TEORÍA DE GRAFOS Y GEOMETRÍA RETICULAR: MATEMÁTICAS ELEMENTALES PARA EL ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

Sebastián Cuéllar, Jorge D. Muñoz y José L. Ramírez

Grupo YAGLOM, Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda

sebastian.cuellar@correo.usa.edu.co, jorged.munoz@correo.usa.edu.co,

josel.ramirez@ima.usergioarboleda.edu.co

El objetivo de esta charla es presentar algunos resultados recientes sobre teorías elementales en matemáticas para el desarrollo del talento en matemáticas. En particular, se mostrarán algunos resultados relacionados con la teoría de grafos y la teoría reticular, ambas, teorías matemáticas que han venido siendo adaptadas por el Grupo Yaglom de la Universidad Sergio Arboleda para los cursos de pretalentos y talentos en matemáticas.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, identificar y evaluar las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas es una necesidad apremiante que comparten varios investigadores, ya que no se puede desconocer que existen personas que desde muy temprana edad manifiestan un interés por las matemáticas más allá de los conocimientos adquiridos en las instituciones, pero que debido a la alta exigencia educativa que requieren se pueden llegar a identificar mas no se les brindan las herramientas necesarias para desarrollar su potencial matemático.

El proyecto del Semicírculo en Matemáticas de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda ha liderado durante los últimos diez años la detección y el estímulo del talento en matemáticas en niños y jóvenes provenientes de colegios privados y públicos de Bogotá y de algunos municipios aledaños. El proyecto recibe anualmente en promedio 300 estudiantes escolares, quienes participan en una serie de actividades diseñadas especialmente para la detección y el estímulo del talento en matemáticas.

Actualmente el proyecto desarrolla sus investigaciones en el seno de los grupos de trabajo YAGLOM y GdG. El primer equipo se encarga de construir, estructurar y desarrollar teorías matemáticas elementales y de utilizarlas total o parcialmente en la organización y desarrollo de actividades para realizar con los candidatos a vincularse al programa de Talentos en Matemáticas. El se-

Cuéllar, S., Muñoz, J.D. y Ramírez, J.L. (2013). Teoría de grafos y geometría reticular: matemáticas elementales para el estímulo del talento matemático. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 97-108). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

gundo equipo está encargado de la elaboración de las historias de vida de algunos de los niños que han pasado por el proyecto.

¿MATEMÁTICAS PARA TODOS?

La matemática como ciencia, como conjunto de conocimientos, conviene enseñarla desde temprana edad porque en esencia es parte del pensamiento humano y una necesidad para enfrentarnos a la sociedad y a una rápida evolución del mundo que nos rodea. Existen personas que poseen aptitudes y habilidades especiales hacia el conocimiento matemático, pero que debido a los modelos de enseñanza y evaluación estándar que prevalecen, posiblemente ese talento no se llegue a detectar y desarrollar.

Es claro que existen niños con un *talento especial* para las matemáticas y que esto sucede también con otras áreas del conocimiento, sin embargo, el derecho de estos niños a desarrollar ese talento específico muchas veces se ve truncado por no existir espacios especializados para ellos. Frente a esto los diferentes entes gubernamentales y gobiernos locales han venido creando e implementado una serie de leyes que permitan regular esta situación.

En particular la Ley 115, *Ley General de Educación*, en el título III del capítulo I (art. 46, 47, 48 y 49) plantea elementos relacionados con la atención educativa de la población con capacidades excepcionales. El Decreto 2082 de 1996 reglamenta la atención educativa a personas con limitaciones y con capacidades o talentos excepcionales.

Sin embargo, aunque estas normas existan, son muchos los niños que no tienen una oportunidad clara para que se les atienda y estimule su talento en las diferentes áreas. Muestra de ello es que en la Sentencia T-294/09, la Corte Constitucional tuvo que ordenar al Ministerio de Educación Nacional que identificara e incorporara a la población con capacidades o talentos excepcionales, de cada uno de los municipios y departamentos del país, para asegurar la provisión de auxilios, subsidios, becas o créditos educativos a favor de quienes no posean los medios económicos.

En consecuencia con lo anterior, por ejemplo el Consejo de Bogotá, bajo el proyecto de acuerdo No. 351 de 2009, estableció un plan de cubrimiento gradual para la adecuada atención educativa de las personas con capacidades o talentos excepcionales.

Dada la importancia y pertinencia de buscar alternativas de solución, el proyecto de talentos en matemáticas pretende aportar a la solución de la situación antes planteada, a través de sus programas con los cuales busca identificar y estimular aptitudes y actitudes hacia las matemáticas. Estos programas involucran a los niños en un ambiente universitario, en el que se desarrolla una teoría elemental en matemáticas, con base en una serie de actividades y una metodología especial (Núñez, Gómez y Cortés, 2011).

TALENTO EN MATEMÁTICAS

El término "talento" es una nominación asignada a los individuos con una aptitud muy relevante en un área específica, relacionada con campos académicos, artísticos o relacionales, "[U]n talento es un ser que ama profundamente trabajar un oficio determinado, comprende profundamente su arte y puede fácilmente expresar sus creaciones en éste" (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Para considerar que una persona es académicamente talentosa, debe poseer una habilidad o capacidad superior en las áreas académicas como la matemática, las ciencias naturales, sociales y/o en las humanidades. El talento académico puede ser general o específico. General, cuando las capacidades superiores se manifiestan en varias o todas las áreas académicas, y específico, cuando se presenta en una de ellas (Arancibia, 2009). El talento en matemáticas es el tipo de talento al que se ha dirigido el proyecto de talentos en matemáticas de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda.

El talento académico se distribuye homogéneamente dentro de la población sin importar diferencias económicas, de género o raza, y reconocemos la necesidad de generar ambientes enriquecidos en los que se atienda este tipo de población. No basta solamente con poseer la capacidad para ser talentoso académicamente, por el contrario se debe contar con contextos adecuados de aprendizaje que potencien verdaderamente el talento, de lo contrario puede perderse (Cabrera, 2011).

La atención a niños con un talento específico en las matemáticas ha sido una preocupación en los últimos años por parte de la comunidad académica. Varias instituciones han creado programas especializados que propicien espacios enriquecidos para el trabajo con este tipo de población; por ejemplo el proyecto ESTALMAT (Estímulo al talento en Matemáticas) en España está liderado por la Real Academia de Ciencias desde el año 1998, y busca detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de estudiantes de 12-13 años, mediante una orientación semanal a lo largo de dos años (de Guzmán, 2007). Otro ejemplo es el PENTA UC de la Universidad Católica de Chile, programa interdisciplinario que busca generar conocimiento científico de trascendencia, nacional e internacional; aumentar el interés público en torno a la necesidad de desarrollar el potencial de los niños con talento académico; y promover el desarrollo de políticas públicas que favorezcan la oferta de servicios educacionales y psicológicos para los niños y jóvenes talentosos (Arancibia, 2009).

Frente a este panorama, en el año 2002 se inició en Colombia el proyecto "Fundamentos Matemáticos de la Educación Matemática, parte I: Aritmética" apoyado por Colciencias y adelantado por el grupo de la Escuela de Matemáticas MUSA.E1 con sede en la Universidad Sergio Arboleda, bajo la dirección del profesor Jesús Hernando Pérez, por la necesidad de crear un espacio para que niños y niñas con talento para las matemáticas, no necesariamente superdotados, pudieran desarrollar, enfocar y fortalecer sus habilidades.

Teorías elementales en matemáticas

La palabra "elemental" es la que guía todo el trabajo de nuestro grupo y por ello este se llama "Grupo Yaglom". Isaac Yaglom fue uno de los grandes animadores del programa Olimpiadas Matemáticas, que en la actualidad tiene ya una cobertura mundial. Yaglom en su trabajo *La Geometría Elemental Hoy* (Yaglom, 1981) propone que la *matemática elemental* es aquella que se puede trabajar y desarrollar en las escuelas y colegios. Curiosamente ese trata de una definición experimental, es decir que, para él, las disciplinas matemáticas elementales son experimentales. Para Yaglom, elemental no es lo que se puede enseñar en las escuelas y colegios, tampoco la matemática de las escuelas y colegios (Luque, Mora y Torres, 2006).

Esta definición sugiere aspectos importantes que nuestro grupo practica en sus exploraciones elementales, como se muestra a continuación (Pérez, 2010, pp. 7-8):

- En el trabajo elemental hay construcción de conocimiento matemático, bien sea conocimiento ya conocido o completamente inédito.

- La matemática elemental, como en toda disciplina académica, se construye en equipo.
- Como ya se ha mencionado, el propósito fundamental de nuestro grupo es lograr que los estudiantes desarrollen su creatividad matemática con las actividades que se les proponen. El equipo Yaglom se reúne una vez a la semana para organizar teorías "elementales" y uno o varios de sus miembros trabajan, con estas teorías o con parte de ellas, en sesiones de cinco horas semanales con grupos de niños de edades similares, procurando que ellos o algunos de ellos encuentren regularidades, formulen conjeturas, propongan ejemplos y contraejemplos, formulen argumentos, etc.

TEORÍA DE GRAFOS COMO EJEMPLO DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

La teoría de grafos es uno de los ejemplos más conocidos y diversificados de matemáticas elementales, esto quizá debido a la naturaleza simple de los problemas que aborda y especialmente por sus diversos usos en matemáticas recreativas y enseñanza de las matemáticas (Hadar y Hazzan, 2005). Dicha teoría sigue siendo un tema de estudio activo en muchas instituciones y todo su cuerpo constituye una teoría matemática con relaciones con diversas disciplinas entre ellas: teoría de la información, análisis matemático, álgebra, combinatoria y teoría de números.

Se considera a Leonard Euler, matemático suizo (1707-1783), fundador de esta teoría, al plantear y proponer la solución al problema conocido como *Problema de los siete puentes de Königsberg* cuyo enunciado se presenta a continuación (Bondy, 1976).

> La ciudad de Königsberg, en Prusia estaba localizada en el río Pregel, e incluía dos grandes islas que estaban conectadas entre ellas por un puente, y con las dos riberas del río mediante seis puentes (siete puentes en total) [ver Figura 1]. El problema que se planteaban sus habitantes consistía en decidir si era posible seguir un camino, y cómo hacerlo, que cruzase todos los puentes una sola vez y que finalizase llegando al punto de partida.

Figura 1: Puentes de Königsberg

Dicho problema se puede visualizar de la siguiente forma: identificamos cada porción de tierra con un punto y cada uno de los puentes uniendo dos porciones de tierra (bien sean islas o no) con un lado entre los dos puntos correspondientes. Bajo este convenio el grafo asociado al problema se muestra en la Figura 2.

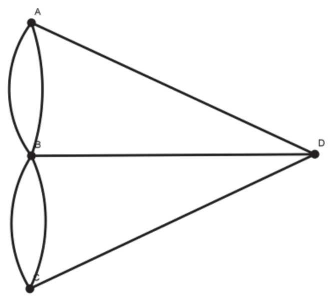

Figura 2: Grafo asociado al problema de los Puentes de Königsberg

Un grafo es entonces una estructura como la mostrada anteriormente, es decir, una pareja $G = (V, L)$ donde V es un conjunto de puntos o vértices y L un conjunto de aristas, lazos o lados entre dichos vértices. Un camino en un grafo corresponde a una sucesión de vértices $v_1 v_2 v_3 \dots v_n$ conectados por aristas entre cada par consecutivo de ellos $v_i v_{i+1}$. Cuando el recorrido incluye todas las aristas del grafo una sola vez y termina en el vértice de inicio el recorrido se denomina un circuito euleriano.

Euler logró demostrar que el recorrido propuesto era imposible y dio pasó a lo que después se conocería como el *teorema del circuito euleriano* en teoría de grafos. Dicho resultado establece que un circuito euleriano, que es equivalente a realizar en un grafo dado, un recorrido similar al propuesto por el problema de los puentes, no se puede realizar a menos que de cada uno de los vértices se desprendan un número par de aristas. Por este motivo el problema de los puentes es irresoluble dado que de la segunda isla se desprenden tres puentes o de dicho vértice parten tres aristas.

La teoría de grafos y la matemática elemental

Una de las características más importantes del problema de los puentes es la simplicidad de su enunciado y esta es quizá la virtud que posee la teoría de grafos a la hora de estudiarla como teoría matemática elemental. Dada esta característica la teoría de grafos se convierte en una excusa perfecta para motivar la creatividad de los grupos de estudiantes introduciéndolos en los conceptos y problemas propios de esta temática dentro del aula de clase.

Los estudiantes se acoplan fácilmente a las definiciones de la teoría y una vez estudiadas son capaces de formular conjeturas que si bien pueden ser falsas fortalecen la capacidad de crear conocimiento matemático. Sin embargo, varias de ellas son verdaderas y se constituyen en evidencia de que la teoría de grafos tiene características propias de las matemáticas elementales desde la propuesta del programa de talentos de la Universidad Sergio Arboleda.

Algunos resultados en teoría de grafos que han sido deducidos por los estudiantes son los siguientes:

- En todo grafo $G = (V, L)$ se tiene que $\sum d_G(v) = 2|L|$.
- Todo grafo posee un número par de vértices con grado impar.
- Un grafo posee un circuito euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par.
- Un grafo posee un camino euleriano si y sólo si todos sus vértices son de grado par o hay exactamente dos vértices de grado impar.
- En todo árbol $G = (V, L)$ se tiene que $|V| - 1 = |L|$.

Los resultados anteriores corresponden a teoremas propios de la teoría de grafos obtenidos por los estudiantes en sesiones de trabajo diseñadas con el fin de que dedujeran dichas conclusiones. Sin embargo, no siempre las observaciones de los estudiantes son esperadas en el trabajo elemental.

El siguiente resultado fue desarrollado por los estudiantes Yecid Alejandro Gómez (10 años) y Esteban Gutiérrez (11 años) del programa de Pretalentos Matemáticos 2010-II durante una de las sesiones de trabajo.

Teorema de Yecid/Esteban En todo árbol $G = (V, L)$ se tiene que el número de caminos simples disyuntos está dado por:

$$0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (|V| - 1)$$

Este resultado prueba que la teoría de grafos diseñada es en efecto elemental pues dicho resultado contiene originalidad de los estudiantes en el sentido de que no era uno de los resultados que los coordinadores de las actividades diseñadas para el curso habían planeado que fueran deducidos por los estudiantes, y de hecho era una observación desconocida para los miembros del grupo de trabajo en ese momento.

En la actualidad la teoría de grafos corresponde al tema de trabajo del curso de pretalentos matemáticos 2013-I y está en desarrollo una cartilla que incluye estos temas a nivel elemental.

TEORÍA RETICULAR COMO EJEMPLO DE MATEMÁTICAS ELEMENTALES

Determinar el área de un polígono ha sido uno de los problemas más comunes en la geometría y casi que diariamente nos enfrentamos a este problema. En particular, cuando los vértices del polígono se encuentran en una retícula ortogonal el Teorema de Pick es una forma muy sencilla de poder resolver el problema. De igual forma el teorema de Pick permite resolver el problema de la construcción de polígonos regulares reticulares.

Un punto P de coordenadas (x, y) se llama reticular si x, y son números enteros, es decir, si $x, y \in \mathbb{Z}$. Así, el plano reticular es el conjunto de los puntos del plano cartesiano que son reticulares. A partir de esto se puede definir la geometría reticular como el estudio de las propiedades del plano reticular, (Ramírez, 2010). Particularmente, en esta sección se estudiará el Teorema de Pick, quizá uno de los resultados más conocidos de esta teoría.

EL TEOREMA DE PICK

El Teorema de Pick lo demostró el matemático austriaco *Georg Alexander Pick* (1859-1942). Pick estudió en la Universidad de Viena, trabajó en distintas universidades pero terminó su carrera en la Universidad de Praga. Su trabajo matemático fue muy amplio: abarcó desde análisis funcional hasta geometría. Sin embargo, gran parte de su popularidad se debe al teorema que lleva su nombre, el cual en un principio no recibió mucha atención. Sólo hasta 1969, cuando Steinhaus lo incluyó en su libro *Mathematical Snapshots,* el teorema atrajo la atención por su simplicidad y elegancia.

Dado un polígono reticular existen varios métodos para encontrar su área. Uno de ellos es dividir el polígono, por ejemplo en triángulos o rectángulos, calcular el área de cada una de estos polígonos y sumarlos para obtener el área total. Pero este procedimiento puede ser largo y complicado. Una solución es utilizar el Teorema de Pick.

Si I y B denotan el número de puntos reticulares que están en el interior del polígono y en la frontera del polígono respectivamente, el Teorema de Pick establece que el área del polígono es:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1$$

En el caso del polígono de la Figura 3 se tiene que I=20 y B=10, así por el Teorema de Pick el área es $A = 20 + {}^{10}\!/_{2} - 1 = 24$.

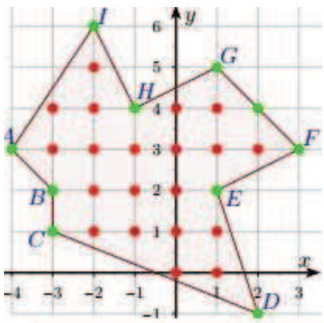

Figura 3: Polígono con sus puntos interiores (rojo) y sus puntos en la frontera (verde)

Una aplicación muy importante del Teorema de Pick es la resolución del problema de la constructibilidad de polígonos regulares reticulares. Gracias a este teorema se puede demostrar que el único polígono regular reticular que se puede construir es el cuadrado. En el presente artículo se mostrará el caso del triángulo, pero la demostración se puede generalizar para polígonos de n lados (Ramírez, 2010).

El procedimiento es muy sencillo: suponer que existe un triángulo reticular equilátero, calcular el área por dos métodos distintos y llegar a una contradicción. Por el teorema de Pick, el área de cualquier polígono, en particular un triángulo equilátero, es un número racional pues las cantidades I y B son enteras.

Si el triángulo es de lado a, su área es $\frac{ah}{2}$, pero al ser equilátero $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Por lo tanto el área es:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

Pero a^2 es el área de un cuadrado reticular, por el teorema de Pick este es un número racional, y así el área, calculada de la segunda forma, es un número irracional. Comparando los dos resultados obtenemos que por un camino el área es un número racional y por el otro es un número irracional, lo cual es absurdo, por lo tanto no hay triángulos equiláteros reticulares.

El teorema de Pick presenta una extensión y es para figuras con agujeros. Si R es un polígono reticular, un agujero de R es un polígono contenido en R sin puntos de frontera en común. En este caso el teorema de Pick toma la siguiente forma:

$$A = I + \frac{B}{2} + n - 1$$

donde n es el número de agujeros del polígono.

Teoría reticular y la matemática elemental

Ahora surge la pregunta ¿es la geometría reticular una teoría matemática elemental? Si nos basamos en la definición de *Isaac Yaglom,* la geometría reticular es una teoría matemática elemental, pues se puede trabajar con estudiantes y profesores de las escuelas y colegios. Entre los conceptos necesarios para poder desarrollar esta teoría se encuentran nociones básicas de teoría de números como el máximo común divisor o la definición de número primo, también nociones básicas de geometría como el plano cartesiano, polígonos y circunferencias y área de polígonos, todos estos conceptos son desarrollados en la escuela.

Además el *ESTALMAT* de España también diseñó una cartilla de geometría reticular para trabajarla con los estudiantes del proyecto. A su vez, la Universidad de Zaragoza creó una cartilla sobre el Teorema de Pick para un taller de talento matemático (Pérez y Sánchez, 2009), esto muestra que es una teoría que se puede trabajar con estudiantes de escuelas y colegios.

En el semestre en curso (2013-I) el currículo de geometría reticular se está llevando a cabo en el programa Talentos de la Universidad Sergio Arboleda. Las clases se enfocan en que los estudiantes puedan construir conocimiento, realizar conjeturas, argumentar y dar contraejemplos. Se busca que el estudiante tome un papel activo y no que sea solo un oyente en el salón de clase.

Adicionalmente a los estudiantes se les ofrecen proyectos de investigación en la teoría que se está trabajando. En el curso de geometría reticular se tienen tres proyectos:

- Geometría reticular en un sistema de ejes no ortogonal.
- Geometría en una retícula rectangular.
- Geometría reticular en 3 dimensiones.

REFERENCIAS

Arancibia, V. (2009). *La educación de alumnos con talentos: una deuda y una oportunidad para Chile*. Vicerrectoría de Comunicaciones y Asuntos Públicos, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

Bondy, J. (1976). *Graph theory with applications.* Nueva York, EUA: Elsevier Science Publishing Co, Inc.

Cabrera, P. (2011). ¿Qué debe saber y saber hacer un profesor de estudiantes con talento académico? Una propuesta de estándares de formación inicial en educación de talentos. *Estudios Pedagógicos*, *37*(2), 43-59.

Consejo de Bogotá (2009). Proyecto de Acuerdo No. 351 DE 2009. Por medio del cual se establece el plan de cubrimiento gradual para la adecuada atención educativa de las personas con capacidades o talentos excepcionales.

Corte Constitucional de Colombia (2009). Sentencia T-294/09, Derecho a la educación de menores con talentos o capacidades excepcionales.

Guzman, M. de (2007). *El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas*. España, ESTALMAT. Recuperado de http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf

Hazzan, O. y Hadar, I. (2005). Reducing abstraction when learning graph theory. *Journal International of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *24*(3), 255-272.

Luque, C., Mora, L. y Torres, J. (2006). ¿Es posible hacer matemáticas en el aula? En *Memorias de Coloquio Investigación e Innovación de la Enseñanza de las Ciencias* (vol. 1, no. 1, pp. 69-77). Bogotá, Colombia: Universidad Católica de Colombia. Recuperado en http://portalweb.ucatolica.edu.co/easyWeb2/files/44_248_v1n1luquemoratorres.pdf

Ministerio de Educación Nacional (1994). *Ley General de Educación 115 de 1994*.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Orientaciones para la atención educativa a estudiantes con capacidades o talentos excepcionales*. Bogotá, Colombia: Autor.

Núñez, R., Gómez, L. y Cortés, C. (2011). *El ambiente académico universitario clave del talento matemático*. Ponencia presentada en XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

Peréz, J. (2010). *La matemática elemental*. Escuela de Matemáticas, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá, Colombia.

Pérez, A. y Sánchez, M. (2009). *Matemáticas para estimular el talento. Actividades del proyecto ESTALMAT*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES.

Ramírez, J. (2010). El Teorema de Pick y redes de puntos. *Materials Matemàtics*, 5, 1-41.

Yaglom, I. (1981). Elementary geometry, then and now. En Ch. Davis, B. Grünbaum y F.A. Sherk (Eds.), *The geometric vein, The Coxeter Festschrift* (pp. 253-277). Nueva York, EUA: Springer Verlag.