt. Es wäre speziell von Interesse, die Werte mit denen zu vergleichen, die man aus der Annahme eines Ellipsoids ableitet. Dabei wäre in Betracht zu ziehen, daß, falls es sich bei der Hornhaut nicht um eine aus der K. g. W. hervorgegangene Fläche handelt, das Ellipsoid eine bessere Annäherung geben müßte, da ja ein Kegelschnitt mit einer Kurve im allgemeinen eine Berührung von mindestens vierter Ordnung hat. Ein gleich gutes Passen der K. g. W. würde also, abgesehen von der größeren Einfachheit, schon an und für sich zugunsten der K. g. W. sprechen. Die große Einfachheit des Ausdruckes für den Krümmungsradius besteht allerdings nur für Schnitte, die durch den Scheitel der Fläche gehen, während der Ausdruck für den Krümmungsradius an einer beliebigen Stelle eines beliebigen ebenen Schnittes komplizierter ist. In dieser Hinsicht ist das Ellipsoid einfacher, da alle ebenen Schnitte Ellipsen sind. Es wäre gut möglich, daß die relativ großen Abweichungen der empirischen Werte von den theoretischen in der zentralen Zone davon herrühren, daß gerade dort sich die Abweichung stärker bemerkbar machte. Aufschluß darüber könnte nur eine diesbezügliche mathematische Untersuchung geben, die hier zu weit führen würde und einer späteren Publikation vorbehalten bleiben soll. Einfacher wäre allerdings, wenn man an Stelle der traditionellen Messung des horizontalen und vertikalen Meridians die beiden Hauptmeridiane in genügend vielen Punkten mit der nötigen Genauigkeit ausmessen würde.

Rein mathematisch ist noch zu bemerken, daß man durch Hinzunahme eines weiteren Parameters eine allgemeinere Kettenlinie erhalten würde, die sich den Beobachtungen noch genauer anschließen würde als die gewöhnliche K. g. W., die wir als Beispiel gewählt haben. Auch könnten noch andere, verwandte Kurven in Betracht kommen, die aufzuzählen keinen Zweck hätte.

Das Problem, die Gestalt der Hornhautoberfläche aus bestimmten physikalischen Voraussetzungen abzuleiten, ist natürlich nur ein Teil des allgemeineren Problems der Bestimmung der Gestalt des ganzen Augapfels unter Voraussetzung bestimmter physikalischer Bedingungen. Da aber einerseits dieses Problem viel schwieriger ist, andererseits der vordere Bulbusabschnitt doch eine gewisse mechanische und nicht nur physiologische Selbständigkeit aufweist, lag es nahe, vorerst das engere Problem zu behandeln, wobei dann eine genügende Übereinstimmung der berechneten mit den empirischen Werten auch als Bestätigung der Zulässigkeit der gemachten Annahme aufgefaßt werden kann.

Zusammenfassung.

Es wird der Versuch gemacht, an Stelle der bis jetzt üblichen Angleichung der Hornhautoberfläche an ein dreiaxiges Ellipsoid eine andere zu wählen.

In Betracht kommt vor allem eine von der »Kettenlinie gleichen Widerstandes« abgeleitete Oberfläche, die nicht nur rein geometrisch mit der Hornhaut genügend übereinstimmt, sondern auch vom entwicklungsmechanischen Standpunkt aus plausibel erscheint.