



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**  
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**  
Mathématiques appliquées

---

**Présentée et soutenue par :**  
Dan Gugenheim

**le :** mercredi 14 décembre 2011

**Titre :**  
Modélisation et optimisation d'un réseau de transport de gaz

---

**Ecole doctorale :**  
Mécanique, Energétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

**Unité de recherche :**  
Laboratoire de Génie Chimique - LGC

**Directeur(s) de Thèse :**  
Mme Catherine Azzaro-Pantel, INP-ENSIACET-LGC  
M. Serge Domenech, INP-ENSIACET-LGC

**Rapporteurs :**  
Mme Nathalie Mazet , PROMES - UPR 8521, Perpignan  
M. Roberto Wolfler Calvo, LIPN - UMR 7030, Villetaneuse

**Membre(s) du jury :**  
Mme Églantine Flottes, CRIGEN - GDFSUEZ, Saint-Denis  
M. Fabrice Bonnet, PROSIM, Toulouse

*À ceux partis trop tôt.  
À celle qui rythme ma vie.  
Aux conteurs d'histoires.*

## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes deux directeurs de thèse Catherine Azzaro-Pantel et Serge Domenech. Ils ont su me guider tout au long de ce travail et m'ont énormément apporté pendant ces trois années tant au niveau scientifique que rédactionnel pour ce mémoire. Leurs conseils m'ont été précieux et m'ont permis de progresser dans bien des domaines.

Je souhaite également remercier les professeurs Nathalie Mazet et Roberto Wolfer Calvo ont d'accepté d'être mes rapporteurs. Leurs remarques et suggestions ont été précieuses et m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire.

Je veux également à remercier Monsieur Fabrice Bonnet qui m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance.

Enfin un remerciement tout particulier à Madame Eglantine Flottes qui en plus d'être membre du Jury m'a beaucoup apporté dans mon travail chez GDF-SUEZ. Sa connaissance du métier ainsi que son encadrement m'ont beaucoup apporté.

Je tiens à souligner les bonnes conditions dont j'ai bénéficié sur les deux lieux de cette thèse. Les membres du LGC m'ont toujours accueilli de la manière la plus chaleureuse qui soit, quand bien même je ne leur apportais que de la pluie dans mes bagages durant mes nombreux séjours. Je remercie particulièrement Luc Pibouleau et Ludovic Montastruc ainsi que le 5<sup>ème</sup> mousquetaire, André Davin pour leurs précieux conseils tout au long de cette thèse. Merci aux différents doctorants de l'équipe, passés et présents: Mary, Marianne, Marie, Sophia, Adrien, Adama, Guillermo, Jose-Luis, Raul, Fernando, Marco ainsi que ceux des autres équipes, Ali, Eduardo, Manuel, Juliette, Charlotte et ceux que j'oublie. Je les remercie également de s'être occupé de moi et de m'avoir fait sentir que j'étais un membre à part entière du laboratoire les semaines où j'étais présent à Toulouse.

Du côté gazier, j'ai aussi beaucoup reçu. Je remercie Monsieur Jean André qui m'a lancé sur un sujet aussi passionnant que l'optimisation des réseaux de gaz. Je regrette de ne pas avoir pu travailler plus longtemps avec lui pour en apprendre plus. Je tiens à remercier également Monsieur Rabie Nait qui m'a apporté une meilleure vision de la gestion de projet, telle que l'est une thèse. Je remercie tout particulièrement Monsieur Fabrice Chauvet qui m'a tant apporté par sa large connaissance de l'optimisation sous toutes ces formes. Enfin, je remercie Madame Nga Thanh qui m'a suivie durant la seconde moitié de ma thèse et dont les conseils m'ont été précieux tant sur le plan scientifique et que tant sur l'organisation de mon travail et auprès de laquelle j'ai énormément appris et qui me serviront tout au long de ma vie professionnelle.

Je remercie également tous mes différents collègues de GDFSUEZ du PSO, du CEEME et du PO3S pour leur bonne humeur quotidienne autour de la machine à café, d'un repas, d'un pot ou dans une ligne d'eau. J'espère n'en avoir oublié aucun: Virginie Adin, Morelle Attolou, Natacha Castellan, Eglantine Flottes, Aurélie Lemaitre, Bettina Piral, Marie-Christine Plateau, Anna Robert, Laure Sinegre, Nga Thanh, Jean André, Miguel Antunes, Julien Ardeois, Julien Berducat Fabrice Boudaud, Serge Bredin, Benoit Casoetto, Fabrice Chauvet, Vincent Chevallier, Nicolas Derhy, Faycal Djerourou, Guillaume Erbs, David Game, Arthur Jacquiau Jean Baptiste Lauzier, Jean-Robert Leroy, Jérôme Lucas, Bruno Matthieu, Benjamin Metz, Alexandre Moyrand, Anthony Moisan, Lionel Nadau, Rabie Nait, Thierry Naze, Ruben Paraisy, Patrice Pezillier, Slawomir Pietrasz, Baptiste Rossi, Jérôme Senot, Vincent Seignole. Spéciale dédicace, comme disent les jeunes, à Virginie et Baptiste

qui ont poussé le vice jusqu'à assister à ma soutenance.

D'un côté plus personnel, mes premiers remerciements vont à mes parents, Claudine et Philippe. Ils m'ont toujours accompagné et encouragé dans tout ce que j'ai entrepris tout en sachant me dire non et me recadrer lorsque cela était nécessaire. Ils m'ont soutenu pendant toute ma scolarité et m'ont permis de le faire dans les meilleures conditions. Je leur suis reconnaissant de leur éducation, de leur support et de tout l'amour qu'ils m'ont donné.

Cette thèse porte sur les réseaux gaziers et donc je souhaiterais remercier mes différents "réseaux" d'amis constitués à travers le temps. Je n'ai pas l'habitude de les remercier pour tout ce qu'ils m'ont apporté mais la vie est vraiment bien plus cool grâce à tout ce petit monde. Je vais donc profiter de cette tribune pour le faire. J'aurais aimé être exhaustif et j'ai même pensé faire une annexe à cette thèse pour mettre un petit mot pour chacun.

Aux plus anciens l'honneur d'ouvrir le bal et je remercie donc la grande famille d'Hélène Boucher également connue sous le nom du Village. Cette bande qui s'est constitué au fil des années et des classes de cours. Ce réseau est en constante évolution notamment avec l'arrivée de la nouvelle génération. C'est avec vous que j'ai grandi et si j'en suis arrivé là c'est un peu grâce/à cause de vous. Merci de me supporter depuis près de 20 ans pour les plus anciens et de continuer à le faire. Les villageois auxquels je pense dans l'ordre alphabétique pour ne pas faire de jaloux: Alessandro, Antoine V., Anne-Laure, Arnaud, Aurélien, Bart, Benjamin K, Benjamin Rot., Carmela, Claire, Clémence, Dorothee, Emilien, Florian, François, Jeanne, Jérôme, Judith, Julien, Julie, Laure, Liza, Luc, Maël, Maïté, Mélanie, Nicolas D, Pierre Ben. Pierre S. Rodolphe, Romain, Sonia.

Je tiens à remercier également la fine équipe rencontrée sur les bancs de Fénélon. J'ai passé deux années formidables dans ces salles de cours. Avec vous, la prépa fut aux antipodes des lieux communs négatifs. Je me suis bien marré avec vous et je pense ne trahir personne en disant "Cachan - Catane - Coinche - Cossogno", même combat. Cette équipe est composée des membres suivants : Alexandre, Audrey, Benjamin Ru., Corinne, Emmanuelle, Gabriel, Hélène, Inès, Julie, Joris, Louis-Hadrien, Marie, Nicolas P., Patrick, Piers, Prune, Roland, Sera, Yann, et tous leurs futurs joueurs et joueuses.

Enfin, le dernier réseau est composé de rencontres grenobloises et dont les interconnexions grandissent avec le précédent. Ces trois années ont été pour moi la dolce vita estudiantine dans sa manifestation la plus pure. Une mention spéciale aux trois toulousains qui m'ont permis de me sentir moins seul lors de mes séjours dans la ville "rose", qui pour ma part est orange. Merci les jeunes pour ces années d'école et pour tous ces moments que l'on continue à partager: Alexia, Amélie, Antoine G, Benjamin Rou., Carine, Céline, Clotilde, Colas, Dagmara, Elliott, Frédéric, Gontran, Jade, Kévin, Kim, Lætitia, Laure, Malek, Maxime, Mickael, Mouton, Muriel, Nathan, Nicolas Mej, Olivier, Pauline M., Ronan, Samir, Samia, Sandra, Sofiane, Sergi, Sophie, Thomas, Yannick.

Je remercie enfin les différents amis et connaissances que j'ai pu me faire hors du giron scolaire et notamment: Anne, Barbara, Bertrand, Bret, Claude, Dany, Jeff, Joel, Marion, Pierre Bea., Thibault.

Un mot pour ceux que j'ai oublié: désolé, mais vous figurerez dans les remerciements de ma prochaine thèse: "L'oubli d'amis, une recette en chocolat pour la dialectique".

Je finirai avec un remerciement pour Emilie qui est aussi l'artisante de l'ombre de mon travail. Elle a su m'accompagner pendant ces trois années avec patience et amour. Merci de tout mon cœur, Milou.

## Résumé

---

Durant ces 40 dernières années, le gaz naturel a vu son utilisation augmenter jusqu'à constituer aujourd'hui la troisième ressource énergétique mondiale. Il est alors devenu nécessaire de l'acheminer sur des distances de plus en plus longues entre les lieux d'extraction et de consommation. Ce transport peut s'effectuer à l'état liquide par des méthaniers ou à l'état gazeux par le biais des réseaux de transport de gaz naturel composés de canalisations de grandes dimensions, tant en diamètre qu'en longueur.

Cette thèse porte sur la modélisation et l'optimisation de la configuration des réseaux de transport de gaz naturel et sur l'application au cas du réseau principal de transport français qui présente plusieurs particularités. En effet, il s'agit d'un réseau de grandes dimensions, fortement maillé pour lequel plusieurs sources d'approvisionnement sont possibles pour desservir divers points de consommation. Il possède en outre, des stations d'interconnexion entre les canalisations. GRTgaz en est le gestionnaire.

Ce travail concerne l'étude de la faisabilité de configurer le réseau de transport pour un scénario d'approvisionnement et de consommation. Le cœur de cette thèse porte sur le développement d'un modèle de réseau de transport de gaz et sur la détermination des flux et des configurations des stations d'interconnexion dans ce réseau à l'aide d'outils d'optimisation. L'une des innovations est la description et la modélisation des stations d'interconnexion, carrefours incontournables du réseau. Deux modèles sont ainsi proposés, faisant intervenir une formulation d'une part mixte non linéaire en nombres entiers et d'autre part, non linéaire continue. Leur efficacité en fonction de différents solveurs d'optimisation est ensuite discutée.

Le choix de la meilleure formulation du problème de transport de gaz naturel a été étudié sur un ensemble de réseaux fictifs, mais représentatifs du réseau français. La meilleure stratégie, basée sur l'utilisation combinée d'une formulation non linéaire continue, du choix de la pression comme variable et d'une initialisation par un sous-problème a ensuite été appliquée sur des instances de taille réelle.

Les difficultés du passage à des instances réelles ont ensuite été résolues à l'aide de deux améliorations: d'une part, la mise à l'échelle des variables a permis de mieux conditionner le problème, puis d'autre part, une suite de relaxations a été employée afin de résoudre tous les cas réels. Les solutions sont finalement validées à l'aide de solutions métiers existantes.

---

## Abstract

---

In the past 40 years, the use of natural gas has grown, so that it became the third most commonly used fuel. Its use requires infrastructure for its transport over large distances between the places of extraction and consumption. This transport can be carried out by liquid methane or a gaseous state through networks of natural gas transmission pipelines that are large in both diameter and length.

This thesis focuses on the optimization of natural gas transmission networks and the application to the case of the main French transmission one which presents several peculiarities. Indeed, it is a highly meshed network in which multiple sources of supply are available to feed various points of consumption. This network also owns stations of interconnection between pipelines. In this context, GRTgaz is the system operator on the French territory.

This work concerns the study of the feasibility of scenarios for supply and consumption. The core of this thesis is the development of a model of a gas transmission network and the determination of flows using optimization tools. One innovative aspect deals with the description and modeling of interconnection stations, that are the main hubs of the network. Two models are proposed, either based on a mixed integer non-linear formulation or on nonlinear continuous one. Their efficiency under different optimization solvers are discussed.

The choice of the best formulation of the problem of transportation of natural gas has been studied on a set of network fictitious, but enough representative of the French network. The best strategy, based on a continuous non-linear formulation, involving the choice of pressure as a variable as well as a sub-problem for initialization purpose was then applied to instances of actual size.

The difficulties of the transition to real cases were then solved using two improvements: first, variable scale which provided a better condition the problem, then a series of relaxation have been used to solve all real cases. The solutions are finally validated using existing business applications.

---

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Positionnement du problème</b>	<b>3</b>
I.1	Le gaz naturel . . . . .	4
I.1.1	Origines et compositions du gaz . . . . .	4
I.1.2	La chaîne d’approvisionnement gazière . . . . .	5
I.1.3	Le réseau de transport en France . . . . .	5
I.1.4	Phénomènes physiques du transport de gaz . . . . .	7
I.1.5	Stations d’interconnexion . . . . .	7
I.1.6	Stations de compression . . . . .	7
I.2	Problématiques abordées par MAIA . . . . .	8
I.2.1	Situation Organisationnelle . . . . .	9
I.2.2	Missions de MAIA . . . . .	9
I.3	État de l’art des réseaux gaziers . . . . .	10
I.3.1	Historique de l’optimisation et de la simulation gazière . . . . .	10
I.3.2	Transport simple du gaz . . . . .	10
I.3.3	Prise en compte de la compression . . . . .	11
I.3.4	Réseaux d’eau . . . . .	12
I.4	But du travail de thèse . . . . .	12
<b>II</b>	<b>Modèle et propriétés mathématiques</b>	<b>13</b>
II.1	Modélisation du phénomène physique . . . . .	15
II.1.1	Modélisation simple . . . . .	15
II.1.1.a	Description . . . . .	15
II.1.1.b	Liaisons internes au réseau . . . . .	15
II.1.1.c	Stations d’interconnexion . . . . .	16
II.1.1.d	Stations de compression . . . . .	16
II.1.1.e	Configuration d’une station d’interconnexion . . . . .	16
II.1.2	Difficultés du problème . . . . .	16
II.1.3	Notations . . . . .	17
II.1.3.a	Nomenclature . . . . .	17
II.1.3.b	Réseau . . . . .	17
II.1.3.c	Paramètres . . . . .	18
II.1.3.d	Variables . . . . .	18
II.1.4	Bilan d’énergie, loi des nœuds . . . . .	19
II.1.5	Perte de charge . . . . .	20
II.1.6	Détente . . . . .	21
II.1.7	Travail d’un compresseur . . . . .	22



II.1.8	Taux de compression . . . . .	22
II.1.9	Modélisation du problème global . . . . .	23
II.2	Modélisation des interconnexions . . . . .	24
II.2.1	Modélisation non linéaire en variables binaires . . . . .	24
II.2.1.a	Description mathématique . . . . .	24
II.2.2	Modélisation non linéaire continue . . . . .	25
II.2.2.a	Description du modèle . . . . .	25
II.2.2.b	Description mathématique . . . . .	26
II.2.2.c	Modélisation retenue . . . . .	26
II.3	Propriétés mathématiques du modèle de transport de gaz . . . . .	29
II.3.1	Non linéarité . . . . .	29
II.3.2	Etude de la convexité du problème . . . . .	29
II.3.2.a	Convexité de la perte de charge . . . . .	29
II.3.2.b	Convexité du travail d'un compresseur . . . . .	29
II.3.3	Comparaison des modèles d'interconnexion . . . . .	30
II.3.3.a	Non équivalence des modèles . . . . .	30
II.3.3.b	Recyclage du modèle non linéaire . . . . .	31
<b>III</b>	<b>Etude des méthodes de résolution</b> . . . . .	<b>33</b>
III.1	Outils de résolution . . . . .	36
III.1.1	Présentation de différentes possibilités . . . . .	36
III.1.2	Modeleur . . . . .	37
III.1.3	Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires (NLP) . . . . .	38
III.1.4	Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires en nombres entiers (MINLP) . . . . .	38
III.1.5	Solveurs non linéaires . . . . .	38
III.1.5.a	Ipot . . . . .	38
III.1.5.b	Conopt . . . . .	39
III.1.5.c	Snopt . . . . .	39
III.1.6	Solveurs non linéaires en nombres entiers . . . . .	39
III.1.6.a	Bonmin . . . . .	39
III.1.6.b	Dicopt . . . . .	40
III.1.6.c	SBB . . . . .	40
III.1.6.d	Choix d'un solveur non linéaire . . . . .	40
III.1.7	Solveurs non retenus . . . . .	40
III.1.7.a	Couenne . . . . .	40
III.1.7.b	Knitro . . . . .	40
III.1.8	Conclusion . . . . .	40
III.2	Suite de relaxations . . . . .	41
III.2.1	Présentation . . . . .	41
III.2.2	Problématique . . . . .	41
III.2.3	Ordre des contraintes ajoutées . . . . .	42
III.2.3.a	Ajout par type de contraintes . . . . .	42
III.2.3.b	Ajout des contraintes en fonction de leur localisation . . . . .	42
III.2.3.c	Choix . . . . .	42
III.2.4	Objectif des sous-problèmes . . . . .	42
III.2.4.a	Objectif identique à tous les sous-problèmes . . . . .	43
III.2.4.b	Un objectif différent pour les sous-problèmes . . . . .	43
III.2.5	Application au problème de transport de gaz . . . . .	44
III.2.5.a	Ordre de l'ajout des contraintes . . . . .	44

III.2.5.b	Fonctions objectifs . . . . .	44
III.2.5.c	Choix d'une fonction objectif . . . . .	45
<b>IV</b>	<b>Stratégies de résolution</b> . . . . .	<b>47</b>
IV.1	Réseaux de tests . . . . .	50
IV.1.1	Réseaux arborescents . . . . .	50
IV.1.2	Réseaux maillés . . . . .	54
IV.2	Différentes voies de formulation . . . . .	57
IV.2.1	Stations d'interconnexion . . . . .	57
IV.2.1.a	Modélisation en variables binaires (MINLP) . . . . .	57
IV.2.1.b	Modélisation sans variables binaires (NLP) . . . . .	58
IV.2.1.c	Résolution . . . . .	59
IV.2.2	Pression . . . . .	59
IV.2.2.a	Présentation . . . . .	59
IV.2.2.b	Convexité de la perte de charge en $\Pi_i$ . . . . .	60
IV.2.3	Objectifs . . . . .	60
IV.2.4	Initialisation du problème . . . . .	61
IV.2.4.a	Minimisation de l'énergie mécanique dissipée par les canalisations du réseau . . . . .	61
IV.2.4.b	Minimisation de la perte de charge . . . . .	62
IV.2.5	Création des instances de tests . . . . .	62
IV.3	Résultats . . . . .	64
IV.3.1	Analyse d'un cas simple arborescent . . . . .	64
IV.3.1.a	Introduction . . . . .	64
IV.3.1.b	Résolution à la main . . . . .	64
IV.3.1.c	Résolution à l'aide des solveurs . . . . .	65
IV.3.2	Analyse d'un cas maillé . . . . .	69
IV.3.2.a	Description du cas . . . . .	69
IV.3.2.b	Comparaison des deux modèles en terme d'in- terconnexions . . . . .	69
IV.3.3	Conclusion . . . . .	69
IV.4	Analyse par facteur . . . . .	73
IV.4.1	Analyse du modèle d'interconnexion . . . . .	73
IV.4.1.a	Solveurs non linéaires en variables binaires . . . . .	73
IV.4.1.b	Solveurs non linéaires continus . . . . .	74
IV.4.1.c	Choix d'un modèle d'interconnexion et son solveur . . . . .	74
IV.4.2	Analyse de la formulation de la pression . . . . .	75
IV.4.3	Analyse de l'initialisation par un sous-problème . . . . .	78
IV.4.4	Analyse de la fonction objectif du problème . . . . .	81
IV.4.5	Analyse croisée . . . . .	85
<b>V</b>	<b>Etude du réseau national</b> . . . . .	<b>87</b>
V.1	Applications des résultats de modélisation . . . . .	89
V.1.1	Description du réseau de transport principal . . . . .	89
V.1.2	Méthodologie employée . . . . .	89
V.1.2.a	Détails des cas de tests . . . . .	89
V.1.2.b	Applications des formulations retenues . . . . .	91
V.1.3	Application des résultats précédents . . . . .	91
V.1.3.a	Résultats avec configurations d'interconnexions fixées . . . . .	91

V.1.3.b	Résultats avec configurations d'interconnexions libres . . . . .	92
V.1.4	Améliorations possibles . . . . .	93
V.2	Mise à l'échelle des variables . . . . .	93
V.2.1	Mise en œuvre . . . . .	93
V.2.1.a	Mise à l'échelle de la pression . . . . .	93
V.2.1.b	Mise à l'échelle du débit . . . . .	94
V.2.1.c	Mise à l'échelle du travail . . . . .	94
V.2.2	Mise à l'échelle du problème . . . . .	94
V.2.3	Résultats . . . . .	95
V.2.3.a	Réseaux à configurations fixées . . . . .	95
V.2.3.b	Réseaux à configurations libres . . . . .	96
V.3	Relaxations successives . . . . .	97
V.3.1	Préambule . . . . .	97
V.3.2	Mise en place . . . . .	97
V.3.3	Application de la suite de relaxations . . . . .	99
V.3.3.a	Résultats à configurations fixées . . . . .	99
V.3.3.b	Résultats à configurations libres . . . . .	99
V.3.4	Conclusion . . . . .	99
V.4	Validation et utilisation opérationnelle des résultats . . . . .	101
V.4.1	Bambou . . . . .	101
V.4.2	Création de configurations d'interconnexions . . . . .	101
V.4.2.a	Algorithme de construction de configurations d'interconnexion . . . . .	101
V.4.2.b	Ajout de contraintes au problème de base . . . . .	104
V.4.2.c	Élimination d'éléments topologiques . . . . .	105
V.4.2.d	Satisfaction des contraintes d'une interconnexion . . . . .	105
V.4.2.e	Choix retenu . . . . .	106
V.4.3	Validation de la construction des configurations construites . . . . .	106
V.4.4	Validation par Bambou des résultats proposés . . . . .	107
V.4.5	Analyse entre une solution métier et une de nos solutions . . . . .	109
V.4.5.a	Similarités . . . . .	109
V.4.5.b	Conclusion . . . . .	113
<b>VI</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b> . . . . .	<b>115</b>
VI.1	Conclusion . . . . .	116
VI.2	Perspectives . . . . .	117
VI.2.1	Améliorations du modèle . . . . .	117
VI.2.1.a	Prise en compte des compresseurs dans les stations de compression . . . . .	117
VI.2.1.b	Compresseurs réels . . . . .	118
VI.2.1.c	Résolution du problème multi-PCS . . . . .	118
VI.2.1.d	Utilisation des informations complémentaires de l'optimisation . . . . .	119
VI.2.2	Applications à d'autres problèmes . . . . .	119
<b>A</b>	<b>Détails des instances maillés</b> . . . . .	<b>129</b>
A.1	Détails des instances maillés . . . . .	130
A.2	Rappel des réseaux . . . . .	130

<b>B</b>	<b>Coefficient de perte de charge</b>	<b>133</b>
B.1	Différences de modèles selon le coefficient de perte de charge . . .	134
B.1.1	Cas classique . . . . .	134
II.1.1.a	Cas constant . . . . .	134
B.1.2	Cas variable . . . . .	135



## Contexte du travail de thèse

Le travail présenté dans cette thèse est issu d'une Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE) entre GDF-SUEZ et l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT). Plus précisément, au sein de l'INPT, c'est l'équipe de Procédés Systèmes Industriels (PSI) du Laboratoire de Genie Chimique (LGC). Au niveau de GDF-SUEZ, c'est au sein du macro projet de Etudes méthodes et outils pour le développement et l'exploitation des réseaux de transport (MAIA) de la Direction de la Recherche et de l'Innovation que cette collaboration s'est déroulée. Elle s'est traduite par la mise en place d'une thèse, dont ce mémoire présente les travaux effectués. Elle se place en outre dans la continuité des travaux effectués au sein de l'équipe PSI sur l'étude du transport de gaz [[Tabkhi07](#)], [[Hernandez-Rodriguez11](#)].

Le contexte de ce travail porte sur les réseaux de transport de gaz. Ils sont composés de canalisations qui acheminent le gaz sur de grandes distances, plusieurs centaines de kilomètres. Ils font le lien entre l'extraction du combustible avec le réseau de distribution qui l'achemine au consommateur final. Ce sont les autoroutes du gaz.

GRTgaz est le principal gestionnaire du réseau de transport de gaz en France. Il gère les deux types de réseau de transport français: le réseau principal de transport et les réseaux régionaux. En France, le réseau de transport fait le lien entre les approvisionnements aux frontières et les réseaux de distribution ou les gros industriels.

Le but de cette thèse est d'étudier des méthodes alternatives pour évaluer la capacité maximale de transit d'un réseau de transport. Sur le réseau français, il s'agit en effet d'un problème complexe du fait de la multiplicité des sources d'approvisionnement et de la diversité des schémas de flux possibles. Cela se traduit en particulier par la présence de nombreuses stations d'interconnexions qui jouent un rôle d'aiguillage. Dans la modélisation actuelle de GDF-SUEZ, elles introduisent une combinatoire importante. Il s'agit dans cette thèse de proposer une modélisation et une méthode de résolution alternatives pour viser de meilleures performances.

Positionnement du problème



## I.1 Le gaz naturel

Le marché mondial de l'énergie a beaucoup évolué au cours des dernières décennies. Il a subi de grandes modifications suite à différents facteurs économiques et environnementaux. Le gaz naturel est la troisième source d'énergie fossile dans le monde [IEA09]. Plusieurs analystes prévoient une croissance importante de l'ordre de 50 % d'ici à 2030 et entrevoient un âge d'or du gaz [Biro11]. La demande actuelle mondiale est de 3300 milliards de mètres cube par an. Les réserves actuelles couvrent 250 années de consommation actuelle et chaque région du globe possède au moins 75 années de consommation [IEA11]. Ces prévisions de consommation s'expliquent notamment par des émissions de gaz à effet de serre moindres par rapport aux autres combustibles fossiles. De plus, la production d'électricité à l'aide de Centrales à Cycles Combinés de Gaz (CCCG) est également un des facteurs de cette croissance.

Le groupe GDF-SUEZ s'est imposé comme l'un des acteurs majeurs de la production de gaz, son transport et sa distribution tant à l'échelle française qu'internationale. GRTgaz, filiale de GDF-SUEZ, est le gestionnaire du réseau de transport de gaz naturel pour la majeure partie du territoire français. Sa mission consiste à favoriser une concurrence effective entre les producteurs/fournisseurs de gaz naturel au profit des consommateurs de gaz, tant industriels que particuliers. Le macro-projet Etudes, méthodes et outils pour le développement et l'exploitation des réseaux de transport (MAIA) développé par la Direction de la Recherche et de l'Innovation de GDF-SUEZ vise à proposer outils et études pour répondre à des problématiques diversifiées concernant l'exploitation ou l'étude prospective des réseaux de transport de GRTgaz.

### I.1.1 Origines et compositions du gaz

Le gaz naturel, avec le pétrole et le charbon, appartient à la famille des combustibles carbonés fossiles. Ces trois hydrocarbures assurent l'essentiel de la consommation d'énergie fossile dans le monde.

Il est fréquent de trouver des gisements de pétrole et de gaz dans les mêmes réservoirs. Ils proviennent de sédiments organiques situés à des profondeurs allant de 1000 à 6000 mètres sous terre. Les mouvements de tectonique des plaques les ont rapprochés des températures élevées du manteau terrestre. Le pétrole y subit une pyrolyse le transformant en gaz.

La composition chimique du gaz naturel est principalement du méthane  $CH_4$  (+80%) ainsi que d'autres hydrocarbures. Sa densité est de 0,6 par rapport à l'air pour une masse volumique de  $0,8 \text{ kg/m}^3$ . Il est inodore lors de son extraction. Cependant, il est odorisé avec du tétrahydrothiophène lors de son arrivée sur le réseau de transport français afin de rendre plus facile la détection de fuite, notamment dans le cadre domestique.

Jusque dans les années 1970, le gaz naturel était peu utilisé et principalement brûlé à la torche lors de son extraction. Il était alors considéré comme un sous-produit du pétrole. Diverses raisons expliquaient cette pratique:

- des difficultés de transport,
- un moindre apport énergétique par rapport au charbon et au fuel dominant à l'époque,
- et la dangerosité à la manipulation.

Cependant, la crise pétrolière de 1973 a changé la donne. Afin de s'affranchir de la dépendance au pétrole, une diversification des sources d'énergie a été mise



en place. Ainsi, de nouvelles pratiques pour transporter et distribuer le gaz naturel sont apparues.

### I.1.2 La chaîne d’approvisionnement gazière

L’approvisionnement du gaz s’effectue en plusieurs étapes: l’extraction, le transport et la distribution jusqu’au consommateur final.

Des études sismiques sont faites afin d’élaborer une cartographie des couches du sous-sol. Une fois le gisement localisé, le forage s’effectue sur plusieurs kilomètres de profondeur. Un puits est ensuite installé pour extraire le gaz naturel. Il permet de récupérer du méthane, le composant principal, d’autres hydrocarbures plus lourds, en plus de la présence de  $CO_2$  et d’Hélium.

Une fois extrait, le gaz doit être convoyé jusqu’à son lieu de consommation. A ce propos, l’acheminement du gaz est divisé en deux parties.

- Le transport qui s’effectue sur des longues distances (+100 kms) pour des débits de l’ordre de plusieurs millions de mètres cube par heure ( $m^3/h$ ).
- La distribution qui prend le relais du transport pour apporter le gaz au consommateur final. Les distances sont plus courtes et les débits moins importants. La pression relative sur un réseau de distribution varie entre 1 et 25 bars.

Deux moyens existent pour transporter le gaz.

- Sous forme liquide: il est liquéfié à la sortie du puits et est transporté par voie maritime à l’aide de méthaniers. Il est alors regazéifié après son arrivée dans un terminal méthanier et injecté dans un réseau de canalisations.
- Sous forme gazeuse: il est extrait et convoyé depuis les points d’extractions à l’aide de canalisations dédiées. Les niveaux de pression sont importants entre 40 et 95 bars.

C’est le transport sous la forme gazeuse qui est étudié dans cette thèse.

### I.1.3 Le réseau de transport en France

Sur le territoire français, on distingue deux types de réseaux de transport: - **le réseau principal de transport**, qui couvre la majeure partie de la France, - et **les réseaux de transport régionaux**. Ils sont illustrés sur la figure I.1. Ces réseaux représentent près de 30 000 km sur l’ensemble du territoire français; 8000 km pour le réseau de transport principal et 23 000 km pour les réseaux régionaux. Les longueurs des canalisations varient entre quelques kilomètres à plus d’une centaine de kilomètres. Afin de transporter les quantités de gaz nécessaires, ces canalisations ont des diamètres allant de 300 mm à plus de 1000 mm.

Les réseaux de transport alimentent principalement:

- le réseau de distribution,
- des stockages,
- des gros industriels et
- des Centrales à Cycle Combiné de Gaz (CCCG)

Le réseau de distribution achemine le gaz jusqu’au consommateur final, particuliers, entreprises.

Cette étude a trait exclusivement au réseau de transport principal français. Il possède plusieurs points d’approvisionnement et de consommation répartis sur l’ensemble du réseau. Ce réseau est également **maillé** comme l’illustre le schéma I.1: deux nœuds peuvent être reliés par plusieurs chemins différents.



Figure I.1: Cartographie du réseau de transport de GRTgaz (source [www.grtgaz.com](http://www.grtgaz.com))

Ainsi, ces différentes caractéristiques ne permettent pas de connaître l'acheminement du gaz *a priori*.

#### I.1.4 Phénomènes physiques du transport de gaz

Plusieurs phénomènes physiques entrent en jeu lors du transport du gaz [Menon05]. Néanmoins, cette étude en retiendra seulement quatre principaux.

Tout d'abord, l'**équilibre des bilans de matière ou loi des nœuds** qui traduit que la quantité de gaz entrante est égale à la quantité sortante. A cela s'ajoute **la perte de charge** qui implique une perte de pression du gaz lors de son parcours dans une canalisation. Cette diminution est problématique et est au cœur des problèmes d'acheminement de gaz. Afin de la compenser, **la compression du gaz** est employée sur le réseau afin d'augmenter la pression. Enfin, pour des raisons de service et de sécurité, **la détente du gaz** peut être nécessaire, notamment pour son acheminement sur des réseaux de distribution.

#### I.1.5 Stations d'interconnexion

**Les stations d'interconnexion** sont situées aux carrefours du réseau. Ce sont des éléments clés du réseau. Elles regroupent **les stations de compression** et **les vannes de détente**.

Elles ont un rôle triple pour le gaz, à savoir:

- d'orientation,
- de détente et
- de compression.

Leur fonctionnement interne est très complexe et difficilement modélisable de façon précise. De plus, sur le réseau français, chaque station d'interconnexion a ses propres spécificités.

L'une des problématiques de ce travail concerne la détermination de leur **configuration**, à savoir l'agencement des stations de compression et des vannes de détentes en son sein. Il faut ainsi déterminer les configurations sur l'ensemble du réseau. Le nombre possible est de l'ordre de  $10^{200}$  configurations sur le réseau de transport principal.

Une représentation fonctionnelle plus simple a donc été faite et sera détaillée dans la section II.2.

Par abus de langage, les stations d'interconnexion sont nommées par le terme interconnexion. Lorsque la configuration de l'interconnexion est connue, le terme d'**interconnexion fixée** est employée pour y faire référence. Par opposition, le terme **interconnexion libre** signifie que la configuration n'est pas connue.

#### I.1.6 Stations de compression

*Les stations de compression* compriment le gaz. Ce sont les ouvrages possédant le plus de contraintes physiques de fonctionnement. À ce titre, elles sont déterminantes sur la quantité de gaz qui peut transiter dans le réseau.

Elles sont composées de différents types de compresseurs en parallèle:

- les motocompresseurs,
- les turbocompresseurs et
- les électrocompresseurs.

Les différentes plages de fonctionnement sont définies par la carte de compression, propre à chaque machine. Un exemple de carte de compression est

donné Figure I.2. Elle donne des informations sur les plages de fonctionnement du compresseur en fonction du débit volumique transitant  $Q$ , et de la hauteur adiabatique,  $h$ . Plus de détails sont présentés dans [Gorla03].

En effet, le compresseur est limité par la vitesse de la turbine. Il est en outre limité par la puissance qu'il peut délivrer. Enfin, des phénomènes de gavage et de pompage peuvent l'endommager, il faut donc les éviter. Sur la Figure I.2, un point de fonctionnement du compresseur doit se situer à l'intérieur de la zone décrite par les quatre courbes.

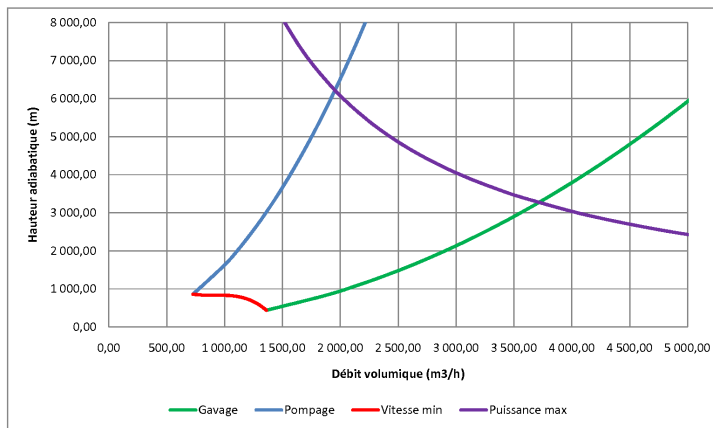


Figure I.2: Exemple d'une carte de fonctionnement d'un compresseur

Le modèle mathématique d'un compresseur est extrêmement complexe, quel que soit son type: électro, moto ou turbocompresseur. Afin de se concentrer sur la problématique des interconnexions, la station de compression est approchée par un *unique compresseur générique*. Ses caractéristiques sont proches de la station.

Ainsi, pour une station de compression, plusieurs caractéristiques sont retenues:

- son travail
- sa plage de débits admissibles,
- les pressions admissibles en amont et en aval,
- le taux de compression, à savoir le rapport entre la pression aval et la pression amont.

## I.2 Problématiques abordées par MAIA

**MAIA** désigne le projet Etudes, Méthodes et Outils pour le Développement et l'Exploitation des Réseaux de Transport. Son rôle est de proposer des études et des outils afin de faciliter le travail du gestionnaire du réseau de transport français, GRTgaz. Plusieurs problématiques sont actuellement en cours d'étude.

## I.2.1 Situation Organisationnelle

Au sein de GDF-SUEZ, GRTgaz est la filiale en charge du réseau de transport et GrDf gère le réseau de distribution. Elles furent créées respectivement en 2005 et 2008 par Gaz de France. De plus, afin de créer un groupe leader mondial dans le domaine énergétique, la fusion entre Gaz de France et Suez a été décidée pour donner naissance à GDF-SUEZ en août 2008.

GRTgaz entretient et développe le réseau de transport composé de canalisations et d'autres ouvrages. Ses prestations portent sur l'acheminement de gaz au sein du réseau de transport et sur le raccordement de gros industriels. Il commercialise ainsi des capacités de transport aux expéditeurs de gaz naturel. La troisième directive européenne sur la libéralisation de l'énergie impose à GRTgaz d'agir en toute équité envers les différents acteurs du gaz qui souhaitent utiliser le réseau de transport.

La recherche du groupe GDF-SUEZ est centralisée à la Direction de la Recherche et de l'Innovation. Le but est d'encourager les synergies nécessaires à une recherche performante. C'est dans ce cadre que se place le macro projet MAIA. Il se situe dans le Département Sécurité Industrielle et Optimisation des Actifs, dans le pôle Optimisation, Simulation, Statistiques et Sociologie.

MAIA propose des études et des logiciels, afin d'aider GRTgaz dans l'exploitation du réseau de transport français.

## I.2.2 Missions de MAIA

MAIA réalise des outils et des études afin d'épauler GRTgaz dans sa prise de décision. Le système est dans un état d'équilibre.

### *CLER: Outil d'aide à la détermination de capacité*

L'enjeu de cet outil est d'aider GRTgaz à calculer la **capacité de son réseau**, à savoir quelle est la quantité maximale de gaz qui peut transiter sur le réseau. Cette valeur est dépendante de l'ensemble des entrées et sorties. CLER (Calcul des Limites d'Exploitation du Réseau) détermine les flux de gaz possibles et quelles sont les canalisations contraignant la quantité de gaz sur l'ensemble du réseau. Les résultats obtenus sont à but prospectif et permettent de dimensionner le réseau.

Le problème est de déterminer s'il existe un acheminement du gaz sur le réseau dans des cas extrêmes d'approvisionnement et de consommation. Il s'appuie sur la brique élémentaire Bambou.

### *Bambou: Optimisation des flux à configurations fixées*

Bambou est le nom d'un outil de calcul de réseaux gaziers développé en interne au sein de la Direction de la Recherche et de l'Innovation de GDF-SUEZ. Il travaille sur un réseau où les stations interconnexions ont une configuration fixée. Son objectif premier est d'établir une carte de débits-pressions valide sur tout le réseau en régime permanent, qui vérifie le bon fonctionnement des différents ouvrages actifs. En outre, il calcule la répartition des énergies dans les ouvrages, détermine le démarrage et la répartition de charge des différents compresseurs composant les stations de compression. Il est principalement dédié à l'exploitation du réseau.

## I.3 État de l'art des réseaux gaziers

L'étude académique des réseaux gaziers a connu un développement important ces dernières années en rapport avec son utilisation industrielle. Elle se divise selon trois thématiques.

- La première concerne le design et le renforcement d'un réseau gazier. Elle se propose d'utiliser des méthodes d'optimisation afin de créer ou de renforcer un réseau en se basant sur des prévisions de consommation.
- La deuxième, au cœur de ce travail, concerne son exploitation. Ces travaux ont pour but d'analyser et de déterminer *a priori*, les mouvements de gaz sur le réseau.
- Enfin, ces dernières années ont connu plusieurs travaux concernant l'optimisation de portefeuilles gaziers.

Cette bibliographie est consacrée principalement aux deux premiers points.

En plus de cette revue de la littérature dédiée au gaz, certaines thématiques connexes au problème de transport de gaz sont évoquées. Les réseaux d'eaux [Boix11] ont des comportements analogues à ceux du gaz.

### I.3.1 Historique de l'optimisation et de la simulation gazière

Que ce soit à l'aide d'outils d'optimisation ou de simulation, le but est de déterminer l'état du réseau gazier sous certaines conditions. Grâce à l'évolution de la puissance de calcul, des modèles mettant en jeu des équations de plus en plus complexes ont pu être traités, dans le cas d'un régime stationnaire ou bien dans le cas variable. Tabkhi [Tabkhi07] fait un historique détaillé des développements informatiques sur les réseaux gaziers.

Dans le cas variable, des systèmes d'équations aux dérivées partielles décrivent les phénomènes d'acheminement de gaz à l'aide de canalisations dans [Osiaadacz87] et [Joulié98]. Ces modèles sont très détaillés et prennent en compte de nombreux paramètres comme le type de compresseurs, les mélanges de gaz, les différentes forces de frictions, ... [Osiaadacz93]. Ils permettent ainsi de connaître de façon précise l'état du système. Ce sont principalement des outils de simulation comme ceux présentés dans [Kralik98], [SIM], [Behbahani-Nejad08] et [Hai11] qui vont pouvoir donner des informations aussi précises.

Plusieurs tentatives d'utiliser des outils d'optimisation ont été faites également dans le cadre d'un régime variable, [Moritz06], [Mahlke07] et [Bales08]. Kolb et *al.* proposent dans [Kolb08] des linéarisations afin d'optimiser le régime transitoire d'un réseau de gaz. Cependant, l'optimisation se limite pour l'instant à des réseaux arborescents de petite taille, à savoir avec peu d'ouvrages et en supposant connu le sens du gaz.

### I.3.2 Transport simple du gaz

En régime stationnaire, le système d'équations formé a été établi dans [Katz59] et rappelé dans [Mohitpour03]. La principale difficulté de ces systèmes provient du phénomène de perte de charge. Il induit une perte de pression du gaz circulant dans une canalisation. Le problème est non linéaire et dans le cadre de l'optimisation, il se place alors dans le cadre de la Programmation Non Linéaire (Non Linear Programming, NLP).

Afin de résoudre ce problème non linéaire plusieurs approches ont été étudiées. Maugis [Maugis77] utilise un lagrangien pour trouver l’acheminement du gaz et déterminer une carte de débits-pressions.

Afin de contourner la difficulté due à l’aspect non linéaire, des techniques de linéarisation ont été employées. De Wolf & Smeers ont utilisé dans [Wolf00] une technique de *linéarisation par morceaux* (Piecewise Linear Programming) à l’aide d’un simplexe amélioré pour résoudre un problème de minimisation des coûts d’achats d’approvisionnement. Tom Van der Hoeven a cherché à résoudre le transport de gaz à l’aide d’une technique de *linéarisation séquentielle* (Sequential Linear Programming) qui existe également dans la littérature sous le nom de Linéarisations Successives (Successive Linear Programming). Il propose également dans sa thèse [Hoeven04] une revue de différentes techniques de linéarisation. Enfin, Möeller dans sa thèse [Möller04] propose d’approcher les non linéarités à l’aide de triangulations, une forme de linéarisation par morceaux. La détermination efficace des morceaux utilisés est faite à l’aide de contraintes SOS de type  $k$  (Special Ordered Set) généralisation des SOS de type 2 pour de plus grandes dimensions. Les solutions proposées sont efficaces mais ne prennent en compte qu’une partie des contraintes réelles d’un réseau de transport de gaz. Tous les aspects liés à la compression ne sont pas considérés.

### I.3.3 Prise en compte de la compression

Ces dernières années ont vu l’émergence de problèmes plus proches de ceux d’un opérateur de réseaux de transport de gaz, notamment par l’intégration de la compression. Carter [Carter98] résout à l’aide de la programmation variable le point optimal de fonctionnement de compresseurs placés en série. C’est une première approche de l’étude comportementale des compresseurs dans des réseaux de gaz. Les exemples présentés sont assez simples et théoriques. Wu et al. [Wu99] proposent une approximation des compresseurs à l’aide de relaxations polynomiales afin de trouver une borne inférieure au coût de la compression lors du transport de gaz. Cobos et al. [Cobos-zaleta02] proposent pour la première fois un modèle MINLP de réseau gazier. Le but est de minimiser la consommation de gaz par les compresseurs. Les variables entières définissent les compresseurs utilisés. Abbaspour et al. [Abbaspour05] vont plus loin dans la modélisation des compresseurs. Les équations prises en compte sont plus détaillées que précédemment. L’objectif est le même que précédemment, à savoir la consommation des compresseurs. Ces méthodes sont principalement déterministes. En parallèle, Mora et al. propose dans [Mora05] l’utilisation d’algorithme génétique pour configurer un réseau en minimisant l’énergie consommée par les compresseurs. Les instances de toutes ces études sont souvent des réseaux assez simples, arborescents ou de petites tailles.

Tabkhi [Tabkhi07] dans son travail étudie un réseau de taille plus conséquente. En plus d’une étude des compresseurs, il s’intéresse également au transport conjoint d’hydrogène et de gaz naturel sur un réseau existant. Il souligne toute la difficulté de l’optimisation dans un cas réel, maillé et de taille conséquente. Bachouya [Bachouya08] s’intéresse au dimensionnement d’un réseau de transport avec la prise en compte de la compression. Plus récemment, Hernandez-Rodriguez et al. [Hernandez-Rodriguez 2] formule le problème de façon multi-objectif en maximisant la quantité transportée et en minimisant la consommation des compresseurs. Ils utilisent un algorithme génétique NSGA IIb afin de calculer le front de Pareto de ce problème.

Il apparaît ainsi que l'étude et la résolution du problème de transport de gaz à l'aide des outils d'optimisation ont évolué récemment pour se rapprocher des cas réels.

### I.3.4 Réseaux d'eau

Ces dernières années ont connu l'étude des réseaux d'eau dont les phénomènes physiques sont proches de celui du gaz naturel. Sherali et *al.* [Sherali97] posent le problème de conception des réseaux d'eau. Ils déterminent en outre les bornes inférieures et supérieures pour ces réseaux à l'aide des techniques de reformulations et de linéarisations [Sherali10]. Bragalli et *al.* [Bragalli08] proposent la formulation du problème de design des réseaux d'eau à l'aide d'un programme non linéaire mixte en nombres entiers. La question se pose d'ailleurs sur le diamètre des canalisations qui sont des variables entières, la topologie étant fixée par ailleurs. Enfin, plus récemment, les travaux de Boix [Boix11] s'attachent à étudier les polluants dans l'eau et l'optimisation de leur traitement. Cette étude se rapproche d'ailleurs fortement de l'étude des mélanges de gaz qu'on trouve également sous le terme qualité.

## I.4 But du travail de thèse

Les objectifs de la présente thèse sont les suivants:

1. Étudier le modèle et la problématique des phénomènes physiques entrant en jeu dans le transport de gaz.
2. Présenter la problématique et la modélisation des stations d'interconnexion. A notre connaissance, cela n'a jamais été étudié directement.
3. Trouver une alternative à la prise en compte combinatoire actuelle due aux configurations d'interconnexion tout en surmontant la difficulté non linéaire que posent les modélisations physiques du transport de gaz.
4. Étudier l'équivalence d'un point de vue de la résolution de modèles de transport de gaz naturel en bijection.
5. Proposer une méthode de résolution efficace pour la modélisation développée précédemment.
6. Mettre en place et tester l'algorithme sur des instances réelles et comparer les résultats avec des cas de référence.



Modélisation d'un réseau de  
transport de gaz et propriétés  
mathématiques



## Résumé

---

Ce chapitre présente la modélisation du problème de vérification de capacité de transport d'un réseau gazier.

Dans un premier temps, il décrit la mise en équations des phénomènes physiques se produisant lors du transport de gaz. Il expose également des simplifications et alternatives qui ont été développées au cours de ce travail.

Dans un deuxième temps, les stations d'interconnexions sont modélisées de deux façons différentes.

Enfin, dans une troisième partie, la convexité ainsi que différentes propriétés mathématiques des modèles des interconnexions sont étudiées.

---

## Introduction

Deux types d'ouvrages composent un réseau de gaz: les ouvrages passifs, – les canalisations – et les ouvrages actifs sur lesquels le pilote du réseau peut agir, comme les vannes de détente, stations de compression, ...

La description et le modèle du phénomène du transport de gaz en régime permanent est décrit dans ce chapitre. Un point clé concerne la *modélisation des stations d'interconnexion* décrites dans l'introduction. Ces dernières sont positionnées sur le réseau pour adapter la circulation du gaz en fonction des approvisionnements et des consommations et jouent un rôle majeur dans la compensation des pertes de pressions dues à l'acheminement du gaz. Cette étude doit vérifier l'aptitude d'un réseau donné à assurer le transport de gaz: elle doit indiquer si, compte tenu des contraintes physiques de sécurité et de service, le transport du gaz est possible. Il s'agit donc de déterminer la faisabilité d'un scénario.

Ce chapitre est articulé comme suit. La première partie décrit la modélisation des différents phénomènes physiques qui entrent en jeu lors du transport de gaz. La deuxième partie se concentre sur les stations d'interconnexion et propose deux modélisations différentes. La troisième partie aborde certains aspects mathématiques du problème comme la non convexité du problème et la modélisation des interconnexions.

## II.1 Modélisation du phénomène physique

### II.1.1 Modélisation simple

#### II.1.1.a Description

A l'échelle macroscopique, le transport de gaz se résume à du fluide circulant dans un réseau. Ce dernier est défini comme un ensemble de canalisations reliant divers *points d'approvisionnement* à des *points de consommation*. Dans le cas du réseau principal de transport de GRTgaz, les points d'approvisionnement peuvent être:

- d'autres réseaux de transport de gaz, comme le réseau belge,
- des stockages de gaz,
- des terminaux méthaniers qui regazéifient du gaz liquéfié, tels que les terminaux de Montoir de Bretagne et Fos I-II.

Par ailleurs, il existe également différents types de points de consommation, à savoir:

- des stockages de gaz,
- des réseaux de transport régionaux,
- d'autres réseaux de transport de gaz, comme le réseau TIGF (Total Infrastructures Gaz France, filiale de Total SA) présent dans le Sud Ouest de la France.

Le terme *ouvrage* désigne les différentes infrastructures composant le réseau: canalisations, vannes de détente et stations de compression.

#### II.1.1.b Liaisons internes au réseau

Deux types de jonctions entre différentes canalisations sont possibles dans le cadre de cette étude.

### *Liaisons directes entre canalisations*

Deux canalisations peuvent être directement reliées entre elles. Il peut y avoir éventuellement un changement de diamètre.

### *Liaisons indirectes: stations d'interconnexion*

L'autre possibilité de liaison entre canalisations est l'emploi de station d'interconnexion. Ce cas peut se produire quand plusieurs canalisations se rencontrent au même endroit. C'est donc un carrefour du réseau de gaz, où sont situées les **stations d'interconnexion**. Leur étude est au cœur du problème de transport de gaz.

Les extrémités des canalisations qui arrivent dans une station d'interconnexion sont les **pôles** de la station.

#### II.1.1.c Stations d'interconnexion

En plus de leur rôle premier d'*orientation du gaz*, les stations d'interconnexion peuvent également *agir sur la pression du gaz*. En effet, les canalisations peuvent être reliées à l'aide de différents ouvrages :

- les *vannes de détente* qui détendent le gaz, et donc induisent une baisse de pression dans le gaz qui y circule,
- les *stations de compressions* qui ont le rôle inverse, augmenter la pression du gaz.

Les vannes d'isolement seront prises en compte lors de la modélisation des interconnexions II.2. Elles servent à decorréler les pôles de l'interconnexion.

#### II.1.1.d Stations de compression

Les stations de compression comportent généralement des compresseurs en parallèle. Cependant, dans cette étude, *les stations de compression sont composées d'un unique compresseur*. Cet unique compresseur aura des caractéristiques proches de celles de la station dans sa globalité. Enfin, le nombre de stations de compression dans une station d'interconnexion est limité dans le cas général. Dans les réseaux d'étude, au plus une station de compression est présente dans une interconnexion.

#### II.1.1.e Configuration d'une station d'interconnexion

Pour une station d'interconnexion, il ne peut y avoir qu'un seul ouvrage qui relie deux pôles, comme illustré en Figure II.1.

Plusieurs ouvrages peuvent relier une paire de pôles donnée. Dans une station d'interconnexion, une *configuration* est la liste des ouvrages présents ainsi que les pôles qu'ils relient.

### II.1.2 Difficultés du problème

Le réseau principal de transport géré par GRTgaz possède plusieurs sources et points de consommations qui sont situés sur l'ensemble du territoire. Une autre caractéristique est l'existence d'un maillage, à savoir la présence de boucles sur le réseau. Ainsi l'acheminement du gaz entre deux points est possible par plusieurs itinéraires.

Le sens du gaz dans les ouvrages constitue ainsi une inconnue dans les canalisations composant les mailles du réseau. Pour une consommation située

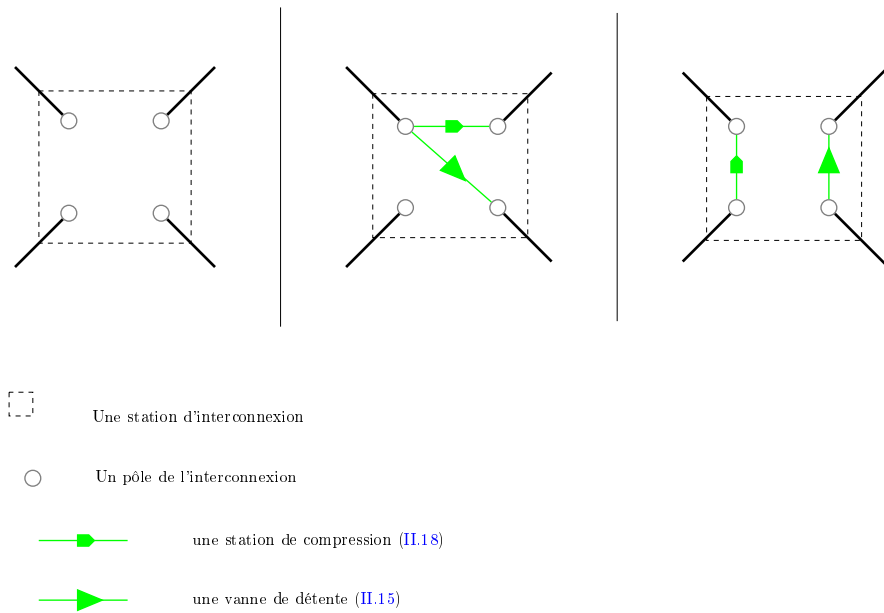


Figure II.1: Trois configurations possibles d'une station d'interconnexion

au cœur du réseau, il n'est pas possible de prévoir l'origine du gaz qui l'alimentera avec certitude.

L'utilisation des stations d'interconnexion est définie par leur configuration. Pour ce problème, il y a un nombre de combinaisons de l'ordre de  $10^{200}$ , ce qui rend impossible en pratique d'explorer toutes les solutions. Ce nombre de possibilités est détaillé lors de la modélisation des interconnexions en section II.2.1.

Enfin, dans le problème de vérification de capacité, les cas d'approvisionnement et de consommations proposés exploitent une partie du réseau à la limite de la saturation. Cette proximité avec des limites du problème peut compliquer la convergence de la résolution numérique.

### II.1.3 Notations

#### II.1.3.a Nomenclature

Les variables et les paramètres seront définis par la convention suivante: les lettres majuscules définiront les variables et les minuscules les paramètres du problème. On notera ainsi une relaxation du paramètre  $p$  en variable  $P$ .

#### II.1.3.b Réseau

La modélisation du de vérification de capacité est effectuée dans ce qui suit à l'aide de la théorie des graphes et plus particulièrement des graphes de flots [Diestel06]. La terminologie utilisée dans le cas d'étude des réseaux, à savoir *arc* pour désigner un ouvrage et *nœud* pour désigner une de ses extrémités est retenue. Les nœuds du réseau marquent la liaison entre deux ouvrages: canalisations, stations de compression, vannes. Ils pourront également signaler un point d'entrée ou de sortie du gaz du réseau ou un pôle d'une station d'interconnexion.

Les notations utilisées par la suite sont classiques en théorie des graphes. On désigne par  $V$  l'ensemble des nœuds du réseau. Un élément de  $V$  sera souvent noté par les lettres  $i$  ou  $j$ .

L'ensemble des arcs du réseau sera noté  $E$ . C'est un sous-ensemble de  $V \times V$ . Un arc est identifié par ces deux extrémités  $i$  et  $j$ . On a alors  $(i, j) \in E$ . Par convention, si  $(i, j) \in E$  alors  $(j, i) \in E$ .

Dans le cas de l'arc  $(i, j)$  le nœud  $i$  sera appelé le nœud amont et le nœud  $j$  le nœud aval.

L'ensemble des canalisations sera ainsi noté  $E_p$ , l'ensemble des vannes  $E_v$  et l'ensemble des stations de compression  $E_c$ . On a également la relation ensembliste:  $E = E_p \cup E_v \cup E_c$ .

### II.1.3.c Paramètres

Les paramètres du réseau définissent sa structure complète. Ils représentent les caractéristiques physiques des différents ouvrages du réseau.

#### *Canalisations*

Au niveau topologique, les paramètres sont les emplacements des canalisations. Pour une canalisation  $(i, j)$  sa longueur  $l_{i,j}$ , son diamètre  $d_{i,j}$  et sa rugosité  $\mu_{i,j}$  en sont également les paramètres spécifiques.

En outre, on peut modéliser la maintenance d'une canalisation par son retrait dans le jeu de données.

#### *Station d'interconnexion*

Les caractéristiques des ouvrages des stations d'interconnexion sont aussi des paramètres du problème. Les limites en pratique sont:

- le débit minimal et maximal pouvant circuler dans une station de compression,
- les plages de pressions admissibles en amont et en aval de la station,
- le travail minimal et maximal de la station de compression,
- le taux maximal entre les pressions des nœuds amont  $i$  et aval  $j$ , appelé aussi ratio de compression,  $\tau_{i,j}$ .

On peut imaginer de modifier éventuellement un ou plusieurs de ces paramètres afin de tester un renfort sur une station de compression ou afin de simuler une panne.

#### *Entrées et sorties du réseau*

Au niveau contractuel, les paramètres du réseau sont les débits d'entrée et de sortie de gaz. Le volume de gaz qui entre ou qui sort du réseau au nœud  $i$  sera notée  $s_i$ . La convention sera la suivante: si  $s_i > 0$  alors le nœud  $i$  est un point d'approvisionnement, si  $s_i < 0$ ,  $i$  est alors un point de livraison et si  $s_i = 0$  il n'y a pas de mouvement de gaz avec l'extérieur du réseau en  $i$ .  $s_i$  se mesure en  $m^3/h$ .

### II.1.3.d Variables

Les variables d'un problème caractérisent son état. Les variables sont liées entre elles par les différentes contraintes du problème.

Pour une variable  $X$ ,  $\underline{X}$  désigne la borne inférieure et  $\overline{X}$  la borne supérieure de cette variable.

### *Débit du gaz*

Tout d'abord, le débit du gaz sur un arc  $(i, j)$  est noté  $Q_{i,j}$ . Sa valeur représente la quantité de gaz qui circule sur cet arc et est exprimée en  $m^3/h$ . La convention choisie relie le signe de  $Q_{i,j}$  au sens du gaz. Si  $Q_{i,j}$  est positif alors le gaz circule de  $i$  vers  $j$ , de  $j$  vers  $i$  sinon. Dès lors, la relation suivante s'applique  $Q_{i,j} = -Q_{j,i}$ . La variable  $Q_{i,j}$  n'est pas bornée explicitement sur la majeure partie des ouvrages.

### *Pression du gaz*

La pression du gaz en chaque nœud  $i$  du réseau est notée  $P_i$ . Elle est mesurée dans cette étude en *bar*. Pour des raisons de sécurité et de service, cette valeur est bornée.

$$0 < \underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i, \quad \forall i \in V \quad (\text{II.1})$$

### *Station de compression*

Le travail d'un compresseur  $(i, j)$  quantifie l'énergie apportée au gaz et est noté  $W_{i,j}$ . Il est borné selon les caractéristiques du compresseur et s'exprime en *kWh*.

$$0 \leq \underline{W}_{i,j} \leq W_{i,j} \leq \overline{W}_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in E_c \quad (\text{II.2})$$

Le débit, les pressions admises ainsi que le ratio de compression sont également limités.

$$0 \leq \underline{Q}_{i,j} \leq Q_{i,j} \leq \overline{Q}_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in E_c \quad (\text{II.3})$$

$$1 \leq \frac{P_j}{P_i} \leq \tau_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in E_c \quad (\text{II.4})$$

### *Pouvoir Calorifique du gaz*

La capacité énergétique du gaz est appelée Pouvoir Calorifique Supérieur (PCS). Elle est notée  $PCS_{i,j}$  pour le gaz circulant dans l'arc  $(i, j)$ .

Dans cette étude, on considèrera le gaz de même nature sur l'ensemble du réseau. Ainsi le PCS sera le même partout.

### *Approvisionnement*

Initialement, dans le problème examiné, les quantités de gaz en entrées et en sortie sont fixées par instances de tests. Cependant, une relaxation de ce paramètre a été employée pour les nœuds d'approvisionnement, i.e.  $s_i > 0$ . Les détails sont décrits dans la section III.2.5.b. Ainsi, une variable  $S_i$  pourra être employée comme relaxation du paramètre  $s_i$  qui caractérise les échanges de gaz entre le réseau et l'extérieur. Les bornes pour cette variable sont définies par:

$$0 \leq S_i \leq 2s_i \quad \forall i \in V \quad (\text{II.5})$$

## II.1.4 Bilan d'énergie, loi des nœuds

Au niveau d'un nœud du réseau, les quantités en entrées égalent celles sorties. Cela se traduit par l'égalité entre l'énergie apportée à un nœud et l'énergie sortante.

L'énergie du gaz qui circule dans un arc correspond au produit du débit de gaz par sa capacité énergétique, i.e. son PCS.

La relation s'exprime alors:

$$\sum_{j|(i,j) \in E} PCS_{i,j} \cdot Q_{i,j} = s_i \quad \forall i \in V \quad (\text{II.6})$$

Dans ce travail, le gaz est considéré comme identique sur tout le réseau: son PCS est une constante quelque soit l'arc considéré. L'équation ci-dessus se simplifie alors en:

$$\sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i \quad \forall i \in V \quad (\text{II.7})$$

Dans le cas où la variable  $S_i$  est considérée en lieu et place du paramètre  $s_i$ , la loi des nœuds s'écrit

$$\sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = S_i \quad \forall i \in V : s_i > 0 \quad (\text{II.8})$$

### II.1.5 Perte de charge

Lors de son transport dans le réseau, le gaz subit des frottements avec les parois des canalisations. Cette friction associée aux phénomènes de turbulences fait perdre de la pression au gaz et est appelée *perte de charge*.

C'est le phénomène le plus problématique du transport de gaz et de là provient une des difficultés du problème. En effet, sans la perte de pression induite par ce phénomène, le gaz circulerait très facilement dans n'importe quel réseau.

Avant de décrire la loi d'écoulement du gaz dans une canalisation, il faut rappeler quelques hypothèses simplificatrices:

- la section de la canalisation est parfaitement circulaire et constante sur la longueur de la canalisation;
- l'écoulement est unidimensionnel, en régime permanent, isotherme et s'effectue à dénivellation nulle.

A partir de ces hypothèses et en se référant à l'équation de Darcy-Weinbach modifiée par GDF-SUEZ [**Bass84**], on obtient pour une canalisation entre  $i$  et  $j$ :

$$P_i^2 - P_j^2 = \frac{16 \cdot 10^{13} \rho_a p_0}{10^5 \pi^2 z_0 \cdot tk_0} d_0 \cdot tk_m \cdot Z_{i,j}^m \cdot \lambda_{i,j} \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| \quad (\text{II.9})$$

où

$$Z_{i,j}^m = 1 + \frac{P_{i,j}^m}{1050} \left( \frac{PCS_{i,j}}{10} + d_0 - 1 \right) \left( \frac{4(tk_m - t_0)}{100} - 3,6 \right) \quad (\text{II.10})$$

et

$$P_{i,j}^m = \frac{2}{3} \left( P_i + P_j - \frac{P_i \cdot P_j}{P_i + P_j} \right) \quad (\text{II.11})$$

avec

- $P_{i,j}^m$  la pression moyenne,
- $Z_{i,j}^m$  le facteur de compressibilité,
- $\rho_a \approx 1,29 \text{ kg/m}^3$  la masse volumique de l'air dans les condition normales,
- $d_0$  la densité du gaz par rapport à l'air,
- $tk_m$  la température moyenne du gaz dans la canalisation en degré Kelvin,
- $t_0 = 273,15 \text{ K}$ ,
- $p_0 = 1,01325 \text{ bar}$ ,



- $z_0 = 1$  le facteur de compressibilité standard,
- $\lambda_{i,j}$  le coefficient de perte de charge.

$\lambda_{i,j}$  se calcule à l'aide de la relation de Colebrook [Joulié98]. Le régime du gaz dans les canalisations est turbulent et hydrauliquement rugueux.  $\lambda_{i,j}$  est ainsi considéré dans la suite uniquement dépendant du diamètre de la canalisation  $d_{i,j}$  et de sa rugosité  $\mu_{i,j}$ .

Les variables induites  $P_{i,j}^m$  et  $Z_{i,j}^m$  par la perte de charge augmentent les nombres de contraintes non linéaires et donc la taille du problème.

Dans la majeure partie du travail, le gaz est considéré comme identique sur tout le réseau. La température est identique sur l'ensemble du réseau. Dès lors  $Z_{i,j}^m$  ne dépend plus que de  $P_{i,j}^m$ . Ainsi, un  $P_{i,j}^m$  moyen sur l'ensemble du réseau, noté  $\tilde{P}_{i,j}^m = p_m$ , a été choisi à l'aide de cas résolus.  $\tilde{Z}_{i,j}^m = z_m$  signifiera que l'on parle de sa valeur définie en fonction de  $\tilde{P}_{i,j}^m$ .

Plusieurs séries de tests ont été réalisées pour comparer  $Z_{i,j}^m$  et  $\tilde{Z}_{i,j}^m$  sur des cas résolus à l'aide de l'outil CLER. L'erreur moyenne calculée est inférieure à 5% et est donc acceptable.

L'usage de  $\tilde{Z}_{i,j}^m$  permet d'avoir un plus petit nombre de variables. Cependant, en utilisant  $Z_{i,j}^m$ , on obtient ainsi un modèle plus réaliste mais avec davantage de variables, à savoir deux en plus par canalisations.

Soit  $\alpha = \frac{16 \cdot 10^{13} \rho_a P_0}{10^5 \pi^2 Z_0 T_0} d_0 \cdot T \cdot \lambda_{i,j}$ , le phénomène de perte de charge devient alors:

$$P_i^2 - P_j^2 = \alpha \cdot Z_{i,j}^m \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| \quad (\text{II.12})$$

Afin de simplifier les notations dans le reste du manuscrit,  $C_{i,j}$  représentera la valeur  $\alpha \cdot Z_{i,j}^m \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5}$ .

Le phénomène de perte de charge sera ainsi modélisé par l'équation:

$$P_i^2 - P_j^2 = C_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| \quad (\text{II.13})$$

Cette équation est non linéaire. Sa convexité sera étudiée plus loin en II.3.2.

Dans le cas où la valeur moyenne de  $Z_{i,j}^m$ ,  $\tilde{Z}_{i,j}^m$  est considérée,  $\tilde{C}_{i,j} = c_{i,j}$  représentera la valeur moyenne  $\alpha \cdot \tilde{Z}_{i,j}^m \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5}$ .

$$P_i^2 - P_j^2 = c_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| \quad (\text{II.14})$$

L'ordre de grandeur de  $c_{i,j}$ , comme celui de  $C_{i,j}$  varie de  $10^{-10}$  à  $10^{-15}$ .

Le coefficient  $C_{i,j}$  dépend entre autres choses, de la pression en  $i$ ,  $P_i$  et de la pression en  $j$ ,  $P_j$ . Sa valeur varie en fonction des instances de tests et même au cours des itérations de résolution. Contrairement à  $C_{i,j}$ ,  $c_{i,j}$  ne dépend pas des pressions en amont et en aval de la canalisation.

L'impact du choix sera étudié lors des réseaux nationaux. Ainsi, un modèle utilisant  $c_{i,j}$  sera dénommé constant car ce coefficient n'évolue pas au cours des itérations. A l'inverse, le terme variable, sera alors employée pour nommer un modèle prenant en compte  $C_{i,j}$  qui varie donc en fonction des valeurs de  $P_i$  et  $P_j$ .

## II.1.6 Détente

Les vannes de détente induisent une diminution de la pression du gaz. Il est possible de régler cette baisse afin d'obtenir la pression souhaitée en sortie. Cet abaissement est nécessaire pour certaines installations, canalisations ou points

de livraison, qui n'ont pas les mêmes limites en terme de pression maximale admissible.

Ce phénomène se modélise pour une vanne allant du nœud  $i$  au nœud  $j$  par l'inéquation linéaire suivante:

$$P_i \geq P_j \quad \forall (i, j) \in E_v \quad (\text{II.15})$$

Cependant, cette inégalité requiert de connaître le sens du gaz. Elle est utile lorsque la configuration de l'interconnexion est connue. Plusieurs possibilités permettent de s'affranchir de cette connaissance:

- en utilisant des variables entières  $b_{i,j}$ , on a alors

$$b_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 \quad (\text{II.16})$$

$b_{i,j}$  vaut 1 si le gaz va de  $i$  vers  $j$ ,  $-1$  sinon.

- en utilisant le signe de la variable associée au débit, on a alors

$$Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 \quad (\text{II.17})$$

L'inéquation (II.17) modélise un phénomène un peu plus "fort" que la simple détente. Quand  $Q_{i,j} = 0$  est nul, les pressions amont et aval de la vanne  $P_i, P_j$  sont alors décorréelées. Lorsque  $Q_{i,j} \neq 0$ , la détente du gaz se fait selon son sens de circulation.

### II.1.7 Travail d'un compresseur

Les stations de compression sont le seul moyen de compenser la perte de pression induite par la perte de charge. La station de compression est un ouvrage complexe à modéliser, comme indiqués dans [SIM], [Abbaspour05] et [Villalobos]. Dans tout ce travail, la station sera modélisée par un compresseur générique équivalent. Ce dernier possède les mêmes limites que la station qu'il simule. (II.18) et (II.19) décrivent le fonctionnement de ce compresseur.

Le travail,  $W_{i,j}$  d'un compresseur situé entre  $i$  et  $j$  est modélisé par:

$$W_{i,j} = \gamma_1 \cdot Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \quad (\text{II.18})$$

Les coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des coefficients dépendant du type de compresseur et du type de gaz. Dans cette étude, ces deux paramètres sont considérés comme fixes sur tout le réseau car nous considérons des compresseurs génériques équivalents. Habituellement, ces valeurs sont de l'ordre de  $\gamma_1 = 0,136$  et  $\gamma_2 = 0,236$  [André10].

Cette équation est non linéaire et non convexe. Une preuve de la non convexité sera donnée plus loin au paragraphe II.3.2.

### II.1.8 Taux de compression

Cette équation dans le cadre du compresseur générique traduit l'impossibilité matérielle de comprimer à l'infini le gaz. Ainsi on a:

$$1 \leq \frac{P_j}{P_i} \leq \tau_{i,j} \quad \forall (i, j) \in E_c \quad (\text{II.19})$$

Si le ratio  $\frac{P_j}{P_i}$  vaut 1, la compression n'est pas nécessaire.

### II.1.9 Modélisation du problème global

Le problème de vérification de capacité d'un réseau gazier de transport se modélise alors par l'ensemble d'équations (II.20) lorsque le sens du gaz et les configurations des interconnexions sont connus.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in E} Q_{i,j} = s_i & \forall i \in V \\ P_i^2 - P_j^2 = c_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ W_{i,j} = \gamma_1 \cdot Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i,j) \in E_c \\ 1 \leq \frac{P_j}{P_i} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \\ P_i \geq P_j & \forall (i,j) \in E_v \\ \underline{P}_i \leq P_i \leq \overline{P}_i & \forall i \in V \\ \underline{Q}_{i,j} \leq Q_{i,j} \leq \overline{Q}_{i,j} & \forall (i,j) \in E \\ \underline{W}_{i,j} \leq W_{i,j} \leq \overline{W}_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \end{array} \right. \quad (\text{II.20})$$

Le cas de la configuration des interconnexions sera détaillé dans la section suivante. En se limitant à cet aspect et sans considérer la complexité supplémentaire engendrée par les stations d'interconnexion, le problème de transport de gaz apparaît d'ores et déjà comme un problème non linéaire et non convexe, dont la preuve sera apportée à la fin de ce chapitre en [II.3.2](#).

## II.2 Modélisation des interconnexions

Les stations d'interconnexion sont réparties sur l'ensemble du réseau français géré par GRTgaz. Elles permettent d'assurer le transport par leurs rôles d'aiguillage et d'action sur la pression du gaz. Leurs limites sont dues aux ouvrages qui les composent. Elles influent sur la capacité du réseau.

A l'intérieur d'une interconnexion, les stations de compression possèdent les conditions les plus limitantes:

- les pressions admissibles à ses extrémités,
- le débit transitant en son sein,
- et la plage de travail possible.

De plus, les stations de compression ne sont pas présentes dans toutes les interconnexions du réseau.

Pour rappel, une configuration d'une station d'interconnexion est la description des ouvrages entre ses pôles, comme l'illustre la Figure II.1. Il faut donc trouver sur l'ensemble du réseau les configurations permettant de transporter le gaz tout en respectant les contraintes de service et de sécurité.

Il y a une combinatoire sous-jacente évidente liée au type d'ouvrage à positionner entre une paire de pôles. Selon les hypothèses précédemment faites, cinq choix sont possibles pour deux pôles  $i$  et  $j$ :

- ne pas relier  $i$  et  $j$ ;
- comprimer le gaz de  $i$  à  $j$ ;
- comprimer le gaz de  $j$  à  $i$ ;
- placer une vanne de  $i$  à  $j$ ;
- placer une vanne de  $j$  à  $i$ .

Il y a environ 300 paires de pôles possibles sur le réseau français, ce qui donne un nombre de combinaisons possible de l'ordre de  $5^{300} \approx 10^{200}$ .

De plus, le nombre de stations de compression par interconnexion est limité. Il est noté pour une station d'interconnexion  $I_n$ ,  $A_{I_n}$ . Ce nombre est le plus souvent égal à 1.

### II.2.1 Modélisation non linéaire en variables binaires

Cette partie concerne la retranscription des effets des interconnexions à l'aide de variables binaires.

#### II.2.1.a Description mathématique

L'ensemble des nœuds d'une interconnexion  $n$  sera noté  $I_n \subset V$ . Les arcs de cette station d'interconnexion seront notés  $E_{I_n}$ . Afin de simplifier le dénombrement, seuls les arcs  $(i, j)$  tel que  $i < j$  seront considérés comme existants:  $E_{I_n} = \{(i, j) \in I_n^2 | i < j\}$ .

Afin de modéliser le choix d'un ouvrage sur un arc  $(i, j)$ , des variables binaires seront employées.

- $b_{0,i,j}$  dans le cas où il n'y a aucun ouvrage entre  $i$  et  $j$ ,
- $b_{1,i,j}$  dans le cas où il y a un compresseur de  $i$  à  $j$ ,
- $b_{2,i,j}$  dans le cas où il y a un compresseur de  $j$  à  $i$ ,
- $b_{3,i,j}$  dans le cas où il y a une vanne de détente de  $i$  à  $j$  et
- $b_{4,i,j}$  dans le cas où il y a une vanne de détente de  $j$  à  $i$ .

Le nombre de compresseurs disponibles sur la station sera notée  $A_{I_n}$ .

Ainsi pour une interconnexion  $I_n$  le système sera:

$$W_{i,j} = \gamma_1 Q_{i,j} \left[ b_{1,i,j} \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - b_{2,i,j} \left( \frac{P_i}{P_j} \right)^{\gamma_2} - 1 \right] \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \quad (\text{II.21})$$

$$b_{3,i,j} (P_i - P_j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \quad (\text{II.22})$$

$$b_{4,i,j} (P_j - P_i) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \quad (\text{II.23})$$

$$b_{1,i,j} \frac{P_j}{P_i} + b_{2,i,j} \frac{P_i}{P_j} \leq \tau_{i,j} \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \quad (\text{II.24})$$

$$b_{0,i,j} + b_{1,i,j} + b_{2,i,j} + b_{3,i,j} + b_{4,i,j} = 1 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \quad (\text{II.25})$$

$$\sum_{(i,j) \in E_{I_n}} (b_{1,i,j} + b_{2,i,j}) \leq A_{I_n} \quad (\text{II.26})$$

Afin de diminuer le nombre de variables binaires, les variables  $b_{0,i,j}$  peuvent être supprimées. En effet si l'équation  $b_{0,i,j} + b_{1,i,j} + b_{2,i,j} + b_{3,i,j} + b_{4,i,j} = 1$  est transformée en  $b_{1,i,j} + b_{2,i,j} + b_{3,i,j} + b_{4,i,j} \leq 1$ . Le cas où  $b_{1,i,j} = b_{2,i,j} = b_{3,i,j} = b_{4,i,j} = 0$  signifie l'absence d'ouvrage entre  $i$  et  $j$ .

Enfin, il est possible de diminuer encore ce nombre de variables binaires en prenant la formulation (II.17) pour les vannes de détente. Cette réduction augmente néanmoins la non linéarité du problème. Les variables  $b_{4,i,j}$  sont alors supprimées et les équations de détente (II.22), (II.23) sont remplacées par:

$$b_{3,i,j} Q_{i,j} (P_i - P_j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n}$$

Le problème de transport de gaz s'écrit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i \quad \forall i \in V \\ P_i^2 - P_j^2 = c_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| \quad \forall (i,j) \in E_p \\ W_{i,j} = \gamma_1 Q_{i,j} \left[ b_{1,i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) - b_{2,i,j} \left( \left( \frac{P_i}{P_j} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \right] \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{3,i,j} Q_{i,j} (P_i - P_j) \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{1,i,j} + b_{2,i,j} + b_{3,i,j} \leq 1 \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{1,i,j} \frac{P_j}{P_i} + b_{2,i,j} \frac{P_i}{P_j} \leq \tau_{i,j} \quad \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ \sum_{(i,j) \in E_{I_n}} (b_{1,i,j} + b_{2,i,j}) \leq A_{I_n} \end{array} \right. \quad (\text{II.27})$$

Cette transformation réduit alors le nombre de configurations possibles à  $3^{300} \approx 10^{150}$ .

Ce modèle d'interconnexion est non linéaire mixte en nombres entiers. On parle également de programme non linéaire en nombres entiers, bien que sans objectif défini. (MINLP, Mixed Integer Non Linear Programming). Par abus de langage et afin d'éviter les dénominations trop longues, ce modèle sera appelé le modèle MINLP d'interconnexion.

## II.2.2 Modélisation non linéaire continue

### II.2.2.a Description du modèle

La modélisation précédente est classique et représente bien le problème. Néanmoins, cette modélisation possède un inconvénient non négligeable: une

bilinéarité entre variables entières et variables continues. Cette dernière complexifie la tâche de résolution numérique.

Pour contourner cette difficulté, une idée venant de l'algorithme de Frank [Frank92], [Grappe09] provenant de la théorie des graphes a été utilisée. Elle est illustrée à l'aide de la Figure II.2. Afin d'augmenter l'arête-connexité avec un nombre minimal d'arêtes, un sommet est rajouté. Pour le différencier de ceux du graphe initial, on le positionne "au-dessus". Des arêtes sont ensuite rajoutées entre ce nouveau sommet et le graphe initial. Puis, par manipulation de ces nouvelles arêtes, le résultat recherché est obtenu.

Dans le cas présent, le nouveau sommet ici va être la station de compression de l'interconnexion. En effet, dans la plupart des cas, le nombre de ces stations est limité à un. Le compresseur va ainsi être considéré comme un nœud placé à un niveau supérieur. Il sera relié à l'aide d'arcs aux pôles de l'interconnexion. Ces nouveaux types d'arcs seront appelés **liens**. L'ensemble des liens sera noté  $E_l$ . Enfin tous les pôles seront reliés entre eux à l'aide de vannes de détente dans les deux sens (II.17).

Si on souhaite se placer dans un modèle équivalent au précédent (II.27), il va donc falloir ajouter des contraintes sur les liens.

### II.2.2.b Description mathématique

Soit  $c_{in}$  et  $c_{out}$  les nœuds amont et aval du compresseur.

Les liens ne doivent pas diminuer la pression du gaz. Ainsi pour un couple de nœuds  $(i, j)$  de l'interconnexion  $I_n$ :

$$Q_{i,c_{in}}(P_i - P_{c_{in}}) = 0 \quad \forall i \in E_{I_n} \quad (\text{II.28})$$

$$Q_{c_{out},j}(P_{c_{out}} - P_j) = 0 \quad \forall j \in E_{I_n} \quad (\text{II.29})$$

$$Q_{i,c_{in}} \geq 0 \quad \forall i \in E_{I_n} \quad (\text{II.30})$$

$$Q_{c_{out},j} \geq 0 \quad \forall j \in E_{I_n} \quad (\text{II.31})$$

Le gaz ne peut pas à la fois relier les deux pôles  $i$  et  $j$  en passant à la fois par le compresseur et par une détente. Si tel était le cas, cela signifierait que la compression est inutile, ce cas de figure est donc interdit.

$$Q_{i,j} \cdot Q_{i,c_{in}} \cdot Q_{c_{out},j} = 0 \quad \forall (i, j) \in I_n^2 \quad (\text{II.32})$$

De plus, on interdit le fait de comprimer le gaz pour le détendre ensuite. On parle alors de *recyclage*. Cela peut se produire afin d'atteindre le débit minimal du compresseur. Autoriser le recyclage revient à supprimer la contrainte de débit minimal sur un compresseur.

$$Q_{i,c_{in}} Q_{c_{out},i} = 0 \quad \forall i \in I_n \quad (\text{II.33})$$

Enfin pour le compresseur se positionnant entre  $c_{in}$  et  $c_{out}$ , le travail de ce dernier s'exprime par

$$W_{c_{in},c_{out}} = \gamma_1 Q_{c_{in},c_{out}} \left( \left( \frac{P_{c_{out}}}{P_{c_{in}}} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \quad (\text{II.34})$$

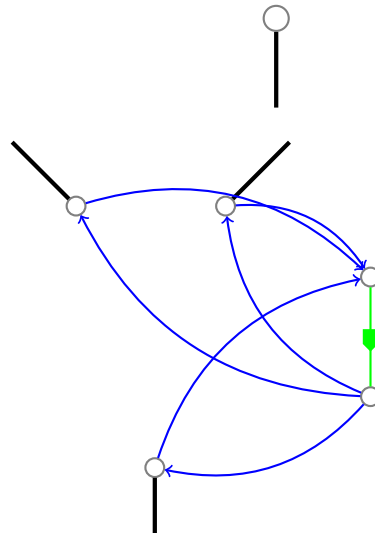
### II.2.2.c Modélisation retenue

Après quelques expérimentations, il est apparu que le grand nombre de contraintes d'égalité pesait sur la résolution. L'ensemble d'équations (II.28),

Etape 1: ajout du compresseur "au-dessus" de l'interconnexion






Etape 2: Ajouts des liens entre le compresseur et les pôles de l'interconnexion



Etape 3: détente entre chaque paire de pôles

Légende

-  Détente bidirectionnelle (II.17)
-  Compresseur (II.18)
-  Lien (II.37)

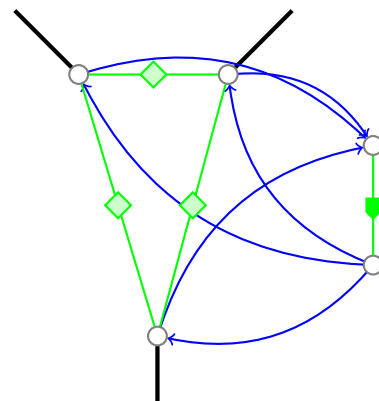


Figure II.2: Exemple de construction d'interconnexion modélisée de façon non linéaire

(II.29) a été remplacé par:

$$Q_{i,c_{in}}(P_i - P_{c_{in}}) \geq 0 \forall i \in E_{I_n} \quad (\text{II.35})$$

$$Q_{c_{out},j}(P_{c_{out}} - P_j) \geq 0 \forall j \in E_{I_n} \quad (\text{II.36})$$

$$(\text{II.37})$$

Le recyclage du gaz est également autorisé. On obtient alors:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i & \forall i \in V \\ P_i^2 - P_j^2 = c_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \\ Q_{i,c_{in}}(P_i - P_{c_{in}}) \geq 0 & \forall i \in E_{I_n} : \forall I_n \\ Q_{c_{out},j}(P_{c_{out}} - P_j) \geq 0 & \forall i \in E_{I_n} : \forall I_n \\ Q_{i,c_{in}} \geq 0 & \forall i \in E_{I_n} : \forall I_n \\ Q_{c_{out},j} \geq 0 & \forall i \in E_{I_n} : \forall I_n \\ W_{c_{in},c_{out}} = \gamma_1 Q_{c_{in},c_{out}} \left( \left( \frac{P_{c_{out}}}{P_{c_{in}}} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i,j) \in E_c \\ 1 \leq \frac{P_{c_{out}}}{P_{c_{in}}} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \end{array} \right. \quad (\text{II.38})$$

Le modèle ainsi décrit est un modèle non linéaire continu. Il sera employé le terme de modèle NLP d'interconnexion (Non Linear Programming).



## II.3 Propriétés mathématiques du modèle de transport de gaz

Différents critères sur la difficulté mathématique d'un problème de transport de gaz sont présentés ici. L'étude de la non convexité est faite. Le cadre est alors celui d'un problème mathématique non linéaire et non convexe.

A cela est ajouté une première étude des différences de modélisation des stations d'interconnexion. Les deux modèles précédents (II.38) et (II.27) sont proches mais pas mathématiquement équivalents.

### II.3.1 Non linéarité

La non linéarité du problème est assez évidente. En effet, entre la perte de charge (II.12),(II.13), le travail du compresseur (II.18) et l'expression de la détente du gaz (II.17), plusieurs phénomènes sont modélisés de façon non linéaire.

### II.3.2 Etude de la convexité du problème

#### II.3.2.a Convexité de la perte de charge

En se plaçant dans le cas où le coefficient  $c_{i,j}$  est constant.

*Démonstration.* L'équation de perte de charge de façon à étudier sa convexité étant posée, le hessien  $H$  associé à la perte de charge s'écrit alors:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_{i,j} \text{signe}(Q_{i,j}) \end{bmatrix}$$

La matrice du hessien est une matrice diagonale de valeurs propres:  $2, -2, -2c_{i,j} \text{signe}(Q_{i,j})$ . Il y a une valeur propre positive et une autre négative, la fonction n'est ni convexe ni concave.  $\square$

#### II.3.2.b Convexité du travail d'un compresseur

*Démonstration.* L'expression du travail décrite dans (II.18) est non linéaire.

Soit  $f(Q_{i,j}, P_i, P_j) = \gamma_1 Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right)$ .

Le hessien  $H$  associé s'écrit:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{P_j^{\gamma_2}}{P_i^{\gamma_2+1}} \right) & \gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{P_j^{\gamma_2-1}}{P_i^{\gamma_2}} \right) \\ -\gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{P_j^{\gamma_2}}{P_i^{\gamma_2+1}} \right) & \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 + 1) Q_{i,j} \left( \frac{P_j^{\gamma_2}}{P_i^{\gamma_2+2}} \right) & -\gamma_1 \gamma_2^2 Q_{i,j} \left( \frac{P_j^{\gamma_2-1}}{P_i^{\gamma_2+1}} \right) \\ \gamma_1 \gamma_2 \left( \frac{P_j^{\gamma_2-1}}{P_i^{\gamma_2}} \right) & -\gamma_1 \gamma_2^2 Q_{i,j} \left( \frac{P_j^{\gamma_2-1}}{P_i^{\gamma_2+1}} \right) & \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - 1) Q_{i,j} \left( \frac{P_j^{\gamma_2-2}}{P_i^{\gamma_2}} \right) \end{bmatrix}$$

Posons  $\alpha = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \frac{P_j^{\gamma_2-2}}{P_i^{\gamma_2}} > 0$ , ce hessien se factorise alors en:

$$H = \alpha \begin{bmatrix} 0 & -\frac{P_j^2}{P_i} & P_j \\ -\frac{P_j^2}{P_i} & (\gamma_2 + 1) Q_{i,j} \frac{P_j^2}{P_i^2} & -\gamma_2 Q_{i,j} \frac{P_j}{P_i} \\ P_j & -\gamma_2 Q_{i,j} \frac{P_j}{P_i} & (\gamma_2 - 1) Q_{i,j} \end{bmatrix}$$

Le calcul du polynôme caractéristique permet de calculer ses valeurs propres.

$$\det(H - xI_3) = \begin{vmatrix} -x & -\frac{P_j^2}{P_i} & P_j \\ -\frac{P_j^2}{P_i} & (\gamma_2 + 1)Q_{i,j}\frac{P_j^2}{P_i^2} - x & -\gamma_2 Q_{i,j}\frac{P_j}{P_i} \\ P_j & -\gamma_2 Q_{i,j}\frac{P_j}{P_i} & (\gamma_2 - 1)Q_{i,j} - x \end{vmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est:

$$x \left( x^2 + \frac{-P_j^2\gamma_2 Q_{i,j} - P_j^2 Q_{i,j} - P_i^2\gamma_2 Q_{i,j} + P_i^2 Q_{i,j}}{P_i^2} x + \frac{-(P_j^4) - P_j^2 P_i^2 - P_j^2 Q_{i,j}^2}{P_i^2} \right)$$

0 est valeur propre évidente. Les deux autres valeurs propres sont les racines du binôme suivant:

$$x^2 + \frac{-P_j^2\gamma_2 Q_{i,j} - P_j^2 Q_{i,j} - P_i^2\gamma_2 Q_{i,j} + P_i^2 Q_{i,j}}{P_i^2} x + \frac{-(P_j^4) - P_j^2 P_i^2 - P_j^2 Q_{i,j}^2}{P_i^2}$$

Le produit des racines  $\frac{-(P_j^4) - P_j^2 P_i^2 - P_j^2 Q_{i,j}^2}{P_i^2}$  est strictement négatif. Les deux racines sont de signes différents, la fonction n'est donc ni convexe ni concave.  $\square$

### II.3.3 Comparaison des modèles d'interconnexion

Cette partie traite de l'équivalence entre les deux modèles de station d'interconnexion (II.38) et (II.27). Ces deux modélisations ne sont pas rigoureusement identiques, comme cela est illustré dans ce paragraphe.

D'une part, la formulation NLP de l'interconnexion permet par exemple le recyclage du gaz ce que n'autorise pas la formulation classique MINLP. D'autre part, l'espace des solutions dans le cas NLP est plus grand que celui du MINLP.

#### II.3.3.a Non équivalence des modèles

En se plaçant dans le cas simple d'une station d'interconnexion à 2 pôles: la quantité de gaz transitant dans cette station est notée  $Q_0$ . Le compresseur présent dans cette station requiert un débit minimal de  $1,5Q_0$ . Dans le cas où l'on doit comprimer le gaz, si on place le compresseur entre les 2 pôles, la contrainte de débit minimal ne peut pas être respectée. Néanmoins, avec la modélisation non linéaire, il est possible de respecter toutes les contraintes, comme l'illustre la Figure II.3.

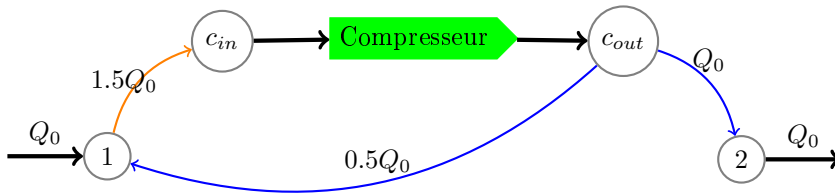


Figure II.3: Cas permis par la modélisation non linéaire mais pas par la modélisation en variables binaires

On résout un cas avec la modélisation non linéaire que le modèle classique ne peut pas résoudre. L'utilisation d'une partie du gaz en sortie du compresseur afin d'atteindre le débit minimum du compresseur est appelé **recyclage**.

### II.3.3.b Recyclage du modèle non linéaire

Si la quantité de gaz  $Q_1$  telle que  $Q_0 + Q_1$  sature le compresseur, en raison du débit ou du travail maximum atteint, alors  $\forall \epsilon \in [0, Q_1]$ , il est possible de trouver un débit  $1,5Q_0 + \epsilon$  sur le circuit entre 1 et  $c_{out}$  Figure II.4.

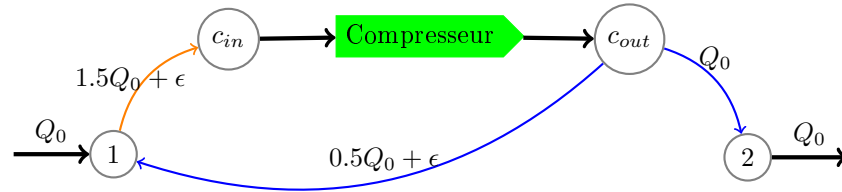


Figure II.4: Cas de boucle de gaz donnant une infinité de solutions

Dans le cas NLP, le recyclage est alors toujours possible. Par contre, dans le modèle MINLP, il n'est possible que s'il y a un ou plusieurs pôles où ne transite pas le gaz car leur pression n'est pas contrainte.

## Conclusion

Dans ce chapitre, une modélisation des quatre principaux phénomènes du transport de gaz a été présentée:

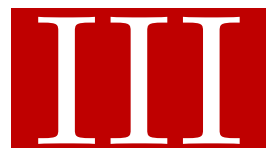
- le bilan de matière,
- la perte de charge,
- la détente du gaz,
- la compression du gaz.

Les différentes contraintes de ce type de problème ont été explicitées. Il a été montré que certaines de ces contraintes sont non linéaires et non convexes. Le problème ainsi formulé est un problème non linéaire et non convexe. A l'heure actuelle, les différents solveurs affichent de bonnes performances sur ce type de problème. Par rapport aux solveurs linéaires, ces dernières sont néanmoins moindres. Ceci amènera plusieurs méthodes de résolution dans le chapitre suivant.

Les stations d'interconnexions ont été modélisées. Elles sont les différents leviers que possèdent l'opérateur pour gérer son réseau. Deux modèles pour les décrire ont été également proposées. Il n'y a pas d'équivalence stricte entre ces modèles.

Ces stations ajoutent une difficulté supplémentaire à un problème classique de transport de gaz, soit en terme de taille de problème ou en terme de présence de variables entières. Cependant, cette vision n'est pas unique et elle sera discutée dans le chapitre [IV](#) à l'aide de résultats sur des instances de tests avec peu d'ouvrages.

Etude des méthodes de  
résolution



## Résumé

---

Ce chapitre présente les outils de résolution utilisés dans le cadre de cette thèse.

Plusieurs solveurs non linéaires continus ou mixtes en nombres entiers sont évoqués. Les différentes méthodes qu'ils implémentent sont décrites.

Une méthode de résolution basée sur des relaxations du problème complet est détaillée, ainsi qu'une discussion sur ses points clés.

---

## Introduction

Comme vu précédemment, le modèle du problème de transport de gaz est non linéaire et non convexe en [II.3](#). La prise en compte d'une fonction objectif qualifie le transport de gaz comme un problème d'optimisation. Le problème d'optimisation peut être alors non linéaire (Non Linear Programming) ou non linéaire mixte en nombres entiers (Mixed Integers Non Linear Programming) en fonction du modèle d'interconnexion choisi.

Deux optiques ont été retenues pour la résolution de ce type de modèle.

La première est l'utilisation de différents solveurs appropriés, qui semble une approche raisonnable. Une présentation concise des différents logiciels retenus est faite.

La seconde est de réfléchir en termes de représentations des phénomènes physiques modélisés. On construit alors une heuristique de résolution s'appuyant sur une compréhension globale du problème. En plus des différents solveurs, une méthode de résolution basée sur une suite de relaxations a également été employée. Son principe, sa description et sa mise en œuvre sont présentés.

## III.1 Outils de résolution

Cette partie présente les solveurs d'optimisation retenus pour résoudre le problème mathématique du transport de gaz.

### III.1.1 Présentation de différentes possibilités

Différents types de problèmes mathématiques peuvent être résolus grâce à des solveurs:

- un système d'équations différentielles,
- un système d'équation algébriques,
- un problème d'optimisation.

Dans le cadre du transport de gaz, deux approches peuvent être employées afin de déterminer numériquement l'état du système: la simulation numérique ou l'optimisation. La simulation se place plutôt dans la prédiction de l'état alors que l'optimisation permet de déterminer quelles décisions prendre afin d'atteindre un état défini. La simulation s'utilise souvent dans le cas d'équations aux dérivées partielles, car ces dernières ne sont pas explicites. Dans le cadre de cette étude, l'objectif est de trouver un itinéraire pour le gaz satisfaisant les contraintes. L'utilisation d'outil d'optimisation se justifie dès lors.

Les phénomènes physiques représentés en (II.20) sont modélisés par des équations non linéaires. En fonction de la modélisation des interconnexions, le problème peut se poser comme

- un problème non linéaire continu (NLP) ou
- un problème non linéaire en nombres entiers (MINLP).

Pour résoudre ces deux types de problèmes plusieurs approches peuvent être envisagées:

- utiliser des techniques de linéarisation et tirer parti de leur efficacité notamment sur le caractère intégral du problème,
- utiliser des métaheuristiques,
- utiliser des solveurs dédiés.

#### *Linéarisation*

Deux techniques de linéarisation sont souvent utilisées pour résoudre un problème d'optimisation.

- la linéarisation par morceaux [**Fourer92**], [**Guder96**] (Piecewise Linear Programming) qui consiste à approcher les fonctions non linéaires par des fonctions linéaires par morceaux. Ces fonctions linéaires sont redécoupées au fur à mesure des itérations pour améliorer l'approximation. Ainsi, la solution trouvée par le problème linéarisé est proche d'une solution du problème non linéaire.
- La linéarisation successive [**Himmelblau72**], [**Vanderplaats84**] (Successive Linear Programming, que l'on trouve également dans la littérature sous le nom Sequential Linear Programming) approche les fonctions non linéaires par des fonctions linéaires. Afin de s'assurer de la validité de cette approximation, des limites glissantes ainsi que des variables de dérive sont ajoutées afin de trouver une solution au problème original.

Ces méthodes n'ont pas donné de bons résultats lors de tests préliminaires. La non-convexité du problème peut être mise en cause.



### *Méta-heuristiques*

Les méta-heuristiques sont souvent étudiées dans le cadre de l'optimisation combinatoire [Dréo05]. Elles l'ont été également dans le domaine de l'étude des réseaux [Donoso07]. Les plus connues sont les algorithmes génétiques, le recuit simulé, la recherche taboue, les colonies de fourmis et les essais particuliers.

L'implémentation de méta-heuristiques peut présenter plusieurs difficultés:

- des difficultés de codage,
- le nombre importants de contraintes dans le cas d'un problème de transport de gaz,
- et enfin dans le cas présent, la nécessité de la combiner à un outil d'optimisation ou de simulation non linéaire.

### *Solveurs*

Enfin plusieurs solveurs sont disponibles. Ils cherchent à résoudre un problème mathématique de la forme:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c} & \{g(x) \leq 0 \end{array}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ . Plusieurs méthodes ont été développées en fonction des particularités de  $f, g$ , linéaires, non linéaires, quadratiques, convexes, etc. et de l'ensemble des valeurs prises par  $x$ : continues, entières ou mixtes. Très rapidement, les premiers tests se sont révélés très intéressants dans le cas du problème de transport de gaz. C'est ainsi que le choix s'est porté sur les solveurs qui sont présentés dans la suite de ce chapitre.

#### III.1.2 Modeleur

Afin de pouvoir utiliser le plus grand nombre de solveurs de façon la plus transparente possible, un modeleur a été employé. Le rôle du modeleur est de convertir un problème mathématique au format utilisé par les solveurs.

Plusieurs modeleurs existent sur le marché et qui permettent d'utiliser des solveurs MINLP et NLP: AMPL [Fourer90], AIMMS [Roelofs10], [Kallrath04] et GAMS [Brooke88]. Il est ainsi possible de comparer différents solveurs de façon transparente. Lors de travaux précédents sur les réseaux de transport de gaz [Tabkhi07], s'est porté sur l'environnement de modélisation GAMS, qui est un standard en Génie des Procédés. Ce dernier est toujours en activité, possède de nombreuses mises à jour et propose un large éventail de solveurs à disposition. Il permet de traiter des problèmes de grandes tailles et de différents types: linéaires, non linéaires, etc, ...

Deux points techniques ont cependant été soulevés pendant les expérimentations. Le premier concerne l'initialisation des variables. Il est important de connaître un bon point d'initialisation, notamment pour les problèmes non linéaires. D'après la documentation de GAMS [Brooke88], elle se fait par la borne inférieure de la variable ou 0 dans le cas de variables non bornées. Le second aborde la mise à l'échelle des variables et des équations. GAMS le fait de façon automatique mais encourage à le faire manuellement de façon à augmenter les performances.

La version de GAMS retenue est la 23.3.

### III.1.3 Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires (NLP)

Dans le cas de problèmes non linéaires, plusieurs méthodes de résolution peuvent être employées. La plus répandue est celle des points intérieurs [Wright05], appelée également méthode des barrières. Elle provient de l'algorithme de Karmarkar [Karmarkar84]. L'idée est d'améliorer la valeur de la fonction objectif tout en essayant de s'éloigner des frontières du domaine de faisabilité.

Une autre méthode consiste à utiliser la programmation séquentielle quadratique (SQP) [Bonnans06]. Cette dernière remplace le problème global non linéaire par une suite de sous-problèmes quadratiques.

Plusieurs solveurs existent pour ces deux types de problèmes. Afin de s'assurer de choisir le meilleur modèle, il est intéressant de regarder les différents solveurs proposés. Le benchmark proposé par GAMS [GAM09] permet de retenir Ipopt, Snopt et Conopt. Ce dernier a entre temps été renouvelé par [GAM11] de façon postérieure à cette étude mais ne désavoue pas le choix effectué.

Afin de ne pas entrer dans une étude des paramètres des différents solveurs, il a été décidé de les choisir par défaut.

### III.1.4 Résolution de problèmes d'optimisation non linéaires en nombres entiers (MINLP)

La résolution d'un MINLP se base sur la résolution d'un problème NLP d'un côté et d'un problème en nombres entiers de l'autre. [Grossmann02] propose une revue intéressante des différentes techniques de résolution d'un MINLP.

- Le Branch and Bound (B&B) qui consiste à fixer des variables entières et évaluer si cela mène à une infaisabilité.
- Les approximations extérieures, Outer Approximations (OA) [Grossmann86] qui consiste à approcher le problème par ses tangentes.
- Extended Cutting Plane (ECP) [Westerlund95] est une extension de l'algorithme de Kelley [Kelley Jr.60] pour les problèmes non linéaires convexes; il ajoute une linéarisation de la contrainte la plus transgressée.

Le benchmark [GAM08] nous a permis de sélectionner trois solveurs: Bonmin, Dicopt et SBB.

### III.1.5 Solveurs non linéaires

Les solveurs choisis ici présentent de bons résultats d'après l'évaluation faite [GAM09], près de 90% d'efficacité.

#### III.1.5.a Ipopt

Ipopt fait également partie du projet COIN-OR [COI].

Les méthodes de points intérieurs ont subi de grandes améliorations depuis les 20 dernières années [Forsgren02], notamment en terme de convergence et d'efficacité. Fletcher dans [Fletcher02] propose des méthodes de filtres. L'idée sous-jacente est d'accepter des points dans le cas où la fonction objective est meilleure ou lorsque que la violation de contraintes est réduite.

Ipopt implémente ces deux idées tout en ajoutant une considération primale-duale pour la méthode de points intérieurs. En outre, il obtient de très bonnes

performances en terme de résolution et fait l'objet de développements continus depuis sa création.

#### III.1.5.b Conopt

Avant d'opérer une optimisation, Conopt [Drud92] pré-traite le modèle à l'aide de techniques de substitution de variables. La taille du problème s'en trouve alors réduite. Il suit une mise à l'échelle des contraintes.

La résolution du problème s'effectue alors en deux étapes:

- certaines variables sont fixées et le système résultant est résolu à l'aide d'une méthode de descente de Newton et
- une méthode de Gradient Réduit Généralisé (GRG) cherche à minimiser la somme des variables d'écart introduites dans les contraintes non satisfaites.

Ce solveur a déjà été utilisé dans [Tabkhi09] pour résoudre des problèmes similaires.

#### III.1.5.c Snopt

Snopt (Sparse Nonlinear Optimizer) [Gill02] développe une méthode d'optimisation séquentielle quadratique (SQP) afin de résoudre un problème contraint.

Dans le cas de problèmes non linéaires, Snopt approche le lagrangien du Hessien à l'aide d'un quasi Newton. La fonction de contrôle du pas s'appuie sur un lagrangien augmenté.

Snopt est intégré dans une boîte à outils de résolution Matlab [Mathworks11]. Il a déjà été utilisé lors d'études internes du projet MAIA.

### III.1.6 Solveurs non linéaires en nombres entiers

Plusieurs solveurs sont disponibles pour résoudre des problèmes non linéaires en nombres entiers et plus particulièrement en variables binaires. Le plus souvent, la stratégie employée par ces solveurs est de relâcher le caractère entier de variables et d'essayer de trouver ensuite une solution entière. Les premiers articles spécifiques sur le sujet MINLP sont assez anciens [Gupta85], [Grossmann86] [Yuan88]. Les premiers développements proviennent de problématiques issues du génie des procédés [Kocersandi89], [Floudas88],[Kocis87].

Parmi les différents solveurs disponibles, le choix s'est restreint à quelques solveurs aux performances intéressantes d'après [GAM08]. Ils présentent entre 80 et 90% d'efficacité de résolution.

#### III.1.6.a Bonmin

Bonmin [Bonami05] est un solveur du projet COIN-OR [COI].

Il propose différents algorithmes de résolution de MINLP. Par défaut, il résout le problème en utilisant un algorithme de Branch and Bound. Il implémente aussi les approximation extérieures [Grossmann86], un Branch and Cut [Quesada92] et un algorithme hybride d'approximations extérieures.

Ce solveur propose une résolution de problèmes convexes. Cependant, dans le cas non convexe, il se pose uniquement en heuristique.

Comme une majeure partie des projets de COIN-OR, il est régulièrement maintenu.

#### III.1.6.b Dicopt

Dicopt a été développé à partir des travaux de Grossmann, Duran [Grossmann86] et Kocis [Kocis89]. Il est basé sur l'implémentation des approximations extérieures (Outer Approximation). Il implémente une association entre la résolution d'un problème non linéaire continu et un problème linéaire mixte.

#### III.1.6.c SBB

SBB (Simple Branch and Bound) [SBB] est une implémentation simple d'un algorithme Branch and Bound. Il cherche à résoudre le problème en considérant les variables entières comme continues. A partir de cette solution, une procédure de Branch and Bound est effectuée pour trouver une solution entière.

#### III.1.6.d Choix d'un solveur non linéaire

Ces deux derniers solveurs nécessitent l'utilisation d'un solveur non linéaire. Il a été décidé d'utiliser Conopt comme solveur non linéaire pour SBB et Dicopt, comme l'utilise [Tabkhi09] dans ses travaux. En effet, le prétraitement de Conopt est alors d'autant plus efficace dans les méthodes de Branch and Bound où les variables entières sont fixées.

### III.1.7 Solveurs non retenus

#### III.1.7.a Couenne

Le solveur Couenne [Belotti09] a été testé. Les idées intrinsèques à ce solveur sont intéressantes: spatial Branch and Bound, Bound Tightening, Reformulation and Linearization. Cependant, pour le problème de transport de gaz, les performances ne sont pas bonnes. Il n'a donc pas été retenu dans la catégorie des solveurs.

#### III.1.7.b Knitro

Knitro [Byrd99], [Waltz03] implémente trois algorithmes afin de couvrir le plus grand nombre de problèmes non linéaires. Il comporte plusieurs algorithmes: points intérieurs, un calcul de gradient conjugué afin de résoudre des sous-problèmes de KKT et enfin un algorithme d'ensembles actifs (active set)[Nocedal06]. Il s'est avéré que l'interfaçage avec la version retenue du modèleur GAMS n'était pas des plus performants pour le type de problème étudié et il n'a donc pas été retenu.

### III.1.8 Conclusion

Pour résoudre des problèmes non linéaires ou non linéaires en nombres entiers, plusieurs méthodes ont été développées et implémentées en solveurs. Il n'est pas possible de prévoir leur efficacité *a priori* sur le problème mathématique du transport de gaz. Ils seront mis en concurrence lors de l'étude de la meilleure formulation sur des petites instances au chapitre IV.

## III.2 Suite de relaxations

Cette partie présente la méthode employée pour résoudre des instances réelles du problème de transport de gaz. Pour cela, il a été développé une méthode de résolution par relaxations du problème global, afin de pouvoir traiter toutes les instances réelles. La résolution brute ne fonctionnait pas dans tous les cas. L'idée est de générer des sous-problèmes en ajoutant des séries de contraintes. L'initialisation de chaque sous-problème se fait à l'aide de la solution précédente.

- Plusieurs paramètres nécessitent une attention particulière
- le choix et l'ordre des contraintes à ajouter,
  - et le choix des fonctions objectifs des sous-problèmes.

### III.2.1 Présentation

Soit le problème suivant  $(P)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}, f, g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} g_1(x) \leq 0 \\ g_2(x) \leq 0 \\ \dots \\ g_m(x) \leq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (P)$$

Aucune hypothèse particulière n'est faite sur les fonctions  $f, g_1, \dots, g_m$ .

Soit un entier  $p \leq m$ , une suite strictement croissante d'ensembles non vides  $J_i, i = 1, \dots, p$ , tel que  $J_i \subset [1; m]$  et  $J_p = [1; m]$ . A ces ensembles, on va associer un ensemble de fonctions  $f_i$ , tel que  $f_p = f$  et une suite de sous-problèmes  $(SP_i)$  tel que:

$$\begin{aligned} \min_x f_i(x) \\ \text{s.c.} \{ g_j(x) \leq 0 \quad \forall j \in J_i \end{aligned} \quad (SP_i)$$

Soit  $x_i^*$  une solution du problème  $(SP_i)$ .  $x_i^*$  sert d'initialisation à  $(SP_{i+1})$ . Par définition  $(SP_p) = (P)$  et que pour  $i \leq p$ ,  $x_i^*$  vérifie les contraintes de  $SP_j, j \leq i$ .

Le fait de construire une suite de relaxations est semblable à une décomposition de type Cutting Planes [[Avriel03](#)].

### III.2.2 Problématique

Chaque solution  $x_i^*$  vérifie une partie  $J_i$  des contraintes du problème global. Ainsi dans le cas où tous les  $(SP_i)$  ont une solution faisable, cette approche renvoie une solution de  $(P)$ . Il est possible d'influer sur la rapidité d'exécution et la qualité de la solution en jouant sur les paramètres suivants:

- la suite de sous-ensembles  $J_i$  à considérer,
- et la suite de fonctions objectifs à choisir.

Ils sont d'autant plus importants pour les problèmes pour lesquels aucune méthode de résolution simple n'est connue, ce qui est le cas de la vérification de transport de gaz.

### III.2.3 Ordre des contraintes ajoutées

L'ordre d'ajout des contraintes a un rôle considérable sur la convergence de l'approche présentée ci-dessus. En particulier, les aspects suivants sont à prendre en compte:

- les contraintes des phénomènes physiques représentatives
- et les contraintes mathématiquement difficiles (non convexité, non linéarité, etc. ).

De plus, il convient de déterminer un nombre raisonnable de contraintes à chaque sous-problème.

En ce qui concerne la vérification de capacité de transport de gaz, deux approches ont été retenues. La première consiste à intégrer les contraintes par type de phénomènes physiques. La seconde considère toutes les contraintes d'une partie géographique du problème puis étend la taille concernée au cours des itérations.

#### III.2.3.a Ajout par type de contraintes

L'objectif est de faire croître progressivement la difficulté des sous-problèmes à résoudre en plaçant les phénomènes physiques au cœur de la résolution. Les plus caractéristiques sont pris en compte dès les premiers sous-problèmes, typiquement le bilan de matière et la perte de charge. Sans prendre en compte le bilan de matière et la perte de charge, le problème n'a aucun sens réel et, *a priori*, la résolution a peu de chance de fournir des résultats significatifs.

Certains critères posent problème aux solveurs comme la non linéarité ou la non convexité. Il a été souhaité de résoudre un nombre restreint de sous-problèmes contenant de telles contraintes et donc il a été décidé de les intégrer le plus tard possible. D'autres tests ont validé ce choix.

#### III.2.3.b Ajout des contraintes en fonction de leur localisation

Une autre idée serait de ne considérer qu'une partie du problème mais avec toutes les contraintes, puis d'agrandir la taille de chaque sous-problème.

Une façon visuelle de le comprendre dans ce cas d'étude est de considérer qu'une partie du réseau contrainte. Le reste n'a pas de contraintes. Au cours des itérations, la partie du réseau contrainte s'étend jusqu'à recouvrir le réseau global.

#### III.2.3.c Choix

Ces approches sont deux types de relaxations. Dans ce cadre de résolution de transport de gaz et après plusieurs tests, la première approche a été retenue. D'une part, elle semble cohérente selon les différents critères exprimés plus loin. D'autre part, la seconde aborde un problème complexe à savoir quels sous-espaces retenir. Dans le cas d'un réseau, cela revient à n'en considérer qu'une partie et donc, beaucoup d'extensions sont possibles. Aucun critère n'est apparu clair afin de guider cette recherche.

### III.2.4 Objectif des sous-problèmes

L'autre question porte sur le choix des  $f_i$ . La fonction objectif  $f_i$  d'un sous-problème ( $SP_i$ ) est la direction de recherche du solveur. Cet axe peut ainsi être

utilisé pour réduire les itérations des solveurs et ainsi réduire le temps de calcul. Il permet également d'améliorer la qualité de la solution trouvée à l'issue de tous les sous-problèmes.

Plusieurs idées ont été étudiées au cours de ce travail.

- simplifier la résolution du sous-problème  $(SP_{i+1})$  à l'aide de l'objectif  $f_i$ ,
- orienter les sous-problèmes dans une direction qui a un sens pour le problème global.

En effet, les sous-problèmes  $(SP_i)$  n'ont pas de sens physique, car ils ne décrivent qu'une partie du phénomène global.

#### III.2.4.a Objectif identique à tous les sous-problèmes

La première idée est de choisir la même fonction objectif  $f_i$  pour toutes les sous-problèmes  $(SP_i)$ .

##### *Fonctions objectifs identiques à celle du problème*

Un choix simple est de prendre l'objectif du problème global  $f_i = f, \forall i \in [1; p]$ . Il faut faire cependant attention à ce que  $f$  ait un sens pour tous les sous-problèmes.

Par exemple dans le problème suivant III.1, la fonction objectif n'a aucun sens car le travail des compresseurs n'est pas encore défini:

$$\begin{aligned} \min \sum_{A_c} W_{i,j} \\ \text{s.c.} \left\{ \sum_j Q_{i,j} = s_i \quad \forall I \in V \right. \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Donc si on choisit pour tous les sous-problèmes, la même fonction objectif que le problème  $(P)$ , il faut que celle-ci ait un impact sur la résolution.

Dans le cas de vérification de capacité il n'y a pas *stricto sensus* d'objectif à optimiser. A partir des remarques précédentes, le bilan de matière et la perte de charge sont primordiaux et l'objectif commun à tous les sous-problèmes ne fera intervenir que le débit et la pression du gaz.

Ainsi, plusieurs possibilités ont été retenues:

- maximiser les pressions sur le réseau  $\max \sum_i P_i$ ,
- relâcher l'approvisionnement  $s_i$  en une variable  $S_i$  et minimiser l'écart entre la valeur de consigne et la valeur obtenue à l'issue de l'optimisation par le solveur  $\min \sum_i (s_i - S_i)^2$ ,

#### III.2.4.b Un objectif différent pour les sous-problèmes

Une autre approche est de choisir une fonction objectif en fonction de chaque sous-problème afin d'anticiper les futures contraintes.

##### *Intégration des futures contraintes*

L'idée est d'anticiper les contraintes supplémentaires de  $(SP_{i+1})$  dans l'objectif de  $(SP_i)$ . Ainsi la solution trouvée serait proche de l'espace de faisabilité de  $(SP_{i+1})$ . Formellement si on reprend les notations précédentes, le problème  $(SP_i)$  s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \min_x \sum_{j \in J_{i+1}/J_i} g_j(x) \\ \text{s.c.} \left\{ g_i(x) \leq 0 \quad \forall i \in J_i \right. \end{aligned} \quad (SP_i)$$

En pratique, la fonction objectif est dépendante des contraintes ajoutées. De plus, le cas où l'un des  $g_j$  a une valeur négative prépondérante par rapport aux autres peut conduire vers une région non faisable. Elle ne s'est pas révélée efficace lors de premiers résultats.

#### *Utilisation des conditions d'optimalité de Karush-Kuhn-Tucker*

Une autre idée serait d'utiliser des conditions de Karush-Kuhn-Tucker afin de s'assurer que les contraintes futures soient vérifiées à l'optimum. Cela a déjà été fait dans le cas du transport de gaz [Wolf00]. Ce calcul est repris p.61. En effet, lors du calcul d'un premier sous-problème, De Wolf utilise les multiplicateurs de Lagrange ainsi que la dérivée de la fonction objectif afin d'obtenir des valeurs pour les pressions respectant la contrainte de perte de charge.

Cette idée est mathématiquement très intéressante. En effet, à l'aide des multiplicateurs de Lagrange et de sa dérivée, la fonction objectif doit annuler toutes les dérivées des précédentes contraintes tout en rajoutant les nouvelles contraintes. Ainsi, il est apparu que la fonction objectif devenait, au fil des sous-problèmes, difficile à évaluer et donc compliquait la tâche des solveurs.

### III.2.5 Application au problème de transport de gaz

A partir des précédentes idées et de résultats préliminaires, plusieurs choix pour la vérification de capacité d'un réseau de transport de gaz ont été effectués.

#### III.2.5.a Ordre de l'ajout des contraintes

Tout d'abord, le problème a été résolu à l'aide de 6 sous-problèmes dans cet ordre:

1. le bilan de matière aux nœuds du réseau,
2. la perte de charge dans les canalisations,
3. le taux de compression admissible
4. la détente du gaz dans les vannes,
5. la détente du gaz dans les liens,
6. et le travail des compresseurs.

#### III.2.5.b Fonctions objectifs

Dans le cas du transport de gaz, plusieurs objectifs peuvent être pris en compte.

##### *Minimisation de l'écart sur l'approvisionnement*

Dans ce cadre, nous allons relâcher le paramètre d'entrée  $s_i$  en variable  $S_i$ , comme présenté p.19. L'objectif décrit ici est de minimiser l'écart entre la valeur de variable d'approvisionnement par rapport à sa valeur nominale.

$$\min \sum_{i \in V | s_i > 0} (s_i - S_i)^2 \quad (\text{III.2})$$

Cet objectif possède plusieurs avantages. Premièrement, la valeur de la fonction objectif permet de renseigner directement sur la solution. En effet, si l'objectif vaut 0, la solution trouvée satisfait toutes les contraintes. Deuxièmement,



dans le cas où la valeur du critère n'est pas 0, elle permet de cibler directement les points d'approvisionnement à modifier pour respecter les engagements de transports. Enfin, ce critère est convexe.

#### *Maximisation des pressions*

Le logiciel de référence Bambou [I.2.2](#) résout le problème de transport de gaz avec interconnexions fixées. Le régime maximal qu'il cherche à atteindre correspond à la maximisation des pressions sur l'ensemble du réseau, car c'est un outil d'aide à l'exploitation. L'étude de cette fonction objectif permet de comparer avec l'existant et d'en évaluer l'écart.

$$\max \sum_{i \in V} P_i \quad (\text{III.3})$$

#### *Minimisation du travail*

Ce critère a pour but de minimiser le travail fourni par les compresseurs sur l'ensemble du réseau, soit:

$$\min \sum_{(i,j) \in A_c} W_{i,j} \quad (\text{III.4})$$

Une justification provient des études précédemment faites sur les réseaux de gaz. En effet, dans [\[Tabkhi07\]](#), ce critère est utilisé afin d'optimiser le transport de gaz. Les compresseurs sont énergivores et peuvent être alimentés soit par de l'électricité soit par le gaz qui transite. Une autre justification provient de la nature du réseau. Comme dit précédemment, les compresseurs sont les ouvrages dimensionnant des interconnexions et donc ceux du réseau. Chercher à minimiser le travail revient à essayer de s'éloigner des limites du problème et donc augmente les chances de converger vers une solution faisable.

Le choix de cette fonction objectif demande donc de trouver une fonction objectif pour les sous-problèmes. C'est la fonction [\(III.5\)](#) qui a été retenue:

$$\min \sum_{i \in V} P_i \quad (\text{III.5})$$

Cette direction de recherche est cohérente avec la volonté de minimiser l'utilisation des compresseurs.

#### III.2.5.c Choix d'une fonction objectif

Concernant les fonctions objectifs considérées, les tests préliminaires n'ont pas fait apparaître de dominante. Il a été décidé de les mettre en concurrence afin de chercher celle donnant le plus de résultats positifs. Cette mise en concurrence est ainsi évaluée et discutée lors de tests sur des réseaux de taille moyenne ainsi que sur des instances réelles dans le chapitre suivant [IV p.49](#).

## Conclusion

Dans cette partie nous avons présenté différents solveurs, outils de résolution, de problèmes non linéaires (NLP) ou non linéaires en nombres entiers (MINLP). Une méthode de résolution basée sur une suite de relaxations a également été décrite.

Les solveurs sont multiples et n'implémentent pas la même idée pour résoudre un problème identique. Cependant des idées communes demeurent comme dans le cas de problèmes MINLP, où l'on sépare les variables entières des variables continues. Ils seront mis en concurrence dans le chapitre suivant afin d'évaluer leur efficacité sur ce problème.

La méthode de relaxations s'appuie sur une analyse du problème, tant sur le plan de la physique que sur les équations qui les représentent. Elle cherche à faciliter le travail de résolution des solveurs afin de trouver une solution au problème de transport de gaz.

En prenant du recul, on peut considérer ces différentes méthodes de résolution selon deux axes. D'un côté mathématique, les solveurs qui n'ont aucune vision des phénomènes modélisés et d'un autre côté, la méthode de relaxations qui s'appuie sur la compréhension des phénomènes physiques présents. Il semble qu'allier ces deux axes est une bonne voie pour la résolution d'un problème combinatoire et non linéaire qu'est celui du transport de gaz.

Stratégies de résolution de  
modèles d'un réseau de  
transport de gaz:  
Application à des instances de  
taille restreinte

IV

## Résumé

---

Dans ce chapitre, différentes stratégies de résolution sont présentées pour la modélisation du transport de gaz. Cela amène à étudier le modèle de la station d'interconnexion, le choix du solveur, la formulation en terme de pression, l'initialisation par un sous-problème et le choix de la fonction objectif.

Des études d'un cas arborescent et d'un cas maillé, en comparant les deux modèles d'interconnexion sont effectuées.

L'impact des choix de modélisation sur la résolution est ensuite analysé.

A partir de ces résultats, il apparaît que la résolution à l'aide d'un modèle d'interconnexion non linéaire, formulé en pression, initialisé par un sous-problème et résolu par Ipopt est performante. Les modèles correspondants seront employés sur des instances de taille nationale dans le chapitre suivant.

---

## Introduction

Précédemment, deux modèles d'interconnexions [II.2.1](#) et [II.2.2](#) ont été présentés. Si les effets de ces stations sont connus, leur fonctionnement interne exact est extrêmement complexe et difficilement modélisable. Un point fort de ce travail consiste à choisir la formulation du modèle d'interconnexion la plus adéquate, compte tenu des connaissances actuelles sur le domaine et compatible avec les méthodes de résolution implantées dans les solveurs actuels qui on fait l'objet du chapitre précédent.

Les modèles de transport de gaz de la littérature dédiée font apparaître des variantes dans leur formulation. Elles sont, par exemple, relatives à l'expression en terme de pression, [[Ríos-mercado00](#)] ou [[Andre06](#)], au mode de résolution [[Wolf00](#)] ou [[Hoeven04](#)], . . . Si ces modèles sont équivalents entre eux sur le plan théorique, la question peut se poser en terme de méthode de résolution. Dans ce chapitre, les deux modèles d'interconnexion sont analysés et comparés afin de déterminer si ces différences conceptuelles induisent des différences dans la résolution mathématique et donc dans les paramètres qui régissent le réseau de gaz.

Une attention particulière a également été portée dans ce chapitre sur l'impact de la formulation du terme de pression, l'initialisation du problème par un sous-problème et l'utilisation d'une fonction objectif au problème global. L'idée directrice est de déterminer la meilleure formulation en terme de robustesse de résolution vis-à-vis de l'ensemble des combinaisons de ces choix de modélisation. Ces analyses seront menées sur des exemples de réseaux de petite taille en terme de nombre de stations et de conduites, mais représentatifs des mailles d'un réseau de transport de gaz à l'échelle nationale. Si l'analyse est convaincante, les choix de modélisation les plus pertinents à petite échelle seront repris lors de l'étude des réseaux nationaux.

## IV.1 Réseaux de tests

L'étude d'un graphe [Siarry10], [Minoux08] peut porter sur différentes propriétés telles que: la connexité simple, la complétude, le caractère parfait, le coloriage, le plus court chemin entre deux sommets, ... Dans le cas de ce travail, la caractéristique importante est la présence de cycle dans le graphe. Ainsi deux types de réseaux sont étudiés:

- les réseaux arborescents, sans cycle,
- et les réseaux maillés comportant des cycles.

En prenant en compte cette caractérisation, différents réseaux de transport de gaz ont été créés. À ces topologies distinctes, réalistes en terme de dimensions d'ouvrages, des cas d'approvisionnements et de consommations ont été générés, en faisant varier les pressions aux points de consommation, les longueurs des canalisations et les caractéristiques des compresseurs. Ces cas sont présentés ci-dessous. Ils sont fictifs et les ordres de grandeurs ne sont pas ceux d'un réseau de transport classique.

### IV.1.1 Réseaux arborescents

Deux réseaux arborescents ont été créés. L'intérêt de ces réseaux réside dans leur simplicité. Ils ont été construits afin de pouvoir calculer la solution du problème de transport de gaz "à la main", sans l'utilisation de calculateur, comme pour les cas représentés sur les Figures IV.1 et IV.2.

En effet, le caractère arborescent permet de connaître l'itinéraire du gaz. Ainsi, en partant des points de consommation et en remontant jusqu'à l'interconnexion, il est aisé de déterminer les plages de pressions et les débits nécessaires à l'acheminement du gaz.

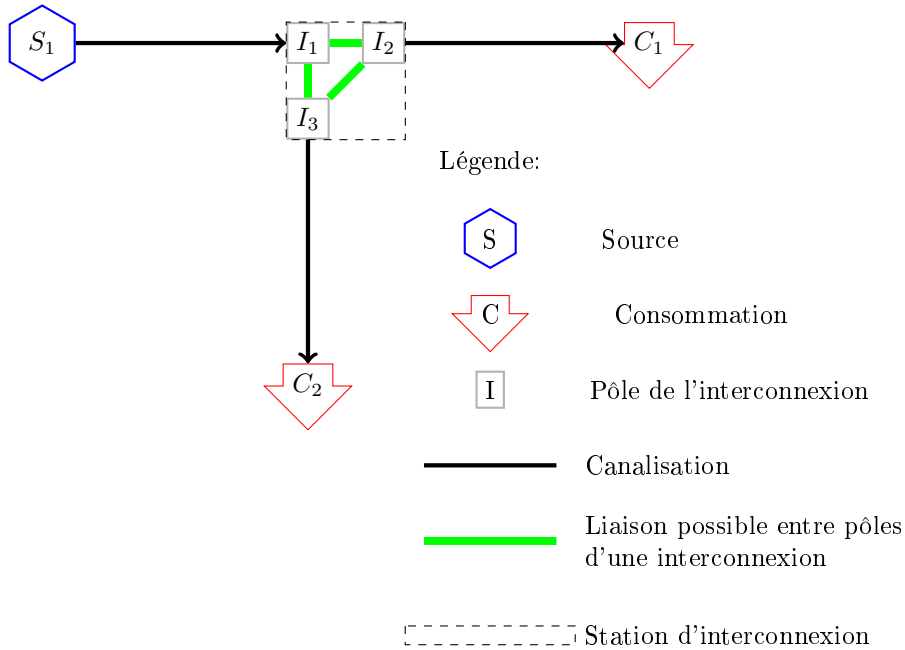


Figure IV.1: Exemple de réseau arborescent RA1

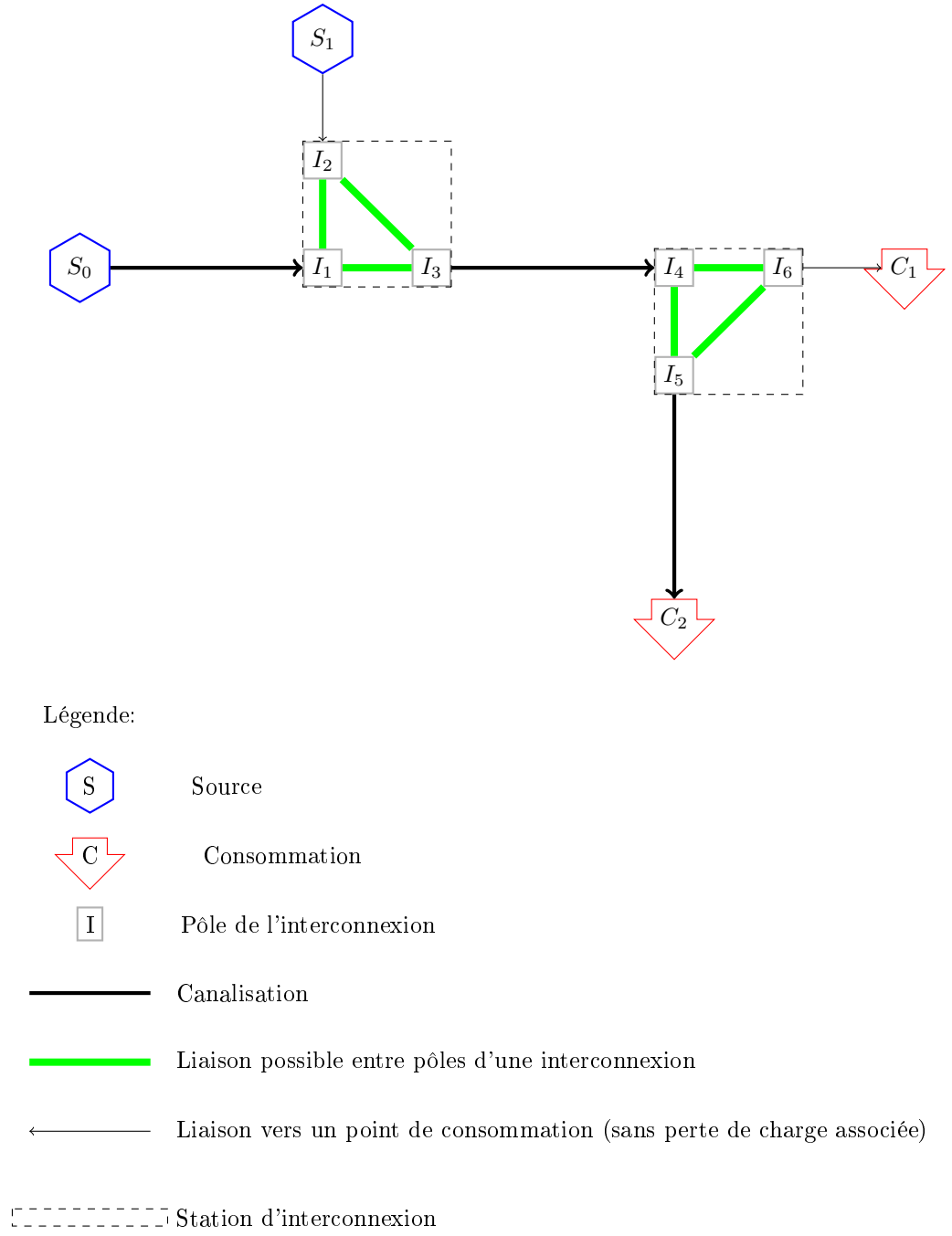


Figure IV.2: Réseau arborescent RA2

*Détails des instances de test*

Les Tableaux IV.1 et le IV.2 présentent les caractéristiques des deux réseaux arborescents présentés.

Nœud	Approvisionnement en gaz ( $m^3/h$ ) $s$	Pression min ( $bar$ ) $\underline{P}_i$	Pression max ( $bar$ ) $\overline{P}_i$
$S_1$	150 000	70	70
$C_1$	- 75 000 *	62	80
$C_2$	- 75 000 *	1	10
$I_1$	0	1	80
$I_2$	0	1	80
$I_3$	0	1	80

\* Une valeur négative de l'approvisionnement correspond à un point de consommation.

Canalisations	Longueur $l_{i,j}$ ( $km$ )	Diamètre $d_{i,j}$ ( $mm$ )
$S_1 - I_1$	5	300
$I_2 - C_1$	5	300
$I_3 - C_2$	50	300

Compresseur	Travail min ( $kWh$ ) $\underline{W}_{i,j}$	Travail max ( $kWh$ ) $\overline{W}_{i,j}$	Débit min ( $m^3/h$ ) $\underline{Q}_{i,j}$	Débit max ( $m^3/h$ ) $\overline{Q}_{i,j}$	Taux de compression maximum $\tau_{i,j}$
Interconnexion	0	560 000	0	4 000 000	1.9

Tableau IV.1: Dimensions du réseau arborescent RA1 et détails du scénario 1

Dans le cas du réseau RA1, il a été choisi de prendre le point de consommation  $C_2$  avec une plage de pression admissible nettement inférieure à celle que l'on peut trouver habituellement sur les réseaux de transport de gaz. La détente du gaz est alors requise pour acheminer le gaz.

Les Tableaux IV.3 et IV.4 illustrent les différences des jeux de valeurs pour créer les différentes instances de test. Neuf instances de test distinctes sont ainsi obtenues.



Nœud	Approvisionnement en gaz ( $m^3/h$ ) $s$	Pression min ( $bar$ ) $\underline{P}_i$	Pression max ( $bar$ ) $\overline{P}_i$
$S_1$	140 000	60	60
$S_2$	140 000	1	70
$C_1$	-140 000	40	70
$C_2$	-140 000	1	70
$I_1$	0	1	70
$I_2$	0	1	70
$I_3$	0	40	70
$I_4$	0	1	70
$I_5$	0	1	70
$I_6$	0	1	70

Canalisations	Longueur ( $km$ ) $l_{i,j}$	Diamètre ( $mm$ ) $d_{i,j}$
$S_1 - I_1$	5	300
$I_3 - I_4$	10	300
$I_5 - C_2$	35	300

Compresseur	Travail min ( $kWh$ ) $\underline{W}_{i,j}$	Travail max ( $kWh$ ) $\overline{W}_{i,j}$	Débit min ( $m^3/h$ ) $\underline{Q}_{i,j}$	Débit max ( $m^3/h$ ) $\overline{Q}_{i,j}$	Taux de compression maximum $\tau_{i,j}$
Interconnexion	0	560 000	0	4 000 000	1.9

Tableau IV.2: Dimensions du réseau arborescent RA2 et détails du scénario 6

Scénario Modifications par rapport au scénario 1 détaillé dans le Tableau IV.1

1	–
2	Travail de compression maximum $\overline{W}_{i,j} = 24\ 000 kWh$
3	Approvisionnement de $S_1 = 300\ 000 m^3/h$ , $C_1 = C_2 = -150\ 000 m^3/h$ , $l_{I_3,C_2} = 5 km$
4	Débit maximal $\overline{Q}_{comp} = 150\ 000 m^3/h$
5	Approvisionnement de $S_1 = 350\ 000 m^3/h$ , $C_1 = 150\ 000 m^3/h$ , Approvisionnement de $C_2 = 200\ 000 m^3/h$ , Longueur $l_{I_3,C_3} = 5 km$ , Travail de compression maximum $\overline{W}_{i,j} = 24\ 000 kWh$
6	Approvisionnement de $S_1 = 350\ 000 m^3/h$ , $C_1 = 200\ 000 m^3/h$ , $C_2 = 150\ 000 m^3/h$

Tableau IV.3: Différences entre les instances de test du réseau RA1

Scénario Modifications par rapport au scénario 7 détaillé dans le Tableau IV.2

7	–
8	Pression minimum $\underline{P}_{C_1}, \underline{P}_{I_3} = 50 bar$
9	Pression minimum $\underline{P}_{C_1}, \underline{P}_{I_3} = 60 bar$

Tableau IV.4: Différences entre les instances de test du réseau RA2

## IV.1.2 Réseaux maillés

Deux réseaux maillés ont également été construits, (Figures IV.3 et IV.4), afin d'étudier l'impact d'un maillage fort. Dans ce cas, nous faisons explicitement apparaître le détail de la station d'interconnexion car le sens du gaz n'est pas trivial comme pour le cas d'un réseau arborescent.

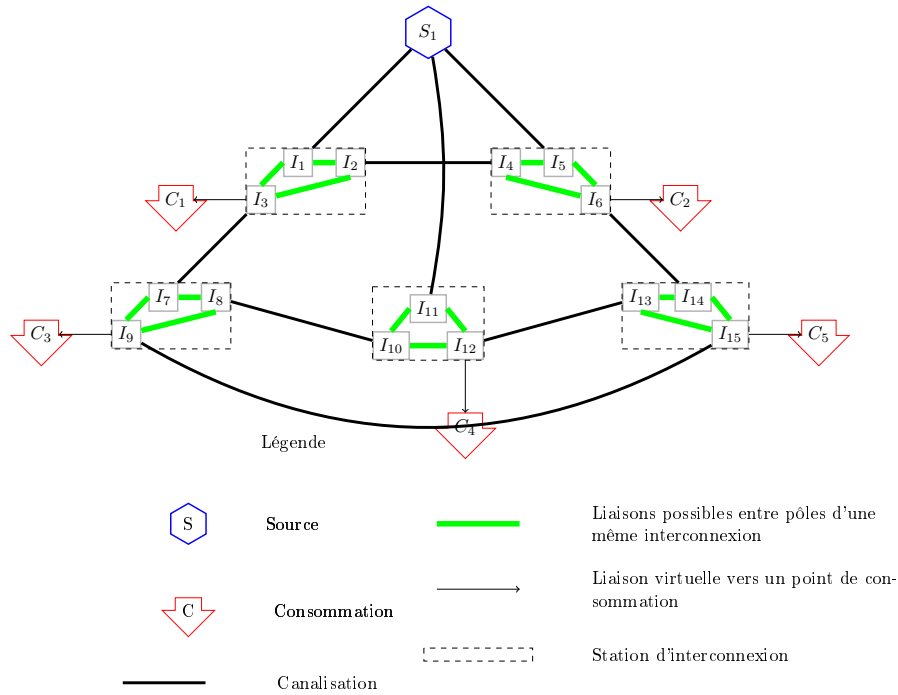


Figure IV.3: Détails d'un réseau maillé RM1

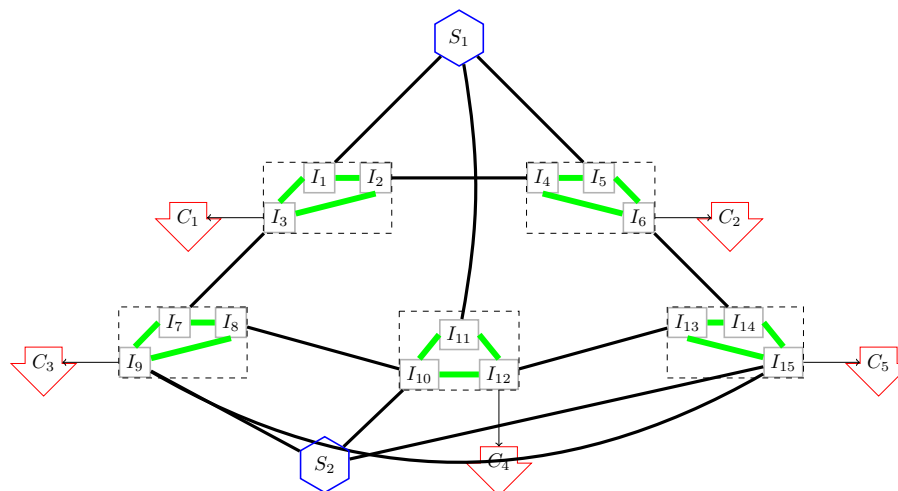


Figure IV.4: Détails d'un réseau maillé RM2

Compte tenu des caractéristiques des interconnexions et des canalisations, il n'est pas possible de prévoir le cheminement du gaz entre son approvision-

nement et sa consommation. Le Tableau [IV.5](#) présente une instance de test créée pour ce type de réseau.

Comme pour le cas arborescent, neuf instances de tests pour les réseaux maillés ont été créées, dont les différences entre les scénarios seront données en annexe [p.130](#).

Nœud	Approvisionnement en gaz ( $m^3/h$ ) $s$	Pression min ( $bar$ ) $\underline{P}_i$	Pression max ( $bar$ ) $\overline{P}_i$
$S_1$	500 000	60	60
$I_1$	0	1	70
$I_2$	0	1	70
$I_3$	-50 000	40	70
$I_4$	0	1	70
$I_5$	0	1	70
$I_6$	-50 000	40	70
$I_7$	0	1	70
$I_8$	0	1	70
$I_9$	-100 000	40	70
$I_{10}$	0	1	70
$I_{11}$	0	1	70
$I_{12}$	-200 000	40	70
$I_{13}$	0	1	70
$I_{14}$	0	1	70
$I_{15}$	-100 000	40	70

Canalisations	Longueur $l_{i,j}$ ( $km$ )	Diamètre $d_{i,j}$ ( $mm$ )
$S_1 - I_1$	5	300
$S_1 - I_5$	5	300
$S_1 - I_{11}$	45	300
$I_2 - I_4$	5	300
$I_3 - I_7$	25	300
$I_6 - I_{14}$	25	300
$I_8 - I_{10}$	15	300
$I_{12} - I_{13}$	15	300
$I_9 - I_{15}$	30	300

Compresseur	Travail min ( $kWh$ ) $\underline{W}_{i,j}$	Travail max ( $kWh$ ) $\overline{W}_{i,j}$	Débit min ( $m^3/h$ ) $\underline{Q}_{i,j}$	Débit max ( $m^3/h$ ) $\overline{Q}_{i,j}$	Taux de compression maximum $\tau_{i,j}$
Interconnexion quelconque	0	560 000	0	4 000 000	1.9

Tableau IV.5: Dimensions du réseau maillé RM1

## IV.2 Différentes voies de formulation

Cette partie présente les différentes voies de formulation: le but en est de rechercher la stratégie la plus adéquate pour ensuite l'appliquer à la résolution des instances de taille réelle.

Tout d'abord, pour faciliter l'appréhension du problème, les deux modèles possibles pour les stations d'interconnexion sont brièvement repris. Ensuite, la formulation du terme faisant intervenir la pression est détaillée. Les différentes fonctions objectifs sont également évoquées. Enfin, la question de l'initialisation par un sous-problème est proposée.

### IV.2.1 Stations d'interconnexion

Comme dit plus haut, les stations d'interconnexion sont les centres névralgiques du réseau et conditionnent l'ensemble de sa performance. A ce titre, leur modélisation est importante car elle impacte la convergence de la résolution du problème de transport de gaz.

Or, les deux modèles présentés dans le chapitre II ne sont pas *stricto sensu* équivalents. Le modèle avec variables binaires (*dénoté MINLP dans la suite*) est plus facilement interprétable mais apporte une complexité supplémentaire à cause des variables entières. Le modèle non linéaire continu (*dénoté NLP dans la suite*) n'est pas exactement le même. L'absence de variables entières est compensé par une augmentation du nombre de contraintes non linéaires du problème.

Pour rappel, le nombre maximal de compresseurs possibles dans une station d'interconnexion,  $A_{I_n}$ , vaut 1.

Le modèle d'interconnexion MINLP ainsi que le modèle NLP sont détaillés ci-dessous.

#### IV.2.1.a Modélisation en variables binaires (MINLP)

La modélisation en variables binaires correspond à la façon la plus simple de décrire le problème à l'aide d'équations mathématiques. Une variable binaire  $b$  est associée à la présence d'un ouvrage entre chaque paire de pôles. Pour mémoire, deux ouvrages sont possibles entre une paire de pôles: soit une vanne de détente (II.16), soit un compresseur (II.18) (II.19). A cela il faut rajouter le sens de l'ouvrage. Dans le cas de la vanne, l'utilisation de la variable de débit (II.17) permet de s'abstraire de la problématique liée au sens. Cependant, pour le compresseur, un tel artifice ne peut pas être utilisé. Deux possibilités ont été envisagées:

- considérer deux variables par paire de pôles  $(i, j)$ , une dans le cas où le gaz est comprimé de  $i$  à  $j$ ,  $b_{1,i,j}$  et une autre dans le cas contraire  $b_{2,i,j}$ , (IV.1)
- prendre un seul type de variable pour la présence du compresseur entre  $i$  et  $j$ ,  $b_{1',i,j}$  ainsi qu'une variable binaire,  $b_{I_n}$ , indiquant le sens du compresseur pour l'interconnexion  $I_n$ , (IV.2).

Les notations utilisées dans le chapitre II.2 sont reprises ici. Le premier cas s'écrit alors comme le système (IV.1) pour l'interconnexion  $I_n$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{i,j} = \gamma_1 Q_{i,j} \left[ b_{1,i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) - b_{2,i,j} \left( \left( \frac{P_i}{P_j} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \right] & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{3,i,j} Q_{i,j} (P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{1,i,j} + b_{2,i,j} + b_{3,i,j} \leq 1 & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ \sum_{(i,j) \in E_{I_n}} b_{1,i,j} + b_{2,i,j} \leq 1 & \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

Afin de réduire le nombre de variables, une variable binaire  $b_{I_n}$  portant sur le sens de la circulation du gaz dans le compresseur est introduite pour une interconnexion  $I_n$ . Le système devient alors IV.2:

$$\left\{ \begin{array}{ll} W_{i,j} = b_{1',i,j} \gamma_1 Q_{i,j} \left[ b_{I_n} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) + (b_{I_n} - 1) \left( \left( \frac{P_i}{P_j} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \right] & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{3,i,j} Q_{i,j} (P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ b_{1',i,j} + b_{3,i,j} \leq 1 & \forall (i,j) \in E_{I_n} \\ \sum_{(i,j) \in E_{I_n}} b_{1',i,j} \leq 1 & \end{array} \right. \quad (\text{IV.2})$$

Après des tests préliminaires, il s'est avéré que la première formulation donnait de meilleurs résultats. Certes, elle possède plus de variables binaires, une pour chaque sens possible du compresseur. Néanmoins, il est ainsi possible d'utiliser les algorithmes sur les variables SOS d'ordre 1 pour l'équation  $\sum_{(i,j) \in E_{I_n}} b_{1',i,j} \leq 1$  afin de déterminer les pôles amont et aval du compresseur. Les solveurs utilisent des techniques particulières de Branch and Bound sur ces variables afin de converger plus rapidement.

Le second modèle, fait intervenir une forme bilinéaire en variables binaires, ce qui peut s'avérer extrêmement difficile à résoudre d'un point de vue numérique.

#### IV.2.1.b Modélisation sans variables binaires (NLP)

Le modèle d'interconnexion n'utilisant pas de variables binaires a été décrit dans le paragraphe II.2.2. Les tests préliminaires non reportés ici ont montré que les solutions étaient intéressantes. Son étude a donc été poursuivie.

Afin de faciliter la lecture, le modèle d'interconnexion est rappelé ci-dessous (IV.3).

Pour une interconnexion  $I_n$ , deux nœuds  $c_{in}$  et  $c_{out}$  sont rajoutés à celle-ci. Ils représentent l'entrée et la sortie de la station de compression. Dans ce cas, cela revient à considérer l'entrée et la sortie du compresseur générique. Des vannes de détente relient les différents pôles entre eux. Des liens existent également entre les pôles et les nouveaux nœuds avec la contrainte supplémentaire que le gaz ne peut aller que des pôles vers le nœud  $c_{in}$  et du nœud  $c_{out}$  vers les pôles.

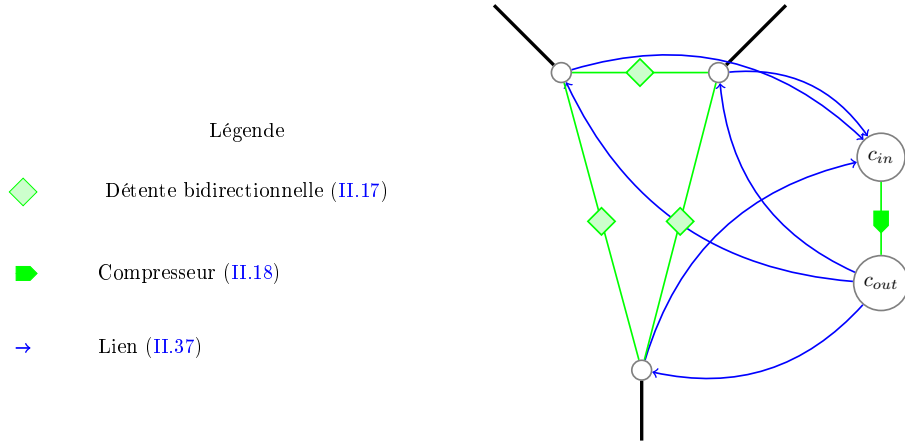


Figure IV.5: Exemple de construction d'interconnexion à trois pôles modélisée de façon non linéaire

L'ensemble de contraintes s'exprime alors pour deux pôles  $(i, j)$  de l'interconnexion  $I_n^2$ :

$$\begin{cases}
 Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 \\
 Q_{i,c_{in}}(P_i - P_{c_{in}}) \geq 0 \\
 Q_{c_{out},j}(P_{c_{out}} - P_j) \geq 0 \\
 Q_{i,c_{in}} \geq 0 \\
 Q_{c_{out},j} \geq 0 \\
 W_{c_{in},c_{out}} = \gamma_1 Q_{c_{in},c_{out}} \left( \left( \frac{P_{c_{out}}}{P_{c_{in}}} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) \\
 1 \leq \frac{P_{c_{out}}}{P_{c_{in}}} \leq \tau_{in,out}
 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

#### IV.2.1.c Résolution

Ces deux modèles ont comme différences majeures de posséder des variables binaires dans le premier cas et d'avoir un plus grand nombre d'équations non linéaires dans le second. Ils seront résolus à l'aide des différents solveurs retenus dans le chapitre III.1 en fonction de leur caractère mixte (MINLP) ou non linéaire continu (NLP).

### IV.2.2 Pression

#### IV.2.2.a Présentation

La pression intervient dans différentes équations (II.14), (II.18) et (II.19). Cependant, dans [Andre06],[Hoeven04], la pression n'est pas prise en compte directement. A la place, son carré est considéré, noté pour le nœud  $i$ ,  $\Pi_i = P_i^2$ .

La transformation des équations est assez simple. La perte de charge devient (II.14):

$$\Pi_i - \Pi_j = c_{i,j} Q_{i,j} |Q_{i,j}| \quad (\text{IV.4})$$

Le travail de compression (II.18) se transforme en

$$W_{i,j} = \gamma_1 \cdot Q_{i,j} \left( \left( \frac{\Pi_j}{\Pi_i} \right)^{\frac{2\alpha}{2}} - 1 \right) \quad (\text{IV.5})$$

Enfin, le taux de compression (II.19) s'écrit:

$$1 \leq \frac{\Pi_j}{\Pi_i} \leq \tau_{i,j}^2 \quad (\text{IV.6})$$

Une première analyse *a priori* permet de constater que:

- la perte de charge devient linéaire en  $\Pi_i$  et  $\Pi_j$ ;
- il y a une bijection entre  $P_i$  et  $\Pi_i$  car la pression est définie positive;
- l'espace des variables de pression est augmenté de façon quadratique.

#### IV.2.2.b Convexité de la perte de charge en $\Pi_i$

On analyse le hessien de la perte de charge ainsi formulée en posant d'après (IV.4):

$$f(\Pi_i, \Pi_j, Q_{i,j}) = \Pi_i - \Pi_j - c_{i,j} \cdot Q_{i,j} |Q_{i,j}| \quad (\text{IV.7})$$

Le hessien se transforme de (II.3.2.a) en

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_{i,j} \text{signe}(Q_{i,j}) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Si l'orientation des débits est connue sur les arcs du réseau, cette fonction peut être rendue convexe, quitte à considérer  $-f$  (IV.7). En effet, si le sens du gaz est connu,  $\text{signe}(Q_{i,j})$  l'est aussi où  $(i, j)$  est une canalisation,  $(i, j) \in E_p$ . Le hessien est donc défini positif.

En remplaçant la perte de charge par cette formulation et par la connaissance des débits sur les arcs, le problème perd la non convexité liée à la perte de charge. Cependant, cette transformation ne rend pas le problème entièrement convexe et elle nécessite de connaître le sens dans les arcs, ce qui est facile pour un réseau arborescent mais complexe pour un réseau maillé.

#### IV.2.3 Objectifs

Dans le cadre de vérification de capacité, il n'y a pas *stricto sensu* de critère à optimiser. Cependant, afin de tirer parti des capacités de résolution des solveurs disponibles, une fonction objectif bien choisie permettrait d'orienter la recherche de solutions. Dans ce but, plusieurs fonctions objectifs vont être testées sur ce problème de transport de gaz. Elles ont été présentées en III.2.5.b. Elles concernent la minimisation du travail des compresseurs, la minimisation de l'écart des approvisionnements ainsi que la maximisation des pressions du réseau.

Le seul objectif impacté par le changement de formulation de la pression est la maximisation des pressions (III.3). Dans ce cas, l'objectif est modifié en :

$$\max \sum_{i \in V} \Pi_i \quad (\text{IV.9})$$

Cette formulation est linéaire vis-à-vis de la variable  $\Pi_i$ .



### Satisfaction des contraintes

Le cadre du problème est la faisabilité. La formulation directe n'est donc pas considérée comme un problème d'optimisation, puisqu'il n'y a pas de fonction objectif explicite. Néanmoins, un artifice a été utilisé consistant à minimiser une fonction de type constante comme par exemple la fonction unitaire pour s'y ramener. Généralement, les différents solveurs ne donnent pas de bons résultats. Le gradient de la fonction objectif est nul.

Cependant, c'est la plus simple traduction du problème et cela permet d'utiliser un solveur d'optimisation.

### IV.2.4 Initialisation du problème

De Wolf utilise dans [Wolf00] un premier problème d'initialisation IV.10 avant de résoudre un problème de transport de gaz. L'idée d'initialiser un problème non linéaire par un premier sous-problème plus simple est souvent efficace [André10], notamment pour un problème non linéaire.

Deux initialisations sont étudiées. Elles ont pour point commun de s'intéresser à la perte de charge. L'étude est rendue nécessaire par ce phénomène de perte de pression qui fait de l'acheminement de gaz un problème complexe.

Afin d'évaluer son impact, le cas sans initialisation autre que celle due au logiciel de modélisation est également traité. Le solveur employé pour résoudre les sous-problèmes présentés ensuite est le même que celui considéré pour le problème global.

#### IV.2.4.a Minimisation de l'énergie mécanique dissipée par les canalisations du réseau

Cette approche a déjà été utilisée avec succès dans un certain nombre de travaux [Maugis77], [Wolf03]. Elle permet de trouver facilement pour le réseau un ensemble de valeurs qui satisfasse les équations de perte de charge.

Le problème à résoudre est le suivant:

$$\begin{aligned} \min \sum \frac{c_{i,j} \cdot Q_{i,j}^2 |Q_{i,j}|}{3} \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i \quad \forall i \in V \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Ce problème est convexe et non linéaire. Sa résolution permet d'offrir des informations intéressantes sur le réseau initial.

En effet, les conditions du premier ordre de Karush-Kuhn-Tucker [Karush39], [Kuhn51] s'écrivent à l'optimum pour chaque canalisation  $(i, j)$

$$c_{i,j} \cdot Q_{i,j} |Q_{i,j}| - \lambda_{i,j,1} + \lambda_{i,j,2} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

où  $-\lambda_{i,j,1} + \lambda_{i,j,2}$  est le multiplicateur de Lagrange associé au bilan de matière. Les valeurs de  $\lambda_{i,j,1}$  et  $\lambda_{i,j,2}$  sont connues.

Cette condition se réécrit en  $c_{i,j} \cdot Q_{i,j} |Q_{i,j}| = \lambda_{i,j,1} - \lambda_{i,j,2}$ . Ainsi, en prenant  $\Pi_i = \lambda_{i,j,1}$ ,  $\Pi_j = \lambda_{i,j,2}$ , la résolution du problème à l'optimum (IV.10) permet d'obtenir un ensemble de valeurs qui vérifient à la fois la loi des nœuds (II.8) mais aussi la perte de charge exprimée en (IV.4).

#### IV.2.4.b Minimisation de la perte de charge

Cette initialisation est très proche de la précédente. Elle part du principe que la perte de charge est le phénomène problématique du transport de gaz et que la compression est le facteur limitant. En effet, sans la perte de pression induite, il n'y a plus besoin de compresseur.

A partir de ce constat, on cherche une carte des débits qui minimise la perte de charge dont on se sert comme initialisation. Il est raisonnable de penser que cette dernière sera proche d'une solution du problème, notamment pour le sens du gaz dans les canalisations. En effet, la perte de charge étant minimale, la compression requise l'est aussi. On se place ainsi dans les meilleures conditions pour résoudre le problème global.

Mathématiquement, cela se traduit par le modèle quadratique convexe (IV.12).

$$\begin{aligned} \min & \sum c_{i,j} \cdot Q_{i,j}^2 \\ \text{s.c} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i \quad \forall i \in V \end{array} \right. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Le terme  $c_{i,j} \cdot Q_{i,j}^2 = |P_i^2 - P_j^2|$  dans une canalisation  $(i, j)$ , la minimisation correspond alors à celle de la somme des écarts de pression dans les canalisations.

#### IV.2.5 Création des instances de tests

Les tests ont été effectués à l'aide du logiciel de modélisation GAMS [Brooke88]. Une série de tests a été générée à partir de toutes les combinaisons possibles des différents facteurs de modélisation présentés ci-dessus: formulation de la pression, initialisation par un sous-problème, fonction objectif, formulation des interconnexions, solveur et type de réseaux. La Figure IV.6 reprend ces différents paramètres. Ainsi, un total de  $6 \times 2 \times 3 \times 4 \times 18 = 2592$  cas ont été ainsi créés à l'aide de scripts PERL [Wall01].

<b>But</b>
Déterminer un acheminement du gaz vers les points de livraison respectant les demandes en débits et les plages de pression requise.

<b>Type de réseau</b>	
Réseau arborescent	Réseau maillé
Neuf instances	Neuf instances

<b>Modèle d'interconnexion</b>	
	Modèle MINLP
Solveurs	Bonmin, Dicopt, SBB
	Modèle NLP
	Conopt, Ipopt, Snopt

<b>Formulation de la pression</b>	
$P_i$	$\Pi_i$

<b>Sous-problème d'initialisation</b>	
Aucun	Minimisation de la valeur absolue de la perte de charge (IV.12)
	Minimisation de l'énergie dissipée dans une canalisation (IV.10)

<b>Fonction objectif</b>			
Satisfaction des contraintes	Minimisation de l'écart d'approvisionnement	Minimisation du travail des compresseurs	Maximisation des pressions
	$\min \sum (s_i - S_i)^2$	$\min \sum W_{i,j}$	$\max \sum P_i$

Figure IV.6: Récapitulatif des choix de modélisation

## IV.3 Résultats

Une analyse au cas par cas n'est pas possible compte tenu de l'aspect combinatoire du problème. Une étude ciblée sur deux cas a été privilégiée afin de comparer les résultats entre les deux modèles d'interconnexions. Cette étude de cas sera suivie d'une analyse simple des paramètres puis d'une vision plus globale permettant de déterminer les modèles efficaces.

La résolution de la première instance basée sur une structure arborescente est illustrée pas-à-pas. Pour ce cas simple, il est donc possible de déterminer avec précision les débits circulant dans les canalisations.

Le second met en jeu un réseau maillé: pour ce cas, les différences de solutions entre une formulation de type MINLP et de type NLP, ont été observées, tous les autres paramètres étant fixés par ailleurs sur un réseau maillé.

### IV.3.1 Analyse d'un cas simple arborescent

#### IV.3.1.a Introduction

La résolution du réseau arborescent présenté sur la Figure IV.1 est assez simple. Nous nous sommes attachés à résoudre l'instance 6 présenté dans le Tableau IV.3.

Pour résoudre ce cas, il suffit de partir des points de consommation et de remonter jusqu'à la source. Bien que, théoriquement, les débits et les pressions soient des variables, dans ce cas précis, il apparaît que seules les pressions en sortie de la station d'interconnexion sont réellement libres. Le gaz n'a qu'un unique chemin de l'interconnexion pour aller aux différents points de consommation. Le débit est ainsi fixé sur l'ensemble des canalisations du réseau.

#### IV.3.1.b Résolution à la main

Cette partie détaille la résolution manuelle pour familiariser le lecteur à la détermination des plages de pressions et de débits admissibles sur ce cas arborescent.

##### *Détermination des débits*

Les demandes en  $C_1$  et en  $C_2$  sont respectivement de  $200\,000\text{ m}^3/h$  et de  $150\,000\text{ m}^3/h$ . Ainsi le débit est fixé à  $200\,000\text{ m}^3/h$  pour la canalisation  $I_2 - C_1$  et à  $150\,000\text{ m}^3/h$  pour  $I_3 - C_2$ . De même, le débit entre  $S_1$  et  $I_1$  est de  $350\,000\text{ m}^3/h$  car l'approvisionnement de  $S_1$  est de  $350\,000\text{ m}^3/h$ .

##### *Détermination des pressions*

Les débits sont maintenant connus. Les pressions admissibles en amont des canalisations se calculent en faisant de l'arithmétique sur les intervalles. En effet, l'intervalle de pression admissible vaut  $[62; 80]$  bars pour  $C_1$  et  $[1; 10]$  bars pour  $C_2$ .

$I_1$  est le pôle relié à  $S_1$  par une canalisation,  $I_2$  celui relié à  $C_1$  et  $I_3$  celui relié à  $C_2$ . Le coefficient de perte de charge  $c_{i,j}$  vaut pour les canalisations  $I_2 - C_1$  et  $S_1 - I_1$ :  $1,80 \cdot 10^{-8}\text{ bar}^2 h^2 / m^6$ . La canalisation  $I_1 - C_2$  est 10 fois plus longue et donc ce coefficient a pour valeur  $1,80 \cdot 10^{-7}\text{ bar}^2 h^2 / m^6$ .

Si on applique la formule de perte de charge (II.14) en prenant les débits déterminés ainsi que les pressions minimales et maximales des points de con-

sommation, il est possible de déterminer les intervalles de pression possibles pour  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$ .

Ainsi, pour la canalisation  $I_2 - C_1$ , les pressions possibles en  $I_2$ , sont comprises dans l'intervalle: [55, 9; 75, 4] bars. Pour la canalisation  $I_3 - C_2$ , l'intervalle possible des pressions possibles en  $I_3$ , vaut: [63, 6; 64, 4] bars. Enfin, la pression en aval de la canalisation pour  $I_1$  vaut 51,95 bars.

Ainsi les intervalles de pression possibles pour  $I_2$  et  $I_3$  sont plus restreints que ceux impliquant les bornes des variables associées [1; 80] bars.

#### *Détermination de la compression*

Il apparaît ainsi que la compression est nécessaire. En effet, le gaz arrive dans l'interconnexion en  $I_1$  à une pression de 51,95 bars pour en repartir au minimum à 63,6 bars en  $I_3$ . Il n'y a qu'un seul compresseur disponible. Les plages de pression de  $I_2$  sont plus élevées que celles de  $I_3$ . Il va donc falloir comprimer de  $I_1$  vers  $I_2$  pour ensuite détendre le gaz entre  $I_2$  et  $I_3$ .

#### *Conclusion*

Sur ce cas simple et grâce à la structure arborescente du réseau, les débits du gaz dans les canalisations et les plages de pression valides aux nœuds ont pu être déterminés. L'ensemble des solutions réalisables de cette instance a été cerné.

En se focalisant sur la résolution à l'aide de solveurs, la différence des solutions en fonction du modèle d'interconnexion, NLP ou MINLP sera détaillée.

#### IV.3.1.c Résolution à l'aide des solveurs

Les résultats obtenus sur le scénario précédent sont présentés ici en détail.

La Figure IV.7 montre la carte des pressions pour les deux modèles d'interconnexion (formulations MINLP et NLP). Pour les deux modèles, tous les autres choix de formulation sont identiques, à savoir:

- une initialisation à l'aide d'un sous-problème de flots (IV.12),
- une formulation en pression IV.2.2,
- une fonction objectif de minimisation de l'écart d'approvisionnement (III.2).

Le solveur MINLP est Bonmin III.1.6.a et le solveur NLP est Ipopt III.1.5.a.

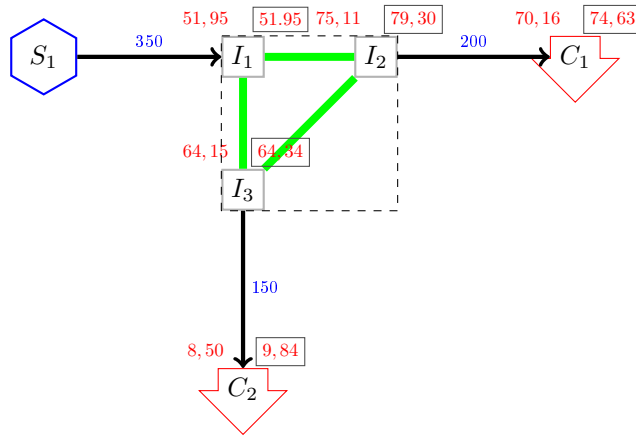
#### *Construction des problèmes mathématiques*

Deux problèmes mathématiques sont construits, un pour chaque modèle d'interconnexion.

Tout d'abord un sous-problème d'initialisation de minimisation de perte de charge (IV.12) est écrit. Il est résolu à l'aide du solveur choisi, Bonmin dans le cas MINLP et Ipopt pour le modèle NLP.

Les différentes équations qui composent le problème de transport de gaz sont ensuite écrites:

- le bilan de matière (II.8),
- la perte de charge (II.14),
- les équations liées au modèle d'interconnexion, (IV.1) dans le cas MINLP et (IV.3) dans le cas NLP,
- la fonction objectif de minimisation de l'écart d'approvisionnement (III.2).



Légende:

Débit sur la canalisation en  $10^3 m^3/h$

Pression du nœud pour un modèle d'interconnexion mixte en bar (MINLP)

Pression du nœud pour un modèle d'interconnexion non linéaire en bar (NLP)

Figure IV.7: Pression des nœuds du réseau arborescent résolu en fonction du modèle d'interconnexion

Les débits sont initialisés à l'aide de la solution du sous-problème d'initialisation de minimisation de perte de charge. Les solveurs sont une nouvelle fois mis en œuvre afin de trouver une solution.

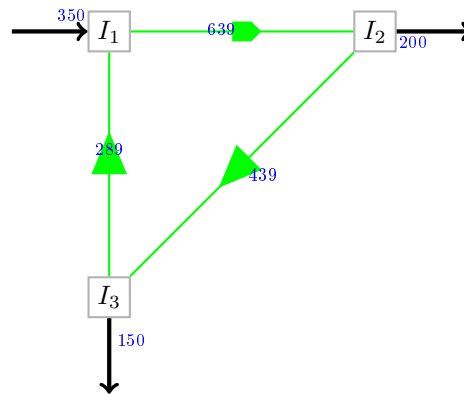
#### Résultats à l'issue des solveurs

Quel que soit le modèle d'interconnexion, les solutions respectent les contraintes. La résolution du problème à l'aide d'interconnexion MINLP entraîne du recyclage comme l'illustre la Figure IV.8. En effet, le débit dans le compresseur vaut  $629\,121\,m^3/h$ . Cela est supérieur au  $350\,000\,m^3/h$ , quantité transitant dans l'interconnexion. Le compresseur fournit un travail de  $7\,244\,kWh$ .

En effet, il apparaît un recyclage du gaz, bien que non nécessaire, comme l'illustre la Figure IV.9: dans le cas NLP le compresseur a un débit supérieur à  $350\,000\,m^3/h$ . Si on regarde en détail le débit dans le compresseur, ce dernier vaut  $2\,167\,259\,m^3/h$ . Le travail de compression a pour valeur  $32\,698\,kWh$ .

Le recyclage du gaz n'a de sens physique que pour atteindre les limites inférieures des compresseurs. Cependant, cela permet dans ce cas d'obtenir une solution mathématique réalisable.

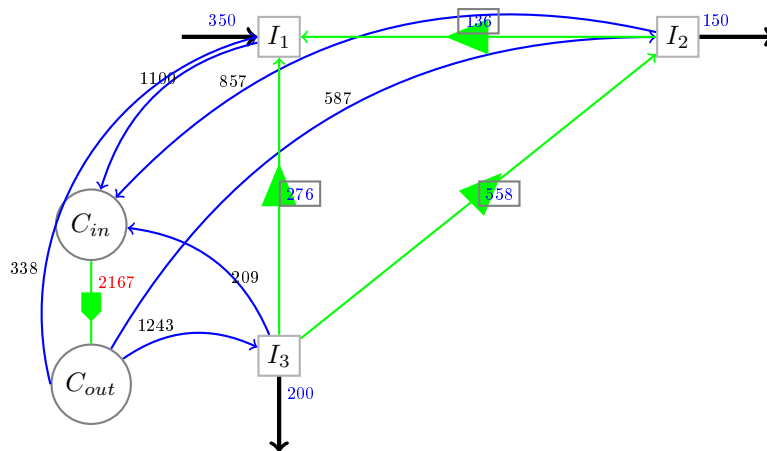
Dans le cas NLP, on se rend compte que le parcours du gaz suit le schéma de la Figure IV.9. Afin de gagner en clarté, les débits sont aussi indiqués dans le Tableau IV.6.



Légende

Débit dans les arcs en  $10^3 m^3/h$

Figure IV.8: Carte des débits dans l'interconnexion MINLP du cas arborescent



Légende

Débit dans les canalisations en  $10^3 m^3/h$

Débit dans les vannes de détente en  $10^3 m^3/h$

Débit dans les liens en  $10^3 m^3/h$

Débit dans le compresseur en  $10^3 m^3/h$

Figure IV.9: Carte des débits dans l'interconnexion NLP du cas arborescent

Arcs	Débit $10^3 m^3/h$	Arcs	Débit $10^3 m^3/h$	Arcs	Débit $10^3 m^3/h$
$I_2 - I_1$	136	$I_1 - C_{in}$	1100	$C_{out} - I_1$	338
$I_3 - I_1$	276	$I_2 - C_{in}$	859	$C_{out} - I_2$	587
$I_3 - I_2$	558	$I_3 - C_{in}$	209	$C_{out} - I_3$	1243
$C_{in} - C_{out}$	2167				

Tableau IV.6: Valeurs des débits sur les arcs de l'interconnexion NLP illustrée sur la Figure IV.9



## IV.3.2 Analyse d'un cas maillé

### IV.3.2.a Description du cas

L'analyse d'un cas maillé s'avère plus délicate. Le cheminement du gaz est difficile à prévoir, car plusieurs itinéraires sont possibles. Le réseau d'étude est le même que celui présenté plus haut sur la Figure IV.3. Le calcul est effectué à l'aide de solveurs, présentés en III.1.

Les données d'entrées sont rassemblées dans le Tableau IV.5. Les paramètres utilisés n'ont pas changé par rapport au cas arborescent hormis pour la fonction objectif. En effet, aucun cas formulé en MINLP n'a convergé sur cette instance avec l'objectif précédent de minimisation de l'écart d'approvisionnement. Les paramètres sélectionnés sont une initialisation à l'aide d'un sous-problème de minimisation de perte de charge (IV.12) et une formulation en pression. La fonction objectif choisie est la minimisation du travail (III.4). Le solveur Bonmin dans le cas du modèle d'interconnexion MINLP et par Ipopt dans le cas du modèle NLP sont une fois de plus utilisés pour la résolution.

La construction des problèmes se fait de manière analogue à celle du cas arborescent.

### IV.3.2.b Comparaison des deux modèles en terme d'interconnexions

La Figure IV.10 et les tableaux IV.7, IV.8 reprennent les différences pour les deux modèles d'interconnexion, Clairement, les débits sur les arcs du réseau sont très différents en fonction des modèles d'interconnexion choisis. Les arcs  $I_2 - I_4$  et  $I_9 - I_{15}$  ne sont pas utilisés dans le cas du modèle MINLP, contrairement au cas NLP.

Plus globalement, pour les solutions de toutes les différentes formulations MINLP, il apparaît que l'arc  $I_2 - I_4$  ne transporte jamais de gaz, pour ce scénario d'entrées/sorties. Ce n'est pas le cas du modèle NLP d'interconnexion.

En portant l'intérêt sur l'utilisation des compresseurs, des différences existent entre les modèles. Dans le cas NLP, la compression n'a lieu que dans l'interconnexion  $I_4, I_5, I_6$ . En revanche, pour le modèle MINLP, elle a également lieu dans l'interconnexion  $I_1, I_2, I_3$ . Les configurations retenues pour le modèle MINLP sont illustrées sur la Figure IV.11.

L'objectif de minimisation du travail des compresseurs a une valeur moindre pour le modèle MINLP par rapport au NLP comme le montre le Tableau IV.8.

#### *Cas d'une interconnexion NLP*

Le détail des interconnexions explique les différences entre les pressions. La figure IV.12 détaille l'interconnexion composée de  $I_4, I_5, I_6$ . Les arcs sur lesquels un débit nul circule ont été retirés afin d'améliorer la lisibilité.

La vanne entre  $I_4$  et  $I_5$  n'est pas utile. En effet, les pôles  $I_4$  et  $I_5$  sont directement reliés au compresseur. Le gaz qui circule dans cette vanne pourrait être reporté dans le lien entre  $I_5$  et  $c_{in}$ . Plusieurs configurations sont possibles pour ce cas.

## IV.3.3 Conclusion

Les formulations NLP et MINLP pour les modèles des stations d'interconnexion ne sont pas rigoureusement identiques. Sur l'exemple arborescent qui peut être résolu "à la main", il apparaît des solutions bien différentes en fonction de ces modèles, en terme de débits, pressions et travail de compression au

Nœuds	Modèle (MINLP) <i>bar</i>	Modèle (NLP) <i>bar</i>	Nœuds	Modèle (MINLP) <i>bar</i>	Modèle (NLP) <i>bar</i>
$S_1$	60	60			
$I_1$	54,05	54,1	$I_{10}$	40	40
$I_2$	27,97	54,1	$I_{11}$	40	40
$I_3$	59,83	54,1	$I_{12}$	40	40
$I_4$	27,97	53,99	$I_{13}$	41,31	41,63
$I_5$	54,04	53,99	$I_{14}$	41,31	41,63
$I_6$	59,83	66,06	$I_{15}$	41,31	41,63
$I_7$	41,31	41,02			
$I_8$	41,31	41,02			
$I_9$	41,31	41,02			

Tableau IV.7: Valeurs des pressions des nœuds en fonction du modèle d'interconnexion

Interconnexion	Modèle (MINLP) <i>kWh</i>	Modèle (NLP) <i>kWh</i>
$I_1, I_2, I_3$	627	-
$I_4, I_5, I_6$	627	1467
$I_7, I_8, I_9$	-	-
$I_{10}, I_{11}, I_{12}$	-	-
$I_{13}, I_{14}, I_{15}$	-	-
Total	1254	1467

Tableau IV.8: Valeur du travail de compression en fonction du modèle d'interconnexion

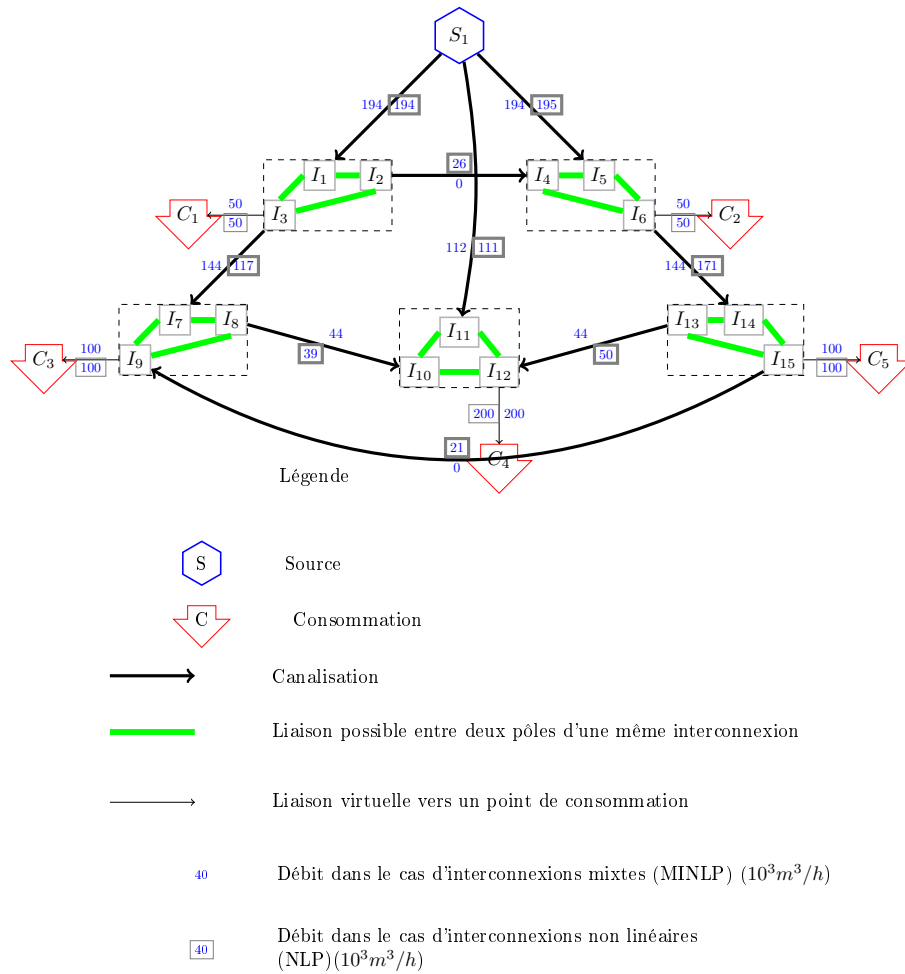


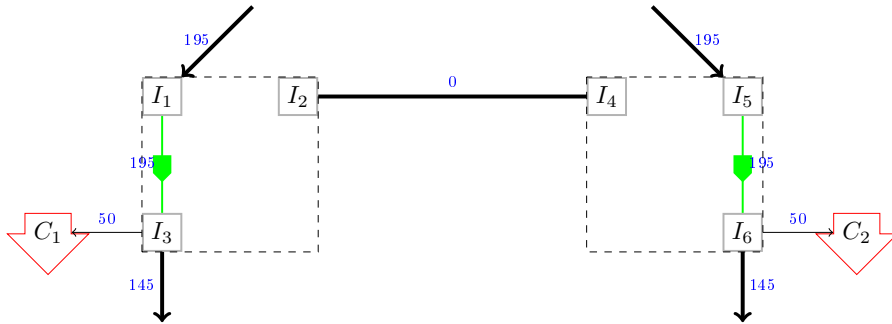
Figure IV.10: Carte des débits en fonction du type d'interconnexion pour un réseau maillé

sein de l'interconnexion. Cette caractéristique est également présente dans le cas maillé. Les débits sont alors distincts sur une partie des canalisations. La compression n'est pas utilisée dans les mêmes stations d'interconnexion.

Plusieurs facteurs peuvent expliquer ces différences.

- Le modèle d'interconnexion ne décrit pas exactement la même réalité.
- Le solveur peut être mis en cause.
- Des interactions avec les autres facteurs de modélisation peuvent avoir lieu.

Sur le premier point, il est difficile d'aller plus loin dans l'analyse, dans la mesure où le fonctionnement intrinsèque des stations d'interconnexion a été peu étudié dans la littérature dédiée. Ainsi, l'étude se focalisera sur les autres points.



Légende:

Débit en  $10^3 m^3/h$

Figure IV.11: Les configurations des deux interconnexions comprimant le gaz dans le cas du modèle d'interconnexion MINLP

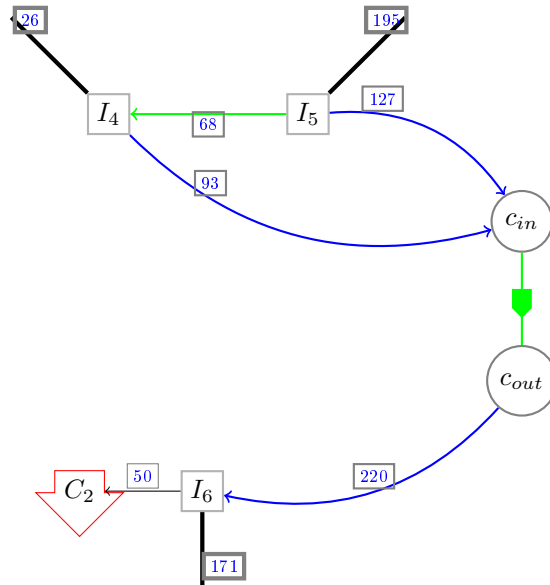


Figure IV.12: Carte des débits dans l'interconnexion NLP composée de  $I_4, I_5, I_6$

## IV.4 Analyse par facteur

L'étude combinatoire du problème fait apparaître 2592 cas à évaluer. Ils sont issus de la combinaison des différents facteurs étudiés. Il s'avère que 718 ont une solution numérique satisfaisant les contraintes de débits et de pressions, soit un taux de résolution de 27 %. Une étude de chaque variation de formulation s'avérerait longue et peu instructive. Il a été choisi de focaliser l'étude sur deux analyses. La première a trait à l'analyse simple des différents facteurs entre eux:

- le modèle d'interconnexion
- la formulation en  $P_i$  ou en  $\Pi_i$ ,
- l'initialisation par un sous-problème
- et la fonction objectif.

A l'issue de ces tests, la seconde analyse cherchera la meilleure combinaison de paramètres afin de résoudre les différences instances de tests.

### IV.4.1 Analyse du modèle d'interconnexion

Un souci récurrent est de tester la robustesse de la formulation NLP/MINLP du modèle d'interconnexion. Le Tableau IV.9 présente les taux de résultats en fonction de la formulation de l'interconnexion.

Critère	Modélisation non linéaire (NLP)	Modélisation avec variables binaires (MINLP)
Nombre de cas	1296	1296
Cas résolus	389	329
Pourcentage de réussite	30%	27%

Tableau IV.9: Résultats de la formulation des interconnexions

L'exemple précédent a montré que les solutions trouvées sont très différentes. Les taux de résolution à première vue paraissent équivalents. L'étude plus détaillée des solveurs apporte plus d'éléments en terme de qualité.

#### IV.4.1.a Solveurs non linéaires en variables binaires

Les résultats en fonction des solveurs non linéaires en nombres entiers sont présentés dans le Tableau IV.10

Critère	Bonmin	Dicopt	SBB
Nombre de cas	432	432	432
Cas résolus	71	128	130
Pourcentage de réussite	16%	29%	30%

Tableau IV.10: Résultats pour le choix d'un solveur MINLP

Bien que Bonmin soit un solveur récent, il n'apparaît pas très performant pour le problème de transport de gaz, ce qui peut s'expliquer par la non convexité très forte du problème.

Les autres solveurs ont des résultats similaires. Il n'est donc pas possible de discriminer un solveur par rapport à un autre. De plus, il apparaît que Dicopt et SBB résolvent quasiment les mêmes instances de test.

#### IV.4.1.b Solveurs non linéaires continus

Critère	Conopt	Ipopt	Snopt
Nombre de cas	432	432	432
Cas résolus	58	286	45
Pourcentage de réussite	13%	66%	10%

Tableau IV.11: Résultats pour le choix d'un solveur NLP

Le Tableau IV.11 est extrêmement intéressant, car pour des problèmes similaires, Ipopt réalise d'excellents taux de résolution. De plus, la comparaison avec les solveurs MINLP est aussi à son avantage. Il est près de deux fois plus performant par rapport à ces derniers.

#### IV.4.1.c Choix d'un modèle d'interconnexion et son solveur

Il apparaît ainsi que la résolution du modèle NLP à l'aide d'Ipopt est nettement meilleure que celle du modèle MINLP. Ainsi, il semble naturel de s'intéresser sur ses résultats, notamment pour les autres formulations.

#### IV.4.2 Analyse de la formulation de la pression

Il convient d'analyser s'il vaut mieux utiliser la pression ou son expression au carré. Le Tableau IV.12 présente les résultats en fonction de la formulation de la pression,  $P_i$  ou  $\Pi_i$ .

Critère	Pression $P_i$	Pression au carré $\Pi_i$
Nombre de cas (Total)	1296	1296
Cas résolus	291	427
Pourcentage de réussite	22%	32%
Ipopt (NLP)	68%	63%

Tableau IV.12: Résultats de l'expression de la pression en  $P_i$  ou  $\Pi_i$

Il existe un avantage certain à modéliser le problème à l'aide de  $\Pi_i = P_i^2$  plutôt qu'à l'aide de la simple expression de la pression,  $P_i$ .

Si on regarde plus précisément le taux de résolution à l'aide du modèle d'interconnexion NLP, Ipopt est plus performant lorsque la pression est employée avec 149 cas réussis sur 216, soit 68 % de réussite. Dans le cas où  $\Pi_i$  est utilisé, la résolution est un peu moins performante avec 137 cas validés, soit 63%.

##### Cas détaillé

Deux cas sont présentés où seule la formulation de la pression diffère, à l'aide d'Ipopt. L'objectif est la minimisation du travail des compresseurs et l'initialisation se fait à l'aide d'un problème de flots.

Nœuds	Formulation	Formulation	Nœuds	Formulation	Formulation
	( $\Pi_i$ ) <i>bar</i>	( $P_i$ ) <i>bar</i>		( $\Pi_i$ ) <i>bar</i>	( $P_i$ ) <i>bar</i>
$S_1$	60	60			
$I_1$	54,61	54,1	$I_{10}$	29,75	40
$I_2$	54,61	54,1	$I_{11}$	29,75	40
$I_3$	54,61	54,1	$I_{12}$	40	40
$I_4$	54,63	53,99	$I_{13}$	40,18	41,63
$I_5$	54,63	53,99	$I_{14}$	40,18	41,63
$I_6$	54,63	66,06	$I_{15}$	40,18	41,63
$I_7$	32,28	41,02			
$I_8$	32,28	41,02			
$I_9$	40,11	41,02			

Tableau IV.13: Valeur des pressions des nœuds en fonction de la formulation de la pression

Le Tableau IV.13 et la Figure IV.13 présentent deux solutions obtenues à l'aide d'Ipopt en utilisant un sous-problème de flots et cherchant à minimiser le travail. Dans le cas de l'utilisation de  $\Pi_i$ , la compression a lieu dans les interconnexions des nœuds  $I_7, I_8, I_9$  et  $I_{10}, I_{11}, I_{12}$ . Avec la pression  $P_i$ , seul le compresseur de l'interconnexion  $I_4, I_5, I_6$  travaille.

La solution formulée en pression est meilleure en terme d'objectif. En effet, le travail vaut 1 466 *kW* formulé en  $P_i$ , contre 2 471 en  $\Pi_i$ . Les débits et les pressions sont relativement les mêmes. Il apparaît que pour ce cas, bien que les

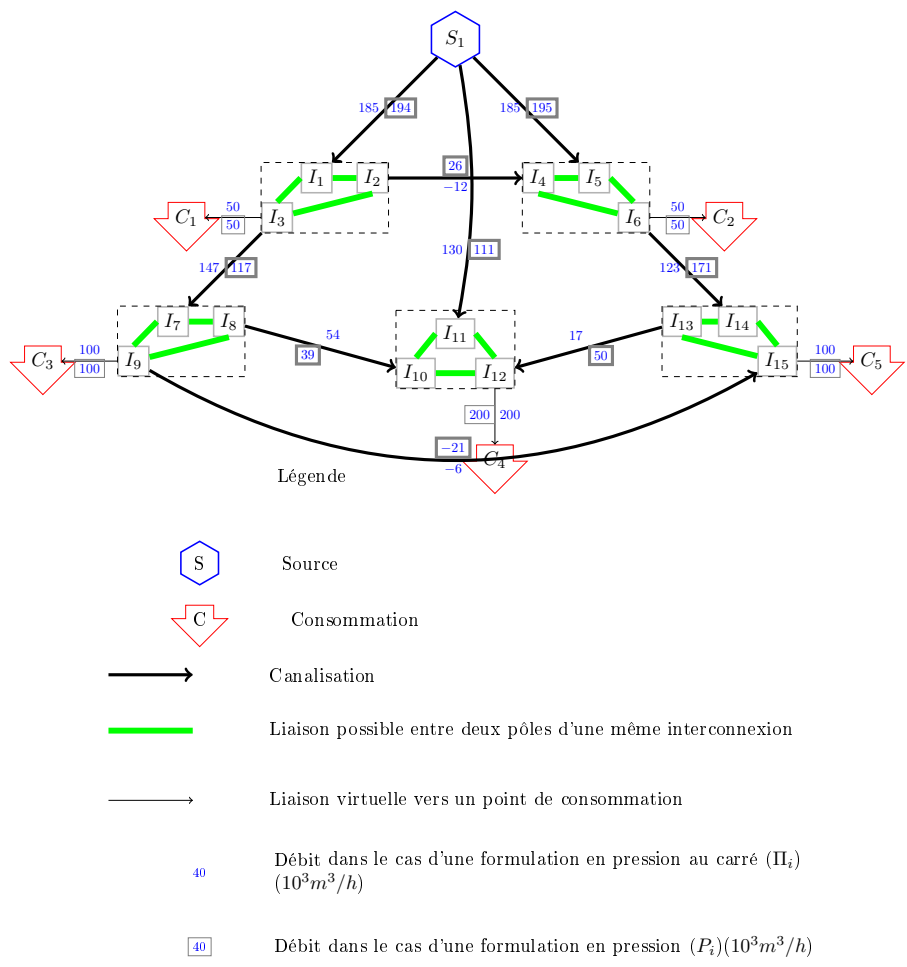


Figure IV.13: Carte des débits en fonction de la formulation la pression pour un réseau maillé à l'aide d'Ipopt, d'une initialisation à l'aide d'un problème de flots et la minimisation du travail des compresseurs comme objectif

Interconnexion	Formulation $\Pi_i$ (kWh)	Formulation $P_i$ (kWh)
$I_1, I_2, I_3$	-	-
$I_4, I_5, I_6$	-	1467
$I_7, I_8, I_9$	666	-
$I_{10}, I_{11}, I_{12}$	1805	-
$I_{13}, I_{14}, I_{15}$	-	-
Total	2471	1467

Tableau IV.14: Valeur du travail de compression en fonction de la formulation de la pression



deux problèmes soient identiques à une bijection près, deux solutions proches existent mais avec des valeurs d'objectif bien différentes.

### IV.4.3 Analyse de l'initialisation par un sous-problème

Le Tableau IV.15 présente les résultats en fonction de l'utilisation d'un sous-problème d'initialisation. Il y a un apport net à initialiser le problème par un

Critère	Aucun	Minimisation de l'énergie mécanique $\sum \frac{c_{i,j} Q_{i,j}^2  Q_{i,j} }{3}$	Minimisation de la perte de charge $\sum c_{i,j} Q_{i,j}^2$
Nombre de cas (Total)	864	864	864
Cas résolus	133	270	315
Pourcentage de réussite	15%	31%	36%
Ipopt	39%	79%	80%

Tableau IV.15: Résultats pour l'initialisation par un sous-problème

premier sous-problème, car le nombre de cas résolus est plus que doublé.

Dans les choix retenus précédemment, à savoir un modèle d'interconnexion NLP et Ipopt comme solveur, l'initialisation double le taux de résolution. En effet, Ipopt résout respectivement 56, 114 et 116 cas.

Ainsi, il apparaît que l'initialisation par un sous-problème semble un moyen solide d'accroître les chances de trouver une solution au problème de transport de gaz.

#### *Cas détaillé*

Deux solutions à stratégie d'initialisation différente ont été comparées, une sans sous-problème d'initialisation d'une part et l'autre avec initialisation par la minimisation de l'énergie mécanique dissipée dans les canalisations. Les autres critères sont les mêmes que précédemment, à savoir: modèle d'interconnexion NLP, Ipopt comme solveur, formulation en pression et minimisation du travail des compresseurs. La Figure IV.14, les Tableaux IV.16 et IV.17 présentent les valeurs trouvées.

Les valeurs des objectifs sont très proches, à savoir 1408 et 1284 kW. Cependant, si on compare avec le cas précédent, on s'aperçoit que deux canalisations ne sont pas utilisées dans ce cas, les canalisations  $I_2 - I_4$  et  $I_9 - I_{15}$ . Ces deux solutions sont proches de celle trouvée par la modélisation MINLP. Les niveaux de pressions sont du même ordre, comme dans les cas précédents.

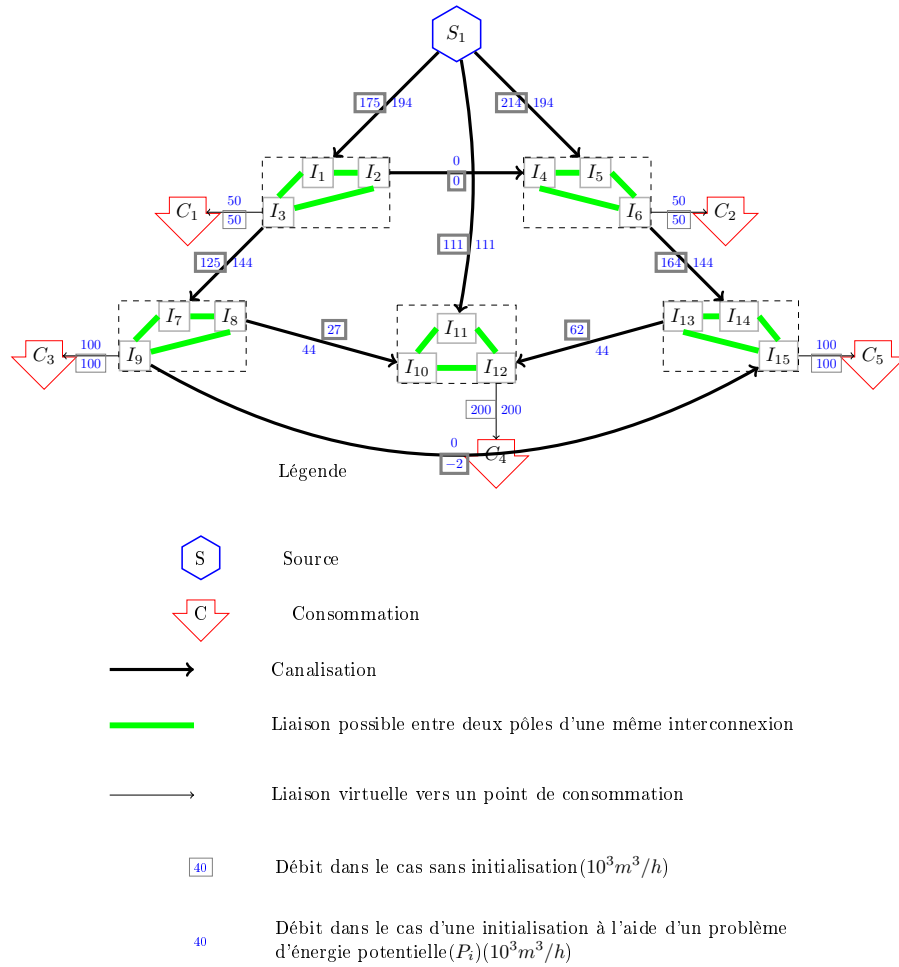


Figure IV.14: Carte des débits en fonction de l'initialisation pour un réseau maillé à l'aide d'Ipopt, formulé à l'aide de la pression et la minimisation du travail des compresseurs comme objectif

Nœuds	Sans sous-problème d'initialisation <i>bar</i>	Energie mécanique dissipée <i>bar</i>	Nœuds	Sans sous-problème d'initialisation <i>bar</i>	Energie mécanique dissipée <i>bar</i>
$S_1$	60	60	$I_{10}$	40	40
$I_1$	55,21	54,05	$I_{11}$	40	40
$I_2$	63,59	54,05	$I_{12}$	40	40
$I_3$	55,21	59,83	$I_{13}$	42,48	41,31
$I_4$	63,60	54,05	$I_{14}$	40,50	41,31
$I_5$	52,72	54,05	$I_{15}$	40,50	41,31
$I_6$	63,60	59,83			
$I_7$	40,50	41,30			
$I_8$	40,50	41,30			
$I_9$	40,50	41,30			

Tableau IV.16: Valeurs des pressions des nœuds en fonction de l'initialisation par un sous-problème

Interconnexion	Sans sous-problème d'initialisation ( <i>kWh</i> )	Minimisation de l'énergie mécanique dissipée ( <i>kWh</i> )
$I_1, I_2, I_3$	-	642
$I_4, I_5, I_6$	1314	642
$I_7, I_8, I_9$	-	-
$I_{10}, I_{11}, I_{12}$	-	-
$I_{13}, I_{14}, I_{15}$	94	-
Total	1408	1284

Tableau IV.17: Valeurs du travail de compression en fonction de l'initialisation par un sous-problème

#### IV.4.4 Analyse de la fonction objectif du problème

Les résultats obtenus sont repris dans le Tableau IV.18.

Critère	Pas d'objectif	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $(S_i - s_i)^2$	Minimisation du travail des compresseurs $W_{i,j}$	Maximisation de la pression $P_i$
Nombre de cas(Total)	648	648	648	648
Cas résolus	183	151	195	189
Pourcentage de réussite	28%	23%	30%	29%
Ipopt	62%	74%	67%	62%

Tableau IV.18: Résultats pour le choix d'un objectif

L'objectif du problème global ne paraît pas déterminant pour une résolution du problème. Les résultats sont proches en terme de taux de résolution. Les fonctions au sens physique fort, comme la maximisation des pressions ou la minimisation du travail des compresseurs sont légèrement mieux résolues dans le cas général. La minimisation de l'écart d'approvisionnement a les meilleurs résultats avec Ipopt, contrairement au cas général. La satisfaction des contraintes donne également un résultat satisfaisant, contrairement à ce que l'on pouvait penser au départ. Ainsi, les objectifs ne semblent pas avoir de réels impacts sur la résolution du problème de transport de gaz. Il est difficile de discriminer une fonction objectif par rapport à une autre.

Pour le cas du modèle d'interconnexion NLP à l'aide d'Ipopt, les résultats sont respectivement de 67, 80, 72 et 67 cas réussis sur 108 possibles.

##### Cas détaillés

Les Figures IV.15, IV.16 et les Tableaux IV.19, IV.20, IV.21 et IV.22 présentent les débits et les pressions en fonction de l'objectif retenus. Les autres paramètres sont un modèle d'interconnexion NLP, formulé en pression  $P_i$ , initialisé par un sous-problème minimisant la perte de charge et pour solveur Ipopt.

Nœuds	Objectif $\max \sum P_i$ <i>bar</i>	Objectif $\min \sum W_{i,j}$ <i>bar</i>	Nœuds	Objectif $\max \sum P_i$ <i>bar</i>	Objectif $\min \sum W_{i,j}$ <i>bar</i>
$S_1$	60	60	$I_{10}$	29,75	40
$I_1$	54,61	54,1	$I_{11}$	29,75	40
$I_2$	54,61	54,1	$I_{12}$	40	40
$I_3$	54,61	54,1	$I_{13}$	40,19	41,63
$I_4$	54,63	53,99	$I_{14}$	40,19	41,63
$I_5$	54,63	53,99	$I_{15}$	40,19	41,63
$I_6$	54,63	66,06			
$I_7$	32,28	41,02			
$I_8$	32,28	41,02			
$I_9$	32,28	41,02			

Tableau IV.19: Valeur des pressions des nœuds en fonction de la fonction objectif

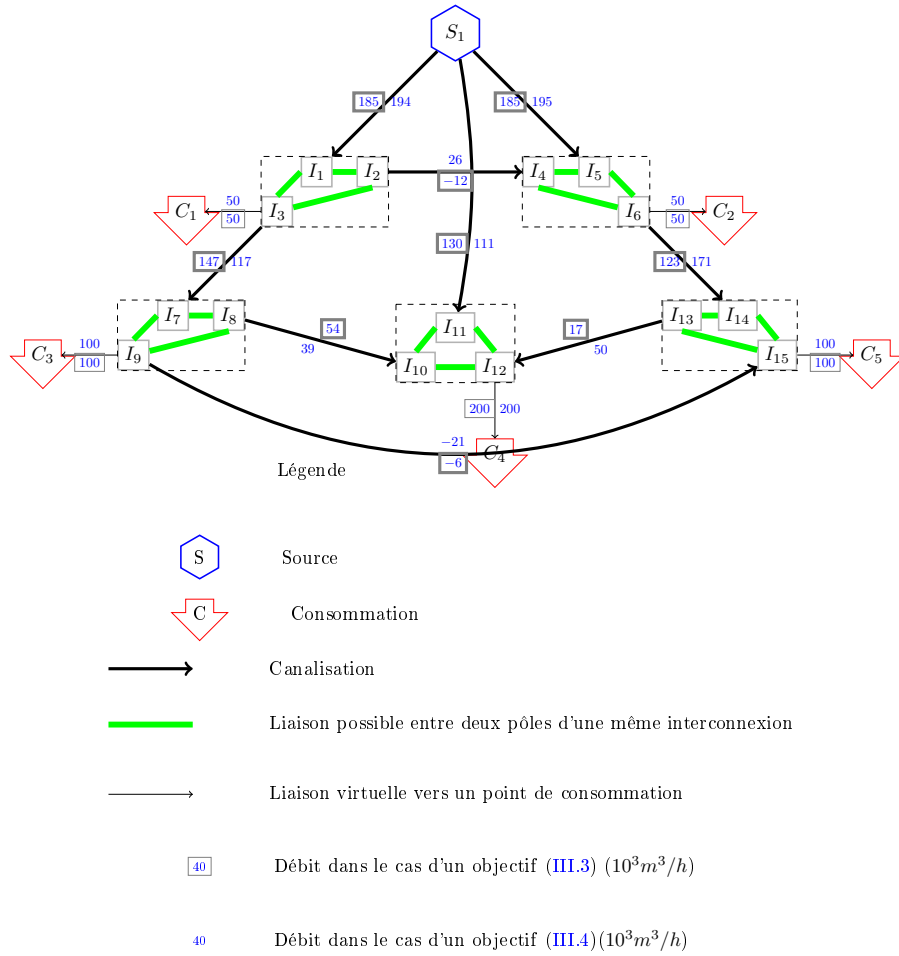


Figure IV.15: Carte des débits en fonction de l'objectif pour un réseau maillé à l'aide d'Ipopt, d'une initialisation à l'aide d'un problème de flots et d'une formulation en pression

Interconnexion	Objectif $\max \sum P_i$ ( $kWh$ )	Objectif $\min \sum W_{i,j}$ ( $kWh$ )
$I_1, I_2, I_3$	9957	-
$I_4, I_5, I_6$	9645	1467
$I_7, I_8, I_9$	28143	-
$I_{10}, I_{11}, I_{12}$	28263	-
$I_{13}, I_{14}, I_{15}$	10945	-
Total	86953	1467

Tableau IV.20: Valeur du travail des compresseurs en fonction de l'objectif

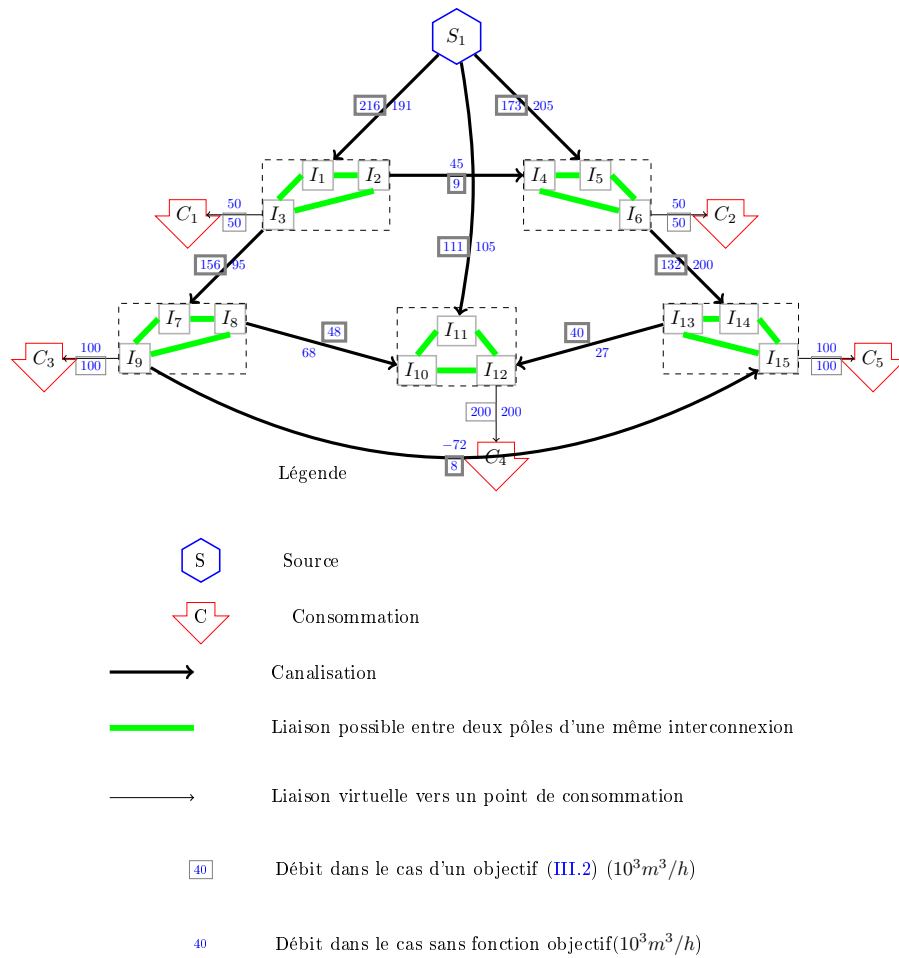


Figure IV.16: Carte des débits en fonction de l'objectif pour un réseau maillé à l'aide d'Ipopt, d'une initialisation à l'aide d'un problème de flots et une formulation en pression

Nœuds	Objectif Sans objectif <i>bar</i>	Objectif $\min \sum (s_i - S_i)^2$ <i>bar</i>	Nœuds	Objectif Sans objectif <i>bar</i>	Objectif $\min \sum (s_i - S_i)^2$ <i>bar</i>
$S_1$	60	60	$I_{10}$	31,06	40
$I_1$	54,28	54,05	$I_{11}$	42,74	40
$I_2$	51,89	54,05	$I_{12}$	41,29	40
$I_3$	50,97	59,83	$I_{13}$	41,78	41,31
$I_4$	51,54	54,05	$I_{14}$	30,24	41,31
$I_5$	53,37	54,05	$I_{15}$	47,62	41,31
$I_6$	67,15	59,83			
$I_7$	42,22	41,30			
$I_8$	44,83	41,30			
$I_9$	41,23	41,30			

Tableau IV.21: Valeur des pressions des nœuds de la fonction objectif

Interconnexion	Satisfaction des contraintes ( <i>kWh</i> )	Objectif $\min \sum (s_i - S_i)^2$ ( <i>kWh</i> )
$I_1, I_2, I_3$	14402	43876
$I_4, I_5, I_6$	17500	43682
$I_7, I_8, I_9$	15585	47126
$I_{10}, I_{11}, I_{12}$	16684	49791
$I_{13}, I_{14}, I_{15}$	19246	44638

Tableau IV.22: Valeur du travail des compresseurs en fonction de la fonction objectif

Les pressions [IV.19](#) avec comme objectif la maximisation des pressions semblent plus basses que dans le cas de minimisation du travail. Cela est dû des compresseurs dont les pressions en entrée et en sortie, non représentées, sont beaucoup plus importantes dans le premier cas, comme l'illustre le tableau [IV.20](#).

Outre les différences de cartes qui existent entre les différents objectifs, un fait marquant est la similarité entre les Figures [IV.15](#) et [IV.13](#). Les résultats en terme de débits et de pression sont identiques à 0,1% près.

Dans le cas de la minimisation de l'écart d'approvisionnement et le cas sans réelle fonction objectif, on observe deux nouvelles solutions, différentes de celles déjà trouvées.



#### IV.4.5 Analyse croisée

Une analyse croisée complète des différents paramètres est intéressante mais fastidieuse pour étudier toutes les combinaisons possibles de facteurs.

Si on regarde de manière transversale les différentes formulations pour déterminer la meilleure combinaison du jeu de paramètres, deux se dégagent aisément:

- un modèle d'interconnexion NLP et le solveur Ipopt
- et une initialisation à l'aide d'un sous-problème.

Les taux de résolution sont très proches pour les autres critères.

Afin de pouvoir arbitrer, un examen complémentaire porte sur les combinaisons qui possèdent le meilleur taux de résolution sur les 18 scénarios de test, 9 arborescents et 9 maillés, avec les précédents critères retenus.

Pression	$P_i$		$\Pi_i$	
Initialisation	$\min c_{i,j} Q_{i,j}^2$	$\min \frac{c_{i,j} Q_{i,j}^2  Q_{i,j} }{3}$	$\min c_{i,j} Q_{i,j}^2$	$\min \frac{c_{i,j} Q_{i,j}^2  Q_{i,j} }{3}$
Objectifs				
Aucun <a href="#">IV.2.3</a>	16/18	16/18	12/18	12/18
Approvisionnement <a href="#">III.2</a>	16/18	17/18	13/18	13/18
Travail <a href="#">III.4</a>	18/18	14/18	13/18	13/18
Pression <a href="#">III.3</a>	15/18	16/18	13/18	13/18

Tableau IV.23: Nombre d'instances résolus sur les 18 possibles en fonction des différents paramètres pour un modèle d'interconnexion NLP résolu par Ipopt

Le Tableau [IV.23](#) fait apparaître des résultats intéressants. La formulation à l'aide de pression  $P_i$  est toujours meilleure que la formulation à l'aide de  $\Pi_i$ , 16 cas contre 13 en moyenne. Dans le cas de la formulation à l'aide de  $\Pi_i$ , ce sont les mêmes cinq instances de réseaux arborescents qui ne sont pas résolues.

## Conclusion

Dans ce chapitre, la modélisation du problème de transport de gaz a été examinée par une étude expérimentale. Le but en était de déterminer une ou plusieurs formulations convergeant numériquement, ce qui amène à énumérer les différents paramètres possibles pour modéliser le réseau de gaz en faisant intervenir: le modèle d'interconnexion, la formulation du terme en pression, l'initialisation par un sous-problème et la fonction objectif et le choix du solveur. Une analyse comparative sur plusieurs instances de tests a été mise en place. L'idée sous-jacente est qu'un modèle convergeant sur des exemples de taille restreinte a plus de chances de converger également sur des cas de taille plus importante.

Les tests ont permis de mettre en évidence plusieurs points clés améliorant la convergence numérique:

- une meilleure résolution pour un modèle d'interconnexion NLP à l'aide du solveur Ipopt,
- l'importance d'initialiser le problème par un premier sous-problème.

Ainsi dans ce cas là, la formulation en pression  $P_i$  est meilleure que la formulation en  $\Pi_i$ . Les différentes fonctions objectifs ne peuvent pas être discriminées de façon probante à l'issue de ces tests. Ces paramètres de formulation vont être retenus pour résoudre les instances de taille réelle dans le chapitre suivant en écartant le modèle d'interconnexion MINLP.

Enfin, ce travail a permis de répondre à une question concernant l'équivalence de résolution entre modélisations proches. On a vu que certains des modèles étudiés sont équivalents mathématiquement: par exemple la pression  $P_i$  et son carré  $\Pi_i$  sont en bijection car la pression est définie positive. Cependant, leur résolution n'est pas équivalente à l'aide des outils disponibles.

Cette remarque amène à se demander de façon plus générale, s'il n'est pas possible d'établir une cartographie des méthodes de résolution en fonction de caractéristiques des modèles qu'il faudrait également déterminer. Si on prend l'exemple de la pression formulée de deux façons différentes, il n'y a pas équivalence en terme de résolution. De même, cette constatation illustre que le travail de modélisation est primordial pour la résolution d'un problème complexe.

Etude du réseau national



## Résumé

---

Les résultats obtenus lors des tests du chapitre IV ont permis de choisir des modèles offrant de bonnes performances de résolution. L'idée est d'appliquer ces résultats afin de trouver une solution à des instances réelles.

Avant de traiter les cas réels avec interconnexions libres, une première étape est de valider les résultats précédents sur des instances à configurations fixées.

Pour franchir le cap du changement de taille du problème engendré par les interconnexions libres, deux modifications sont ensuite apportées:

- une mise à l'échelle des variables entre 0 et 1,
- une décomposition du problème en sous-problèmes à l'aide d'une suite de relaxations (cf III.2).

Des solutions sur toutes les instances réelles ont pu ainsi être obtenues.

Une construction des configurations des stations d'interconnexion est ensuite exposée. Cette dernière est nécessaire pour valider les solutions obtenues par un outil opérationnel, Bambou. L'algorithme retenu est présenté et mis en œuvre sur les cas réels étudiés. Les résultats sont intéressants et de bonne qualité.

Enfin, une étude entre une de ces solutions et une solution métier est faite. Elle souligne ainsi l'existence de plusieurs acheminements possibles pour un même scénario d'entrées/sorties.

---

## V.1 Applications des résultats de modélisation

La mise en application des résultats du chapitre précédent sur les formulations du problème de transport de gaz est présentée ici. La principale différence réside dans les instances de test qui sont alors réelles.

Après un bref rappel des caractéristiques du problème, la méthodologie de test employée est exposée. Les résultats du chapitre précédent sont ainsi appliqués sur les cas tests. Afin de résoudre ces instances, deux raffinements sont employés: une mise à l'échelle des variables et une suite de relaxations du problème.

### V.1.1 Description du réseau de transport principal

Le réseau principal de transport de gaz s'étend sur plus de 8000 km sur le territoire français. Les canalisations ont des longueurs entre 10 et 100 km et des diamètres entre 300 et 1000 mm. Il est réparti sur l'ensemble de la France, comme le montre la Figure V.1.

Cette carte permet aussi de mettre en évidence la présence d'un maillage important, essentiellement au centre du réseau. La connaissance du sens du gaz dans ces canalisations est difficile *a priori* car le gaz peut provenir de plusieurs sources d'approvisionnement, contrairement au cas arborescent.

Le réseau de transport principal contient des stations d'interconnexion. Pour rappel, seulement certaines de ces stations comportent une station de compression. Ces stations d'interconnexion possèdent entre 2 et 8 pôles distincts, ce qui porte le nombre de paires de pôles possibles sur le réseau à environ 300. Les débits sont entre des dizaines de milliers et plusieurs millions  $m^3/h$ . Les pressions sont comprises entre 40 et 100 bars.

Pour des raisons de confidentialité d'exploitation par GRTgaz, les valeurs exactes ne peuvent pas être données.

### V.1.2 Méthodologie employée

Les résultats obtenus lors des tests précédents se sont révélés efficaces sur des réseaux de petites tailles. La question se pose maintenant de leur transposition sur des cas réels.

#### V.1.2.a Détails des cas de tests

L'analyse concerne le réseau principal de transport de GRTgaz, dont la topologie est fixée, *i.e.* les canalisations, les stations d'interconnexion et leurs caractéristiques intrinsèques ne changent pas entre les différentes instances de tests. L'ensemble des instances de tests est au nombre de 34, elles proviennent du projet Capacités détaillé en I.2.2. Ce sont des cas extrêmes observés ou potentiellement possibles sur le réseau principal de transport. Les différences entre les instances de test proviennent des valeurs d'approvisionnement et de consommation.

Néanmoins, des différences topologiques seraient tout à fait envisageables. Par exemple, il serait possible d'imaginer:

- une canalisation indisponible pour des raisons d'incident ou de travaux,
- un changement dans le diamètre d'une canalisation,
- une station de compression en maintenance,
- le changement de caractéristiques d'un compresseur.

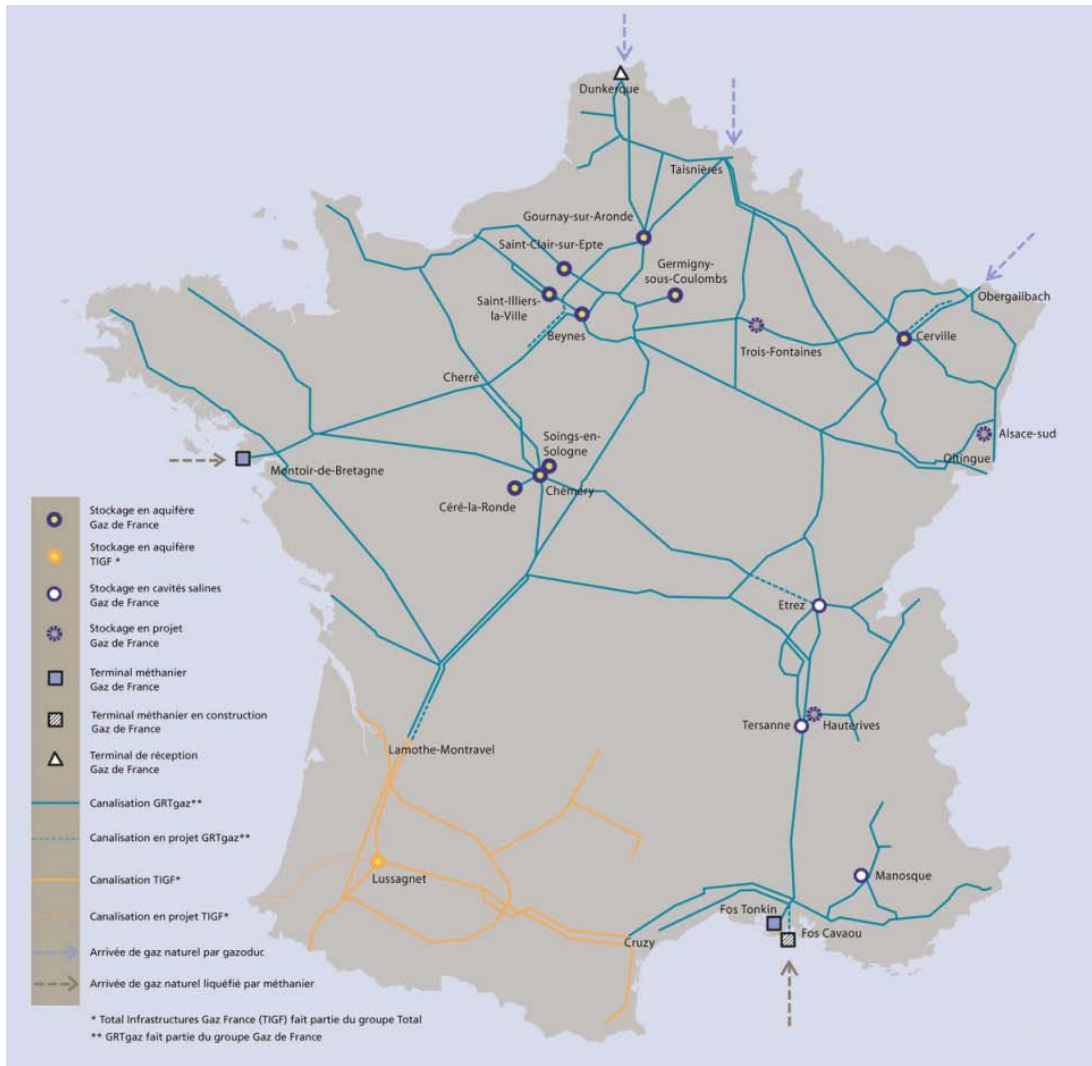


Figure V.1: Cartographie du réseau principal de transport sur le territoire français. (source GRTgaz)

## V.1.2.b Applications des formulations retenues

### *Modèle étudié*

En reprenant les travaux précédents sur des petits réseaux réalistes, plusieurs modèles sont apparus performants. Ces modèles ont pour points communs:

- une formulation NLP des interconnexions (IV.3),
- le solveur Ipop (III.1.5.a),
- la pression  $P_i$  et non son carré  $\Pi_i$  (IV.2.2),
- et l’initialisation par un sous-problème (IV.2.4).

Concernant l’initialisation, afin de faciliter la compréhension du lecteur, il a été choisi de ne présenter que les résultats issus d’un premier sous-problème de minimisation de la perte de charge (IV.12), les résultats étant similaires avec la minimisation de l’énergie mécanique dissipée.

Le problème n’ayant pas de réel critère, il a été décidé de mettre en concurrence les fonctions objectives décrites en (III.2.5.b).

### *Méthodologie de tests*

Afin de valider la pertinence de la solution, deux types d’instances ont été proposés. Dans ces deux cas, le problème est non linéaire et non convexe.

Le premier type correspond au cas où les configurations des interconnexions sont connues, à partir de solutions des 34 cas. Dans ce cas-là, les ouvrages entre les différents pôles sont connus et l’importance porte sur la convergence du problème mathématique. Le nombre de contraintes pour ces instances est de l’ordre de 400.

Le second correspond au cas général des 34 instances, à savoir sans configurations fixées. Deux pôles sont ajoutés à chaque interconnexion possédant une station de compression. Des arcs sont également ajoutés comme expliqué en (II.2.2). Le problème mathématique correspondant comporte environ 700 contraintes.

### *Coefficient de perte de charge*

Comme évoqué précédemment en (II.1.5), il avait été choisi de prendre un coefficient de perte de charge constant. Cependant, afin de mieux respecter le modèle physique, il est important de le considérer comme une variable. Il s’est avéré que l’utilisation d’une variable améliorerait également la résolution d’un problème à taille réelle, comme cela est le cas dans les exemples suivants. Ce critère est donc pris en compte et mis en concurrence avec le coefficient de perte de charge constant dans la suite du chapitre.

Ainsi, la référence constant renverra à un calcul du coefficient de perte de charge constant  $c_{i,j}$  et le terme variable se référera au calcul de  $C_{i,j}$ .

Cela a pour effet d’augmenter la taille du problème d’à peu près 200 contraintes, deux pour chaque canalisation du réseau.

## V.1.3 Application des résultats précédents

### V.1.3.a Résultats avec configurations d’interconnexions fixées

Les Tableaux (V.1) et (V.2) présentent les résultats sur des réseaux où les configurations des interconnexions sont connues.

Les pourcentages des résultats laissent à penser que la démarche employée jusqu’alors est cohérente. Cependant, les résultats avec interconnexions fixées

Critère	Coefficient de perte de charge constant $c_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas résolus	34	34	34	30
Pourcentage de cas résolus	100%	100 %	100%	88%
Temps moyen de calcul (s)	4	8	4	129

Tableau V.1: Applications des modèles sur les réseaux à configurations fixées avec coefficient de perte de charge constant

Critère	Coefficient de perte de charge variable $C_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas résolus	31	29	31	31
Pourcentage de cas résolus	91%	85 %	91%	91%
Temps moyen de calcul (s)	102	12	7	37

Tableau V.2: Applications des modèles trouvés sur les réseaux à configurations fixées avec coefficient de perte de charge variable

ne sont pas rigoureusement identiques entre nos modèles et celui de GDF-SUEZ. Des écarts peuvent apparaître notamment dans les débits et par voie de conséquence dans les pressions. Le sens du gaz reste le même, ce qui est normal car les configurations définissent les flux possibles de gaz. En moyenne, la différence est de l'ordre de 5% par rapport à la solution qui a permis de créer ces instances.

Plusieurs points peuvent expliquer cet écart. D'une part, des petites différences entre les modèles existent et cela explique que les deux solutions ne soient pas rigoureusement identiques. D'autre part, les solveurs non linéaires employés pour trouver ces deux solutions diffèrent.

Ainsi, il apparaît que les travaux effectués jusqu'à présent sont proches du modèle utilisé par GDF-SUEZ. Il faut encore améliorer les performances pour atteindre un taux de résolution parfait sur les cas à interconnexions fixées avant d'examiner le cas général.

### V.1.3.b Résultats avec configurations d'interconnexions libres

Lors de l'application des résultats issus du chapitre précédent sur les 34 cas avec configurations d'interconnexions libres, les attentes n'ont pas été satisfaites. En effet, aucune des instances n'a été résolue. Une solution est trouvée pour les sous-problèmes de minimisation de perte de charge, mais le problème avec toutes les contraintes n'est pas résolu. De plus, les temps de calcul s'avèrent relativement longs, dus vraisemblablement à la non convergence numérique des problèmes posés.

### Conclusion

Les résultats satisfaisants obtenus pour les réseaux à interconnexions fixées ont eu pour effet de valider la démarche. Cependant, la méthode de résolution par initialisation par un sous-problème de minimisation de la perte de charge n'est pas assez efficace lorsque les configurations des interconnexions sont libres.



#### V.1.4 Améliorations possibles

Plusieurs pistes sont envisageables afin de résoudre les instances réelles, notamment pour les instances avec interconnexions libres.

##### *Amélioration de la mise à l'échelle des variables*

Une première voie concerne la mise à l'échelle des variables. En effet, les variables n'ont pas les mêmes ordres de grandeurs. Les variables des débits varient d'un ordre de grandeur cent mille fois plus important que celles des pressions. La mise à la même échelle des variables permettrait d'homogénéiser la taille des variables. Cette mise à l'échelle est faite de façon automatique par GAMS. Néanmoins la documentation invite à modifier le modèle de façon à ce que les variables soient du même ordre. L'idée naturelle serait de les placer toutes dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Il y aurait ainsi une homogénéité entre les différentes variables et les matrices utilisées lors de la résolution par la méthode de points intérieurs seraient ainsi mieux conditionnées.

##### *Relaxations du problème global*

Une seconde idée consiste à poursuivre la construction de sous-problèmes avant d'arriver au problème global de transport de gaz, ce qui revient à envisager une suite de sous-problèmes.

La création de sous-problèmes à l'aide d'un ajout simple de contraintes selon un ordre prédéfini semble facile à mettre en œuvre mais le choix de l'ordre ainsi que des fonctions objectifs peut donner lieu à discussion. Ils ont été explicités en [III.2](#).

## V.2 Mise à l'échelle des variables

### V.2.1 Mise en œuvre

La mise à l'échelle des variables ne présente aucune difficulté majeure. Cela revient à s'assurer que  $P, Q, W$  appartiennent à l'intervalle  $[0; 1]$  ou tout du moins, tendent à rester proche de cet intervalle, lorsqu'elles ne sont pas bornées.

#### V.2.1.a Mise à l'échelle de la pression

Il a été choisi de faire une mise à l'échelle uniforme pour toutes les pressions, soit

$$P_{max} = \max_{i \in V} \bar{P}_i \quad (V.1)$$

et on prend comme nouvelle variable  $P'_i = \frac{P_i}{P_{max}}, i \in V$ , tel que

$$0 < \frac{P_i}{P_{max}} \leq P'_i \leq \frac{\bar{P}_i}{P_{max}} \quad (V.2)$$

Cette mise à l'échelle n'a d'influence que sur le calcul de la perte de charge ([II.14](#)), les autres équations du problème global ne sont pas impactées.

### V.2.1.b Mise à l'échelle du débit

Concernant la variable de débit  $Q_{i,j}$ , la transformation est relativement simple, soit

$$Q_{max} = \max_{i \in V} \bar{s}_i \quad (V.3)$$

et la nouvelle variable  $Q'_{i,j}$  est telle que

$$Q'_{i,j} = \frac{Q_{i,j}}{Q_{max}}. \quad (V.4)$$

Cette formulation impacte les équations de perte de charge ainsi que celle du travail du compresseur. La variable  $Q_{i,j}$  et donc la variable  $Q'_{i,j}$  ne sont bornées que dans le cas où  $(i, j)$  désigne un compresseur.

### V.2.1.c Mise à l'échelle du travail

Enfin, la dernière variable qui va être étudiée concerne le travail de compression,  $W_{i,j}$ . Le changement de variable choisi est:

$$W'_{i,j} = \frac{W_{i,j}}{W_{i,j}} \quad (V.5)$$

Cette relation n'a d'impact que sur l'équation du travail de compression du gaz.  $W'_{i,j}$  prend ses valeurs dans  $[0; 1]$ .

## V.2.2 Mise à l'échelle du problème

Les équations du problème de transport de gaz deviennent ainsi:

Trouver  $P', Q', W'$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in E} Q'_{i,j} = \frac{s_i}{Q_{max}} & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = \frac{Q_{max}^2}{P_{max}^2} c_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i, j) \in E_p \\ W'_{i,j} = \frac{Q_{max}}{W_{i,j}} \gamma_1 \cdot Q'_{i,j} \left( \left( \frac{P_j'}{P_i'} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i, j) \in E_c \\ 1 \leq \frac{P_j'}{P_i'} \leq \tau_{i,j} & \forall (i, j) \in E_c \\ Q'_{i,j} (P_i' - P_j') \geq 0 & \forall (i, j) \in E_v \\ Q'_{i,j} (P_i' - P_j') \geq 0 & \forall (i, j) \in E_l \\ 0 < P_i' < \frac{\bar{P}_i}{P_{max}} & \forall i \in V \\ \frac{Q_{i,j}}{Q_{max}} \leq Q'_{i,j} \leq \frac{Q_{i,j}}{Q_{max}} & \forall (i, j) \in E_c \\ 0 \leq Q'_{i,j} & \forall (i, j) \in E_l \\ 0 \leq W'_{i,j} \leq 1 & \forall (i, j) \in E_c \end{array} \right. \quad (V.6)$$

Les notations suivantes sont employées par la suite:

$$\begin{aligned} s'_i &= \frac{s_i}{Q_{max}} & \forall i \in V \\ c'_{i,j} &= \frac{Q_{max}^2}{P_{max}^2} c_{i,j} & \forall (i,j) \in E_p \\ \gamma'_1 &= Q_{max} \cdot \gamma_1 \end{aligned} \quad (V.7)$$

### Fonctions objectif

Les fonctions objectifs retenues initialement sont peu modifiées par cette mise à l'échelle. La maximisation des pressions (III.3) devient:

$$\max \sum_{i \in V} P'_i \quad (V.8)$$

La minimisation de l'écart d'approvisionnement se transforme en:

$$\min \sum_{i \in V | s_i > 0} (s'_i - S'_i)^2 \quad (V.9)$$

Enfin, la minimisation du travail s'écrit alors:

$$\min \sum_{A_c} \overline{W}_{i,j} \cdot W'_{i,j}. \quad (V.10)$$

## V.2.3 Résultats

### V.2.3.a Réseaux à configurations fixées

Cette mise à l'échelle permet de réduire significativement les temps de calcul et de permettre la résolution complète de toutes les instances de test sur les réseaux à configurations fixées comme cela est présenté dans les tableaux V.3 et V.4.

Critère	Coefficient de perte de charge constant $c_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas résolus	34	34	34	34
Pourcentage de cas résolus	100%	100%	100%	100%
Temps moyen de calcul (s)	2	1	1	2

Tableau V.3: Impact de la mise à l'échelle des variables dans le cas où les configurations sont fixées et le coefficient de perte de charge constant

Critère	Coefficient de perte de charge variable $C'_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas résolus	34	34	34	34
Pourcentage de cas résolus	100%	100%	100%	100%
Temps moyen de calcul (s)	2	6	1	2

Tableau V.4: Impact de la mise à l'échelle des variables dans le cas où les configurations sont fixées et le coefficient de perte de charge variable

### V.2.3.b Réseaux à configurations libres

Les Tableaux V.5 et V.6 illustre la résolution de cas à interconnexions libres.

Critère	Coefficient de perte de charge constant $c_{i,j}$			
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas résolus	6	7	10	8
Pourcentage de cas résolus	18%	21%	29%	24%
Temps moyen de calcul (s)	22	7	58	20

Tableau V.5: Impact de la mise à l'échelle des variables dans le cas constant

Critère	Coefficient de perte de charge variable $C_{i,j}$			
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas résolus	11	11	10	8
Pourcentage de cas résolus	32%	32%	29%	24%
Temps moyen de calcul (s)	134	61	57	20

Tableau V.6: Impact de la mise à l'échelle des variables dans le cas variable

Les résultats sont intéressants, près du tiers des cas sont résolus. Si on regarde en détail, seulement sept des 34 scénarios ne possèdent pas de solutions avec l'une des formulations précédentes.

Le cas avec  $C_{i,j}$  variable conduit à de meilleurs résultats, ce qui peut s'expliquer par le fait qu'il est une représentation plus fine de la réalité.

Les temps de calcul restent tout à fait admissibles, entre dix secondes et deux minutes. Dans le cas variable, les calculs sont plus longs que dans le cas constant, car le problème est de taille plus importante.

Néanmoins, une majeure partie des cas ne trouve pas de solutions avec chaque formulation. Une suite de relaxations a donc été mise en œuvre.

## V.3 Relaxations successives

L'idée est de décomposer le problème en une suite de sous-problèmes afin de converger vers une solution du problème global.

Les choix effectués ont déjà été explicités dans la partie III.2. Cette découpe en sous-problèmes s'ajoute à la mise à l'échelle des variables évoquée précédemment.

### V.3.1 Préambule

Avant de présenter distinctement ces sous-problèmes, deux points méritent des précisions. Tout d'abord en ce qui concerne l'équation de perte de charge (II.14), le coefficient  $c_{i,j}$ , constant ou  $C_{i,j}$ , variable, peut être employé selon les cas. Dans un souci de clarté, seul le cas avec  $c_{i,j}$  est présenté. Le cas avec  $C_{i,j}$  se retrouve en ajoutant les équations (II.10) et (II.11).

Deuxièmement, la fonction objectif des sous-problèmes est différente uniquement dans le cas où la minimisation du travail des compresseurs est recherchée (III.4). La fonction retenue est celle présentée en (III.5), à savoir

$$\min \sum_{i \in V} P'_i \quad (\text{V.11})$$

Le détail des sous-problèmes ( $SP_1$ ), ( $SP_2$ ), ( $SP_3$ ), ( $SP_4$ ), est présenté dans ce cas.

Pour les autres fonctions objectif, la minimisation de l'écart d'approvisionnement, la maximisation des pressions et la satisfaction des contraintes, il n'y a pas de différences entre l'objectif des sous-problèmes et celui du problème global.

### V.3.2 Mise en place

Afin de faciliter la lecture, la mise en œuvre de la suite de relaxations est détaillée ici. Elle reprend les points principaux évoqués dans la section III.2. Les travaux sur la modélisation ont mis en évidence l'intérêt d'initialiser le problème à l'aide d'un premier problème d'initialisation. La question se pose maintenant sur la construction d'une suite de sous-problèmes pour faciliter la convergence numérique. Une idée forte de cette méthode est de prendre comme valeurs d'initialisation, la solution du sous-problème précédent.

Le premier sous-problème d'initialisation est relatif à la minimisation de la perte de charge ( $SP_0$ ). Il permettra de donner une valeur initiale aux variables de débits. Il est rappelé ci-dessous.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E_p} c_{i,j} \cdot Q'_{i,j}{}^2 \\ \text{s.c.} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i \quad \forall i \in V \end{array} \right. \end{aligned} \quad (SP_0)$$

Ensuite quatre sous-problèmes sont construits.

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in V} P'_i \\ & \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = c'_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \end{cases} \end{aligned} \quad (SP_1)$$

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in V} P'_i \\ & \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = c'_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \end{cases} \end{aligned} \quad (SP_2)$$

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in V} P'_i \\ & \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = c'_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \end{cases} \end{aligned} \quad (SP_3)$$

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i \in V} P'_i \\ & \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = c'_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \\ 1 \leq \frac{P'_j}{P'_i} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \end{cases} \end{aligned} \quad (SP_4)$$

Le problème de transport de gaz s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{(i,j) \in E_c} W'_{i,j} \\ & \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{j|(i,j) \in E} Q'_{i,j} = s'_i & \forall i \in V \\ P_i'^2 - P_j'^2 = c'_{i,j} \cdot Q'_{i,j} \cdot |Q'_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \\ Q'_{i,j}(P'_i - P'_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \\ 1 \leq \frac{P'_j}{P'_i} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \\ W'_{i,j} = \frac{\gamma'_1}{W_{i,j}} \cdot Q'_{i,j} \left( \left( \frac{P'_j}{P'_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i,j) \in E_c \end{cases} \end{aligned} \quad (V.12)$$

Il est important de résoudre tous les sous-problèmes. Il n'est pas possible de s'arrêter avant de les avoir tous traités car la solution ne respecterait pas toutes les contraintes.

### V.3.3 Application de la suite de relaxations

La suite de relaxations est appliquée sur les instances réelles à configurations fixées et à configurations libres.

#### V.3.3.a Résultats à configurations fixées

Les résultats dans ce cadre sont dans la continuité des précédents, dans le cas constant ou variable, on obtient 100% de réussite. Cette méthode de résolution ne dégrade pas les performances sur ces cas.

#### V.3.3.b Résultats à configurations libres

Les résultats sont regroupés dans le Tableaux [V.7](#) et [V.8](#).

Critère	Coefficient de perte de charge constant $c_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas réussis	30	34	30	31
Pourcentage de réussite	88%	100%	94%	91%
Temps de calcul (s)	193	63	196	88

Tableau V.7: Efficacité de la décomposition en 5 sous-problèmes dans le cas constant

Critère	Coefficient de perte de charge variable $C_{i,j}$			Satisfaction des contraintes
	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	
Nombre de cas réussis	33	34	32	34
Pourcentage de réussite	97%	100%	94%	100%
Temps de calcul (s)	451	47	429	68

Tableau V.8: Efficacité de la décomposition en 5 sous-problèmes dans le cas variable

La découpe du problème global améliore le taux de résolution pour approcher 95 % dans tous les cas tests. En contrepartie, les temps de calcul ont globalement été augmentés par rapport à la simple mise en échelle, exception faite du cas où l'objectif est de minimiser l'écart d'approvisionnement [III.2](#). En effet, on passe de deux problèmes à résoudre à six comme cela est détaillé en [III.2](#). Ce dernier objectif conduit par ailleurs une résolution parfaite de tous les cas.

Les cas variables ont un meilleur taux de résolution. Les temps de calcul sont cependant plus longs, comme cela a déjà été mentionné.

### V.3.4 Conclusion

La résolution des 34 instances de tests concernant des réseaux d'échelle nationale a été menée à bien grâce à l'utilisation de trois procédures.

Tout d'abord, une meilleure prise en compte des phénomènes physiques a été proposée en faisant intervenir un coefficient de perte de charge variable. Ensuite, une mise à l'échelle des variables a été effectuée et a eu deux effets positifs. Elle a permis de résoudre un tiers des cas et de diminuer le temps de calcul de façon importante. Enfin, la décomposition en six sous-problèmes a permis de résoudre la totalité des instances de tests. Cependant, la fonction objectif impacte clairement le temps de calcul des sous-problèmes, mais ce dernier reste très largement acceptable pour des problèmes de dimensionnements.

Ces résultats confirment la faisabilité. Il faut maintenant s'assurer de leur validité opérationnelle.



## V.4 Validation et utilisation opérationnelle des résultats

L'approche mise en place a permis de résoudre le problème de vérification de capacités d'un réseau de transport de gaz, mathématiquement non linéaire et en variables continues. Elle a permis de répondre à la question de la faisabilité du scénario d'entrées/sorties proposé. Elle exhibe également une solution en donnant les débits et les pressions sur le réseau.

Bambou est employé ici afin de s'assurer de la validité opérationnelle de ces résultats. Avant de pouvoir utiliser les résultats précédents, il faut les transformer dans un formalisme accepté par Bambou. Il nécessite la construction des configurations des interconnexions.

En outre, le modèle d'interconnexion NLP n'est pas exactement le même que celui du gestionnaire, GRTgaz. En effet, une interconnexion avec compresseur se voit rajouter deux pôles dans le modèle NLP. Il peut ainsi y avoir des boucles de gaz au sein d'une interconnexion, comme l'illustre la Figure IV.9 du chapitre précédent. Le gestionnaire du réseau a besoin de connaître la configuration de chaque interconnexion dans son modèle, à savoir sans boucles.

### V.4.1 Bambou

Comme dit précédemment en I.2.2, Bambou est un outil de calcul de réseau de transport de gaz développé en interne par GDF-SUEZ. Il calcule les débits et les pressions sur l'ensemble du réseau. Il effectue également d'autres calculs: qualité du gaz, répartition au sein d'une station de compression. Ces derniers points ne font pas partie du cadre de cette étude.

Pour rappel, une configuration est la liste des ouvrages, vanne ou compresseur, reliant des pôles d'une même interconnexion. La donnée d'entrée de Bambou est un réseau où les configurations des interconnexions sont fixées. Il calcule la validité du réseau proposé en s'assurant de respecter les consignes de service et de sécurité.

Pour pouvoir valider les résultats issus des calculs précédents à l'aide de Bambou, il faut d'abord construire des configurations correspondantes pour les stations d'interconnexion.

### V.4.2 Création de configurations d'interconnexions

La création de configurations n'est pas une modification de la topologie du réseau mais une transformation des résultats précédents dans un formalisme opérationnel compris par Bambou.

Pour créer des configurations d'interconnexions, quatre démarches ont été envisagées. La première consiste à construire les configurations, à l'aide d'une heuristique, en utilisant sur les valeurs de débits et de pressions des pôles des interconnexions. Les trois autres s'appuient sur la résolution de problèmes dérivés du problème de transport de gaz (V.12). Ils consistent en l'ajout de contraintes mathématiques ou en une modification des données du réseau ou en la résolution d'un problème de faisabilité annexe.

#### V.4.2.a Algorithme de construction de configurations d'interconnexion

Cette partie présente un algorithme de construction de configuration. La construction est faite pas à pas en fonction des différents cas possibles, avec

comme seules données nécessaires les débits et les pressions aux différents pôles de l'interconnexion obtenus à l'aide de la suite de relaxations. Les données du compresseur ne sont pas utilisées.

La Figure V.2 illustre la procédure pour un cas simple.

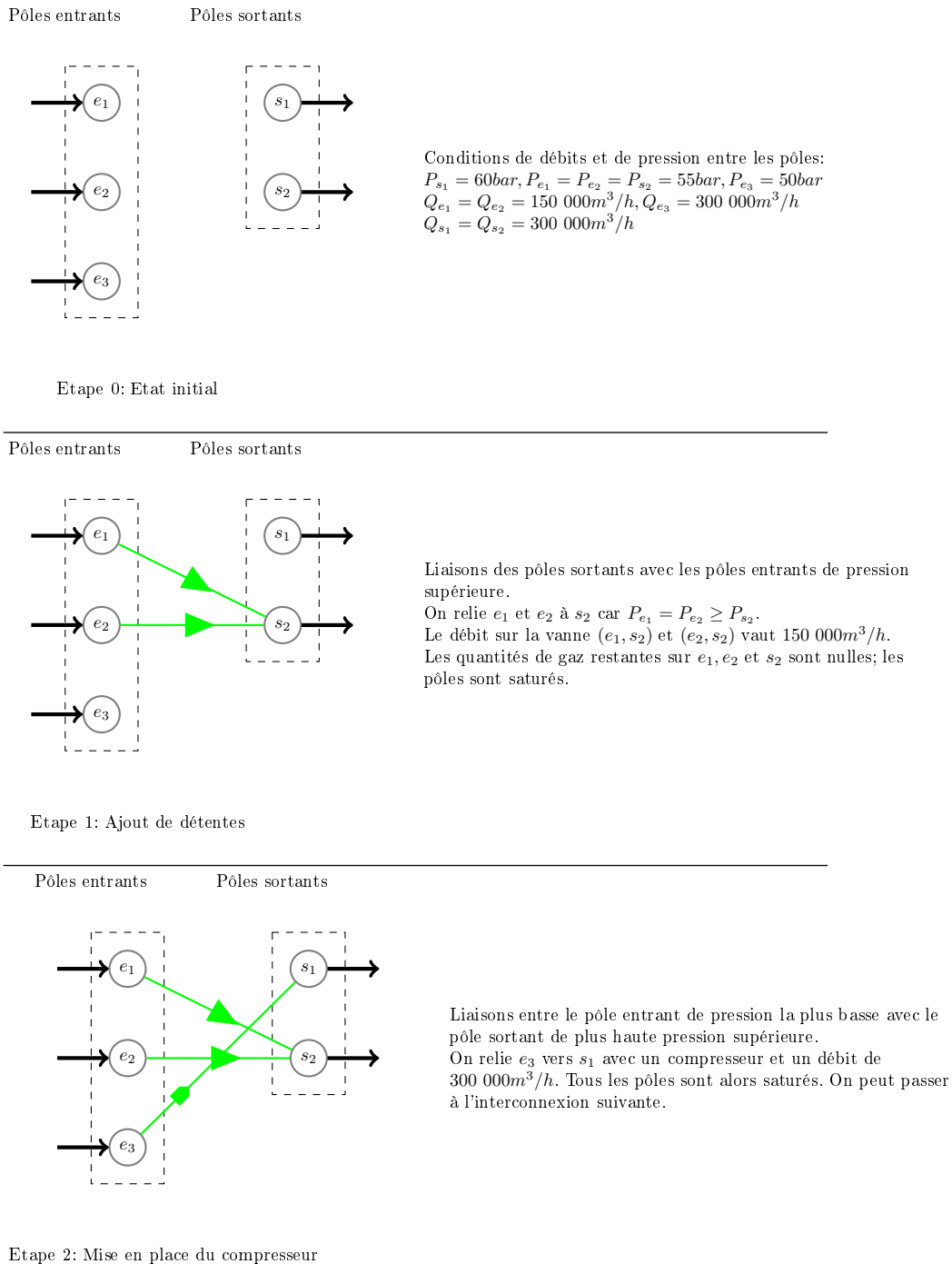


Figure V.2: Exemple de création de configuration sur un cas fictif

### Notations

Si le gaz entre par le pôle vers l'interconnexion, on parle alors de pôle entrant et dans le cas contraire, ce pôle est nommé pôle sortant. L'ensemble des pôles entrants est alors noté  $I_{in}$  et les pôles sortants  $I_{out}$ .

La pression pour un pôle  $i$ , quel que soit son type, entrant ou sortant, est notée  $P_i$ . La quantité de gaz qui entre ou qui sort de l'interconnexion au pôle  $i$  est notée  $Q_i$ . On rappelle que par convention  $\forall i \in I_{in}, Q_i \geq 0$  et  $\forall i \in I_{out}, Q_i \leq 0$ .

Les seules données d'entrée nécessaires pour cet algorithme sont  $P_i$  et  $Q_i$ .

### Description

Les instances d'étude sont des cas proches des limites de la capacité du réseau. Ces dernières sont principalement dues aux caractéristiques des compresseurs. Ainsi pour se placer dans les meilleures conditions pour trouver des configurations valides, les liaisons entre les pôles vont être choisies de façon à minimiser la compression.

L'algorithme va fonctionner en deux étapes. La première consiste à relier les pôles entrants aux pôles sortants à l'aide d'une vanne de détente. Cette vanne ne pourra être placée que si la pression du pôle entrant est supérieure au pôle sortant. La quantité de gaz restante de chaque pôle est modifiée en fonction des affectations faites. A l'issue de cette procédure, s'il reste un pôle entrant non relié à un pôle sortant, cela implique que la compression est nécessaire.

La deuxième étape se divise en deux parties. Il faut relier les pôles entrants dont la quantité de gaz est non nulle entre eux à l'aide de détente, de même pour les pôles sortants. Puis un compresseur est placé entre le pôle entrant de plus basse pression avec le pôle sortant de pression la plus haute.

### Liaison à l'aide de vannes de détente

Cette étape a pour but de lier les pôles entrants aux pôles sortants à l'aide de détentes. Le choix entre deux pôles de type différent, entrant ou sortant, va se faire selon leur pression. En effet, il faut relier un pôle sortant avec un pôle entrant de pression supérieure.

Une fois ce choix effectué, les quantités de gaz du pôle entrant et du pôle sortant sont modifiées en fonction du débit circulant sur la vanne. L'un de ces deux pôles va voir sa quantité de gaz rendue nulle, il est alors saturé.

Une fois arrivé en fin de cette étape, deux cas peuvent se produire. Soit tous les pôles entrants sont reliés, auquel cas on peut passer à l'interconnexion suivante. Dans le cas contraire, il va falloir avoir recours à la compression.

Cet algorithme peut se formuler comme ce qui suit. Les pôles entrants et sortants sont triés par niveau de pressions décroissantes. Ainsi les relations suivantes sont vérifiées:

$$P_i \geq P_j \quad \forall (i, j) \in I_{in}^2 | i \leq j \quad (\text{V.13})$$

$$P_i \geq P_j \quad \forall (i, j) \in I_{out}^2 | i \leq j \quad (\text{V.14})$$

On parcourt l'ensemble des pôles sortants  $i_s \in I_{out}$  dont la demande est strictement négative  $Q_i < 0$ . Pour un pôle sortant  $i_s$ , un pôle entrant  $j_e \in I_{in}$  est cherché tel que  $P_{j_e} \geq P_{i_s}$  et que son apport en gaz est non nul  $Q_{j_e} > 0$ . S'il n'existe pas de pôle entrant qui vérifie ces conditions, un compresseur doit être utilisé. Cette étape est détaillée plus loin.

Les pôles  $i_s$  et  $j_e$  vérifient les conditions de pressions et de débits nécessaires pour détendre le gaz de  $j_e$  vers  $i_s$ . On va relier les pôles  $i_s$  et  $j_e$  à l'aide d'une vanne de détente, qui va permettre d'acheminer une quantité de gaz, égale au maximum à  $\min(|Q_{i_s}|, Q_{j_e})$ .

L'un des deux pôles,  $i_s$  ou  $j_e$  est saturé *i.e.* sa quantité de gaz est nulle après le débit qui circule sur la vanne  $(i_s, j_e)$ . Pour continuer l'algorithme, les quantités de gaz  $Q_{i_s}$  et  $Q_{j_e}$  sont mises à jour suivant les relations suivantes:

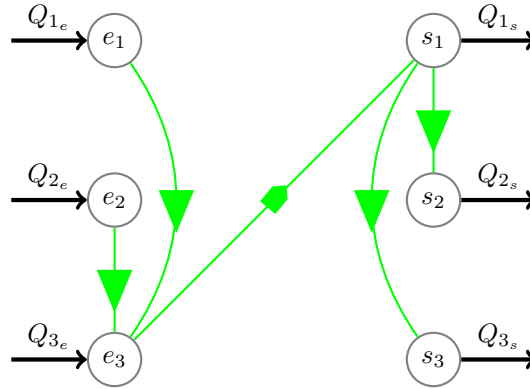
$$\begin{aligned} Q_{j_e} &:= Q_{j_e} - \min(|Q_{i_s}|, Q_{j_e}) \\ Q_{i_s} &:= Q_{i_s} + \min(|Q_{i_s}|, Q_{j_e}) \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

#### *Liaison à l'aide d'un compresseur*

On est dans le cas où plusieurs pôles entrants ne peuvent pas être reliés à un des pôles sortants à l'aide d'une détente. En effet, en sortie de l'étape précédente, il ne peut pas avoir de pôle entrant pouvant alimenter un pôle sortant de pression inférieure. Le gaz doit alors être comprimé. Il n'y a qu'un seul compresseur disponible, condition admise dans cette étude. Afin de tenir compte de cette limitation, il doit être placé entre le pôle entrant de pression la plus basse et le pôle sortant de pression la plus haute.

Les pôles entrants sont donc reliés vers le pôle entrant de pression la plus basse  $j_e$  à l'aide de vannes. Le pôle sortant de pression la plus élevée  $i_s$  est raccordé vers les autres pôles avec des vannes de détente. Enfin, le compresseur est placé entre  $j_e$  et  $i_s$ .

La Figure V.3 illustre cette étape sur un exemple.



$$P_{s_1} \geq P_{s_2} \geq P_{s_3} > P_{e_1} \geq P_{e_2} \geq P_{e_3}$$

Figure V.3: Exemple d'une interconnexion construite par l'algorithme avec utilisation de la compression

#### V.4.2.b Ajout de contraintes au problème de base

Une autre piste évoquée afin de construire des configurations est de rajouter des contraintes au problème final (V.12) de façon à n'avoir qu'un seul ouvrage entre deux pôles.

On ne peut avoir qu'un compresseur ou une vanne de détente entre deux pôles  $i$  et  $j$  de l'interconnexion  $I_n$ . Mathématiquement, cela revient à rendre nul soit le débit direct entre  $i$  et  $j$ ,  $Q_{i,j}$ , soit le débit qui va de  $i$  en  $j$  en passant par le compresseur  $(c_{in}, c_{out}), Q_{i,c_{in}} + Q_{c_{out},j}$ .

La contrainte s'exprime pour deux pôles  $(i, j)$  de l'interconnexion  $I$  par les deux égalités:

$$\begin{aligned} Q_{i,j}(Q_{i,c_{in}} + Q_{c_{out},j}) &= 0 \\ Q_{i,j}(Q_{j,c_{in}} + Q_{c_{out},i}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

Cependant, les premiers tests avec l'ajout de ces égalités ne se sont pas révélés concluants. En effet, les nouvelles contraintes empêchent le solveur de converger.

#### V.4.2.c Élimination d'éléments topologiques

L'idée ici est de modifier la structure telle qu'elle a été proposée jusqu'ici afin de tenir compte des configurations. Le problème est traité avec tous les arcs. Les boucles de gaz dans une interconnexion vont être identifiées. Dans ces boucles, les arcs, liens ou vannes, avec les débits les plus faibles sont supprimés du réseau. Et l'on va relancer la résolution sur ce réseau modifié.

Par exemple, dans le cas d'une boucle constituée des pôles  $i, j, k$  cela revient à supprimer l'arc  $e$  du réseau tel que:

$$e \in \{(i, j), (j, k), (k, i)\} | Q_e = \min(Q_{i,j}, Q_{j,k}, Q_{k,i}) \quad (\text{V.17})$$

Les calculs sont effectués de nouveau en initialisant à l'aide des débits sur les canalisations trouvés précédemment.

En itérant ainsi, on revient à converger vers un réseau qui peut être sans solution. En effet, chaque retrait d'arête diminue la souplesse du réseau, à savoir la possibilité pour le gaz de passer par plusieurs chemins.

#### V.4.2.d Satisfaction des contraintes d'une interconnexion

On va chercher à créer une configuration en résolvant un problème propre à chaque interconnexion.

La configuration d'une interconnexion peut se ramener à un ensemble de contraintes à satisfaire. Comme précédemment en V.4.2.a, l'ensemble des pôles entrants est noté  $I_{in}$  et les pôles sortants  $I_{out}$ .

Les variables entières sont  $valv_{i,j}$  et  $comp_{i,j}$  pour  $i \in I_{in}, j \in I_{out}$ .  $valv_{i,j}$  vaut 1 s'il y a une vanne de détente entre  $i$  et  $j$ , 0 sinon.  $comp_{i,j}$  vaut 1 s'il y a un compresseur entre  $i$  et  $j$ , 0 sinon. Il y a également les variables continues

$Q_{i,j}$  qui représentent le débit sur l'arc  $(i,j)$ .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{valv}_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \\ \text{comp}_{i,j}(P_j - P_i) \geq 0 & \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \\ \sum_{I_{in} \times I_{out}} \text{comp}_{i,j} \leq 1 & \\ \text{valv}_{i,j} + \text{comp}_{i,j} \leq 1 & \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \\ (\text{valv}_{i,j} + \text{comp}_{i,j})Q_{ij} \leq Q_{i,j} & \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \\ Q_{i,j} \leq (\text{valv}_{i,j} + \text{comp}_{i,j})\overline{Q}_{ij} & \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \\ \sum_{j \in I_{out}} Q_{i,j} = Q_i & \forall i \in I_{in} \\ \sum_{i \in I_{in}} Q_{i,j} = Q_j & \forall j \in I_{out} \end{array} \right. \quad (\text{V.18})$$

Si le travail du compresseur n'est pas pris en compte, le problème ci-dessus est linéaire en nombres entiers (MILP). La taille n'est pas très grande, et un solveur du commerce ou un Branch & Bound [Land60] devrait le résoudre rapidement.

Si on rajoute la prise en compte le travail du compresseur, les équations suivantes s'ajoutent.

$$\underline{W}_{i,j} \leq \text{comp}_{i,j} \gamma_1 Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right) - 1 \right) \quad \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \quad (\text{V.19})$$

$$\text{comp}_{i,j} \gamma_1 Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right) - 1 \right) \leq \overline{W}_{i,j} \quad \forall (i,j) \in I_{in} \times I_{out} \quad (\text{V.20})$$

Le problème ainsi obtenu est non linéaire en nombres entiers. Il est de plus non convexe.

#### V.4.2.e Choix retenu

La construction de configuration V.4.2.a est le choix mis en œuvre. Il ne fait pas appel à des outils d'optimisation, qui ont montré des problèmes de convergence dans les cas V.4.2.c et V.4.2.b. En partant de la pression et le débit sur les pôles de l'interconnexion présents dans les solutions trouvées précédemment, il est possible de reconstruire des configurations d'interconnexions.

Une fois les configurations des interconnexions créées, il faut maintenant valider cette construction. Cette validation va donc se faire en deux étapes. La première est de s'assurer que les configurations ainsi créées donnent des solutions valides au problème à interconnexions fixées. La résolution s'appuie sur la méthode de résolution décrite plus haut, à savoir mise à l'échelle et relaxations successives. Ensuite, les solutions confirmées sont évaluées par Bambou.

### V.4.3 Validation de la construction des configurations construites

Un premier examen consiste à vérifier que ces cas à interconnexions construites ont un sens avec la méthode de résolution par suite de relaxations.

Les différents résultats sont repris dans le Tableau V.9. On se place dans le cas constant.

On constate que la reconstruction des configurations des interconnexions fonctionne dans le cas constant.

Critère	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas réussis précédemment	30	34	30	31
Nombre de cas validés par la construction des configurations des interconnexions	30	34	30	31
Pourcentage de réussite	100%	100%	100%	100%

Tableau V.9: Validation de la construction des configurations des interconnexions des cas résolus dans le cas constant

Les résultats du cas variable dans le Tableau V.10 ne montrent pas de différences avec ceux du cas constant. La reconstruction fonctionne également dans le cas variable.

Critère	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas réussis précédemment	33	34	32	34
Nombre de cas validés par la construction des configurations des interconnexions	33	34	32	34
Pourcentage de réussite	100%	100%	100%	100%

Tableau V.10: Validation de la construction des configurations des interconnexions des cas résolus dans le cas variable

### *Conclusion de la construction de configurations*

Ce résultat confirme l'approche développée jusqu'à présent. La construction des interconnexions est valide avec le modèle décrit précédemment et les méthodes de résolution employées. Il faut maintenant s'assurer de leur validité avec Bambou.

#### V.4.4 Validation par Bambou des résultats proposés

Plusieurs solutions différentes ont été trouvées à l'aide des différents objectifs présentés plus haut. Chacune des solutions valides va être analysée, qu'elle soit issue du modèle constant ou du modèle variable. Pour rappel, il y a 125 solutions dans le cas constant et 133 dans le cas variable. Les données de ces solutions permettent de construire en conséquence les différentes configurations pour les stations d'interconnexion.

Bambou va tenter de résoudre les cas à partir des configurations ainsi reconstruites.

Les résultats dans le Tableau V.11 sont un peu en deçà des attentes.

On pouvait espérer des meilleurs taux de résolution.

Il apparait que chacun des 34 cas est résolu par au moins une des fonctions objectif.

Les résultats dans le cas variable présentés dans le Tableau V.12 sont plus encourageants.

Critère	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas réussis	30	34	33	31
Nombre de cas validés par Bambou	10	25	26	23
Pourcentage de réussite	33%	73%	78%	74%

Tableau V.11: Validation par Bambou des cas avec interconnexions reconstruites dans le cas constant

Critère	Minimisation du travail des compresseurs $\min \sum W_{i,j}$	Minimisation de l'écart d'approvisionnement $\min \sum (s_i - S_i)^2$	Maximisation des pressions aux consommations $\max P_i$	Satisfaction des contraintes
Nombre de cas réussis	33	34	34	34
Nombre de cas validés par Bambou	14	24	32	25
Pourcentage de réussite	42%	70%	94%	73%

Tableau V.12: Validation par Bambou des cas avec interconnexions reconstruites dans le cas variable

En effet, le caractère variable est plus proche du modèle physique de Bambou. Le taux de résolution est meilleur pour tous les objectifs. Il n'est cependant, pas encore parfait. Les 34 cas ont une solution validée par Bambou si l'on prend en compte toutes les fonctions objectif.

#### *Conclusion de la validation par Bambou*

Le bon taux de résolution des différentes reconstructions est encourageant. Il confirme que les approximations faites pour le modèle NLP des interconnexions ne sont pas très éloignées du modèle réel décrit par Bambou. Au final, pour les cas d'un coefficient de perte de charge constants ou variable, tous les scénarios ont une solution validée par Bambou.

Cependant, le taux de validation par Bambou n'est pas maximal, cela est probablement dû au fait de la proximité des limites du problème. La différence de choix de solveur entre les deux approches peut également y contribuer.



### V.4.5 Analyse entre une solution métier et une de nos solutions

Sur les 34 cas de départ, tous ont une solution validée par Bambou.

Si on regarde un cas de plus près, on s'aperçoit que les solutions trouvées ne sont pas les mêmes entre la solution proposée précédemment et celle en sortie de la méthode de relaxation et de la construction des configurations.

Les interconnexions sont représentées par des cadres rouges. A l'intérieur de ces cadres, on s'aperçoit que les solutions obtenues ne sont pas les mêmes. La carte de France illustrée sur la Figure V.5, est représentée avec les différentes configurations données par le logiciel issu du projet Capacités, CLER. La légende est présentée dans la Figure V.4.

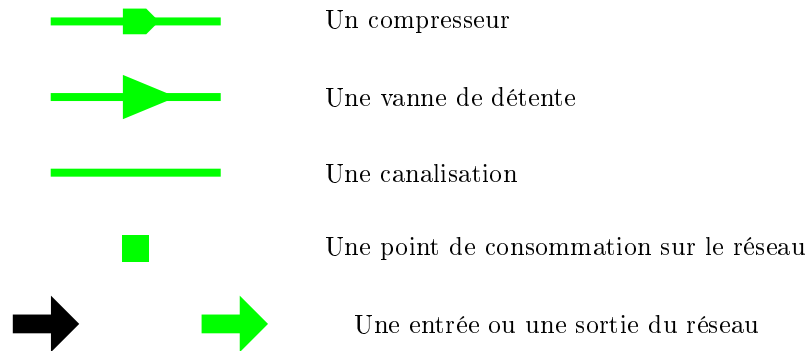


Figure V.4: Légende des symboles sur les cartes de France

La carte de France Figure V.6 est illustrée avec les différentes configurations trouvées par l'algorithme précédent et validées par Bambou. Hormis les débits qui sont différents sur une majeure partie du réseau, les configurations sont également différentes.

#### V.4.5.a Similarités

La Figure V.7 reprend la carte avec les configurations identiques entre les deux solutions obtenues.

Il apparaît que les interconnexions similaires entre les deux solutions sont des interconnexions de petites tailles, deux à quatre pôles. Il est cependant difficile d'inférer une règle sur les configurations identiques. Elles sont réparties sur l'ensemble du réseau. Elles se situent aussi bien proches des entrées/sorties du réseau qu'en son cœur. La présence de compresseur n'est pas non plus un critère de similarité.

La seule caractéristique commune à ces interconnexions est leur petite taille. Elles ont donc peu de possibilités de configurations différentes. Il est donc plus probable de retomber sur une même configuration.

#### *Différences*

Comme pour les similarités, il est difficile de dégager une règle permettant de qualifier les configurations différentes entre les deux solutions. Par exemple, l'interconnexion 37, située dans le sud-est de Paris a deux configurations radicalement différentes, Figures V.8 et V.9.

La solution de CLER met un compresseur pour du gaz allant de l'est vers l'ouest. La configuration reconstruite met une vanne pour un gaz allant dans

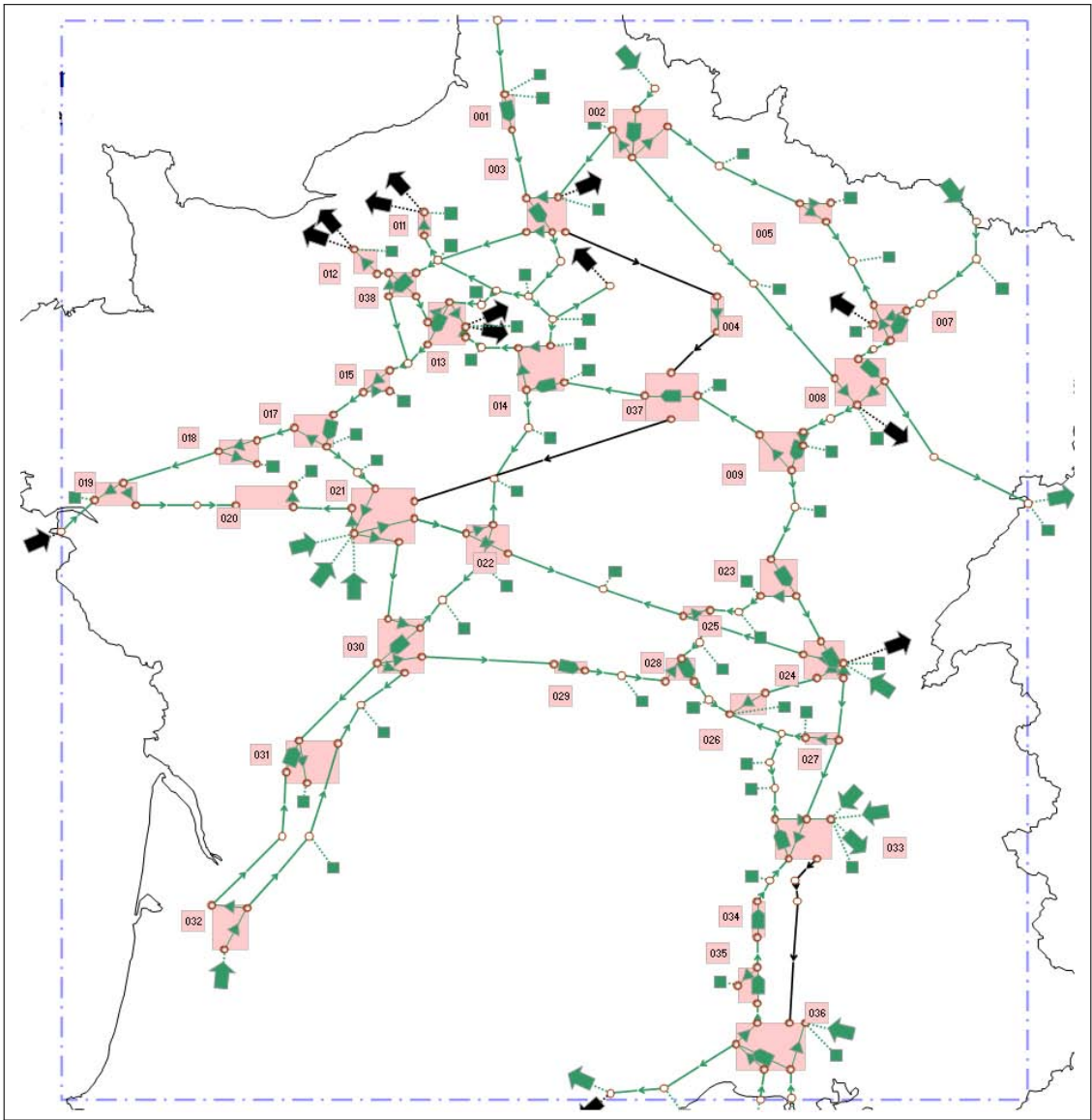


Figure V.5: Solution d'un cas fourni par GDF-SUEZ

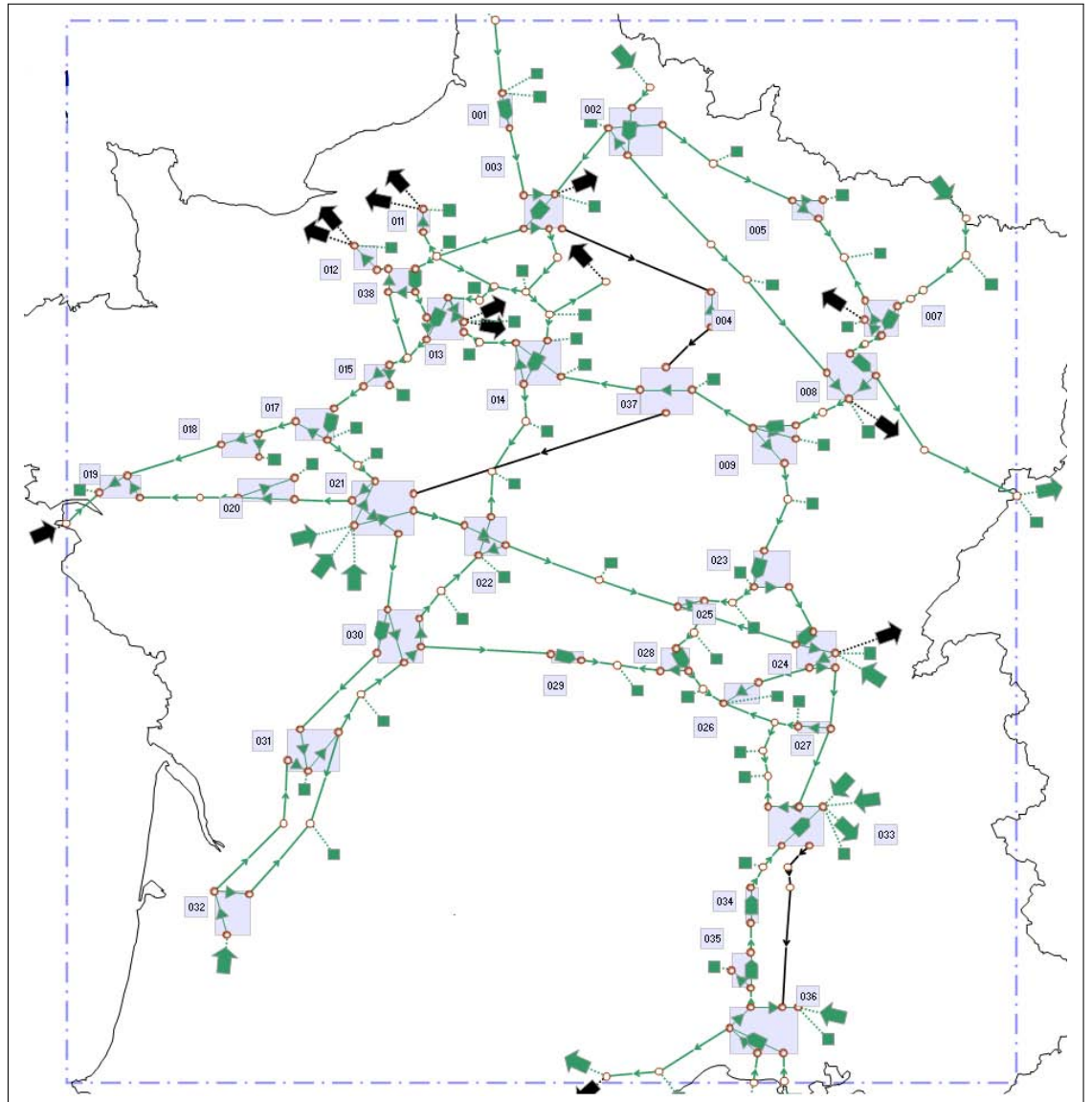


Figure V.6: Solution d'un cas par relaxations, validé par Bambou suite à la reconstruction des configurations

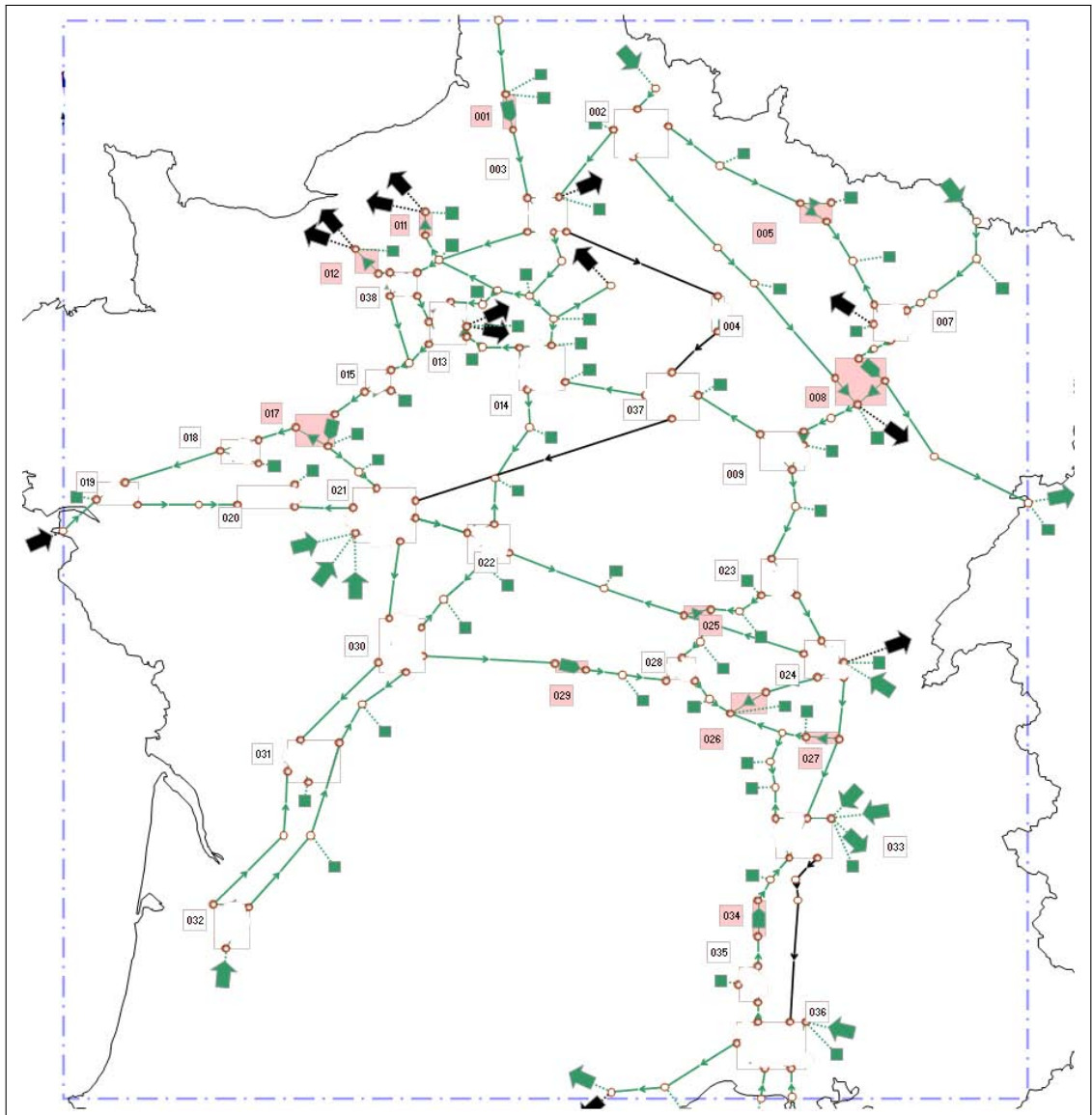


Figure V.7: Cartographie commune entre la solution Bambou et notre solution

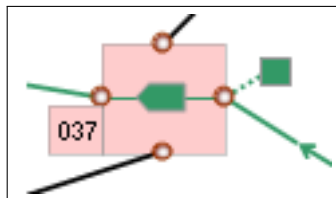


Figure V.8: Solution par CLER (heuristique métier)

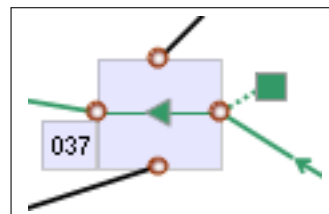


Figure V.9: Solution par suite de relaxations et validée par Bambou

le même sens. Sur cette interconnexion, les deux solutions proposent un traitement du gaz différent, compression ou détente.

De même, les débits de gaz sur certaines canalisations ne sont pas dans le même sens.

### *Conclusion*

D'un point de vue plus global, 11 configurations sont identiques et 23 différent. Il apparaît que pour un même jeu d'entrées/sorties, il existe ainsi plusieurs manières d'acheminer le gaz.

La comparaison numérique entre ces deux cas est reprise dans le tableau V.13 . Pour des raisons de confidentialité, seuls les ordres de grandeurs sont donnés.

	Débit ( $m^3/h$ )	Pression ( $bar$ )	Travail ( $kWh$ )
Moyenne	62332	1.78	1187
Médiane	13909	0.11	579
Ecart min	0	0	0
Ecart max	292317	20.23	5000

Tableau V.13: Récapitulatif des écarts entre la solution Bambou et notre solution

Au vu des grandeurs données par les résultats, l'écart n'est pas très important. Les configurations sont cependant assez différentes. Cela appuie l'existence de plusieurs solutions pour un même scénario.

### V.4.5.b Conclusion

Finalement, deux solutions très différentes ont été trouvées, une à l'aide de CLER et l'autre à l'aide d'une suite de relaxations. Ces deux solutions ont toutes les deux été validées par Bambou le logiciel de référence.

## Conclusion

Ce chapitre reprend les travaux effectués sur les instances de tests du réseau de transport principal. Ils s'inscrivent dans une démarche de validation de la modélisation des phénomènes physiques ainsi que des méthodes de résolution.

Après une application des résultats du chapitre précédent, deux modifications ont été employées afin de résoudre toutes les instances de test.

- un meilleur conditionnement du problème grâce à une mise à l'échelle pertinente des différentes variables et
- une découpe du problème en une suite de sous-problèmes cohérents.

Les résultats obtenus sur les cas tests sont intéressants et permettent de valider les 34 cas test proposés.

Afin de s'assurer de leur validité opérationnelle, la solution doit être vérifiée par Bambou, outil de référence de calcul des réseaux. Il a été choisi d'utiliser une heuristique de construction de configurations pour l'utiliser. La validation par Bambou, est bonne mais n'est pas encore parfaite. Deux facteurs apparaissent comme probables:

- des approximations dans le modèle physique, notamment dans le coefficient de perte de charge  $\lambda$  et le calcul de  $\gamma_1$  pour le travail du compresseur,
- et enfin, une différence d'appréciation de la convergence numérique des solveurs de points intérieurs.

En outre, la construction de configuration permet d'avoir un résultat directement exploitable par le gestionnaire de réseau.

La démarche employée a donc eu le résultat escompté. Elle répond à la question de la faisabilité du transport de gaz sur des instances réelles tout en intégrant la problématique des interconnexions.

## Conclusion et Perspectives



## VI.1 Conclusion

Ce travail de thèse avait pour but d'étudier la faisabilité de scénarios extrêmes sur un réseau de transport de gaz naturel. Le réseau de transport principal français a servi de support à cette étude et présente une complexité attribuée à la présence de: points d'approvisionnement et de consommation répartis sur tout le réseau, de mailles de canalisations et de stations d'interconnexions.

Le premier chapitre a introduit la thématique et a mené une analyse des travaux antérieurs recensés dans la bibliographie. Le deuxième chapitre a présenté de façon détaillée les modèles des phénomènes physiques entrant en compte dans le transport de gaz, à savoir:

- le bilan de matière,
- les équations liées à la perte de charge dans les canalisations,
- les phénomènes de compression et de détente du gaz.

Le problème ainsi défini est alors non linéaire et non convexe. Il a été explicité de deux façons différentes pour modéliser les phénomènes induits par la présence des stations d'interconnexions. La première consiste à utiliser des variables binaires pour représenter les effets de la station d'interconnexion, ce qui confère un caractère combinatoire marqué. Le problème ainsi formulé est non linéaire mixte en nombres entiers (MINLP). La conjugaison du caractère entier et de l'aspect non linéaire donne lieu à un problème d'optimisation dont la convergence vers une solution n'est pas garantie. La seconde modélisation consiste à n'utiliser que des variables continues mais augmente en contrepartie le nombre d'équations du problème. Le modèle résultant, non linéaire continu (NLP) n'est pas rigoureusement équivalent au précédent. Le cœur du problème de transport de gaz est donc non linéaire et non convexe, quelle que soit la fonction objectif considérée. En conclusion, le modèle d'interconnexion conduit soit à l'ajout de variables binaires dans le cas MINLP, soit à l'augmentation de la taille du problème dans le cas NLP.

Dans le chapitre III, les outils de résolutions adaptés au problème ont été présentés. Une attention particulière a été apportée aux méthodes de résolution effectivement utilisés dans le cadre de ce travail. La première partie considère le problème uniquement d'un point de vue mathématique. Différents solveurs ont ainsi été examinés. Ils implémentent des méthodes différentes dans le but de résoudre de façon générique un système d'équations, que ce soit dans le cas non linéaire continu ou non linéaire mixte en nombres entiers. Trois solveurs de chaque type sont retenus et mis en concurrence par la suite. En outre, une méthode de résolution basée sur la relaxation du problème a été développée.

Le chapitre IV s'est intéressé à la modélisation du problème de transport de gaz et pose une question d'ordre plus général: est-ce que toutes les modélisations équivalentes en terme de description du problème le sont également du point de vue de la résolution, notamment par les solveurs utilisés? Une autre idée sous-jacente de ce chapitre est qu'une formulation efficace sur des exemples de taille restreinte a de fortes chances de donner de bons résultats sur des instances plus conséquentes. Plusieurs variantes du problème de transport de gaz naturel sont décrites et un jeu d'instances a été créé pour rechercher la meilleure stratégie de résolution. Toutes les combinaisons possibles ont été évaluées afin de trouver la voie la plus performante en terme de taux de résolution. Deux points marquants sont ressortis de cette étude: l'efficacité de la résolution mesurée par rapport au nombre d'instances résolues par rapport au nombre total de cas traités à l'aide du solveur Ipopt pour des interconnexions modélisées de façon non linéaire ainsi que l'utilisation d'un sous-problème d'initialisation. Dans ce cadre, une



formulation à l'aide de la pression  $P_i$  est apparue plus performante. Le choix de la fonction objectif n'est pas apparu discriminant pour l'obtention de solutions, ce qui finalement est assez satisfaisant dans la mesure où le problème à résoudre est essentiellement lié à la vérification de capacité d'un réseau par rapport à une fourniture de gaz à assurer. Ainsi, les résultats ont fait apparaître que deux problèmes identiques à une bijection près ne sont pas résolus de la même façon par un même solveur, ce qui renforce l'idée que le travail de modélisation est primordial.

Enfin, le dernier chapitre a trait au problème de transport de gaz et plus particulièrement à la vérification de capacité sur des instances de taille réelle. Il a fallu dans un premier temps valider le modèle obtenu et la méthode de résolution retenue sur des instances où la configuration des interconnexions est fixée. Une fois tous ces cas résolus, la résolution de ces instances a été poursuivie sans connaissance préalable des configurations. Afin de les résoudre, une méthode comportant une suite de relaxations a été mise en place. Une dernière étape est nécessaire avant de pouvoir conclure sur l'approche proposée. Il faut ainsi valider les résultats à l'aide du logiciel de référence, Bambou. Pour cela, des configurations sont recrées à l'aide d'une heuristique. Cette phase s'avère concluante sur les instances de tests réelles. Ainsi la méthode de résolution mise en œuvre se pose comme une alternative viable aux algorithmes métiers existants. Ils permettent en outre de trouver plusieurs solutions différentes.

## VI.2 Perspectives

### VI.2.1 Améliorations du modèle

A ces réflexions d'ordre général, nous pouvons ajouter plusieurs améliorations du modèle.

#### VI.2.1.a Prise en compte des compresseurs dans les stations de compression

Dans cette étude, une station de compression est représentée par un compresseur générique équivalent. En réalité, une station est composée de différents compresseurs en parallèle. Il faut alors décider d'une répartition des flux sur les différents ouvrages. On parle alors de répartition de charge. Les compresseurs utilisés à l'intérieur d'une même station de compression ne présentent pas nécessairement les mêmes caractéristiques.

L'intégration de compresseurs réels ne présente théoriquement pas de difficultés. En effet, dans le modèle retenu illustré sur la Figure II.2, le compresseur générique est placé "au-dessus" des autres nœuds de l'interconnexion. Pour remplacer ces compresseurs génériques par des stations de compression réelles, il suffit de ne plus considérer le compresseur comme "au-dessus" des autres mais la station de compression dans son ensemble Figure VI.1.

- Des vannes bilinéaires qui relient les pôles de l'interconnexion entre eux:  $Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0$
- Des vannes qui relient l'amont et l'aval de la station de compression aux pôles de l'interconnexion:  $Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0, Q_{i,j} \geq 0$
- Des vannes entre l'amont de la station de compression et l'amont des différents compresseurs réels.
- De même, entre l'aval de la station de compression et l'aval des compresseurs réels.

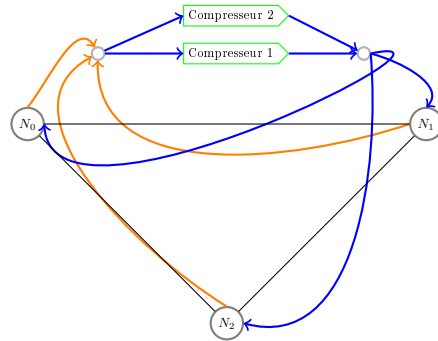


Figure VI.1: Modèle avec compresseurs en parallèle

### VI.2.1.b Compresseurs réels

A l'heure actuelle, un compresseur réel est défini par sa carte de fonctionnement. L'intégration de ces cartes dans la résolution du problème de transport de gaz apporterait un degré de précision important à la solution. Une réflexion a déjà eu lieu sur ce problème avec un stage effectué au sein de GDF-SUEZ. Il serait bon de la continuer afin de proposer un modèle de résolution complet.

Dans la suite de cette partie, plusieurs implémentations sont brièvement décrites.

#### *Implémentation "Automatique"*

Ce paragraphe présente une implémentation du modèle assez simple à mettre en œuvre. Le problème avec compresseur générique est résolu. Une fois une solution trouvée, le modèle est raffiné à l'aide des compresseurs réels. La solution précédente sert de point d'initialisation au problème complet.

#### *Implémentation avec combinatoire*

Le problème de répartition de charge peut se voir comme un problème d'ordonnancement où l'on doit affecter des débits de gaz à des compresseurs.

L'utilisation conjointe d'algorithmes d'ordonnancement avec une carte de débit-pression d'une solution en compresseurs génériques, permettrait de trouver une solution au problème global.

#### *Implémentation brute*

On cherche à résoudre le problème global sans prendre d'initialisation à l'aide des compresseurs génériques. On s'appuie néanmoins sur la méthode de relaxations successives afin de résoudre le problème entier.

### VI.2.1.c Résolution du problème multi-PCS

La modélisation du phénomène de mélange de gaz n'est pas très aisée. Comme décrit en annexe, il est difficile de modéliser ce phénomène sur une typologie de réseau maillé.

Après quelques réflexions et essais de modélisation du phénomène de mélange de gaz sur un réseau maillé, il s'est avéré que l'absence de connaissance sur le sens du gaz dans les arcs était un problème. La solution trouvée est mono-PCS. Une première idée serait de résoudre le problème en le considérant

comme une suite de problème mono-PCS. Les données d'entrée et de sortie sont exprimées en énergie. Cette énergie est égale au produit du PCS et du débit. Les données d'entrée sont toutes connues: PCS et débit. Cependant, pour les données de sortie, seule l'énergie demandée est connue. Pour une même énergie de sortie demandée, on peut raisonnablement trouver plusieurs couples (débit, PCS) qui conviennent.

#### *Solution itérative*

Afin de résoudre ce problème on va construire une suite finie de problèmes mono-PCS et telle que la solution trouvée corresponde à une solution au problème multi-PCS.

On calcule un PCS moyen sur l'ensemble du réseau. À partir de cela, on estime les débits de sortie et on résout ce problème. À partir de la solution, on calcule les PCS en tout point du réseau. On estime l'écart entre l'énergie demandée et l'énergie fournie avec les PCS actualisés. On modifie les données des débits d'entrée et de sortie afin d'obtenir un nouveau problème et on réitère les étapes précédentes.

#### *Résolution d'un modèle multi-PCS avec orientation fixée*

Le principal problème de la résolution du modèle avec mélange de gaz provient du fait qu'il n'existe pas de système simple d'équations connu. Il faut modéliser le fait que la qualité des gaz sortants appartienne à l'intervalle décrit par les qualités des gaz entrants. Dans le cas d'un réseau maillé, il est impossible de prévoir le sens du gaz sur les arcs.

Cependant, dans un cas où le sens des arcs est connu, il est possible de modéliser le mélange de gaz. Après un premier tir mono-PCS, on a des informations sur ces sens. Une fois les sens fixés, les équations de mélange de gaz seraient intégrées au problème global.

#### VI.2.1.d Utilisation des informations complémentaires de l'optimisation

Une dernière piste s'appuie sur les résultats complémentaires à l'issue de l'optimisation. En effet, les multiplicateurs de Lagrange et les variables d'écart sont donnés par le solveur. Ces valeurs permettent d'avoir des informations supplémentaires sur les variables et les contraintes. Il est alors possible d'en tirer parti.

En effet, ces valeurs sont liées à la fonction objectif du problème. Elle n'a qu'un impact limité sur la résolution comme l'illustre les résultats du chapitre V. À l'aide d'une fonction objectif bien choisie et dans le cas de la vérification de capacité, il serait possible de valider le scénario d'entrée/sortie tout en donnant par exemple, les ouvrages proches de la saturation.

#### VI.2.2 Applications à d'autres problèmes

En plus des améliorations possibles du modèle, trois autres perspectives applicables à d'autres problèmes se dégagent.

Tout d'abord, il a été possible de résoudre un modèle non linéaire mixte en nombres entiers à l'aide d'un modèle non linéaire continu. Certes les deux modèles ne sont pas parfaitement équivalents mais sont suffisamment proches pour que la transformation d'une solution vers l'autre modèle soit possible. L'intérêt est d'éliminer les variables entières, pour résoudre de façon plus simple un modèle non linéaire continu. La question se pose de savoir si cette démarche

de transformation de modèle MINLP en modèle NLP est généralisable et si, plus précisément, il existe une classe de problèmes MINLP qui peut être transformée de façon systématique en problèmes NLP, à l'aide d'opérations élémentaires.

Dans un deuxième temps, ce travail a mis en évidence l'importance du lien entre la modélisation et la résolution. Des modèles identiques à une bijection près n'ont pas du tout les mêmes résultats. Les simplifications mathématiques, comme dans le cas présent avec un changement de variable, peuvent avoir induire des différences dans les résultats. Il faut prendre en compte cela lors de la modélisation d'un problème et tester des modifications du modèle. Cette démarche aura pour effets de trouver la meilleure formulation en fonction des outils de résolution.

La troisième idée est plus appliquée. La résolution à l'aide d'une suite de relaxations permet de traiter des sous-problèmes plus simples. La solution de chacun sert de point d'initialisation au suivant. Elle permet de construire un chemin vers une solution. Les phénomènes caractéristiques du problème doivent être identifiés. Dans le cas du réseau de transport de gaz, ce sont le bilan de matière et la perte de charge. Ces derniers doivent être au cœur de tous les sous-problèmes. Il faut ajouter à cela une bonne connaissance de l'outil de résolution pour faire des choix efficaces. Cette méthode de résolution est transposable à d'autres problèmes d'optimisation.

# Bibliographie

- [Abbaspour05] Abbaspour, M., Chapman, K. S., and Krishnaswami, P. Nonisothermal compressor station optimization. *Journal of Energy Resources Technology-Transactions of the ASME*, 127(2):131–141, 2005. ISSN 0195-0738. doi:10.1115/1.1871248.
- [Andre06] Andre, J., Bonnans, F., and Cornibert, L. Planning Reinforcement of gas transportation networks with optimization methods. In *ORMMES*. 2006.
- [André10] André, J. *Optimization of investments in gas networks*. Ph.D. thesis, Université Lille Nord de France, 2010.
- [Avriel03] Avriel, M. *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*. Dover Publications, 2003.
- [Bachouya08] Bachouya, B. *Optimisation de réseaux de transport de gaz avec considération des compresseurs*. Ph.D. thesis, Université du Littoral Côte d’Opale, Dunkerque, 2008.
- [Bales08] Bales, P., Geißler, B., Kolb, O., Lang, J., Martin, A., and Morsi, A. Comparison of Linear and Nonlinear Optimization of Transient Gas Networks. Technical report, Darmstadt University of Technology, Department of Mathematics, 2008. Preprint 2552.
- [Bass84] Bass, P., Bavuz, G., Boudier, T., Breffy, E., Gauthier, P., Hervé, J.-P., Hugues, L., Renar, L., Velard, F., and Verdure, C. Le Vade-Mecum des Etudes. Technical report, Gaz de France, 1984.
- [Behbahani-Nejad08] Behbahani-Nejad, M. and Bagheri, A. A MATLAB Simulink Library for Transient Flow Simulation of Gas Networks. *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, 33:153–159, 2008.
- [Belotti09] Belotti, P., Lee, J., Liberti, L., and W, A. Branching and bounds tightening techniques for non-convex MINLP. *Optimization Methods & Software - Global Optimization*, 24, 2009. doi:10.1080/10556780903087124. COUENNE.

- [Birol11] Birol, F. and Corben, J. Are we entering a golden age of gas? Technical report, International Energy Agency, 2011. URL [http://www.worldenergyoutlook.org/docs/weo2011/WE02011\\_GoldenAgeofGasReport.pdf](http://www.worldenergyoutlook.org/docs/weo2011/WE02011_GoldenAgeofGasReport.pdf).
- [Boix11] Boix, M. *Optimisation multicritères des réseaux d'eau*. Ph.D. thesis, INPT, 2011.
- [Bonami05] Bonami, P., Biegler, L. T., Conn, A. R., Grossmann, I. E., Laird, C. D., Lee, J., Lodi, A., Sawaya, N., and W, A. An algorithmic framework for convex mixed integer nonlinear programs. *Chemical Engineering*, pages 1–22, 2005. BONMIN, COIN.
- [Bonnans06] Bonnans, J. F., Gilbert, J. C., Lemaréchal, C., and Sagastizábal, C. A. *Numerical optimization: Theoretical and practical aspects*. Springer, 2006.
- [Bragalli08] Bragalli, C., Ambrosio, C. D., Lee, J., Lodi, A., and Toth, P. Water Network Design by MINLP. Technical report, IBM Research Report, 2008.
- [Brooke88] Brooke, A., Kendrick, D., Meeraus, A., and Raman, R. *GAMS User's Guide*. GAMS Development Corporation., 1988.
- [Byrd99] Byrd, R. H., Hribar, M. E., and Nocedal, J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*, 9:877–900, 1999. KNITRO.
- [Carter98] Carter, R. Pipeline Simulation Dynamic Programming after 30 years. In *PSIG Annual Meeting*. 1998.
- [Cobos-zaleta02] Cobos-zaleta, D. and Ríos-mercado, R. Z. A MINLP Model for a Minimizing Fuel Consumption on Natural Gas Pipeline Networks. In *Memorias del XI Congreso Latino Iberoamericano de Investigación de Operaciones*, pages 27 – 31. 2002.
- [COI] COIN-OR Computational Infrastructure for Operations Research. URL <http://www.coin-or.org/>.
- [Diestel06] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 2006.
- [Donoso07] Donoso, Y. and Fabregat, R. *Multi-Objective Optimization in Computer Networks Using Metaheuristics*. 2007.
- [Drud92] Drud, A. S. CONOPT - A Large-Scale GRG Code,. *ORSA Journal on Computing*, 6:207–216, 1992. CONOPT.
- [Dréo05] Dréo, J., Pétrowski, A., and Siarry, E., P.and Tailard. *Metaheuristics for Hard Optimization*. Springer, 2005.
- [Fletcher02] Fletcher, R. and Leyffer, S. Nonlinear programming without a penalty function. *Mathematical Programming*, 91(2):239–269, 2002.

- [Floudas88] Floudas, C. A. and Paules IV, G. E. A Mixed-Integer Nonlinear Programming Formulation for the Synthesis of Heat Integrated Distillation Sequence. *Computers and Chemical Engineering*, 12:531–546, 1988.
- [Forsgren02] Forsgren, A., Gill, P. E., and Wright, M. H. Interior methods for nonlinear optimization. *SIAM Review*, 44:525–597, 2002.
- [Fourer90] Fourer, R., Gay, D. M., and Kernighan, B. W. A Modeling Language for Mathematical Programming. *Management Science*, 36:519–554, 1990.
- [Fourer92] Fourer, R. and Marsten, R. E. Solving Piecewise-Linear Programs: Experiments with a Simplex Approach. *ORSA Journal on Computing*, 4:16–31, 1992.
- [Frank92] Frank, A. Augmenting Graphs to meet Edge-connectivity Requirments. *SIAM Journal of Discrete Math*, 5(1):22–53, 1992. doi:10.1137/0405003.
- [GAM08] GAMS Benchmark of MINLP solvers. electronic, 2008. URL [http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/MINLP/080929\\_convex\\_all/](http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/MINLP/080929_convex_all/).
- [GAM09] GAMS Benchmark of NLP solvers. Electronic report, 2009. URL [http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/NLP/allSolver\\_091120/](http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/NLP/allSolver_091120/).
- [GAM11] GAMS Benchmark of NLP solvers. Electronic report, 2011. URL [http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/NLP/allSolver\\_110304/](http://www.coin-or.org/GAMSlinks/benchmarks/NLP/allSolver_110304/).
- [Gill02] Gill, P. E., Murray, W. ., and Saunders, M. A. SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization. *SIAM J. Optim.*, 12:979–1006, 2002. SNOPT.
- [Gorla03] Gorla, R. and Khan, A. *Turbomachinery design and theory*. Marcel Dekker Inc., New York, USA, 2003.
- [Grappe09] Grappe, R. *Augmentation de l'arête connexité*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble - INPG, 2009.
- [Grossmann86] Grossmann, I. E. and Duran, M. An Outer-Approximation Algorithm for a Class of Mixed-integer Nonlinear Programs. *Math Programming*, 36:307, 1986. doi:10.1007/BF02592064.
- [Grossmann02] Grossmann, I. E. Review of Nonlinear Mixed-Integer and Disjunctive Programming Techniques. *Methods*, pages 227–252, 2002.
- [Guder96] Guder, F. and Nourie, F. J. A Dual Simplex Algorithm for Piecewise-Linear Programming. *Journal of Operations Research Society*, 47:583–590, 1996.
- [Gupta85] Gupta, O. and Ravindran, A. Branch and Bound Experiments in Convex Nonlinear Integer Programming. *Management Science*, 13:1533–1546, 1985. doi:10.1287/mnsc.31.12.1533.

- [Hai11] Hai, W., Xiaojinga, L., and Weiguo, Z. Transient flow simulation of municipal gas pipelines and networks using semi implicit finite volume method. In *SREE Conference on Engineering Modelling and Simulation (CEMS 2011)*. 2011.
- [Hernandez-Rodriguez11] Hernandez-Rodriguez, G. *Optimisation multiobjectif de réseaux de transport de gaz naturel*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT), 2011.
- [Hernandez-Rodriguez 2] Hernandez-Rodriguez, G., Pibouleau, L., Azzaro-Pantel, C., and Domenech, S. Optimization of Gas Transmission Networks under Energetic and Environmental Considerations. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*, 8, 2010NAGS 2.
- [Himmelblau72] Himmelblau, D. M. *Applied Nonlinear Programming*. Mac-Graw Hill, 1972.
- [Hoeven04] Hoeven, T. V. D. *Math in Gas and the art of linearization Tom van der Hoeven*. Ph.D. thesis, Rijksuniversiteit Groningen, 2004.
- [IEA09] Natural Gas Review Market, 2009. URL [http://www.iea.org/speech/2009/NGMR\\_press.pdf](http://www.iea.org/speech/2009/NGMR_press.pdf).
- [IEA11] World Energy Outlook 2011 Factsheet: Are we entering a golden age of gas?, 2011. URL [http://www.worldenergyoutlook.org/docs/weo2011/WE02011\\_GAG\\_FactSheet.pdf](http://www.worldenergyoutlook.org/docs/weo2011/WE02011_GAG_FactSheet.pdf).
- [Joulié98] Joulié, R. *Mécanique des fluides appliquée*. 1998.
- [Kallrath04] Kallrath, J. *Modeling Languages in Mathematical Optimization*. Kluwer Academic Publishing, 2004.
- [Karmarkar84] Karmarkar, N. A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984. Interior point.
- [Karush39] Karush, W. *Minimum of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Conditions*. Master’s thesis, University of Chicago, 1939.
- [Katz59] Katz, D., Cornel, D., Kobayashi, R., Poettmann, F. H., Vary, J. A., Elenbaas, J., and Weinaug, C. *Handbook of Natural Gas Engineering*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, USA, 1959.
- [Kelley Jr.60] Kelley Jr., J. E. The cutting-plane method for solving convex programs. *Journal of SIAM*, 8:703–712, 1960.
- [Kocis87] Kocis, G. R. and Grossmann, I. E. Relaxation Strategy for the Structural Optimization of Process Flow Sheets. *Industrial and Engineering Chemical Research*, 26:1869–1880, 1987.
- [Kocis89] Kocis, G. R. and Grossmann, I. E. Computational Experience with DICOPT solving MINLP Problems in Process Systems Engineering. *Computers and Chemical Engineering*, 13:307–315, 1989.



- [Kocrsandi89] Kocrsandi, R. Computational Experience with Dicopt solving Problems in Process Systems Engineering. (x), 1989.
- [Kolb08] Kolb, O., Lang, J., and Bales, P. Adaptive linearization for the optimal control problem of gas flow in pipeline networks, 2008. Preprint 2553, T.U. Darmstadt.
- [Kralik98] Kralik, J., Stiegler, P., Vostry, Z., and Zavorka, J. SIMONE - A universal dynamic simulation model of gas pipeline networks. In *World Gas Conference*. 1998.
- [Kuhn51] Kuhn, H. W. and Tucker, A. W. Nonlinear Programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, Berkeley, University of California Press, 1951. URL <http://projecteuclid.org/euclid.bsm/1200500249>.
- [Land60] Land, A. H. and Doig, A. G. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28(3):497–520, 1960. doi:10.2307/1910129.
- [Mahlke07] Mahlke, D., Martin, A., and Moritz, S. A simulated annealing algorithm for transient optimization in gas networks. *Mathematical Methods of Operations Research*, 66(1):99–115, 2007. ISSN 1432-2994. doi:10.1007/s00186-006-0142-9. URL <http://www.springerlink.com/index/10.1007/s00186-006-0142-9>.
- [Mathworks11] Mathworks. Matlab overview, 2011. URL <http://www.mathworks.fr/products/matlab/index.html>.
- [Maugis77] Maugis, M. Etude de Réseaux de Transport et de Distribution. *R.A.I.R.O.*, 11(2):243–248, 1977.
- [Menon05] Menon, E. S. *Gas pipeline hydraulics*. Taylor & Francis Group, 2005.
- [Minoux08] Minoux, M. and Gondran, M. *Graphs, Dioids and Semirings: New Models and Algorithms*. Springer, 2008.
- [Mohitpour03] Mohitpour, M., Golshan, H., and Murray, A. *Pipeline Design and Construction - A Practical Approach. Second Edition*. ASME Press, USA, 2003.
- [Mora05] Mora, T. and Ulieru, M. Minimization of energy use in pipeline operations - an application to natural gas transmission system. In *Industrial Electronics Society - IECON 31st annual conference of IEEE*. 2005.
- [Moritz06] Moritz, S. *A Mixed Integer Approach for the Transient Case of Gas Network Optimization*. Ph.D. thesis, Technische Universität Darmstadt, 2006.
- [Möller04] Möller, M. *Mixed Integer Models for the Stationary Case of Gas Network*. Ph.D. thesis, Darmstadt, 2004.

- [Nocedal06] Nocedal, J. and Wright, S. J. *Numerical Optimization*. Springer-Verlag, 2006.
- [Osiadacz87] Osiadacz, A. J. *Simulation and Analysis of Gas Networks*. E & F.N. Spon, 1987.
- [Osiadacz93] Osiadacz, A. J. *Transient Simulation Methods for Gas Networks*. Ellis Horwood, 1993.
- [Quesada92] Quesada, I. and Grossmann, I. E. An LP / NLP based Branch and Bound Algorithm for Convex MINLP optimization problems. *Computers Chemical Engineering*, 16:937–947, 1992.
- [Ríos-mercado00] Ríos-mercado, R. Z. Preprocessing on Natural Gas Transmission Networks. Technical Report November 2000, Technical Report PISIS-2000-01, Graduate Program in Systems Engineering, UANL, 2000.
- [Roelofs10] Roelofs, M. AIMMS Language Reference, 2010. URL [http://www.aimms.com/aimms/download/manuals/aimms\\_ref.pdf](http://www.aimms.com/aimms/download/manuals/aimms_ref.pdf).
- [SBB] Simple Branch and Bound. URL <http://www.gams.com/solvers/solvers.htm#SBB>.
- [Sherali97] Sherali, H. D. and Smith, E. P. A Global Optimization Approach to a Water Distribution Network Design Problem. *Journal of Global Optimization*, pages 107–132, 1997.
- [Sherali10] Sherali, H. and Adams, W. P. *A Reformulation-linearization Technique for Solving Discrete and Continuous Nonconvex Problems*. Springer-Verlag New York Inc., 2010.
- [Siarry10] Siarry, P. and Bichot, C.-E. *Partitionnement de graphe : Optimisation et applications*. Lavoisier, 2010.
- [SIM] SIMONE Research Group. Solutions For Simulation And Optimisation In The Gas Industry. URL <http://www.simone.eu>.
- [Tabkhi07] Tabkhi, F. *Optimisation de Réseaux de Transport de Gaz*. Ph.D. thesis, INPT, 2007.
- [Tabkhi09] Tabkhi, F., Pibouleau, L., Azzaro-Pantel, C., and Domenech, S. Total Cost Minimization of High-Pressure Natural Gas Network. *Journal of Energy Resources Technology- transactions of the Asme*, 131, 2009. doi:10.1115/1.4000325.
- [Vanderplaats84] Vanderplaats, G. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications*. Mac-Graw Hill, 1984.
- [Villalobos] Villalobos, Y. and Ríos-mercado. Approximating the Fuel Consumption Function on Natural Gas Centrifugal Compressors.
- [Wall01] Wall, L., Christiansen, T., and Orwant, J. *Programming en Perl*. O’Reilly, 2001.

- [Waltz03] Waltz, R. A. and Nocedal, J. KNITRO user's manual, Technical Report OTC 2003/05. Technical report, Northwestern University, Evanston, IL, USA, 2003. KNITRO.
- [Westerlund95] Westerlund, T. and Petterson, F. An extending Cutting Plane Method for Solving Convex MINLP Problems. *Computers & Chemical Engineering*, 19:131–136, 1995.
- [Wolf00] Wolf, D. D. and Smeers, Y. The gas transmission problem solved by an extension of the Simplex algorithm. *Management Sciences*, 46:1454–1465, 2000.
- [Wolf03] Wolf, D. D. Mathematical Properties of Formulations of the Gas Transmission Problem. *submitted to RAIRO Operations Research*, pages 1–21, 2003.
- [Wright05] Wright, M. H. The interior-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 42:39–56, 2005.
- [Wu99] Wu, S., Ridgway Scott, L., Rios-Mercado, R. Z., and Andrew Boyd, E. Model Relaxations for the Fuel Cost Minimization of Steady State Gas Pipeline Networks. Technical Report February, Departement of Computer Science, University of Chicago, 1999.
- [Yuan88] Yuan, Z., X, Pibouleau, L., and Domenech, S. Une methode d'optimisation non lineaire en variables mixtes pour la conception de procedes. *Recherche Operataionnelle/Operations Research*, 22:331–346, 1988.



Details des instances maillés



## A.1 Détails des instances maillés

## A.2 Rappel des réseaux

Les réseaux maillés RM1 et RM2 sont illustrés respectivement p.54 et p.54. La description de RM1 est faite p.56. Celle de RM2 est faite dans le Tableau A.1

Nœud	Approvisionnement en gaz ( $m^3/h$ ) $s$	Pression min ( $bar$ ) $\underline{P}_i$	Pression max ( $bar$ ) $\overline{P}_i$
$S_1$	500 000	60	60
$I_1$	0	1	70
$I_2$	0	1	70
$I_3$	-50 000	40	70
$I_4$	0	1	70
$I_5$	0	1	70
$I_6$	-50 000	40	70
$I_7$	0	1	70
$I_8$	0	1	70
$I_9$	-100 000	40	70
$I_{10}$	0	1	70
$I_{11}$	0	1	70
$I_{12}$	-200 000	40	70
$I_{13}$	0	1	70
$I_{14}$	0	1	70
$I_{15}$	-100 000	40	70

Canalisations	Longueur $l_{i,j}$ ( $km$ )	Diamètre $d_{i,j}$ ( $mm$ )
$S_1 - I_1$	5	300
$S_1 - I_5$	5	300
$S_1 - I_{11}$	45	300
$I_2 - I_4$	5	300
$I_3 - I_7$	25	300
$I_6 - I_{14}$	25	300
$I_8 - I_{10}$	15	300
$I_{12} - I_{13}$	15	300
$I_9 - I_{15}$	30	300

Compresseur	Travail min ( $kWh$ ) $\underline{W}_{i,j}$	Travail max ( $kWh$ ) $\overline{W}_{i,j}$	Débit min ( $m^3/h$ ) $\underline{Q}_{i,j}$	Débit max ( $m^3/h$ ) $\overline{Q}_{i,j}$	Taux de compression maximum $\tau_{i,j}$
Interconnexion quelconque	0	560 000	0	4 000 000	1.9

Tableau A.1: Dimensions du réseau maillé RM2

Scénario Modifications par rapport au scénario 1 détaillé dans le Tableau [IV.5](#)

1	–
2	Pression minimum $\underline{P}_{C_1} = \underline{P}_{C_2} = \underline{P}_{C_3} = \underline{P}_{C_4} = \underline{P}_{C_5} = 50bar$
3	Pression minimum $\underline{P}_{C_1} = \underline{P}_{C_2} = \underline{P}_{C_3} = \underline{P}_{C_4} = \underline{P}_{C_5} = 60bar$

Tableau A.2: Différences entre les instances de test du réseau RM1

Scénario	Modifications par rapport au scénario 7 détaillé dans le Tableau <a href="#">A.1</a>
4	–
5	Pression minimum $\overline{P_{C_1}} = \overline{P_{C_2}} = \overline{P_{C_3}} = \overline{P_{C_4}} = \overline{P_{C_5}} = 50bar$
6	Pression minimum $\overline{P_{C_1}} = \overline{P_{C_2}} = \overline{P_{C_4}} = 65bar, \overline{P_{C_3}} = \overline{P_{C_5}} = 60bar,$
7	Débit maximum des compresseurs $\overline{Q_{i,j}} = 500\ 000m^3/h$
8	Travail maximum des compresseurs $\overline{W_{i,j}} = 6\ 000W/h$
9	Débit maximum des compresseurs $\overline{Q_{i,j}} = 500\ 000m^3/h,$ Travail maximum des compresseurs $\overline{W_{i,j}} = 6\ 500W/h$

Tableau A.3: Différences entre les instances de test du réseau RM2



Coefficient de perte de charge



## B.1 Différences de modèles selon le coefficient de perte de charge

Comme vu dans le chapitre V, la fonction objectif a un impact réduit sur la résolution du problème mathématique de transport de gaz. Afin de fixer les idées et d'explicitier simplement les différences lors du choix de coefficient de perte de charge, le cadre sera celui de la minimisation du travail de compression.

### B.1.1 Cas classique

#### II.1.1.a Cas constant

$$\min \sum_{(i,j) \in E_c} W_{i,j}$$

$$s.c \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i & \forall i \in V \\ P_i^2 - P_j^2 = c_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\ Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \\ Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \\ 1 \leq \frac{P_j}{P_i} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \\ W_{i,j} = \frac{\gamma_1}{W_{i,j}} \cdot Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i,j) \in E_c \end{array} \right. \quad (II.1)$$

Le coefficient  $c_{i,j}$  se calcule selon la formule:

$$c_{i,j} = \frac{16 \cdot 10^{13} \rho_a p_0}{10^5 \pi^2 z_0 \cdot tk_0} d_0 \cdot tk_m \cdot Z_m \cdot \lambda_{i,j} \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5} \quad (II.2)$$

où  $Z_m = 0,85$  et  $\lambda_{i,j} = \frac{1}{((2 \log_{10}(\frac{3700 \cdot d_{i,j}}{\mu_{i,j}}))^2)}$ ,  $\mu_{i,j}$  est la rugosité de la canalisation en micron.

### B.1.2 Cas variable

La seule différence porte sur le calcul de  $Z_m$ .

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in E_c} W_{i,j} \\
 & \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{ll}
 \sum_{j|(i,j) \in E} Q_{i,j} = s_i & \forall i \in V \\
 P_i^2 - P_j^2 = C_{i,j} \cdot Q_{i,j} \cdot |Q_{i,j}| & \forall (i,j) \in E_p \\
 C_{i,j} = \frac{16 \cdot 10^{13} \rho_a p_0}{10^5 \pi^2 z_0 \cdot tk_0} d_0 \cdot tk_m \cdot Z_{i,j}^m \cdot \lambda_{i,j} \frac{l_{i,j}}{d_{i,j}^5} & \forall (i,j) \in E_p \\
 Z_{i,j}^m = 1 + \frac{P_{i,j}^m}{1050} \left( \frac{PCS_{i,j}}{10} + d_0 - 1 \right) \left( \frac{4(tk_m - t_0)}{100} - 3, 6 \right) & \forall (i,j) \in E_p \\
 P_{i,j}^m = \frac{2}{3} \left( P_i + P_j - \frac{P_i \cdot P_j}{P_i + P_j} \right) & \forall (i,j) \in E_p \\
 Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_l \\
 Q_{i,j}(P_i - P_j) \geq 0 & \forall (i,j) \in E_v \\
 1 \leq \frac{P_j}{P_i} \leq \tau_{i,j} & \forall (i,j) \in E_c \\
 W_{i,j} = \frac{\gamma_1}{W_{i,j}} \cdot Q_{i,j} \left( \left( \frac{P_j}{P_i} \right)^{\gamma_2} - 1 \right) & \forall (i,j) \in E_c
 \end{array} \right. \tag{II.3}
 \end{aligned}$$