

Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**  
Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**  
Énergétique et Transferts

---

**Présentée et soutenue par :**  
Jérémy De la Torre

**le :** vendredi 4 février 2011

**Titre :**

Calculs de sensibilités par méthode de Monte-Carlo,  
pour la conception de procédés à énergie solaire concentrée

---

**Ecole doctorale :**  
Mécanique, Énergétique, Génie civil et Procédés (MEGeP)

**Unité de recherche :**  
Rapsodee

**Directeur(s) de Thèse :**  
M. Jean-Jacques BEZIAN, Rapsodee - EMAC, Directeur de thèse  
Mme Mouna EL HAFI, Rapsodee - EMAC Co-directrice de thèse

**Rapporteurs :**  
M. Denis LEMONNIER, Institut P' - CNRS  
M. José GONZALEZ AGUILAR, IMDEA Energía

**Membre(s) du jury :**  
M. Denis LEMONNIER Institut P' - CNRS, Rapporteur  
M. José GONZALEZ AGUILAR, IMDEA Energía, Rapporteur  
M. Gilles FLAMANT, PROMES - CNRS, Examineur  
M. Richard FOURNIER, LAPLACE - UPS, Examineur



## REMERCIEMENTS

A aucun moment, pendant ma thèse je n'ai été seul. Les travaux rassemblés dans ce manuscrit sont le fruit d'un travail d'équipe. Aussi, je souhaite remercier toutes les personnes qui m'ont entouré et ont contribué à l'aboutissement de ce doctorat.

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs José Gonzalez Aguilar et Denis Lemmonier qui ont accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire ainsi que Gilles Flamant pour avoir présidé mon jury de soutenance.

Un grand merci à mes encadrants Jean-Jacques Bézian, Mouna El Hafi , Richard Fournier et Stéphane Blanco. Merci d'abord pour votre patience et votre soutien dans les moments les plus durs. Merci surtout pour votre complémentarité, grâce à laquelle j'ai toujours trouvé l'interlocuteur qui puisse me conseiller. Lorsque j'étais perdu dans le brouillard, vous avez su être le laser qui brise l'isotropie de la luminance pour m'indiquer la direction vers où me diriger.

Merci aussi à Maxime Roger sans qui mon sujet de thèse n'aurait sans doute pas existé. Merci Max' pour le temps précieux que tu m'as consacré tout au long de ma thèse. J'ai été très heureux de pouvoir poursuivre une partie de tes travaux. Merci à François, Germain et Jérémie pour avoir souvent bûché avec moi et rempli des tableaux d'équations lorsque nos sujet se croisaient. Merci pour votre grande contribution à mon chapitre 3!!!

Autour de ce noyau central, je souhaite aussi remercier tous les membres de la grande famille de ceux qui un jour sont revenu de la forêt de Roffiac sans aucun champignon alors que Richard et Stéphane en avaient 2 seaux chacun ! : Julien-Yves, Damien, Arezki, Vincent, Benjamin, Sébastien, Jacques, Sebastian, Marc, David, Cyril, Patrice, Olivier, Anthony ... Longue vie au séminaire de rayonnement de Roffiac et j'espère que le séminaire "diphastique" dans les Pyrénées rencontrera le même succès.

Je remercie l'ensemble de mes collègues à l'Ecole des Mines d'Albi (presque tout le personnel en fait!!!) et en particulier le service info, le service technique avec une mention à Bernard Liège et Jean-Paul Once, le centre Rapsodee avec une mention à Valérie, Anne-Marie et Elisabeth, le centre GI pour "la grimpe entre midi et deux" et les TP de programmation en langage C, le centre matériaux parce que croiser régulièrement Serge Tovar est un remède contre la déprime, sans oublier le personnel de la "place du marché".

Enfin je terminerai ces remerciements par sept personnes qui m'ont soutenu et encouragé sans relâche pendant un peu plus de trois ans : Émeline, Maxime, Paul-André, Pascale, Enrique, Martine et Mélanie, Merci.



---

## **RÉSUMÉ : Méthode de Monte-Carlo et Calculs de sensibilités pour la conception de procédés à énergie solaire concentrée**

Dans le contexte énergétique mondial de raréfaction des ressources fossiles, et de réduction des émissions de gaz à effet de serre, l'agence internationale de l'énergie prévoit que la filière solaire thermodynamique fournisse en 2050 plus de 10 % de l'électricité mondiale. De gros efforts de recherche sont nécessaires pour atteindre cet objectif. Les axes de développement actuels des technologies solaires à concentration portent, entre autres, sur les systèmes optiques composés de multiples miroirs (champs d'héliostats, concentrateurs linéaires de Fresnel, Beam-Down), sur les récepteurs solaires volumétriques (récepteurs à air, lits fluidisés) et sur les réacteurs (chimie à haute température, photobioréacteurs, dessalement par voie thermodynamique).

Le transfert d'énergie par rayonnement est un des phénomènes prépondérants dans les systèmes optiques concentrateurs et dans les récepteurs solaires volumétriques. Les laboratoires Rapsodee et Laplace ont développé en quelques années d'étroite collaboration un savoir faire méthodologique sur la modélisation des transferts radiatifs et le calcul de sensibilité par la Méthode de Monte-Carlo et ils ont accumulé une expérience pratique, issue de la synthèse d'image, en programmation scientifique en interaction avec des chercheurs en informatique.

Nous montrons dans ce manuscrit dans quelle mesure l'association de ces compétences théoriques et pratiques permet de répondre à certains besoins de la communauté du solaire à concentration et nous donnons des éléments de réponses ou des pistes à explorer en vue de surmonter les difficultés restantes que nous avons rencontrées.

## **ABSTRACT : Monte-Carlo Method and sensitivity computations for the design of concentrated solar energy processes**

The decrease of the fossil energy resources and the reduction of the emissions of greenhouse effect gas are major environmental issues. In this global situation, the International Energy Agency expects that solar power will provide more than 10 % of the world electricity in 2050.

Significant research efforts are needed to achieve this goal. Radiative transfer is one of the main physical phenomena in solar optical concentrators and in volumetric solar receivers. In few years of closely work, the laboratories Rapsodee and Laplace developed a methodological know-how in using Monte-Carlo methods for the modeling of radiative transfer and the sensitivity computations. They have also accumulated some experience in scientific programming and algorithms optimisation.

We show in this dissertation how the combination of these physicists theoretical and practical skills can meet certain needs of the community of solar concentration. We give some answers or clues to be explored to get through the remaining difficulties we encountered .



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 La concentration solaire</b>	<b>13</b>
1.1 Contexte . . . . .	13
1.2 Historique et technologies actuelles . . . . .	15
1.2.1 Concentrateurs linéaires . . . . .	16
1.2.2 Concentrateurs ponctuels . . . . .	19
1.2.3 Évolution de la filière thermodynamique, nouvelles perspectives pour les centrales à tour . . . . .	22
1.3 État de l’art sur les champs d’héliostats et les outils de modélisation . . . . .	27
1.3.1 Conception d’une centrale solaire à tour : description du problème . . . . .	27
1.3.2 Configuration du champ d’héliostats . . . . .	28
1.3.3 Techniques de modélisations et de calculs solaires . . . . .	31
1.4 Nouveaux besoins, problématiques émergentes . . . . .	35
1.4.1 Optimisation des optiques de concentrateurs : que faut il améliorer ? . . . . .	36
1.4.2 Synthèse . . . . .	38
<b>2 Méthode de Monte-Carlo</b>	<b>41</b>
2.1 Approche intégrale . . . . .	42
2.1.1 Échantillonnage préférentiel . . . . .	45
2.1.2 Variable de contrôle . . . . .	46
2.1.3 Reformulation intégrale . . . . .	46
2.1.4 Illustrations pédagogiques . . . . .	47
2.2 Algorithmes à variance nulle . . . . .	51
2.3 Estimations simultanées des sensibilités . . . . .	61
<b>3 Mise en oeuvre pratique</b>	<b>69</b>
3.1 L’environnement de développement ED-Star . . . . .	69
3.1.1 La bibliothèque objet mcm . . . . .	70
3.1.2 mcm 3D . . . . .	72
3.2 Exemples applicatifs : Procédés à énergie solaire concentrée . . . . .	74
3.2.1 Centrale à tour . . . . .	74
3.2.2 Concentrateur linéaire de Fresnel . . . . .	81
3.2.3 Récepteur volumétrique à lit fluidisé . . . . .	85
3.2.4 Photobioréacteur . . . . .	91

<b>4</b>	<b>Difficultés lors des calculs de sensibilité</b>	<b>99</b>
4.1	Recensement de ces difficultés . . . . .	99
4.2	Réflexion spéculaire sur un héliostat : problème formel de mise en oeuvre . . . . .	102
4.2.1	Présentation du problème simplifié . . . . .	103
4.2.2	Formulation intégrale . . . . .	105
4.2.3	Développement théorique selon la méthodologie proposée par Maxime Roger [4]	106
4.2.4	Résultats et discussion . . . . .	112
4.3	Réflexion non-spéculaire sur un héliostat : problème de convergence . . . . .	113
4.3.1	Présentation du problème simplifié : intégrales à calculer . . . . .	115
4.3.2	Développement direct . . . . .	117
4.3.3	Premier essai : Variable de contrôle . . . . .	120
4.3.4	Deuxième essai : Échantillonnage préférentiel . . . . .	122
4.3.5	Troisième essai : Influence du choix du vecteur vitesse . . . . .	124
4.3.6	Conclusion . . . . .	126
4.4	Diffusion multiple dans un slab : sensibilité à la position de la source . . . . .	127
4.4.1	Description du problème . . . . .	128
4.4.2	Première formulation : intégrales sur les directions et les libres parcours de diffusion . . . . .	128
4.4.3	Nouvelle formulation : intégrales sur les positions de diffusion . . . . .	131
4.4.4	Résultats et discussion . . . . .	133
4.4.5	Variable de contrôle appliquée au calcul de sensibilité . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>
5.1	Synthèse . . . . .	139
5.2	Perspectives . . . . .	140
	<b>Bibliographie</b>	<b>141</b>



# Introduction

La thèse présentée dans ce manuscrit a été menée au laboratoire RAPSODEE de l'École des Mines d'Albi sous la direction de M. Jean-Jacques Bézian et codirigée par Mme Mouna El Hafi. Les travaux de recherche ont été effectués en collaboration avec une équipe dirigée par M. Richard Fournier du groupe GREPHE du laboratoire LAPLACE à l'université de Toulouse. Ce sujet de thèse a été lancé en parallèle du projet CNRS CONSOL coordonné par le centre PROMES à Odeillo.

Dans ce contexte ces trois principales équipes de recherche (auxquelles s'ajoute aussi le LATEP de l'Université de Pau et des pays de L'Adour) ont été réunies autour de deux problématiques :

- **Modélisation des transferts radiatifs et estimation de sensibilités par la Méthode de Monte-Carlo** (LAPLACE-RAPSODEE depuis 1999) : On peut citer les thèses de Patrice PEREZ [1], d'Amaury DE LATAILLADE, [2], de Vincent EYMET [3] et de Maxime ROGER [4] qui ont notamment porté sur le calcul du transfert radiatif en géométrie complexe, sur l'analyse en puissances nettes échangées des transferts radiatifs dans les atmosphères diffusantes et sur le développement méthodologique des calculs de sensibilités paramétriques puis de sensibilités à la déformation du domaine.
- **Modélisation de systèmes concentrateurs d'énergie solaire en vue d'optimiser leur conception** (RAPSODEE-PROMES-LATEP depuis 2004) : Les thèses de Pierre GARCIA [5], Muriel ALAPHILIPPE [6], François NEPVEU [7], Arezki BOUNACEUR [8], Mathieu VRINAT [9] ont récemment été présentées dans ce contexte. Elles portent respectivement sur la réhabilitation de la centrale à tour Thémis dans le cadre du projet PEGASE, l'utilisation d'un moteur Ericsson pour la cogénération solaire, l'étude et la caractérisation d'un concentrateur parabolique de type Dish-Stirling, et l'étude de l'interaction lit fluidisé de particules solides - rayonnement solaire concentré, pour le développement d'un absorbeur solaire surfacique à air pressurisé.

Au début de ce travail de thèse, nous avons à notre disposition :

- d'une part, la synthèse de réflexions théoriques très poussées sur l'utilisation des méthodes de Monte-Carlo en transfert radiatifs [4] (techniques d'optimisation des algorithmes, notamment en temps de calcul, avec une avancée méthodologique sur les calculs des sensibilités à des paramètres géométriques). Les domaines d'applications envisagés étaient très vastes, mais seules des configurations géométriques académiques avaient pu être abordées.
- d'autre part, une approche innovante de la prise en compte des géométries complexes, issue de l'exploration des interfaces entre rayonnement et informatique de synthèse d'image dont l'objectif était de simuler les chambres de combustion réelles dans toute leur complexité [1].

C'est sur cette base qu'est venue se greffer la problématique solaire : les études ont montré que les problèmes abordés en concentration solaire comportent de très nombreux paramètres (physiques et géométriques) et que la détermination d'un jeu optimal de paramètres est très complexe.

L'adaptation des méthodologies développées au laboratoire dans le cadre de calculs radiatifs sur des systèmes concentrateurs d'énergie solaire devrait permettre de faciliter grandement la mise en oeuvre systématique d'études paramétriques. Tel était le principal objectif initial de ce travail de thèse.

Cependant, lors de l'application de ces concepts mathématiques à des problèmes radiatifs, nous avons rencontré beaucoup de cas où la mise en pratique du calcul de sensibilité est immédiate et facile mais il en existe certains pour lesquels il est impossible d'appliquer directement la méthodologie disponible. Un travail supplémentaire d'approfondissement a donc été nécessaire.

D'où viennent ces difficultés pratiques ? Existe-t-il des moyens de les contourner ? La méthode utilisée donne-t-elle des résultats satisfaisants ? Peut-on dresser une classification des problèmes en fonction du type de développement nécessaire à la mise en application d'un calcul de sensibilité ? Nous essaierons de répondre à ces questions dans ce mémoire.

Le manuscrit se décompose en cinq chapitres. Le premier chapitre porte sur la concentration solaire. Partant d'un état de l'art des technologies et des techniques de modélisation de ces systèmes, nous dressons une liste des besoins de la communauté solaire notamment en ce qui concerne l'optimisation de la conception de nouveaux systèmes. Nous identifions dans quelles mesures les techniques de modélisation développées pour les transferts radiatifs permettent de répondre à ces besoins.

Dans le second chapitre, nous passons d'abord en revue les bases théoriques de la méthode de Monte-Carlo, puis nous reprenons les derniers travaux sur ce thème en particulier concernant les techniques de réduction de la variance. Nous illustrons ces propos par l'application de cette méthode de calcul numérique à plusieurs exemples concrets. Enfin dans une section dédiée aux calculs de sensibilité, nous présentons le corpus théorique issu de deux propositions [10, 11] et nous développons quelques exemples académiques.

Dans le troisième chapitre nous présenterons l'environnement de développement ED-Star conçu pour faciliter la programmation d'algorithmes de Monte-Carlo parallélisables. Cet environnement permet entre autres de modéliser le rayonnement solaire concentré dans des géométries complexes. Afin de montrer qu'ED-Star permet un accès facile aux dernières avancées scientifiques sur la modélisation des transferts radiatifs par la méthode de Monte-Carlo, nous détaillons une série de quatre exemples applicatifs tirés de différents procédés à énergie solaire concentrée. Ce chapitre porte essentiellement sur la mise en oeuvre pratique et directe des algorithmes de Monte-Carlo pour la simulation de procédés à énergie solaire concentré.

Le quatrième chapitre constitue avec le second la partie fondamentale de ce manuscrit concernant le développement et l'optimisation d'algorithme de Monte-Carlo pour le calcul de sensibilité. Nous y recensons les difficultés que nous avons pu rencontrer lors de la mise en pratique de calculs de sensibilité. Nous essayons de classer ces difficultés par familles de problèmes :

- Difficultés pratiques causées par une procédure trop lourde de mise en oeuvre du calcul de sensibilité ;

- Convergence insuffisante des algorithmes utilisés ;
- Obstacles algorithmiques liés à la complexité des géométries et des phénomènes étudiés.

Nous détaillons ensuite pour chaque famille identifiée des exemples pratiques dans des versions académiques.

Nous concluerons ce manuscrit par un cinquième chapitre en synthétisant les résultats obtenus à la fois sur le plan théorique et sur le plan pratique. Puis dans la section perspectives, nous listerons quels pourront être les développements futurs et dans quelles mesures les travaux présentés dans ce mémoire peuvent être utilisés en l'état.



# Chapitre 1

## La concentration solaire

Ce chapitre commence par une description du contexte mondial (section 1.1) sur l'utilisation actuelle des ressources énergétiques. Nous ferons ensuite un bref historique sur le solaire à concentration ainsi qu'un état de l'art des technologies (section 1.2). Dans la section 1.3, nous proposons un inventaire des techniques de modélisation utilisées par la communauté scientifique et industrielle. Puis nous dressons une liste de besoins à partir desquels nous pourrions extraire les problématiques abordées dans la suite du manuscrit.

### 1.1 Contexte

Si le vingtième siècle a été marqué par l'explosion de la production et de la consommation énergétique de l'humanité, le vingt-et-unième siècle se déroulera comme il a commencé : sous le signe des économies d'énergie. Le réchauffement climatique est devenu une certitude et les politiciens du monde entier ont pris conscience des conséquences sociales liées aux impacts environnementaux de ce phénomène.

- Disparition de territoires habités à cause de l'élévation du niveau des mers (fonte des calottes glacières, dilatation thermique des océans) ;
- Disparition d'écosystèmes à cause de dérèglements climatiques (températures, saisons, précipitations...);
- Augmentation des phénomènes météorologiques extrêmes ;

Ces risques probables ne sont que les trois principaux points d'une longue liste de dérèglements et de catastrophes envisagés par le GIEC [12] qui entraîneront de nombreuses migrations humaines et une réorganisation certaine de l'occupation des sols.

Limiter la contribution humaine au réchauffement climatique pour en ralentir ou diminuer les effets est la première motivation (instinct de survie oblige) pour réviser nos modes de production d'énergie et en limiter la consommation. Cependant, cette prise de conscience collective et tous les efforts ou progrès envisagés ne suffiront pas pour éviter de grands changements climatiques. Au mieux cela pourra peut-être les retarder.

Repenser tous les concepts de production, de distribution et de consommation d'énergie devient alors une évidence. Les réserves d'énergie fossile diminuent alors qu'elles constituent 80% des sources utilisées aujourd'hui et la demande est en forte croissance. L'électricité est le principal vecteur

énergétique et il devient de plus en plus dominant (même dans les transports comme les trains, les bus, les voitures).

Il existe plusieurs solutions pour augmenter la production d'électricité.

- L'énergie nucléaire est la première candidate. Elle ne dégage pas de gaz à effet de serre, mais elle contribue cependant à modifier l'environnement en réchauffant l'eau des fleuves, lacs et rivières. La fusion nucléaire n'est pas une technologie arrivée à maturité et son utilisation n'est pas envisageable avant un siècle. La fission présente, quant à elle, de gros inconvénients comme le traitement des déchets radioactifs et l'utilisation d'une ressource épuisable – l'uranium. Le nucléaire semble donc très limité et ne constitue pas une alternative durable.
- Le charbon dont les réserves peuvent garantir la production d'électricité pendant encore 500 ans pose des problèmes de transport, de stockage et surtout de pollution.

Viennent ensuite les énergies d'origine renouvelable :

- Le caractère intermittent de l'énergie éolienne pourrait être compensé par l'hydrolyse et le stockage d'hydrogène mais c'est une solution très limitée à grande échelle et elle ne peut pas être installée partout.
- La ressource en énergie hydraulique est assez faible. Elle permet tout au plus de répondre à une demande énergétique locale. La construction de barrages a de forts impacts environnementaux et les sites favorables à ce genre d'installations sont en grande partie déjà exploités.
- La biomasse pose des problèmes éthiques à propos de la concurrence qu'elle fait à l'agriculture nourricière.
- La géothermie serait une ressource intéressante à la fois pour de grandes centrales électriques, pour des installations plus petites, décentralisées et pour la possibilité de faire de la cogénération. Cette filière n'est malheureusement pas viable économiquement. En effet, la construction d'énormes canalisations à de grandes profondeurs pour chauffer de l'eau représente des investissements très peu rentables.
- La ressource solaire pourrait permettre de répondre à une grande partie de la demande mondiale en électricité. Il existe trois filières :
  - Le photovoltaïque demande l'utilisation exclusive de très grandes surfaces (contrairement à des éoliennes installées sur des surfaces agricoles). Le stockage par batterie étant très limité, cette technologie n'est envisageable qu'à petite échelle sur des surfaces comme les toitures, et des abris de parking qui ne sont pas valorisables autrement.
  - Le solaire thermique sans concentration permet de fournir de l'eau chaude sanitaire. C'est une bonne alternative au chauffe-eau électrique. Mais ce n'est pas une solution très efficace à grande échelle pour le chauffage ou la production d'électricité.
  - La filière thermodynamique à concentration semble aujourd'hui être une alternative plausible pour répondre à la problématique mondiale de production d'énergie. Elle n'émet pas de gaz à effet de serre. Les technologies disponibles pour le stockage de chaleur peuvent permettre de garantir la production électrique en l'absence de soleil pendant certaines périodes. Il existe différentes sortes d'installations pour couvrir toute la gamme des demandes (des sites isolés non reliés au réseau jusqu'aux centrales capables d'alimenter toute une ville). Comme il ne sera possible de construire des centrales de puissance unitaire supérieure à 100 mégawatts électriques que dans les zones désertiques ou semi-désertiques, une grande

part de la production sera effectuée par des installations de taille moyenne proches des lieux de consommations.

## 1.2 Historique et technologies actuelles

On sait que des systèmes concentrateurs d'énergie solaire existent au moins depuis 212 av. J.C. L'ingénieur grec Archimède aurait, d'après la légende, sauvé Syracuse des romains en incendiant leurs navires à l'aide de miroirs polis qui concentraient l'énergie solaire. Les Incas, quant à eux, utilisaient au XV<sup>e</sup> siècle un miroir concave pour allumer un feu lors de la cérémonie de l'Inti-Raimi.

Aujourd'hui des technologies de la filière thermodynamique utilisent ce même principe de concentration pour produire de l'électricité solaire. C'est la principale utilisation de l'énergie solaire concentrée. Il existe d'autres applications comme la chimie (craquage de molécules ou vaporeformage d'hydrogène par exemple), la métallurgie (traitement thermique à très hautes températures), la cimenterie, l'électricité photovoltaïque.

**Production d'électricité solaire par voie thermodynamique :** L'électricité solaire n'existe sur le réseau que depuis 1980 [13] bien que des travaux de recherche sur ce sujet aient été menés depuis 140 ans déjà. Ce sont les chocs pétroliers qui ont déclenché la construction de plusieurs installations de démonstration dans les années 80. Les centrales SEGS, construites aux États-Unis au début des années 90, fonctionnent encore aujourd'hui. Après la baisse du cours du pétrole, des barrières réglementaires, politiques et économiques ont freiné ou stoppé (dans certains pays) le développement de cette branche qui demande de gros efforts de recherche et dont les projets coûtent très cher. Les programmes de recherche et les projets de démonstration n'ont alors pas trouvé le soutien des investisseurs parce que le marché n'était pas encore prêt à accueillir ces technologies.

Aujourd'hui cependant le contexte a changé et le marché actuel semble avoir besoin de ces technologies. Depuis 2007, on a mis en chantier plus de 2 GW électriques. Les centrales solaires commerciales actuelles les plus connues se trouvent aux États-Unis et en Espagne. Un immense projet (Shams 1) de 100 MW a été lancé aux Émirats Arabes Unis près d'Abu Dhabi [14]. Les puissances thermiques unitaires de ces installations peuvent aller de 1 à 300 MW<sub>th</sub> selon les technologies utilisées. On trouve aussi des centrales de démonstration en Allemagne, en France, en Israël, en Australie, au Japon... Parmi les sources d'énergie renouvelable, l'énergie solaire est celle qui présente le plus gros potentiel à long terme pour fournir à la planète une partie de son électricité [13]. Les moyens actuels combinés au recul que l'on a sur les technologies de base devraient ouvrir la porte à des nouvelles approches et permettre ainsi une croissance rapide dans le domaine.

Bien que l'utilisation de cellules photovoltaïques présente un réel intérêt dans la production d'électricité d'origine renouvelable, nous nous intéressons ici à la filière thermodynamique uniquement. Cette filière propose différents moyens pour convertir l'énergie solaire en énergie électrique. Tous consistent d'abord à chauffer un fluide avec le rayonnement solaire concentré. L'énergie thermique récupérée est convertie en énergie mécanique, grâce à un cycle thermodynamique qui met en mouvement un alternateur pour produire enfin de l'électricité.

**État de l'art technologique :** Nous allons maintenant présenter un inventaire des principales technologies de concentrateurs solaires thermodynamiques (cf. Fig. 1.1) qui sont le premier maillon de cette chaîne de conversion. Nous distinguerons deux types de capteurs :

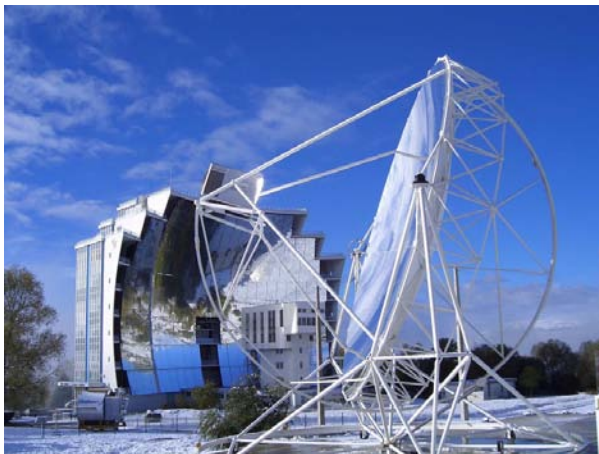
- systèmes à concentration linéaire ;
- systèmes à concentration ponctuelle.



(a) Concentrateurs cylindro-paraboliques.



(b) Centrale Solaire PS10 près de Séville.



(c) Dish Stirling devant la parabole du four solaire à Promes - Odeillo.



(d) Miroir de Fresnel - Centrale d'Areva (ex Austra) à Bakersfield en Californie.

FIGURE 1.1 – Principales technologies de concentrateurs solaires.

## 1.2.1 Concentrateurs linéaires

Ces systèmes sont composés de réflecteurs assez longs qui suivent le soleil grâce à un seul axe de rotation. Un tube dans lequel circule un fluide caloporteur est placé sur la ligne focale du concentrateur, c'est le récepteur (ou absorbeur).

### 1.2.1.1 Capteurs cylindro-paraboliques

Ce système présente de longs miroirs de profil parabolique au foyer desquels se trouve l'absorbeur, un tube sous vide (le tuyau dans lequel circule le fluide est entouré par une ampoule de verre pour limiter les pertes par convection). L'axe de rotation des miroirs est habituellement orienté Nord-Sud. Il assure ainsi le suivi du soleil au cours de la journée de l'Est à l'Ouest. Cette



disposition permet un rendement quotidien assez stable et entraîne une production estivale plus importante en réduisant les pertes par effet cosinus<sup>1</sup>. Il existe cependant des installations expérimentales orientées Est-Ouest qui suivent le soleil en hauteur. Elles atteignent leur performance maximale tous les jours de l'année à midi et permettent ainsi de tester ou de caractériser les installations thermodynamiques. Mais en contrepartie, leur production est déséquilibrée sur la journée. D'anciennes installations présentaient ce genre de capteurs sur des montures altazimutales qui assurent le suivi précis du soleil selon deux axes. Le surcoût de ce dispositif est cependant plus important que le gain de performance engendré. Il n'est donc pas utilisable de façon industrielle.

Deux types de fluides caloporteurs sont utilisés aujourd'hui. Les systèmes à caloporteur huile sont les plus répandus (cf. Fig 1.2). L'huile a l'avantage de ne pas changer de phase dans l'absorbeur solaire. Elle passe ensuite dans plusieurs échangeurs pour produire la vapeur de la boucle secondaire. La température de l'huile est limitée à 400 °C. Les systèmes à génération directe de vapeur sont apparus plus tard. Dans ce cas, l'eau est à la fois le fluide caloporteur et le fluide de travail. On économise ainsi l'installation des échangeurs du générateur de vapeur. L'eau est moins chère que l'huile et sa température peut s'élever à 100 bar jusqu'à 450 °C. Cependant le stockage de vapeur n'est possible que sur de courtes périodes (en particulier pour compenser la perte de puissance liée au passage de nuages) et l'écoulement diphasique peut provoquer des déformations thermiques sur l'absorbeur. Cette filière à génération directe de vapeur est toujours en développement et la recherche actuelle porte sur la résolution des problèmes causés par les principales contraintes de ce système.

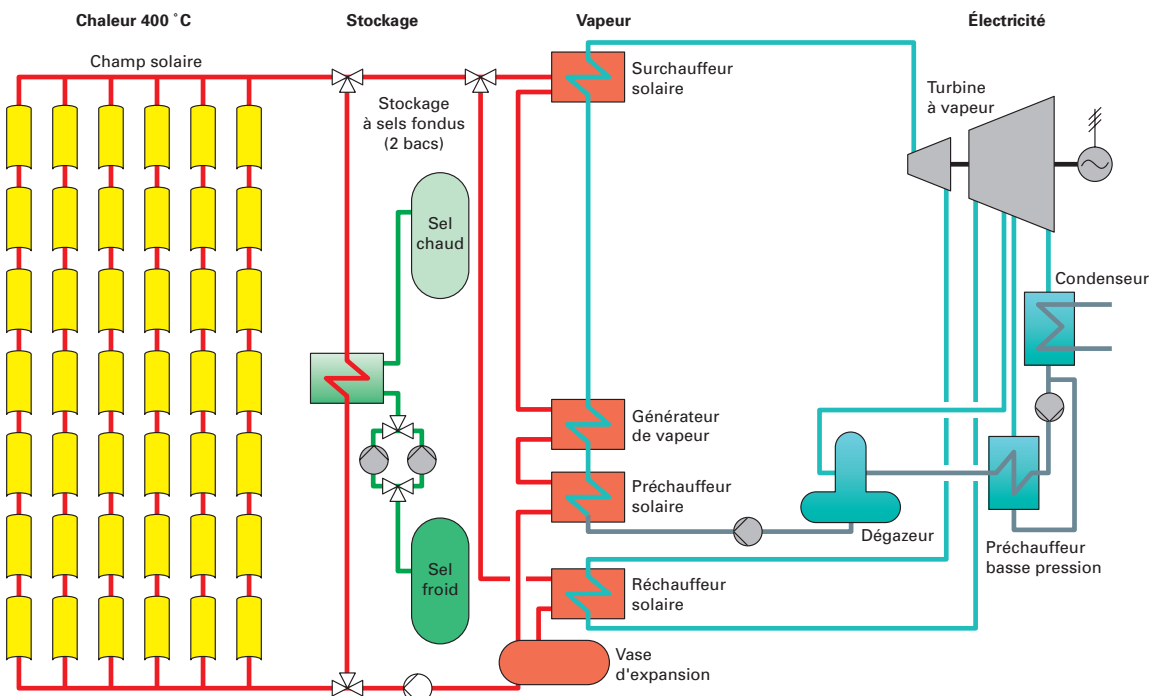


FIGURE 1.2 – Principe de fonctionnement d'une centrale à capteur cylindro-paraboliques à huile (400°C) avec stockage à sel fondu et cycle de Rankine (Source : Flabeg)

Avec 354 MW<sub>e</sub> installés entre les années 80 et 90 dans le désert de Mojave en Californie, les cap-

1. Réduction de la surface réfléchissante normale au rayonnement incident

teurs cylindro-paraboliques constituent la première technologie à être exploitée de façon industrielle. Grâce à ces années d'expérience c'est aujourd'hui la technologie la plus mature. De gros efforts de recherche ont été faits pour tenter de réduire les coûts de constructions et d'améliorer les performances afin de produire de l'électricité à grande échelle. Le rendement annuel ( $\frac{\text{Électricité Produite}}{\text{Rayonnement Solaire Reçu}}$ ) de cette technologie peut atteindre 16%. Plus de 50 projets industriels sont en chantier ou ont déjà été connectés au États-Unis et en Espagne[15].

### 1.2.1.2 Capteurs linéaires de Fresnel

Parallèlement aux capteurs cylindro paraboliques, qui dominent actuellement le marché, une autre technologie linéaire fait l'objet de développements prometteurs. Elle est basée sur des collecteurs à miroirs de Fresnel. Un champ horizontal de longs miroirs peu focalisants concentre le rayonnement solaire sous un absorbeur. À la différence des capteurs cylindro-paraboliques, cet absorbeur n'est pas mobile. Il est situé au dessus des réflecteurs mobiles. Il ne se déplace pas avec les miroirs qui suivent la course du soleil en tournant autour de leur axe. Cette technologie est actuellement disponible pour des projets commerciaux. Elle a été développée de manière à éliminer les inconvénients des capteurs cylindro-paraboliques :

- réduction des coûts de l'installation grâce à des miroirs plans bon marché et un absorbeur qui n'est pas mis sous vide ;
- augmentation de la disponibilité du champ grâce à une prise au vent plus faible ;
- meilleure occupation du sol (jusqu'à 70 % de couverture contre 30 à 35 % pour les champs cylindro-paraboliques) ;
- absence d'échangeur thermique grâce à la génération directe de vapeur (en développement pour les cylindro-paraboliques).

Ce système se décline en deux grandes options technologiques.

**Un récepteur par ensemble de miroirs[16] :** La première démonstration a été conçue par la société belge Solarmundo, qui en a construit un prototype et étudié la faisabilité. Cette technologie a été adoptée par Solar Power Group et Novatec Biosol, deux compagnies allemandes qui ont installé des démonstrateurs dans le sud de l'Espagne. C'est aussi cette technologie qui a été choisie par la CNIM pour le développement d'une offre française. Dans les conditions climatiques de la ceinture solaire, on peut espérer atteindre un rendement annuel de 15%.

La cavité réceptrice au dessus de l'absorbeur contient un second réflecteur de type concentrateur parabolique composé (voir Fig. 1.3) qui est soumis à de hautes températures. Bien qu'isolé par l'arrière, c'est une source de pertes optiques et thermiques.

**Compact Linear Fresnel Reflector (CLFR)[17] :** C'est un système multi-récepteurs. À la différence de la technologie précédente, les CLFR utilisent des champs de miroirs entrecroisés qui visent chacun un récepteur différent (cf. Fig. 1.1). Une plus grande couverture au sol augmente ainsi la production d'électricité par mètre carré de terrain. Ce système n'utilise pas de double réflexion ce qui évite des pertes radiatives et thermiques. Cette technologie semble avoir de l'avenir en tant que préchauffeur d'une centrale électrique conventionnelle. Elle atteindrait dans cette configuration un rendement annuel de 19%. C'est cette technologie, développée par la Société Australienne Ausra qui a été récemment rachetée par AREVA pour devenir AREVA Solar, avec la volonté de devenir le leader mondial des centrales solaires.



(a) Champ de miroirs construit par Novatec Biosol (b) Récepteur avec vitre, tube absorbeur, et second concentrateur. (Source : CNIM)

FIGURE 1.3 – Concentrateurs de Fresnel

### 1.2.1.3 Concentrateurs fixes à foyer mobiles

Quand le réflecteur doit suivre la course du soleil, sa structure doit être assez légère. Or les surfaces utilisées pour concentrer le flux solaire sont souvent importantes et l'inconvénient majeur de ce genre de système est la prise au vent. A partir d'une certaine vitesse, le vent empêche l'orientation précise des miroirs et au delà d'une vitesse seuil, l'installation doit s'arrêter et orienter les miroirs en position de survie. Dans certaines régions du globe, où l'ensoleillement annuel est favorable à la concentration solaire, les vents violents, fréquents empêchent l'installation de grandes surfaces réfléchissantes. Aussi des prototypes appelés concentrateurs COSS (capteurs optiques solaires segmentés) ont été conçus. Ils se composent de lames de miroirs supportées par des arcs de cylindre fixes en béton. Ces miroirs concentrent le rayonnement solaire sur une chaudière mobile constituée d'un récepteur cylindrique. Le suivi solaire permet au récepteur de se déplacer parallèlement à l'axe du concentrateur sur la génératrice de l'arc de cylindre de façon à se maintenir dans la tâche focale du rayonnement réfléchi [18].

Le principe de fonctionnement est très proche d'un cylindro-parabolique dont le concentrateur serait fixe et où seul le récepteur est mobile. Contrairement aux capteurs cylindro-paraboliques, l'ouverture des capteurs COSS n'est pas symétrique de part et d'autre de l'axe optique du système. Cela ne dégrade pas la qualité du flux solaire concentré parce que : *un bon système concentrateur n'est pas nécessairement un bon système imageant.*

## 1.2.2 Concentrateurs ponctuels

Qu'il s'agisse des paraboles-stirling ou des héliostats des centrales à tour et des fours solaires, ce type de concentrateurs assure le suivi solaire sur deux axes : en azimut et en élévation.

### 1.2.2.1 Concentrateurs paraboliques (paraboloïdes de révolution)

Le SG3, conçu par l'Université Nationale Australienne (ANU), était jusqu'en 2009 le plus gros concentrateur de ce type [19, 20]. C'est un miroir parabolique de 25 m de diamètre et de 400 m<sup>2</sup> (Fig. 1.4). Une chaudière placée au foyer produit de la vapeur à 500 °C et 4,5 MPa destinée à alimenter une turbine de 50 kW<sub>e</sub>. Ce prototype a produit 60 MWh d'électricité entre 1996 et 2000. Désormais disponible sur le marché, une installation commerciale de ce type serait composée de plusieurs concentrateurs (une vingtaine) pour une seule turbine de plus grosse taille. Depuis 2009 le plus gros concentrateur parabolique au monde est le nouveau prototype SG4<sup>2</sup> avec une surface de 500 m<sup>2</sup>.



(a) SG3



(b) Premiers tests au soleil du SG4 (Juin 2009)

FIGURE 1.4 – Les SG3 et SG4 de l'université nationale Australienne sont les deux plus gros concentrateurs paraboliques au monde. Un des seuls systèmes “Dish” où la chaîne de conversion solaire-électricité ne se trouve pas en intégralité au foyer de la parabole.

Si l'on met de côté cette exception, les concentrateurs paraboliques possèdent un moteur Stirling (paraboles-Stirling) ou une turbine à gaz (parabole-Brayton) à leur foyer. Plusieurs projets de démonstrations ont vu le jour. Citons par exemple les systèmes EURODISH [15], SAIC, SBP, SES[21]. Ce sont les systèmes électriques solaires les plus performants (rendement ponctuel supérieur à 30% et rendement annuel maximal de 25%). Cependant leur puissance individuelle est limitée et il faudrait une quantité d'unités pour produire de l'électricité à grande échelle.

Ce système est bien adapté à la production électrique décentralisée. Il peut aussi être combiné à d'autres technologies comme par exemple pour assurer le traçage des canalisations de Thémis [22]. Le coût très élevé du miroir parabolique et le manque de réelle industrie pour le moteur Stirling sont les principales barrières à la commercialisation de cette technologie [5].

### 1.2.2.2 Centrales à tour

La première vague de centrales à tour solaire expérimentales avait été lancée à la fin des années 70 en réponse aux chocs pétroliers. Citons parmi les premières centrales à tour *Solar One* (10 MW<sub>e</sub>, vapeur d'eau, en Californie) et *Thémis* (2,5 MW<sub>e</sub>, sels fondus, à Odeillo - Pyrénées Orientales cf. Fig 1.6),

2. <http://solar-thermal.anu.edu.au/2009/12/500-m%C2%B2-dish-construction-highlights>



FIGURE 1.5 – Ferme solaire au États-Unis avec les machines SunCatcher fabriquées par Stirling Energy Systems (SES)

qui toutes deux, furent arrêtées en 1986, après la chute du cours du pétrole et, qu'en France en particulier, la priorité eût été donnée à la filière nucléaire.

En 1995 cependant, *Solar Two* est née du champ d'héliostats de *Solar one* et de la technologie de *Thémis*. D'une puissance électrique de 12,4 MW<sub>e</sub>, ses 1926 héliostats d'une surface totale d'environ 83000 m<sup>2</sup> permettaient jusqu'en 1999 de concentrer 40 MW<sub>th</sub> puis de chauffer une solution de sels fondus (40 % NaNO<sub>3</sub> et 60 % KNO<sub>3</sub>) de 290°C à 565°C.

Plus récemment, des projets commerciaux de centrales à tour ont été lancés dans le monde. On peut citer la centrale solaire *PS10* (Fig. 1.1) située dans la région de Séville (Espagne) qui a été inaugurée en mars 2007. Sa puissance électrique est de 11 MW. Elle est constituée de 624 miroirs focalisants de 120 m<sup>2</sup> chacun soit près de 75000 m<sup>2</sup> et d'une tour de 115 m. Le récepteur au sommet de celle-ci produit de la vapeur d'eau saturée à 250 °C et 40 bar. En 2009, on a construit une seconde centrale *PS20* juste à côté de *PS10*. D'une puissance de 20 MW<sub>e</sub>, sa tour mesure 165 m et le champ d'héliostats comporte 1255 miroirs focalisants. Le fluide utilisé est aussi la vapeur d'eau. Le projet GEMASOLAR (anciennement *Solar Tres*) s'inspire de *Thémis* et de *Solar Two*. Il a pour objectif de fournir 17 MW<sub>e</sub> avec une technologie de sels fondus et un champ d'héliostats circulaire de 318 000 m<sup>2</sup> comportant 2650 miroirs pour une puissance thermique de 120 MW<sub>th</sub>. Il assurera une autonomie en stockage de 15 heures.

En France, le projet de recherche PEGASE, a pour but de réutiliser les héliostats de la centrale *Thémis* et d'atteindre de très hautes températures. Il s'agira d'un cycle hybride (HSGT) dont le fluide (air sous pression à 10 bar) est d'abord préchauffé par l'énergie solaire concentrée puis chauffé jusqu'à environ 1000°C dans une chambre de combustion. L'air traverse enfin une turbine à gaz qui produira 1,4 MW<sub>e</sub>.

Comme les centrales à tour et champ d'héliostats constituent la principale application étudiée dans nos travaux, nous présenterons plus en détails leur fonctionnement dans la section suivante (1.3.1, 1.3.2).

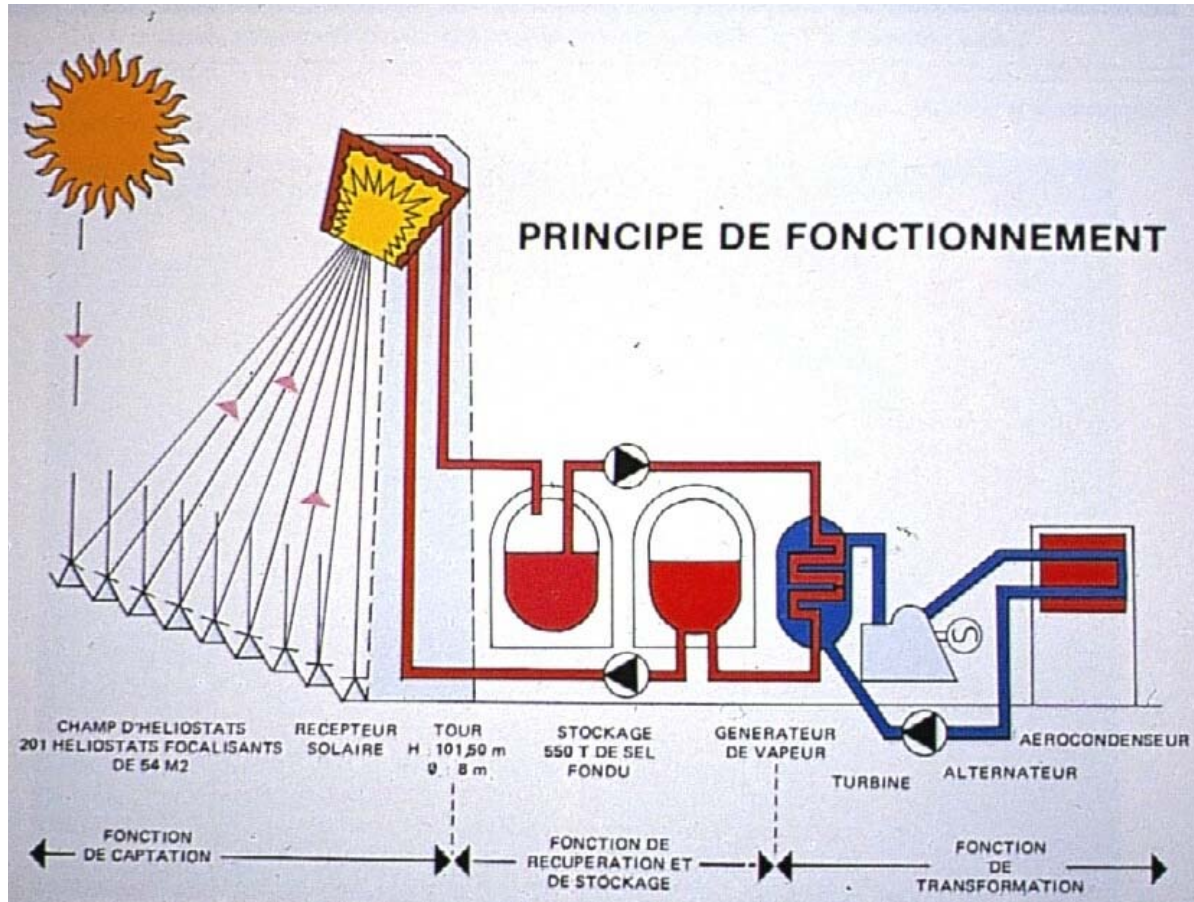


FIGURE 1.6 – Principe de fonctionnement de la centrale Thémis - Odeillo (1983-1986)

### 1.2.2.3 Fours solaires

Un four solaire est un concentrateur à double réflexion. La première réflexion est assurée par des héliostats mobiles plans qui renvoient, sans les concentrer, le rayonnement solaire vers le concentrateur dans la direction de son axe optique. C'est le second réflecteur qui concentre les rayons au foyer du système (cf. Fig. 1.7). Il est constitué d'une structure parabolique (parfois sphérique) sur laquelle sont fixées des facettes réfléchissantes légèrement courbées par déformation mécanique<sup>3</sup>. Les fours solaires ne sont pas conçus pour produire de l'électricité, ce sont des outils de recherche (chimie à haute température pour la production de vecteurs énergétiques) ou réservés à l'élaboration de matériaux à très haute valeur ajoutée [23].

### 1.2.3 Évolution de la filière thermodynamique, nouvelles perspectives pour les centrales à tour

L'avenir à long terme du solaire thermodynamique semble reposer sur des installations de grande taille. Aussi les centrales à champ d'héliostats sont traditionnellement conçues pour être installées dans des zones désertiques ou sur d'autres terrains qui ne présentent pas de contraintes géographiques particulières. Cependant les cours fluctuants du marché de l'énergie solaire décourageaient

3. Les fours de petites tailles (échelle laboratoire) peuvent avoir un concentrateur parabolique monobloc (ancien miroir de DCA par exemple)

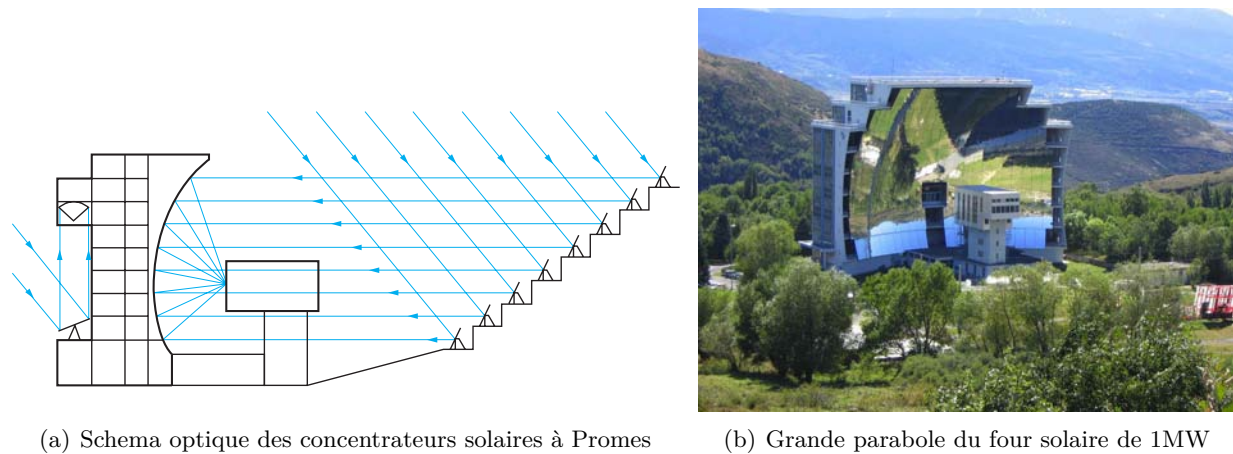


FIGURE 1.7 – Fours solaires au Laboratoire CNRS-Promes à Odeillo-Font Romeu

jusqu'en 2003 bon nombre d'investisseurs pourtant intéressés par la filière. De plus le marché mondial de l'électricité est en pleine restructuration. Le modèle de production de masse centralisée semble s'essouffler aujourd'hui, entre autres à cause des coûts trop élevés des transports qui sont très longs. Pour éviter un éventuel ralentissement du développement de la filière solaire à concentration, il a alors fallu penser à de nouvelles applications et à de nouveaux systèmes optiques et thermodynamiques. Ainsi quand de grands projets mondiaux comme celui du consortium DESERTEC dans la région MENA (Moyen-Orient et Afrique du Nord) seront lancés, les nouvelles technologies de concentration solaire auront déjà fait leurs preuves et celles déjà existantes auront été améliorées.

### 1.2.3.1 Centrale solaire à cycle combiné avec turbine à gaz

Romero et al.[24] présentent en 99 le projet COLON SOLAR comme une alternative aux grands projets de centrales solaires. De taille plus réduite et situé dans une zone géographique déjà industrialisée, le site du projet présente des facilités d'accès. C'est un projet hybride de centrale solaire à tour ( $21,8 \text{ MW}_{\text{th}}$ ) à coté d'une installation électrique existante au gaz naturel. Tout l'enjeu scientifique du projet COLON consistait à prendre en compte les contraintes géographiques et environnementales qui lui sont imposées sans pour cela causer d'augmentation considérable du coût de l'installation.

### 1.2.3.2 Systèmes modulaires et hybrides

Les centrales solaires à tour sont traditionnellement conçues pour le marché de l'électricité sur réseau. Aussi pour rendre l'électricité solaire thermodynamique économiquement compétitive et afin de minimiser les coûts de fonctionnement et de maintenance, on propose de très gros projets allant de 100 à  $200 \text{ MW}_e$ [25]. Cependant, l'importance de l'investissement et le manque de sécurité financière associés à ce type de technologie en développement découragent les investisseurs de soutenir de tels projets. C'est pourquoi les installations décentralisées deviennent intéressantes en particulier depuis que l'on réduit la taille excessive de réseaux surdimensionnés permettant de faire

face à d'importants pics de consommation [26]. Le développement de grands projets de centrale à tour rencontre des difficultés d'autant plus grandes que le secteur de l'électricité évolue d'un modèle centralisé avec de très gros centres de production vers une configuration où des centres de tailles plus modestes sont dispatchés.

Ainsii, Romero et al.[27] proposent en 2000 une stratégie pour promouvoir l'essor de la filière thermodynamique en se basant sur une conception modulaire et sur l'intégration à des unités locales de production. Selon [28], ces systèmes modulaires sont en mesure de mieux répondre à la demande et aux hausses de charge. Des puissances électriques réduites permettent de construire plus facilement et d'étaler les coûts de constructions après que la production d'électricité ait commencé.

Différentes structures comme des fermes d'éoliennes, des stockages de chaleur combinés à la biomasse peuvent potentiellement accueillir des modules solaires de production électrique. L'enjeu scientifique lancé par Marcos et Romero est de démontrer que des petites centrales à tour très efficaces peuvent être adaptées à ce genre de marché et intégrées dans des îlots énergétiques [27].

Marcos et al. [29] ont mis en évidence l'existence d'une puissance optimale de  $1 \text{ MW}_e$  pour ce type d'applications et ont étudié différentes technologies. En effet, ils expliquent que les petites unités ont des rendements plus élevés (jusqu'à 30% pour  $25 \text{ kW}_e$  contre 15% pour  $10 \text{ MW}_e$ ) mais que les meilleurs systèmes, des paraboles-stirling, ne sont pas utilisables en série pour produire de l'électricité à grande échelle. En revanche, les coûts très inférieurs des centrales à tour par rapport au miroir parabolique compensent nettement les performances optiques plus faibles du champ d'héliostats. Le système SOLAUT [29] ne peut pas utiliser de sels fondus ni de vapeur sous pression qui nécessitent de grosses installations. Ils ont choisi parmi différentes solutions thermodynamiques l'utilisation d'une turbine à gaz dans un cycle à air de Brayton inversé. Cette turbine fonctionne ainsi à faible pression et atteint de très hautes performances. Des tests sur la plate-forme solaire d'Almería ont prouvé que cette solution permet de stocker la chaleur de façon simple et efficace, de stabiliser la production et d'en optimiser le nombre d'heures sur l'année [30].

### 1.2.3.3 Exemple d'application de niche pour la concentration solaire

Adapter les centrales à tour à d'autres applications que la production d'électricité peut permettre un essor parallèle de cette technologie ainsi que son amélioration en cherchant à répondre aux problématiques spécifiques des différents domaines applicatifs (désalinisation, cimenterie...)

Par exemple, les densités de flux rencontrées habituellement à la surface des récepteurs de centrale à tour dépassent rarement  $1 \text{ MW/m}^2$ . Pour atteindre des densités de flux plus élevées (forte concentration) on pense plutôt aux fours solaires ou bien aux concentrateurs paraboliques. Or ces technologies ne sont pas adaptées à l'industrie cimentière. C'est un marché de niche pour les centrales à tour qui nécessite de fortes concentrations. Ce genre d'application non électrique est très intéressant pour faire évoluer les technologies solaires et les implanter durablement. Dans ce cadre, Vant-Hull et al.[31] ont présenté une étude de faisabilité d'une cimenterie à tour solaire. Il ont montré qu'il est possible d'obtenir un taux de concentration élevé (densité de flux moyenne : de 2 à  $5 \text{ MW/m}^2$ ) avec des centrales à tour sans ajouter de réflecteur secondaire et avec un surcoût relativement faible. Des héliostats ronds de faible surface sont utilisés (6 m de diamètres) pour assurer un champ plus compact.



### 1.2.3.4 Nouveaux systèmes développés

**Beam-Down :** Il a été démontré que la conversion de l'énergie solaire en électricité est plus efficace pour des températures supérieures à 1100 K [32]. Atteindre ces températures élevées nécessitent des taux de concentrations importants, et l'optimisation du champ d'héliostats n'est pas suffisante pour cela. On est obligé d'introduire un surconcentrateur. Les systèmes Beam-Down proposés la première fois par Rable [33] consistent à placer un second réflecteur en hauteur pour renvoyer vers le sol les rayons solaires déjà réfléchis une fois par les héliostats. Cette technologie a l'avantage d'un récepteur au sol et donc aucune installation thermique ne se trouve en hauteur. Plusieurs études [34, 35] ont été menées sur le système optique du Beam-Down. Elles montrent qu'un second réflecteur hyperboloïde est plus efficace qu'une forme ellipsoïde et que le champ d'héliostats doit être circulaire.

La construction d'un pilote industriel de 100 kW<sub>e</sub> dans la ville d'Abu Dhabi (Émirats Arabe Unis) a commencé en avril 2009 dans le cadre du projet "Tokyo Tech beam-down solar concentration power system"[36, 37] mené par le Tokyo Institute of Technology, la Cosmo oil co. LtD (Japon) et MADSAR. Finalisée en octobre 2009, cette installation est le premier Beam-Down avec un réflecteur secondaire à anneaux. Ce projet de démonstration servira de référence pour dimensionner des installations de 20 à 100 MW. L'institut Weizmann en Israël possède une tour solaire avec un Beam-Down de 3 MW<sub>th</sub> pour la recherche scientifique.

**Centrales multi-tours :** Augmenter la puissance d'une centrale à tour est un objectif complexe. En effet lorsque l'on rajoute des miroirs sur un champ d'héliostats il faut les éloigner de plus en plus. Pour compenser la perte de précision de leur orientation, il faut que les miroirs soient plus grands. Et pour ne pas trop diminuer l'efficacité optique, il faut construire une plus grande tour. Tout ceci se traduit par des coûts très élevés à l'investissement comme au fonctionnement.

Le concept MTSA[38] (Multi-tower solar array) présente plusieurs avantages par rapport aux centrales à tour traditionnelles. Concernant le système optique, ce concept utilise de petits héliostats (<5 m<sup>2</sup>) et des petites tours (<100 m). De plus en utilisant un champ d'héliostats entrecroisé (zones où tous les héliostats ne visent pas le même récepteur) la taille du champ est considérablement réduite et l'occupation du terrain est optimisée. Les installations développées par eSolar[39] n'utilisent pas de champs entrecroisés mais elle restent très compact. Les coûts d'investissement et de fonctionnement sont réduits grâce à la petite taille des tours (55 m) et parce que l'installation et l'entretien des miroirs (1,136 m<sup>2</sup>) ne demandent pas de grosses machines. Enfin les centrales multi-tours sont conçues par modules (tours + héliostats). Leur taille n'est donc pas limitée puisqu'il suffit de rajouter des modules pour augmenter la puissance de l'installation sans diminuer l'efficacité optique. Le concept multi-tours permet donc de produire de l'électricité solaire avec des prix de revient plus faibles. Sur la figure 1.8, l'image de gauche représente la centrale *Sierra SunTower* qui est la seule centrale à tour commerciale des États-Unis en exploitation. Première construction de eSolar lancée en Juillet 2009, elle comporte deux modules à tour et sert aussi d'installation de démonstration pour des projets de plus grande taille (groupe de 12 modules pour 46 MW et environ 100 hectares). La photographie de droite représente le concept développé par Aora-Solar. Une tour de 30 m avec une surface de miroirs d'environ 650 m<sup>2</sup> (5 modules de ce type peuvent tenir sur un terrain de football) produisent en cogénération 100 kW électriques et 170 kW thermiques. Grâce à

son fonctionnement hybride (rayonnement solaire concentré ou combustible traditionnel), la micro-turbine située directement au sommet de la tour permet de garantir la production d'électricité 24h/24.



(a) Centrale *Sierra SunTower* de 5 MW à Landcaster - Californie (construite et exploitée par eSolar)

(b) Première installation de Aora dans le désert d'Arava au sud d'Israël - inaugurée en Juin 2009

FIGURE 1.8 – Centrales modulaires à tour - eSolar et Aora

Afin de profiter des avantages du Beam-Down et des tours multiples, l'équipe japonaise du Tokyo Institute of Technology a développé pour un projet de démonstration un Beam-Down multi-tours [40]. Elle a démontré que le beam-down permet d'améliorer les performances optiques du système et que le système à tour multiple diminue le prix de revient de l'électricité à grande échelle (par rapport au Beam-Down à tour unique).

**Utilisation de photobioréacteurs pour convertir l'énergie solaire.** L'utilisation de photobioréacteurs pour convertir l'énergie solaire a été lancée 1989 par le projet spatial MELISSA. Il s'agissait alors de reconstituer un écosystème artificiel pour permettre des missions spatiales de longue durée pour lesquelles il n'est pas possible de transporter depuis la terre les réserves suffisantes d'oxygène et de nourriture. Des micro-organismes sont utilisés pour consommer les déchets organiques et le gaz carbonique rejetés par les occupants du vol et pour produire, par photosynthèse grâce à l'énergie solaire, du dioxygène et de la nourriture (spiruline par exemple).

Le développement actuel d'applications industrielles est basé sur le même principe. Les principales applications des photobioréacteurs sont la séquestration de  $\text{CO}_2$  et la production de matière valorisables (oxygène, protéines, lipides pour les biocarburants) avec des rendements très élevés grâce à la concentration solaire. L'élaboration de molécules à très haute valeur ajoutée, comme par exemple pour l'industrie cosmétique, tolère cependant des rendements moins élevés (on privilégie dans ce cas la qualité sur la quantité).

Les problématiques scientifiques posées par le développement de photobioréacteur sont très proches des concentrateurs solaires en ce qui concerne la modélisation des transferts radiatifs.

## 1.3 État de l'art sur les champs d'héliostats et les outils de modélisation

*Pour un champ d'héliostats idéal, les héliostats sont des paraboloides qui travaillent toujours en dehors de leur axes.*

### 1.3.1 Conception d'une centrale solaire à tour : description du problème

La conception d'une centrale à tour se fait à l'inverse de la chaîne de transformation de l'énergie. En effet le fonctionnement d'une centrale solaire à tour consiste à capter l'énergie thermique du rayonnement solaire sur un champ d'héliostats (miroirs de grande taille qui suivent la course du soleil au cours de la journée) et à réfléchir ce rayonnement au sommet d'une tour où se trouve le récepteur. La température du fluide caloporteur augmente lorsqu'il traverse le récepteur qui lui transmet l'énergie radiative. L'énergie thermique emmagasinée par le fluide est alors utilisée (directement ou pas) et convertie en énergie mécanique puis électrique par le groupe turbo-alternateur qui alimente le réseau électrique (voir schéma Fig. 1.6).

Lors de la conception d'une telle installation, on commence par spécifier en fonction de l'environnement la *puissance électrique* de la centrale et souvent aussi la *quantité annuelle d'électricité à produire* ainsi que les *périodes* de l'année ou de la journée *pendant lesquelles la centrale solaire devra être opérationnelle*.

On choisit ensuite en accord avec ces premières spécifications le groupe turbo-alternateur et on définit les caractéristiques de l'installation thermodynamique (fluides, températures, nombre de boucles, stockage, multiple solaire...). Ces choix, qui se basent en partie sur le retour d'expérience, sont soumis aux contraintes liées à l'environnement du projet. Connaissant le fluide primaire et la puissance thermique à lui fournir, on peut tracer le schéma de principe de l'installation. Le sous-système thermodynamique (échangeurs, générateur de vapeur...) ne varie pas beaucoup d'une centrale à l'autre, car les degrés de liberté sont assez limités par les premières étapes de la conception (en particulier la température du fluide caloporteur) [5]. En revanche pour chaque projet de centrale solaire il faut définir complètement la géométrie du sous-système optique (récepteur, tour, champ d'héliostats) en particulier à cause des contraintes spécifiques du lieu d'implantation. On souhaite optimiser la conception de ces composants parce qu'ils constituent la plus grande partie des dépenses [41, 42, 43]. On cherche donc à concevoir un concentrateur tour-héliostats moins cher et plus performant.

Les facteurs géométriques à déterminer sont les suivants :

- formes, dimensions, inclinaison du récepteur ;
- hauteur et position de la tour ;
- forme du champ d'héliostats ;
- dimensions des miroirs ;
- implantation des héliostats.

Comme tous ces facteurs s'influencent mutuellement, il n'existe pas aujourd'hui de méthode générale pour optimiser de façon automatique la conception du système optique des centrales à tour.

Il faut aussi respecter les contraintes locales liées au lieu d'implantation et celles d'ordre technologique [5] :

- latitude, altitude, nature du terrain, météo ;
- infrastructures à proximité ;
- législation (fraction solaire imposé, politiques publiques) ;
- Densité de flux maximale à ne pas dépasser (résistance thermique des matériaux).

L'optimisation d'une centrale électrique solaire peut se faire selon différents critères :

- Minimiser le prix de l'électricité produite (prix du kWh produit ou bien prix du kW installé) ;
- Assurer une certaine production pour des périodes définies ;
- Assurer en permanence la température haute de fonctionnement (pour garantir le point nominal du groupe turboalternateur) ;
- Maximiser l'efficacité optique du champ d'héliostats ( $\frac{\text{flux intercepté}}{\text{flux normal incident}}$ ) ;
- Assurer une densité de flux uniforme sur les parois du récepteur ;
- Limiter les gradients de température ;

Des outils de modélisation permettent de calculer ces différents critères. On peut ainsi observer leurs sensibilités aux paramètres à optimiser. Les outils présentés plus bas permettent généralement soit de calculer précisément les performances du système optique soit d'optimiser un des paramètres selon un critère. Il n'existe cependant aucun logiciel pour déterminer seul une combinaison optimale des différents paramètres géométriques. Nous allons maintenant présenter les principales configurations possibles pour les champs d'héliostats ainsi que les méthodologies associées à leur conception. Puis nous présenterons dans la partie 1.4.1 les techniques de calcul et de modélisation.

### 1.3.2 Configuration du champ d'héliostats

La conception d'un champ d'héliostats est un exercice difficile car l'ensemble des paramètres à définir possède un grand nombre de degrés de liberté. Il existe différents types de champs d'héliostats : des champs circulaires, des champs symétriques orientés au nord, des champs asymétriques, avec des miroirs très grands, des miroirs plus petits et plus serrés, des héliostats ronds, disposition en quinconce, en épis de maïs . . .

Certains choix sont plus faciles à faire que d'autres par exemple, un champ circulaire est adapté aux faibles latitudes. Cependant, le bon choix des paramètres est d'autant plus complexe qu'ils ne dépendent pas seulement de la latitude et de la forme du terrain mais aussi de la météorologie locale.

La plupart des outils d'optimisation ont besoin de données initiales sur le champ d'héliostats. Pour certains codes de calculs, il faut même que la disposition de départ soit très proche de la configuration optimale. Aujourd'hui encore, la conception d'un champ d'héliostats passe donc par plusieurs étapes : première disposition, optimisation grossière, optimisation finale. Voyons tout d'abord comment générer une disposition de départ.

Dès les premières centrales, une configuration de champ s'est imposée : la disposition radiale en quinconce [44]. On définit tout d'abord le rayon de la première rangée d'héliostat en fonction de l'effet cosinus et du taux intersection ( $= 1 - \text{débordement}$ ). Pylkkanen [41] conseille un rayon minimal égal à la hauteur de tour, Le logiciel DELSOL3 prend par défaut un rayon minimal égal à

$0,83 \cdot H$  (avec  $H$  la hauteur de tour, Falcone [45] recommande de prendre  $0,75 \cdot H$ , Collado choisit dans ses modélisations une distance entre 40 et 50% de la hauteur de tour [46, 47] afin d'améliorer l'efficacité du champ en mettant plus d'héliostats proches de la tour. La disposition radiale en quinconce consiste ensuite à déterminer un écartement azimutal entre les héliostats d'une rangée et un écartement radial entre chaque rangée. Ces deux paramètres sont habituellement fonctions des dimensions caractéristiques des héliostats.

**Les héliostats ne doivent pas être trop serrés pour limiter les blocages.** Lorsqu'un héliostat réfléchit le faisceau solaire vers la tour, il arrive que des rayons réfléchis soient bloqués par le dos des héliostats situés sur leur trajet. Ces rayons réfléchis n'atteignent pas le récepteur ce qui diminue les performances optiques de l'héliostat considéré. Ce phénomène est appelé blocage, il constitue globalement les pertes optiques les plus importantes [45, 48]. C'est pourquoi Pylkkanen propose en 93 une méthode graphique pour générer un champ d'héliostats sans aucun blocage tout au long de l'année. Syala et Elayeb ont formulé mathématiquement cette méthode graphique et ils l'ont implémentée ensuite dans un code de calcul appelé MUEEN [41].

Cette méthodologie s'applique uniquement à des champs d'héliostats symétriques qui peuvent être circulaires ou non. Les héliostats sont disposés radialement en quinconce. La contrainte de non-blocage se traduit sur le terrain par une distance minimale inter-héliostats. Au fur et à mesure que le champ d'héliostats s'agrandit (en rajoutant des rangées), les miroirs sont de plus en plus écartés si on conserve l'alignement azimutal une rangée sur deux. Il faut donc les resserrer de plus en plus en s'éloignant de la tour pour ne pas dégrader trop vite le taux d'occupation. Or si on met plus d'héliostats sur une rangée, il est parfois obligatoire de reculer cette rangée pour respecter la contrainte de non-blocage. De cette manière aussi le taux d'occupation diminue. Aussi pour choisir l'agencement de chaque nouvelle rangée, on utilise comme critère de maximiser le taux d'occupation. Le champ d'héliostats généré par cette procédure graphique est divisé en groupes d'héliostats selon leur angle azimutal de séparation. Grâce à cette partition la méthode se révèle plus simple que la procédure "Cell-Wise" présentée par Lipps et Vant-Hull [44].

Le code MUEEN peut être utilisé en parallèle avec le programme HELIOS [49], dans le cadre d'études préliminaires pour la conception de systèmes concentrateurs tour-héliostats. Les résultats de telles études préliminaires peuvent ensuite servir de point de départ aux logiciels d'optimisation (cf. 1.3.3.2).

**Il faut étudier séparément l'influence de chaque paramètre pour obtenir la configuration recherchée.** Vant-Hull et al. ont présenté une étude de faisabilité concernant la génération de champs d'héliostats à densité de flux élevés [31]. Elle met en évidence quelques tendances intéressantes, que nous détaillons ici :

Soit une latitude de  $42,5^\circ\text{N}$ , un récepteur de  $22\text{ m}^2$  incliné à  $60^\circ$  et une densité de flux moyenne de  $2,5\text{ MW/m}^2$ . Si on diminue la hauteur de la tour de 150 à 100 m, on observe :

- une augmentation du nombre d'héliostats et de la taille du champ ;
- une diminution du LEC<sup>4</sup> ;

---

4. Levelized Energy Cost (coûts de production moyennés sur toute la durée de vie de l'installation).

- une augmentation des pertes par cosinus<sup>5</sup> ;
- une diminution des ombres et blocages (diminution du taux d'occupation) ;
- une augmentation du débordement<sup>6</sup>.

Soit une hauteur de tour fixée à 100 m. Si on augmente l'inclinaison du récepteur de 60° à 90° (horizontal) :

- on constate une augmentation du nombre d'héliostats et une augmentation de la proportion des héliostats situés au Sud de la tour ;
- il existe une inclinaison optimale pour minimiser la taille du champ (et maximiser le taux de couverture) ;
- le LEC augmente ;
- les pertes par cosinus, les ombres et les blocages augmentent aussi ;
- il existe une inclinaison optimale pour minimiser les pertes par débordement.

D'après cette étude, un récepteur tourné vers le bas aura une meilleure homogénéité des densités de flux, moins de pertes convectives et une structure plus simple.

Pour observer l'influence du taux de concentration, la taille du récepteur incliné à 60° passe de 22 m<sup>2</sup> à 55 m<sup>2</sup> pour obtenir une densité de flux moyenne de 1 MW/m<sup>2</sup> :

- Le nombre d'héliostats diminue (concentration plus faible) mais la taille du champ augmente (pour mieux ensoleiller la surface du récepteur plus grand) ;
- Baisse significative du LEC ;
- Moins de pertes par cosinus ;
- Moins de pertes par ombres et blocage (diminution du taux d'occupation) ;
- Moins de pertes par débordement (récepteur plus grand).

Pour un récepteur de 22 m<sup>2</sup> à 100 m de haut tourné vers le bas (inclinaison 90°), la latitude passe de 42,5° à 37° pour observer l'influence de la hauteur du soleil :

- Le nombre d'héliostats baisse ainsi que la taille du champ et la proportion d'héliostats au Sud augmente ;
- Le taux de couverture augmente ;
- Le LEC diminue de 12% ;
- Le soleil étant plus haut, il y a moins de pertes par cosinus et par ombres et blocages ;
- il y a aussi moins de débordement(champ plus petit).

On observe les mêmes tendances si l'on fait varier l'inclinaison du récepteur à 37°N qu'à 42,5°N de latitude. Il existe une inclinaison optimale pour limiter le débordement.

### **Il faut prendre en compte la météo locale pour définir une disposition appropriée.**

Sanchez et Romero[50] ont proposé en 2006 une nouvelle méthodologie pour la génération directe de champs d'héliostats sans passer par les deux étapes *étude préliminaire - optimisation*. Il ont développé un nouvel outil : une carte surfacique de l'énergie normalisée sur l'année. Cette carte est conçue pour une hauteur de tour et une géométrie donnée du récepteur. Elle prend en compte

---

5. diminution de la surface effective de réflexion à cause de l'angle entre les rayons incidents et la normale du miroir.

6. Énergie réfléchiée par le champ d'héliostat vers la tour mais qui n'atteint pas le récepteur (anglais : *spillage*).

le facteur cosinus, l'atténuation atmosphérique et le débordement (en multipliant leurs coefficients d'efficacité) et elle utilise les données météorologiques locales (Typical Meteorological Year) pour normaliser ces valeurs. On obtient ainsi en chacun des points du terrain (sur un quadrillage de 1x1m) l'énergie annuelle récupérable. On choisit ainsi le meilleur emplacement pour le premier héliostat. La carte est ensuite recalculée pour prendre en compte les ombres et blocages liés au nouvel héliostat placé sur la surface étudiée (les 2 types de blocage sont pris en compte). On peut alors positionner l'héliostat suivant de manière optimale en respectant une distance minimale autour des héliostats déjà placés. Cette procédure est certes assez lourde mais elle a l'avantage d'être flexible (elle s'adapte à tous les terrains et ne part pas d'une disposition préconçue comme la disposition radiale en quinconce utilisée habituellement comme référence). Elle permet soit de générer des systèmes plus performants, soit de réduire les coûts.

La méthode proposée permet une conception du champ d'héliostats en se basant sur son fonctionnement annuel et non sur un instant de l'année (souvent le 21 mars à midi). Par exemple si l'ensoleillement est plus important le matin, on obtiendra un champ d'héliostats décalé à l'ouest. Les logiciels traditionnels conçus dans les années 80 ne permettent pas ce genre d'optimisation. Les codes de calculs ont été développés en langage MATLAB et sont rassemblés dans une boîte à outils Solar Concentration Toolbox. Cet outil logiciel a été validé en comparant ses résultats avec ceux des logiciels WinDELSOL et SOLVER. La Méthode utilisée pour générer le champ héliostat par héliostat (HGM : Héliostats Growth Method) donne des champs plus efficaces mais plus grands – et moins compacts – que WinDELSOL. Cependant une option permet de limiter la taille du champ pour spécifier une contrainte sur les dimensions du terrain. Cet outil permet de concevoir directement un champ d'héliostats optimisé mais il sert aussi à calculer les performances de champs d'héliostats existants.

**Les méthodes peuvent être différentes si le champ est circulaire ou s'il est orienté au nord.** En 2009, Collado[47] présente un outil pour la conception préliminaire de champs d'héliostats circulaires. La méthode utilisée est une alternative aux procédures "Cell-Wise" dans l'esprit du programme MUEEN [41]. Elle met en oeuvre des groupes d'héliostats similaires par écartement azimutal constant. Le cas extrême *zéro blocage* que propose Siala n'étant pas optimal, la position des héliostats de chaque groupe est calculée afin de garantir, dans le pire des cas, un coefficient de blocage limite. Pour plus de rapidité, les blocages sont calculés de manière simplifiée (on ne tient compte que des deux héliostats voisins placés devant le miroir considéré) et les ombres sont négligées. On rajoute donc une distance de sécurité pour être certain de limiter les blocages. Cette procédure s'avère très performante puisque avec seulement deux paramètres à définir (le coefficient de blocage et une distance supplémentaire de sécurité) on peut générer les coordonnées individuelles de milliers d'héliostats. Les codes UHC-RCELL [51, 52] sont beaucoup plus lentes parce qu'il faut déterminer les écartements radial et azimutal pour chaque cellule de la discrétisation du champ (200 à 250 valeurs pour une tour de 130 m et un champ de 900 héliostats).

### 1.3.3 Techniques de modélisations et de calculs solaires

Il n'est pas réaliste de tester in situ différentes configurations à l'échelle industrielle. C'est pourquoi des outils de modélisation sont nécessaires lors de la conception d'une centrale solaire

pour maximiser la production d'électricité et en minimiser les coûts.

Les calculs solaires répondent à deux besoins. Il s'agit d'une part de prédire les performances d'un système concentrateur d'énergie solaire lors de sa conception. D'autre part, confronter des mesures expérimentales avec des résultats de modélisations peut aider à optimiser le fonctionnement d'une centrale solaire.

Modéliser une installation solaire existante ou en projet nécessite de nombreuses informations sur le soleil (position, taille, distribution de l'intensité lumineuse) et sur le système optique (coefficient de réflexion des miroirs, erreurs spéculaires, erreurs de courbures...).

Au travers de ces calculs on cherche généralement à obtenir la carte des densités de flux dans la région focale du concentrateur (intensité de l'image solaire).

### 1.3.3.1 Position du soleil

Connaître la position du soleil dans le ciel est une information primordiale pour les systèmes à concentration. Il existe différentes conventions et différentes habitudes pour décrire la position du soleil dans le ciel. Puisque les héliostats suivent notre étoile de façon altazimutale, on définit la position du soleil par rapport à un point de la surface de la Terre à l'aide de deux angles : l'élevation  $\alpha$  et l'azimut  $\gamma$ . Pour des installations dans l'hémisphère Nord, nous choisissons la convention suivante : azimut négatif le matin ( $-90^\circ$  pour un soleil à l'Est), nul à midi solaire ( $0^\circ$  au Sud), et positif après midi ( $90^\circ$  à l'Ouest). L'élevation  $\alpha$  varie de  $0^\circ$  pour un soleil sur l'horizon jusqu'à  $90^\circ$  pour un soleil au zénith (voir Fig. 1.9).

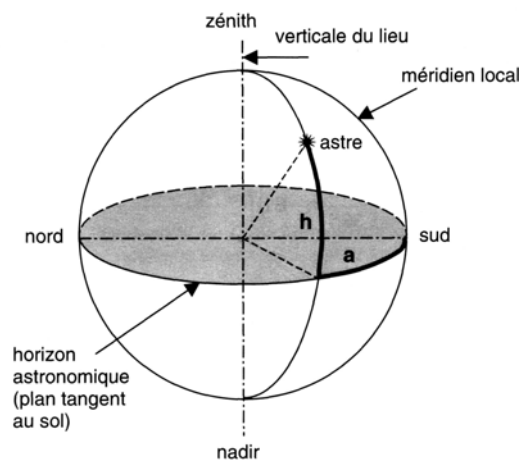


FIGURE 1.9 – Définition des angles d'élevation  $\alpha$  et d'azimut  $\gamma$  (resp.  $h$  et  $a$  sur la figure)

Les coordonnées solaires  $(\alpha, \gamma)$  dépendent du jour de l'année, de l'heure de la journée (on considère l'heure solaire locale) et de la latitude du lieu considéré. Ces trois paramètres sont définis comme suit [53, 54] :

- $\phi$  : latitude de la localisation géographique (négative dans l'hémisphère Sud).
- $\delta$  : déclinaison. La déclinaison varie au cours de l'année de  $-23,45^\circ$  au 21 décembre à  $+23,45^\circ$  au 21 juin. C'est l'angle entre la position du soleil sur l'écliptique et l'équateur céleste.
- $\Omega$  : angle horaire. L'angle horaire évolue de  $15^\circ$  toutes les heures. Il vaut  $-45^\circ$  à 9h du matin,  $0^\circ$  à midi solaire et  $+90^\circ$  à 18h.



Voici les formules qui permettent de calculer ces paramètres :

$$\begin{aligned}
 \delta &= 23,45 \sin\left(\frac{360}{365}(n-81)\right) \text{ avec } n \text{ le numéro du jour de l'année} \\
 \Omega &= 15(h-12) \text{ avec } h \text{ l'heure solaire locale} \\
 \alpha &= \arcsin(\sin\phi \sin\delta + \cos\phi \cos\delta \cos\Omega) \\
 \gamma &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{\sin\phi \sin\alpha - \sin\delta}{\cos\phi \cos\alpha}\right) & \text{si } \omega < 0 \\ -\arccos\left(\frac{\sin\phi \sin\alpha - \sin\delta}{\cos\phi \cos\alpha}\right) & \text{si } \omega > 0 \end{cases} \\
 \sin\gamma &= \frac{\cos\delta \sin\Omega}{\cos\alpha}
 \end{aligned}$$

### 1.3.3.2 Logiciels de calculs de flux solaire

L'objectif de ces logiciels est d'une part d'optimiser la conception des centrales solaires sur des critères technico-économiques (définir un système concentrateur optimal afin que le récepteur intercepte un maximum d'énergie pour un coût minimal) et d'autre part d'en simuler et d'en prédire les performances énergétiques (calculer le rayonnement réfléchi par le système optique et la puissance reçue par l'absorbeur). Pour cela on cherche à obtenir :

- Cartes de flux ;
- Matrices d'efficacité ;
- Implantation optimisée des réflecteurs ;
- Performances instantanées et annuelles.

Les anciennes méthodes des ellipses et d'Aparisi [55] ne sont plus utilisées aujourd'hui. Les codes de calculs actuels sont de deux types. Dans un cas ce sont des méthodes déterministes (produits de convolution, optiques de cônes). Dans l'autre des méthodes statistiques (lancer de rayons, Monte-Carlo). Pour des études préliminaires et des applications simples, les deux types de techniques donnent des résultats similaires (en terme de densité de flux moyenne et de flux maximal). Chaque type de logiciel répond cependant à des objectifs distincts. Les codes d'optimisation (OPTI) utilisent la méthode de convolutions et les codes d'analyse de performances (PERF) font appel au lancer de rayons. Les méthodes de lancer de rayons sont plus précises pour des systèmes à géométrie complexe car elles permettent de modéliser des surfaces optiques non idéales. Cependant elles consomment des temps de calcul plus longs. Les codes d'optimisation peuvent modéliser l'installation complète dans le but d'une optimisation globale, tandis que les codes PERF permettent souvent de ne traiter que le sous-système optique. P. GARCIA et al. ont publié une revue comparative des codes de calculs utilisés pour la simulation des systèmes à récepteur central [56]. Nous reprenons succinctement cette revue ci-dessous.

Les principaux codes développés entre 1985 et aujourd'hui sont HELIOS, DELSOL, UHC, HFLCAL pour le type OPTI et MIRVAL, FIAT LUX, SolTRACE pour le type PERF [56] :

**HELIOS** : Un des premiers codes de calcul permettant de modéliser, avec une bonne précision, des centrales à tour de petite taille, des capteurs cylindro-paraboliques et des dish-stirling. Il utilise la technique optique des cônes qui calcule le produit de convolution des transformées de Fourier des deux distributions angulaires des rayons réfléchis et du profil solaire. L'implémentation de la géométrie des capteurs est très peu conviviale, ce qui rend le code inadapté aux grands champs d'héliostats. De plus il ne propose l'optimisation d'aucun paramètre.

**DELSOL** : Depuis 1986, c'est un outil facile d'accès pour la conception et l'optimisation de centrale solaire. Les temps de calcul plus faibles que ceux de MIRVAL et HELIOS le rendent efficace pour optimiser la hauteur de tour, les dimensions du champ selon des critères économiques. WINDELSOL est une adaptation du code pour Windows. Bien qu'il propose une interface conviviale il ne permet pas d'étudier les systèmes existants, car on ne peut pas implémenter de champ d'héliostats personnalisé. Une précision trop faible l'empêche de traiter de manière fiable les petites installations. Ce logiciel est une aide intéressante à la conception et aux études préliminaires de projets de grande taille.

**UHC (University of Houston Code)** : Utilisé entre autre pour modéliser Solar One et Solar Two, ce code d'optimisation modulaire (OPTI) permet en fonction de la situation géographique, de la météo, du champ d'héliostats et de la géométrie du récepteur de calculer des performances instantanées, quotidiennes, annuelles... et d'optimiser le champ de miroirs et le récepteur. Un module permet même en temps réel de définir des stratégies de pointage pour protéger le récepteur de flux trop élevés.

**HFLCAL (Heliostats Field Layout CALCulations)** : (Parfois appelé *suite RCELL*) Ce code est basé sur le calcul de convolution de trois distributions : profil solaire, défauts détaillés des miroirs et erreurs de pointage. En effectuant des centaines de calculs de production annuelle en un temps raisonnable, il permet de maximiser la production d'électricité ou de minimiser les coûts de production en adaptant au choix les héliostats, la tour, le type de récepteur et/ou le cycle thermodynamique. En tant que logiciel de type OPTI, il détermine très précisément la puissance totale reçue mais il est moins fiable en ce qui concerne la valeur du flux maximal et la distribution des flux sur le récepteur.

**MIRVAL** : Ce code utilise des méthodes de Monte-Carlo. Il a été développé pour analyser précisément les performances des systèmes optiques (héliostats). Il servait à vérifier les densités de flux calculées par des logiciels OPTI (Delsol, Hélios, UHC). Peu flexible, il n'a pas permis la modélisation du champ de Thémis. La DLR a rajouté un module permettant d'optimiser sur des critères énergétiques la disposition au sol des miroirs.

**FIAT LUX** : Destiné à qualifier les propriétés optiques des héliostats, ce code de performance ne permet pas la modélisation de système multi-réfecteurs puisqu'il ne tient compte ni des effets d'ombre ni de blocage. Les données recueillies par ce code sur un miroir donné, peuvent sans doute être valorisées par un autre code de calcul.

**SolTRACE** : Très généraliste ce code permet de modéliser tout type de capteurs ou d'installations (fours solaires, centrales à tour(s), capteurs cylindro-paraboliques, Lentilles de Fresnel...) et il accepte les géométries complexes. Il propose des outils graphiques de visualisation. Utilisant des algorithmes de Monte-Carlo, il est très performant pour fournir des cartes de flux, déterminer le flux maximal et moyen.

**Perspectives de recherche et utilisations industrielles** : Il serait intéressant de modifier les logiciels PERF en leur permettant d'optimiser la valeur de certains paramètres, comme l'a fait la DLR pour MIRVAL.

Il semble judicieux de faire appel dans un premier temps à un logiciel OPTI qui permet une

étude technico-économique. Puis une fois la géométrie du champ d'héliostats définie, on peut utiliser un logiciel de type PERF afin de dimensionner le récepteur et le reste de l'installation.

D'autres codes ont récemment été développés. TONATIUH [57] de CENER (Centre Espagnol sur les énergies renouvelables) est comparable à Soltrace. SOLVER de SOLUCAR est un code de ray-tracing pour la modélisation des CRS. SENSOL a été développé par l'industriel SENER pour concevoir la Centrale Solar Tres (projet GEMASOLAR). On peut aussi citer SCT [50], une boîte à outils pour Matlab conçue par le CIEMAT qui permet à la fois le calcul des performances des systèmes optiques à tour et la génération directe d'une implantation optimisée d'un champ d'héliostats.

## 1.4 Nouveaux besoins, problématiques émergentes

**Concentration solaire, limites physiques et économiques :** Le projet PEGASE (cf. 1.2.2.2) s'intéresse aux *fortes puissances* solaires sous *concentration élevée*. Les seules configurations qui présentent ces deux propriétés font appel à des champs d'héliostats. On a cependant le choix entre des systèmes à une ou deux réflexions, avec ou sans surconcentrateur. La physique impose des limites théoriques à la concentration du rayonnement solaire sur terre. Le taux de concentration maximale théorique s'élève à 46200 [55]. On ne peut en pratique difficilement dépasser des concentrations de l'ordre de 20000 - 25000 avec une double réflexion (four solaire) et un surconcentrateur.

Au delà de ces barrières scientifiques, des freins économiques ralentissent l'essor de la filière thermodynamique, comme nous l'avons énoncé plus haut. Malgré la montée continue du prix des énergies fossiles, elle n'est rentable que lorsque la politique régionale ou gouvernementale la favorise à grand renfort de subventions et de tarifs préférentiels pour le rachat de l'électricité produite. Aussi il convient de faire de gros efforts de recherche scientifique afin de développer des systèmes innovants qui rendraient les technologies solaires à concentration compétitives et exploitables de manière commerciale. Une des orientations de recherche concerne la conception du système optique concentrateur.

Les problématiques soulevées par le projet CONSOL du CNRS, représentent bien la situation actuelle de la communauté scientifique.

- Remettre en question le mode de conception des champs d'héliostats. Reconsidérer le concept actuel de la gestion d'un champ d'héliostats.
- Un des problèmes rencontrés aujourd'hui est la présence de gradients de température sur le récepteur à cause d'une répartition du flux non uniforme. On résout, jusqu'à présent, ce problème par des stratégies de pointage complexes, qui demande une très bonne connaissance du comportement individuel de chaque héliostat.  
Serait-il possible de concevoir et de gérer un champ d'héliostats de manière à obtenir facilement une densité de flux uniforme dans un plan récepteur ?
- Envisager d'autres applications à la concentration solaire. La filière électrique par voie thermodynamique utilise à l'heure actuelle des températures de l'ordre de 500°C alors qu'on est tout à fait capable avec des systèmes à double réflexion d'atteindre des températures supérieures à 2000°C. Pour de la chimie à très haute température on remplacerait les récepteurs solaires par des réacteurs.

La filière hydrogène - vecteur énergie (craquage de molécules de méthane, vaporeformage d'hydrocarbures liquides ou gazeux) est une des applications possibles de la chimie solaire sous concentration. Les applications comme la désalinisation, la détoxification, les photobioréacteurs et la concentration pour photovoltaïque sont autant de pistes envisagées sérieusement aujourd'hui pour diversifier et assurer l'essor du solaire à concentration.

#### 1.4.1 Optimisation des optiques de concentrateurs : que faut il améliorer ?

Deux études [42, 43] ont estimé que les centrales solaires à tour représentent la technologie qui a le plus gros potentiel à long terme parce que l'on pourrait réduire de 45% les coûts de l'électricité produite pour de grosses installations [42]. Le plus gros poste limitant le rendement des grosses installations de centrales à tour est la faible efficacité du système optique<sup>7</sup> (débordement, cosinus, ombres et blocages). De plus c'est le système optique *champ d'héliostats - tour* qui constitue le plus gros investissement. C'est pourquoi les efforts en recherche et développement doivent porter sur l'optimisation du système optique héliostats-tour.

##### 1.4.1.1 Limiter les pertes pour produire plus

On définit l'efficacité optique d'un champ d'héliostats comme le rapport entre le flux intercepté par le récepteur et le flux normal incident sur le champ. Elle dépend des phénomènes suivants (souvent exprimé en pourcentage) : *effet cosinus, ombres et blocages, réflectivité des miroirs, atténuation atmosphérique et débordement*. En ce qui concerne l'efficacité optique d'un héliostat à un instant donné, la réflectivité ne dépend que de l'état de surface du miroir (réflectivité du matériau, rugosité, défaut de courbure, salissure). L'effet cosinus, l'atténuation et le débordement sont fonctions des dimensions et de la position de l'héliostat considéré, et de celles du récepteur en haut de la tour, sans oublier la position géographique et la météo. Les ombres et blocages dépendent en plus des dimensions et position des autres héliostats. Une des manières pour optimiser un champ d'héliostat, consiste donc à maximiser le produit de ces cinq facteurs<sup>8</sup>; ce qui permettra de baisser les coûts de revient de l'électricité produite. Mais il existe d'autres critères d'optimisation.

##### 1.4.1.2 Modifier l'installation pour produire mieux

**Le stockage permet à la centrale de produire de l'électricité pendant la nuit.** On peut par exemple choisir un champ d'héliostats surdimensionné pour améliorer l'autonomie de la centrale avec un stockage. Les technologies actuelles de stockage permettent d'emmagasiner énormément de chaleur pendant les périodes ensoleillées et d'utiliser cette chaleur plus tard pour fournir de l'électricité à prix fort pendant les périodes correspondant aux pics de consommation.

**Avec des densités de flux plus élevées, le fluide est chauffé à plus haute température ce qui augmente le rendement thermodynamique.** Au lieu de chercher à maximiser la puissance absorbée par le récepteur il convient parfois d'avoir une puissance plus faible pour atteindre

7. Plus le champ d'héliostats est grand, plus les pertes optiques sont importantes.

8.  $(1 - \text{pertes par effet cosinus}) \times (1 - \text{pertes par ombres et blocages}) \times (\text{réflectivité}) \times (1 - \text{atténuation atmosphérique}) \times (1 - \text{pertes par débordement})$

une densité de flux très élevée. Pour ce genre d'installation, il faut des systèmes d'héliostats très précis (motorisation, courbure et état de surface des miroirs) pour garantir un minimum de débordement et une densité de flux homogène, élevée sur l'ensemble de la surface du récepteur. Vant-Hull et al. ont présenté une étude pour optimiser un champ d'héliostats afin d'atteindre des densités de flux élevées [31]. En effet, depuis les premières générations de centrale à tour on sait qu'il est possible d'atteindre des taux de concentration moyenne annuelle supérieurs à 2000. Dans cette étude, on démontre qu'avec une tour plus haute, un champ d'héliostat compact et un récepteur horizontal, on peut obtenir une densité de flux moyenne sur la surface du récepteur de 2,5 MW/m<sup>2</sup>. En utilisant la suite logicielle RCELL Vant-Hull et al. ont optimisé les propriétés de l'installation afin de réduire les coûts.

Les programmes d'optimisation RCELL permettent de concevoir des CRS<sup>9</sup> économiques en déterminant les meilleures limites des champs d'héliostats ainsi que leurs écartements de façon à minimiser le coût moyen annuel du MWh thermique intercepté par le récepteur. Auparavant, la contrainte phare lors de la conception était la puissance nominale. Le code de calcul a été modifié pour garantir la densité de flux moyenne, ce qui oblige à ne pas limiter la densité de flux maximale. Il faut alors vérifier que des matériaux qui résistent aux contraintes thermo-mécaniques engendrées par de tels flux sont disponibles pour construire le récepteur.

**Imaginer de nouveaux modes de fonctionnement impose aux scientifiques de concevoir les systèmes correspondant...** Il a été prouvé que les héliostats ronds (très rarement utilisés pour les champs d'héliostats) sont plus adaptés à des champs très compacts comme c'est le cas pour les CRS à densité de flux élevées [31].

**... et de revoir les habitudes de modélisation.** Comme ces installations demandent de bonnes conditions d'ensoleillement, on ne prend pas en compte les heures où l'élévation du soleil est inférieure à 15° dans le calcul des performances annuelles. Il est plus judicieux d'optimiser l'installation pour les bonnes heures de fonctionnement. De plus pour des héliostats bien focalisés et de petite taille ( $D < H/16$ ,  $D$  : diamètre des héliostats,  $H$  : hauteur de tour), le taux d'interception varie peu au cours de l'année. On peut donc utiliser celui obtenu à midi le jour de l'équinoxe au lieu de prendre sa moyenne annuelle. Les calculs d'optimisation en sont simplifiés.

*L'optimisation des centrales solaires, ne consiste pas seulement à adapter et améliorer les concepts déjà existants. Il faut aussi inventer de nouveaux concepts.*

#### 1.4.1.3 Développer des méthodes numériques rapides et précises

Les procédures d'optimisation étant très gourmandes en temps de calcul, des méthodes rapides d'estimations des performances annuelles de champs d'héliostats ont été développées. F.J. Collado propose un modèle simplifié pour estimer rapidement l'efficacité annuelle d'un champ d'héliostats circulaires [46] en combinant une formule analytique du flux réfléchi par un héliostat [58] et une fonction continue de densité de miroir [44]. Pour améliorer les performances du champ d'héliostats, on diminue le rayon de la zone centrale inoccupée, située au pied de la tour. Pour diminuer le

---

9. Central Receiver System

temps de calcul, les simplifications concernent entre autres le choix d'une valeur annuelle moyenne pour le coefficient d'ombres et de blocages. Au lieu de définir une fonction continue du temps et de l'intégrer sur l'année, l'efficacité annuelle est calculée en faisant la moyenne des efficacités pour un nombre fini d'instantanés dans l'année [51]. L'expérience montre que dans certaines conditions, les performances instantanées au 21 mars à midi sont très proches de la valeur annuelle (1 à 1,5% de différence relative). Ce genre de calcul Cell-Wise n'est valable que pour des études préliminaires ou des optimisations grossières et ne dispense en aucun cas de méthodes plus précises héliostat par héliostat. L'optimisation des paramètres se fait par essai-erreur et reste de fait très liée aux décisions du concepteur.

### 1.4.2 Synthèse

Nous avons vu dans ce premier chapitre que l'énergie solaire à concentration est une des alternatives les plus prometteuses dans le contexte énergétique mondial actuel. Selon l'AIE<sup>10</sup> elle fournira, au même niveau que le photovoltaïque et plus que le nucléaire, 10% de l'électricité mondiale en 2050. Elle est viable à long terme. Elle ne rejette pas de gaz à effet de serre. Les technologies disponibles permettent à la fois la construction de grands centres de production électrique à l'échelle mondiale ou d'installations de taille moyenne pour alimenter des villes en électricité et en chaleur. Elles permettent aussi de garantir l'autonomie de villages ou de sites isolés. Sans oublier les diverses autres possibilités comme la production de vecteurs énergétiques tels que l'hydrogène ou la séquestration de CO<sub>2</sub>, la production de biocarburants, de produits alimentaires et l'oxygène par l'intermédiaire de photobioréacteurs. Même si nous n'abordons pas le sujet dans ce mémoire, il faut mentionner que la possibilité de stockage thermique est un grand avantage que n'ont pas la plupart des ressources d'énergie intermittente.

**Les systèmes à champ d'héliostats sont ceux qui présentent le plus d'opportunités d'amélioration.** En 30 ans de développement, beaucoup d'expériences ont déjà été accumulées. On peut rappeler par exemple que pour une latitude assez faible, une tour plus haute diminue les pertes par cosinus. On peut donc éloigner plus les héliostats. On obtient un champ moins dense avec moins d'ombres et de blocages. Il faut moins d'héliostats pour atteindre la même puissance. A cause des héliostats plus éloignés, les pertes par débordement sont augmentées. L'inclinaison du récepteur permet alors d'optimiser le taux d'interception (limiter le débordement).

Cependant les coûts que représente un concentrateur de type champ d'héliostats-tour restent très élevés. Construire une centrale solaire à de faible latitude est le seul moyen aujourd'hui de produire de l'électricité à des prix compétitifs. La ressource présente y est plus abondante. Le soleil étant plus haut dans le ciel, l'efficacité optique est améliorée (moins de pertes par cosinus, moins d'ombres).

On trouve de plus en plus de projets qui utilisent de petits miroirs. Ceci permet d'avoir des champs plus compacts (meilleure occupation du terrain) des tours moins hautes (moins chères). Ces miroirs ne sont pas "troués" car ils n'ont pas besoins d'une grosse structure pour les soutenir et les orienter. Les coûts d'investissement et de fonctionnement sont réduits.

---

10. Agence Internationale de l'Énergie.

**De nouveaux outils de modélisation sont nécessaires pour améliorer la filière et la rendre économiquement viable.** Beaucoup de centrales solaires actuelles ne pourraient pas être construites ni fonctionner sans les subventions ni les politiques incitatives. Pour rendre cette technologie compétitive commercialement, des efforts de recherche et de développement doivent être menés entre autres sur les systèmes optiques concentrateurs à champs d'héliostats.

Aujourd'hui les calculs d'optimisation de ces systèmes restent souvent faits par essai-erreur et nécessitent parfois la connaissance a priori d'une configuration initiale proche du système optimal. On utilise des modèles numériques simplifiés dans les codes d'optimisation puis la configuration optimale trouvée est validée par des calculs plus précis d'analyse de performances. Nous avons vu qu'une alternative à cette démarche a été proposé [50], elle consiste à générer directement un champ d'héliostats de manière optimisée en partant d'un champ vide et non d'une disposition initiale complète.

De cette étude bibliographique sur la filière thermodynamique nous avons extrait deux problématiques assez proches qui constituent la principale motivation des travaux présentés dans ce manuscrit.

Il s'agit d'une part de pouvoir simuler rapidement et précisément des installations réelles pour en calculer les performances et les comparer aux résultats des expérimentations. Un tel outil permettra d'optimiser les réglages optiques d'une installation existante pour une meilleur efficacité de la collecte de l'énergie solaire. D'autre part les besoins d'optimiser la conception des futures installations nécessitent de nouveaux outils pour modéliser les systèmes actuels et en développement, et d'effectuer des études paramétriques pour définir au mieux les paramètres correspondant aux nombreux degrés de liberté.

Les transferts radiatifs correspondent au phénomène physique prépondérant depuis le soleil jusqu'à l'absorption du rayonnement par la surface ou le volume du récepteur. Nous avons choisi d'utiliser la méthode de Monte-Carlo pour simuler les installations solaires. Elle présente deux avantages directs pour les applications dans le solaire à concentration : en tant que méthode de calcul statistique des transports corpusculaires elle permet de simuler le transport de photons dans les géométries les plus complexes, a fortiori celles des systèmes optiques concentrateurs ou des nouveaux récepteurs volumétriques ; et en tant que méthode numérique de calcul intégral elle permet d'obtenir facilement un grand nombre de sensibilités paramétriques (fonctions dérivées) et présente donc un grand intérêt pour l'analyse de sensibilité en vue d'optimiser les procédés à énergie solaire concentrée.

Utilisée depuis plusieurs décennies par la communauté radiative, les algorithmes de Monte-Carlo dont l'inconvénient majeur était, jusque récemment, des temps de calcul élevés, bénéficient aujourd'hui des progrès informatiques ainsi que de techniques abouties d'optimisation mathématique. Nous présentons les bases théoriques de la méthode de Monte-Carlo, de quelques méthodes d'optimisation des algorithmes<sup>11</sup> et du principe de calcul de sensibilité dans le prochain chapitre. Dans le chapitre 3, nous décrivons d'abord un environnement de programmation qui permet à tout scientifique de développer simplement des algorithmes de Monte-Carlo tout en bénéficiant d'outils informatiques très récents pour l'accélération du suivi de rayons en géométries complexes et des

---

11. Techniques de réductions de la variance.

calculs d'intersection, ainsi que de la possibilité d'utiliser le calcul parallèle. Puis dans la section 3.2, nous présentons, dans le souci de rester au plus proche des applications solaires, quatre simulations complètes sur différents procédés à énergie solaire concentrée afin de montrer combien la méthode de Monte-Carlo semble être une piste prometteuse pour la simulation directe de systèmes réels et pour l'analyse de sensibilité.

Nous espérons que la simulation de ces procédés solaires par la méthode de Monte-Carlo permettra, à terme, de calculer la matrice des sensibilités à l'ensemble des paramètres (jacobienne), pour l'utiliser dans des procédures automatiques d'optimisation par méthodes inverses ("inverse geometry design"). Cependant, avant de proposer des solutions clef en main pour la recherche automatique d'un optimum, il y a encore des étapes à franchir. A notre niveau, nous recensons dans le chapitre 4 les difficultés rencontrées lors de la mise en oeuvre de calculs de sensibilités et nous essayons de les classer en un nombre limité de familles définissant des axes de recherches distincts. Puis nous présentons en détails trois cas problématiques de calcul de sensibilité sur des configurations académiques directement issues de systèmes réels. Nous irons le plus loin possible dans l'analyse de l'origine des difficultés rencontrées puis nous proposerons des solutions permettant de les contourner en essayant de repérer, à un stade encore embryonnaire, ce que ces solutions peuvent avoir de générique du point de vue de l'ingénierie solaire.



## Chapitre 2

# Méthode de Monte-Carlo : Approche intégrale pour la réduction de variance et l'analyse de sensibilité

Vus les besoins et problématiques du solaire à concentration présentés au chapitre précédent, la méthode de Monte-Carlo semble bien adaptée à la simulation des systèmes optiques concentrateurs réels. Elle permet aussi d'aborder les questions d'analyses paramétriques et d'optimisation en termes de calculs de sensibilité. Nous présentons dans ce chapitre une revue de la méthode de Monte-Carlo afin, d'une part, que les non spécialistes puissent en appréhender les concepts essentiels et, d'autre part, de mettre en avant ceux qui sont au coeur de notre travail méthodologique (formulation intégrale, variance nulle, estimation simultanée de sensibilité). Ce chapitre est une reprise de l'article "Design, optimization and practical implementation of Monte-Carlo algorithms for concentrated solar applications" actuellement en cours de soumission à la revue *Solar Energy*.

Depuis la publication initiale de METROPOLIS et ULAM en 1949 [59], de nombreux ouvrages et publications ont été consacrés à la méthode de Monte-Carlo. Dans la plupart des problèmes que nous étudions, les transferts radiatifs sont des phénomènes de transport linéaires (les photons n'interagissent pas entre eux que ce soit directement ou indirectement). La littérature sur la méthode de Monte-Carlo en transport linéaire est très riche et variée selon les applications. Nous choisissons arbitrairement de signaler les ouvrages qui constituent pour nous d'excellents outils. La monographie de J.M. HAMMERSLEY et D.C. HANDSCOMB [60] est reconnue par la communauté comme l'ouvrage synthétique de référence. La revue de J.R. HOWELL [61] concerne plus spécifiquement les applications d'ingénierie qui nous intéressent.

Ces textes apportent un cadre théorique suffisant pour bien appréhender la plupart des algorithmes de Monte-Carlo utilisés habituellement dans la recherche en concentration solaire. Ils constituent une base solide pour toute recherche bibliographique plus étendue. Cependant, nous invitons les lecteurs désireux d'en savoir plus sur la modélisation des phénomènes de transport linéaires par Monte-Carlo à consulter la littérature sur les plasmas [62] et sur le transport de neutrons [63, 64].

Dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo, le concept d'algorithme à variance nulle et l'es-

timation simultanée de sensibilités sont deux des avancées méthodologiques les plus récentes qui peuvent être appliquées simplement au contexte du solaire à concentration. C'est pourquoi nous détaillons ci-après les bases théoriques de ces méthodologies. Elle reposent toutes les deux sur la stricte correspondance entre un algorithme de Monte-Carlo linéaire et une expression intégrale de l'équation de transport [4].

Nous présentons tout d'abord cette correspondance dans la section 2.1 et nous en profiterons pour rappeler rapidement les étapes essentielles du développement des algorithmes de Monte-Carlo ainsi que leurs trois principales techniques d'optimisation. Cette section permet aussi de poser le formalisme réutilisé au Chap. 3, pour décrire les quatre exemples applicatifs exposés Sec. 3.2. Les sections 2.2 et 2.3 portent respectivement sur la notion de variance nulle et sur l'estimation simultanée de sensibilité. Nous insisterons sur les aspects qui sont suffisamment mûrs pour être directement appliqués à la problématique solaire.

## 2.1 Approche intégrale

La méthode de Monte-Carlo est une méthode statistique de calcul intégral : tous les algorithmes estiment une intégrale. Comme les équations de transport linéaire peuvent toujours s'écrire sous forme intégrale, il est possible de formuler l'intégrale que l'on estime avec un algorithme de Monte-Carlo linéaire. Dans cette partie, nous allons montrer comment formuler l'intégrale, estimée par un algorithme, dans le but de se servir par la suite de cette écriture intégrale pour optimiser l'algorithme en question.

Contrairement aux algorithmes de Monte-Carlo non linéaire où le parcours aléatoire de chaque particule dépend statistiquement du parcours des autres particules, les réalisations aléatoires dans un algorithme de Monte-Carlo linéaire sont strictement indépendantes. Ainsi, quand on étudie une grandeur physique  $A$ , toute estimation  $\tilde{a}_N$  de cette grandeur par un algorithme linéaire avec  $N$  réalisations aléatoires se construit comme la moyenne de la valeur de ces réalisations :

$$\tilde{a}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i \quad (2.1)$$

où  $w_1, w_2 \dots w_N$  sont  $N$  réalisations indépendantes de la même variable aléatoire  $W$ . Les réalisations dans un algorithme de Monte-Carlo sont :

- parfois très simples, comme par exemple dans l'algorithme standard d'estimation du facteur de forme  $F_{12}$  entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  où on tire aléatoirement des rayons partant de  $S_1$  et dont le poids statistique  $w_i$  prend soit la valeur 1 (si le rayon considéré frappe  $S_2$ ) soit la valeur 0 (si le rayon considéré passe à côté de  $S_2$ );
- parfois très compliquées, dès que l'on simule les phénomènes de réflexion multiple ou de diffusion multiple (voir illustrations Sec. 3.2.3).

Dans tous les cas, toutes les réalisations sont strictement indépendantes et ceci a deux conséquences essentielles :

- On peut systématiquement connaître la fiabilité de l'estimation  $\tilde{a}_N$  grâce à l'incertitude sta-

tistique (évaluation de l'écart-type de l'estimateur) selon :

$$\tilde{\sigma}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 \right) - \tilde{a}_N^2} \quad (2.2)$$

La fiabilité de l'estimation est directement liée à la variance de la variable aléatoire  $W$  dont on tire  $N$  réalisations. On peut remarquer qu'il faut réaliser 100 fois plus de tirages pour obtenir une estimation 10 fois plus précise.

- Il est facile de paralléliser les calculs de l'algorithme (cf. Sec. 3.1.1).

**Remarque :** Même si les réalisations sont indépendantes entre elles, dans tous les cas non triviaux, l'échantillonnage des réalisations se fait en utilisant des générations aléatoires successives (pour le facteur de forme : tirage d'une position sur  $S_1$  puis tirage d'une direction sur l'hémisphère d'émission – soit 4 générations aléatoires<sup>1</sup>). Le nombre de générations aléatoires nécessaires pour une réalisation de  $W$  dans l'algorithme est égal à la dimension du domaine d'intégration dans la formulation.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons d'abord montrer au travers d'exemples simples comment développer à partir de n'importe quel algorithme une écriture intégrale, et réciproquement comment décrire un algorithme en partant d'une formulation intégrale. Ces exemples sont déjà complètement présentés dans la littérature mais il est important de les décrire une fois de plus en détails afin que le lecteur devienne familier avec les notations et le formalisme que nous avons choisi ici.

**Correspondance entre un algorithme et sa formulation intégrale.** Soit une réalisation définie par le tirage d'une valeur  $\mathbf{x}$  de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  de densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  et d'une valeur  $\mathbf{y}$  de la variable aléatoire  $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$  dont la densité de probabilité  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  dépend de  $\mathbf{x}$ . Après avoir tiré  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ , on calcule la valeur du poids  $w$  comme la valeur d'une fonction  $\hat{w}$  de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{y}$ . L'algorithme est le suivant :

1. Tirage de  $\mathbf{x}_1$  selon  $p_{\mathbf{X}}$  ; tirage de  $\mathbf{y}_1$  selon  $p_{\mathbf{Y}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_1}$  ; calcul de  $w_1 = \hat{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ .
2. Tirage de  $\mathbf{x}_2$  selon  $p_{\mathbf{X}}$  ; tirage de  $\mathbf{y}_2$  selon  $p_{\mathbf{Y}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_2}$  ; calcul de  $w_2 = \hat{w}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ .
3. ...
4. Tirage de  $\mathbf{x}_N$  selon  $p_{\mathbf{X}}$  ; tirage de  $\mathbf{y}_N$  selon  $p_{\mathbf{Y}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_N}$  ; calcul de  $w_N = \hat{w}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$ .
5.  $A$  est estimé par la moyenne  $\tilde{a}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$   
et l'écart-type associé est estimé par  $\tilde{\sigma}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2 \right) - \tilde{a}_N^2}$

La traduction de cet algorithme en formulation intégrale est triviale : quand  $N \rightarrow +\infty$ , l'estimateur  $\tilde{a}_N$  estime effectivement  $A$  comme l'espérance de la variable aléatoire  $W = \hat{w}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(\mathbf{X}))$  qui correspond à

$$A = E(W) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.3)$$

avec  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$  les domaines respectifs de définition de  $\mathbf{X}$  et de  $\mathbf{Y}(\mathbf{X})$ .

---

1. L'échantillonnage surfacique de  $S_1$  nécessite le tirage de deux variables aléatoires scalaires  $X, Y$  et l'échantillonnage directionnel de l'hémisphère d'émission demande de tirer deux autres variables aléatoires scalaires  $\Theta, \Phi$ .

Si on applique cette procédure à l'exemple du facteur de forme  $F_{12}$  entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  (voir la figure 2.1), on obtient l'intégrale :

$$F_{12} = E(W) = \int_{S_1} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{2\pi} p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \hat{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (2.4)$$

avec  $\hat{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = 1$  si il y a une intersection entre  $S_2$  et le rayon défini par la position  $\mathbf{x}$  sur  $S_1$  et la direction  $\boldsymbol{\omega}$  sur l'hémisphère d'émission (défini par  $2\pi$  sr d'angle solide), et  $\hat{w}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = 0$  sinon. Les

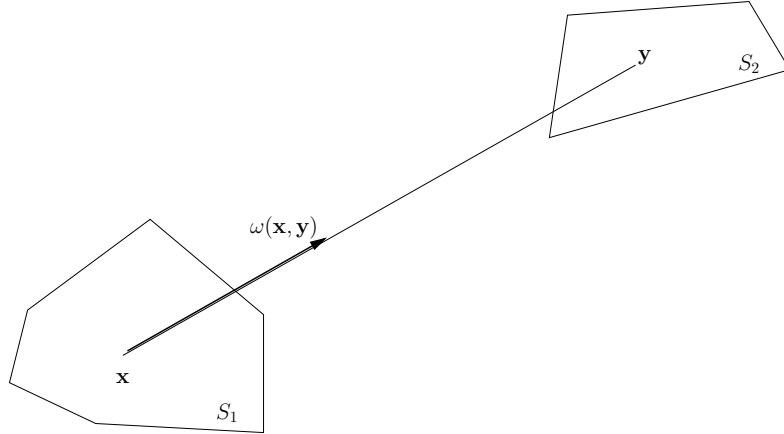


FIGURE 2.1 – Facteur de forme  $F_{12}$  entre deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$

fonctions densités de probabilité sont  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_1}$  (tirage uniforme de la position sur la surface  $S_1$ ) et  $p_{\Omega}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}_1}{\pi}$  (échantillonnage lambertien de la direction d'émission) avec  $\mathbf{n}_1$  la normale à  $S_1$ . Sur un exemple aussi simple, il est évident que l'équation 2.4 correspond strictement à l'algorithme de Monte-Carlo. Nous verrons plus tard que même avec des algorithmes très compliqués, cette correspondance reste directe.

La procédure inverse pour passer d'une formulation à un algorithme est aussi très utile. Considérons à nouveau l'exemple du facteur de forme  $F_{12}$  mais en partant cette fois-ci de son expression intégrale habituelle :

$$F_{12} = \int_{S_1} d\mathbf{x} \int_{S_2} d\mathbf{y} \frac{[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_1][-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_2]}{\pi S_1 (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2} \quad (2.5)$$

où  $\mathbf{n}_2$  est la normale à  $S_2$  en  $\mathbf{y}$  et  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2}}$  est le vecteur unitaire partant de  $\mathbf{x}$  vers  $\mathbf{y}$ . Si on compare cette dernière formulation intégrale avec l'équation 2.4, on constate que les domaines d'intégration sont différents et qu'on ne trouve aucune information statistique sur l'échantillonnage du domaine d'intégration considéré. On y remédie facilement en introduisant arbitrairement une première densité de probabilité  $p_{\mathbf{X}}$  définie sur  $S_1$ , par exemple  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{S_1}$ , puis une seconde densité de probabilité  $p_{\mathbf{Y}}$  définie sur  $S_2$ , par exemple  $p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{S_2}$  et on exprime finalement la fonction poids  $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . On obtient :

$$F_{12} = E(W) = \int_{S_1} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{S_2} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.6)$$

avec

$$\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})} \frac{[\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_1][-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_2]}{\pi S_1(\mathbf{y} - \mathbf{x})^2} \quad (2.7)$$

On peut alors facilement déduire de cette formulation, un nouvel algorithme correspondant :

1. Tirage uniforme de  $\mathbf{x}_1$  sur  $S_1$  ; tirage uniforme de  $\mathbf{y}_1$  sur  $S_2$  ; calcul  $w_1 = \hat{w}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$ .
2. Tirage uniforme de  $\mathbf{x}_2$  sur  $S_1$  ; tirage uniforme de  $\mathbf{y}_2$  sur  $S_2$  ; calcul  $w_2 = \hat{w}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ .
3. ...
4. Tirage uniforme de  $\mathbf{x}_N$  sur  $S_1$  ; tirage uniforme de  $\mathbf{y}_N$  sur  $S_2$  ; calcul  $w_N = \hat{w}(\mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$ .
5.  $A$  est estimé par la moyenne  $\tilde{a}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$   
et l'écart-type associé est estimé par  $\tilde{\sigma}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2\right) - \tilde{a}_N^2}$ .

A partir de ces images élémentaires, nous pouvons maintenant illustrer les trois techniques les plus couramment utilisées pour optimiser un algorithme de Monte-Carlo donné : l'échantillonnage préférentiel, la variable de contrôle et la reformulation intégrale.

### 2.1.1 Échantillonnage préférentiel

Dans le précédent algorithme, nous avons vu que les choix de  $p_{\mathbf{X}}$  et de  $p_{\mathbf{Y}}$  sont arbitraires. Cependant, ces choix concernant l'échantillonnage des variables aléatoires ont évidemment des conséquences en termes de convergence numérique : l'écart-type  $\tilde{\sigma}_N$  est modifié lorsque l'on change les densités de probabilité  $p_{\mathbf{X}}$  et  $p_{\mathbf{Y}}$ . L'échantillonnage préférentiel consiste à optimiser le choix de ces *pdfs*<sup>2</sup> afin de réduire la valeur de l'écart-type associé à l'estimation pour un nombre limité de réalisations aléatoires.

Cette technique est manifestement très facile à réaliser quand l'algorithme à optimiser a été déduit d'une formulation intégrale : on remplace simplement les routines de tirage de  $\mathbf{x}$  et de tirage de  $\mathbf{y}$  par celles qui correspondent aux nouvelles *pdfs*, et on modifie en conséquence les expressions de ces *pdfs* à l'intérieur de celle du poids  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  (cf. Eq. 2.7).

Dans le cas où l'algorithme de Monte-Carlo a été développé sur la base d'images de physique statistique sans expliciter la formulation intégrale correspondante, il suffit de savoir qu'il existe une *traduction* intégrale des algorithmes de transport linéaire et que cette écriture intégrale s'exprime sous une forme similaire à celle de l'équation 2.3 (avec éventuellement beaucoup plus de générations aléatoires successives). Remplacer les *pdfs* d'origine par des *pdfs* optimisées  $p_{\mathbf{X},opt}$  et  $p_{\mathbf{Y},opt}$  conduit à une écriture intégrale de cette forme :

$$A = E(W) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X},opt}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y},opt}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}_{opt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

avec

$$\hat{w}_{opt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X},opt}(\mathbf{x})} \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_{\mathbf{Y},opt}(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \quad (2.9)$$

Cela signifie qu'il n'est pas obligatoire d'expliciter la formulation intégrale : la structure de l'algorithme ne change pas, à l'exception des nouvelles *pdfs* qui sont maintenant utilisées pour les

---

2. On notera désormais *pdf* pour fonction densité de probabilité (probability density function)

tirages de  $\mathbf{x}$  et de  $\mathbf{y}$ , et de l'ancien poids qui est maintenant multiplié par le rapport entre les *pdfs* d'origine et les *pdfs* optimisées. Cependant, choisir judicieusement les densités de probabilité n'est pas évident, tout comme il n'est pas évident de définir un maillage non-uniforme bien adapté pour les méthodes numériques déterministes.

### 2.1.2 Variable de contrôle

S'il existe une fonction  $\hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  telle que

$$\int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (2.10)$$

alors, la fonction poids  $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de l'équation 2.3 peut, dans l'idéal, être remplacée par une fonction poids optimisée  $\hat{w}_{opt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . On a effectivement  $E(W_{opt}) = A$  :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}_{opt}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} [\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = A \end{aligned} \quad (2.11)$$

C'est la fonction  $\hat{v}$  qui est appelée *la variable de contrôle* et elle est associée à la variable aléatoire  $V$ . Pour que cette technique soit efficace, il faut choisir  $\hat{v}$  telle que  $Var(W + V) < Var(W)$ .

Ici aussi, comme pour l'échantillonnage préférentiel, il n'est pas indispensable d'explicitier la formulation intégrale, il suffit d'être certain que l'intégrale de  $\hat{v}$  soit nulle. Nous présentons dans la suite de ce chapitre un exemple applicatif dans lequel on peut choisir  $\hat{v}$  en s'inspirant d'images physiques simples sans avoir à manipuler les expressions intégrales complètes.

### 2.1.3 Reformulation intégrale

Nous avons vu au travers de l'exemple sur le facteur de forme que deux formulations intégrales distinctes (Eq. 2.4 et Eq. 2.6) conduisant à deux algorithmes différents peuvent être utilisées pour calculer la même grandeur. En fait, c'est aussi un moyen – le plus efficace en pratique – pour réduire la variance des algorithmes de Monte-Carlo. Si les aires des surfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont petites devant la distance qui les sépare, alors l'algorithme standard (où on tire une position  $\mathbf{x}$  sur  $S_1$  et une direction d'émission  $\boldsymbol{\omega}$  sur l'hémisphère de sortie) converge difficilement. En effet, la plupart des rayons générés aléatoirement n'intercepteront pas  $S_2$  (la valeur des poids correspondants sera nulle) et les réalisations du poids prendront très rarement la valeur 1 (quand une intersection sera trouvée) : en conséquence, l'écart-type de l'estimateur tend vers l'infini quand la distance entre les deux surfaces tend vers l'infini. Le second algorithme (tirages de deux positions  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  respectivement sur  $S_1$  et  $S_2$ ), au contraire, conduit à un écart-type relatif qui tend vers zéro pour la même limite (dans ce cas, un seul tirage suffit pour connaître exactement la valeur du facteur de forme entre deux surfaces élémentaires). Si la distance entre les deux surfaces tend vers zéro et que leur aires sont grandes, c'est l'inverse : l'incertitude statistique de l'algorithme standard tend vers zéro alors que celle du second tend vers l'infini.

En fonction des caractéristiques du problème, une formulation intégrale peut être idéalement choisie ou bien totalement inadaptée. Seule la pratique régulière de la méthode de Monte-Carlo

permet d'acquérir suffisamment d'expérience et de confiance pour entrer en profondeur dans la formulation intégrale et la modifier (en se basant sur les images physiques disponibles) quand on rencontre de sérieux problèmes de convergence.

### 2.1.4 Illustrations pédagogiques

Nous allons maintenant illustrer ces trois concepts en utilisant une version simplifiée du troisième des exemples présentés à la section 3.2 : un flux uniforme parfaitement collimaté, de puissance surfacique monochromatique  $\varphi_\nu$  est incident perpendiculairement sur la surface plane de la fenêtre en quartz d'un récepteur solaire à lit fluidisé. Un exemple de géométrie est présentée sur la figure 2.2. La fenêtre, notée  $\mathcal{G}$ , est parfaitement transparente et on néglige tous les effets de réfraction. Les

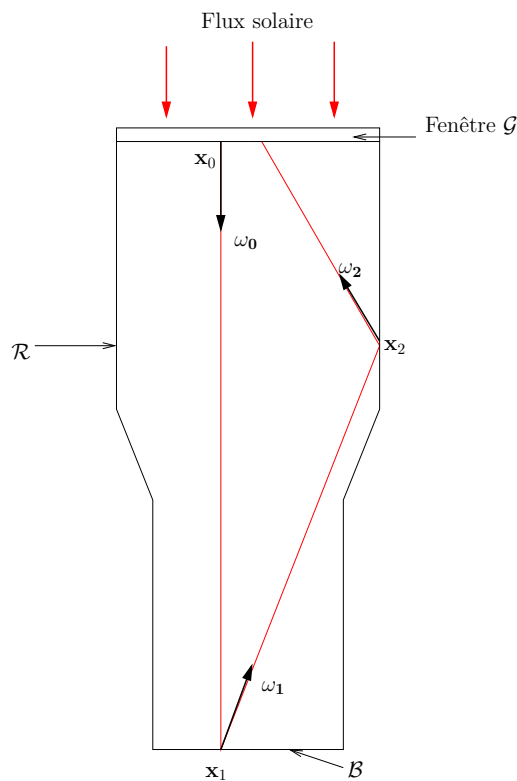


FIGURE 2.2 – Exemple de chemin optique dans le lit fluidisé

autres surfaces, notées  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{B}$ , sont diffuses parfaitement réfléchissantes. Le mélange gaz-particules qui remplit le volume est uniquement absorbant (pas de diffusion pour l'instant) avec un coefficient d'absorption monochromatique uniforme  $k_{a,\nu}$ .

Un des algorithmes de Monte-Carlo possibles pour évaluer la puissance radiative  $A$  absorbée par le volume pour un intervalle de fréquence donné  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$  est présenté ci-dessous, à parcourir  $N$  fois pour calculer les  $N$  valeurs du poids  $w$  servant à évaluer  $A$  :

1. Tirage uniforme de la fréquence  $\nu$  dans l'intervalle  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$ .
2. Tirage uniforme de la position d'entrée  $\mathbf{x}_0$  sur  $\mathcal{G}$ .
3. Initialisation de  $j$  à 0 et affectation de  $\boldsymbol{\omega}_0$  à la direction du flux incident.

4. *Intersection* - Calcul de la position d'intersection  $\mathbf{x}_{j+1} \equiv \mathbf{x}_{j+1}(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}_j)$  entre le rayon partant de  $\mathbf{x}_j$  dans la direction  $\boldsymbol{\omega}_j$  et la surface totale du récepteur ( $\mathcal{G} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ ).
5. *Réflexion* - Si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ , on tire aléatoirement la direction du rayon réfléchi  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$  selon la loi de Lambert (réflexion diffuse), on incrémente  $j$  et l'algorithme remonte à l'étape 4 (boucle de réflexion multiple).
6. *Sortie par la fenêtre* - Si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{G}$ , on calcul le poids :  $w = \hat{w}_j$ .

Lorsque l'on sort après la  $j$ ème réflexion, le poids  $w$  est pris égal à  $\hat{w}_j$  selon :

$$\hat{w}_j \equiv \hat{w}_j(\nu, \mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2 \dots \boldsymbol{\omega}_j) = \varphi_\nu S_G (\nu_{max} - \nu_{min}) [1 - \exp(-k_{a,\nu} d_j)] \quad (2.12)$$

avec  $S_G$  l'aire de la fenêtre,  $d_j = \sum_{q=0}^j \|\mathbf{x}_{q+1} - \mathbf{x}_q\|$  la longueur du chemin optique de réflexion multiple ( $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}$ ), et  $[1 - \exp(-k_{a,\nu} d_j)]$  le taux d'absorption le long de ce chemin.

Quand on écrit la formulation intégrale d'un tel algorithme, la seule difficulté vient du domaine d'intégration (ici sa dimension est infinie) et des conditions algorithmiques (parfois appelées tests de rejet) :  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{G}$  ou  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ . Pour formaliser les tests algorithmiques dans l'intégrale, on utilise la notation générique de la fonction Heaviside. Par exemple,  $H(\mathbf{x}_j \in \mathcal{G})$  doit être interprété par  $H(\mathbf{x}_j \in \mathcal{G}) = 1$  si  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{G}$  et  $H(\mathbf{x}_j \in \mathcal{G}) = 0$  sinon. La dimension infinie de l'intégrale est une conséquence directe du phénomène de réflexion multiple (de manière générale : réflexion multiple et/ou diffusion multiple). On peut ici contourner la difficulté formelle d'écrire des expressions avec un nombre infini d'intégrales imbriquées en utilisant le formalisme de Fredholm<sup>3</sup>. Pour des raisons pédagogiques, nous écrivons quand même chacune des intégrales successives comme la traduction des tirages aléatoires successifs, même si le formalisme de Fredholm est un outil précieux pour classifier et analyser les caractéristiques générales des algorithmes de Monte-Carlo. Ayant fait ces choix de notations et de formulations, l'algorithme présenté plus haut conduit à l'expression intégrale suivante de la puissance absorbée :

$$\begin{aligned} A = & \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_\nu(\nu) d\nu \int_{\mathcal{G}} p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \\ & \{ H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}) \hat{w}_1 + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}) \int_{2\pi} p_{\Omega_1}^{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\omega}_1) d\boldsymbol{\omega}_1 \\ & \{ H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}) \hat{w}_2 + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}) \int_{2\pi} p_{\Omega_2}^{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\omega}_2) d\boldsymbol{\omega}_2 \\ & \dots \} \} \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec  $p_\nu(\nu) = \frac{1}{\nu_{max} - \nu_{min}}$ ,  $p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{S_G}$ ,  $p_{\Omega_j}^{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\omega}_j) = \frac{\boldsymbol{\omega}_j \cdot \mathbf{n}_j}{\pi}$  (loi de tirage Lambertienne – réflexion diffuse) où  $\mathbf{n}_j$  est la normale à la surface  $\mathcal{R} \cup \mathcal{B}$  en  $\mathbf{x}_j$  et  $\hat{w}_j$  calculé selon Eq. 2.12.

Comme dans les exemples simples précédents, la relation d'équivalence entre cette formulation intégrale et l'algorithme est évidente. Et même si les expressions intégrales deviennent rapidement très longues, elles restent faciles à interpréter. Ainsi, l'intégrale devient une alternative aux descriptions des algorithmes qui sont parfois très lourdes. De plus, ces intégrales facilitent le contrôle rigoureux de la convergence de l'algorithme vers la grandeur étudiée.

---

3. Formalisme pour alléger l'écriture d'une infinité d'intégrales imbriquées grâce à une ou plusieurs formules de récurrence



En utilisant des formulations intégrales du même type que celle de l'équation 2.13, divers soucis de convergence peuvent être éclairés. Considérons par exemple le cas particulier où le récepteur est rempli d'un gaz dont le spectre d'absorption est composé de  $n$  raies d'absorption de Lorentz avec des fréquences centrales notées  $\nu_{c,1}, \nu_{c,2}, \dots, \nu_{c,n}$ , des intensités  $S_1, S_2 \dots S_n$  et de largeurs moyennes à mi-hauteur  $\delta$ , voir Fig. 2.3. Si  $\delta$  est petit comparé à la distance moyenne entre les centres de deux

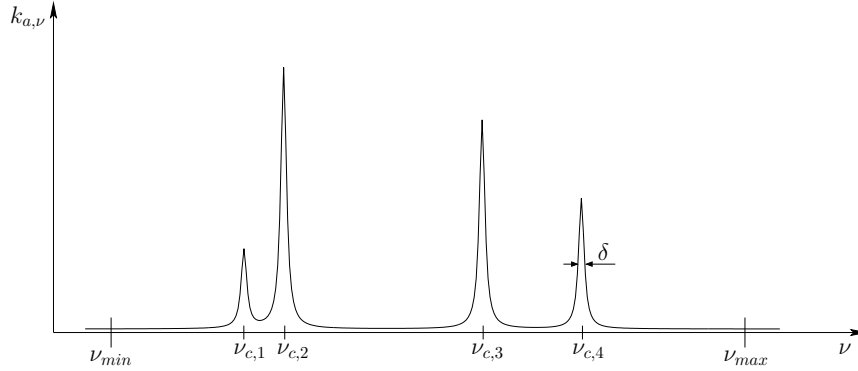


FIGURE 2.3 – Exemple de spectre d'absorption avec quatre raies de Lorentz

raies, l'absorption risque d'être significative uniquement au voisinage des centres de raie. Comme les fréquences sont échantillonnées uniformément sur  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$  dans l'algorithme précédent, l'écart-type obtenu sur l'estimation sera d'autant plus élevé que la plupart des réalisations effectuées par l'algorithme auront un poids dont la valeur est proche de zéro. La technique d'échantillonnage préférentiel est dans ce cas efficace pourvu que la *pdf* optimisée favorise les fréquences qui se trouvent aux voisinages des centres de raie. Nous reviendrons sur cet exemple au paragraphe 2.2.

Un autre type de problème de convergence est rencontré dans le cas où la grandeur considérée n'est pas la fraction radiative absorbée par le volume complet  $\mathcal{V}$  (dont les parois sont réfléchissantes), mais celle absorbée seulement par une petite partie  $\Omega$  de ce volume<sup>4</sup>, voir Fig. 2.4. Pour estimer cette nouvelle grandeur, la seule modification à apporter à l'algorithme précédent est de remplacer le taux d'absorption  $[1 - \exp(-k_{a,\nu}d_j)]$  par  $\sum_{q=1}^{m_{j+1}} \exp(-k_{a,\nu}b_q)[1 - \exp(-k_{a,\nu}c_q)]$  où :  $b_q$  est la longueur du chemin optique de réflexion jusqu'à la  $q^{\text{ième}}$  intersection avec la frontière de  $\Omega$ ,  $c_q$  est la longueur du chemin à l'intérieur de  $\Omega$  après cette  $q^{\text{ième}}$  intersection (voir la figure 2.4 où les notations sont illustrées) et  $m_{j+1}$  est le nombre de traversées de  $\Omega$  avant la sortie par la vitre (au point  $\mathbf{x}_{j+1}$ ).

Dès que  $\Omega$  devient très petit devant le volume complet, la plupart des chemins optiques ne rencontrent jamais  $\Omega$  (la sortie du récepteur par la fenêtre se produit avant la première rencontre entre le chemin et  $\Omega$ ) et la plupart des réalisations conduisent alors à des poids dont la valeur est strictement nulle. Ici encore, l'écart-type de l'estimation aura une valeur très élevée. La technique habituelle utilisée pour ce genre de problème consiste à trouver une reformulation intégrale simple dans laquelle le chemin optique n'est pas réalisé en partant de l'entrée par la fenêtre de verre jusqu'à la sortie mais en suivant un trajet inverse depuis le sous-volume considéré jusqu'au point de départ sur la fenêtre.

4. Par exemple,  $\Omega$  peut être un des sous domaines du volume  $\mathcal{V}$  correspondant à la discrétisation volumique du récepteur quand les échanges radiatifs sont calculés en couplage avec un autre phénomène local de transfert de chaleur ou de réactions chimiques.

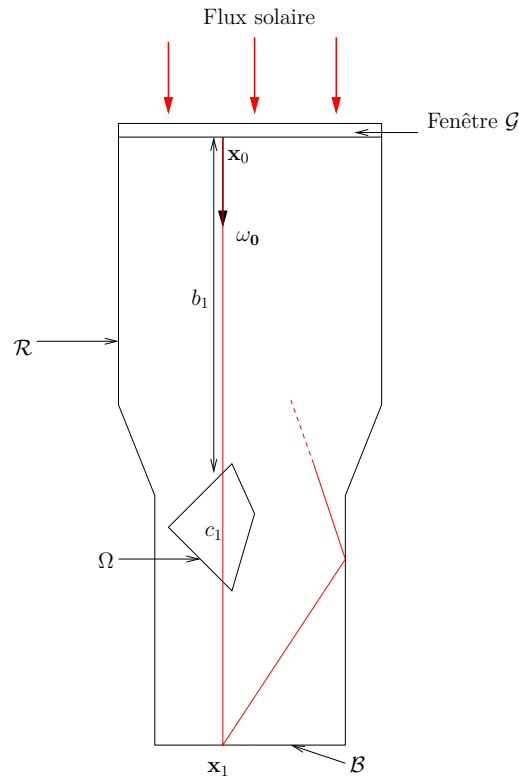


FIGURE 2.4 – Exemple de chemin optique entre la fenêtre  $\mathcal{G}$  et un élément volumique  $\Omega$  à l'intérieur du récepteur.

Il est difficile d'illustrer de façon convaincante la technique de variable de contrôle en utilisant strictement le même exemple de simulation. Cependant, si on souhaite simuler les échanges radiatifs à des fréquences infrarouges dans le même système, alors il apparaît une nouvelle difficulté de convergence que l'on peut régler en utilisant une variable de contrôle. Dans les fréquences infrarouges, on s'intéresse habituellement aux bilans radiatifs (différence entre la puissance radiative absorbée en un point et la puissance émise au même point). Si on considère le cas limite où le système est isotherme, le bilan radiatif est nul. Mais comme la plupart des algorithmes de Monte-Carlo utilisés pour traiter ce problème suivent des chemins optiques depuis une position d'émission jusqu'à une position d'absorption, ils ne fournissent pas une estimation absolument nulle du bilan. Si l'ensemble du système n'est pas parfaitement isotherme, mais à des températures proches d'une température donnée  $T_{ref}$ , alors le bilan radiatif correspond à une faible différence entre la contribution de l'émission et celle de l'absorption. Si l'on veut estimer précisément une quantité définie par la différence de deux valeurs proches, il est nécessaire de connaître ces deux valeurs avec de très faibles incertitudes relatives. Ceci signifie qu'un grand nombre de réalisations seront nécessaires pour assurer une précision suffisante à la fois sur l'évaluation de l'absorption et sur celle de l'émission afin de garantir que le calcul de leur différence ait un sens. En conséquence, l'écart-type relatif sur l'estimation du bilan va tendre vers l'infini quand la différence maximale relative de température dans le volume va tendre vers zéro. Dans le cadre des applications solaires, nous avons rarement affaire à des systèmes quasi-isothermes. Cependant quand le système met en jeu des phénomènes de convection intense, il peut être suffisamment proche de l'isothermie pour que

l'on rencontre ce genre de difficulté de convergence. Plusieurs solutions efficaces sont disponibles [65, 61], mais il en existe une très simple que l'on peut présenter ici.

Nous savons que les poids correspondants au cas isotherme conduisent à la solution théorique nulle lorsque le nombre de réalisations tend vers l'infini. Ceci constitue justement un choix possible pour une variable de contrôle selon l'Eq. 2.10. Pour utiliser cette variable de contrôle en pratique, la structure de l'algorithme ne change pas, mais chaque fois que la fonction de Planck  $I_\nu^{eq}(T)$  est appelée pour représenter l'émission à un endroit dont la température est  $T$ , on remplace simplement cette fonction par la différence  $I_\nu^{eq}(T) - I_\nu^{eq}(T_{ref})$  et le problème de calculer une faible différence entre deux grandes quantités disparaît puisqu'on estime désormais la différence entre le bilan thermique étudié et celui du cas isotherme à la température  $T_{ref}$ . Nous reviendrons sur la technique de variable de contrôle dans le chapitre 4 de ce manuscrit, où son efficacité est illustrée dans le cas de calculs de sensibilités.

## 2.2 Algorithmes à variance nulle

Nous allons maintenant discuter des bénéfices du concept de variance nulle dans la recherche sur l'énergie solaire concentrée. Comme l'ont mentionné ASSARAF et CAFFAREL dans [66], les algorithmes à variance nulle sont aussi vieux que la méthode de Monte-Carlo elle-même. Dans ces algorithmes, à chaque réalisation du poids, la valeur obtenue est constante et rigoureusement égale à la grandeur que l'on souhaite calculer. Autrement dit, la distribution de la variable aléatoire  $W$  du poids statistique est une distribution de Dirac centrée en  $A$  (conformément aux notations de l'Eq. 2.1). Ainsi, une réalisation unique est nécessaire et suffisante pour obtenir une estimation parfaite de la grandeur  $A$ . Cependant, pour développer un algorithme à variance nulle, il est indispensable de connaître à l'avance la valeur exacte de la grandeur à estimer. On ne peut donc en pratique créer un algorithme à variance nulle que lorsque l'on connaît déjà la valeur de la grandeur  $A$  (estimer  $A$  par la méthode de Monte-Carlo est alors inutile).

En dehors de ces considérations purement théoriques, nous allons montrer qu'en travaillant sur les formulations intégrales selon les grandes lignes de [66, 67] et en faisant comme si toutes les solutions analytiques étaient disponibles, on peut, d'une manière efficace et générale, orienter de façon quasi-systématique les procédures d'optimisation décrites plus haut (principalement l'échantillonnage préférentiel et la reformulation intégrale). Dans la littérature récente [67], le cœur théorique du concept de variance nulle est présenté à l'aide de fonctions adjointes. Dans cette section cependant, nous nous restreindrons à décrire brièvement les principes sous-jacents et nous les transposerons à des exemples applicatifs en utilisant les configurations de la section précédente. Pour des considérations plus avancées, le lecteur trouvera tous ces concepts exposés dans [67] de façon claire et détaillée.

Dans les trois prochains paragraphes, nous allons présenter le formalisme théorique d'abord sur une intégrale simple puis double puis enfin sur une intégrale de dimension infinie dans le cadre de la diffusion multiple. Nous illustrerons ces propos par des exemples concrets à chaque étape de complexité croissante.

**Présentation et illustration du concept sur une intégrale simple.** Considérons l'intégrale simple suivante :

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_X(x)w(x)dx \quad (2.14)$$

$$\text{avec } w(x) = \frac{f(x)}{p_X(x)} \quad (2.15)$$

que l'on estime à l'aide d'un algorithme de Monte-Carlo dans lequel on a introduit une densité de probabilité  $p_X(x)$  définie sur  $\mathcal{D} = [a, b]$ . L'expression de l'écart-type de l'estimation obtenue est donnée par l'équation suivante (cf. Eq. 2.2) :

$$\frac{\sqrt{E(W^2) - E(W)^2}}{\sqrt{N}} \approx \tilde{\sigma}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i^2\right) - \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i\right)^2}$$

On rappelle que l'échantillonnage préférentiel consiste à choisir astucieusement la densité de probabilité  $p_X(x)$  pour diminuer l'écart-type  $\tilde{\sigma}_N$  et que même si les lois de tirage aléatoire sont modifiées, l'algorithme converge toujours vers  $A$  (pour un nombre infini de tirages). Si la fonction  $f$  ne change pas de signe sur l'intervalle  $\mathcal{D}$ , la densité de probabilité optimisée idéale  $p_{X,opt}^I(x)$  qui conduit à une variance nulle, c'est-à-dire à une estimation exacte de  $A$  quelque soit le nombre de tirages, s'écrit :

$$p_{X,opt}^I(x) = \frac{f(x)}{\int_a^b f(x)dx} = \frac{f(x)}{A} \quad (2.16)$$

Ceci signifie simplement que si on connaît la solution analytique de l'intégrale, on peut définir une densité de probabilité idéale telle que chaque génération se traduit par une valeur du poids qui est exactement la solution<sup>5</sup>  $w(x) = A$ . Si l'intégrale est connue, l'utilisation de la méthode de Monte-Carlo est inutile, mais on retiendra que plus l'expression de la densité de probabilité se rapproche de l'expression 2.16, plus l'erreur statistique diminue.

Retournons maintenant à l'exemple du récepteur solaire dans le cas particulier où toutes les surfaces opaques  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{B}$  sont maintenant noires et où la géométrie est ramenée à un cylindre de hauteur  $h$ . Toutes les réflexions disparaissent alors, le poids est maintenant indépendant de la position d'entrée  $\mathbf{x}_0$  sur la vitre et l'équation 2.13 devient :

$$A = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_\nu(\nu) d\nu \hat{w}(\nu) \quad (2.17)$$

avec  $\hat{w}(\nu) = \varphi_\nu S_G(\nu_{max} - \nu_{min})[1 - \exp(-k_{a,\nu}h)]$ . Imaginons maintenant dans ce cas très simple quelle serait la forme d'un algorithme à variance nulle avec un échantillonnage préférentiel. Nous devrions choisir une pdf idéale  $p_{\nu,opt}^I$  pour les fréquences et nous écrivons :

$$A = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_{\nu,opt}^I(\nu) d\nu \hat{w}_{opt}^I(\nu) \quad (2.18)$$

---

5. On déduit de l'Eq. 2.15 que  $w(x) = \frac{f(x)}{p_{X,opt}^I(x)} = A$  à chaque réalisation.

avec  $\hat{w}_{opt}^I(\nu) = \frac{p_\nu(\nu)}{p_{\nu,opt}^I(\nu)} \hat{w}(\nu)$  d'après Eq. 2.17. L'optimisation idéale impose d'avoir  $\hat{w}_{opt}^I(\nu)$  constant égal à  $A$  indépendamment de la fréquence  $\nu$ . Ce qui conduit d'après l'Eq. 2.16 à :

$$p_{\nu,opt}^I(\nu) = \frac{p_\nu(\nu) \hat{w}(\nu)}{A} = \frac{p_\nu(\nu) \hat{w}(\nu)}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_\nu(\nu) \hat{w}(\nu) d\nu} = \frac{\varphi_\nu [1 - \exp(-k_{a,\nu} h)]}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \varphi_\nu [1 - \exp(-k_{a,\nu} h)] d\nu} \quad (2.19)$$

Cette *pdf* optimisée idéale est une forme normalisée du produit  $p_\nu(\nu) \hat{w}(\nu)$  où le coefficient de normalisation est la valeur de la grandeur  $A$  elle-même. Bien sûr, si on fait appel à un algorithme de Monte-Carlo, c'est notamment parce que les spectres  $\varphi_\nu$  et  $k_{a,\nu}$  sont suffisamment complexes pour qu'il soit difficile d'évaluer  $A$  (on ne connaît pas sa valeur analytique). Nous rappelons que connaître l'expression formelle de  $p_{\nu,opt}^I$  est donc impossible en pratique. Le seul intérêt pratique consiste à utiliser des modèles d'approximation (approchant la *pdf* idéale  $p_{\nu,opt}^I$ ) pour choisir une *pdf* optimisée  $p_{\nu,opt}$ . Pour les problèmes spectraux comme ici, on a l'habitude de considérer les modèles approximatifs aux limites des milieux optiquement minces ou optiquement épais.

À la limite optiquement épaisse ( $k_{a,\nu} h \gg 1$ ), les exponentielles tendent vers zéro à toutes les fréquences :

$$p_{\nu,opt}^I(\nu) \approx \frac{\varphi_\nu}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \varphi_\nu d\nu} \quad (2.20)$$

et à la limite optiquement mince ( $k_{a,\nu} h \ll 1$ ), on peut linéariser les exponentielles<sup>6</sup> :

$$p_{\nu,opt}^I(\nu) \approx \frac{\varphi_\nu k_{a,\nu}}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \varphi_\nu k_{a,\nu} d\nu} \quad (2.21)$$

On doit alors définir un critère sur  $h$  pour retenir l'un des deux cas limites ou bien une combinaison linéaire des deux<sup>7</sup>, et mettre en place un moyen efficace pour échantillonner  $\nu$  selon ces nouvelles *pdfs* (on pourra par exemple utiliser des *pdfs* prétabulées qui couvrent entièrement les spectres  $\varphi_\nu$  et  $k_{a,\nu}$  rencontrés). Le concept de variance nulle se complique un peu dès que les réalisations de  $W$  demandent l'échantillonnage de plus d'une variable aléatoire. Aussi nous allons, dans le paragraphe suivant, étendre ce formalisme théorique à une intégrale double puis nous l'appliquerons à l'exemple de la réflexion multiple dans le récepteur solaire.

**Extension du concept à des intégrales de dimensions supérieures.** Partons maintenant de l'équation 2.3 :

$$A = E(W) = \int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

où chaque réalisation de l'algorithme est définie par l'échantillonnage de deux variables aléatoires  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , pour réfléchir formellement sur la question de variance nulle en utilisant l'échantillonnage préférentiel. On introduit deux *pdfs* optimisées idéales  $p_{\mathbf{X},opt}^I$  et  $p_{\mathbf{Y},opt}^I$ , et on transforme l'équation 2.3 :

$$A = \int_{\mathcal{D}_X} p_{\mathbf{X},opt}^I(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y},opt}^I(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}_{opt}^I \quad (2.22)$$

6. Les "h" au numérateur et dénominateur de l'Eq. 2.19 se simplifient.

7. On rappelle que cela n'affecte que la convergence de l'algorithme mais pas la valeur limite de l'estimation quand  $N \rightarrow +\infty$ .

avec

$$\hat{w}_{opt}^I = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X},opt}^I(\mathbf{x})} \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})}{p_{\mathbf{Y},opt}^I(\mathbf{y}|\mathbf{x})} \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.23)$$

où  $p_{\mathbf{X},opt}^I$  et  $p_{\mathbf{Y},opt}^I$  sont choisies de sorte que  $\hat{w}_{opt}^I = A$  pour tout couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{X}} \times \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})$ . Comme  $\hat{w}_{opt}^I$  est indépendant de  $\mathbf{y}$  (car  $A$  est une constante), le rapport  $\frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\hat{w}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{p_{\mathbf{Y},opt}^I(\mathbf{y}|\mathbf{x})}$  doit aussi être indépendant de  $\mathbf{y}$  quelque soit la valeur de  $\mathbf{x}$ . On pose  $A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}$  et on obtient la loi de tirage idéale des  $\mathbf{y}$  :

$$p_{\mathbf{Y},opt}^I(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}} = \frac{p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \quad (2.24)$$

En reprenant cette expression<sup>8</sup> dans l'équation 2.23, on obtient la loi de tirage idéale des  $\mathbf{x}$  :

$$p_{\mathbf{X},opt}^I(\mathbf{x}) = \frac{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}} \quad (2.25)$$

Ceci démontre que les *pdfs* optimisées idéales sont uniques et qu'elles peuvent être déterminées successivement en suivant la démarche décrite au paragraphe précédent dans l'exemple avec une simple intégrale. Pour la première intégrale, on a introduit  $A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  qui est la contribution à la grandeur  $A$  de la part de toutes les réalisations dont le tirage de  $\mathbf{X}$  donne la même valeur  $\mathbf{x}$ .

$$A = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})d\mathbf{x}A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (2.26)$$

En supposant que  $A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  est connue, l'Eq. 2.25 signifie que la *pdf* idéale  $p_{\mathbf{X},opt}^I$  prend en compte l'importance de la contribution de chaque valeur de  $\mathbf{x}$  au résultat final pour définir la probabilité de réalisation de cette valeur. Pour la seconde intégrale et ce quelque soit la valeur de  $\mathbf{x}$ , l'équation 2.24 est obtenue en suivant la démarche d'optimisation idéale appliquée à l'intégrale suivante :

$$A_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x})} p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})d\mathbf{y}A_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \quad (2.27)$$

avec  $A_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Cette démarche peut être généralisée si l'équation 2.3 présente plus de deux intégrales successives :  $A_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  aurait alors une forme intégrale et chaque nouvelle intégrale conduirait à la définition d'une nouvelle *pdf* optimisée idéale. Cependant, comme nous l'avons déjà précisé plus haut,  $p_{\mathbf{X},opt}^I$  et  $p_{\mathbf{Y},opt}^I$  (et éventuellement toutes les autres *pdfs* successives) ne peuvent pas être utilisées en l'état : il faut trouver des approximations de ces expressions qui correspondent à des modèles physiques simplifiés permettant des intégrations de façon analytique.

Nous allons maintenant illustrer ce point en revenant à l'exemple du récepteur solaire à lit fluidisé (cf. Eq. 2.13) dans sa forme initiale, avec une géométrie quelconque et des surfaces diffuses parfaitement réfléchissantes. Avec un tel algorithme, on rencontre essentiellement des problèmes de convergence quand on a affaire à des propriétés spectrales complexes, comme par exemple dans le cas de l'absorption radiative par des gaz (cf. Sec. 2.1.4 et Fig. 2.3). En appliquant la méthodologie

8. Pour obtenir cette équation 2.24, on effectue le développement mathématique suivant :  $A_{\mathbf{X}} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}} p_{\mathbf{Y}}\hat{w}d\mathbf{y} = \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}} p_{\mathbf{Y}}\frac{p_{\mathbf{Y}}}{p_{\mathbf{Y}}}\hat{w}d\mathbf{y}$ . Comme  $\frac{p_{\mathbf{Y}}}{p_{\mathbf{Y}}}\hat{w}$  ne dépend pas de  $\mathbf{y}$  on peut le sortir de l'intégrale. On obtient :  $A_{\mathbf{X}} = \frac{p_{\mathbf{Y}}\hat{w}}{p_{\mathbf{Y}}}\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}} p_{\mathbf{Y}}d\mathbf{y} = \frac{p_{\mathbf{Y}}\hat{w}}{p_{\mathbf{Y}}}\times 1$  d'où l'équation 2.24

précédente (cf. Eqs. 2.24, 2.25) aux intégrales successives de l'Eq. 2.13, on obtient

$$p_{\nu, opt}^I(\nu) = \frac{p_{\nu}(\nu)A_{\nu}(\nu)}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_{\nu}(\nu)A_{\nu}(\nu)d\nu} \quad (2.28)$$

$$p_{\mathbf{X}_0, opt}^I(\mathbf{x}_0|\nu) = \frac{p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0)A_{\mathbf{X}_0}(\nu, \mathbf{x}_0)}{\int_{\mathcal{G}} p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0)A_{\mathbf{X}_0}(\nu, \mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0} \quad (2.29)$$

$$p_{\Omega_1, opt}^{\mathcal{R}, I}(\omega_1|\nu, \mathbf{x}_0) = \frac{p_{\Omega_1}^{\mathcal{R}}(\omega_1)A_{\Omega_1}(\nu, \mathbf{x}_0, \omega_1)}{\int_{2\pi} p_{\Omega_1}^{\mathcal{R}}(\omega_1)A_{\Omega_1}(\nu, \mathbf{x}_0, \omega_1)d\omega_1} \quad (2.30)$$

$$p_{\Omega_2, opt}^{\mathcal{R}, I}(\omega_2|\nu, \mathbf{x}_0, \omega_1) = \frac{p_{\Omega_2}^{\mathcal{R}}(\omega_2)A_{\Omega_2}(\nu, \mathbf{x}_0, \omega_1, \omega_2)}{\int_{2\pi} p_{\Omega_2}^{\mathcal{R}}(\omega_2)A_{\Omega_2}(\nu, \mathbf{x}_0, \omega_1, \omega_2)d\omega_2} \quad (2.31)$$

⋮

Il vient alors la question suivante : Comment exprimer les grandeurs  $A_{\nu}$ ,  $A_{\mathbf{X}_0}$ ,  $A_{\Omega_1}, \dots$  en utilisant des approximations physiques assez simples pour que toutes ces expressions puissent être obtenues de manière analytique et en s'assurant d'avoir à disposition des routines d'échantillonnage efficaces pour chacune des nouvelles *pdfs* obtenues ?

Cette question est rarement triviale et il est difficile en pratique d'optimiser toutes les *pdfs*. Aussi, on se concentre en général sur celle qui présente la principale source de variance. Dans le présent exemple, nous allons nous concentrer sur l'échantillonnage des fréquences<sup>9</sup>. Pour cela, nous avons besoin de connaître une approximation simple de  $A_{\nu}$ , c'est à dire l'absorption totale monochromatique du gaz le long de tous les chemins optiques de réflexion multiple. Ceci peut paraître extrêmement difficile, mais il faut garder à l'esprit que l'on cherche uniquement des informations pour orienter efficacement les lois de tirage aléatoire (ici, on souhaite en particulier favoriser l'échantillonnage des fréquences autour des centres de raie quand c'est nécessaire) et qu'utiliser des approximations simples des *pdfs* peut réduire l'écart-type de l'estimation de plusieurs ordres de grandeur (comme par exemple dans le cas limite optiquement mince avec des raies d'absorptions étroites). On peut utiliser n'importe quel estimateur de la longueur moyenne  $\langle L \rangle$  des chemins optiques de réflexion à l'intérieur du récepteur<sup>10</sup> [68, 69], qui soit fonction de la géométrie du récepteur et de l'émissivité des surfaces, pour écrire l'expression suivante (en ne retenant que la dépendance spectrale) :

$$A_{\nu} \approx \varphi_{\nu}[1 - \exp(-k_{a, \nu} \langle L \rangle)] \quad (2.32)$$

Nous sommes, à ce stade, presque revenu au premier exemple de cette section et nous pouvons alors utiliser les limites optiquement épaisse ou mince comme indiqué plus haut.

Si on vise l'objectif zéro-variance, il est encore possible d'atteindre de meilleurs niveaux de convergence en utilisant la reformulation intégrale en plus de l'échantillonnage préférentiel. En effet, si on utilise l'indicateur  $\langle L \rangle$  pour améliorer l'échantillonnage des fréquences, il est possible

9. Comme nous l'avons expliqué au 2.1.4 : quand  $\delta$  (la largeur moyenne à mi-hauteur) est petite devant la distance moyenne entre les centres de raie, on risque de tomber souvent en dehors des raies d'absorption si on tire  $\nu$  de façon uniforme (cf. Fig. 2.3). Les valeurs correspondantes de  $k_{a, \nu}$  seront très faibles et les réalisations du poids statistique associées à ces réalisations de  $\nu$  contribueront très peu au calcul de l'espérance. D'où une variance élevée principalement due à l'échantillonnage fréquentiel.

10. Si la distribution angulaire des  $\omega_0$  est Lambertienne, alors  $4V/S$  est un estimateur parfait de  $\langle L \rangle$  avec  $V$  le volume du récepteur et  $S$  l'aire de la surface de la vitre.

malgré tout que l'échantillonnage spectral reste une source importante de variance. La raison en est que même si  $\langle L \rangle$  est évalué avec précision, cette valeur moyenne peut être le résultat de chemins courts (sortie après une seule réflexion) pour lesquels la *pdf* optimisée convenable serait celle déduite du cas limite optiquement mince et de chemins longs pour lesquels le cas limite optiquement épais serait plus approprié. On ne peut malheureusement pas distinguer ces deux cas parce que la fréquence est la première variable aléatoire échantillonnée avant le tirage du chemin optique.

Dans la configuration étudiée, les parois sont parfaitement réfléchissantes, leur réflectivité est constante égale à 1, elle ne dépend pas de la fréquence. L'échantillonnage du chemin optique de réflexion se fait donc indépendamment de la valeur de la fréquence et on peut intervertir les intégrales de l'Eq. 2.13 pour écrire :

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{G}} p_{\mathbf{X}_0}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \\
&\{ H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{G}) \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_{\nu}^1(\nu) d\nu \hat{w}_1 + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}) \int_{2\pi} p_{\Omega_1}^{\mathcal{R}}(\omega_1) d\omega_1 \\
&\{ H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{G}) \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_{\nu}^2(\nu) d\nu \hat{w}_2 + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R} \cup \mathcal{B}) \int_{2\pi} p_{\Omega_2}^{\mathcal{R}}(\omega_2) d\omega_2 \\
&\dots \} \}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

avec  $p_{\nu}^j(\nu) = \frac{1}{\nu_{max} - \nu_{min}}$ . Ceci correspond à un algorithme dans lequel on tire d'abord les directions des réflexions successives des photons jusqu'à leur sortie après  $j$  réflexions aux parois et en dernier lieu, on tire la fréquence une fois que la distance  $d_j$  parcourue le long de la trajectoire est connue. En ce qui concerne l'expression de la *pdf* idéale, cette formulation intégrale simplifie beaucoup les choses :

$$p_{\nu, opt}^j(\nu) = \frac{p_{\nu}^j(\nu) \hat{w}_j}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_{\nu}^j(\nu) \hat{w}_j d\nu} = \frac{\varphi_{\nu, j} [1 - \exp(-k_{a, \nu} d_j)]}{\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \varphi_{\nu, j} [1 - \exp(-k_{a, \nu} d_j)] d\nu} \tag{2.34}$$

On est alors revenu exactement au premier exemple de l'Eq. 2.19 où la démarche d'optimisation selon les cas limites optiquement mince ou épais est efficace en utilisant par exemple un critère de comparaison entre  $k_{a, \nu_j} d_j$  et 1.

**Remarque :** Il faut noter que dans tous les paragraphes précédents, nous avons implicitement fait l'hypothèse que  $\hat{w}$  est strictement positif. Sinon,  $p_{\mathbf{X}, opt}^L$  and  $p_{\mathbf{Y}, opt}^L$  (Eqs. 2.24, 2.25) ne peuvent pas être interprétées comme des *pdfs* idéales. Évidemment, si  $\hat{w}$  est strictement négatif, un simple changement de signe peut être réalisé. Cependant, tout ce que nous avons présenté à propos du concept de variance nulle ne s'applique pas quand la fonction poids change de signe sur le domaine d'intégration. Si c'est le cas, il faut alors user d'approches plus subtiles basées sur la reformulation intégrale. On peut aussi utiliser une variable de contrôle constante qui une fois ajoutée au poids original le transforme en fonction strictement positive ou strictement négative sur tout le domaine d'intégration. Il n'existe malheureusement pas d'approche systématique généralisable pour ce genre de problèmes. Nous illustrerons dans la section 2.3 comment les changements de signe peuvent causer de réelles difficultés, en particulier quand on souhaite estimer les sensibilités de  $A$  par rapport à des paramètres qui apparaissent dans l'expression des lois de tirage (*pdfs*).



Nous terminerons cette discussion sur la notion de variance nulle par une application à la diffusion multiple.

**Le concept de variance nulle et le phénomène de diffusion multiple.** La littérature spécialisée sur la variance nulle consacre une attention particulière à la diffusion multiple [60, 70, 71, 67, 72]. L'étude de ce phénomène nous concerne directement lorsqu'il est question de simuler certaines configurations les plus récentes de récepteurs solaires. Comme nous allons l'illustrer dans les sections 3.2.3 et 3.2.4, les récepteurs solaires qui mettent en jeu la diffusion multiple du rayonnement par des particules en suspension sont rapidement associés à de grosses difficultés de convergence dès qu'il s'agit de les modéliser avec des algorithmes de Monte-Carlo standards.

Cette question fut initialement abordée avec les toutes premières technologies nucléaires quand il a fallu concevoir des systèmes de protection (dont les couches successives sont conçues pour être très diffusantes) à partir de connaissances scientifiques générales (peu avancées à l'époque) sur les dispositions stratifiées de matériaux très diffusants [60]. Le problème formel consiste à estimer avec une précision de quelques pourcents une quantité très faible de rayonnement transmis au travers des épaisseurs successives des parois de protection. Ceci représente un niveau de précision extrêmement élevé par rapport à la puissance radiative incidente [60]. Une telle précision ne peut pas être atteinte avec la plupart des algorithmes classiques de Monte-Carlo. Un grand nombre de travaux ont été publiés sur le sujet (on trouve quelques références dans le chapitre 8 de [60]), mais l'objectif de ce mémoire n'est pas de tous les résumer ici. Il est cependant important de porter une grande attention aux questions de convergence qui restent encore sans réponse aujourd'hui. Les travaux de BERGER et DOGGETT [70, 71], repris en détails dans [60], constituent sans doute l'un des meilleurs exemples pour montrer la grande liberté dont on dispose pour transformer les formulations intégrales quand on cherche à améliorer la convergence des algorithmes de Monte-Carlo en suivant la philosophie des différentes techniques de réduction de la variance. Pour des raisons numériques subtiles<sup>11</sup>, ces tentatives se soldèrent par un échec. Mais les efforts de recherche correspondants restent aujourd'hui l'illustration pédagogique la plus significative de cette méthodologie. Les travaux de J.E. HOOGENBOOM [67], bien que très académiques eurent plus de succès et certains de leurs aspects sont illustrés ci-après en étant appliqués au contexte de la concentration solaire. Le lecteur devra toutefois rester conscient que la question d'optimiser les algorithmes de diffusion multiple reste complètement ouverte dès l'instant où des installations réalistes sont concernées.

Considérons encore une fois l'exemple du récepteur solaire à lit fluidisé (cf. Sec. 2.1.4) avec des particules qui, cette fois, sont à la fois absorbantes et très diffusantes (cf. Fig 2.5). On simplifie le problème en choisissant uniformes les coefficients d'absorption  $k_{a,\nu}$ , de diffusion  $k_{s,\nu}$  et la fonction

---

11. L'étude des phénomènes radiatifs de réflexion/absorption/transmission par des couches très diffusantes (matériaux turbides) est un problème très difficile que beaucoup de scientifiques ont essayé de résoudre. On trouve dans [70, 71] une démarche mathématique qui permet en théorie de régler les difficultés de convergence des algorithmes de Monte-Carlo sur ce type de problème. En pratique, la mise en oeuvre informatique de cette démarche consiste à calculer les poids statistiques comme des sommes de grandeurs ayant de grandes valeurs absolues (devant le poids à calculer) et des signes alternés. On rencontre un problème numérique de précision lors du calcul de chacun de ces poids : les poids sont sensés être proches les uns des autres, donc la variance attendu est faible, mais chaque poids est mal calculé ce qui rend l'estimation inexploitable. Ainsi, BERGER et DOGGETT ont développé en 1955 une méthode formelle très aboutie pour réduire la variance des algorithmes de Monte-Carlo qui simulent la diffusion du rayonnement dans des couches de matériaux turbides, mais à cause du manque de précision numérique, cette méthode ne fonctionne pas en pratique lorsqu'on l'implémente sur un ordinateur.

de phase  $p_{s,\nu}(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}_{inc})$  (c'est à dire la distribution de la direction de diffusion  $\boldsymbol{\omega}$  connaissant la direction d'incidence  $\boldsymbol{\omega}_{inc}$ ). Un exemple de diffusion multiple non uniforme est présenté au § 2.3 et au § 3.2.3. On souhaite maintenant calculer le flux radiatif qui atteint la surface inférieure du récepteur. On peut facilement modifier l'algorithme correspondant à l'Eq 2.13 pour calculer cette nouvelle grandeur en prenant en compte la diffusion multiple (voir illustration Fig 2.5) :

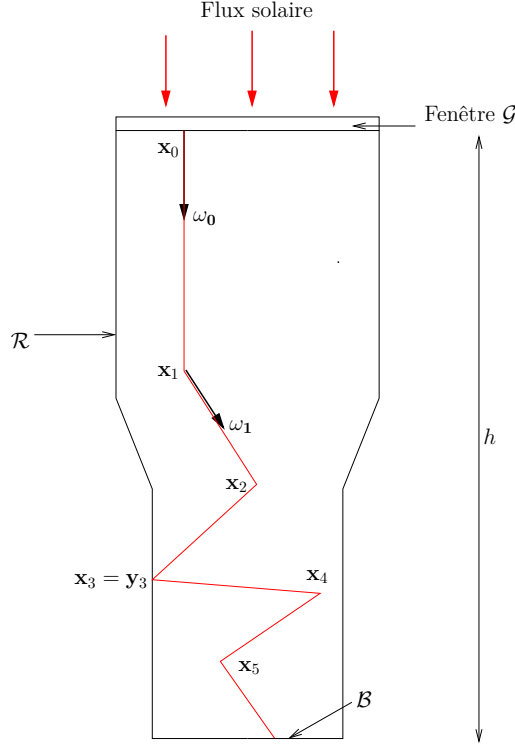


FIGURE 2.5 – Exemple d'un chemin optique avec diffusion multiple dans le récepteur. Les coefficients  $k_{s,\nu}$  et  $k_{a,\nu}$  sont constants. Le point  $\mathbf{x}_j$  est déterminé par  $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j-1} + \frac{\kappa_{j-1}}{k_{s,\nu}} \boldsymbol{\omega}_{j-1}$  où  $\kappa_{j-1}$  est l'épaisseur optique de diffusion générée aléatoirement par l'algorithme. Si  $\mathbf{x}_j$  est localisé hors du récepteur, alors  $\mathbf{x}_j$  est égal à  $\mathbf{y}_j$ , qui est le point d'intersection du chemin optique avec la surface du récepteur.

1. Tirage uniforme de la fréquence  $\nu$  dans l'intervalle  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$  ;
2. Tirage uniforme de la position d'entrée  $\mathbf{x}_0$  sur  $\mathcal{G}$  ;
3. Initialisation de  $j$  à 0 et affectation de  $\boldsymbol{\omega}_0$  à la direction du flux incident ;
4. Tirage de l'épaisseur optique  $\kappa_j$  sur  $]0, +\infty[$  selon la loi de Beer

$$p_{Beer}(\kappa) = \exp(-\kappa) \quad (2.35)$$

5. Calcul de la position d'intersection  $\mathbf{y}_{j+1}$  entre la demi-droite partant du point  $\mathbf{x}_j$  dans la direction  $\boldsymbol{\omega}_j$  et la surface totale du récepteur  $\mathcal{G} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{B}$ .
6. *Diffusion* - si  $\kappa_j < k_{s,\nu} \|\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|$ , calcul de la position de diffusion  $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \frac{\kappa_j}{k_{s,\nu}} \boldsymbol{\omega}_j$  et tirage d'une direction de diffusion  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$  selon la fonction de phase  $p_{s,\nu}(\boldsymbol{\omega}_{j+1}|\boldsymbol{\omega}_j)$ . On incrémente  $j$  et l'algorithme remonte à l'étape 4.
7. *Intersection* - Si  $\kappa_j > k_{s,\nu} \|\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|$ , le photon intersecte la surface au point  $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{y}_{j+1}$ .
8. *Réflexion* - Si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}$ , tirage d'une direction de réflexion selon la loi de Lambert (réflexion diffuse). On incrémente  $j$  et l'algorithme remonte à l'étape 4.

9. *Sortie* - Si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{G}$  ou si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{B}$ , calcul du poids  $w$ .  $w = 0$  si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{G}$  (sortie par la fenêtre), ou  $w = \hat{w}_{j+1} = \varphi_\nu \mathcal{S}_{\mathcal{G}}(\nu_{max} - \nu_{min}) \exp(-k_{a,\nu} d_j)$  (où  $d_j$  est la longueur totale du chemin optique) si  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{B}$ .

En conséquence, la formulation intégrale associée à cet algorithme contient des séquences<sup>12</sup> imbriquées de la forme suivante :

$$\dots \int_0^\infty p_{\kappa_j}(\kappa_j) d\kappa_j \left\{ \begin{array}{l} H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{B}) \hat{w}_{j+1} \\ + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{R}}(\boldsymbol{\omega}_{j+1}) d\boldsymbol{\omega}_{j+1} A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{R}}(\dots, \kappa_j, \boldsymbol{\omega}_{j+1}) \\ + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) \int_{4\pi} p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\omega}_{j+1}) d\boldsymbol{\omega}_{j+1} A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \boldsymbol{\omega}_{j+1}) \end{array} \right\} \quad (2.36)$$

avec  $p_{\kappa_j}(\kappa_j) = \exp(-\kappa_j)$  et  $p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\boldsymbol{\omega}_{j+1}) = p_{s,\nu}(\boldsymbol{\omega}_{j+1}|\boldsymbol{\omega}_j)$ , et où  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \boldsymbol{\omega}_{j+1})$  représente formellement toutes les intégrales successives suivantes.  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}$  est donc la contribution au résultat final de tous les chemins optiques ayant le même historique de départ jusqu'à la position de diffusion dans le volume  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}$  suivie d'une direction de diffusion  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$  donnée. Seule la suite du chemin optique est différente<sup>13</sup>.

L'équation 2.36 permet de prendre en compte les trois cas possibles du test d'intersection. La position  $\mathbf{x}_{j+1}$  peut être :

- une sortie par la vitre  $\mathcal{G}$  (dans ce cas, le poids est nul) ou par le bas  $\mathcal{B}$  ;
- une réflexion sur les parois  $\mathcal{R}$  ;
- une diffusion par les particules du volume  $\mathcal{V}$ .

Si on rencontre des problèmes de convergence, on pourra essayer par exemple d'optimiser la loi de tirage de  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$  pour obtenir une variance plus faible sur l'estimation du flux radiatif qui arrive en bas du récepteur. Nous allons, dans les prochains paragraphes, tenter d'expliquer qu'une démarche rigoureuse inspirée du concept zéro-variance est indispensable pour choisir une *pdf* optimisée du tirage des directions de diffusion  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$ . En effet, la seule intuition lors du choix de la loi de tirage des directions risque de conduire, en pratique, à une augmentation de la variance des algorithmes de diffusion au lieu de la réduction attendue. En fait, il est très difficile de comprendre physiquement le passage entre le phénomène mésoscopique de diffusion (d'un photon lors de son interaction avec une particule) et le phénomène macroscopique de transmission radiative au travers d'une couche (résultant des multiples diffusions en son sein).

Dans un premier temps, nous allons tout de même faire l'exercice de choisir une loi de tirage en nous appuyant sur des images physiques simples, sans utiliser le concept de *pdf* idéale (Eqs. 2.16, 2.19, 2.24, 2.25, ...). Nous montrerons ainsi que cette démarche conduit souvent à augmenter la variance, ce qui nous permettra, par la suite, de mieux comprendre combien les conclusions de la démarche rigoureuse dérivée de l'approche zéro-variance sont différentes et peu intuitives au premier abord.

Les difficultés de convergence viennent du fait que le volume du récepteur est très diffusant.

12. Les formulations complètes sont détaillées au 3.2.3 et au 3.2.4 sur des exemples applicatifs.

13. De la même manière,  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{R}}$  est la contribution au résultat final de tous les chemins optiques ayant le même historique de départ jusqu'à la position de réflexion sur la paroi  $\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}$  suivie d'une direction réfléchie  $\boldsymbol{\omega}_{j+1}$ . Écrire les formulations intégrales, de cette manière, à l'aide de relations de récurrences est inspiré du formalisme de Fredholm mentionné plus haut.

La plupart des chemins optiques simulés n'atteignent jamais le fond du récepteur : après quelques événements de diffusion, les photons ont une grande probabilité de ressortir par la vitre. Seules les rares trajectoires qui pénètrent en profondeur dans le volume ont une chance d'atteindre la paroi inférieure et ainsi de contribuer à l'estimation de la grandeur. Comme beaucoup de réalisations du poids statistique ne contribuent pas au résultat final, on observe que la variance associée à l'estimation du flux radiatif, qui traverse le récepteur, est très élevée pour de fortes épaisseurs optiques de diffusion (quand  $k_{s,\nu}h \gg 1$  avec  $h$  la hauteur totale du récepteur). La première idée pour réduire la variance avec la technique d'échantillonnage préférentiel serait donc de favoriser les directions de diffusion vers le bas, en ajustant la loi de tirage des directions  $\omega_{j+1}$  de manière astucieuse. Cependant, ceci n'est valable que pour les faibles albédos de diffusion simple  $\frac{k_{s,\nu}}{k_{a,\nu}+k_{s,\nu}}$  (c'est à dire pour de faibles valeurs relatives du coefficient de diffusion  $k_{s,\nu}$  par rapport au coefficient d'absorption  $k_{a,\nu}$ ). Pour des albédos de diffusion simple plus élevés, on constate en pratique que favoriser les directions vers le bas conduit systématiquement à l'augmentation de la variance. Ainsi, l'image physique sous-jacente du problème global est au moins partiellement erronée.

En appliquant la méthodologie de variance nulle pour analyser cette contradiction, on commence par définir rigoureusement la *pdf* optimisée idéale selon :

$$p_{\Omega_{j+1},opt}^{\mathcal{V},I}(\omega_{j+1}) = \frac{p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\omega_{j+1})A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega_{j+1})}{\int_{4\pi} p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\omega'_{j+1})A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega'_{j+1})d\omega'_{j+1}} \quad (2.37)$$

On utilise ensuite des modèles approximatifs pour en dégager les tendances principales. On se pose en particulier la question suivante : cette *pdf* idéale  $p_{\Omega_{j+1},opt}^{\mathcal{V},I}$  favorise-t-elle ou non le tirage des directions vers le bas ? Le modèle approximé le plus simple de transferts radiatifs dans les milieux très diffusants est basé sur l'approximation de diffusion (Chap.9 de [73]). Selon ce modèle, la distribution angulaire des directions des photons en tout point du milieu est quasiment isotrope et tous les champs de grandeurs radiatives peuvent être évalués directement en fonction de la distribution spatiale de la densité de photons (il n'est pas nécessaire de distinguer les photons selon leur direction de propagation). Tant que notre problème peut être modélisé par l'approximation de diffusion, alors  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega_{j+1})$  ne dépend pas de  $\omega_{j+1}$  : les photons se dirigeant vers le bas ne contribuent pas plus que les autres au flux qui traverse la face inférieure du récepteur. On peut donc approximer la *pdf* idéale par l'expression suivante<sup>14</sup> :

$$p_{\Omega_{j+1},opt}^{\mathcal{V},I}(\omega_{j+1}) \approx \frac{p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\omega_{j+1})A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega_{j+1})}{A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega_{j+1}) \int_{4\pi} p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\omega'_{j+1})d\omega'_{j+1}} = p_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\omega_{j+1}) = p_{s,\nu}(\omega_{j+1}|\omega_j) \quad (2.38)$$

Ainsi, l'utilisation de l'approximation de diffusion nous indique (dans les zones où elle est valable) que le tirage des directions selon la fonction de phase (comme dans tous les algorithmes classiques) correspond en fait au tirage selon la *pdf* idéale. Ce qui apporte une explication simple au fait que toutes les tentatives de modifier les *pdfs* pour favoriser vers le bas les directions de diffusion entraînent la dégradation de la convergence. De telles tentatives sont donc valables uniquement aux

14. L'approximation de diffusion permet de considérer que la luminance est isotrope.  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}(\dots, \kappa_j, \omega_{j+1})$  est donc indépendant de  $\omega_{j+1}$  partout où on peut appliquer cette approximation. Comme  $A_{\Omega_{j+1}}^{\mathcal{V}}$  ne dépend pas de la variable d'intégration, on peut sortir ce terme de l'intégrale dans l'Eq. 2.37 pour écrire l'Eq. 2.38.

endroits où l'approximation de diffusion ne s'applique pas, c'est à dire près des parois (en ce qui nous concerne, au voisinage de la vitre et au fond du récepteur). Une optimisation idéale pour notre problème serait donc : de biaiser vers le bas le tirage angulaire des directions de propagation pour les premiers évènements de diffusion, juste après l'entrée des photons au travers de la vitre. On utilise ensuite la fonction de phase sans aucun biais pour tous les autres évènements de diffusion, jusqu'à ce que le paquet de photons considéré atteigne le voisinage immédiat de la paroi inférieure. A ce moment, on utilise à nouveau une loi de tirage biaisée qui favorise les directions vers le bas.

Malheureusement, une telle procédure est très difficile à mettre en oeuvre puisque chaque évènement de diffusion doit être traité séparément en fonction de la position du moment, sur la base d'une évaluation rapide de  $A_{\Omega_{j+1}}$  et de sa dépendance à  $\omega_{j+1}$  (cf. Eqs. 2.28 à 2.31). On peut y parvenir facilement dans le cas de la diffusion purement 1D. Mais en ce qui concerne les configurations réalistes (comme celles du 3.2.3 et du 3.2.4) la question reste totalement ouverte. Quand on s'intéresse aux milieux très diffusants avec la méthode de Monte-Carlo, il est tellement fréquent de rencontrer des difficultés de convergence (et dans tant de domaines applicatifs), que toutes les idées synthétisées plus haut, initialement présentées dans [67] doivent être considérées avec grand intérêt si on souhaite réduire la variance des algorithmes en question. Autrement dit, des techniques de réductions de la variance très abouties ont été développées et validées sur des configurations simples mais dès qu'ils s'agit de configurations réalistes, qui plus est dans un contexte applicatif différent, alors il faut considérer ces techniques comme des pistes de réflexion ou comme des méthodes formelles à adapter et/ou à combiner au cas par cas pour chaque nouveau problème scientifique.

## 2.3 Estimations simultanées des sensibilités

Les bénéfices des efforts méthodologiques effectués à partir d'approches intégrales vont bien au delà des diverses techniques permettant de contourner les difficultés de convergence : ils ont un fort impact lors des étapes d'analyse des résultats de simulations (interprétation physique). Parmi de telles analyses, celle à laquelle est consacrée la plus grande attention théorique est l'analyse de sensibilité. Nous savons depuis quelques années [10, 11] que quand un algorithme de Monte-Carlo est utilisé pour estimer une grandeur physique  $A$ , il est possible de façon générale et systématique de développer rapidement cet algorithme pour estimer simultanément la grandeur  $A$  et toutes les sensibilités de  $A$  aux paramètres du problème. Ainsi, en pratique, quand un algorithme de Monte-Carlo calculant  $A$  est disponible, peu de lignes de code supplémentaires sont nécessaires pour estimer non seulement la grandeur  $A$  mais aussi toutes les dérivées partielles de  $A$  par rapport à tous les paramètres d'intérêts. Nous noterons  $\partial_{\pi}A$  (notation allégée pour  $\frac{\partial A}{\partial \pi}$ ) la sensibilité de  $A$  au paramètre  $\pi$ . Une sensibilité peut être d'intérêt :

- soit en terme d'analyse physique (pour étudier l'influence du paramètre  $\pi$  sur la valeur de  $A$ );
- soit en termes d'optimisation (quelle est la valeur optimale de  $\pi$  quand on souhaite obtenir une valeur cible de  $A$ ).

L'avantage essentiel du calcul de sensibilité par Monte-Carlo est que, non seulement, le code initial de l'algorithme est très peu modifié mais surtout, que le temps de calcul supplémentaire requis pour estimer la sensibilité  $\partial_{\pi}A$  en plus de la grandeur  $A$  est très faible parce qu'on utilise le même

jeu de tirages aléatoires.

Cependant, deux difficultés majeures et distinctes peuvent être rencontrées lors de la mise en oeuvre d'un calcul de sensibilité. Premièrement, même si les modifications de l'algorithme sont faciles à implémenter, obtenir l'expression intégrale de  $\partial_\pi A$  peut parfois être un calvaire (cf. 4.2). Deuxièmement, si les lois de tirage ont été soigneusement choisies pour estimer  $A$  avec une bonne précision, rien n'assure que l'estimation de  $\partial_\pi A$  avec le même nombre de réalisations soit suffisamment fiable. En effet, les algorithmes à variance nulle pour estimer  $A$  et  $\partial_\pi A$  en une seule réalisation n'ont a priori rien en commun.

En pratique, avant tout développement formel ou algorithmique, il faut examiner les trois questions suivantes. Chaque réponse positive à ces questions ajoute un niveau de complexité à la fois en termes de dérivation formelle et en terme de convergence statistique.

1. **Est-ce que les lois de tirages (*pdfs* de l'intégrale) dépendent du paramètre  $\pi$  ?**
2. **Est-ce que le domaine d'intégration dépend de  $\pi$  ?**
3. **Est-ce que  $\pi$  apparaît à l'intérieur des tests conditionnels de l'algorithme (i.e. dans les fonctions Heaviside de la formulation intégrale) ?**

**Cas a :** Considérons tout d'abord le cas le plus simple où toutes les réponses sont négatives. Si  $A$  s'exprime selon l'Eq. 2.3 :

$$A = E(W) = \int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \pi) \quad (2.39)$$

où  $p_X, p_Y, \mathcal{D}_X$  et  $\mathcal{D}_Y$  ne dépendent pas de  $\pi$ , et où  $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \pi)$  est une fonction continue de  $\pi$  (pas de fonction Heaviside dépendant de  $\pi$ ), alors on peut exprimer la sensibilité  $\partial_\pi A$  comme suit :

$$\partial_\pi A = E(W_\pi) = \int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \int_{\mathcal{D}_Y(\mathbf{x})} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} \hat{w}_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \pi) \quad (2.40)$$

avec  $\hat{w}_\pi = \partial_\pi \hat{w}$ . La seule différence entre les formulations intégrales des Eqs. 2.39 et 2.40 est la fonction poids :  $\hat{w}$  est remplacé par sa dérivée partielle par rapport à  $\pi$ . Ceci signifie simplement que  $A$  et  $\partial_\pi A$  peuvent effectivement être évaluées par le même algorithme<sup>15</sup>. Nous verrons que dans tous les cas (quelles que soient les réponses aux trois questions précédentes), la même structure algorithmique (cf. note de bas de page n°15) peut être conservée en changeant uniquement la manière de définir l'expression de  $w_{\pi,i}$ . Mais avant d'aller plus loin, il faut souligner qu'une première difficulté de convergence peut se produire, même si les trois réponses aux questions ci-dessus sont négatives. Comme suggéré dans [10], reprenons l'exemple où la fonction poids  $\hat{w}$  est de la forme suivante :  $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \pi) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \pi g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Dans le cas particulier où  $\pi = 0$ , ceci conduit à  $\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  et  $\hat{w}_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; 0) = g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Dans un tel cas, il est bien évident que les fonctions poids correspondant à  $A$  et à  $\partial_\pi A$  peuvent être très différentes (on n'impose aucune contrainte ni à  $f$  ni à  $g$  si ce n'est qu'elles sont toutes les deux indépendantes de  $\pi$ ) et la variance sur l'estimation de la sensibilité

15. Pour chaque réalisation  $i \in \{1, \dots, N\}$  de l'algorithme de Monte-Carlo, on tire  $\mathbf{x}_i$  selon  $p_X$ , on tire  $\mathbf{y}_i$  selon  $p_Y$  sachant que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ , et on calcule simultanément  $w_i = \hat{w}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  puis  $w_{\pi,i} = \partial_\pi \hat{w}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ . Enfin on estime les valeurs de  $A$  et de  $\partial_\pi A$  en calculant les moyennes respectives  $\tilde{a}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_i$  et  $\tilde{a}_{\pi,N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w_{\pi,i}$ . On calcule aussi les écarts-types associés à ces deux estimations (voir Eq. 2.2).

$\partial_\pi A$  peut donc être très élevée si les lois de tirages sont optimisées pour évaluer  $A$  avec précision. Cependant, de tels cas extrêmes n'ont jamais été identifiés en pratique : lorsque ni les *pdfs*, ni le domaine d'intégration, ni les tests algorithmiques ne dépendent du paramètre considéré, la mise en oeuvre du calcul de sensibilité reste facile et efficace.

**Cas b :** Considérons maintenant que la réponse à la première des trois questions est positive : les *pdfs*  $p_X$  et  $p_Y$  dépendent maintenant de  $\pi$ . L'équation 2.39 de la grandeur  $A$  conduit à nouveau à l'équation 2.40 avec cette fois un poids  $\hat{w}_\pi$  qui s'exprime différemment :

$$\hat{w}_\pi = \partial_\pi \hat{w} + \hat{w} \left[ \frac{\partial_\pi p_X}{p_X} + \frac{\partial_\pi p_Y}{p_Y} \right] \quad (2.41)$$

Les conséquences algorithmiques sont identiques au cas **a** (une ligne de code supplémentaire suffit pour calculer le poids de la sensibilité  $w_{\pi,i} = \hat{w}_\pi(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \pi)$ ) mais la question de la convergence des sensibilités se complexifie dès que le second terme  $\hat{w} \left[ \frac{\partial_\pi p_X}{p_X} + \frac{\partial_\pi p_Y}{p_Y} \right]$  de l'Eq. 2.41 devient significatif devant le premier terme  $\partial_\pi \hat{w}$ . La principale raison est que les dérivées partielles des *pdfs* changent de signe sur leurs domaines de définition<sup>16</sup>. Comme mentionné au 2.2, les changements de signe de la fonction poids peuvent être d'importantes sources de variance (on peut difficilement développer l'algorithme idéal à variance nulle correspondant) et on peut montrer dans le cas présent que de telles difficultés de convergence sont rencontrées en pratique quand les variations de  $\hat{w}$  et de  $\frac{\partial_\pi p_X}{p_X}$  en fonction de  $\mathbf{x}$  sont faiblement corrélées. Si  $\frac{\partial_\pi p_X}{p_X}(x)$  et  $\hat{w}(x)$  étaient totalement décorrélés, on pourrait écrire  $E(W \frac{\partial_\pi p_X}{p_X}) = E(W) \cdot E(\frac{\partial_\pi p_X}{p_X}) = 0$ . S'ils sont très peu corrélés,  $E(W \frac{\partial_\pi p_X}{p_X})$  aura alors une valeur absolue très faible mais la dispersion des réalisations de  $\hat{w}_i \frac{\partial_\pi p_X(x_i)}{p_X(x_i)}$  pourra être très grande et ainsi contribuer à un écart-type très élevé sur l'estimation de  $\partial_\pi A$ , d'où le problème de convergence. Nous rediscuterons de ce point au 4.4.

**Cas c :** Les sensibilités de type **a** et **b** sont appelées sensibilités paramétriques par opposition aux cas **c** et **d**. En effet, une réponse positive à la seconde question conduit à une sensibilité à la déformation du domaine tel que défini dans [11]. Nous considérons toujours que  $p_X$  et  $p_Y$  dépendent de  $\pi$  et pour simplifier, nous choisirons que  $\mathcal{D}_X$  et  $\mathcal{D}_Y$  sont des segments finis de domaines à une seule dimension (Pour les cas **c** et **d**,  $x$  et  $y$  ne sont plus des variables vectorielles, ce sont des scalaires réels). On peut donc noter  $\mathcal{D}_X = [a_1(\pi), b_1(\pi)]$  et  $\mathcal{D}_Y = [a_2(x; \pi), b_2(x; \pi)]$ . M. ROGER et al. ont montré dans [11] que l'on peut introduire un champ de vitesse de déformation du domaine  $\mathbf{V}_\pi(x, y; \pi)$  afin de conserver la forme de l'équation 2.40 pour l'expression intégrale de la sensibilité  $\partial_\pi A$ . La fonction poids  $\hat{w}_\pi$  s'écrit alors de la manière suivante :

$$\hat{w}_\pi = \partial_\pi \hat{w} + \hat{w} \left[ \frac{\partial_\pi p_X}{p_X} + \frac{\partial_\pi p_Y}{p_Y} \right] + \frac{\partial_x(p_X p_Y \hat{w} V_{\pi,1}) + \partial_y(p_X p_Y \hat{w} V_{\pi,2})}{p_X p_Y} \quad (2.42)$$

avec  $V_{\pi,1}$  et  $V_{\pi,2}$  les composantes respectives selon  $x$  et selon  $y$  du champ de vitesse  $\mathbf{V}_\pi$ . On dispose d'un grand nombre de degrés de liberté concernant le choix du champ de vitesse  $\mathbf{V}_\pi$ , en particulier si des questions de convergence sont mises en jeu. Cependant cette liberté sur le choix de  $\mathbf{V}_\pi$  a été

<sup>16</sup>. En effet, les *pdfs* étant normalisées :  $\int_{\mathcal{D}_X} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1$ , cette contrainte impose que  $\int_{\mathcal{D}_X} \partial_\pi p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ . On en déduit que  $\partial_\pi p_X$  prend des valeurs positives et négatives qui se compensent sur  $\mathcal{D}_X$  pour que son intégrale soit nulle. Cette propriété est réutilisée au 4.4 pour la mise en place d'une variable de contrôle.

très peu explorée à ce jour. Aussi nous suggérons d'utiliser systématiquement un champ particulier (celui proposé par M. ROGER dans [4]) défini de la manière suivante<sup>17</sup>.

$$V_{\pi,1}(x; \pi) = \partial_{\pi} a_1(\pi) + \frac{\partial_{\pi} b_1(\pi) - \partial_{\pi} a_1(\pi)}{b_1(\pi) - a_1(\pi)}(x - a_1(\pi)) \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} V_{\pi,2}(x, y; \pi) &= [\partial_{\pi} a_2(x; \pi) + V_{\pi,1}(x; \pi) \partial_x a_2(x; \pi)] \\ &+ \frac{[\partial_{\pi} b_2(x; \pi) + V_{\pi,1}(x; \pi) \partial_x b_2(x; \pi)] - [\partial_{\pi} a_2(x; \pi) + V_{\pi,1}(x; \pi) \partial_x a_2(x; \pi)]}{b_2(x; \pi) - a_2(x; \pi)} \\ &\times (y - a_2(x; \pi)) \end{aligned} \quad (2.44)$$

l'équation 2.41 devient alors

$$\hat{w}_{\pi} = \partial_{\pi} \hat{w} + \hat{w} \left[ \frac{\partial_{\pi} p_X}{p_X} + \frac{\partial_{\pi} p_Y}{p_Y} + \left( \frac{\partial_x p_X}{p_X} + \frac{\partial_x p_Y}{p_Y} \right) V_{\pi,1} + \frac{\partial_y p_Y}{p_Y} V_{\pi,2} \right] \quad (2.45)$$

Il faut noter que les dérivées partielles de  $p_X$  et de  $p_Y$  par rapport à  $x$  et à  $y$  n'engendrent pas forcément de problème de convergence. En effet, ces dérivées  $\partial_x p_X$ ,  $\partial_x p_Y$ ,  $\partial_y p_Y$  présentes dans l'Eq. 2.45 ne sont, en général, soumises à aucune contrainte intégrale. Contrairement à ce qu'on observe dans le cas **b** pour les dérivées partielles par rapport à  $\pi$  qui vérifient obligatoirement :  $\int_{\mathcal{D}_X} \partial_{\pi} p_X(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  et  $\int_{\mathcal{D}_Y(x)} \partial_{\pi} p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) d\mathbf{y} = 0$  (cf. note de bas de page n°16).

Cependant, on peut facilement imaginer les difficultés formelles engendrées par l'extension des Eqs. 2.43, 2.44, 2.45 à des domaines d'intégrations de plus grande dimension, voire de dimension infinie comme dans les cas de diffusion/réflexion multiple.

D'un point de vue formel, le tirage de la  $i^{\text{ème}}$  variable  $\mathbf{x}_i$  de l'intégrale dépend de toutes les valeurs  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{i-1}$  tirées auparavant. Ainsi, la  $i^{\text{ème}}$  composante  $V_{\pi,i}$  du champ de vitesse de déformation qui dépend formellement de toutes les composantes précédentes  $\{V_{\pi,k}\}_{k \in \langle 1, i-1 \rangle}$ . Cependant, il est très rare en pratique que tout dépende de tout. Certaines variables aléatoires sont indépendantes des variables antérieures et certaines composantes de  $\mathbf{V}_{\pi}$  sont nulles.

**Cas d :** Nous considérons maintenant le cas où la réponse à la deuxième question est négative mais la troisième est positive, c'est-à-dire le cas où les fonctions Heaviside dépendent de  $\pi$ . C'est aussi une sensibilité à la déformation du domaine. Les fonctions Heaviside ne sont pas dérivables lorsqu'elles passent de 0 à 1. Comme de telles fonctions dépendant de  $\pi$  se trouvent dans l'expression du poids  $\hat{w}$ , on ne peut plus dériver ce dernier pour utiliser  $\partial_{\pi} \hat{w}$  comme dans les cas précédents. Nous allons voir comment contourner cette difficulté afin de se ramener à une sensibilité de type **c**. Nous ne craignons a priori aucune difficulté spécifique de convergence pour ce type de sensibilité mais l'expression formelle du poids  $\hat{w}_{\pi}$  conforme à la formulation intégrale d'origine sera d'autant plus difficile à obtenir que les tests dépendant de  $\pi$  seront nombreux.

Reprenons l'exemple utilisé précédemment lors du cas **c** et introduisons une fonction  $y^*$  de  $x$  et de  $\pi$  à valeurs dans  $\mathcal{D}_Y(x)$ . Supposons de plus que l'expression du poids fait maintenant intervenir

<sup>17</sup>. Pour plus de détails sur l'origine de ces formules, nous recommandons vivement la lecture des pages 58 à 65 de [4] (disponible en ligne - <http://perso.enstimac.fr/~delatorr/These/Biblio/These-MaximeRoger.pdf>)



le test suivant ( $\hat{w}$  sera différent si la valeur  $y$  du tirage de  $Y$  est inférieure ou supérieure à la valeur  $y^*(x; \pi)$ ) :

- si  $y < y^*(x; \pi)$ , alors  $\hat{w} = \hat{w}^{inf}$  ;
- sinon  $\hat{w} = \hat{w}^{sup}$  quand  $y \geq y^*(x; \pi)$ .

On peut utiliser les fonctions Heaviside pour écrire la fonction poids :

$$\hat{w}(x, y; \pi) = H(y < y^*(x; \pi)) \cdot \hat{w}^{inf}(x, y; \pi) + H(y \geq y^*(x; \pi)) \cdot \hat{w}^{sup}(x, y; \pi) \quad (2.46)$$

L'approche systématique que nous proposons est de transformer provisoirement la formulation intégrale de  $A$  pour la rendre compatible avec le cas **c**. On pourra alors en déduire une expression intégrale de  $\partial_\pi A$  et écrire la fonction poids  $\hat{w}_\pi$  correspondante. Enfin, une seconde transformation intégrale permettra de revenir à la formulation initiale afin que l'expression de  $\partial_\pi A$  corresponde à celle de l'algorithme de départ.

Dans l'exemple considéré, on commence par décomposer l'intégrale sur  $\mathcal{D}_Y$  des fonctions Heaviside en une somme de deux intégrales<sup>18</sup>. L'équation 2.39 devient :

$$\begin{aligned} A &= E(W^{inf}) + E(W^{sup}) \\ &= \int_{a_1(\pi)}^{b_1(\pi)} p_X(x; \pi) dx \int_{a_2(x; \pi)}^{y^*(x; \pi)} p_Y(y|x; \pi) dy \hat{w}^{inf}(x, y; \pi) \\ &+ \int_{a_1(\pi)}^{b_1(\pi)} p_X(x; \pi) dx \int_{y^*(x; \pi)}^{b_2(x; \pi)} p_Y(y|x; \pi) dy \hat{w}^{sup}(x, y; \pi) \end{aligned} \quad (2.47)$$

En utilisant la démarche décrite au cas **c** pour chacune de ces deux intégrales, on peut alors écrire la sensibilité comme la somme de deux sensibilités.

$$\begin{aligned} \partial_\pi A &= E(W_\pi^{inf}) + E(W_\pi^{sup}) \\ &= \int_{a_1(\pi)}^{b_1(\pi)} p_X(x; \pi) dx \int_{a_2(x; \pi)}^{y^*(x; \pi)} p_Y(y|x; \pi) dy \hat{w}_\pi^{inf}(x, y; \pi) \\ &+ \int_{a_1(\pi)}^{b_1(\pi)} p_X(x; \pi) dx \int_{y^*(x; \pi)}^{b_2(x; \pi)} p_Y(y|x; \pi) dy \hat{w}_\pi^{sup}(x, y; \pi) \end{aligned} \quad (2.48)$$

$$\text{avec} \quad \hat{w}_\pi^{inf} = \partial_\pi \hat{w}^{inf} + \hat{w}^{inf} \left[ \frac{\partial_\pi p_X}{p_X} + \frac{\partial_\pi p_Y}{p_Y} + \left( \frac{\partial_x p_X}{p_X} + \frac{\partial_x p_Y}{p_Y} \right) V_{\pi,1} + \frac{\partial_y p_Y}{p_Y} V_{\pi,2}^{inf} \right] \quad (2.49)$$

$$\text{et} \quad \hat{w}_\pi^{sup} = \partial_\pi \hat{w}^{sup} + \hat{w}^{sup} \left[ \frac{\partial_\pi p_X}{p_X} + \frac{\partial_\pi p_Y}{p_Y} + \left( \frac{\partial_x p_X}{p_X} + \frac{\partial_x p_Y}{p_Y} \right) V_{\pi,1} + \frac{\partial_y p_Y}{p_Y} V_{\pi,2}^{sup} \right] \quad (2.50)$$

où  $V_{\pi,1}$  (première composante du champ de vitesse de déformation) est défini comme au cas **c** par l'Eq. 2.43 et où  $V_{\pi,2}^{inf}$  et  $V_{\pi,2}^{sup}$  sont respectivement définis par l'Eq. 2.44, en remplaçant  $b_2$  par  $y^*$  puis  $a_2$  par  $y^*$  :

$$\begin{aligned} V_{\pi,2}^{inf}(y) &= [\partial_\pi a_2 + V_{\pi,1} \partial_x a_2] \\ &+ \frac{[\partial_\pi y^* + V_{\pi,1} \partial_x y^*] - [\partial_\pi a_2 + V_{\pi,1} \partial_x a_2]}{y^* - a_2} (y - a_2) \end{aligned} \quad (2.51)$$

18. On introduit  $y^*$  dans la seconde intégrale et on utilise la relation de Chasles :  $\int_{a_2}^{b_2} dy = \int_{a_2}^{y^*} dy + \int_{y^*}^{b_2} dy$

$$\begin{aligned}
V_{\pi,2}^{sup}(y) &= [\partial_{\pi}y^* + V_{\pi,1}\partial_x y^*] \\
&+ \frac{[\partial_{\pi}b_2 + V_{\pi,1}\partial_x b_2] - [\partial_{\pi}y^* + V_{\pi,1}\partial_x y^*]}{b_2 - y^*} (y - y^*)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

On revient finalement à la formulation intégrale de départ (Eq. 2.3) en transformant l'équation 2.48 :

$$\partial_{\pi}A = E(W_{\pi}) = \int_{a_1(\pi)}^{b_1(\pi)} p_X(x; \pi) dx \int_{a_2(x;\pi)}^{b_2(x;\pi)} p_Y(y|x; \pi) dy \hat{w}_{\pi}(x, y; \pi) \tag{2.53}$$

$$\text{avec } \hat{w}_{\pi}(x, y; \pi) = H(y < y^*(x; \pi)) \cdot \hat{w}_{\pi}^{inf}(x, y; \pi) + H(y \geq y^*(x; \pi)) \cdot \hat{w}_{\pi}^{sup}(x, y; \pi) \tag{2.54}$$

Ainsi, on peut effectivement utiliser le même jeu de réalisations aléatoires pour estimer  $\partial_{\pi}A$  en même temps que  $A$ . Le choix algorithmique entre  $\hat{w}_{\pi}^{inf}$  et  $\hat{w}_{\pi}^{sup}$  (Eq. 2.46) devient simplement un choix entre  $\hat{w}_{\pi}^{inf}$  et  $\hat{w}_{\pi}^{sup}$  (Eq. 2.54).

**Exemple applicatif avec domaine d'intégration de dimension infinie :** Même si des exemples applicatifs réalistes de calculs de sensibilités sont présentés au 3.2, nous souhaitons détailler dès à présent un exemple de diffusion/réflexion multiple afin de mettre en évidence deux autres techniques supplémentaires.

- la première concerne la manipulation des expressions intégrales dont le domaine d'intégration est de dimension infinie ;
- la seconde porte sur l'utilisation éventuelle d'un changement de variable pour transformer une sensibilité à la déformation du domaine en une sensibilité paramétrique (où  $\pi$  n'apparaît plus ni dans les bornes du domaine d'intégration, ni dans aucun test algorithmique).

Revenons à l'exemple du récepteur solaire à lit fluidisé de la Sec. 2.2. On considère cette fois que la diffusion n'est plus uniforme dans tout le volume et on cherche à évaluer la sensibilité de la puissance radiative absorbée à un paramètre  $\pi$  caractérisant le champ de coefficient de diffusion (par exemple un paramètre intervenant dans le champ de densité volumique de particules). Ceci signifie que le coefficient de diffusion  $k_{s,\nu}$  dépend de la position, de la fréquence et du paramètre considéré. On peut donc écrire  $k_{s,\nu} \equiv k_{s,\nu}(\mathbf{x}; \pi)$ . L'équation 2.36 ne change pas mais le test pour choisir si la prochaine position de collision est une diffusion dans le volume (ou bien si le paquet de photons atteint une surface avant de pouvoir diffuser, cf. Fig. 2.5) devient <sup>19</sup> :

$$H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) = H\left(\kappa_j < \int_0^{\|\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|} k_{s,\nu}(\mathbf{x}_j + s\boldsymbol{\omega}_j; \pi) ds\right) \tag{2.55}$$

avec  $\mathbf{x}_{j+1}$  la prochaine position de collision (diffusion dans le volume ou intersection sur une paroi),  $\kappa_j$  l'épaisseur optique tirée aléatoirement dans l'algorithme (dont on déduit la  $(j+1)$ ème position de diffusion du chemin optique, et  $\mathbf{y}_{j+1}$  le point d'intersection sur la paroi pour un rayon partant du point  $\mathbf{x}_j$  dans la direction  $\boldsymbol{\omega}_j$ .

Puisque  $\pi$  apparaît dans ce test, l'Eq. 2.55 signifie effectivement que la sensibilité en question est une sensibilité à la déformation du domaine (cas **d**). On s'aperçoit cependant que tirer aléatoirement

19. Au lieu de  $H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) = H(\kappa_j < k_{s,\nu}\|\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|)$

une épaisseur optique de diffusion  $\kappa_j$  selon la loi d'extinction de Beer est exactement équivalent à tirer une distance  $\lambda_j$  pour le libre parcours de diffusion selon la loi suivante :

$$p_{\lambda_j}(\lambda_j; \pi) = k_{s,\nu}(\mathbf{x}_j + \lambda_j \boldsymbol{\omega}_j; \pi) \cdot \exp\left(-\int_0^{\lambda_j} k_{s,\nu}(\mathbf{x}_j + s \boldsymbol{\omega}_j; \pi) ds\right) \quad (2.56)$$

on réécrit le test en fonction du tirage du libre parcours de diffusion au lieu du tirage de l'épaisseur optique, et on obtient :

$$H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) = H(\lambda_j < \|\mathbf{y}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|) \quad (2.57)$$

Le changement de variable de  $\kappa_j$  en  $\lambda_j$  dans l'intégrale ne change pas l'algorithme (on calcule toujours rigoureusement la même grandeur) mais le paramètre n'apparaît plus dans le test et la sensibilité est désormais une sensibilité paramétrique de type **b**. Le poids  $\hat{w}_\pi$  peut donc être calculé directement en faisant attention au fait que les événements de réflexion/diffusion successifs (potentiellement une infinité d'événements) de l'algorithme sont formalisés dans le poids de la sensibilité par une somme de dérivées logarithmiques :

$$\hat{w}_{\pi,j+1} = \hat{w}_{j+1} \sum_{q=0}^j \frac{\partial_\pi p_{\lambda_q}}{p_{\lambda_q}} \quad (2.58)$$

Nous utiliserons ce genre d'expressions pour modéliser les phénomènes de diffusion/réflexion multiple dans les exemples applicatifs 3.2.3 et 3.2.4 où les formulations intégrales ont des domaines de dimension infinie. Ceci nous permettra d'illustrer le fait que la plupart des calculs de sensibilités consistent à dériver simplement le poids et/ou les *pdfs*, même dans des configurations non académiques. Ces techniques sont tout à fait accessibles aux non-spécialistes et nous discuterons de leur implémentation au chapitre suivant.

Cependant, nous souhaitons insister à nouveau sur un point important abordé plus haut. Si l'algorithme de Monte-Carlo est conçu pour estimer avec précision la grandeur d'origine, rien ne garantit qu'en utilisant le même jeu de tirages aléatoires, la sensibilité soit estimée avec une précision suffisante. Quand on rencontre des problèmes de convergence sur l'estimation des sensibilités, la seule piste de travail pour accélérer la convergence, tout en conservant l'algorithme d'origine, est d'utiliser une variable de contrôle. En effet, les autres techniques de réduction de variance listées au 2.1 entraînent la modification des lois de tirages. Ce dernier point signifie que :

- Soit, on garde l'idée initiale d'utiliser le même algorithme pour estimer simultanément la grandeur physique étudiée ainsi que ses sensibilités. Et dans ce cas, améliorer la convergence de l'algorithme sur la sensibilité implique le plus souvent une estimation moins précise de la grandeur principale.
- Soit, on décide d'utiliser plusieurs algorithmes : on conserve l'algorithme d'origine pour le calcul direct de la grandeur et on développe un autre algorithme spécialement pour estimer avec suffisamment de précision la sensibilité étudiée (ou même un algorithme spécifique pour chacune des sensibilités étudiées). Cela augmente évidemment les temps de calculs. Cependant si l'algorithme supplémentaire est conçu pour estimer de manière fiable une sensibilité avec peu de réalisations (disons autant que pour la grandeur principale) alors cette proposition

est beaucoup plus intéressante que d'effectuer cent fois plus de réalisations avec l'algorithme initial pour gagner un ordre de grandeur sur l'écart-type de la sensibilité.

Nous n'avons pas encore eu l'occasion d'explorer cette seconde possibilité pour des applications réalistes. Mais c'est un choix qui pourrait s'avérer judicieux dans de nombreux cas où connaître la valeur des sensibilités est vraiment essentiel. Ceci est particulièrement intéressant lorsque l'utilisation de deux calculs successifs de la grandeur par Monte-Carlo (avec une faible variation du paramètre) conduit à une estimation très incertaine (inexploitable) de la sensibilité par différence finie à cause de la nature statistique des algorithmes de Monte-Carlo (cf. Tab. 1 dans [11]).

## Chapitre 3

# Mise en oeuvre pratique d'algorithmes de Monte-Carlo dans l'environnement de programmation ED-Star

Nous expliquons dans ce chapitre comment les techniques présentées au chapitre 2 peuvent être mises en oeuvre de façon à satisfaire les besoins de simulation et d'analyse recensés au chapitre 1, c'est à dire ceux de l'ingénierie actuelle des systèmes solaires à concentration. Le principal argument défendu ici est que de nombreux outils logiciels et de nombreuses bibliothèques scientifiques sont aujourd'hui disponibles permettant au non-spécialiste de passer rapidement d'une formulation intégrale (choisie en pensant aux concepts d'optimisation et de calcul de sensibilité présentés au chapitre précédent) à la mise en oeuvre pratique de l'algorithme correspondant, sur une architecture quelconque (ordinateur personnel, cluster, ou ordinateur massivement parallèle). De ce point de vue, le fait que la présentation soit appuyée sur l'environnement de développement ED-Star [74] (issu du groupe de recherche Star-West animé par les laboratoires PROMES-LAPLACE-RAPSODEE [75]) est purement contextuel. Tout autre environnement de développement avec des objectifs comparables conduirait à la même démonstration : modéliser des scènes d'un haut niveau de complexité géométrique et mettre en oeuvre de façon autonome des algorithmes parallélisés impliquant un suivi de rayon efficace dans de telles scènes (c'est à dire incluant des tests d'intersection avec un grand nombre de primitives géométriques) est aujourd'hui accessible rapidement à tout ingénieur ou chercheur observant que les codes de simulation existants ne répondent pas encore à ses besoins précis d'analyse et désirant concevoir son propre code. L'idée soutenue n'est donc pas que des codes sont aujourd'hui disponibles qui répondent aux attentes, mais qu'il est facile de construire de tels codes, au cas par cas, en fonction des spécificités du problème étudié, lorsque les grands codes du domaine ne couvrent pas encore le besoin.

### 3.1 Le projet ED-Star : un outil généraliste et facile d'accès pour développer tous types d'algorithmes de Monte-Carlo

Cependant, la place de ED-Star dans le présent travail de recherche va au delà de la simple illustration des potentialités actuelles de mise en oeuvre informatique. Cet environnement a été

developpé collectivement en parallèle des reflexions théoriques réunies dans ce mémoire. ED-Star est donc aussi, au moins partiellement, le reflet de notre analyse de la place actuelle du transfert radiatif dans l'ingénierie des systèmes solaires à concentration :

- en ce qui concerne la méthode de Monte-Carlo, l'environnement a été conçu en accord étroit avec les choix de présentation du chapitre précédent (essentiellement la mise en avant de la formulation intégrale et la systématisation des calculs de sensibilité) ;
- la gestion des réflexions multiples en géométrie complexe a été abordée en priorité lors du développement de façon à assurer une couverture des attentes listées au chapitre 1 ;
- et enfin, bien que les objectifs de ED-Star soient plus larges, les exemples de simulation les plus aboutis restent pour l'essentiel des exemples solaires, qui donnent actuellement lieu à des travaux de thèse aux laboratoires RAPSODEE et LAPLACE. Ces travaux ont eu de très larges interfaces avec la présente thèse au cours des deux dernières années.

Nous détaillerons quatre exemples de code dans la seconde partie de ce chapitre, après avoir introduit brièvement les bibliothèques "mcm" et "mcm3D" qui sont les briques à partir desquelles ces quatre codes ont été mis en oeuvre<sup>1</sup>.

### 3.1.1 La bibliothèque objet mcm

La bibliothèque d'objets C++ "mcm" est une librairie informatique qui permet de développer des algorithmes de Monte-Carlo, avec estimations de sensibilités pour des machines de calcul parallèle. Cette bibliothèque se concentre sur les aspects communs à l'ensemble des algorithmes de Monte-Carlo pour l'étude des phénomènes de transport linéaires. On peut donc utiliser les objets de "mcm" bien au delà du transfert radiatif. Ces objets C++ rassemblent tous les outils techniques liés à la parallélisation d'un calcul de Monte-Carlo (procédures de génération aléatoires uniformes sur l'intervalle unité, contrôle de l'indépendance des générations aléatoires effectuées par des processus exécutés parallèlement, allocation mémoire, entrée/sortie, procédures d'interruption et de relancement) derrière une interface qui reste indépendante de toute application spécifique. L'environnement de développement "mcm3D" décrit au paragraphe suivant est dédié à la simulation du transport de photons, mais pour le moment, nous pouvons considérer de façon générale tous types d'algorithmes de Monte-Carlo.

Les algorithmes de Monte-Carlo fournissent l'évaluation statistique d'une ou plusieurs grandeurs  $I_1, I_2, \dots, I_q$  ainsi que de toutes leurs sensibilités au jeu de paramètres  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 2, quelque soit la complexité de l'algorithme, chaque grandeur physique  $A$  (c'est à dire chaque intégrale  $I_i$  et chaque sensibilité  $\frac{\partial I_i}{\partial \pi_j}$ ) est considérée comme l'espérance d'une variable aléatoire  $W_A$ . On estime  $A = E(W_A)$  en calculant la moyenne  $\tilde{A}$  d'un nombre fini  $N$  de réalisations  $w_{A,k}$  de  $W_A$  :

$$A \approx \tilde{A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_{A,k} \quad (3.1)$$

---

1. L'environnement ED-Star va largement au delà des bibliothèques "mcm" et "mcm3D" puisque, en ce qui concerne le rayonnement, il inclut l'accès aux données optiques, et que certains de ses objectifs s'étendent, en dehors du transfert radiatif, à d'autres aspects de la physique du transport corpusculaire, notamment la cinétique des gaz, des liquides et de transitions de phase liquide-vapeur, ou encore l'analyse des dynamiques d'auto-organisation et des phénomènes d'intelligence collective en biologie animale.

et on évalue l'incertitude statistique  $\sigma_{\tilde{A}}$  de chaque estimation  $\tilde{A}$  à l'aide de l'écart-type des poids :

$$\sigma_{\tilde{A}} \approx \tilde{\sigma}_{\tilde{A}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N w_{A,k}^2 \right) - \tilde{A}^2} \quad (3.2)$$

Ceci signifie que la structure principale d'un algorithme de Monte-Carlo est de réaliser les tirages aléatoires de  $w_{A,k} |_{k \in \langle 1, N \rangle}$  et d'incrémenter au fur et à mesure les compteurs  $\sum_{k=1}^N w_{A,k}$  et  $\sum_{k=1}^N (w_{A,k})^2$ . Cette structure algorithmique est facilement parallélisable à partir du moment où une routine est mise en place pour garantir que les réalisations aléatoires effectuées par les différents processus sont parfaitement indépendantes. Si c'est le cas, alors on peut simplement répartir la tâches de calcul en un nombre donné de processus; chacun de ces processus assure la tâche d'effectuer une partie des  $N$  réalisations  $w_{A,k}$  nécessaires. La somme totale des valeurs réalisées et la somme des carrés des valeurs sont obtenues simplement en additionnant les résultats de tous ces processus.

Une telle méthode de parallélisation est très efficace puisque le temps de communication entre les processus ne concerne que la tâche finale d'addition des résultats de chaque processus : aucune communication intermédiaire n'est nécessaire. Cette dernière affirmation n'est pas complètement exacte si on s'assure de la stricte indépendance des tirages aléatoires. Quelques étapes intermédiaires de communication sont nécessaires pour garantir cette indépendance. Cependant, l'augmentation correspondante du temps de calcul est très faible. Les choix suivants ont été faits lors du développement de la bibliothèque objet "mcm" :

- la bibliothèque scientifique GNU (GSL) [76] est utilisée pour le tirage uniforme des nombres aléatoires entre 0 et 1. Un grand nombre de générateurs aléatoires distincts sont disponibles avec la GSL, ce qui permet de vérifier facilement si un résultat scientifique est identique quelque soit le générateur choisi parmi ceux qui fournissent le même niveau d'indépendance et d'uniformité<sup>2</sup>;
- l'interface de communication par message MPI [77] est utilisée pour les échanges d'informations entre les processus;
- un algorithme de type "maître-esclaves" est utilisé dans lequel le processus "maître" est dédié à la distribution des tâches de tirage de  $W_A$  et à l'incrémentement des compteurs somme et somme des carrés;
- un autre processus (appelé "contrôleur") est dédié au contrôle de l'indépendance des générations aléatoires. Le principe est de générer un grand nombre de tirages aléatoires avant de lancer la simulation de Monte-Carlo. La série de nombres ainsi obtenue est divisée en  $N_{seq}$  séquences successives de  $N_{rnd}$  tirages et on stocke l'état du générateur au début de chaque séquence (on a ainsi  $N_{seq}$  germes à disposition). Chaque processus "esclave" concerné par la génération des réalisations de  $W_A$  débute avec un de ces germes et s'il a besoin de plus de

---

2. Si ce n'est pas le cas, cela signifie que l'algorithme a besoin d'un meilleur générateur aléatoire. On rencontre souvent ce problème quand la variance sur  $W_A$  est élevée, par exemple lorsqu'un très petit sous-domaine (de  $\mathcal{D}_{W_A}$  – domaine de définition de la variable aléatoire  $W_A$ ) joue un rôle essentiel (sur l'estimation de l'espérance  $E(W_A)$ ) et qu'il faut absolument que l'échantillonnage statistique de  $\mathcal{D}_{W_A}$  couvre correctement ce sous-domaine. Ce dernier point conduit rapidement à l'observation suivante : quelque soit la puissance du calculateur utilisé, l'algorithme considéré ne peut conduire à une estimation fiable sans faire appel à des techniques de réduction de la variance comme l'échantillonnage préférentiel ou la reformulation intégrale.

$N_{rnd}$  tirages, il établit alors une communication avec le "contrôleur" qui lui envoie le germe d'une nouvelle séquence et garde en mémoire toutes les séquences déjà utilisées.

Nous ne détaillons pas ici les autres choix techniques qui concernent l'allocation de mémoire en fonction du nombre de grandeurs et de sensibilités à calculer, ni comment le "contrôleur" interagit avec les "esclaves" qui demandent un nouveau germe quand il n'y en a plus de disponible, ni comment sont conçus les fichiers d'entrée/sortie pour permettre de relancer le code et d'effectuer simplement des réalisations supplémentaires de  $W_A$  quand l'estimation initiale n'atteint pas la précision attendue.

De plus amples informations sont disponibles en ligne sur le site ED-Star [74], avec notamment des exemples simples de codes commentés qui peuvent servir de départ à un développement autonome.

### 3.1.2 mcm 3D

Si on laisse de côté la production des propriétés optiques d'absorption et de diffusion de gaz et de particules, l'utilisation d'ED-Star liée aux travaux présentés dans ce manuscrit correspond en grande partie au développement d'algorithmes de Monte-Carlo dans "mcm3D".

L'environnement de programmation "mcm3D" a été conçu pour combiner la librairie "mcm" décrite au paragraphe précédent avec une librairie d'objets géométriques développée par la communauté scientifique de recherche en synthèse d'image. Cette conception résulte directement des travaux de thèse de Partice Perez qui explorait l'intérêt de telles approches pour des applications dans le domaine de la combustion [1].

Le rendu d'images réalistes demande de modéliser des scènes aux géométries parfois très complexes, en incluant une représentation précise des propriétés optiques des interfaces (en particulier des surfaces opaques) ainsi que des procédures efficaces de calcul d'intersections pour suivre les photons d'une interface à l'autre. Les outils scientifiques développés en synthèse d'image pour réaliser ces tâches sont maintenant très aboutis et possèdent un haut niveau d'abstraction. On peut les appliquer directement aux questions de transferts radiatifs.

Le rendu d'images réalistes demande aussi de représenter des milieux semi-transparents avec absorption/émission volumique et diffusion multiple. Cependant, nous avons jugé que les outils disponibles correspondants ne permettent pas de satisfaire les exigences de rigueur et de précision de la communauté scientifique en transferts radiatifs. Aussi, nous ne les utilisons pas. Nous nous concentrons donc ici sur la question du suivi de photons dans des milieux non-participants et nous illustrerons dans la section suivante comment implémenter simplement les routines nécessaires pour simuler l'absorption/émission volumique et la diffusion multiple en adaptant légèrement les algorithmes de simulation du rayonnement dans des milieux transparents.

Parmi les outils développés par la communauté scientifique en synthèse d'image, nous avons choisi d'utiliser la bibliothèque objet C++ conçue dans le cadre du projet PBRT (Physically Based Rendering Techniques). PBRT est un excellent moteur de rendu basé sur la modélisation des phénomènes optiques physiques. Il est régulièrement mis à jour, son code open-source est bien écrit et bien commenté et il dispose d'un bon compromis entre performances et possibilité d'extension.



Mais de notre point de vue, son plus grand avantage est que cette bibliothèque de rendu est accompagnée d'un très bon ouvrage pédagogique [78]. Ce livre est bien adapté aux physiciens dans le sens où les auteurs ont fait le choix de présenter chaque technique de rendu en partant de bases physiques et en utilisant un style et un vocabulaire très proches de ceux utilisés par les physiciens dans la littérature sur le rayonnement.

En choisissant PBRT, nous bénéficions donc non seulement d'un ensemble d'outils de calcul géométrique efficaces mais aussi de tous les moyens nécessaires à la bonne compréhension de ces outils. Cela nous permet de développer facilement des extensions spécifiques pour répondre aux besoins de la recherche en énergie solaire concentrée. Parmi les outils disponibles dans les objets de la bibliothèque PBRT, ceux associés aux transferts radiatifs concernent essentiellement :

- la représentation géométrique des objets "surface", la définition de l'objet "rayon" (demi-droite définie par une origine et une direction – les effets de réfraction continue ne sont pas pris en compte) et les routines de calcul d'intersection d'un rayon avec une surface donnée ;
- la représentation des propriétés optiques des matériaux (valeurs mesurées des paramètres des modèles phénoménologiques) par la définition de fonctions de distribution de réflexion bidirectionnelle (BRDF)<sup>3</sup> à l'interface de deux matériaux : absorptivité et réflectivité si c'est une interface entre un matériau transparent et un matériau opaque ; réflectivité et transmittivité si c'est une interface entre deux matériaux transparents ;
- la définition d'objets "primitive" qui combinent une surface géométrique et un jeu de propriétés optiques de matériau défini en chacun des points de cette surface. Toutes les primitives (potentiellement un grand nombre) nécessaires à la représentation d'une scène réaliste complexe sont ensuite agrégées au sein d'une structure accélératrice qui permet de calculer rapidement l'intersection d'un rayon partant d'un point donné de la scène dans une direction donnée avec la première primitive qu'il rencontre.

PBRT est, à l'origine, un moteur de rendu d'images. Lors de nos premières réflexions concernant le développement d'ED-Star, nous avons rencontré une difficulté liée au fait que PBRT ne se présentait pas sous la forme d'une librairie C++ prête à l'emploi (comme la GSL par exemple). Aussi, nous avons dû faire des choix techniques sur la manière d'extraire les outils informatiques de telle sorte qu'ils soient compatibles à la fois avec la bibliothèque mcm et le parseur de PBRT : nous souhaitions pouvoir entrer l'algorithme de Monte-Carlo via une méthode C++ de "mcmMonteCarlo" (classe objet de plus haut niveau dans mcm) et continuer d'utiliser le fichier d'entrée du code PBRT pour la description géométrique de la scène. Nous avons pour cela choisi de modifier l'objet "Scene" (classe objet de plus haut niveau dans PBRT) pour qu'il hérite de la classe mcmMonteCarlo. Sans entrer plus loin dans les détails techniques, ceci permet de conserver toute la flexibilité nécessaire à la programmation des différents types de techniques et d'algorithmes de Monte-Carlo présentés au Chap. 2 (et illustrés Sec. 3.2) tout en bénéficiant de l'efficacité de PBRT pour le suivi de rayon et les calculs d'intersections en géométrie complexe grâce au fichier d'entrée qui permet de modéliser souplement des géométries réelles. De plus, nous avons conservé dans mcm3D la possibilité d'utiliser le code d'origine de PBRT pour réaliser, par exemple, des images des systèmes à énergie solaire concentrée que nous étudions. Outre son intérêt du point de vue communication, cette option est

---

3. bidirectional reflectance distribution functions.

très utile pendant les phases de validation pour vérifier que la géométrie implémentée est bien celle que l'on souhaite modéliser.

Finalement, pour programmer un algorithme de Monte-Carlo au sein de `mcm3D`, les efforts de développement consistent essentiellement à éditer deux fichiers distincts :

- dans le premier, on code en C++ l'algorithme pour effectuer une réalisation de la variable aléatoire  $W_A$  en utilisant les objets des bibliothèques PBRT et `mcm` (en particulier le générateur aléatoire parallèle de `mcm`) ;
- dans le second, on décrit la géométrie de la scène selon les conventions du fichier d'entrée de PBRT.

Les deux fichiers correspondant à chacune des simulations présentées dans la section suivante sont disponibles sur le site web d'ED-Star [74].

## 3.2 Exemples applicatifs : Procédés à énergie solaire concentrée

Afin d'illustrer les possibilités offertes par la combinaison de l'utilisation des techniques de Monte-Carlo issues de la communauté radiative et des techniques informatiques issues de la synthèse d'image, pour la recherche en solaire à concentration, nous allons détailler dans cette section quatre exemples de systèmes réels. Il s'agit des systèmes optiques d'une centrale à tour, d'un concentrateur de Fresnel et des technologies de récepteurs de type lit fluidisé et photobioréacteur. Comme nous l'avons mentionné plus haut, les codes sources commentés de ces exemples sont disponibles en ligne [74].

### 3.2.1 Centrale à tour

Commençons par rappeler brièvement le fonctionnement des centrales à tour. La concentration solaire est assurée par un champ d'héliostats (miroirs qui suivent la course du soleil) qui réfléchissent le flux solaire incident, sur un récepteur au sommet d'une tour. 80 à 95% du flux réfléchi est absorbé par le fluide caloporteur (eau/vapeur, solution de sel fondu, air sous pression). Le fluide apporte ensuite la chaleur absorbée au cycle thermodynamique. Le principal avantage des centrales à tour est de pouvoir atteindre des températures assez élevées (jusqu'à 1000 K), ce qui augmente le rendement des cycles thermodynamiques. La recherche scientifique sur les centrales à tour et champ d'héliostats concerne aujourd'hui les cycles avec turbine à gaz et à optique beam down (cf. Chap 1).

Nous allons voir comment on peut calculer les performances d'un tel système et dans quelle mesure on peut calculer facilement des sensibilités.

#### 3.2.1.1 Présentation du système étudié

La géométrie simulée (Fig. 3.1) contient un champ de 134 héliostats de  $10 \times 10$  m. Chaque héliostat est composée de facettes planes de  $1 \times 1$  m disposées sur une structure sphérique. Le récepteur situé à 90 m de haut est modélisé par une cible plane verticale de  $10 \times 10$  m. On s'attend avec cette configuration à une puissance thermique d'environ 10 MW sur la cible. A titre de comparaison, la centrale Thémis pouvait atteindre au maximum  $9 \text{ MW}_{\text{th}}$  et était constituée de 200 héliostats

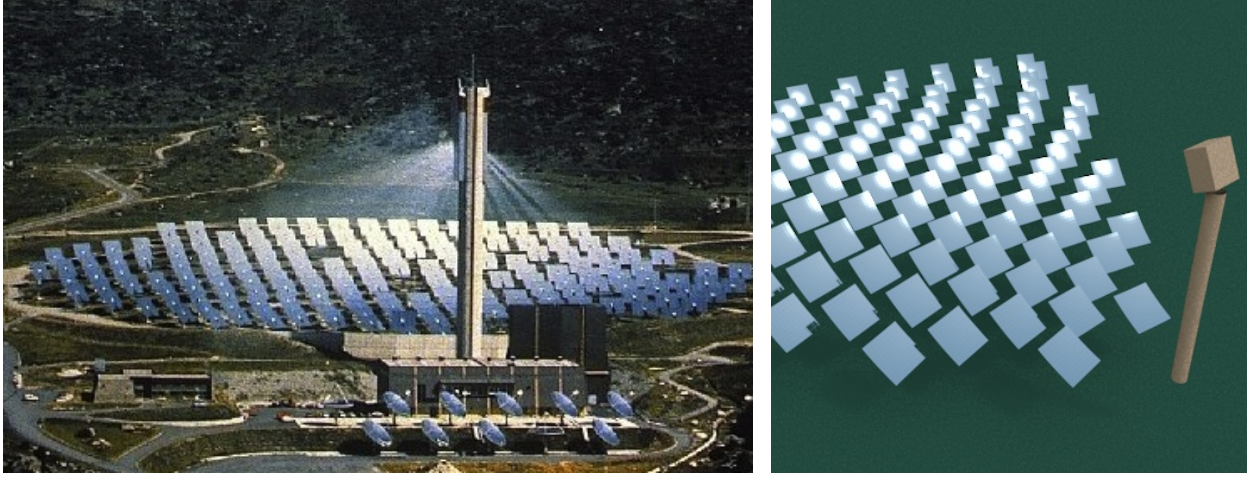


FIGURE 3.1 – (à gauche) : centrale Thémis (1986) ; (à droite) : Géométrie du système simulé

d'environ  $54 \text{ m}^2$  (soit près de  $10\,800 \text{ m}^2$  de miroir pour Thémis et environ  $13\,400 \text{ m}^2$  pour la géométrie simulée). Les héliostats de Thémis sont composés chacun de 9 modules à facettes cylindriques (chaque module est tangent en son centre à la structure sphérique de l'héliostat). Le récepteur à cavité de Thémis est situé à  $86 \text{ m}$  de haut et son ouverture inclinée mesurait à l'époque  $2 \times 2 \text{ m}$ .

### 3.2.1.2 Formulation intégrale

On souhaite estimer la puissance solaire  $A$  qui arrive sur la cible  $\mathcal{T}^+$  (*target*) après avoir été réfléchi par le champ d'héliostats. En reprenant le jeu de notations présenté au chapitre 2 (entre autres : positions et directions successives  $\mathbf{x}_j$ ,  $\boldsymbol{\omega}_j$  du chemin optique), l'écriture intégrale de la puissance  $A$  permet d'explicitier l'algorithme de Monte-Carlo correspondant :

$$A = \int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{C}} p_{\boldsymbol{\Omega}_S}(\boldsymbol{\omega}_S) d\boldsymbol{\omega}_S \left\{ H(\mathbf{x}_0 \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \hat{w}_{out} + H(\mathbf{x}_0 \notin (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\boldsymbol{\omega}_0)} p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p) d\mathbf{n}'_h \left\{ H(\mathbf{x}_2 \notin \mathcal{T}^+) \hat{w}_{out} + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \hat{w}_{in} \right\} \right\} \quad (3.3)$$

Dans cette équation,  $\int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1$  correspond au tirage du point de réflexion  $\mathbf{x}_1$  sur la face réfléchissante d'un des héliostats.  $\int_{\mathcal{C}} p_{\boldsymbol{\Omega}_S}(\boldsymbol{\omega}_S) d\boldsymbol{\omega}_S$  correspond au tirage d'une direction  $\boldsymbol{\omega}_S$  à l'intérieur du cône solaire. On en déduit le rayon incident  $\boldsymbol{\omega}_0 = -\boldsymbol{\omega}_S$ . Le test  $H(\mathbf{x}_0 \notin (\mathcal{H} \cup \mathcal{T}))$  permet de vérifier que le point  $\mathbf{x}_1$  n'est pas à l'ombre ( $\mathbf{x}_0$  est l'éventuel point d'intersection entre le rayon d'origine  $\mathbf{x}_1$  et de direction  $\boldsymbol{\omega}_S$  avec la géométrie). Si  $\mathbf{x}_1$  n'est pas à l'ombre, on calcule le rayon réfléchi en tenant compte des défaut du miroir et vérifie s'il est intercepté par la cible.

Les fonctions densités de probabilité correspondant aux lois de tirage sont les suivantes :

$$p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{S_{\mathcal{H}^+}} \quad ; \quad p_{\boldsymbol{\Omega}_S}(\boldsymbol{\omega}_S) = \frac{1}{\int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\omega}_S} = \frac{1}{2\pi(1 - \cos \theta_S)} \quad (3.4)$$

Nous discutons plus bas du choix de  $p_{N'_h}$  qui permet de prendre en compte les erreurs de poin-

tage<sup>4</sup> (*slope errors*) en tirant une normale apparente  $\mathbf{n}_h$  autour de la normale théorique  $\mathbf{n}_1$ . Voici l'expression des fonctions poids :

$$\begin{aligned}\hat{w}_{out} &= 0 \\ \hat{w}_{in} &= \frac{I(\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_h)}{p_{\Omega_S}(\boldsymbol{\omega}_S) p_{X_1}(\mathbf{x}_1)} = DNI(\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_h) \cdot S_{\mathcal{H}^+}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Les notations introduites dans les trois équations précédentes sont les suivantes :

$\mathcal{H}^+$  surface réfléchissante des héliostats sur laquelle on tire la position de réflexion  $\mathbf{x}_1$  ;

$S_{\mathcal{H}^+}$  aire totale de la surface de miroirs  $\mathcal{H}^+$  ;

$\mathcal{H}$  interface complète des héliostats qui est l'union de la partie réfléchissante  $\mathcal{H}^+$ , et de la partie arrière  $\mathcal{H}^-$  ;

$\mathcal{C}$  cône solaire à l'intérieur duquel on tire la direction incidente  $\boldsymbol{\omega}_S = -\boldsymbol{\omega}_0$  ;

$\theta_S$  rayon angulaire du cône solaire ;

$I$  intensité du rayonnement solaire :  $I = \frac{DNI}{\int_{\mathcal{C}} d\boldsymbol{\omega}_S}$  ;

$DNI$  ensoleillement normal direct (*direct normal insolation*) ;

$\mathcal{T}^+$  surface de la cible ;

$\mathcal{T}$  interface de tous les "masques", utilisée pour vérifier que le rayon incident sur  $\mathbf{x}_1$  venant de la direction  $\boldsymbol{\omega}_S$  n'est pas à l'ombre :  $\mathcal{T} = \mathcal{T}^+ \cup \{\text{objets pouvant faire de l'ombre}\}$  ici c'est la surface totale de la tour et du récepteur. Le test  $H(\mathbf{x}_0 \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T}))$  est égal à 1 si  $\mathbf{x}_1$  est à l'ombre et égal à 0 sinon (dans ce cas  $\mathbf{x}_0$  n'existe pas) ;

$\mathbf{x}_2$  point d'intersection du rayon réfléchi partant de  $\mathbf{x}_1$  dans la direction  $\boldsymbol{\omega}_1 = 2(\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_h)\mathbf{n}_h - \boldsymbol{\omega}_S$  avec la géométrie du système.  $\mathbf{x}_2$  peut être situé :

- sur la surface  $\mathcal{H}$  d'un héliostat du champ (en général une des faces arrières de  $\mathcal{H}^-$ ) lorsque le rayon réfléchi est bloqué ;
- sur la surface  $\mathcal{T}^+$  de la cible (et on calcule  $\hat{w}_{in}$ ) ;
- ailleurs, ou ne pas exister du tout en cas de débordement.

$\mathbf{n}_h$  normale apparente (liée aux erreurs de pointage) qui est fonction de la normale spéculaire théorique  $\mathbf{n}_1$  et de la réalisation de  $\mathbf{N}'_h$

$\mathbf{n}'_h$  est défini aléatoirement par le tirage aléatoires de deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ . C'est la normale apparente exprimée dans un repère local lié à  $\mathbf{n}_1$  (voir Fig. 3.2).

Comme nous l'avons laissé entendre,  $p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)$  est la distribution de la normale  $\mathbf{n}'_h$  modélisée en  $\mathbf{x}_1$  autour de la normale théorique  $\mathbf{n}_1$ . Si les miroirs étaient parfaitement spéculaires et si les héliostats étaient parfaitement orientés (pas d'erreurs liées au système de suivi solaire) alors nous n'aurions pas besoin de cette intégrale supplémentaire et nous prendrions simplement  $\mathbf{n}'_h = \mathbf{n}_1$  pour calculer la direction réfléchie  $\boldsymbol{\omega}_1$ , le test d'intersection (pour savoir si  $\mathbf{x}_2$  se trouve sur la cible ou non), ainsi que le poids  $\hat{w}_{in}$ . Pour définir  $p_{N'_h}$  nous nous sommes inspirés du modèle à micro-facettes de Blinn [78] qui est utilisé en synthèse d'image pour modéliser les réflexions dites à lobe spéculaire (pour le rendu réaliste de matériaux rugueux et brillants). Nous avons tronqué la distribution originale des normales de Blinn pour éviter que des rayons solaires incidents ne soit réfléchis dans le dos des héliostats, ce qui nous donne l'expression suivante :

$$p_{\mathbf{n}_h}(\mathbf{n}_h | \boldsymbol{\omega}_0; p) = \frac{2 + \frac{1}{p}}{2\pi \left(1 - \mu(\boldsymbol{\omega}_0)^{2 + \frac{1}{p}}\right)} (\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_1)^{1 + \frac{1}{p}} \quad (3.6)$$

4. Par extrapolation, nous appelons erreurs de pointage l'ensemble des erreurs de suivi (motorisation, vent), défauts de courbure (ou planéité) et défauts microscopiques de surface

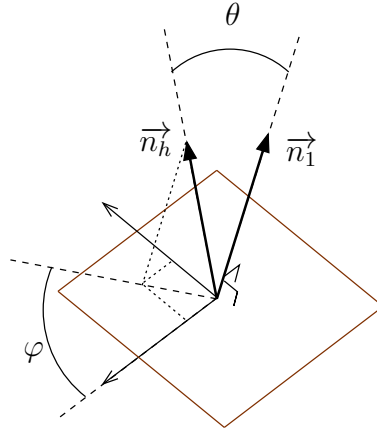


FIGURE 3.2 – L'intégrale  $\int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)} p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h|\omega_0;p)d\mathbf{n}'_h$  correspond dans l'algorithme au tirage d'un angle zénithal  $\theta$  entre  $\mathbf{n}'_h$  et  $\mathbf{n}_1$  puis au tirage d'un angle  $\varphi$  de révolution de  $\mathbf{n}'_h$  autour de  $\mathbf{n}_1$ . Par un changement de repère, on en déduit ensuite les coordonnées de  $\mathbf{n}_h$  dans le repère global.

Le domaine de définition  $\mathcal{D}_{N'_h}$  correspond à l'ensemble des directions qui vérifient  $\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_1 < \mu(\omega_0)$  où  $\mu(\omega_0) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arccos(\omega_0 \cdot \mathbf{n}_1)\right)$ . A cause de cette troncature, la dispersion de la normale apparente pour modéliser les défauts de pointage dépend de la direction d'incidence même si pour des miroir très précis (quand  $p$  tend vers zéro) cette dépendance tend, elle aussi, vers zéro. On peut quantifier la dispersion  $\epsilon$  (en radians) à l'aide du paramètre  $p$  de la loi de Blinn, en calculant la moyenne quadratique suivante :

$$\epsilon = \sqrt{\langle \theta_{h,1}^2 \rangle} \approx \sqrt{\langle \sin(\theta_{h,1})^2 \rangle} \quad (3.7)$$

avec  $\theta_{h,1}$  l'angle entre  $\mathbf{n}_h$  et  $\mathbf{n}_1$

Dans le cas d'un rayonnement incident normal :  $\omega_0 = -\mathbf{n}_1$ , on connaît la valeur de  $\epsilon$  :

$$\epsilon = \sqrt{\int_{\mathcal{D}_{N_h}} p_{n_h}(\mathbf{n}_h | -\mathbf{n}_1; p) [1 - (\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_1)^2] d\mathbf{n}_h} = \sqrt{1 - \left(\frac{2 + \frac{1}{p}}{4 + \frac{1}{p}}\right) \left[\frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{4 + \frac{1}{p}}}{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2 + \frac{1}{p}}}\right]} \quad (3.8)$$

**On souhaite aussi calculer la sensibilité  $\partial_\epsilon A$  de la puissance  $A$  par rapport à l'erreur de pointage  $\epsilon$ .**

Comme l'expression intégrale de  $A$  (Eq. 3.3) ne dépend pas directement de  $\epsilon$ , on écrit d'abord la relation suivante :

$$\partial_\epsilon A = \frac{\partial A}{\partial \epsilon} = \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \frac{\partial A}{\partial p} \cdot \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial p}\right)^{-1} \quad (3.9)$$

Puis en dérivant l'équation 3.3 comme nous l'avons expliqué Sec. 2.3, Cas **b**, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_\epsilon A &= \int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{C}} p_{\Omega_S}(\omega_S) d\omega_S \left\{ H(\mathbf{x}_0 \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \hat{w}_{\epsilon, out} \right. \\ &\quad \left. + H(\mathbf{x}_0 \notin (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)} p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \omega_0; p) d\mathbf{n}'_h \left\{ H(\mathbf{x}_2 \notin \mathcal{T}^+) \hat{w}_{\epsilon, out} + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \hat{w}_{\epsilon, in} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \hat{w}_{\epsilon, out} &= 0 \\ \text{et } \hat{w}_{\epsilon, in} &= \hat{w}_{in} \cdot \frac{\partial_2 p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)}{p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)} \cdot \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sachant que  $\partial_2 p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p) = \frac{\partial}{\partial p} [p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)]$  (c'est la notation que nous utilisons pour écrire la dérivée partielle par rapport à la seconde variable d'une fonction).

Voici, après développement, l'expression de la dérivée logarithmique de  $p_{N'_h}$  par rapport à  $p$  qui nous permet de calculer le poids de la sensibilité  $\partial_\epsilon A$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial_2 p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)}{p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p)} &= \frac{\partial}{\partial p} \left[ \ln \left( p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p) \right) \right] \\ &= \frac{-1}{p^2} \cdot \left[ \frac{1}{2 + \frac{1}{p}} + \frac{\ln(\mu(\boldsymbol{\omega}_0)) \mu(\boldsymbol{\omega}_0)^{2 + \frac{1}{p}}}{1 - \mu(\boldsymbol{\omega}_0)^{2 + \frac{1}{p}}} + \ln(\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_1) \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2.1.3 Simulations

Dans ce paragraphe, nous présentons tout d'abord les résultats de simulations du calcul de  $A$  et de  $\partial_\epsilon A$  pour différentes valeurs de l'erreur de pointage  $\epsilon$  puis nous montrerons à titre illustratif les cartes de flux surfaciques du récepteur obtenues pour quatre valeurs de  $\epsilon$ .

Nous avons tracé sur la figure 3.3 l'évolution de  $A$  (en bleu, axe de droite) et de sa sensibilité (en vert, axe de gauche) en fonction de l'erreur de pointage. Entre deux estimations successives de  $A$ , nous avons calculé ses variations par différences finies (en rouge, axe de gauche) pour les confronter aux estimations des sensibilités et ainsi valider le modèle utilisé. D'autre part, nous avons affiché comme valeur constante, la puissance solaire reçue par la cible dans le cas du modèle spéculaire de réflexion (en violet, axe de droite) qui est de  $11,9 \text{ MW}_{th}$ . Hormis le fait que les calculs de sensibilité par Monte-Carlo concordent avec les différences finies, il est difficile de commenter les courbes de cette figure. On peut simplement constater qu'avec une dispersion moyenne des normales réelles de  $12 \text{ mrad}$  on perd presque  $25\%$  de la puissance idéale que l'on obtiendrait avec des miroirs parfaits. Pour  $\epsilon = 5 \text{ mrad}$  on perd à peine  $1\%$ ; il ne faut cependant pas croire qu'en dessous de  $5 \text{ mrad}$  (les points bleus et violets sont presque confondus), les erreurs de pointage n'ont pas d'influence sur les performances du système. En effet, les erreurs de pointage entraînent essentiellement des pertes par débordement et comme la cible que nous avons choisi est très grande, il faut simuler les miroirs avec des défauts assez importants avant d'observer une baisse importante de la puissance reçue. Nous allons maintenant observer Fig. 3.4 comment sur cette configuration, les erreurs de pointage influencent le profil de densité de flux sur la surface de la cible.

La figure 3.4 représente les cartes de flux correspondant à quatre valeurs de  $\epsilon$  :  $0 \text{ mrad}$  (réflexion spéculaire) ;  $1,4 \text{ mrad}$  ;  $4,5 \text{ mrad}$  et  $10 \text{ mrad}$ . On constate naturellement que moins les miroirs sont précis, plus la tâche focale est "étalée" et "aplatie". Nous avons, en plus de ces graphiques, relevé les densités de flux maximales  $\varphi_{max}$  et les puissances totales reçues  $A$  pour chaque simulation (avec leurs écart-types) :

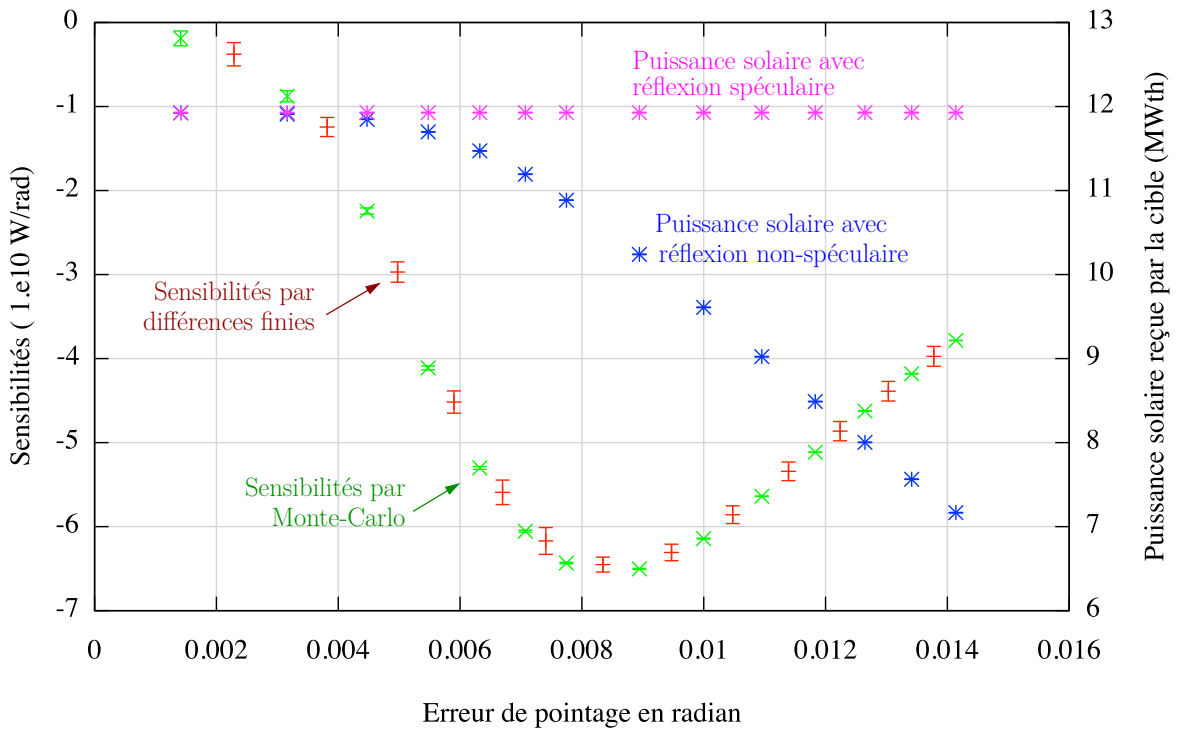


FIGURE 3.3 – Evolution de la puissance  $A$  (en mégawatts, axe de droite) et de la sensibilité  $\partial_{\epsilon}A$  (en dizaines de giga-watts par radian, axe de gauche) en fonction de l'erreur de pointage  $\epsilon$ .

$\epsilon = 0 \text{ mrad}$	$\varphi_{max} = 4,26 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \pm 1 \cdot 10^4$	$A = 11,9 \text{ MW}_{th} \pm 9 \cdot 10^{-4}$
$\epsilon = 1,4 \text{ mrad}$	$\varphi_{max} = 3,36 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \pm 3 \cdot 10^4$	$A = 11,9 \text{ MW}_{th} \pm 9 \cdot 10^{-4}$
$\epsilon = 4,5 \text{ mrad}$	$\varphi_{max} = 1,04 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \pm 6 \cdot 10^3$	$A = 11,8 \text{ MW}_{th} \pm 1 \cdot 10^{-3}$
$\epsilon = 10 \text{ mrad}$	$\varphi_{max} = 2,54 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2 \pm 3 \cdot 10^3$	$A = 9,6 \text{ MW}_{th} \pm 2 \cdot 10^{-3}$

Le but de cette section est d'illustrer les éléments de réponse que nous pouvons fournir immédiatement aux problématiques du solaire à concentration. Aussi nous n'allons pas approfondir l'analyse des résultats de ces simulations. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'en utilisant nos outils méthodologiques, il est facile et rapide d'obtenir un fichier de données pour tracer une carte de flux ou bien d'effectuer une analyse paramétrique avec estimations de sensibilités comme par exemple, à la précision des miroirs d'un champ d'héliostats.

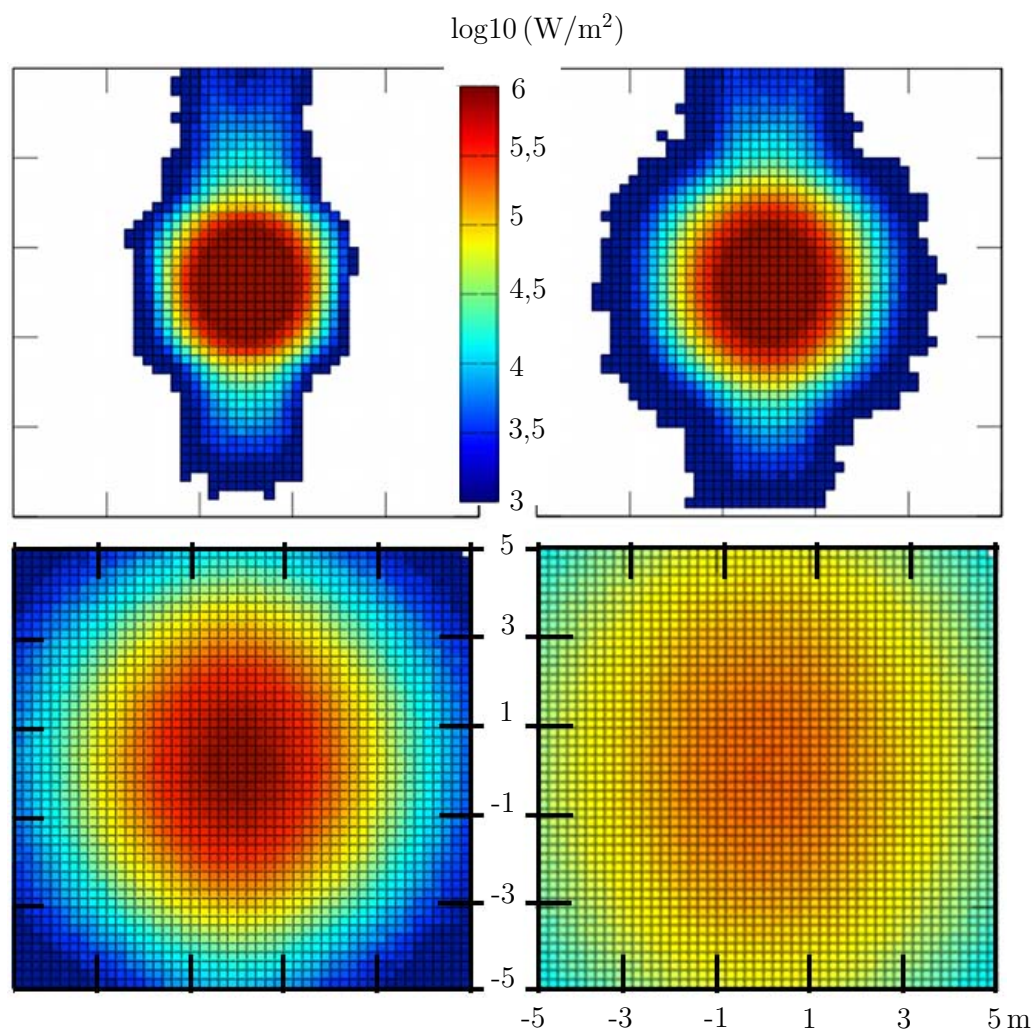


FIGURE 3.4 – Cartes de flux - en haut à gauche :  $\epsilon = 0$  mrad (réflexion spéculaire) ; en haut à droite :  $\epsilon = 1,4$  mrad ; en bas à gauche :  $\epsilon = 4,5$  mrad ; en bas à droite :  $\epsilon = 10$  mrad  
L'échelle de couleur donne le logarithme décimal de la puissance surfacique en  $\text{W}/\text{m}^2$ .  
La cible fait  $100 \text{ m}^2$ , elle est discretisée en  $50 \times 50$  cellules.



### 3.2.2 Concentrateur linéaire de Fresnel

La technologie des concentrateurs linéaires de Fresnel est une alternative prometteuse aux systèmes cylindro-paraboliques (cf. Chap. 1). Elle consiste à utiliser des bandes de miroirs pour réfléchir le rayonnement solaire sur un récepteur linéique placé au dessus du champ de miroirs (voir Fig. 3.5). La conception des concentrateurs de Fresnel est plus simple que celles des capteurs cylindro-paraboliques et ceci compense leur performances plus faibles [79]. Le marché visé concerne aussi bien les installations de petites tailles pour les besoins en cogénération des bâtiments ( $< 10$  kW) que les installations à grande échelle pour la production d'électricité au travers de centrales solaires ( $> 10$  MW).

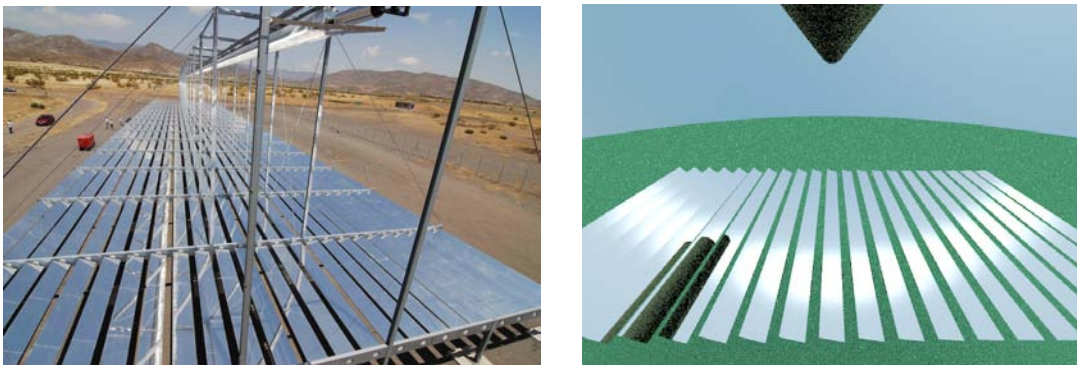


FIGURE 3.5 – A gauche : photographie d'un démonstrateur Fresnel en Espagne ; à droite : image de synthèse de la configuration simulée, réalisée avec ED-Star

En tant que jeune technologie, les concentrateurs de Fresnel laissent une grande place à la recherche et au développement [80]. Elle constitue donc une excellente application pour la réflexion méthodologique menée dans ce manuscrit. D'après la littérature, le défi technologique actuel est de développer un récepteur à air pour cette technologie parce qu'on peut utiliser l'air comme source chaude pour des cycles thermodynamiques ouverts performants dans les régions arides du globe [81]. Pour cela, la conception du système optique doit garantir un flux solaire élevé et homogène sur le récepteur.

Les travaux présentés dans la suite de ce paragraphe ont été menés en collaboration avec François VEYNANDT qui effectue ses travaux de thèse au Laboratoire Rapsodee. Dans le cadre des travaux de François, un prototype est en cours de construction au laboratoire (cf. Fig. 3.6) et la simulation de son système optique fait donc l'objet de ce paragraphe. Ce prototype est composé de 21 miroirs plans (90 % de réflectivité) de 10 cm de large et 1,5 m de long. La largeur totale du système est de 3 m. Le récepteur linéique est placé à 1 m au dessus du champ de miroirs. Le tube absorbeur est long de 2 m et a un diamètre de 7 cm.

Il est surmonté d'un réflecteur secondaire, de 17 cm de large, dans le même esprit que celui illustré ci-dessous (cf. Fig. 3.6). Trois tels éléments prototypes permettront d'alimenter un moteur Ericsson pouvant produire 1 kW électrique en conditions nominales. La simulation présentée ci après permet d'estimer la puissance reçue par le récepteur solaire et d'estimer aussi les différents postes de pertes (blocage, débordement...). Dans ce cas, il n'est pas important de s'intéresser à la distribution spectrale de l'énergie solaire, car les surfaces des divers matériaux utilisés peuvent être considérés comme des corps gris. Il en est de même pour les émissions infrarouges des surfaces chaudes.



FIGURE 3.6 – A gauche : Vue CAO du prototype en construction au laboratoire Rapsodee ; à droite : image d'un CPC - Récepteur des collecteurs NOVATEC-BIOSOL

### 3.2.2.1 Formulation intégrale

Même si la simulation présentée dans ce paragraphe permet d'estimer plusieurs grandeurs distinctes avec le même algorithme, nous n'allons détailler ici que l'expression principale. Il s'agit, comme dans l'exemple précédent, de la puissance solaire  $A$  réfléchi par le champ de miroirs et reçue par la surface  $\mathcal{T}^+$  du récepteur solaire. La seule différence est qu'après la première réflexion sur le champ de miroir, les photons peuvent être réfléchis une seconde fois (ou plus) par le concentrateur qui coiffe le tube absorbeur avant d'atteindre le tube, ou bien sortir du système (perte par débordement). Ainsi pour tenir compte des chemins optiques potentiellement longs de réflexion multiple, nous faisons appel comme au Chap 2 à des séquences d'intégrales imbriquées :

$$\begin{aligned}
 A = \int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \cdot \int_{\mathcal{C}} p_{\Omega_S}(\omega_S) d\omega_S \cdot & \begin{cases} H(\mathbf{x}_0 \in \mathcal{T} \cup \mathcal{H}) \cdot \hat{w}_{out} \\ + H(\mathbf{x}_0 \notin \mathcal{T} \cup \mathcal{H}) \dots \end{cases} \\
 \times \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{N}'_{h,1}}^{\mathcal{H}^+}(\omega_0)} p_{\mathbf{N}'_{h,1}}^{\mathcal{H}^+}(\mathbf{n}'_{h,1} | \omega_0 ; p^{\mathcal{H}^+}) d\mathbf{n}'_{h,1} \dots & \\
 \times \begin{cases} H(\mathbf{x}_2 \notin \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{R}^+) \cdot \hat{w}_{out} \\ + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \cdot \hat{w}_{in,2} \\ + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{R}^+) \cdot \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{N}'_{h,2}}^{\mathcal{R}^+}(\omega_1)} p_{\mathbf{N}'_{h,2}}^{\mathcal{R}^+}(\mathbf{n}'_{h,2} | \omega_1 ; p^{\mathcal{R}^+}) d\mathbf{n}'_{h,2} \cdot A_2 \\ + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{H}^+) \cdot \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{N}'_{h,2}}^{\mathcal{H}^+}(\omega_1)} p_{\mathbf{N}'_{h,2}}^{\mathcal{H}^+}(\mathbf{n}'_{h,2} | \omega_1 ; p^{\mathcal{H}^+}) d\mathbf{n}'_{h,2} \cdot A_2 \end{cases} & \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

avec,

$$A_j = \begin{cases} H(\mathbf{x}_{j+1} \notin \mathcal{T}^+ \cup \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{R}^+) \cdot \hat{w}_{out} \\ + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{T}^+) \cdot \hat{w}_{in,j+1} \\ + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}^+) \cdot \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{N}'_{h,j+1}}^{\mathcal{R}^+}(\omega_j)} p_{\mathbf{N}'_{h,j+1}}^{\mathcal{R}^+}(\mathbf{n}'_{h,j+1} | \omega_j ; p^{\mathcal{R}^+}) d\mathbf{n}'_{h,j+1} \cdot A_{j+1} \\ + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{H}^+) \cdot \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{N}'_{h,j+1}}^{\mathcal{H}^+}(\omega_j)} p_{\mathbf{N}'_{h,j+1}}^{\mathcal{H}^+}(\mathbf{n}'_{h,j+1} | \omega_j ; p^{\mathcal{H}^+}) d\mathbf{n}'_{h,j+1} \cdot A_{j+1} \end{cases} \quad (3.14)$$

et on tient compte dans l'expression de la fonction poids, des pertes radiatives à chaque réflexion dues à la réflectivité des miroirs et du second réflecteur :

$$\begin{aligned}\hat{w}_{out} &= 0 \\ \hat{w}_{in,j} &= \frac{I(\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_{h,1}) \prod_{q=1}^{j-1} \rho_q}{p_{\Omega_S}(\boldsymbol{\omega}_S) p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)},\end{aligned}\quad (3.15)$$

Les notations sont similaires à celles du paragraphe précédent :

- $x_j$  le  $j^{\text{ème}}$  point d'intersection, si on note  $x_1$  le premier point d'impact sur un miroir. Si  $x_1$  n'est pas éclairé par le soleil, alors  $x_0$  existe mais aucun rayon ne peut frapper  $x_1$ , ce qui stoppe l'algorithme
- $\boldsymbol{\omega}_S$  la direction du rayon incident
- $p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{S_{\mathcal{H}^+}}$  la fonction densité de probabilité de la position de  $x_1$  sur le miroir
- $p_{\Omega_S}(\boldsymbol{\omega}_S) = \frac{1}{2\pi(1-\cos\theta_S)}$  la loi de tirage de  $\boldsymbol{\omega}_S$ . Nous avons choisi un soleil Pill-Box (toutes les directions du disque solaire sont équiprobable)
- $\rho_q$  la réflectivité de la surface sur laquelle la réflexion numéro  $q$  est effective (miroir ou réflecteur secondaire)
- $I_\nu$  l'intensité du rayonnement solaire
- $\mathcal{C}$  est le cône solaire vu depuis le miroir ( $x_1$ )
- $\mathcal{H}$  est la surface totale des miroirs, c'est à dire l'union de la partie réfléchissante,  $\mathcal{H}^+$  (miroir de surface  $S_{\mathcal{H}^+}$ ), et de la partie arrière  $\mathcal{H}^-$ ,
- $\mathcal{R}$  est le réflecteur secondaire, union de sa partie réflexive  $\mathcal{R}^+$  et de sa partie arrière  $\mathcal{R}^-$ ,
- $\mathcal{T}$  rassemble tous les éléments qui peuvent cacher les miroirs : tube récepteur  $\mathcal{T}^+$  (cible), réflecteur secondaire  $\mathcal{R}$ , structure supportant le récepteur, autres masques potentiels...

### 3.2.2.2 Résultats obtenus : sensibilité à la hauteur du récepteur

Nous aurions pu, pour cette géométrie de collecteur solaire, faire les mêmes études que pour les centrales à tour, avec le calcul des mêmes sensibilités. Nous avons préféré montrer qu'un seul calcul permet de suivre plusieurs grandeurs, qui sont ici la puissance interceptée par le récepteur solaire, mais aussi la puissance récupérée grâce au CPC, la puissance perdue par ombrage, les différents blocages ...

La définition de la hauteur optimale du récepteur est liée à la largeur du champ de miroirs et au nombre de miroirs. Dans le cas du prototype expérimental du laboratoire, sa largeur est de 3 m pour 21 miroirs. Comme la longueur des miroirs est faible, le récepteur est censé pouvoir se déplacer horizontalement selon l'axe du prototype pour être toujours dans la position optimale pour la réception solaire. Ce déplacement peut aller jusqu'à plusieurs mètres, surtout en hiver quand la hauteur du soleil est faible.

Les résultats présentés ci dessous (cf. Fig. 3.7) ont été obtenus pour un ensoleillement direct de  $1000 \text{ W/m}^2$ , le 21 mars à midi à la latitude d'Albi. La puissance interceptée et les différentes grandeurs suivies ont été calculées pour des hauteurs de récepteur de 0,5 m à 3,5 m par pas de 50 cm. Chaque simulation a été effectuée avec 100 000 rayons, et a pris environ 30 s. L'erreur sur la puissance collectée était de moins de 0,2 %. Les variables calculées permettent de mieux comprendre les diverses pertes optiques liées à la géométrie du collecteur. Par exemple, on s'aperçoit que, dès

que le récepteur est à plus de 2 m de hauteur, plus de 60 % de l'énergie collectée l'est grâce à la présence du CPC.

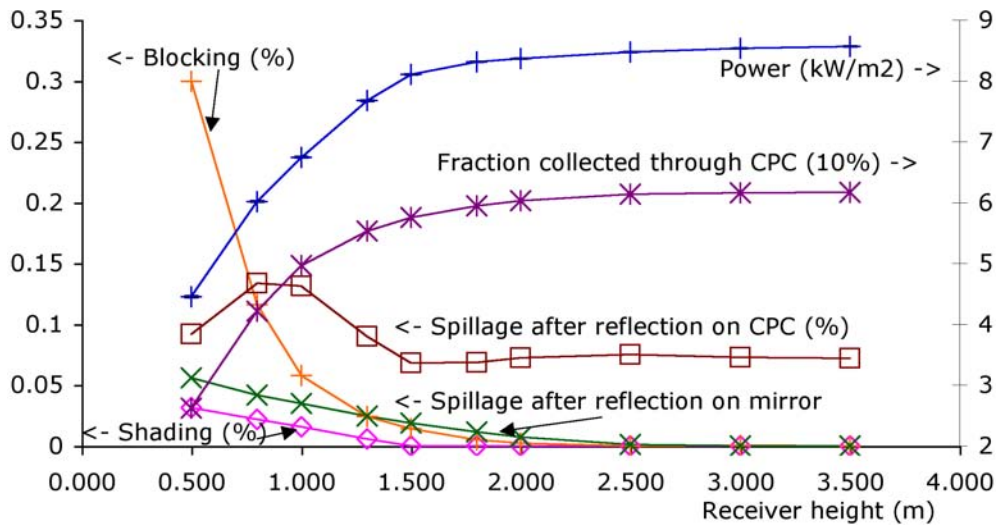


FIGURE 3.7 – Performance d'un collecteur à miroirs de Fresnel pour diverses hauteurs de récepteurs

Quand le récepteur est installé à moins de 2 m de hauteur, la puissance collectée, dans les conditions du calcul, est moindre. Il y a plusieurs explications :

- L'ombrage que se font les miroirs entre eux augmente : en effet, plus le récepteur est bas, plus la position angulaire des miroirs est marquée. A 1 m de hauteur de récepteur, 1,6 % de la surface des miroirs ne reçoit pas le soleil direct.
- Pour les mêmes raisons, le blocage entre miroirs augmente aussi : une partie des rayons réfléchis sont alors interceptés par la face arrière des miroirs, et donc perdus. Pour une hauteur de récepteur de 1 m, cela correspond à 5,8 % de la puissance solaire.
- D'autres rayons solaires ratent la cible : toujours pour un récepteur à 1 m de hauteur, 3,5 % sont réfléchis mais passent à côté de la cible (le CPC n'est pas assez large), mais d'autres sont encore perdus après une ou plusieurs réflexions sur le CPC (jusqu'à 13 % pour un récepteur à 1 m de hauteur). Même à 2 m de hauteur, cette perte reste importante (environ 7 % , ce qui tend à prouver que la forme de notre CPC n'est pas optimale).

En conclusion de cette étude particulière, on peut conclure que, dans les conditions du calcul, une hauteur de 2 m correspond à un optimum : en dessous, les pertes optiques deviennent de plus en plus importantes, en dessus, les gains deviennent très faibles, au prix d'une complexité croissante (prise au vent, structure porteuse du récepteur ...). De plus, il serait certainement intéressant de concevoir un nouveau couple CPC - récepteur, capable de diminuer encore les pertes par débordement.

### 3.2.3 Récepteur volumétrique à lit fluidisé

Cette étude a été menée conjointement avec Germain BAUD, qui effectue sa thèse au laboratoire, et partenariat avec le PROMES d'Odeillo, sur la conception d'un récepteur solaire à air basé sur l'insolation directe d'un lit fluidisé de particules. En effet, les lits fluidisés sont souvent utilisés dans l'industrie comme échangeurs thermiques car ils ont d'excellentes performances en termes de transfert de chaleur. Ainsi, pour améliorer la performance des cycles thermodynamiques pour la production d'électricité solaire, cette solution représenterait un saut technologique qui permettrait un chauffage direct de l'air au foyer d'un concentrateur solaire. Des expérimentations préliminaires ont montré que l'on peut atteindre assez facilement les 1000 K (voir Fig. 3.8 (a)). Cette technologie a été étudiée pour des applications solaires par un certain nombre d'équipes de recherche [82] [83] [84] [85]. Le principal avantage de cette technologie est, en plus de l'efficacité des transferts thermiques, une très bonne résistance à la fatigue thermique imposée par le caractère discontinu de la ressource solaire. De plus, la solution proposée est adaptée aux champs solaires de type "beam down", qui permettent une installation au sol de l'ensemble des composants thermiques et thermodynamiques d'une centrale solaire.

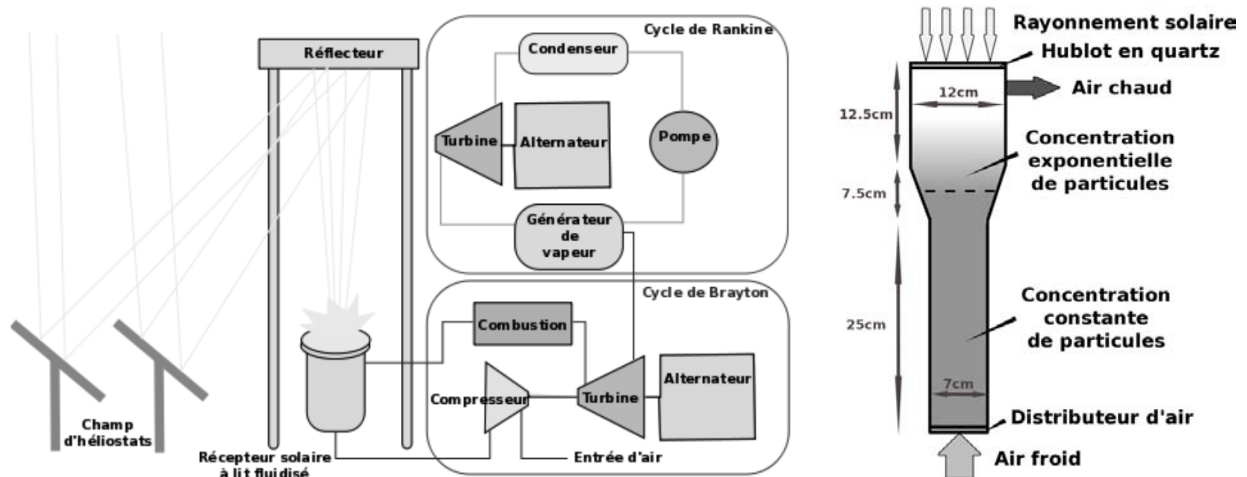


FIGURE 3.8 – A gauche : Schéma simplifié d'une centrale solaire à cycle combiné avec collecteur "beam down" et récepteur à lit fluidisé (a). A droite : Schéma d'un récepteur à lit fluidisé de 45cm de haut (b).

Le récepteur solaire (voir fig.3.8 (b)) est constitué d'un diffuseur au bas d'une partie cylindrique contenant des particules de carbure de silicium, et d'une partie supérieure cylindro-conique séparée de l'environnement par une fenêtre en quartz.

Le flux solaire concentré pénètre le récepteur par cette fenêtre et est directement absorbé par les particules, fluidisées par l'air entrant au travers du diffuseur. Le débit d'air doit être choisi pour à la fois obtenir une bonne fluidisation et optimiser les échanges thermiques. La présence d'un changement de section permet surtout d'éviter que les particules ne viennent frapper et s'agglomérer à la fenêtre en quartz, ce qui créerait rapidement des points chauds et sa destruction rapide. Mais cela permet aussi d'avoir un "ciel de lit" plus diffus, avec une augmentation de la pénétration du rayonnement solaire.

Aux niveaux de température atteints, avec la source solaire, ce sont les transferts radiatifs qui dominent le comportement thermique du récepteur. Comme l'air est transparent au rayonnement,

c'est l'interaction entre les photons solaires et les particules, par absorption et diffusion, qui permettent la captation de l'énergie radiative. La longueur de pénétration du rayonnement solaire concentré dépend de la géométrie du récepteur, de la quantité et des propriétés optiques des particules, ainsi que du régime de fluidisation.

Le rayonnement solaire incident est considéré comme monochromatique et perpendiculaire au hublot de quartz. L'acier de la surface interne du récepteur est modélisé par une surface grise de réflectivité  $\rho^R$ . Le hublot de quartz ( $\mathcal{G}$ ) est représenté comme une surface spéculaire et semi transparente de réflectivité  $\rho^G(\omega, \mathbf{n})$ .

La densité de particules dans la partie inférieure du lit fluidisé est considérée comme constante, et décroît de façon exponentielle dans le ciel de lit, décroissance représentée par la fonction suivante :

$$\eta(\mathbf{x}, p) = \eta_0 \exp\left(-\frac{z - z_0}{p}\right) \quad (3.16)$$

avec  $\eta_0$  la densité de particules constante dans la zone inférieure,  $z$  la hauteur du lit fluidisé,  $z_0$  le niveau indiquant le passage à la densité exponentielle et  $p$  le paramètre d'ajustement de la fonction exponentielle.

Les coefficients d'absorption et de diffusion du milieu sont dérivés de la densité des particules et des propriétés optiques des particules. La fonction de phase décrivant le phénomène de diffusion du nuage de particules est modélisée par la fonction de phase d'Henye-Greenstein.

Les propriétés optiques des particules considérées comme sphériques sont calculées sur le spectre solaire entre  $0.24\mu\text{m}$  et  $4\mu\text{m}$  par un code de calcul basé sur la théorie de Mie [86]. Des résultats préliminaires en 1D ont révélé qu'il n'y a pas de différence notable au niveau du calcul radiatif entre un spectre résolu et une intégration sur la longueur d'onde des propriétés optiques. En conséquence, nous utilisons les valeurs moyennées des propriétés optiques  $Q_s$ ,  $Q_a$  et  $g$  calculées à partir de l'intégration des coefficients spectraux d'efficacité d'absorption, de diffusion  $Q_{\nu,s}$ ,  $Q_{\nu,a}$  et du facteur d'asymétrie  $g_\nu$ .

Ensuite, nous effectuons un premier calcul pour lequel les propriétés optiques sont décrites par les valeurs suivantes de sections équivalentes d'absorption et de diffusion :

$$\sigma_a = \frac{Q_a}{\pi d_p^2/4} \quad ; \quad \sigma_s = \frac{Q_s}{\pi d_p^2/4} \quad (3.17)$$

avec  $Q_s = 1.51$ ,  $Q_a = 0.5$ ,  $g = 0.7$  et  $d_p$  le diamètre des particules.

Finalement, les coefficients d'absorption et de diffusion sont calculés à partir des sections équivalentes et de la densité des particules :

$$k_a = \eta(\mathbf{x}, p)\sigma_a \quad ; \quad k_s = \eta(\mathbf{x}, p)\sigma_s \quad (3.18)$$

Nous nous proposons de calculer, dans cet exemple d'utilisation d'ED-Star, la part du rayonnement solaire qui ressort par la fenêtre de quartz par réflexion sur le lit fluidisé, ce qui correspond à une partie importante des pertes thermiques du récepteur. Nous calculerons aussi la sensibilité de cette variable au paramètre  $p$  de la fonction de densité de particules dans le ciel de lit.

### 3.2.3.1 Formulation intégrale dans le cas du récepteur solaire à lit fluidisé

En utilisant les mêmes notations que précédemment, la puissance solaire  $E$  sortant par le hublot de quartz peut être écrite comme :

$$E = \int_{\mathcal{G}} p_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \int_0^\infty p_{\kappa_0}(\kappa_0) d\kappa_0 \left\{ \begin{array}{l} H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}) \int_{2\pi} p_{\Omega_1}^{\mathcal{R}}(\omega_1) d\omega_1 \int_0^\infty p_{\kappa_1}(\kappa_1) d\kappa_1 \mathcal{I}_1 \\ + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{V}) \int_{4\pi} p_{\Omega_1}^{\mathcal{V}}(\omega_1|\omega_0) d\omega_1 \int_0^\infty p_{\kappa_1}(\kappa_1) d\kappa_1 \mathcal{I}_1 \end{array} \right\} \quad (3.19)$$

où  $\mathcal{I}_j, j > 1$  est défini de manière récursive

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j = & H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{G}) \int_0^1 p_{R_{j+1}^{\mathcal{G}}}(r_{j+1}^{\mathcal{G}}) dr_{j+1}^{\mathcal{G}} \left\{ \begin{array}{l} H(r_{j+1}^{\mathcal{G}} > \rho^{\mathcal{G}}) \hat{w}_{j+1} \\ + H(r_{j+1}^{\mathcal{G}} \leq \rho^{\mathcal{G}}) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}^{\mathcal{G}}}(\omega_{j+1}|\omega_j) d\omega_{j+1} \\ \quad \times \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \end{array} \right\} \\ & + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}) \left\{ \begin{array}{l} H(\hat{w}_j \leq \epsilon) \int_0^1 p_{R_{j+1}^{\mathcal{R}}}(r_{j+1}^{\mathcal{R}}) dr_{j+1}^{\mathcal{R}} \\ \quad \times \left\{ \begin{array}{l} H(r_{j+1}^{\mathcal{R}} > \rho^{\mathcal{R}}) \times 0 \\ + H(r_{j+1}^{\mathcal{R}} \leq \rho^{\mathcal{R}}) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}^{\mathcal{R}}}(\omega_{j+1}) d\omega_{j+1} \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \end{array} \right\} \\ + H(\hat{w}_j > \epsilon) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}^{\mathcal{R}}}(\omega_{j+1}) d\omega_{j+1} \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \end{array} \right\} \\ & + H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) \int_{4\pi} p_{\Omega_{j+1}^{\mathcal{V}}}(\omega_{j+1}|\omega_j) d\omega_{j+1} \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Les différentes fonctions de densité de probabilité angulaires sont :

$$\begin{aligned} p_{\Omega_j}^{\mathcal{R}}(\omega_j) &= \frac{\omega_j \cdot \mathbf{n}_j}{\pi} \\ p_{\Omega_j}^{\mathcal{V}}(\omega_{j+1}|\omega_j) &= \frac{1-g^2}{[1+g^2-2g(\omega_{j+1} \cdot \omega_j)]^{3/2}} \\ p_{\Omega_j}^{\mathcal{G}}(\omega_{j+1}|\omega_j) &= \delta(\omega_{j+1} \cdot \mathbf{t}_j + \omega_j \cdot \mathbf{t}_j) \delta(\omega_{j+1} \cdot \mathbf{n}_j - \omega_j \cdot \mathbf{n}_j) \end{aligned} \quad (3.21)$$

avec  $n_j$  et  $t_j$  respectivement vecteur normal et vecteur tangent à la surface au point  $x_j$ . La densité de probabilité de l'épaisseur optique est :

$$\kappa_j = \int_0^{\|x'-x_j\|} k_s(x_j + s\omega_j) ds \quad (3.22)$$

avec  $x_j = x'$  si  $\kappa_j < \int_0^{\|x_j-y_j\|} k_s ds$  et  $x_j = y_j$  si  $\kappa_j \geq \int_0^{\|x_j-y_j\|} k_s ds$ ,  $\omega_0 = n_{x_0}$  et  $x' = x_j + \|x'-x_j\|\omega_j$ .

Le poids est défini de manière récursive par :

$$\hat{w}_{j+1} = \hat{w}_j \exp(-\sigma_a \alpha_j) \left\{ \begin{array}{l} H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{G}) \times 1 \\ + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}) \left\{ \begin{array}{l} H(\hat{w}_j > \epsilon) \rho^{\mathcal{R}} \\ + H(\hat{w}_j \leq \epsilon) \times 1 \end{array} \right\} \\ + H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{V}) \times 1 \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

avec  $\hat{w}_0 = S_{\mathcal{G}}$  et

$$\alpha_j = \int_0^{\|\mathbf{x}_{j+1}-\mathbf{x}_j\|} \eta(\mathbf{x}_j + s\omega_j, p) ds \quad (3.24)$$

Dans le cas particulier de l'uniformité de la densité de particules  $\sigma_a \sum_{q=0}^{j-1} \alpha_q = \sigma_a \eta d_j = k_a d_j$  et la formulation intégrale correspondant à la sensibilité  $\frac{\partial E}{\partial \eta}$  est identique à celle de  $E$  dans Eqs. 3.19 et 3.20, en remplaçant seulement  $\hat{w}_j$  par

$$\hat{w}_{\eta,j} = \frac{\partial \hat{w}_j}{\partial \eta} + \hat{w}_j \sum_{q=0}^{j-1} \frac{\frac{\partial p \lambda_q}{\partial \eta}}{p \lambda_q} = \hat{w}_j \left[ -\sigma_a d_j + \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1 - \kappa_q}{\eta} \right] \quad (3.25)$$

Dans le cas général, la formulation intégrale correspondant à la sensibilité  $\frac{\partial E}{\partial p}$  est identique à celle de  $E$ , en remplaçant seulement  $\hat{w}_j$  par

$$\hat{w}_{p,j} = \hat{w}_j \sum_{q=0}^{j-1} \left[ -\sigma_a \frac{\partial \alpha_q}{\partial p} - \sigma_s \frac{\int_0^{||\mathbf{x}' - \mathbf{x}_q||} \eta(\mathbf{x}_q + s\omega_q, p) ds}{\partial p} + \frac{\partial_2 \eta(\mathbf{x}_{q+1}, p)}{\eta(\mathbf{x}_{q+1}, p)} \right] \quad (3.26)$$

où  $\partial_2 \eta(\mathbf{x}, p)$  est la dérivée partielle selon  $p$  de  $\eta$ . Comme l'expression de la sensibilité n'est pas liée avec le profil de la densité à l'extérieur du récepteur, on peut choisir par convention que  $\kappa_j$  ne dépend pas de  $\eta(\mathbf{x}, p)$  et que  $\partial_2 \eta(\mathbf{x}_{q+1}, p) = 0$  quand  $\mathbf{x}_{q+1} \notin \mathcal{V}$  (quand la réflexion arrive avant la diffusion). En conséquence, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^{||\mathbf{x}' - \mathbf{x}_q||} \eta(\mathbf{x}_q + s\omega_q, p) ds &= \int_0^{||\mathbf{x}_{q+1} - \mathbf{x}_q||} \eta(\mathbf{x}_q + s\omega_q, p) ds + \int_0^{||\mathbf{x}' - \mathbf{x}_{q+1}||} \eta(\mathbf{x}_q + s\omega_q, p) ds \\ &= \int_0^{||\mathbf{x}_{q+1} - \mathbf{x}_q||} \eta(\mathbf{x}_q + s\omega_q, p) ds \end{aligned}$$

et la sensibilité devient :

$$\hat{w}_{p,j} = \hat{w}_j \sum_{q=0}^{j-1} \left[ -(\sigma_a + \sigma_s) \frac{\partial \alpha_q}{\partial p} + H(x_{q+1} \in \mathcal{V}) \frac{\partial_2 \eta(\mathbf{x}_{q+1}, p)}{\eta(\mathbf{x}_{q+1}, p)} \right] \quad (3.27)$$

Dans sa version initiale, sans roulette russe, le temps de calcul pouvait parfois atteindre plusieurs heures. Ceci est lié à la zone dense du lit fluidisé qui est un milieu optiquement épais. Un photon atteignant cette zone rencontre donc un nombre très important d'événements de diffusion avant de pouvoir ressortir du lit. Il est en quelque sorte piégé dans le fond de la géométrie. De plus, l'absorption est très importante dans cette zone, le poids du photon devient donc très vite infime. Ceci revient à suivre des photons énergétiquement très faibles dans des parcours de diffusion très longs. Une amélioration a donc été apportée au code pour faire tomber le temps de calcul à quelques secondes sans pour autant procéder à une troncature qui aurait biaisé les résultats. Cette amélioration introduit une "roulette russe". Ainsi, le photon n'est plus simplement atténué sur un parcours de diffusion. A partir d'un seuil limite inférieur de son poids, le photon qui rencontre une paroi est soumis à des interactions qui peuvent être soit une diffusion, soit une absorption auquel cas le photon finit son parcours.



### 3.2.3.2 Résultats obtenus pour le récepteur solaire

La puissance solaire sortant du récepteur sans avoir été absorbée et sa sensibilité au paramètre contenu dans l'exponentielle décrivant la densité de particule dans le ciel de lit ont été calculées dans des conditions très proches du cas réel (voir Fig. 3.9) : la réflectivité de l'acier en surface interne du récepteur est  $\rho^{\mathcal{R}} = 0.4$  et la réflectivité du hublot en quartz ( $\mathcal{G}$ ) est fixé à  $\rho^{\mathcal{G}} = 0.1$ . Le diamètre des particules est  $d_p = 280\mu m$  et la densité des particules dans la zone où elle est constante est fixée à  $\eta_0 = 26.10^3 cm^{-3}$ .



FIGURE 3.9 – Comparaison entre la maquette expérimentale transparente [8] et la géométrie modélisée

Le temps de calcul moyen pour une réalisation telle que présentée sur la figure 3.10 est de quelques minutes.

En comparant les puissances perdues (Fig. 3.10 (a)), et leur sensibilité à  $p$  (Fig. 3.10 (b)), on remarque qu'il est possible de minimiser les pertes d'énergie en choisissant  $p$  autour de 0,014. Quand  $p$  augmente au delà de 0.014, la concentration en particules dans le ciel diminue. Ainsi, l'énergie solaire collimatée a plus de chances de toucher la surface du récepteur au niveau du changement de section et d'être réfléchi vers la sortie. A l'opposée, quand  $p$  diminue en dessous de 0.014, l'énergie réfléchi par la densité importante de particules proches du hublot devient le phénomène prédominant. D'autres études paramétriques utilisant la même méthode devraient permettre d'optimiser l'ensemble des paramètres pour une meilleure efficacité du récepteur solaire.

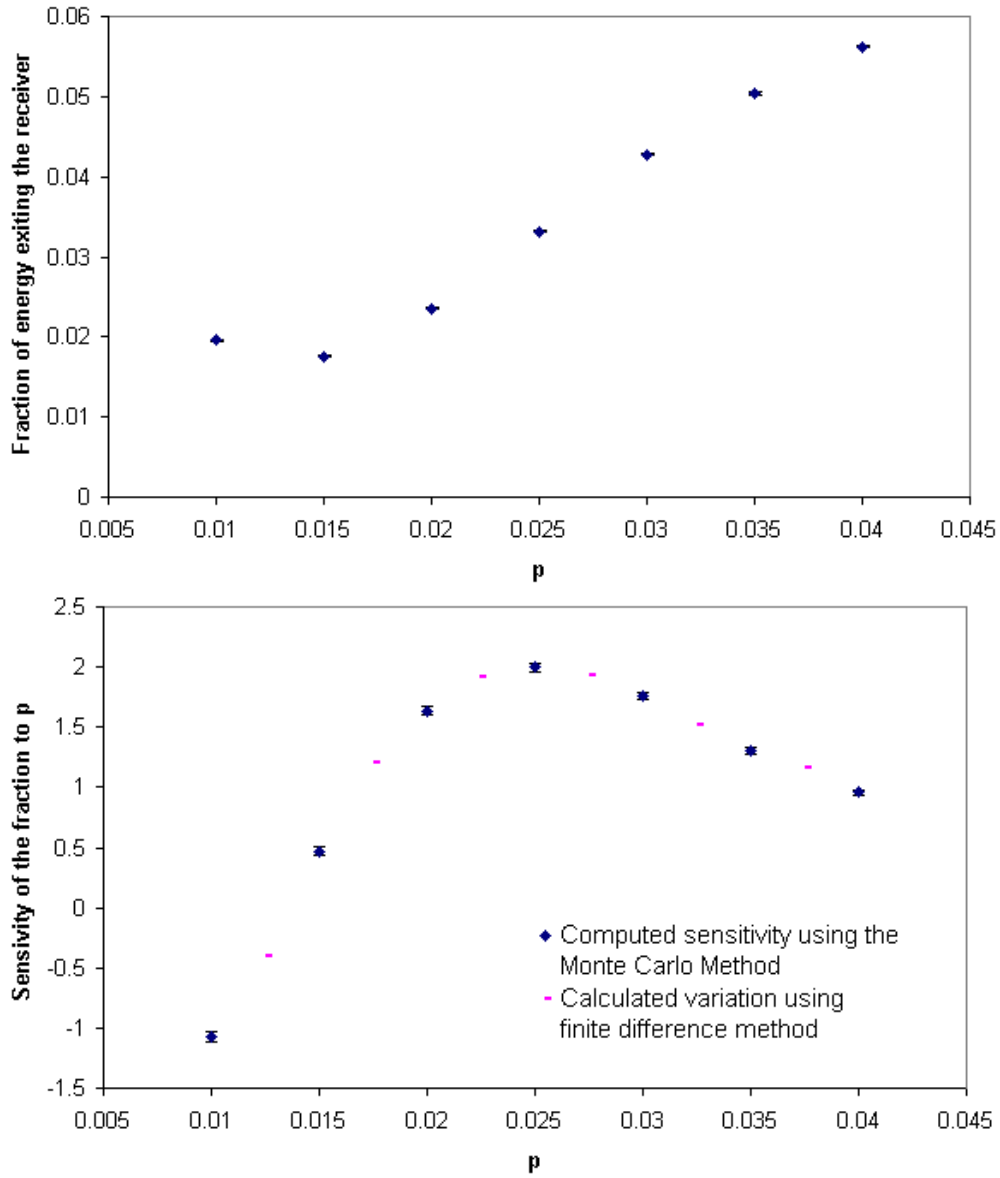


FIGURE 3.10 – (a). Fraction de l'énergie incidente qui est perdue par réflexion, avec le paramètre  $p$  fixe  
 (b). Sensibilité de la fraction perdue par rapport à  $p$  calculée par ED-Star,  $p$  fixe  
 Le nombre de réalisations est  $10^6$ .

### 3.2.4 Photobioréacteur

Les photobioréacteurs solaires clos sont des procédés qui utilisent des micro-organismes photosynthétiques pour catalyser la photosynthèse dans le but de convertir du  $CO_2$  et de l'eau en une grande variété de molécules complexes (lipides, protéines, glucides, hydrocarbures...) qui compose la biomasse ainsi que de l' $O_2$  comme co-produit intéressant. La photosynthèse est en fait à l'origine de la formation des ressources d'énergie fossile. L'intérêt essentiel des photobioréacteurs a donc naturellement été redécouvert depuis que l'épuisement des ressources d'énergie conventionnelle a été annoncé. Le défi actuel des chercheurs est de concevoir des photobioréacteurs très performants (en termes de surface de capteurs solaires et de volume de réacteur) pour la production de biomasse.

Du point de vue radiatif, on peut considérer un photobioréacteur comme une suspension de micro-organismes dans une solution liquide éclairée (culture). Cette culture est un milieu participant (absorbant, diffusant) dont les micro-organismes sont les diffuseurs. L'énergie solaire est absorbée et convertie en biomasse par la réaction de photosynthèse. Afin de se développer dans la culture, les micro-organismes ont besoin de lumière et de composés chimiques (nutriments) comme du  $CO_2$  et des sels minéraux. Pour optimiser la production de biomasse d'un photobioréacteur, il faut assurer un apport optimal en nutriments et en lumière. En pratique, il est assez facile de garantir un apport non limitant en nutriments et c'est le transfert radiatif de la lumière qui est le phénomène essentiel dirigeant le fonctionnement d'un photobioréacteur et qui en détermine les performances [87]. Ainsi, dans toutes les études scientifiques ou techniques d'un photobioréacteur, on a besoin de calculer le champ de radiation au sein de la culture et dans des géométries assez complexes (voir Fig. 3.11).

La suite de ce paragraphe reprend des travaux menés avec Jérémie DAUCHET en Thèse au Laboratoire de Génie Chimique et Biolochimique (LGCB) de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et au LAPLACE de l'Université Paul Sabatier de Toulouse.

On s'intéresse ici au pilote expérimental de photobioréacteur à éclairage volumique appelé DiCoFluV (Dilution Contrôlée du Flux en Volume) dans lequel, le flux solaire concentré est amené puis dilué dans la culture par des fibres optiques à diffusion latérale (FODL) de telle sorte que la densité de flux volumique soit proche de la valeur optimale pour atteindre l'efficacité thermodynamique idéale de la photosynthèse [88]. Le DiCoFluV est un réacteur cylindrique de 1 m de haut et 16,5 cm de diamètre qui contient 979 FODL (2,4 mm de diamètre) organisée selon un maillage régulier hexagonal d'angle  $\frac{\pi}{3}$ . La distance entre les axes de deux fibres voisines est de 4,8 mm et la distance entre la paroi du réacteur et l'axe des fibres les plus proches est de 3,6 mm (voir Fig. 3.11)

#### 3.2.4.1 Présentation du système étudié

Dans les simulations présentées ci-dessous, les micro-organismes modélisés sont des cyanobactéries *Arthrospira platensis* PCC 8005 (nom générique : *Spiruline*) qui réalise la réaction de photosynthèse pour des longueurs d'ondes de 400 à 700 nm (bande spectrale utile pour la photosynthèse) et de forme cylindrique avec une distribution de taille "log-normal". On utilise les codes de Mie pour déterminer, à partir des données disponibles sur l'indice de réfraction complexe de la spiruline et du modèle des sphères équivalentes, pour déterminer la fonction de phase spectrale  $p_{\Omega,\nu}^{\lambda}(\omega|\omega')$ , et les surfaces efficaces d'absorption et de diffusion  $\sigma_{a,\nu}$ ,  $\sigma_{s,\nu}$  (voir Fig. 3.12). On peut ainsi définir une concentration volumique uniforme de micro-organismes  $\eta$  (en faisant l'hypothèse du réacteur

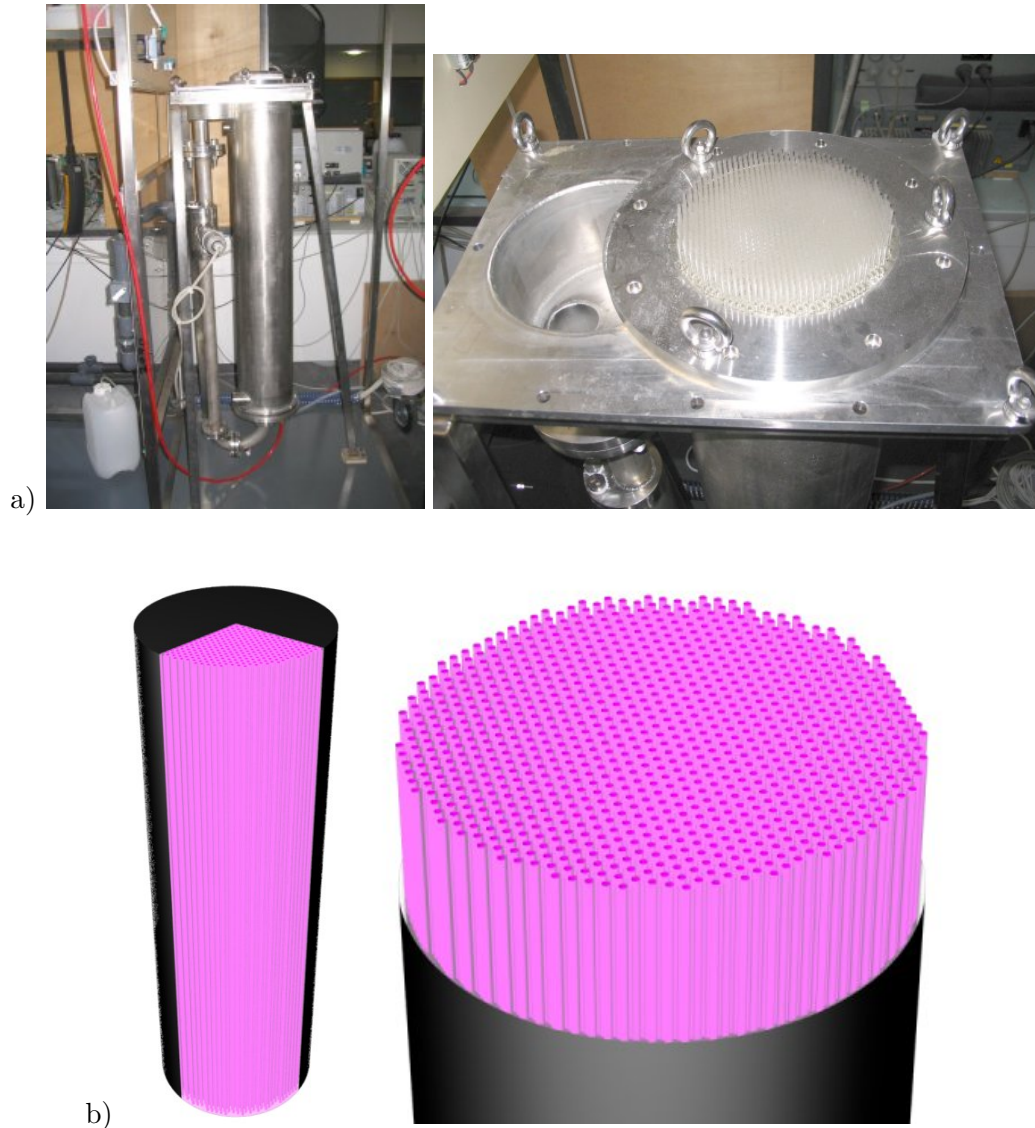


FIGURE 3.11 – a) - Photographie du photobioréacteur DiCoFluV développé par le LGCB [88]  
b) - Géométrie simulée avec ED-STAR

parfaitement mélangé) et en déduire tous les paramètres de l'équation de transfert radiatif :  $p_{\Omega,\nu}^{\nu}$ ,  $k_{a,\nu} = \eta \sigma_{a,\nu}$ ,  $k_{s,\nu} = \eta \sigma_{s,\nu}$ . L'algorithme de Monte-Carlo présenté plus bas (formulation intégrale) permet d'estimer l'irradiance  $G$  utile pour la photosynthèse en tout point  $\mathbf{x}_0$  du volume de la culture ainsi que ses sensibilités à la concentration  $\eta$  et aux paramètres de distribution de taille de la spiruline  $\bar{a}$  et  $s$  (voir légende de Fig. 3.12). L'intensité lumineuse utile pour la photosynthèse est égale à l'irradiance monochromatique  $G_{\nu}$  intégrée sur la bande spectrale utile pour la photosynthèse  $[\nu_{min}, \nu_{max}]$  qui dépend du micro-organisme considéré

$$G(\mathbf{x}_0) = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} G_{\nu}(\mathbf{x}_0) d\nu = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \int_{4\pi} L_{\nu}(\mathbf{x}_0, \omega) d\omega d\nu \quad (3.28)$$

avec  $L_{\nu}(\mathbf{x}_0, \omega)$  la luminance monochromatique au point  $\mathbf{x}_0$  dans la direction  $\omega$ .

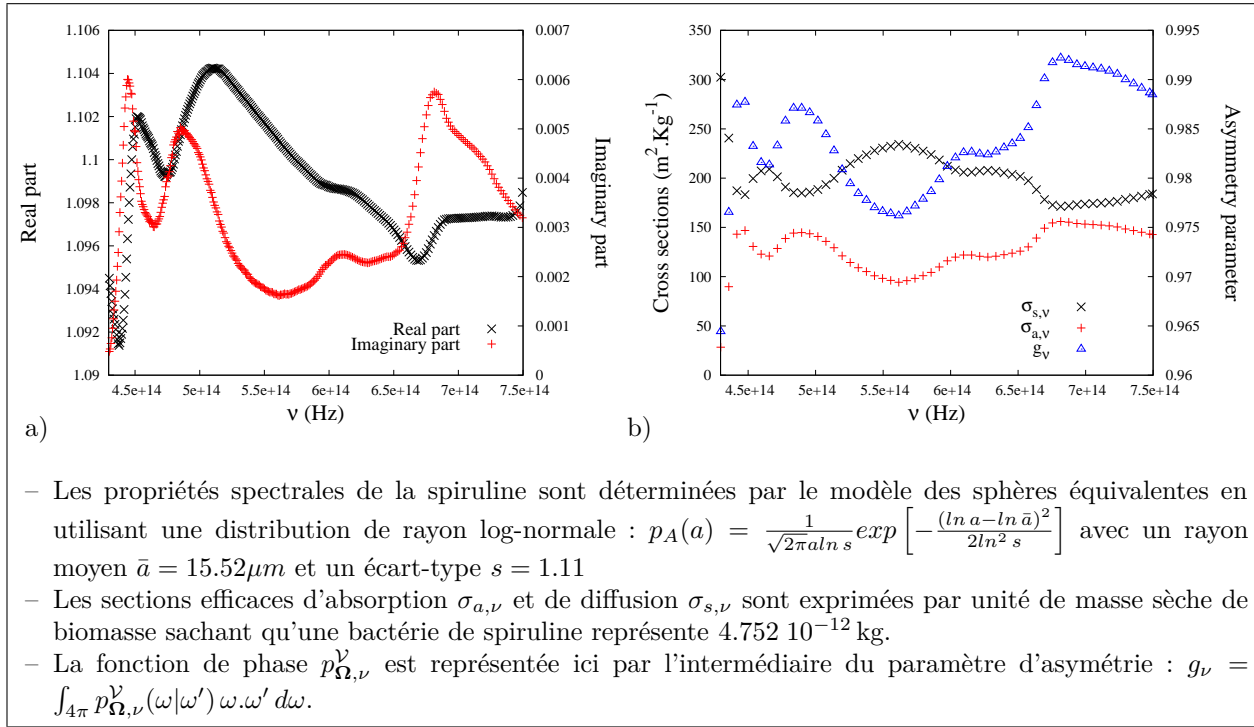


FIGURE 3.12 – a) Indice de réfraction complexe spectral de la *Spiruline*.  
b) Propriétés radiatives spectrales de *Spiruline*

Il y a deux types de frontières géométriques dans le photobioréacteur DiCoFluV :

- la paroi ( $\mathcal{R}$ ) en inox du réacteur est modélisée par une surface diffuse de réflectivité uniforme  $\rho_\nu^{\mathcal{R}}$  ;
- la surface ( $\mathcal{F}$ ) des fibres optiques à diffusion latérale est modélisée par une surface opaque diffuse (de réflectivité uniforme  $\rho_\nu^{\mathcal{F}}$ ) et émettrice (le flux surfacique émis  $\varphi_\nu$  est uniforme et lambertien).

Les phénomènes modélisés ici dans le photobioréacteur sont très proches des phénomènes modélisés dans le récepteur solaire à lit fluidisé (Sec. 3.2.3). La principale différence consiste ici à utiliser un algorithme inverse. Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.1.4, les algorithmes de Monte-Carlo réciproques sont utilisés traditionnellement pour estimer les échanges radiatifs entre une grande surface émettrice (ici :  $\mathcal{F}$ ) et des volumes (ici : le volume élémentaire autour du point  $\mathbf{x}_0$ ) petits devant la taille du système. La seconde différence est liée au fait que les rayons qui diffusent dans le photobioréacteur ne sortent pas de la géométrie. Aussi, afin de stopper le tirage des positions successives du chemin optique, nous utilisons une "Roulette Russe" entre la réflexion et l'absorption quand la position du chemin optique atteint une fibre optique  $\mathcal{F}$ .

### 3.2.4.2 Formulation intégrale

Voici donc l'expression intégrale du champ d'irradiance  $G$  en  $\mathbf{x}_0$  qui correspond à l'algorithme mis en oeuvre :

$$G(\mathbf{x}_0) = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} p_\nu(\nu) d\nu \int_{4\pi} p_{\Omega_0}^\nu(\omega_0) d\omega_0 \int_0^\infty p_{\kappa_0}(\kappa_0) d\kappa_0 \times \left( \begin{array}{l} H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{R}) \int_{2\pi} p_{\Omega_1}^\mathcal{R}(\omega_1) d\omega_1 \int_0^\infty p_{\kappa_1}(\kappa_1) d\kappa_1 \mathcal{I}_1 + \\ H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{F}) \int_0^1 p_{R_1}(r_1) dr_1 \left\{ \begin{array}{l} H(r_1 \leq \rho_\nu^\mathcal{F}) \int_{2\pi} p_{\Omega_1}^\mathcal{F}(\omega_1) d\omega_1 \int_0^\infty p_{\kappa_1}(\kappa_1) d\kappa_1 \mathcal{I}_1 + \\ H(r_1 > \rho_\nu^\mathcal{F}) \hat{w}_1 \end{array} \right\} + \\ H(\mathbf{x}_1 \in \mathcal{V}) \int_{4\pi} p_{\Omega_{1,\nu}}^\mathcal{V}(\omega_1|\omega_0) d\omega_1 \int_0^\infty p_{\kappa_1}(\kappa_1) d\kappa_1 \mathcal{I}_1 \end{array} \right) \quad (3.29)$$

$\mathcal{I}_j$  est définie de manière récurrente par :

$$\mathcal{I}_j = \left( \begin{array}{l} H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{R}) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}}^\mathcal{R}(\omega_{j+1}) d\omega_{j+1} \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} + \\ H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{F}) \int_0^1 p_{R_{j+1}}(r_{j+1}) dr_{j+1} \left\{ \begin{array}{l} H(r_{j+1} \leq \rho_\nu^\mathcal{F}) \int_{2\pi} p_{\Omega_{j+1}}^\mathcal{F}(\omega_{j+1}) d\omega_{j+1} \\ \times \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \\ + H(r_{j+1} > \rho_\nu^\mathcal{F}) \hat{w}_{j+1} \end{array} \right\} + \\ H(\mathbf{x}_{j+1} \in \mathcal{V}) \int_{4\pi} p_{\Omega_{j+1,\nu}}^\mathcal{V}(\omega_{j+1}|\omega_j) d\omega_{j+1} \int_0^\infty p_{\kappa_{j+1}}(\kappa_{j+1}) d\kappa_{j+1} \mathcal{I}_{j+1} \end{array} \right) \quad (3.30)$$

Les lois de tirages et autres notations sont, pour la plupart, celles que nous avons définies au chapitre 2 :

- $p_\nu(\nu) = \frac{1}{\nu_{max} - \nu_{min}}$  ;
- $p_{\Omega_0}^\nu = \frac{1}{4\pi}$  ;
- $p_{\Omega_{j,\nu}}^\mathcal{V}$  pour  $j > 0$  est la fonction de phase d'Henyeey-Greenstein de paramètre d'asymétrie  $g_\nu$  :  
 $p_{\Omega_{j+1,\nu}}^\mathcal{V}(\omega_{j+1}|\omega_j) = \frac{1}{4\pi} \frac{1-g_\nu^2}{(1-2g_\nu\omega_{j+1}\cdot\omega_j+g_\nu^2)^{3/2}}$  ;
- $p_{\Omega_j}^\mathcal{R}(\omega_j) = p_{\Omega_j}^\mathcal{F}(\omega_j) = \frac{\omega_j \cdot \mathbf{n}_j}{\pi}$  ;
- $p_{R_j} = 1$  ;
- $\mathbf{x}_{j+1} \equiv \mathbf{x}_{j+1}(\mathbf{x}_j, \omega_j, \kappa_j)$  (cf. Sec. 2.3).

Enfin voici l'expression de la fonction poids :

$$\hat{w}_j = \frac{\varphi_\nu}{\pi(1-\rho_\nu^\mathcal{F})} \frac{1}{p_\nu(\nu) p_{\Omega_0}^\nu} \left[ \prod_{q=1}^j \rho_{\nu,q} \right] e^{-k_a d_j} \quad (3.31)$$

avec  $d_j$  la longueur de chemin optique de diffusion/réflexion multiple (cf. 2.1.4), et  $\rho_{\nu,q} = \rho_\nu^\mathcal{R}$  si  $\mathbf{x}_q \in \mathcal{R}$  and  $\rho_{\nu,q} = 1$  sinon.

Pour exprimer les formulations intégrales des sensibilités, nous nous basons sur la section 2.3 et sur l'application précédente du lit fluidisé (cf. Eq. 3.25). La formulation intégrale de la sensibilité à la concentration en micro-organisme  $\frac{\partial G(\mathbf{x}_0)}{\partial \eta}$  est identique à celle de  $G(\mathbf{x}_0)$  (Eqs. 3.29, 3.30) en remplaçant seulement  $\hat{w}_j$  par  $\hat{w}_{\eta,j}$  :

$$\hat{w}_{\eta,j} = \hat{w}_j \left[ -\sigma_{a,\nu} d_j + \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1 - \kappa_q}{\eta} \right] \quad (3.32)$$

La irradiance  $G(\mathbf{x}_0)$  estimée par l'algorithme de Monte-Carlo dépend de la distribution de taille de la spiruline au travers des propriétés optiques radiatives :  $\sigma_{a,\nu}$ ,  $\sigma_{s,\nu}$  et  $g_\nu$  (obtenues par des codes de Mie ayant pour entrée la distribution de taille). Voici donc comment exprimer les sensibilités au paramètre de la distribution de taille de la spiruline :

$$\frac{\partial G}{\partial \bar{a}} = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \left[ \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{a,\nu}} \frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial \bar{a}} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{s,\nu}} \frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial \bar{a}} + \frac{\partial G_\nu}{\partial g_\nu} \frac{\partial g_\nu}{\partial \bar{a}} \right] d\nu \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \left[ \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{a,\nu}} \frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial s} + \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{s,\nu}} \frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial s} + \frac{\partial G_\nu}{\partial g_\nu} \frac{\partial g_\nu}{\partial s} \right] d\nu \quad (3.34)$$

De la même manière et toujours en suivant la démarche présentée section 2.3-Cas **b**), les formulations intégrales correspondant aux termes  $\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{a,\nu}} d\nu$ ,  $\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \frac{\partial G_\nu}{\partial \sigma_{s,\nu}} d\nu$  et  $\int_{\nu_{min}}^{\nu_{max}} \frac{\partial G_\nu}{\partial g_\nu} d\nu$  sont identiques à celle de  $G(\mathbf{x}_0)$  (Eqs. 3.29, 3.30) en remplaçant respectivement  $\hat{w}_j$  par  $\hat{w}_{\sigma_{a,\nu},j}$ ,  $\hat{w}_{\sigma_{s,\nu},j}$  et  $\hat{w}_{g_\nu,j}$  :

$$\hat{w}_{\sigma_{a,\nu},j} = -\hat{w}_j \eta d_j \quad (3.35)$$

$$\hat{w}_{\sigma_{s,\nu},j} = \hat{w}_j \sum_{q=0}^{j-1} \frac{1 - \kappa_q}{\sigma_{s,\nu}} \quad (3.36)$$

$$\hat{w}_{g_\nu,j} = \hat{w}_j \sum_{q=0}^{j-1} A_q \quad (3.37)$$

avec  $A_q = \frac{\partial_{g_\nu} p_{\Omega_j > 0, \nu}^\nu}{p_{\Omega_j > 0, \nu}^\nu} = -\frac{2g_\nu}{1-g_\nu^2} - 3\frac{g_\nu - \omega_q \cdot \omega_{q-1}}{1-2g_\nu \omega_q \cdot \omega_{q-1} + g_\nu^2}$  si  $\mathbf{x}_j \in \mathcal{V}$  et  $A_q = 0$  sinon.

Enfin nous pouvons écrire les expressions intégrales des sensibilités  $\frac{\partial G(\mathbf{x}_0)}{\partial \bar{a}}$  et  $\frac{\partial G(\mathbf{x}_0)}{\partial s}$  en remplaçant dans les équations 3.29 et 3.30)  $\hat{w}_j$  par  $\hat{w}_{\bar{a},j}$  ou  $\hat{w}_{s,j}$  :

$$\hat{w}_{\bar{a},j} = \hat{w}_{\sigma_{a,\nu},j} \frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial \bar{a}} + \hat{w}_{\sigma_{s,\nu},j} \frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial \bar{a}} + \hat{w}_{g_\nu,j} \frac{\partial g_\nu}{\partial \bar{a}} \quad (3.38)$$

$$\hat{w}_{s,j} = \hat{w}_{\sigma_{a,\nu},j} \frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial s} + \hat{w}_{\sigma_{s,\nu},j} \frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial s} + \hat{w}_{g_\nu,j} \frac{\partial g_\nu}{\partial s} \quad (3.39)$$

Les dérivées partielles spectrales  $\frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial \bar{a}}$ ,  $\frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial \bar{a}}$  et  $\frac{\partial g_\nu}{\partial \bar{a}}$  sont estimées numériquement (différence finie) à partir des résultats des codes de Mie en faisant varier  $\bar{a}$  de 1% autour de la valeur considérée.  $\frac{\partial \sigma_{a,\nu}}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \sigma_{s,\nu}}{\partial s}$  et  $\frac{\partial g_\nu}{\partial s}$  sont estimées de la même manière en faisant varier  $s$  de 1% autour de la valeur considérée.

### 3.2.4.3 Simulations et résultats

L'intégration spectrale ne pose pas de soucis particulier (Eqs. 3.33-3.34), grâce aux faibles variations des propriétés radiatives sur la bande spectrale étudiée (on peut comparer les variations des courbes Fig. 2.3 et Fig. 3.12 pour s'en convaincre). Dans cet exemple, la convergence de l'algorithme est limitée par l'intégration sur les multiples événements de diffusion et de réflexion. Nous présentons sur les trois figures ci-après les profils de grandeurs à trois endroits du réacteur :

- Fig. 3.13 profil calculé le long d'un segment horizontal entre le centre de deux fibres optiques au centre du réacteur ;
- Fig. 3.14 profil calculé le long d'un segment horizontal entre deux rangées de fibres optiques ;
- Fig. 3.15 profil calculé le long d'un segment horizontal entre la paroi du réacteur et le centre de la fibre optique la plus proche.

Pour les simulations dont les résultats sont présentés sur ces trois figures, nous avons utilisé les paramètres suivants :

- $\varphi_\nu = 10^{-7} \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{K_B 6000} - 1\right)}$ , ( $\varphi_\nu$  est proportionnel à la luminance de Planck à 6000K) ;
- $\rho_\nu^{\mathcal{F}} = 0.1$ ,  $\rho_\nu^{\mathcal{R}} = 0.5$ ,  $\eta = 4 \text{ kg.m}^{-3}$  de biomasse sèche ;
- les sensibilités de l'intensité  $G$  sont respectivement exprimées sous la forme de variation relative par rapport à la concentration  $\eta$  en spiruline et aux paramètres  $\bar{a}$  et  $s$  de la distribution de taille ;
- nous avons effectué  $N_1 = 10^6$  réalisations et les écart-types relatifs correspondant sont d'environ 0.1%

Pour les quatre grandeurs étudiées ici ( $G$  et ses trois sensibilités), les estimations sont fiables (bonne convergence de l'algorithme sur les 4 grandeurs) puisqu'on ne peut distinguer les barres d'erreur correspondant aux écart-types sur aucune des trois figures. Néanmoins, si on augmente fortement la concentration en spiruline, la précision des estimations risque de diminuer. Si l'on souhaite réduire la variance dans ce cas précis, tenter de choisir des lois de tirages optimisées ( $p_{\Omega_j, opt}$  pour  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $p_{\kappa_j, opt}$ ) serait vraiment très complexe (voir Sec. 2.2). De plus en utilisant la technique d'échantillonnage préférentiel, pour diminuer la variance de l'estimation d'une grandeur, on risque d'augmenter la variance des trois autres estimations. Ainsi si le cas se présentait, il faudrait plutôt utiliser la technique de variable de contrôle (voir Sec. 4.4 afin de limiter la source de variance causée par la grande dispersion de la longueur des chemins optiques de diffusion/réflexion multiple.

Dans les prochains travaux de J. DAUCHET, l'algorithme utilisé ici sera étendu pour estimer la productivité de la spiruline en fonction du champ d'irradiance dans le DiCoFluv. Puis l'estimation de la sensibilité à la concentration  $\eta$  devrait permettre de définir une concentration volumique optimale de spiruline pour maximiser la production de biomasse. Ce genre d'optimisation dépend de la capacité à caractériser les micro-organismes. Concernant leur distribution de taille, nous avons montré que le champ d'intensité est surtout sensible au rayon moyen. On peut en conclure, qu'il faut mesurer avec une grande précision la taille moyenne du micro-organisme étudié tandis que connaître la dispersion des tailles autour de la taille moyenne est moins important.



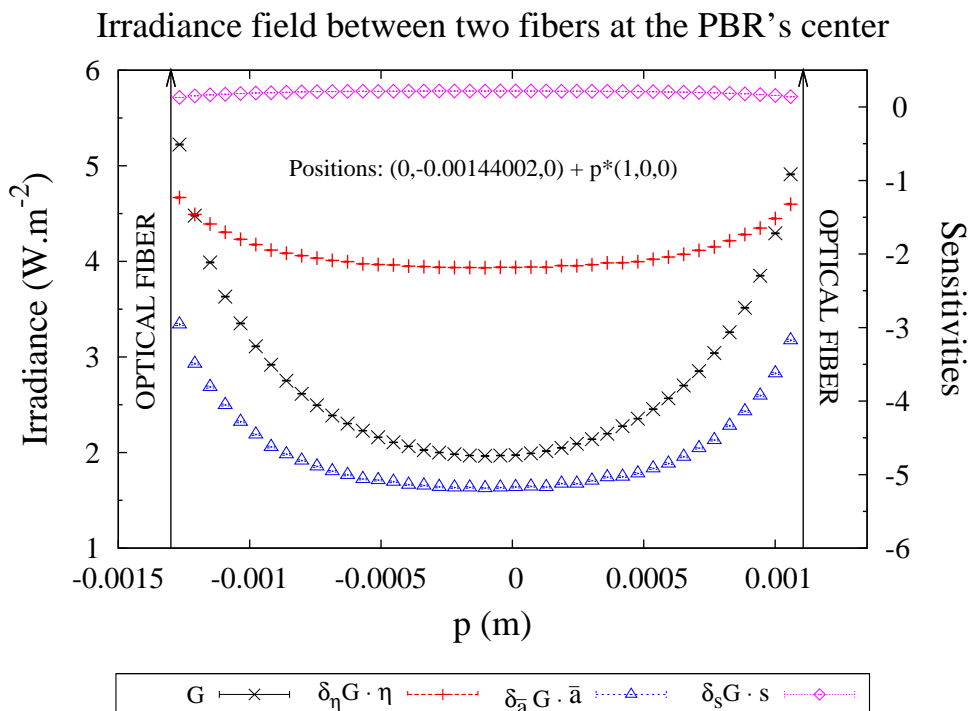


FIGURE 3.13 – Profil calculé le long d'un segment horizontal entre le centre de deux fibres optiques au centre du réacteur

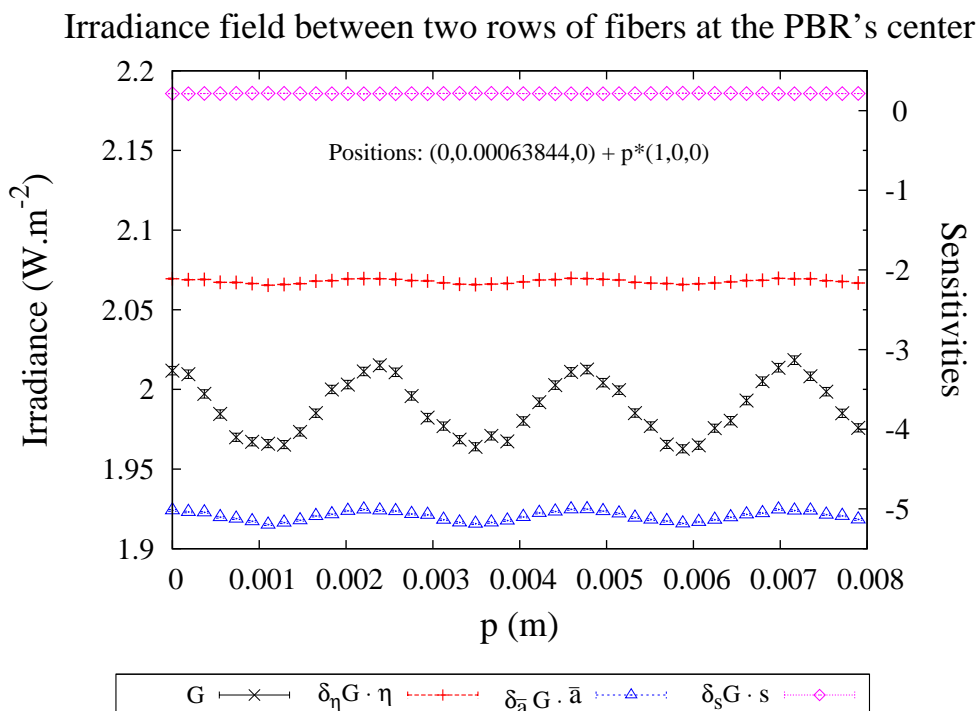


FIGURE 3.14 – Profil calculé le long d'un segment horizontal entre deux rangées de fibres optiques

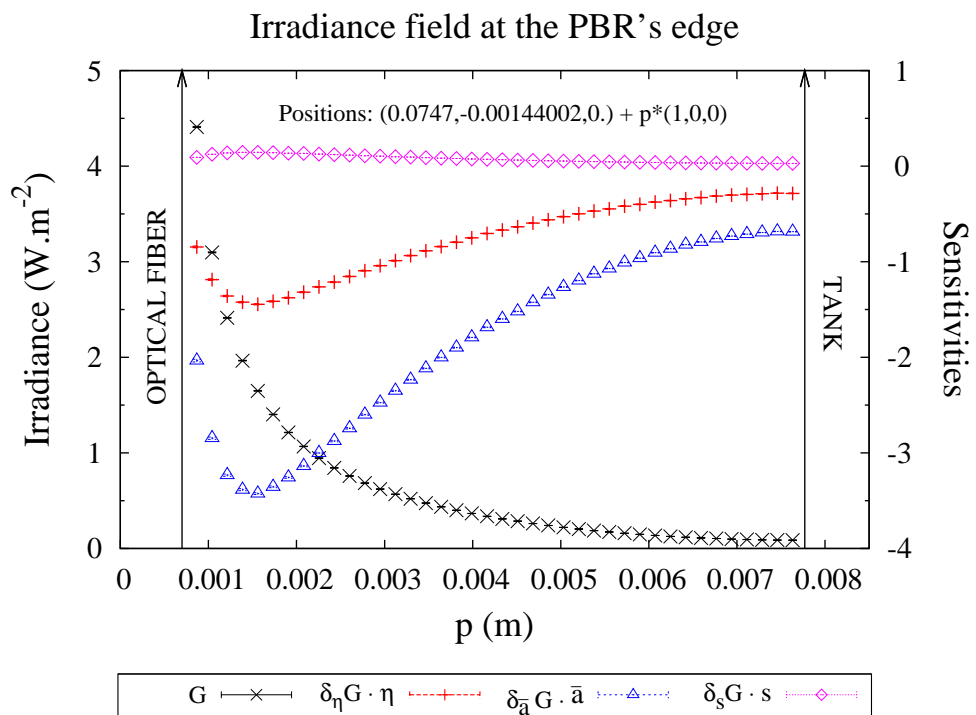


FIGURE 3.15 – Profil calculé le long d'un segment horizontal entre la paroi du réacteur et le centre de la fibre optique la plus proche

## Chapitre 4

# Quelles sont les difficultés rencontrées lors des calculs de sensibilité ?

Comme nous l'avons déjà écrit au 2.3, un des gros avantages des algorithmes de Monte-Carlo est de pouvoir estimer en plus de la grandeur étudiée, ses sensibilités à tout paramètre, en un seul calcul, pour un faible temps de calcul supplémentaire [10, 11, 4]. Nous avons vu précédemment au travers de quatre exemples (cf. Sec. 3.2) que dans beaucoup de cas, l'estimation simultanée des sensibilités ne pose aucun problème : Il suffit de définir le type de la sensibilité étudiée parmi les cas présentés Sec. 2.3 (cas **a**, **b**, **c** ou **d**) et d'appliquer la méthodologie correspondante, les modifications à apporter à l'algorithme étant alors minimales. Cependant, en appliquant à la lettre ces procédures, on se heurte parfois à des difficultés qui peuvent rendre l'estimation de la sensibilité en question très compliquée voire irréalisable.

Le but de ce chapitre est de recenser les difficultés majeures qui ont été rencontrées à ce jour dans certains cas d'application de la proposition théorique de [11], puis de les analyser théoriquement, tout en gardant en mémoire les besoins correspondant à notre contexte applicatif tel que nous l'avons identifié dans le premier chapitre.

### 4.1 Recensement de ces difficultés

Nous savons d'une part que les algorithmes de Monte-Carlo peuvent avoir des problèmes de convergence (cf. Chap. 2) et d'autre part, que la démarche exposée en détails dans [4] (pp. 57-86) pour calculer des sensibilités à la déformation du domaine peut parfois être lourde en termes de mise en oeuvre pratique. Nous pouvons donc, d'ores et déjà, supposer qu'il existe deux grandes familles de problèmes :

**La difficulté peut être une difficulté de mise en oeuvre pratique** lorsque la configuration et/ou le type de phénomènes étudiés alourdissent la mise en application des propositions théoriques de la section 2.3.

**Dans d'autres cas la difficulté est caractérisée par un problème de convergence** sur l'estimation de la sensibilité malgré une bonne convergence de l'estimateur de la grandeur principale.

Reste à réfléchir à une classification plus aboutie qui permette au lecteur de reconnaître le type de la difficulté à laquelle il pourrait être confronté lors de l'étude de problèmes spécifiques et, dans la mesure du possible, lui proposer des solutions ou des pistes à suivre pour contourner ces obstacles lors du développement d'un algorithme adapté à son problème.

Partant de l'hypothèse qu'il existe deux grandes familles de problèmes et en nous basant exclusivement sur les cas que nous avons rencontrés, nous cherchons donc à répondre aux questions suivantes :

- Y a-t-il plusieurs types de problèmes de mise en oeuvre, respectivement de convergence ?
- Qu'est-ce qui les caractérise ?
- Peut-on facilement les reconnaître ?
- Existe-t-il des solutions généralistes pour les résoudre ou bien faut-il faire un effort de recherche particulier supplémentaire à chaque fois qu'une nouvelle application ou problématique scientifique est abordée. ?

Nous avons à ce jour rencontré trois types de difficultés majeures lors de l'étude de systèmes solaires à concentration :

1. La première est une difficulté de mise en oeuvre formelle. Nous l'avons rencontrée sur des sensibilités de type **d** : en appliquant la démarche du 2.3, nous nous sommes heurtés à un obstacle mathématique avant même d'avoir pu exprimer le poids de la sensibilité. Cette difficulté provient de la présence d'un produit de nombreux Heavisides dépendant du paramètre (qui correspondent à des test géométriques) dans le poids de la grandeur.

La sensibilité étant de type **d**, il est nécessaire de décomposer le domaine d'intégration en sous-domaines sur lesquels les fonctions Heaviside ont une valeur constante. Les tests sont parfois tellement nombreux qu'il est difficile de gérer tous les cas. Nous avons rencontré ce souci en essayant de calculer pour des champs d'héliostats des sensibilités à des paramètres tels que la hauteur de la tour, la taille ou l'inclinaison de la cible, la latitude du site considéré.

Il n'est vraiment pas facile de déterminer les bornes des sous-domaines parce que : soit les tests ne dépendent pas *directement* du paramètre ; soit ils ne portent pas *directement* sur les variables d'intégration. C'est une dépendance *indirecte* : on trouve à l'intérieur des Heavisides des fonctions de fonctions qui, elles, dépendent directement du paramètre ou des variables d'intégration. En fait le problème est qu'il est parfois très difficile partant d'une sensibilité de type **d** de se ramener à une sensibilité de type **c**. Nous n'avons à ce stade pas encore trouvé de solution pratique directe à ce problème, qui fait l'objet du paragraphe 4.2, mais nous avons pu transformer légèrement le modèle pour nous ramener à la difficulté ci-après (pour laquelle nous avons pu trouver une solution partielle).

2. La seconde difficulté typique identifiée dans nos travaux est sans doute la plus connue et la plus ancienne. Nous en avons déjà parlé dans les Secs. 2.1, 2.2. Il s'agit d'un problème de convergence sur l'estimation de la sensibilité qui apparaît lorsque les fluctuations statistiques du poids de la grandeur principale sont faiblement corrélées à celles de la dérivée logarithmique de la densité de probabilité ou de la divergence du vecteur vitesse de déformation.

L'identification de cette difficulté n'est pas originale, et nous nous attendions bien sûr à la rencontrer lors de l'étude de phénomènes avec diffusion multiple. Elle a notamment été

mentionnée par Remi CARMINATTI du laboratoire EM2C dans ses travaux sur l'imagerie médicale [89] ainsi que par Benoit GAY du laboratoire CETHIL dans ses travaux sur l'imagerie polarisée [90].

Nous aborderons cette question de la diffusion multiple au 4.4, mais nous verrons aussi au 4.3 que la prise en compte des erreurs de pointage des héliostats peut conduire à une divergence de l'estimateur de la sensibilité à la hauteur de la tour pour des raisons similaires. Nous apporterons des solutions partielles à ces deux exemples.

3. La dernière difficulté est à nouveau (comme la première) une difficulté de mise en oeuvre et elle concerne les sensibilités de type  $\mathbf{c}^1$  (sur les cas que nous avons rencontrés, il s'agit en pratique, de sensibilités de type  $\mathbf{d}$  qui se transforment facilement en type  $\mathbf{c}$ ). Contrairement à la première elle n'est pas liée au formalisme mathématique. L'expression formelle du poids de la sensibilité ne pose pas de problème, mais lorsqu'on commence à modifier l'algorithme initial d'estimation de la grandeur pour y ajouter l'estimation de la sensibilité, on se rend compte rapidement qu'une seule ligne de code n'est pas suffisante.

Nous avons jusqu'ici rencontré cette difficulté quand la dimension du domaine d'intégration de la formulation intégrale est infinie (phénomène de diffusion et/ou réflexion multiple). La source du problème vient, en fait, de l'expression du champ de vitesse de déformation qui possède, d'un point de vue formel, une infinité de composantes, chacune de ces composantes dépendant de toutes les précédentes (cf. Eqs. 2.43,2.44). Aussi pour calculer les composantes non nulles du vecteur vitesse, il faut évidemment stocker toutes ses composantes mais aussi un grand nombre d'informations sur l'historique du paquet de photons (l'intégralité du détail du chemin optique peut être nécessaire pour calculer le champ des vitesses de déformation). Les cas pratiques associés à cette difficulté de mise en oeuvre algorithmique concernent les calculs de sensibilité à la position d'une source radiative et aux paramètres géométriques ou dimensions des enceintes radiatives de milieux turbides. Il s'agit en particulier dans les photobioréacteurs d'estimer la sensibilité du champ de radiation aux paramètres géométriques comme l'écartement et le diamètre des fibres optiques à diffusion latérale. Nous verrons dans la section 4.4 que cette difficulté pratique de mise en oeuvre algorithmique est d'ordre géométrique et que l'expression des composantes du vecteur vitesse peut devenir complexe lorsque qu'il faut définir avec différents tests conditionnels la formule appropriée parmi de multiples cas, en fonction du résultat des tests de sortie. Dans le cadre d'une reformulation intégrale, nous proposerons au 4.4 un changement de variable qui permet de transformer la sensibilité géométrique en sensibilité paramétrique faisant ainsi disparaître toute difficulté de mise en oeuvre.

La suite de ce chapitre est donc structurée de la façon suivante :

- Dans la section 4.2, nous étudions une configuration *Héliostat-Tour* en réflexion spéculaire, ce qui correspond à la difficulté 1 ;
- La Sec. 4.3 reprend la même configuration pour une réflexion non purement spéculaire, ce qui correspond à la difficulté 2 ;
- Dans la Sec. 4.4, nous abordons la question de la diffusion multiple, ce qui correspond dans un premier temps à la difficulté 3, mais une fois cette difficulté contournée, nous nous retrouvons

---

1. Sensibilité à la déformation du domaine

confrontés à nouveau à la difficulté 2.

Ces trois sections auront toutes la même structure. Nous partirons à chaque fois d'un vrai problème solaire dont nous sélectionnerons une configuration actuellement étudiée par la communauté scientifique et pour laquelle une analyse de sensibilité serait un grand coup de pouce à la compréhension des phénomènes mis en jeu dans ces procédés à énergie solaire concentrée. Une analyse rapide de la configuration en question nous permettra de formuler des hypothèses quant aux points durs susceptibles de se produire lors de la mise en application des propositions théoriques pour le calcul de sensibilités. Partant des conclusions de cette analyse, nous extrairons alors de la configuration solaire réaliste une configuration simplifiée. Cette configuration sera choisie de sorte que la simplification n'enlève rien à la difficulté du système d'origine mais permette une analyse théorique plus aboutie.

## 4.2 Sensibilité à la hauteur de la tour en réflexion spéculaire : illustration d'un problème de mise en oeuvre

On s'intéresse dans cette section aux centrales à tours avec champ d'héliostats. Nous avons vu au 3.2.1 que le calcul direct de la puissance solaire réfléchiée par un champ d'héliostats et interceptée par la surface d'un récepteur sur une configuration réaliste ne pose aucun problème. Il est aussi possible d'obtenir facilement des cartes de flux et nous avons même calculé la sensibilité de la puissance aux erreurs de pointage des miroirs. Nous avons vu au chapitre 1, qu'il est intéressant d'étudier l'influence de la hauteur de la tour sur les performances de ce genre de systèmes. On sait déjà d'après la littérature – et c'est assez intuitif – qu'augmenter la hauteur permet de diminuer les pertes par effet cosinus (pourvu que le soleil soit plus haut que la tour – ce qui est le cas pour tous les héliostats assez loin de la tour) mais que les pertes par débordement peuvent être augmentées (le récepteur s'éloignant des héliostats, le cône solaire réfléchi s'élargit avant de *toucher* sa surface). Il est donc légitime de penser qu'il existe une hauteur optimale qui maximise la puissance reçue au sommet de la tour. Calculer la sensibilité de cette puissance à la hauteur de la tour répondrait donc au besoin d'optimiser la conception de tels systèmes.

Reprenons l'expression intégrale (Eq. 3.14 Sec. 3.2.1) utilisée pour développer l'algorithme de Monte-Carlo qui calcule la puissance solaire  $A$  arrivant sur la cible  $\mathcal{T}^+$  (surface du récepteur) :

$$A = \int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{C}} p_{\Omega_S}(\boldsymbol{\omega}_S) d\boldsymbol{\omega}_S \left\{ H(\mathbf{x}_0 \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \hat{w}_{out} + H(\mathbf{x}_0 \notin (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{n}'_h}(\boldsymbol{\omega}_0)} p_{\mathbf{n}'_h}(\mathbf{n}'_h | \boldsymbol{\omega}_0; p) d\mathbf{n}'_h \{ H(\mathbf{x}_2 \notin \mathcal{T}^+) \hat{w}_{out} + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \hat{w}_{in} \} \right\} \quad (4.1)$$

où  $\hat{w}_{out} = 0$  et  $\hat{w}_{in} = DNI \cdot (\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_h) \cdot S_{\mathcal{H}^+}$  avec  $\mathbf{n}_h$  la normale apparente (liée aux erreurs de pointage...) qui est fonction de la normale spéculaire théorique  $\mathbf{n}_1$  et de la réalisation  $\mathbf{n}'_h$  (normale apparente exprimée dans un repère local lié à  $\mathbf{n}_1$ , cf. Fig. 3.2).  $\mathbf{x}_2$  est le point d'intersection du rayon réfléchi partant de  $\mathbf{x}_1$  dans la direction  $\vec{u}_r = \boldsymbol{\omega}_1 = 2(\boldsymbol{\omega}_S \cdot \mathbf{n}_h)\mathbf{n}_h - \boldsymbol{\omega}_S$  avec la géométrie du système.  $\mathbf{x}_2$  peut être situé :

- sur la surface  $\mathcal{H}$  d'un héliostat du champ (en général une des faces arrières de  $\mathcal{H}^-$ ) lorsque le rayon réfléchi est bloqué ;
- sur la surface  $\mathcal{T}^+$  de la cible (et on calcul  $\hat{w}_{in}$ ) ;

– ailleurs ou ne pas exister en cas de débordement.

On rappelle les autres notations déjà utilisées au 3.2.1 en bas de page<sup>2</sup>.

Le paramètre  $h$  hauteur de tour intervient dans le poids  $\hat{w}_{in}$  de manière indirecte dans  $\mathbf{n}_h$  qui est fonction de  $\mathbf{n}_1$  qui elle même est fonction de  $h$ . Ceci signifie qu'il faudra dériver  $\hat{w}_{in}$  par rapport à  $h$  mais le plus embêtant, c'est que l'on retrouve cette dépendance indirecte à  $h$  dans le test géométrique  $H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+)$ . On a donc affaire à une sensibilité de type **d** et on voit immédiatement qu'il sera très difficile de décomposer le domaine  $\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)$  en sous-domaines sur lesquels  $H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+)$  prendra une valeur constante. Nous rappelons (voir Fig. 3.2) que l'intégrale  $\int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)} p_{n'_h}(\mathbf{n}'_h|\omega_0;p) d\mathbf{n}'_h$  correspond dans l'algorithme à un tirage d'un angle zénithal  $\theta$  entre  $\mathbf{n}'_h$  et  $\mathbf{n}_1$  puis un tirage d'un angle  $\varphi$  de révolution de  $\mathbf{n}'_h$  autour de  $\mathbf{n}_1$  (on en déduit ensuite la direction de  $\mathbf{n}_h$  dans le repère global).

Il est donc indispensable de simplifier la configuration pour calculer la sensibilité  $\partial_h A$  sur une géométrie modèle et vérifier si les difficultés attendues se produisent effectivement.

#### 4.2.1 Présentation du problème simplifié

Nous avons donc fait trois grandes hypothèses simplificatrices pour définir une configuration modèle :

- On ne conserve qu'un seul miroir carré de côté  $c$ , sur tout le champ d'héliostats et nous choisissons une cible verticale rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ , placée à une hauteur  $h$  et à une distance  $d$  au sud du miroir ;
- Afin de simplifier l'intégrale et de réduire la dimension du problème, nous décidons dans un premier temps que la réflexion sur ce miroir est parfaitement spéculaire ;
- Enfin pour que la normale spéculaire soit constante pour tout  $\mathbf{x}_1$  tiré sur la surface du miroir, nous considérerons que ce miroir est plan.

La configuration retenue est représentée sur la figure 4.1. Par analogie directe avec le 3.2.1, la grandeur physique que l'on souhaite calculer est la puissance radiative solaire  $A$  réfléchi par le miroir et interceptée par la cible. On souhaite aussi estimer sa sensibilité à la hauteur de la tour.

On peut écrire cette grandeur comme la moyenne de l'énergie reçue pour chaque chemin optique partant du soleil avec un point de réflexion sur le miroir<sup>3</sup>.

$$A = \int_{\vec{u}_i \in \mathcal{C}} \int_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{H}^+} E(\vec{u}_i) (\vec{u}_i \cdot \vec{n}(\mathbf{x}_1)) \rho(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1) H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) d\mathbf{x}_1 d\vec{u}_i \quad (4.2)$$

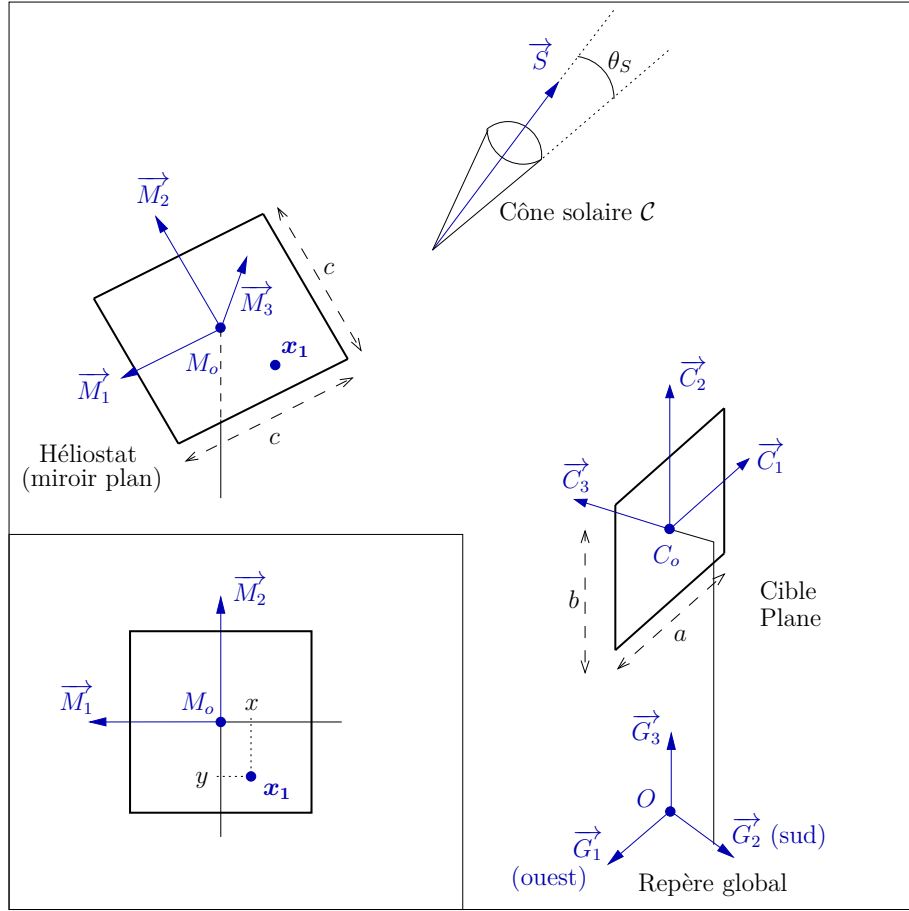
–  $E(\vec{u}_i)$  est le flux surfacique normal incident venant de la direction  $\vec{u}_i$ . Comme on choisit

---

2.  $\mathcal{H}$  la surface complète des héliostats est l'union de la partie réfléchissante  $\mathcal{H}^+$  (la surface totale de miroirs étant  $S_{\mathcal{H}^+}$ ), et de la partie arrière  $\mathcal{H}^-$ .  $\mathcal{T}$  est utilisée pour vérifier que le rayon incident sur  $\mathbf{x}_1$  venant de la direction  $\omega_S$  n'est pas à l'ombre, c'est la surface totale de la tour tandis que  $\mathcal{T}^+$  représente seulement la surface du récepteur.  $\mathcal{C}$  est le cône solaire à l'intérieur duquel on tire la direction incidente  $\omega_S$ , le rayon angulaire du cône solaire est  $\theta_S$ ). Les pdfs sont les suivantes :  $p_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{S_{\mathcal{H}^+}}$ ,  $p_{\omega_S}(\omega_S) = \frac{1}{\int_{\mathcal{C}} d\omega_S} = \frac{1}{2\pi(1-\cos\theta_S)}$  et  $p_{n_h}(\mathbf{n}_h|\omega_0;p) = \frac{2+\frac{1}{p}}{2\pi\left(1-\mu(\omega_0)^{2+\frac{1}{p}}\right)} (\mathbf{n}_h \cdot \mathbf{n}_1)^{1+\frac{1}{p}}$

avec  $p$  le paramètre du modèle de Blinn pour prendre en compte les erreurs de pointage.

3. Dans cette équation et dans toute la section présente, nous choisissons des notations plus parlantes que les notations généralistes de la section 3.2 :  $\vec{n} = \mathbf{n}_1$  pour la normale au miroir,  $\vec{u}_i = \omega_S = -\omega_0$  pour la direction du rayon incident et  $\vec{u}_r = \omega_1 = 2(\vec{u}_i \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{u}_i$  (réflexion spéculaire) pour la direction du rayon réfléchi.



Précisions sur les notations utilisées :

- $\mathbf{x}_1$  est le point de réflexion tiré sur le miroir (sur le schéma ses coordonnées locales  $x$  et  $y$  dans le repère lié au miroir sont négatives)
- Le vecteur  $\vec{M}_3$  est égal à la normale  $\vec{n}$  du miroir en  $M_o$  qui est définie afin de réfléchir les rayons du soleil sur la cible selon :

$$\vec{M}_3 = \vec{n} = \frac{\vec{n}_{nn}}{\|\vec{n}_{nn}\|} = \frac{\vec{S} + \frac{\vec{M}_o\vec{C}_o}{\|\vec{M}_o\vec{C}_o\|}}{\left\| \vec{S} + \frac{\vec{M}_o\vec{C}_o}{\|\vec{M}_o\vec{C}_o\|} \right\|}$$

où  $\vec{n}_{nn}$  est le vecteur normal non normé ;

- Ne sont pas représentés ici :  $\vec{u}_i$  la direction du rayon incident tirée dans le cône solaire  $\mathcal{C}$  et  $\mathbf{x}_2$  le point d'intersection du rayon réfléchi sur le plan de la cible

FIGURE 4.1 – Configuration simplifiée avec un heliostat plan carré spéculaire et une cible carrée au sommet d'une tour de hauteur variable.

un profil solaire de type *Pill-Box*,  $E$  est constant quelque soit  $\vec{u}_i$  :  $E = \frac{DNI}{\int_C d\omega_S}$  avec  $DNI$  l'ensoleillement normal direct (*direct normal insolation*) ;

- $(\vec{n}(\mathbf{x}_1) \cdot \vec{u}_i)$  correspond au cosinus de l'angle entre la normale du miroir au point  $\mathbf{x}_1$  et la direction incidente  $\vec{u}_i$ . Comme le miroir est plan dans cette étude,  $\vec{n}$  est constant sur toute la surface du miroir ;



–  $\rho(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1)$  est le coefficient de réflexion du miroir.

On choisit :  $\rho = 1 \quad \forall (\vec{u}_i, \mathbf{x}_1) \in \mathcal{C} \times \mathcal{H}^+$

–  $H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+)$  est le test d'intersection pour vérifier que le point d'intersection  $\mathbf{x}_2$  du rayon réfléchi (partant de  $\mathbf{x}_1$  dans la direction  $\vec{u}_r$ ) sur le plan de la cible se trouve à l'intérieur de celle-ci.

Ce test d'intersection est en fait un quadruple test, la cible ayant pour dimensions  $a \times b$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) &= H(-a/2 < \overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_1} < a/2) \cdot H(-b/2 < \overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_2} < b/2) \\ &= H(\overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_1} + a/2) \cdot H(a/2 - \overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_1}) \\ &\quad \cdot H(\overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_2} + b/2) \cdot H(b/2 - \overrightarrow{C_0\mathbf{x}_2} \cdot \overrightarrow{C_2}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour obtenir une expression intégrale où l'algorithme de Monte-Carlo est explicite (cf. Eq. 4.4), il faut introduire dans l'équation 4.2 les lois de tirage  $p_{\vec{U}_i} = p_{\Omega_S}$  et  $p_{\mathbf{X}_1}$  (cf. note de bas de page n°2).

#### 4.2.2 Formulation intégrale

Voici donc la formulation intégrale de  $A$  correspondant à l'algorithme de Monte-Carlo :

$$A = \int_{\vec{u}_i \in \mathcal{C}} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \text{avec} \quad \hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) &= \frac{E(\vec{u}_i \cdot \vec{n}) H(\mathbf{x}_2(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \in \mathcal{T}^+)}{p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1)} \\ &= DNI(\vec{u}_i \cdot \vec{n}) S_{\mathcal{H}^+} H(\mathbf{x}_2(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \in \mathcal{T}^+) \end{aligned} \quad (4.5)$$

On souhaite aussi calculer la sensibilité de  $A$  à la hauteur  $h$  de la tour :

$$\partial_h A = \partial_h \left[ \int_{\vec{u}_i \in \mathcal{C}} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \right] \quad (4.6)$$

Avec cette formulation, on peut facilement calculer  $A$ . Les affaires se compliquent lorsqu'on essaie de calculer la sensibilité  $\partial_h A$ . En effet, dans l'expression du poids de Monte-Carlo  $\vec{n}$  dépend de  $h$  et l'expression de sa dérivée n'est pas immédiate. Mais c'est surtout le test  $H(\mathbf{x}_2(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \in \mathcal{T}^+)$  qui va demander un travail approfondi. Ce test porte sur le point d'intersection  $\mathbf{x}_2$  entre le rayon réfléchi et la cible. Le rayon réfléchi est fonction de la normale et la normale est fonction de la hauteur de la tour puisque le système de suivi de l'héliostat garantit une orientation de la normale telle que les rayons réfléchis soient dirigés vers le sommet de la tour.

Ainsi on trouve une dépendance à  $h$  dans le test d'intersection, et c'est là toute la difficulté de cette section sur laquelle un travail approfondi est nécessaire. En effet la dépendance à la hauteur de la tour dans la fonction Heaviside est une dépendance indirecte, elle vient du rayon réfléchi  $\vec{u}_r(\vec{u}_i, \vec{n}(h))$  dont le second paramètre est une fonction de  $h$ . Aussi, on constate finalement que la sensibilité  $\partial_h A$  est bien une sensibilité de type **d** comme annoncé plus haut dans l'introduction de cette section.

Nous détaillons dans la sous-section suivante les étapes successives de la procédure à suivre qui a été énoncée au 2.3 cas **d**. A savoir :

- déterminer le sous-domaine sur lequel les fonctions Heaviside de l'expression du poids 4.5 sont constantes et toutes égales à 1 ;
- calculer formellement l'expression littérale du vecteur vitesse de déformation de ce sous-domaine ;
- en déduire le terme avec la divergence propre aux sensibilité géométriques ainsi que l'expression du poids ;
- et revenir à la formulation d'origine qui correspond à l'algorithme initial.

Dans la dernière sous-section nous présentons et discutons des résultats obtenus.

### 4.2.3 Développement théorique selon la méthodologie proposée par Maxime Roger [4]

Nous allons maintenant suivre la procédure décrite au 2.3, cas **d**. Il faut, avant tout, décomposer le domaine d'intégration afin d'exprimer  $A$  sous la forme d'une somme de deux intégrales. Le résultat du test d'intersection est constant égal à 1 sur le premier sous domaine et il est nul sur le second :

$$A = \int_{\mathcal{D}_1} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 DNI(\vec{u}_i \cdot \vec{n}) S_{\mathcal{H}^+} \times 1 + \int_{\mathcal{D}_2} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 DNI(\vec{u}_i \cdot \vec{n}) S_{\mathcal{H}^+} \times 0 \quad (4.7)$$

$$\text{avec } \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{C} \times \mathcal{H}^+$$

Nous travaillons sur le premier terme de l'équation. Conformément à l'algorithme dans lequel on tire deux valeurs  $x$  et  $y$  entre  $-c/2$  et  $c/2$  ( $c$  est le coté du miroir) pour calculer la position  $\mathbf{x}_1 = x \cdot \vec{M1} + y \cdot \vec{M2} + 0 \cdot \vec{M3}$ , on décompose l'intégrale surfacique ( $\int_{\mathcal{H}^+} d\mathbf{x}_1 = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-c/2}^{c/2} dx dy$ ).

$$A = \int_{\mathcal{C}} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{x_{min}}^{x_{max}} p_X(x) dx \int_{y_{min}(h)}^{y_{max}(h)} p_Y(y) dy DNI(\vec{u}_i \cdot \vec{n}) S_{\mathcal{H}^+} \quad (4.8)$$

On choisit les bornes de la dernière intégrale de sorte que le test d'intersection soit validé sur l'intervalle  $[y_{min}(h); y_{max}(h)]$  et pas en dehors.  $y_{min}$  et  $y_{max}$  dépendent formellement des variables  $\vec{u}_i$ ,  $x$  et du paramètre  $h$ . Il faut déterminer leurs expressions avant de pouvoir exprimer le champ de vitesse de déformation.

#### 4.2.3.1 Calculs des bornes du nouveau domaine

On cherche les expressions de  $y_{min}(\vec{u}_i, x; h)$  et de  $y_{max}(\vec{u}_i, x; h)$  de telle sorte que  $\forall y \in [y_{min}, y_{max}]$  le système suivant soit vérifié :

$$\begin{cases} -c/2 \leq y \leq c/2 \\ -b/2 \leq \vec{C}_o \cdot \vec{x}_2(y) \cdot \vec{C}_2 \leq b/2 \\ -a/2 \leq \vec{C}_o \cdot \vec{x}_2(y) \cdot \vec{C}_1 \leq a/2 \end{cases} \quad (4.9)$$

La figure 4.2 est une représentation graphique du système d'équations 4.9. Quatre positions particulières du point  $\mathbf{x}_2$  sont représentées. En regardant la tache solaire du miroir plan (en jaune sur la figure) sur la cible (cadre rouge), on observe ces quatre possibilités pour  $y_{min}$ . S'il n'y a pas de débordement pour  $x$  fixé (et pour les rayons réfléchis par le bas du miroir) alors on regarde la position (3.) :  $y_{min} = -c/2$ . S'il y a du débordement, trois autres possibilités se présentent : limite en bas de la cible (2.) ou – en fonction du coté duquel penche la tache : a) matin ; b) après-midi – limite sur le bord gauche (1.) ou droit de la cible (4.).

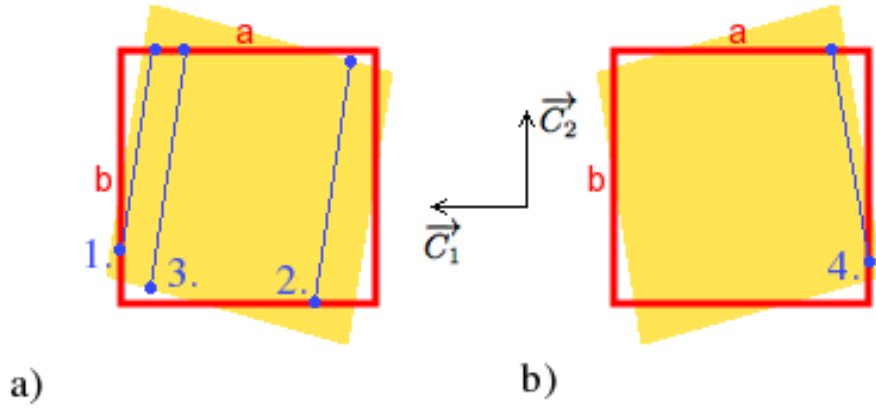


FIGURE 4.2 – Schéma de la tache solaire sur la cible a) matin ; b) après-midi. L'intervalle  $[y_{min}, y_{max}]$  dépend de  $x$  il existe quatre expressions possibles

Ces quatre positions correspondent à quatre expressions mathématiques possibles de  $y_{min}$ .

1.  $y_{min} = \frac{a/2 - (x \vec{M}_1 + \vec{C}_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_A}{\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_A}$  quand  $\mathbf{x}_2(y_{min})$  est sur le bord gauche de la cible ;
2.  $y_{min} = \frac{-b/2 - (x \vec{M}_1 + \vec{C}_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_B}{\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_B}$  quand  $\mathbf{x}_2(y_{min})$  est sur le bord inférieur de la cible ;
3.  $y_{min} = -c/2$  quand pour un  $x$  donné, le point de coordonnées  $(x, -c/2, 0)$  dans le repère local du miroir a son image solaire réfléchi à l'intérieur de la cible ;
4.  $y_{min} = \frac{-a/2 - (x \vec{M}_1 + \vec{C}_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_A}{\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_A}$  quand  $\mathbf{x}_2(y_{min})$  est sur le bord droit de la cible ;

L'expression retenue pour  $y_{min}$  est le maximum de ces valeurs. Bien qu'il y ait un choix à faire entre ces quatre expressions mathématiques, on peut écrire  $y_{min}$  (resp.  $y_{max}$ ) en une seule équation grâce aux fonctions *maximum* (resp. *minimum*) et *Heaviside*. Voici donc après résolution du système 4.9, les expressions de  $y_{min}$  et de  $y_{max}$  :

$$y_{min} = \max \left( -\frac{c}{2}; \frac{-b/2 - (x \vec{M}_1 + \vec{C}_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_B}{\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_B}; \frac{a \cdot [0.5 - H(\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_A)] - (x \vec{M}_1 + \vec{C}_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_A}{\vec{M}_2 \cdot \vec{Coeff}_A} \right) \quad (4.10)$$

$$y_{max} = \min \left( \frac{c}{2}; \frac{b/2 - (x \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_B}}{\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_B}} \right. \\ \left. a \cdot \frac{[H(\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_A}) - 0.5] - (x \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_A}}{\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_A}} \right) \quad (4.11)$$

$$\text{avec } \overrightarrow{Coeff_A} = \overrightarrow{C_1} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_1}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \overrightarrow{C_3} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{Coeff_B} = \overrightarrow{C_2} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \overrightarrow{C_3} \quad (4.12)$$

Ces expressions étant assez indigestes, nous allons détailler la résolution d'une des doubles inéquations de Eq. 4.9 pour mettre en évidence la difficulté de cette configuration académique. Le point le plus problématique de cette section concernant l'estimation de la sensibilité à  $h$  trouve effectivement sa source dans la résolution du système d'inéquations 4.9.

**Résolvons donc tout d'abord la double inéquation suivante :**  $-b/2 \leq \overrightarrow{C_o x_2}(y) \cdot \overrightarrow{C_2} \leq b/2$

Développons l'expression de  $\overrightarrow{C_o x_2}(y) \cdot \overrightarrow{C_2}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_o x_2}(y) \cdot \overrightarrow{C_2} &= (\overrightarrow{C_o x_1}(y) + \overrightarrow{x_1 x_2}(y)) \cdot \overrightarrow{C_2} \quad \text{on pose } d_1 \text{ la longueur entre les points } \mathbf{x}_1 \text{ et } \mathbf{x}_2 \\ &= (\overrightarrow{C_o x_1}(y) + d_1 \overrightarrow{u_r}) \cdot \overrightarrow{C_2} \quad \text{avec } d_1 = \|\overrightarrow{x_1 x_2}(y)\| = \frac{\overrightarrow{x_1 x_2}(y)}{\overrightarrow{u_r}} = \frac{\overrightarrow{x_1 x_2}(y) \cdot \overrightarrow{C_3}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \\ &= \left( \overrightarrow{C_o x_1}(y) + \frac{\overrightarrow{x_1 C_o}(y) \cdot \overrightarrow{C_3}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \overrightarrow{u_r} \right) \cdot \overrightarrow{C_2} \quad \text{parce que } \overrightarrow{C_o x_2} \cdot \overrightarrow{C_3} = 0 \\ &= \overrightarrow{C_o x_1}(y) \cdot \overrightarrow{C_2} + \overrightarrow{x_1 C_o}(y) \cdot \overrightarrow{C_3} \times \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \\ &= \overrightarrow{C_o x_1}(y) \cdot \left[ \overrightarrow{C_2} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \overrightarrow{C_3} \right] \\ &= (\overrightarrow{C_o M_o} + \overrightarrow{M_o x_1}) \cdot \left[ \overrightarrow{C_2} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \overrightarrow{C_3} \right] \\ \overrightarrow{C_o x_2}(y) \cdot \overrightarrow{C_2} &= (\overrightarrow{C_o M_o} + x \overrightarrow{M_1} + y \overrightarrow{M_2} + z(x, y) \overrightarrow{M_3}) \cdot [\overrightarrow{Coeff_B}] \end{aligned}$$

Comme le miroir est plan,  $z(x, y) = 0$  (c'est une des raisons pour lesquelles nous avons fait cette hypothèse). On peut maintenant résoudre l'inéquation :

$$-b/2 \leq (\overrightarrow{C_o M_o} + x \overrightarrow{M_1} + y \overrightarrow{M_2}) \cdot [\overrightarrow{Coeff_B}] \leq b/2 \\ \begin{cases} y \geq \frac{-b/2 - (x \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_B}}{\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_B}} \\ y \leq \frac{b/2 - (x \overrightarrow{M_1} + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_B}}{\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_B}} \end{cases}$$

Le produit scalaire  $\overrightarrow{M_2} \cdot \overrightarrow{Coeff_B}$  est toujours positif pour un miroir plan. Pour un miroir focalisant il s'annule si le point d'intersection  $\mathbf{x}_2$  est dans le plan focal du miroir. Il est négatif si  $\mathbf{x}_2$  est après le plan focal (cf. Fig.4.3).

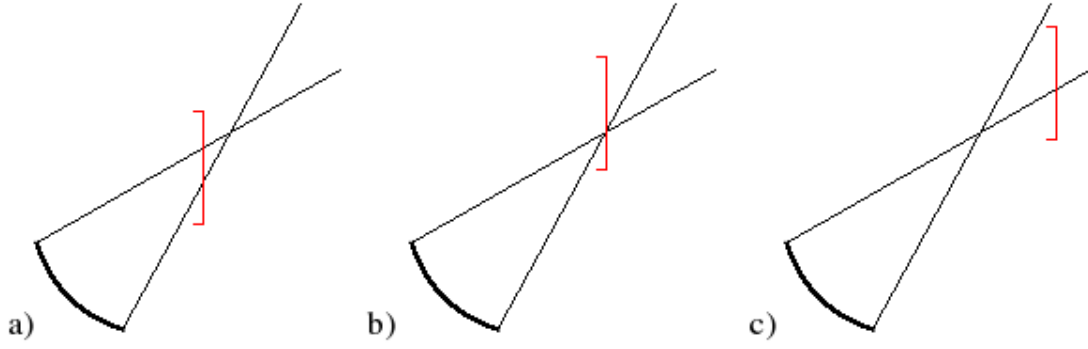


FIGURE 4.3 – Le signe de  $\vec{M}_2 \cdot \overrightarrow{Coeff_B}$  n'est pas constant pour un miroir focalisant  
a) positif ; b) nul ; c) négatif.

De la même manière, on résout la troisième inéquation du système (4.9) et on obtient :

$$-a/2 \leq \overrightarrow{C_o} \mathbf{x}_2(y) \cdot \vec{C}_1 \leq a/2$$

$$-a/2 - \left( x \vec{M}_1 + \overrightarrow{C_o M_o} \right) \cdot \left[ \overrightarrow{Coeff_A} \right] \leq y \vec{M}_2 \cdot \left[ \overrightarrow{Coeff_A} \right] \leq a/2 - \left( x \vec{M}_1 + \overrightarrow{C_o M_o} \right) \cdot \left[ \overrightarrow{Coeff_A} \right]$$

En fonction du signe de  $\vec{M}_2 \cdot \left[ \overrightarrow{Coeff_A} \right]$  (sur la configuration actuelle : négatif le matin, positif l'après midi, voir Fig. 4.2) l'inéquation peut changer de sens. A l'aide de la fonction Heaviside on peut écrire la solution de l'inéquation.

$$\begin{cases} y \geq \frac{a \cdot [0.5 - H(\vec{M}_2 \cdot \overrightarrow{Coeff_A})] - (x \vec{M}_1 + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_A}}{\vec{M}_2 \cdot \overrightarrow{Coeff_A}} \\ y \leq \frac{a \cdot [H(\vec{M}_2 \cdot \overrightarrow{Coeff_A}) - 0.5] - (x \vec{M}_1 + \overrightarrow{C_o M_o}) \cdot \overrightarrow{Coeff_A}}{\vec{M}_2 \cdot \overrightarrow{Coeff_A}} \end{cases}$$

Nous avons ainsi démontré les Eqs. 4.10, 4.11 et 4.12. Maintenant qu'il n'y a plus de tests dans l'expression intégrale de  $A$  et que nous avons explicité les bornes du nouveau sous-domaine d'intégration, nous allons appliquer la démarche du 2.3 pour estimer une sensibilité de type **c** en calculant le champ de vitesse de déformation.

#### 4.2.3.2 Calcul du poids de la sensibilité

On réécrit les équations 2.40 et 2.42 en les adaptant à la situation présente :

$$\partial_h A = \int_{\vec{u}_i \in \Omega_S} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{x_{min}}^{x_{max}} p_X(x) dx \int_{y_{min}(h)}^{y_{max}(h)} p_Y(y) dy \hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \quad (4.13)$$

avec

$$\hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) = \partial_h \hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) + \partial_y \left( \hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \cdot V_h(\vec{u}_i, x, y; h) \right) \quad (4.14)$$

Le vecteur vitesse n'a qu'une seule composante (la quatrième) puisque seul le domaine d'intégration de la quatrième intégrale dépend du paramètre<sup>4</sup>. On reprend la formule 2.43 pour exprimer le vecteur vitesse.

$$V_h(\vec{u}_i, x, y; h) = \partial_h y_{min}(\vec{u}_i, x; h) + \frac{\partial_h y_{max}(\vec{u}_i, x; h) - \partial_h y_{min}(\vec{u}_i, x; h)}{y_{max}(\vec{u}_i, x; h) - y_{min}(\vec{u}_i, x; h)} (y - y_{min}(\vec{u}_i, x; h)) \quad (4.15)$$

Maintenant qu'on connaît l'expression de  $V_h(\vec{u}_i, x, y; h)$ , on peut calculer la dérivée partielle  $\partial_y(\hat{w}(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \cdot V_h(\vec{u}_i, x, y; h))$  afin d'avoir l'expression complète du poids  $\hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h)$  de la sensibilité.

$$\hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) = DNI \cdot S_{\mathcal{H}^+} \left[ (\partial_h \vec{n} \cdot \vec{u}_i) + (\vec{n} \cdot \vec{u}_i) \frac{\partial_h y_{max}(h) - \partial_h y_{min}(h)}{y_{max}(h) - y_{min}(h)} \right] \quad (4.16)$$

Puis on revient au domaine d'intégration d'origine en réintroduisant le test  $H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+)$  pour pouvoir ainsi calculer la grandeur  $A$  et sa sensibilité  $\partial_h A$  avec le même algorithme (l'expression de  $\hat{w}_h$  ne change pas, c'est celle de Eq. 4.16).

$$\begin{aligned} \partial_h A &= \int_{\vec{u}_i \in \mathcal{C}} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{x_{min}}^{x_{max}} p_X(x) dx \int_{-c/2}^{c/2} p_Y(y) dy \hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \times H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \\ \partial_h A &= \int_{\vec{u}_i \in \mathcal{C}} p_{\vec{U}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{\mathbf{x}_1 \in \mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \hat{w}_h(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1; h) \times H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Après un long développement mathématique, nous avons enfin pu écrire une formulation intégrale de la sensibilité compatible avec l'algorithme d'origine. Néanmoins, nous ne pouvons, à ce stade, toujours pas programmer l'algorithme correspondant, parce qu'on ne connaît pas encore les expressions de  $\partial_h(y_{min})$  et  $\partial_h(y_{max})$  qui sont dans le poids de la sensibilité. La démarche mathématique n'est pas finie même si il n'y a plus de difficultés majeures : *il suffit de dériver* les expressions des Eqs. 4.10-4.11. Cependant, ces dérivées sont assez longues à calculer (à cause des nombreuses sous-fonctions à dériver).

Nous détaillons ci dessous le développement mathématique permettant d'explicitier  $\partial_h(y_{min})$  et  $\partial_h(y_{max})$

#### Calculs des expressions de $\partial_h(y_{min})$ et $\partial_h(y_{max})$ .

- Si  $y_{min} = -c/2$ , alors  $\partial_h(y_{min}) = 0$ .
- Si  $y_{min} = \frac{-b/2 - (x \vec{M}_1 + C_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_B}{M_2 \cdot \vec{Coeff}_B}$ , alors

$$\partial_h(y_{min}) = \frac{-\partial_h \left[ (x \vec{M}_1 + C_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_B \right] - y_{min} \partial_h \left[ M_2 \cdot \vec{Coeff}_B \right]}{M_2 \cdot \vec{Coeff}_B}$$

- Si  $y_{min} = \frac{a \cdot [H(M_2 \cdot \vec{Coeff}_A) - 0.5] - (x \vec{M}_1 + C_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_A}{M_2 \cdot \vec{Coeff}_A}$ , alors

$$\partial_h(y_{min}) = \frac{-\partial_h \left[ (x \vec{M}_1 + C_o \vec{M}_o) \cdot \vec{Coeff}_A \right] - y_{min} \partial_h \left[ M_2 \cdot \vec{Coeff}_A \right]}{M_2 \cdot \vec{Coeff}_A}$$

4. La première intégrale  $\int_{\Omega_S} d\vec{u}_i$  est de dimension 2

Les expressions de  $\partial_h(y_{max})$  pour chaque cas sont identiques en remplaçant  $y_{min}$  par  $y_{max}$ .

Calculons les dérivées intermédiaires :

$$\boxed{\partial_h \overrightarrow{C_o M_o}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\partial_h \overrightarrow{M_1} = \partial_h \left[ \frac{\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3}}{\|\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3}\|} \right]$$

$$\boxed{\partial_h \overrightarrow{M_1}} = \frac{1}{\|\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3}\|} \left[ \partial_h(\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3}) - (\overrightarrow{M_1} \cdot \partial_h(\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3})) \times \overrightarrow{M_1} \right]$$

$$\partial_h(\overrightarrow{M_3} \wedge \overrightarrow{G_3}) = \partial_h(\overrightarrow{M_3}) \wedge \overrightarrow{G_3}$$

$$\partial_h(\overrightarrow{M_3}) = \partial_h(\overrightarrow{n}) = \frac{1}{\|\overrightarrow{n_{nn}}\|} \left[ \partial_h(\overrightarrow{n_{nn}}) - (\overrightarrow{n} \cdot \partial_h(\overrightarrow{n_{nn}})) \times \overrightarrow{n} \right]$$

$$\overrightarrow{n_{nn}} = \overrightarrow{S} + \frac{\overrightarrow{M_o C_o}}{\|\overrightarrow{M_o C_o}\|}$$

$$\partial_h(\overrightarrow{n_{nn}}) = \frac{\partial_h(\overrightarrow{M_o C_o})}{\|\overrightarrow{M_o C_o}\|} - \frac{(\overrightarrow{M_o C_o}) \cdot \partial_h(\overrightarrow{M_o C_o})}{\|\overrightarrow{M_o C_o}\|^3} \times \overrightarrow{M_o C_o}$$

$$\partial_h \overrightarrow{M_o C_o} = \partial_h \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\partial_h \overrightarrow{M_2}} = \partial_h(\overrightarrow{M_1} \wedge \overrightarrow{M_3}) = (\partial_h \overrightarrow{M_1} \wedge \overrightarrow{M_3}) + (\overrightarrow{M_1} \wedge \partial_h \overrightarrow{M_3})$$

$$\boxed{\partial_h \overrightarrow{Coeff_B}} = - \left[ \frac{1}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \left( \partial_h \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_2}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \times (\partial_h \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}) \right) \right] \overrightarrow{C_3}$$

$$\begin{aligned} \partial_h \overrightarrow{u_r} &= \partial_h [2(\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{n}) \overrightarrow{n} - \overrightarrow{u_i}] \\ &= 2[(\overrightarrow{u_i} \cdot \partial_h \overrightarrow{n}) \overrightarrow{n} + (\overrightarrow{u_i} \cdot \overrightarrow{n}) \partial_h \overrightarrow{n}] \end{aligned}$$

$$\boxed{\partial_h \overrightarrow{Coeff_A}} = - \left[ \frac{1}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \left( \partial_h \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_1} - \frac{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_1}}{\overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}} \times (\partial_h \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{C_3}) \right) \right] \overrightarrow{C_3}$$

Résumons rapidement : Nous avons appliqué à la lettre la démarche décrite au 2.3, pour estimer une sensibilité de type **d**. Cette démarche est assez lourde, le plus difficile étant de définir les bornes du sous-domaine d'intégration afin de se ramener à une sensibilité de type **c**. Malgré cette difficulté, nous sommes parvenus à exprimer l'expression intégrale de la sensibilité sur une configuration simplifiée. L'algorithme est ensuite assez facile à modifier pour ajouter l'estimation de  $\partial_h A$ . Les résultats de simulations sont présentés dans la sous-section suivante.

#### 4.2.4 Résultats et discussion

La simulation suivante (Fig.4.4) a été faite pour le 21 Mars à midi à  $45^\circ\text{N}$  de latitude.  $10^6$  tirages sont suffisants pour avoir une bonne fiabilité sur les estimations de  $A$  et de sa sensibilité  $\partial_n A$  (l'écart-type obtenu est très inférieur au pourcent). On observe bien que la sensibilité s'annule lorsque la grandeur atteint son maximum. Les points de différence finie permettent de valider l'estimation de la sensibilité. En comparant l'écart-type sur les différences finies et sur les sensibilités, on comprend l'intérêt du calcul de sensibilité par Monte-Carlo il faudrait beaucoup plus de tirages pour obtenir une précision satisfaisante sur les différences finies. De plus les différences finies permettent d'estimer un taux de variation moyen en calculant la grandeur étudiée en deux points espacés. Les sensibilités permettent l'estimation de la pente en un seul calcul. Estimer ce genre de

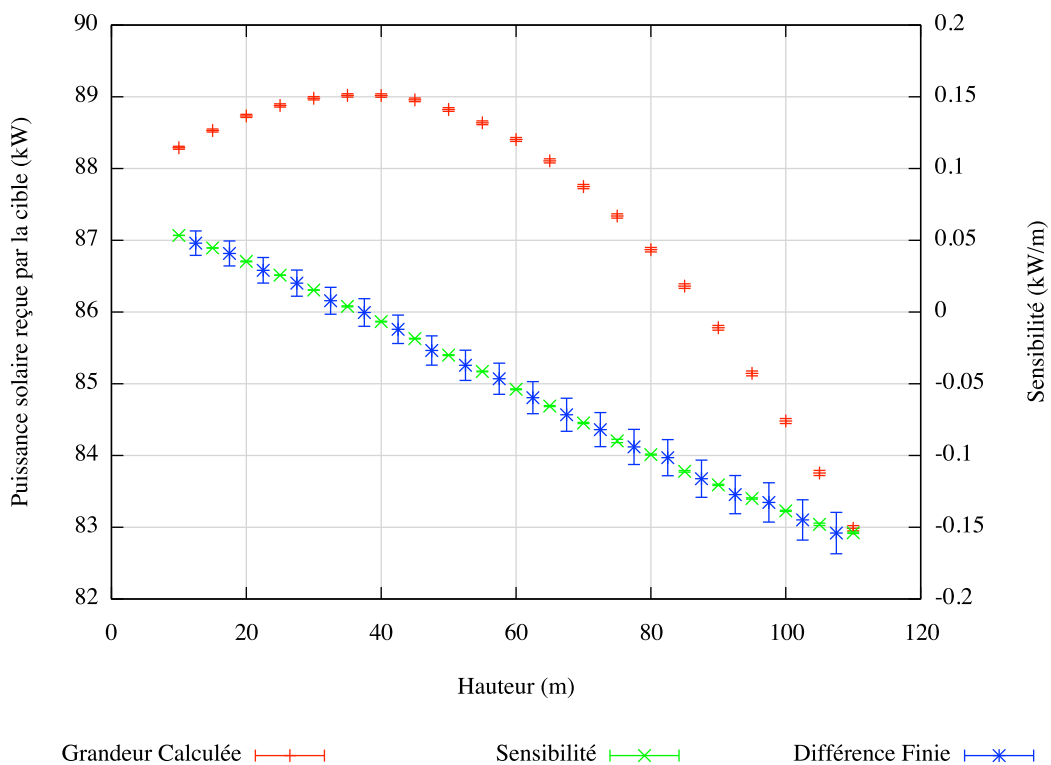


FIGURE 4.4 – Puissance solaire reçue par la cible, sensibilité à la hauteur de la tour

sensibilité par Monte-Carlo est donc d'un grand intérêt pour orienter la conception de centrales à tour. On pourrait assez facilement adapter cette algorithmme pour calculer la sensibilité à la hauteur de la tour sur la configuration réaliste du 3.2.1 puisque ses 134 héliostats sont composés de facettes planes. Cependant il faudrait négliger les ombres et blocages (voir explications plus bas) mais c'est une simplification courante de négliger ce genre de pertes dans les étapes d'optimisation.

Dans cette section, nous avons identifié une difficulté formelle de mise en oeuvre. Nous avons pu la surmonter sur une configuration académique. Le point problématique de la méthode appliquée est de trouver les expressions de  $y_{min}$  et de  $y_{max}$ .

Nous nous posons maintenant les questions suivantes : Est-ce que cette démarche formelle peut s'appliquer de façon systématique à tout système réel ? Est-ce que la difficulté rencontrée ici reste



surmontable quand on ne fait plus aucune hypothèse simplificatrice (plusieurs dizaines d'héliostats qui ne sont ni plans ni spéculaires) ? Le fait de rajouter de nombreux héliostats va compliquer encore plus le problème : puisque les tests d'intersection ne porteront plus uniquement sur la cible mais aussi sur tous les autres héliostats si on souhaite prendre en compte les ombres et blocages.

Il faudrait rajouter 8 inéquations pour chaque héliostat du champ dans le système d'inéquations (4.9) si on veut prendre en compte les ombres et blocages. Une autre complication apparaîtra certainement avec des héliostats focalisants car la normale à la surface des miroirs n'est pas constante (contrairement à un miroir plan). Les inéquations ne seront probablement plus linéaires par rapport à  $y$  et on ne pourra peut-être pas résoudre le système de façon analytique. Si par chance, on parvient à résoudre ce système, le calcul du vecteur déformation sera aussi très difficile (un grand nombre d'expressions compliquées pour chaque condition algorithmique).

Aussi cette méthode ne semble pas exploitable pour de véritables configurations de champs d'héliostats. En plus des ombres et des blocages, les véritables installations sont soumises à des défauts de réflexion. En effet, la réflexion n'est jamais parfaitement spéculaire. Les défauts de courbure, les défauts de rugosité de surface et les erreurs de pointage dues au vent et à la motorisation se cumulent et dévient la direction du rayon réfléchi.

Comme dans l'exemple applicatif 3.2.1 nous avons utilisé un modèle de réflexion à lobe spéculaire (modèle de Blinn) pour représenter les erreurs de pointage, nous allons dans la section suivante montrer, sur une configuration académique, que des problèmes de convergence peuvent apparaître lors du calcul de certaines sensibilités quand la dispersion des rayons réfléchis est très faible (miroirs et motorisation très précis).

### 4.3 Sensibilité à la hauteur de la tour en réflexion non-spéculaire : illustration d'un problème de convergence

Dans la section précédente, nous avons choisi de modéliser la réflexion du rayonnement solaire sur les héliostats de façon spéculaire en espérant simplifier le problème. La direction des rayons réfléchis était alors calculée de façon déterministe en fonction du rayon incident et de la normale au miroir. C'est pourquoi il était difficile de "faire remonter" la dépendance à la hauteur de la tour depuis les tests algorithmiques jusque dans l'expression des bornes du domaine d'intégration (pour transformer la sensibilité de type **d** en une sensibilité de type **c**).

Puisque les héliostats réels ne sont pas parfaitement spéculaires, nous allons à nouveau repartir du modèle intégral de la section 3.2.1 (Eqs. 3.3-3.5) pour tenter d'estimer la sensibilité à la hauteur de la tour en réflexion non-spéculaire :

$$A = \int_{\mathcal{H}^+} p_{X_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{C}} p_{\Omega_S}(\omega_S) d\omega_S \left\{ H(\mathbf{x}_0 \in (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \hat{w}_{out} \right. \\ \left. + H(\mathbf{x}_0 \notin (\mathcal{H} \cup \mathcal{T})) \int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)} p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \omega_0; p) d\mathbf{n}'_h \left\{ H(\mathbf{x}_2 \notin \mathcal{T}^+) \hat{w}_{out} + H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \hat{w}_{in} \right\} \right\}$$

On souhaite donc exprimer la dérivée de cette intégrale par rapport à  $h$  et on retrouve d'emblée la même difficulté qu'au 4.2 (voir le début de la section précédente) puisqu'il faut décomposer le

domaine  $\mathcal{D}_{N'_h}(\omega_0)$  en sous-domaines sur lesquels  $H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+)$  prend une valeur constante<sup>5</sup>, pour transformer la sensibilité de type  $\mathbf{d}$  en une sensibilité de type  $\mathbf{c}$ .

Afin d'éclaircir ce point dur, nous allons considérer le problème sur une configuration 2D avec un seul miroir "segment" et une cible "segment" (voir Fig. 4.5)

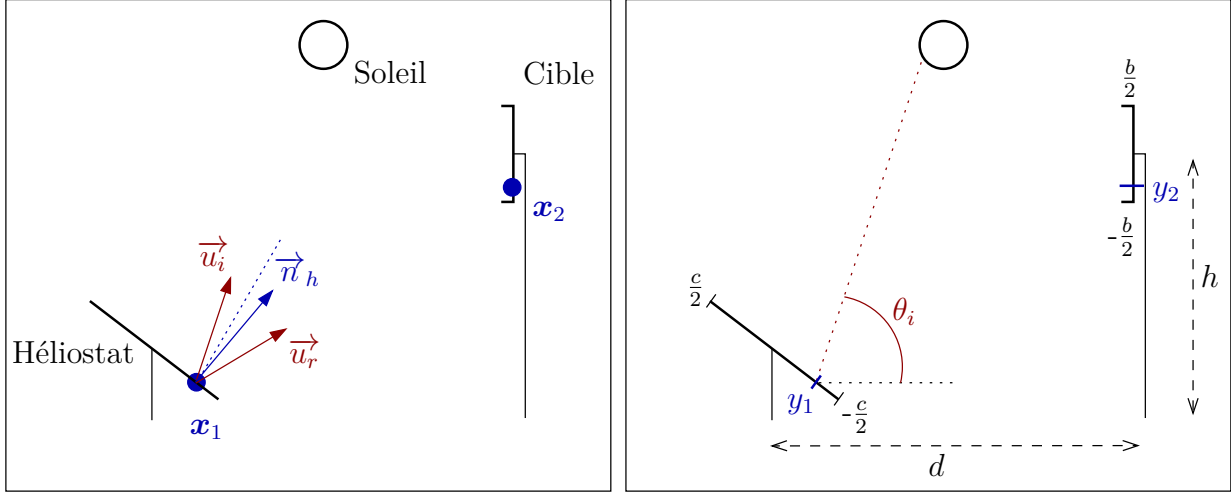


FIGURE 4.5 – Configuration 2D avec un héliostat "segment" et une cible "segment".

Analogie entre les notations habituelles (à gauche) et les notations spécifiques à la configuration 2D (à droite). À gauche, la normale apparente  $\vec{n}'_h$  est décalée par rapport à la normale théorique (en pointillés)

On choisit la position du soleil afin de garantir que la cible ne fasse pas d'ombre sur le miroir, et comme le miroir est unique, on est certain que les blocages sont inexistantes. On obtient ainsi une formulation intégrale simplifiée :

$$A = \int_{\mathcal{C}} p_{\vec{u}_i}(\vec{u}_i) d\vec{u}_i \int_{\mathcal{H}^+} p_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{x}_1) d\mathbf{x}_1 \int_{\mathcal{D}_{N'_h}(\vec{u}_i)} p_{N'_h}(\mathbf{n}'_h | \vec{u}_i; p) d\mathbf{n}'_h H(\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+) \hat{w}$$

L'algorithme correspondant à cette formulation intégrale est le suivant :

- Tirage uniforme d'une direction  $\vec{u}_i$  à l'intérieur du cône solaire  $\mathcal{C}$  ;
- Tirage uniforme d'un point  $\mathbf{x}_1$  sur le miroir  $\mathcal{H}^+$  ;
- Tirage de la normale apparente  $\mathbf{n}'_h$  selon le modèle de Blinn (exprimée dans le repère local lié au miroir) ;
- Calcul de la normale apparente  $\vec{n}'_h$  en fonction de  $\mathbf{n}'_h$  et de la normale théorique  $\vec{n} \equiv \mathbf{n}_1(h)$  ;
- Calcul de la direction réfléchie  $\vec{u}_r = 2(\vec{u}_i \cdot \vec{n}'_h) \cdot \vec{n}'_h - \vec{u}_i$  ;
- Calcul du point d'intersection  $\mathbf{x}_2$  sur le plan de la cible ;
- Calcul du poids  $w$  si  $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{T}^+$  sinon le poids vaut zéro.

Comme les normales apparentes possèdent une distribution centrée autour de la normale théorique, il est légitime de penser que la distribution des points  $\mathbf{x}_2$  est centrée autour du point  $\mathbf{x}_2^{spec}$  qui serait obtenue si la réflexion était spéculaire. Ainsi, tirer  $\mathbf{n}'_h$  pour en déduire  $\vec{n}'_h$ , puis  $\vec{u}_r$ , puis  $\mathbf{x}_2$  est strictement équivalent à tirer directement  $\mathbf{x}_2$  autour de  $\mathbf{x}_2^{spec}$  selon une *pdf* bien adaptée. Nous verrons au 4.4 comment définir cette *pdf* bien adaptée par un changement de variable. Nous supposons ici que la fonction de distribution de  $\mathbf{X}_2$  est de forme gaussienne centrée en  $\mathbf{x}_2^{spec}$  avec

5. avec  $\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1, \omega_S, \mathbf{n}'_h; h)$

un écart-type  $\sigma$ . Nous réalisons l'algorithme suivant sur la configuration 2D<sup>6</sup> :

- Tirage uniforme d'un angle d'incidence  $\theta_i$  (par rapport à l'horizontale) entre  $\theta_{min}$  et  $\theta_{max}$ .  $\theta_i$  permet de définir  $\vec{u}_i$ .  $\theta_{min}, \theta_{max}$  sont les valeurs limites au delà desquelles  $\vec{u}_i$  n'appartient plus à  $\mathcal{C}$  ;
- Tirage uniforme d'une longueur  $y_1$  (par rapport au milieu du segment miroir) entre  $\frac{-c}{2}$  et  $\frac{+c}{2}$  pour définir  $\mathbf{x}_1$  ;
- Tirage d'une longueur  $y_2$  (par rapport au milieu du segment cible) entre  $-\infty$  et  $+\infty$  selon une *pdf* gaussienne centrée en  $y_2^{spec}$  (distance algébrique entre le milieu de la cible et  $\mathbf{x}_2^{spec}$ ) ;
- Calcul du poids  $w$  si  $y_2 \in [\frac{-b}{2}; \frac{+b}{2}]$  sinon le poids vaut zéro.

On peut écrire simplement la formulation intégrale correspondante :

$$A = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} p_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \int_{-c/2}^{+c/2} p_{Y_1}(y_1) dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y_2}(y_2 | y_2^{spec}; \sigma) dy_2 H(y_2 \in [\frac{-b}{2}; \frac{+b}{2}]) \hat{w} \quad (4.18)$$

Dans cette expression, seuls  $y_2^{spec}$  et  $\hat{w}$  dépendent du paramètre  $h$ . On a donc affaire à une sensibilité de type **b** (ni les bornes d'intégrations ni les tests ne dépendent du paramètre). On en déduit la formulation intégrale de la sensibilité  $\partial_h A$  (cf. Eqs 2.40-2.41) :

$$A = \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} p_{\Theta_i}(\theta_i) d\theta_i \int_{-c/2}^{+c/2} p_{Y_1}(y_1) dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} p_{Y_2}(y_2 | y_2^{spec}; \sigma) dy_2 H(y_2 \in [\frac{-b}{2}; \frac{+b}{2}]) \hat{w}_h \quad (4.19)$$

$$\text{avec } \hat{w}_h = \partial_h \hat{w} + \hat{w} \frac{\partial_h p_{Y_2}(y_2 | y_2^{spec}; \sigma)}{p_{Y_2}(y_2 | y_2^{spec}; \sigma)} \quad (4.20)$$

Nous avons pu facilement calculer  $A$  et sa sensibilité  $\partial_h A$  et nous obtenons des résultats similaires à ceux présentés figure 4.4. Nous avons fait cette simulation pour différentes valeurs  $\sigma$  (dispersion de  $y_2$  autour de  $y_2^{spec}$  qui correspond aux erreurs de pointage) et lorsque que  $\sigma$  tend vers 0 le calcul de la sensibilité ne converge pas [91].

La présentation de cette configuration 2D a pour but de faire le lien entre le problème réel et le problème académique détaillé plus bas. Aussi, nous ne détaillerons pas ici la démarche utilisée ni les résultats obtenus dans [91]. Sur cette configuration 2D, nous avons rencontré une difficulté de convergence en estimant la sensibilité à la hauteur de la tour lorsque les erreurs de pointage sont très faibles. Aussi nous avons simplifié encore plus le problème afin d'isoler cette difficulté de convergence et de l'étudier en détail. Une fois la difficulté de convergence mise en évidence, nous appliquerons trois techniques différentes de réduction de la variance pour illustrer la grande variété de possibilités que l'on a à notre disposition quand un algorithme ne permet pas directement l'estimation fiable de sensibilité en suivant la démarche présentée Sec. 2.3.

### 4.3.1 Présentation du problème simplifié : intégrales à calculer

*Étude de sensibilité sur la fraction de gaussienne à moyenne variable comprise dans un intervalle*

Cette étude porte sur un point particulier du problème *Héliostat-Tour* (avec prise en compte des erreurs de pointage) ramené à une seule dimension. Nous allons nous intéresser à la source de variance sur le calcul de sensibilité en toute généralité et en faisant abstraction du contexte

6. Les angles solides (sr) deviennent des angles (rad) et les surfaces sont maintenant des longueurs

applicatif. Il s'agit de générer uniformément des points sur un domaine (segment) puis de générer pour chacun de ces points une seconde série de points selon une loi gaussienne centrée autour du premier point (par analogie aux erreurs de pointage où le faisceau réfléchi est légèrement dispersé autour de la direction spéculaire). Cela revient à balayer le domaine avec un faisceau gaussien. La grandeur calculée est la fraction de ce balayage qui intersecte un intervalle donné du domaine.

Voici les éléments du problème 2D présenté plus haut, dont nous partons pour définir la présente étude :

- Pour chaque réalisation aléatoire (rayon incident / point de réflexion)  $(\vec{u}_i, \mathbf{x}_1)$  (définie aléatoirement par les variables d'intégration  $(\theta_i$  et  $y_1)$ ), on calcule le point d'intersection  $\mathbf{x}_2^{spec}$  entre le rayon réfléchi spéculaire et le "segment" cible : ceci correspond maintenant à une seule intégrale  $\int_{\mathcal{D}} pdf_X(x)dx$  dans l'équation 4.21 ;
- On tire ensuite le point d'intersection  $\mathbf{x}_2$  du rayon réfléchi non-spéculaire selon une pdf gaussienne centrée autour du premier point : ceci correspond maintenant à  $\int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y)dy$  dans Eq. 4.21 ;
- Le test d'intersection sur la cible  $H(y_2 \in [\frac{-b}{2}; \frac{+b}{2}])$  dans Eq. 4.18 permet de prendre en compte les pertes par débordement ; il devient  $H(A < y < B)$  dans Eq. 4.21 ;
- Dans l'expression 4.21, on cherche les sensibilités aux bornes du test et pas au milieu du segment  $[A; B]$  qui correspondrait mieux à la hauteur de la cible. En effet, la sensibilité au centre du segment est nulle pour de faibles largeurs  $\sigma$  du faisceau si la taille du segment  $[A; B]$  reste constant (ça ne nous intéresse pas de calculer une sensibilité nulle)

Ainsi, on souhaite estimer l'intégrale suivante avec un algorithme de Monte-Carlo :

$$I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x)dx \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma)dy H(A < y < B) \quad (4.21)$$

$$\text{avec } pdf_Y(y; x, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right)$$

L'estimation de cette intégrale correspond sur la figure 4.6 à la somme des aires sous les courbes  $\mathcal{C}_{x_i}$ .  $(\mathcal{C}_{x_i})_{i \in \mathbb{N}}$  est une série statistique de gaussiennes dont on tire les moyennes  $x_i$  dans  $\mathcal{D}$  et dont les abscisses sont comprises entre  $A$  et  $B$ .

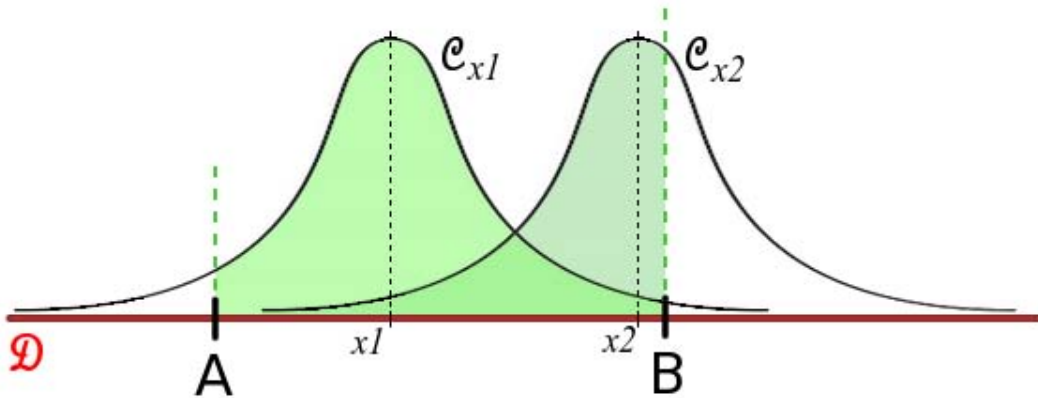


FIGURE 4.6 – Représentation graphique de l'intégrale  $I$   
(Somme des surfaces vertes pour un nombre infini de courbes :  $\{\mathcal{C}_{x_i}\}_{i \in \langle 1; N \rangle}$  avec  $N \rightarrow \infty$ )

On souhaite aussi estimer avec le même algorithme les sensibilités  $\partial_A I$  et  $\partial_B I$ . Comme le test  $H(A < y < B)$  dépend des deux paramètres, on ne peut pas calculer directement les sensibilités. En effet, comme nous l'avons expliqué au Chap. 2, pour estimer simultanément  $I$ ,  $\partial_A I$  et  $\partial_B I$  avec un seul algorithme, la formulation intégrale doit utiliser le même domaine d'intégration, les mêmes densités de probabilité et les mêmes fonctions Heaviside (car ces fonctions décrivent les conditions algorithmiques).

### 4.3.2 Développement direct

Nous allons suivre la procédure décrite au 2.3 pour une sensibilité de type  $\mathbf{d}$  :

- d'abord, nous allons reformuler l'intégrale de départ (décomposition du domaine d'intégration) pour qu'il n'y ait plus d'Heaviside dépendant des paramètres dans le poids de la grandeur ;
- puis nous calculerons le vecteur champ de vitesse de déformation du domaine pour exprimer le poids de la sensibilité ;
- enfin nous reformulerons l'écriture intégrale pour qu'elle soit compatible avec l'algorithme d'origine.

#### 4.3.2.1 Reformulation sans Heaviside (décomposition du domaine d'intégration)

Supprimons les Heavisides en décomposant le domaine d'intégration :

$$I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma) H(A < y < B) dy dx \quad (4.22)$$

$$I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \left[ \int_{-\infty}^A pdf_Y(y; x, \sigma) \cdot 0 dy + \int_A^B pdf_Y(y; x, \sigma) \cdot 1 dy + \int_B^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma) \cdot 0 dy \right] dx$$

$$I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_A^B pdf_Y(y; x, \sigma) dy dx \quad (4.23)$$

#### 4.3.2.2 Calcul du vecteur vitesse

Le domaine d'intégration est  $\mathcal{D} \times [A; B]$ . Il nous faut exprimer les deux composantes des vecteurs vitesse.  $\mathcal{D}$  ne dépend pas des paramètres. Donc :

$$\vec{V}_{A,1}(x; A) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{V}_{B,1}(x; B) = 0 \quad (4.24)$$

on applique ensuite la formule 2.44 :

$$\vec{V}_{A,2}(x, y; A) = \vec{V}_{A,2}|_{y=A} + \frac{\vec{V}_{A,2}|_{y=B} - \vec{V}_{A,2}|_{y=A}}{B - A} (y - A)$$

$$\text{avec} \quad \vec{V}_{A,2}|_{y=A} = \partial_A A + \vec{V}_{A,1}(x; A) \partial_x A = 1$$

$$\text{et} \quad \vec{V}_{A,2}|_{y=B} = \partial_A B + \vec{V}_{A,1}(x; B) \partial_x B = 0$$

$$\text{ainsi } \boxed{\vec{V}_{A,2}(x, y; A) = 1 + \frac{0-1}{B-A}(y-A) = \frac{B-y}{B-A}} \quad (4.25)$$

de la même manière, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{B,2}(x, y; B) &= \vec{V}_{B,2}|_{y=A} + \frac{\vec{V}_{B,2}|_{y=B} - \vec{V}_{B,2}|_{y=A}}{B-A} (y-A) \\ &= \partial_B A \frac{\partial_B B - \partial_B A}{B-A} (y-A) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \boxed{\vec{V}_{B,2}(x, y; B) = 0 + \frac{1-0}{B-A}(y-A) = \frac{y-A}{B-A}} \quad (4.26)$$

**Expression du poids de la sensibilité :** Rappelons l'expression de  $I$  sans Heaviside (Eq. 4.23) :

$$I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_A^B pdf_Y(y; x, \sigma) \hat{w} \, dy dx$$

$$\text{avec } \hat{w} = 1$$

D'après l'équation 2.45, la sensibilité à  $A$  s'exprime comme suit :

$$\partial_A I = \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_A^B pdf_Y(y; x, \sigma) \hat{w}_A \, dy dx \quad (4.27)$$

$$\text{avec } \hat{w}_A = \partial_A \hat{w} + \frac{\partial_A pdf_Y(y; x, \sigma)}{pdf_Y(y; x, \sigma)} + \frac{\text{div}(\hat{w} pdf_Y(y; x, \sigma) \vec{V}_A)}{pdf_Y(y; x, \sigma)} \quad (4.28)$$

Les deux premiers termes sont nuls, reste à exprimer la divergence :

$$\begin{aligned} \text{div}(\hat{w} pdf_Y(y; x, \sigma) \vec{V}_A) &= \partial_x (\hat{w} pdf_Y(y; x, \sigma) \vec{V}_{A,1}) + \partial_y (\hat{w} pdf_Y(y; x, \sigma) \vec{V}_{A,2}) \\ &= \hat{w} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right) \frac{B-y}{B-A} \right] \\ &= pdf_Y(y; x, \sigma) \frac{1}{B-A} \left( \frac{x-y}{\sigma^2} (B-y) - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\hat{w}_A = \frac{\frac{x-y}{\sigma^2} (B-y) - 1}{B-A}} \quad (4.30)$$

De la même manière, on obtient :

$$\boxed{\hat{w}_B = \frac{\frac{x-y}{\sigma^2} (y-A) + 1}{B-A}} \quad (4.31)$$

### 4.3.2.3 Retour à la formulation de départ

On revient finalement à la formulation intégrale de départ en remplaçant l'intégrale entre  $A$  et  $B$  par une intégrale sur  $\mathbb{R}$  avec le double test  $H(A < y < B)$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma) \hat{w} H(A < y < B) dy dx \\
 \partial_A I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma) \hat{w}_A H(A < y < B) dy dx \\
 \partial_B I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y; x, \sigma) \hat{w}_B H(A < y < B) dy dx
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

avec  $\hat{w} = 1$  ;  $\hat{w}_A = \frac{x-y}{\sigma^2} \frac{(B-y) - 1}{B-A}$  ;  $\hat{w}_B = \frac{x-y}{\sigma^2} \frac{(y-A) + 1}{B-A}$

### 4.3.2.4 Résultats obtenus

Dans un premier temps, on choisit arbitrairement le paramètres libres en posant :  $\mathcal{D} = [-25; +25]$ , on fixe  $A = -23$  et la largeur du faisceau gaussien  $\sigma = 1$ .  $B$  varie entre  $-20$  et  $20$ . Les résultats de cette simulation avec  $10^6$  tirages sont représentés sur la figure 4.7. La grandeur calculée est strictement croissante en fonction de  $B$  et la pente semble constante. Les estimations de la sensibilité à  $B$  sont cohérentes avec les valeurs de la pente obtenues par différences finies. On représente aussi les estimations de la sensibilités à  $A$  afin d'insister sur la possibilité de calculer plusieurs sensibilités et grandeurs avec le même algorithme de Monte-Carlo.

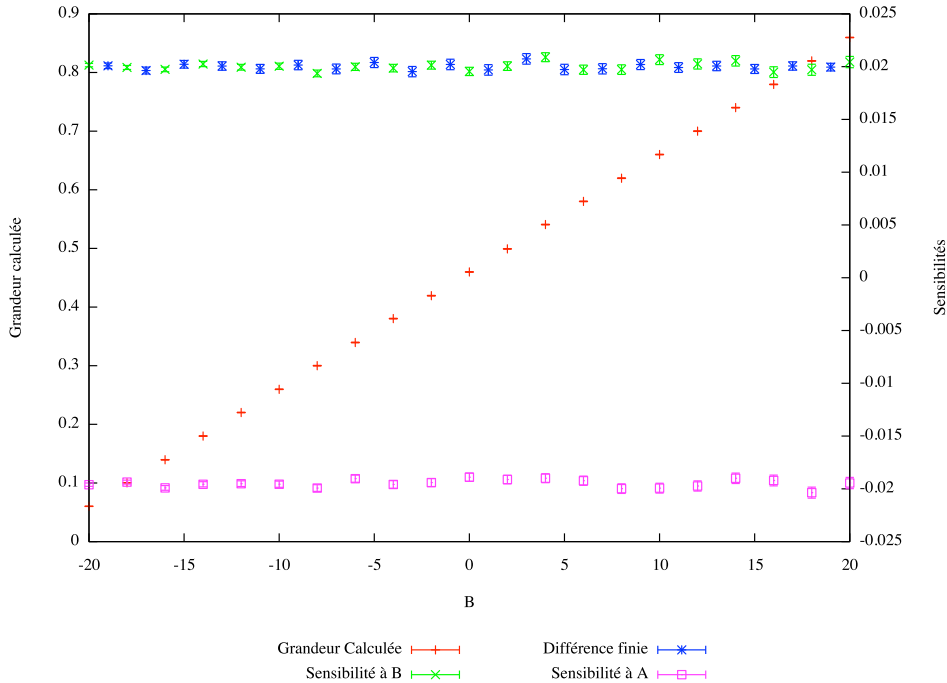


FIGURE 4.7 – Résultats Monte-Carlo pour  $10^6$  tirages,  $A = -23$ ,  $\sigma = 1$ ,  $B$  variable

Comme sur la configuration 2D, nous rencontrons des difficultés de convergence pour de faibles largeurs du faisceau gaussien [91], nous avons effectué le même calcul pour de faibles valeurs de  $\sigma$ . Nous constatons que les variances associées aux estimations des sensibilités  $\partial_A I$  et  $\partial_B I$  par

l'algorithme correspondant aux équations 4.32 augmentent significativement lorsque l'on resserre la gaussienne. On voit sur la figure 4.8 ( $\sigma$  vaut 0.1) que l'écart-type sur  $\partial_B I$  est d'environ 0.005 pour une valeur théorique de  $\partial_B I$  égale à 0.02, soit un écart-type relatif de 25%. Lorsque  $\sigma$  vaut 0.01, l'écart-type relatif dépasse les 100%. La convergence devient alors insuffisante pour obtenir une estimation fiable.

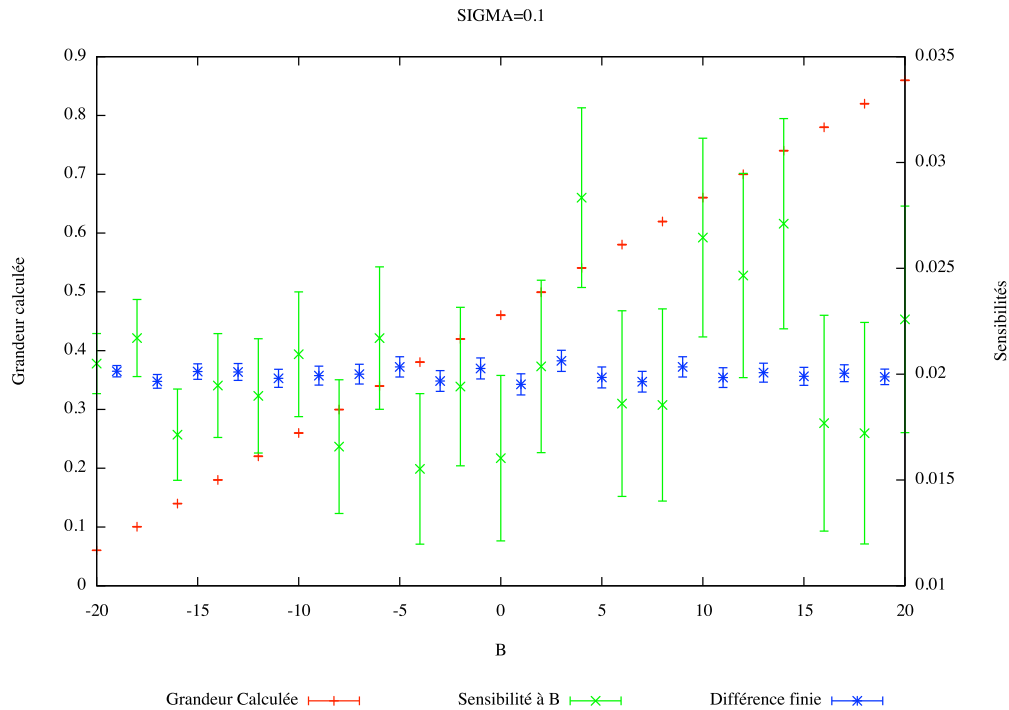


FIGURE 4.8 – Résultats Monte-Carlo pour  $10^6$  tirages,  $A = -23$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $B$  variable. Les barres d'erreurs sur la sensibilité  $\partial_B I$  sont trop grandes pour une estimation fiable

Résumons rapidement la situation : après avoir réduit l'exemple applicatif du champ d'héliostats (cf. Sec. 3.2.1) à un problème académique, nous avons appliqué la démarche du chapitre 2 pour calculer une sensibilité de type **d** et nous avons mis en évidence une difficulté de convergence qui correspond en pratique à de faibles erreurs de pointage. Nous allons présenter dans la suite de cette section trois pistes pour tenter de résoudre ce problème de convergence dans cette configuration académique :

- modification du poids  $\hat{w}_B$  par une variable de contrôle afin de diminuer la variance associée à l'estimation de  $\partial_B I$  ;
- modification de la loi de tirage de la première variable d'intégration par échantillonnage préférentiel ;
- modification de l'expression du vecteur vitesse

### 4.3.3 Premier essai : Variable de contrôle

En analysant l'expression du poids  $\hat{w}_B$  de la sensibilité  $\partial_B I$  (Eq. 4.32) :

$$\hat{w}_B = \frac{\frac{x-y}{\sigma^2}(y-A)+1}{B-A}$$



on se rend compte qu'il prend tantôt des valeurs positives tantôt des valeurs négatives. La source de variance associée à ce phénomène serait principalement localisée dans le terme  $(x - y)$ . En effet, lorsque la gaussienne est étroite et que la réalisation  $x_i$  de son centre est dans le segment  $[A; B]$  et située loin des extrémités  $A$  et  $B$ , la valeur de la deuxième intégrale est très proche de zéro. C'est ce *presque zéro* qui est difficile à calculer avec un algorithme de Monte-Carlo dont les poids sont de signes alternés. En s'interrogeant sur ce *presque zéro*, on remarque que  $\int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) w_B dy = 0$ ; cette intégrale se calcule analytiquement et sa valeur est nulle. On va alors pouvoir utiliser cette intégrale comme variable de contrôle 2.1.2 pour tenter de réduire la variance.

Pour résumer :

- quand  $x_i \notin [A; B]$ , l'estimation de  $\int_A^B pdf_Y(y) \hat{w}_B dy$  ne pose pas de problème de convergence ;
- quand  $x_i \in [A; B]$ ,  $\int_A^B pdf_Y(y) \hat{w}_B dy \approx 0$  est difficile à calculer par Monte-Carlo. Comme  $\int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) \hat{w}_B dy = 0$ , on va soustraire ce terme nul dans l'espoir d'estimer l'intégrale avec plus de précision.

$$\begin{aligned}
\partial_B I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) dy \hat{w}_B H(A < y < B) \\
&= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) dx \int_A^B pdf_Y(y) dy \hat{w}_B \\
&= \int_{\mathcal{D} \setminus [A; B]} pdf_X(x) dx \int_A^B pdf_Y(y) dy \hat{w}_B \\
&\quad + \int_{[A; B]} pdf_X(x) dx \left[ \int_A^B pdf_Y(y) dy \hat{w}_B - \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) dy \hat{w}_B \right] \\
&= \int_{\mathcal{D} \setminus [A; B]} pdf_X(x) dx \int_A^B pdf_Y(y) dy \hat{w}_B - \int_{[A; B]} pdf_X(x) dx \int_{\mathbb{R} \setminus [A; B]} pdf_Y(y) dy \hat{w}_B \\
&= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) dy \\
&\quad \times \left\{ H(x \notin [A; B]) \hat{w}_B H(y \in [A; B]) - H(x \in [A; B]) \hat{w}_B H(y \notin [A; B]) \right\}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Comme  $-H(y \notin [A; B]) = H(y \in [A; B]) - 1$ , on peut revenir à la formulation intégrale d'origine :

$$\begin{aligned}
\partial_B I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) dy \hat{w}_B \\
&\quad \times \left\{ H(x \notin [A; B]) H(y \in [A; B]) + H(x \in [A; B]) (H(y \in [A; B]) - 1) \right\}
\end{aligned} \tag{4.34}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
\partial_B I &= \int_{\mathcal{D}} pdf_X(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} pdf_Y(y) dy \widetilde{w}_B \\
\text{avec } \widetilde{w}_B &= \hat{w}_B \left\{ H(x \notin [A; B]) H(y \in [A; B]) + H(x \in [A; B]) (H(y \in [A; B]) - 1) \right\}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour quelques valeurs de  $\sigma$ , le tableau suivant montre que l'algorithme qui utilise la nouvelle expression du poids  $\widetilde{w}_B$  est plus précis d'un ordre de grandeur. Nous gagnons ainsi deux ordres de grandeur sur les temps de calcul.

Cependant, si on réduit encore l'écart-type de la *pdf* gaussienne, les problèmes de variance

$\sigma$	écart-type avec $\hat{w}_B H(y \in [A; B])$	écart-type avec $\widetilde{w}_B$
1	1-2%	<1%
0,1	10-30%	3%
0,01	ne converge pas	<10%
0,001	ne converge pas	20-30%

TABLE 4.1 –  $\mathcal{D} = [-25; +25]$ ;  $A = -23$ ;  $B$  varie entre -20 et 20;  $N = 10^6$ 

réapparaissent. En effet, le faisceau gaussien est tellement étroit que si le centre  $x_i$  du faisceau est à l'intérieur du segment, la probabilité de tirer  $y_i$  à l'extérieur et inversement est très faible. La réalisation des poids est très souvent nulle et n'apporte aucune information sur la sensibilité. Pour maximiser les chances d'avoir  $y_i$  à l'extérieur de  $[A; B]$  quand  $x_i$  est à l'intérieur (ou inversement) nous proposons de modifier la loi de tirage de  $x_i$  afin de favoriser les  $x_i$  proches de  $A$  et proches de  $B$ .

Dans le contexte des systèmes optiques concentrateurs de rayonnement solaire, ces résultats sont suffisants si on ramène  $\sigma$  à la largeur de  $[A, B]$  et qu'on compare ce ratio à la dispersion des rayons réfléchis par un miroir solaire à cause des erreurs de pointage autour du rayon réfléchi spéculaire théorique. Cependant le problème de convergence n'est pas totalement résolu et nous souhaitons profiter de cet exemple académique pour explorer la mise en oeuvre des différentes techniques de réduction de la variance pour ensuite faire une analyse de la variance en fonction des différents paramètres.

#### 4.3.4 Deuxième essai : Échantillonnage préférentiel

Nous décidons de remplacer la densité de probabilité uniforme sur  $\mathcal{D}$  par la demi-somme de deux gaussiennes centrées en  $A$  et  $B$  :

$$pdf_X(x; \sigma_X) = \frac{\frac{1}{2\sigma_X\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2\sigma_X^2}\right) \right]}{\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2\sigma_X\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2\sigma_X^2}\right) \right] dx} \quad (4.36)$$

en utilisant cette densité de probabilité avec de faibles valeurs de  $\sigma_X$  nous avons rencontré des problèmes numériques (division par zéro) lorsqu'une réalisation  $x_i$  prend une valeur rare dont la valeur de  $pdf$  est inférieure à la précision numérique. Pour contourner ce problème nous utilisons la  $pdf$  suivante pour échantillonner  $\mathcal{D}$  :

$$pdf_X(x; \sigma_X) = p \frac{1}{L} + (1-p) \frac{\frac{1}{2\sigma_X\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2\sigma_X^2}\right) \right]}{\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{2\sigma_X\sqrt{2\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{(x-A)^2}{2\sigma_X^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-B)^2}{2\sigma_X^2}\right) \right] dx} \quad (4.37)$$

$p$  est un réel compris entre 0 et 1, et  $L$  est la longueur du segment  $\mathcal{D}$ . Cela revient à échantillonner selon une loi uniforme avec une probabilité  $p$  et selon la loi de l'équation (4.36) avec une probabilité  $(1-p)$ . Par exemple (pour un nombre de réalisations qui tend vers l'infini), si  $p = 0.2$  alors on tire

$x$  de façon uniforme 2 fois sur 10 ; 4 fois sur 10 on tire  $x$  selon une gaussienne centrée en  $A$  et 4 fois sur 10 on tire  $x$  selon une gaussienne centrée en  $B$ .

Pour étudier le niveau de convergence des différents algorithmes, nous avons tracé sur la figure 4.9 les valeurs des écarts-types relatifs en fonction de la largeur du faisceau gaussien  $\sigma$  pour les trois algorithmes et différentes valeurs de  $\sigma_X$  et de  $p$ . On pose  $\mathcal{D} = [0; L]$ . Cela restera valable aussi dans les paragraphes suivants.

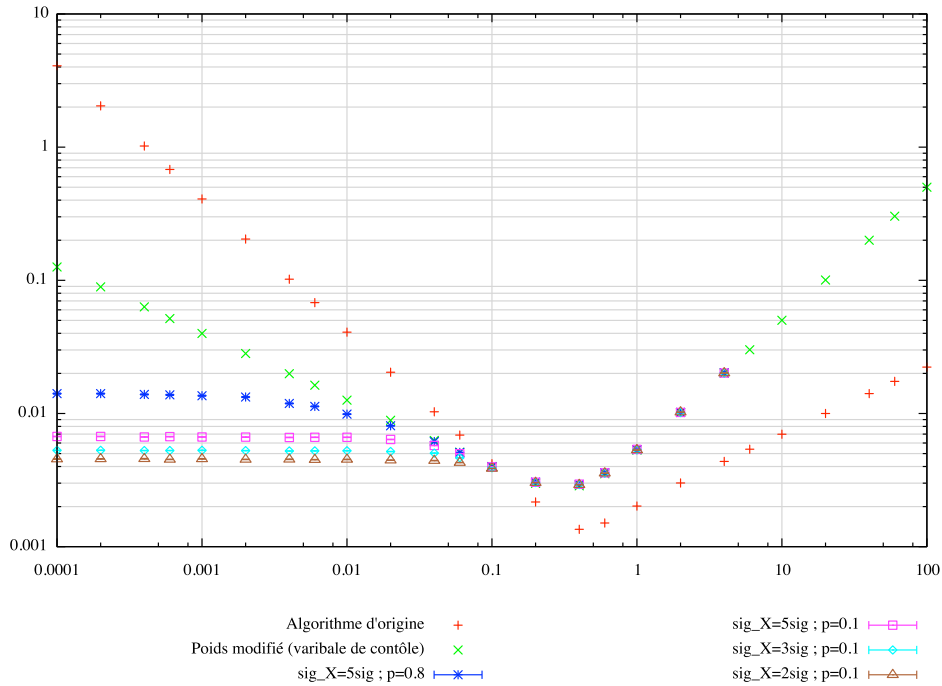


FIGURE 4.9 – Résultats Monte-Carlo pour  $10^6$  tirages,  $A = 0.2L$  ;  $B = 0.7L$  ;  
 $\sigma_X$  est un multiple de  $\sigma$  ( $\times 2, \times 3, \times 5$ ) ;  $p$  prend les valeurs 0.8 puis 0.1  
 En abscisses : largeur  $\sigma$  du faisceau gaussien ;  
 En ordonnées : Écarts-types relatifs à la valeur analytique de la sensibilité

On retrouve bien que les algorithmes des formulations Eq. 4.32 et Eq. 4.35 (en rouge et vert sur la figure 4.9) ne convergent pas pour de faibles largeurs du faisceau gaussien. La formulation Eq. 4.35 qui utilise une variable de contrôle diminue la variance lorsque que  $\sigma < 0,1$  mais la formulation standard (Eq. 4.32) donne de meilleurs résultats pour  $\sigma > 0,1$ .

Nous avons appliqué l'échantillonnage préférentiel à la formulation avec variable de contrôle en utilisant différentes valeurs de  $p$  et de  $\sigma_X$  qui sont les paramètres de la nouvelle densité de probabilité de la variable aléatoire  $X$  (Eq. 4.37).

Il est intéressant de constater sur ces derniers calculs que la variance tend vers une valeur constante (quand  $\sigma$  diminue) qui est de plus en plus faible :

- quand  $p$  diminue (on tire plus souvent la variable  $X$  selon la loi 4.36) ;
- quand on diminue  $\sigma_X$  (on tire les réalisations  $x_i$  de plus en plus proches de  $A$  et de  $B$ ).

Nous n'avons pas représenté les courbes avec  $\sigma_X < 2\sigma$  parce que en dessous de  $1.4 \times \sigma$  la variance augmente à nouveau. Il ne faut pas que le faisceau gaussien associé au tirage de  $X$  soit plus étroit que celui associé au tirage de  $Y$ .

Nous avons écrit au chapitre 2 que choisir une *pdf* qui améliore la convergence sur la sensibilité n'améliore pas forcément la convergence sur la grandeur. En effet, il n'est pas possible de prévoir a priori les répercussions de l'optimisation des *pdfs* pour estimer une sensibilité donnée sur la variance des autres estimations du même algorithme. Tous les cas sont possibles ; modifier les lois de tirage pour réduire la variance sur l'estimation d'une sensibilité peut :

- ne pas avoir d'effet sur l'estimation de la grandeur ;
- dégrader énormément la variance associée à l'estimation de la grandeur ;
- etc, etc, etc.

Aussi nous avons vérifié, pour chacune des *pdfs* utilisées à la figure 4.9, la valeur de l'écart-type relatif "ET" associé à l'estimation de la grandeur  $I$  :

- *pdf* standard : ET  $\approx 0,10\%$
- $\sigma_X = 5\sigma, p = 0,08$  : ET  $\approx 0,12\%$
- $\sigma_X = 5\sigma, p = 0,01$  : ET  $\approx 0,43\%$
- $\sigma_X = 3\sigma, p = 0,01$  : ET  $\approx 0,43\%$
- $\sigma_X = 2\sigma, p = 0,01$  : ET  $\approx 0,43\%$

Cette liste concerne les faibles valeurs de  $\sigma$  ( $\sigma < 0,1$ ). Pour des valeurs élevées, la *pdf* n'a pas d'influence sur la convergence de la grandeur. Pour des valeurs intermédiaires, c'est plus compliqué à interpréter. Dans tous les cas, il faut noter que dans la configuration étudiée, l'estimation de  $I$  reste fiable quelque soit la *pdf* utilisée (parmi celles testées). C'est très important de le souligner parce que parfois on utilise l'échantillonnage préférentiel pour améliorer la convergence sur la sensibilité mais l'estimation de la grandeur devient inutilisable avec le nouveau jeu de *pdfs*. Dans notre cas cependant, l'algorithme de Monte-Carlo permet d'estimer simultanément et avec précision la grandeur  $I$  et ses sensibilités  $\partial_A I, \partial_B I$  et c'est vraiment le but recherché. Si c'est possible sur un cas académique, il se pourrait que cela fonctionne aussi sur des problèmes réalistes.

Nous avons montré dans ce paragraphe que l'utilisation d'une loi de probabilité adaptée permet de diminuer significativement la variance et ainsi d'obtenir un niveau de convergence acceptable en terme de temps de calculs. La difficulté pratique consiste à identifier les valeurs des variables aléatoires qui sont responsables de la variance, afin de diminuer la probabilité de leur réalisation. Pour y parvenir, il est indispensable de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu et d'analyser en détails les expressions mathématiques des formulations intégrales.

Profitons de ce problème académique pour explorer une nouvelle piste (qui n'a encore jamais été testée) pour réduire la variance sur l'estimation de sensibilités à la déformation du domaine. Il s'agit de choisir un vecteur vitesse dont l'expression n'est pas celle proposée dans la thèse de Maxime ROGER [4].

### 4.3.5 Troisième essai : Influence du choix du vecteur vitesse

Le poids de la sensibilité  $\hat{w}_B$  peut s'écrire de la manière suivante (cf. Eq. 4.28 et Eq. 4.29) :

$$\hat{w}_B = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \hat{w} \frac{1}{\sigma\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right) \vec{V}_{B,2} \right] \times \frac{1}{\frac{1}{\sigma\pi\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right)} \quad (4.38)$$

Après développement, on obtient :

$$\hat{w}_B = \frac{\partial \vec{V}_{B,2}}{\partial y} + \frac{-(y-x)}{\sigma^2} \vec{V}_{B,2} \quad (4.39)$$

Le but ultime de tout algorithme de Monte-Carlo est d'avoir la même valeur pour toutes les réalisations du poids (voir "Zéro-Variance", Sec. 2.2). Cependant, il est en pratique très difficile de trouver une expression constante du poids. Dans le cas étudié ici nous allons déterminer une expression particulière du vecteur vitesse  $\vec{V}_B$  afin que le poids  $\hat{w}_B$  ne dépende plus de la seconde variable d'intégration  $y$ . On cherche donc à résoudre l'équation différentielle suivante ( $x$  est fixé). On note  $V = \vec{V}_{B,2}$ .

$$V' + \frac{-(y-x)}{\sigma^2} V = cste \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (4.40)$$

On note  $V_0$  une solution de l'équation homogène  $V' + \frac{-(y-x)}{\sigma^2} V = 0$  :

$$V_0(x, y) = \exp\left(\frac{\frac{y^2}{2} - xy}{\sigma^2}\right) \quad (4.41)$$

Puis on calcule une solution particulière  $\tilde{V} = \lambda V_0$  qui vérifie l'équation 4.40. On trouve  $\tilde{V}' + \frac{-(y-x)}{2\sigma^2} \tilde{V} = \lambda' V_0 = cste$  et on en déduit l'expression de  $\lambda$  en intégrant selon  $y$  :

$$\lambda(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \quad (4.42)$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle 4.40 s'écrivent comme suit :

$$V = C_1 V_0 + C_2 \tilde{V} = (C_1 + C_2 \lambda) V_0 \quad \text{avec } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$V(x, y) = \left[ C_1 + C_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma \exp\left(\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \exp\left(\frac{\frac{y^2}{2} - xy}{\sigma^2}\right) \quad (4.43)$$

Il ne reste plus qu'à déterminer  $C_1$  et  $C_2$  en fonction des valeurs que prend la vitesse de déformation quand  $y = A$  et  $y = B$  :

$$\begin{cases} V(x, y = A) = 0 = [C_1 + C_2 \lambda(x, A)] V_0(x, A) \\ V(x, y = B) = 1 = [C_1 + C_2 \lambda(x, B)] V_0(x, B) \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \lambda(x, A) \\ C_2 [\lambda(x, B) - \lambda(x, A)] V_0(x, B) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{-\lambda(x, A)}{V_0(x, B) [\lambda(x, B) - \lambda(x, A)]} \\ C_2 = \frac{1}{V_0(x, B) [\lambda(x, B) - \lambda(x, A)]} \end{cases} \quad (4.45)$$

Maintenant que l'on dispose d'un nouveau vecteur vitesse, on peut calculer la nouvelle expression  $\widetilde{w}_B$  du poids de la sensibilité  $\partial_B I$  (cf. Eq. 4.39) :

$$\begin{aligned}\widetilde{w}_B &= C_2 \partial_y \lambda(x, y) V_0(x, y) \\ &= \frac{\partial_y \lambda(x, y) V_0(x, y)}{V_0(x, B) [\lambda(x, B) - \lambda(x, A)]} \\ &= \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(B-x)^2}{2\sigma^2}\right)}{\frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{B-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{A-x}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right]}\end{aligned}\quad (4.46)$$

Sur la figure suivante, on représente les écarts-types relatifs associés à l'estimation de  $\partial_B I$ . Il est intéressant de remarquer que l'utilisation du nouveau vecteur vitesse permet une meilleure convergence que la variable de contrôle pour  $\sigma < 0.1$  et que l'algorithme d'origine pour  $\sigma > 0.1$ . En combinant nouveau vecteur vitesse et échantillonnage préférentiel on améliore l'écart-type relatif de 0.5 % à 0.3 % pour  $\sigma < 0.1$  et l'on conserve la tendance précédente pour  $\sigma > 0.1$ .

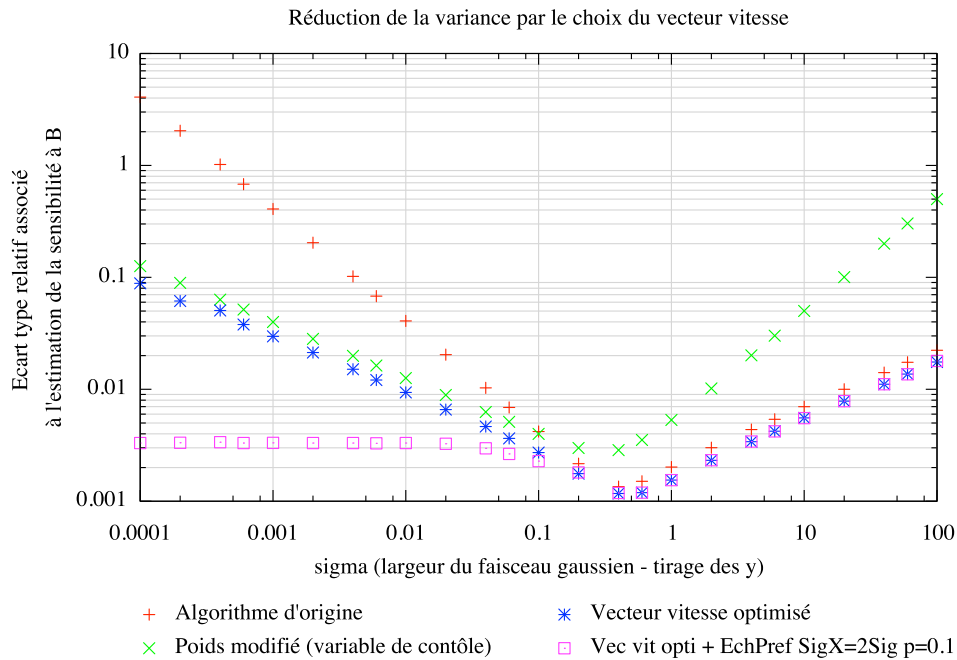


FIGURE 4.10 – Résultats Monte-Carlo pour  $10^6$  tirages, en utilisant le nouveau vecteur vitesse

### 4.3.6 Conclusion

- Nous étions partis dans cette section d'un problème réel très complexe et l'avons simplifié une première fois en 2D pour mettre en évidence une difficulté de convergence. Partant de là, nous avons pu choisir une configuration académique 1D qui contient toute la difficulté de convergence d'origine.
- Nous avons proposé et validé trois pistes pour réduire la variance dans ce genre de problème.

La question d'appliquer ces résultats académiques aux configurations réelles n'a pas encore été traitée. Cependant il faut retenir que la reformulation intégrale par un changement de variable peut

beaucoup simplifier les expressions des sensibilités (nous illustrons ce point dans la section suivante) et que les différentes techniques de réduction de la variance présentées au chapitre 2 sont de très bons guides de réflexion que l'on doit adapter au cas par cas à chaque difficulté de convergence rencontrée.

Dans les sections 4.2 et 4.3 nous nous sommes intéressés aux systèmes optiques concentrateurs (champ d'héliostats). Passons maintenant aux récepteurs et étudions les difficultés causées par les phénomènes de diffusion/réflexion multiple lors du calcul de sensibilité.

#### 4.4 Diffusion multiple dans un slab : sensibilité à la position de la source

Cette section est une reprise approfondie de la communication *Monte-Carlo estimations of domain-deformation sensitivities for optimal geometric design* écrite en 2009 pour le congrès Eurotherm83 à Lisbonne [92]. Les applications solaires auxquelles on pense ici sont les photobioréacteurs et les récepteurs solaires à lits fluidisés. On se concentre sur les sensibilités géométriques à la taille des fibres optiques à diffusion latérale dans les photobioréacteurs, ou aux paramètres géométriques des récepteurs solaires volumétriques. On s'attend à rencontrer 2 types de difficultés :

**Un problème de mise en oeuvre** lié à la diffusion/réflexion multiple et au domaine d'intégration de dimension infinie. Le nombre des composantes du champ de vitesse de déformation étant potentiellement infini, il faudra une programmation algorithmique astucieuse pour prendre en compte la dépendance d'une composante à toutes les précédentes : stockage des informations sur l'historique des trajectoires des photons (successions de positions et de directions) lors de la réalisation d'un chemin optique.

**Un problème de convergence** lié à la grande dispersion des contributions des chemins courts et des chemins longs. Cette difficulté de convergence est a priori indépendante de la difficulté de mise en oeuvre. Elle existe déjà sur l'évaluation directe des grandeurs physiques, il n'y a pas de raison pour qu'elle ne se produise pas pour les sensibilités.

Ces deux problèmes étant distincts et communs à tous les procédés mettant en jeu les phénomènes de réflexions/diffusions multiple, nous allons les traiter dans cette section de manière indépendante sur une configuration académique universelle très souvent étudiée par la communauté en transfert radiatif dans les milieux participants. La configuration en question est une géométrie *plans parallèles* (*slab* en anglais). C'est la géométrie de référence pour l'étude des transferts radiatifs en milieux diffusants (avant le cube). Afin de ne conserver que les difficultés propres à la diffusion multiple, nous choisissons des coefficients  $k_a$ ,  $k_s$  uniformes et indépendants de la fréquence spectrale, la fonction de phase est uniforme isotrope.

Nous mettrons d'abord en évidence la difficulté pratique de mise en oeuvre puis nous proposerons une solution pour la contourner. Nous verrons alors qu'un changement de variable dans la formulation intégrale permet de simplifier énormément l'expression du poids de la sensibilité, ainsi que la structure algorithmique. Enfin nous montrerons qu'en utilisant une variable de contrôle, il est possible de diminuer la variance sur l'estimation de la sensibilité et ainsi de limiter le problème de convergence.

#### 4.4.1 Description du problème

La configuration étudiée est constituée d'une source lumineuse isotrope et monochromatique située à la position  $\mathbf{r}_S(x_S, y_S, z_S)$  dans une couche d'épaisseur  $h$  remplie uniformément par un gaz absorbant et diffusant avec des coefficients d'absorption et de diffusion constants, notés  $k_a$  et  $k_s$  (Fig. 4.11). On souhaite calculer la fraction  $T_{up}$  de rayonnement transmis par le gaz et qui sort de la couche par la face supérieure. On souhaite aussi estimer sa sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  à la position de la source (c'est à dire au paramètre  $z_S$ ).

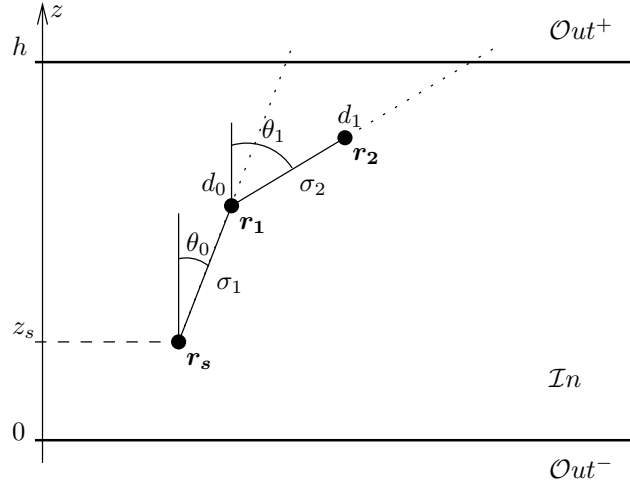


FIGURE 4.11 – Configuration étudiée : couche monodimensionnelle

#### 4.4.2 Première formulation : intégrales sur les directions et les libres parcours de diffusion

Cette première approche consiste à simuler le chemin des photons émis par la source dans la couche par une marche aléatoire de diffusion. Pour traiter à la fois la diffusion et l'absorption, nous choisissons de suivre statistiquement le trajet des paquets de photons depuis la source jusqu'à la sortie du système comme le décrit l'algorithme de la figure 4.12. Le poids d'un paquet de photons est nul quand le paquet de photons en question sort de la couche par la face du bas.

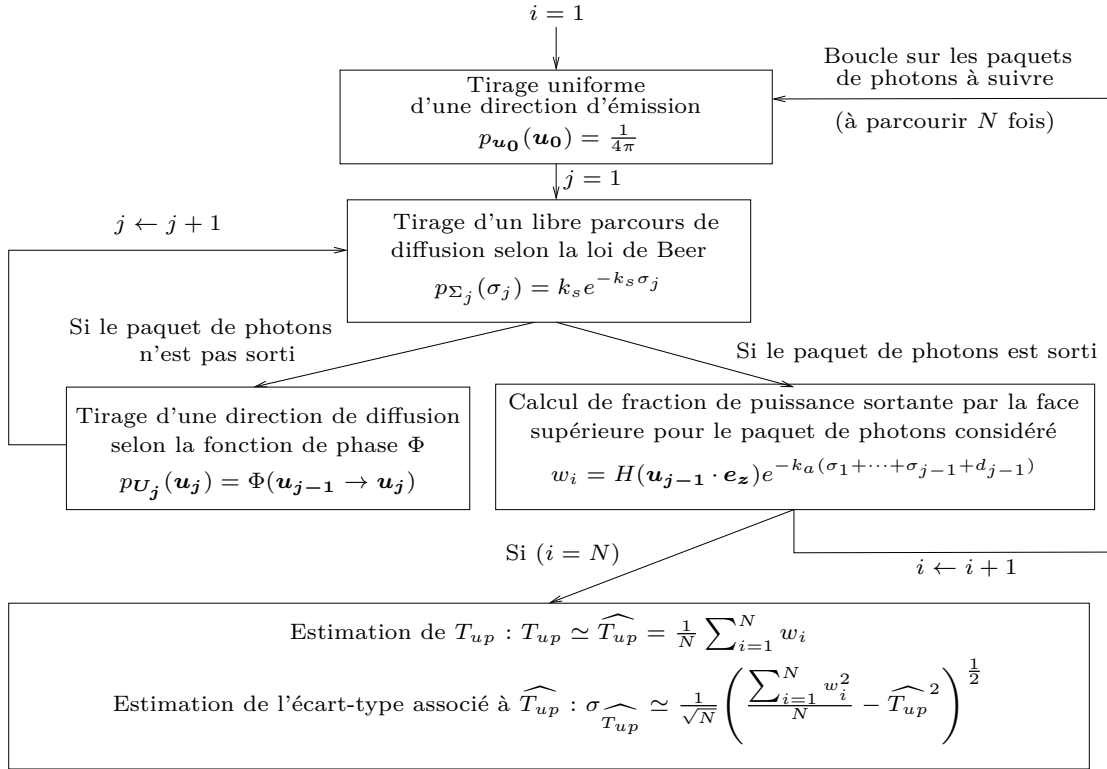
L'expression intégrale correspondant à cet algorithme s'écrit :

$$T_{up} = \int_{4\pi} p_{U_0}(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{4\pi} p_{U_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_1 \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_2}(\sigma_2) d\sigma_2 \cdots \hat{w}(\mathbf{u}_0, \sigma_1, \mathbf{u}_1, \sigma_2, \dots) \quad (4.47)$$

où  $p_{U_0}(\mathbf{u}_0) = \frac{1}{4\pi}$ ,  $p_{\Sigma_j}(\sigma_j) = k_s e^{-k_s \sigma_j}$ ,  $p_{U_j}(\mathbf{u}_j) = \Phi(\mathbf{u}_j | \mathbf{u}_{j-1})$ , et où  $\hat{w}(\mathbf{u}_0, \sigma_1, \mathbf{u}_1, \sigma_2, \dots)$  est la fonction poids associée à l'estimation de  $T_{up}$  :

$$\begin{aligned} \hat{w}(\mathbf{u}_0, \sigma_1, \mathbf{u}_1, \sigma_2, \dots) = & H(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z) H(\sigma_1 - d_0) e^{-k_a d_0} \\ & + H(d_0 - \sigma_1) e^{-k_a \sigma_1} \left\{ H(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{e}_z) H(\sigma_2 - d_1) e^{-k_a d_1} \right. \\ & \left. + H(d_1 - \sigma_2) e^{-k_a \sigma_2} \{ \dots \} \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$



FIGURE 4.12 – Description de l'algorithme de Monte-Carlo pour l'estimation de  $T_{up}$ 

avec  $d_i$  la distance que peut parcourir un paquet de photons dans la direction  $\mathbf{u}_i$  avant de sortir de la couche (en partant de la  $i^{eme}$  position de diffusion  $\mathbf{r}_i$  dans la direction  $\mathbf{u}_i$ ). On rappelle que  $H$  est la fonction Heaviside utilisée pour le test de sortie : si  $H(d_0 - \sigma_1) = 1$  alors le paquet de photons considéré sort de la couche sans jamais avoir été diffusé et si  $H(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}_z) = 1$  alors il quitte la couche par la face supérieure.

La distance  $d_i$  s'exprime de la manière suivante (cf. Fig. 4.11) :

$$d_i = \frac{1}{\cos \theta_i} \left( h - z_S - \sum_{k=1}^i \sigma_k \cos \theta_{k-1} \right) \quad (4.49)$$

$d_i$  dépend du paramètre  $z_S$  auquel on souhaite estimer la sensibilité. Puisque des tests de rejet fonctions de  $d_i$  apparaissent dans l'expression de la fonction poids  $\hat{w}(\mathbf{u}_0, \sigma_1, \mathbf{u}_1, \sigma_2, \dots)$  (Eq. 4.48), alors – conformément à la méthode décrite au 2.3 pour calculer une sensibilité de type  $\mathbf{d}$  – nous allons séparer le domaine d'intégration en sous-domaines afin d'exprimer la sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  de  $T_{up}$  à  $z_S$ . On peut alors réécrire  $T_{up}$  sous la forme  $T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} T_{up,i}$  avec  $T_{up,i}$  définie par :

$$\begin{aligned} T_{up,i} = & \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}_0}(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 \int_0^{d_0} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_1 \int_0^{d_1} p_{\Sigma_2}(\sigma_2) d\sigma_2 \\ & \cdots \int_{4\pi} p_{\mathbf{U}_{i-1}}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-2}) d\mathbf{u}_{i-1} \int_{d_{i-1}}^{+\infty} p_{\Sigma_i}(\sigma_i) d\sigma_i \\ & H(\mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{e}_z) e^{-k_a(\sigma_1 + \dots + \sigma_{i-1} + d_{i-1})} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$T_{up,i}$  est la contribution à  $T_{up}$  des paquets de photons qui quittent la couche par la face supérieure

après  $(i - 1)$  évènements de diffusion. En appliquant l'équation 2.45 :

$$\partial_\lambda A = \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \left( \partial_\lambda w(\mathbf{x}) + w(\mathbf{x}) \frac{\partial_\lambda p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} + \frac{\text{div}(p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})w(\mathbf{x})\mathbf{V}_\lambda(\mathbf{x}))}{p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})} \right) d\mathbf{x}$$

on peut dériver  $T_{up}$  pour exprimer sa sensibilité :  $\partial_{z_S} T_{up} = \sum_{i=1}^{+\infty} \partial_{z_S} T_{up,i}$ .

$$\begin{aligned} \partial_{z_S} T_{up,i} = & \int_{4\pi} p_{U_0}(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 \int_0^{d_0} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \cdots \int_{4\pi} p_{U_{i-1}}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i-2}) d\mathbf{u}_{i-1} \\ & \int_{d_{i-1}}^{+\infty} p_{\Sigma_i}(\sigma_i) d\sigma_i \quad H(\mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{e}_z) \left\{ \partial_{z_S} \left( e^{-k_a(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} + d_{i-1})} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\nabla \cdot \left[ e^{-k_a(\sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1} + d_{i-1})} \left( \prod_{k=1}^i p_{\Sigma_k}(\sigma_k) \right) \mathbf{V}_{z_S} \right]}{\prod_{k=1}^i p_{\Sigma_k}(\sigma_k)} \right\} \end{aligned} \quad (4.51)$$

On calcule ensuite le champ de vitesse de déformation  $\mathbf{V}_{z_S}$  selon les équations 2.43-2.44 (les composantes  $V_{z_S, \vec{u}_i}$  sont toutes nulles) :

$$\begin{aligned} V_{z_S, \sigma_1}(\sigma_1) &= -\frac{\sigma_1}{d_0 \cos \theta_0} \quad ; \quad V_{z_S, \sigma_2}(\sigma_2) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{d_0 d_1 \cos \theta_1} - \frac{\sigma_2}{d_1 \cos \theta_1} \\ &\vdots \\ V_{z_S, \sigma_k}(\sigma_k) &= \left( \sum_{j=1}^{k-1} -\frac{\cos \theta_{j-1}}{\cos \theta_{k-1}} V_{z_S, \sigma_j} \right) \frac{\sigma_k}{d_{k-1}} - \frac{\sigma_k}{d_{k-1} \cos \theta_{k-1}} \\ &\vdots \\ V_{z_S, \sigma_i}(\sigma_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} -\frac{\cos \theta_{j-1}}{\cos \theta_{i-1}} V_{z_S, \sigma_j} - \frac{1}{\cos \theta_{i-1}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

On remarque que l'expression de la sensibilité devient rapidement difficile à manipuler avec la dimension infinie du domaine, ce qui rend la mise en oeuvre délicate. De plus, il va falloir stocker chaque composante du vecteur vitesse  $\mathbf{V}_{z_S}$  pour calculer la divergence (opérateur  $\nabla$ ) dans le dernier terme de l'équation 4.51. La mise en oeuvre algorithmique semble assez lourde et peu adaptée au problème de diffusion multiple dans des géométries réalistes. Malgré ces difficultés nous avons réussi à calculer  $T_{up}$  et sa sensibilité à  $z_S$  dans la géométrie simple d'une couche. Nous présentons et discutons des résultats au paragraphe 4.4.4.

Pour résumer la situation, la mise en oeuvre de ce calcul de sensibilité est délicate, mais pas insurmontable sur cette configuration académique. Au 4.2 nous avons aussi rencontré un problème de mise en oeuvre. Il s'agissait alors d'une difficulté mathématique formelle. Ici au contraire on obtient facilement l'expression formelle du poids de la sensibilité, la difficulté est une difficulté pratique sur l'implémentation de l'algorithme (il faut bien plus qu'une seule ligne de code pour ajouter l'estimation de la sensibilité) parce qu'il faut gérer les différents cas possibles de résultats des tests conditionnels et qu'il faut programmer proprement le stockage des informations sur l'historique du chemin optique. Si on pense aux applications du chapitre 3 voici ce qui va compliquer encore un peu plus la situation :

- Du point de vue géométrique, les tests seront beaucoup plus nombreux (plus de cas à gérer dans l'expression des composantes du vecteur vitesse) avec 979 fibres optiques ;
- La densité volumique de particules dans le lit fluidisé n'est pas uniforme ( $k_a$ ,  $k_s$ ,  $\Phi$  non uniformes), avec une dépendance spectrale, et la fonction de phase  $\Phi$  n'est pas isotrope, il faut en plus tenir compte des interfaces entre les sous-domaines du volume.

Ainsi, même si nous avons réussi à implémenter un algorithme sur la configuration académique de la couche, cette démarche risque de pas fonctionner pour les configurations réalistes. Nous allons donc proposer une reformulation intégrale basée sur un changement de variable afin de contourner cette difficulté algorithmique.

### 4.4.3 Nouvelle formulation : intégrales sur les positions de diffusion

Comme mentionné ci-dessus, la formulation précédente semble difficile à implémenter pour des applications réelles en trois dimensions. Nous allons maintenant présenter une formulation alternative. Au lieu de faire porter les intégrales sur les directions et les longueurs de diffusion, nous allons réécrire la grandeur  $T_{up}$  avec des intégrales qui portent sur les positions de diffusion <sup>7</sup> :

$$T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_2 \dots \hat{w} \quad (4.53)$$

où la fonction densité de probabilité de la position  $\mathbf{r}_i$  de chaque collision est :

$$p_{R_i}(\mathbf{r}_i|\mathbf{r}_{i-1}) = \frac{p_{U_{i-1}}(\mathbf{u}_{i-1}|\mathbf{u}_{i-2}) p_{\Sigma_i}(\sigma_i)}{\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}\|^2} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \text{et avec : } \hat{w} = & H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{O}ut^+) e^{-k_a d_0} \\ & + H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n) H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{O}ut^+) e^{-k_a(\sigma_1+d_1)} \\ & + H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n) H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{I}n) H(\mathbf{r}_3 \in \mathcal{O}ut^+) e^{-k_a(\sigma_1+\sigma_2+d_2)} \\ & + \dots \end{aligned} \quad (4.55)$$

Les tests de rejets de l'équation 4.55,  $H(\mathbf{r}_i \in \mathcal{O}ut^+)$  et  $H(\mathbf{r}_i \in \mathcal{I}n)$  (cf. Fig. 4.11) ne dépendent plus de la position  $z_S$  de la source émettrice.

L'avantage de cette nouvelle formulation est que le nouveau domaine d'intégration ne dépend plus du paramètre  $z_S$  puisque ni les bornes des intégrales, ni les fonctions Heaviside ne dépendent plus du paramètre. La sensibilité à  $z_S$  s'exprime alors comme une sensibilité paramétrique (type **b**). Seuls le poids de l'intégrale 4.53 et les deux densités de probabilité  $p_{R_1}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_s)$ ,  $p_{R_2}(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1)$  vont dépendre du paramètre. Aussi toutes les difficultés liées à l'estimation d'une sensibilité à la déformation du domaine disparaissent et la mise en oeuvre algorithmique en est grandement simplifiée.

En repartant de l'équation 4.53, nous appliquons la méthode décrite dans [10] (voir Sec. 2.3, cas **b**). On obtient l'expression suivante de la sensibilité :

$$\partial_{z_S} T_{up} = \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_1}(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}_s) d\mathbf{r}_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_{R_2}(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_2 \dots \hat{w}_{z_S} \quad (4.56)$$

<sup>7</sup>. On effectue le changement de variable suivant :  $d\mathbf{r}_i = \sigma_i^2 d\sigma_i d\mathbf{u}_{i-1}$  et on calcule les nouvelles *pdfs* d'après  $p_{R_i} d\mathbf{r}_i = p_{\Sigma_i} d\sigma_i p_{U_{i-1}} d\mathbf{u}_{i-1}$ .

avec

$$\hat{w}_{z_S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = \partial_{z_S} \hat{w} + \hat{w} \left[ \frac{\partial_{z_S} p_{R_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)}{p_{R_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)} + \frac{\partial_{z_S} p_{R_2}(\mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_1)}{p_{R_2}(\mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_1)} \right] \quad (4.57)$$

Si la diffusion est isotrope alors  $p_{R_2}(\mathbf{r}_2 | \mathbf{r}_1)$  ne dépend plus de  $z_s$  et on obtient<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} \hat{w}_{z_S} &= \partial_{z_S} \hat{w} + \hat{w} \frac{\partial_{z_S} p_{R_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)}{p_{R_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)} \\ &= H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{O}ut^+) e^{-k_a d_0} \\ &\quad \times \left[ \frac{k_a}{\cos \theta_0} \left( 1 + (h - z_S) \left( \frac{\cos \theta_0}{\sigma_1} - \frac{1}{z_1 - z_S} \right) \right) + \cos \theta_0 \left( k_s + \frac{2}{\sigma_1} \right) \right] \\ &\quad + H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n) e^{-k_a \sigma_1} \left[ \cos \theta_0 \left( k_a + k_s + \frac{2}{\sigma_1} \right) \right] \\ &\quad \times \left\{ H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{O}ut^+) e^{-k_a d_1} + H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{I}n) \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

Nous devons ici rappeler que toute formulation intégrale basée sur un jeu de densités de probabilité et d'intégrations successives doit absolument être associée à un algorithme spécifique [4]. Modifier la formulation intégrale implique de modifier également l'algorithme correspondant.

Comme nous avons modifié les domaines d'intégration et les densités de probabilité, ils ne correspondent plus à l'algorithme d'origine. Aussi, l'équation 4.56 reste incomplète parce que sa forme ne correspond pas à l'algorithme présenté figure 4.12 pour estimer  $T_{up}$ . Il faut donc réécrire l'expression de la sensibilité selon la formulation initiale décrite au 4.4.2. Le passage de l'équation 4.56 à la formulation initiale est direct :

$$\begin{aligned} \partial_{z_S} T_{up} &= \int_{4\pi} p_{U_0}(\mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_0 \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_1}(\sigma_1) d\sigma_1 \int_{4\pi} p_{U_1}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_0) d\mathbf{u}_1 \\ &\quad \int_0^{+\infty} p_{\Sigma_2}(\sigma_2) d\sigma_2 \dots w_{z_S} \end{aligned} \quad (4.59)$$

où  $w_{z_S}$  reste inchangé<sup>9</sup> (cf. Eq. 4.58).

A partir de cette équation, il est maintenant facile de compléter l'algorithme pour le calcul de la sensibilité. Il faut bien insister sur le fait qu'avec la nouvelle formulation, la géométrie du système n'intervient pas dans le calcul de  $\partial_{z_S} T_{up}$ . Cette technique de changement de variable semble pouvoir être appliquée dans des géométries 3D complexes sans difficultés supplémentaires.

Il faut bien noter ici que même si le changement de variable a complètement modifié la formulation intégrale, le domaine physique d'intégration est resté identique. Nous avons contourné la difficulté de mise en oeuvre algorithmique en transformant d'un point de vue formel la sensibilité géométrique (type **d**) en sensibilité paramétrique (type **b**) sans pour autant modifier la structure initiale de l'algorithme d'estimation de  $T_{up}$ .

8. Les variables d'intégration ayant changé, il faut dériver  $\sigma_1 = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s\|$  et  $\cos \theta_0 = \frac{z_1 - z_S}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_s\|}$  par rapport à  $z_S$ .

9. Les tests  $H(\mathbf{r}_i \in \mathcal{O}ut^+)$  (resp.  $H(\mathbf{r}_i \in \mathcal{I}n)$ ) redeviennent formellement  $H(\mathbf{u}_{i-1} \cdot \mathbf{e}_z) H(\sigma_i - d_{i-1})$  (resp.  $H(d_{i-1} - \sigma_i)$ )

#### 4.4.4 Résultats et discussion

Le tableau 4.2 présente les résultats d'un algorithme de Monte-Carlo qui résout les deux formulations avec différentes valeurs de  $z_S$ ,  $k_s$ ,  $k_a$ . On observe que la fraction transmise  $T_{up}$  est bien estimée (faible écart-type) pour  $10^7$  échantillons. En ce qui concerne les estimations de la sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  à la position  $z_S$  de la source émettrice, les résultats des deux formulations sont cohérents mais la valeur des écarts-types obtenus indique des soucis de convergence.

Puisque les deux formulations donnent les mêmes résultats, cela confirme que la nouvelle formulation développée ici permet d'estimer rigoureusement la même grandeur physique  $\partial_{z_S} T_{up}$ . Elle présente l'énorme avantage d'être beaucoup plus facile à mettre en oeuvre. C'est un point très important quand il s'agit d'estimer des sensibilités dans des géométries complexes en utilisant les outils de rendu de la synthèse d'image [78].

On peut remarquer que la variance augmente lorsque pour une valeur fixée de  $k_a$ , on augmente  $k_s$  à cause du terme  $\frac{\cos \theta_0}{\sigma_1}$  qui lorsque  $\sigma_1$  est faible devient source de divergence. Ce comportement bien connu des algorithmes de Monte-Carlo lorsque l'épaisseur optique de diffusion augmente, peut être traité par l'utilisation des techniques de réduction de la variance [66, 93]. Nous montrons dans le paragraphe suivant comment utiliser une variable de contrôle pour réduire cette variance.

$z_S$	$k_s$	$T_{up}$	$\sigma_{T_{up}}$	$\partial_{z_S} T_{up}$ (a)	$\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}$ (a)	$\partial_{z_S} T_{up}$ (b)	$\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}$ (b)
0.6	0.01	0.490	$1.55 \cdot 10^{-4}$	0.0417	$5.48 \cdot 10^{-4}$	0.0466	$5.06 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.01	0.495	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0430	$1.10 \cdot 10^{-3}$	0.0484	$5.09 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.01	0.501	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0469	$8.98 \cdot 10^{-4}$	0.0509	$5.13 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.01	0.507	$1.57 \cdot 10^{-4}$	0.0456	$4.69 \cdot 10^{-3}$	0.0557	$5.17 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.1	0.503	$1.55 \cdot 10^{-4}$	ne converge pas		0.183	0.0444
0.7	0.1	0.518	$1.56 \cdot 10^{-4}$	ne converge pas		0.189	0.0445
0.8	0.1	0.533	$1.56 \cdot 10^{-4}$	ne converge pas		0.230	0.0529
0.9	0.1	0.551	$1.56 \cdot 10^{-4}$	ne converge pas		0.242	0.0533
Les résultats ci-dessus ont été obtenus pour $k_a = 0.01$							
0.6	0.01	0.194	$7.90 \cdot 10^{-5}$	0.354	$1.32 \cdot 10^{-4}$	0.349	$3.77 \cdot 10^{-3}$
0.7	0.01	0.235	$9.11 \cdot 10^{-5}$	0.456	$1.75 \cdot 10^{-4}$	0.446	$6.35 \cdot 10^{-3}$
0.8	0.01	0.288	$1.06 \cdot 10^{-4}$	0.615	$2.20 \cdot 10^{-4}$	0.604	$7.18 \cdot 10^{-3}$
0.9	0.01	0.364	$1.25 \cdot 10^{-4}$	0.917	$3.71 \cdot 10^{-4}$	0.903	$8.19 \cdot 10^{-3}$
0.6	0.1	0.193	$7.83 \cdot 10^{-5}$	0.379	0.0112	0.378	0.0193
0.7	0.1	0.236	$9.04 \cdot 10^{-5}$	0.474	$1.82 \cdot 10^{-3}$	0.474	0.0273
0.8	0.1	0.290	$1.05 \cdot 10^{-4}$	0.634	$3.84 \cdot 10^{-3}$	0.639	0.0333
0.9	0.1	0.370	$1.24 \cdot 10^{-4}$	0.953	$1.44 \cdot 10^{-3}$	0.944	0.0309
0.6	1	0.182	$7.33 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		ne converge pas	
0.7	1	0.232	$8.57 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		ne converge pas	
0.8	1	0.300	$1.00 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		ne converge pas	
0.9	1	0.399	$1.18 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		ne converge pas	
Les résultats ci-dessus ont été obtenus pour $k_a = 1$							

TABLE 4.2 – Résultats de simulations pour :  $N = 10^7$ ,  $h = 1$  et une fonction de phase isotrope  $\Phi = \frac{1}{4\pi}$  ;

(a) Estimations de la sensibilité avec la première formulation intégrale sur les directions et libres parcours de diffusion ;

(b) Estimations de la sensibilité avec la reformulation intégrale sur les positions de diffusion.

#### 4.4.5 Variable de contrôle appliquée au calcul de sensibilité

Voyons maintenant s'il est possible d'améliorer la convergence de l'algorithme sur l'estimation de la sensibilité. Commençons par étudier l'expression du poids pour identifier la source de variance.

##### 4.4.5.1 Identification de la source de variance, proposition théorique

Comme mentionné au paragraphe précédent, on suppose que la source de variance se trouve dans  $\frac{\cos \theta_0}{\sigma_1}$  issu du terme  $\frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}(r_1)}{p_{\mathbf{R}_1}(r_1)}$ . Mathématiquement,  $\cos \theta_0$  prend en effet des valeurs comprises entre  $-1$  et  $1$  tantôt positives (quand la direction d'émission est tirée vers le haut), tantôt négatives (quand la direction d'émission est tirée vers le bas). La dispersion du cosinus est ensuite énormément amplifiée lorsque l'on divise par  $\sigma_1$  qui est très faible pour de fortes épaisseurs optiques de diffusion.

Dans le but d'améliorer la convergence par l'introduction d'une variable de contrôle (cf. Sec. 2.1.2), on propose de définir une nouvelle intégrale avec un poids  $\tilde{w}$  qui serait décorrélé de  $\frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}(r_1|r_s)}{p_{\mathbf{R}_1}(r_1|r_s)}$  afin d'utiliser ce poids  $\tilde{w}$  comme variable de contrôle lors du calcul de la sensibilité et tenter de réduire la variance associée à son estimation. Nous allons tout d'abord expliquer d'un point de vue théorique pourquoi il est intéressant de chercher un poids  $\tilde{w}$  tels que  $\tilde{w}$  et  $\frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}(r_1)}{p_{\mathbf{R}_1}(r_1)}$  soient décorrélés.

Considérons l'intégrale

$$I = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{x}; \lambda) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \lambda) \hat{w}(\mathbf{x}; \lambda) d\mathbf{x} \quad (4.60)$$

et sa sensibilité au paramètre  $\lambda$  (on suppose ici que le domaine d'intégration  $\mathcal{D}$  est indépendant du paramètre  $\lambda$ )

$$\partial_{\lambda} I = \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \left[ \partial_{\lambda} \hat{w} + \hat{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right] d\mathbf{x} \quad (4.61)$$

La densité de probabilité étant normalisée :  $\int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 = cste$ , ceci implique :

$$\partial_{\lambda} \left\{ \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\} = 0$$

et puisque  $\mathcal{D}$  ne dépend pas de  $\lambda$ , on peut écrire  $\int_{\mathcal{D}} \partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$  et on en déduit la relation suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = 0 \quad \text{soit} \quad \left\langle \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right\rangle = 0 \quad (4.62)$$

Nous avons aperçu au 4.3.3 qu'il est impossible de calculer une valeur nulle avec un algorithme de Monte-Carlo. En effet, si on cherche à calculer  $\left\langle \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right\rangle$ , l'algorithme reconstruira la valeur nulle en générant des valeurs de  $\frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}}$  parfois positives, parfois négatives et la convergence est inaccessible.

En conséquence, le terme  $\hat{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}}$  calculé par l'algorithme est lui aussi parfois positif, parfois négatif.

Or, si  $\hat{w}$  et  $\frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}}$  sont peu corrélés, l'espérance  $\left\langle \hat{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right\rangle$  est proche de zéro et ceci peut être à l'origine de variances importantes.

Cependant, si on trouve une expression  $\tilde{w}$  telle que  $\tilde{w}$  et  $\frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}}$  soient totalement décorrélés,

alors :

$$\int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \tilde{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} d\mathbf{x} = \left\langle \tilde{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right\rangle = \langle \tilde{w} \rangle \left\langle \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right\rangle = 0 \quad (4.63)$$

On utilise cette propriété pour déterminer la variable de contrôle et on peut réécrire la sensibilité de l'Eq. 4.61 sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda} I &= \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \left[ \partial_{\lambda} \hat{w} + \hat{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right] d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \left[ \partial_{\lambda} \hat{w} + \hat{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right] d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \tilde{w} \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{D}} p_{\mathbf{X}} \left[ \partial_{\lambda} \hat{w} + (\hat{w} - \tilde{w}) \frac{\partial_{\lambda} p_{\mathbf{X}}}{p_{\mathbf{X}}} \right] d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Si la différence  $(\hat{w} - \tilde{w})$  est inférieure en valeur absolue à  $\hat{w}$ , alors on parvient à réduire la source de variance et on peut espérer une meilleure convergence. Pour réduire au maximum la variance sur l'estimation de la sensibilité, il est donc nécessaire de trouver une fonction poids  $\tilde{w}$  dont l'expression soit la plus proche possible de celle de  $\hat{w}$ .

#### 4.4.5.2 Application de ce concept théorique à la configuration étudiée

Revenons maintenant à l'exemple applicatif :  $p_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)$  est une fonction qui dépend de  $\mathbf{r}_s$  (donc de  $z_s$ ) ;  $\hat{w}$  et  $\frac{\partial_{z_s} p_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)}{p_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_s)}$  sont peu corrélés.

On cherche  $\tilde{w}$  tel que l'espérance  $\left\langle \tilde{w} \frac{\partial_{z_s} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}} \right\rangle$  soit nulle (si  $\tilde{w}$  totalement décorrélés de  $\frac{\partial_{z_s} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}}$ ) ou bien quantifiable (pour utiliser  $\tilde{w}$  comme variable de contrôle).

Pour que  $\tilde{w}$  ne dépende pas de  $\mathbf{r}_1$ , son expression ne doit faire appel qu'aux grandeurs du chemin optique partiel  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots)$  privé de la position  $\mathbf{r}_1$ , au lieu du chemin optique total  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots)$  comme c'était le cas jusqu'ici.

On pose  $\tilde{\sigma}_2 = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s\|$  et on choisi arbitrairement l'expression suivante (pour une sortie du système à la  $j^{\text{ième}}$  position) :

$$\tilde{w} = \exp[k_a \cdot (\tilde{\sigma}_2 + \sigma_3 + \dots + d_j)] \quad (4.65)$$

On voit bien sur l'équation 4.65 quel est le principe à suivre pour choisir l'expression de  $\tilde{w}$  et se libérer de la corrélation. Cependant cette expression est un peu trop simplifiée et elle n'est valable que si  $\mathbf{r}_1$  est à l'intérieur de la couche (sinon la suite du chemin optique n'existe pas et on ne peut pas calculer  $\tilde{w}$ ). On ne peut donc pas se débarrasser totalement de la dépendance en  $\mathbf{r}_1$  à cause du test  $H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n)$ . On choisit  $\tilde{w} = 0$  quand  $\mathbf{r}_1 \notin \mathcal{I}n$  et on peut écrire rigoureusement l'expression de  $\tilde{w}$  :

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n) \times \tilde{w}|_{\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n} \\ &= H(\mathbf{r}_1 \in \mathcal{I}n) \times \left\{ \begin{array}{l} H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{O}ut^+) e^{k_a \tilde{d}_1} \\ + H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{I}n) e^{k_a \tilde{\sigma}_2} \times \left\{ \begin{array}{l} H(\mathbf{r}_3 \in \mathcal{O}ut^+) e^{k_a d_2} \\ + H(\mathbf{r}_2 \in \mathcal{I}n) e^{k_a \sigma_3} \times \{\dots\} \end{array} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.66)$$

avec  $\tilde{\sigma}_2 = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_s\|$  (alors que  $\sigma_2 = \|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|$ ) et  $\tilde{d}_1$  la distance entre le point  $\mathbf{r}_s$  et la sortie de

la couche, selon la direction  $\tilde{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_S\|}$  (alors que  $d_1$  est la distance entre le point  $\mathbf{r}_1$  et la sortie de la couche, selon la direction  $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}$ ).

On pose  $\alpha$  la probabilité que  $\mathbf{r}_1$  soit dans  $\mathcal{I}n$  :

$$\alpha = \int_{\mathcal{I}n} p_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_S) d\mathbf{r}_1 \quad (4.67)$$

On obtient après développement<sup>10</sup> :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2} \left[ -e^{-k_s(h-z_S)} + k_s(h-z_S)E_1(k_s(h-z_S)) - e^{-k_s z_S} + k_s z_S E_1(k_s z_S) \right] \quad (4.68)$$

On en déduit  $\partial_{z_S} \alpha$  :

$$\partial_{z_S} \alpha = \frac{k_s}{2} \left[ E_1(k_s z_S) - E_1(k_s(h-z_S)) \right] \quad (4.69)$$

On peut démontrer la relation suivante [94] :

$$\left\langle \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}} \right\rangle = \langle \tilde{w} \rangle \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha} \quad (4.70)$$

On obtient enfin une variable de contrôle prête à l'emploi pour exprimer le nouveau poids  $\hat{w}_{z_S,2}$  de la sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  :

$$\hat{w}_{z_S,2} = \hat{w}_{z_S} - \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}} + \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha} \quad (4.71)$$

On a bien, de cette manière (et d'après Eq. 4.70) :

$$\begin{aligned} E(\hat{w}_{z_S,2}) &= E(\hat{w}_{z_S}) - E\left(\tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}}\right) + E\left(\tilde{w} \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha}\right) \\ &= \partial_{z_S} T_{up} - \left\langle \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}} \right\rangle + \langle \tilde{w} \rangle \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha} \\ &= \partial_{z_S} T_{up} \end{aligned} \quad (4.72)$$

L'expression finale du poids  $\hat{w}_{z_S,2}$  est la suivante :

$$\hat{w}_{z_S,2} = \partial_{z_S} \hat{w} + (\hat{w} - \tilde{w}) \frac{\partial_{z_S} p_{\mathbf{R}_1}}{p_{\mathbf{R}_1}} + \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha} \quad (4.73)$$

#### 4.4.5.3 Résultats obtenus

Nous avons refait les simulations présentées dans le tableau 4.2 en utilisant le nouveau poids  $\hat{w}_{z_S,2}$  avec la variable de contrôle. Le tableau 4.3 synthétise les résultats obtenus. Nous y rappelons les estimations de  $T_{up}$  et de son écart-type absolu  $\sigma_{T_{up}}$  ainsi que celles de la sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  obtenues selon la reformulation intégrale sur les positions de diffusion (b) et de son écart-type relatif  $\frac{\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}}{\partial_{z_S} T_{up}}$  (en %). Les deux dernières colonnes contiennent les nouveaux résultats : les estimations de la sensibilité  $\partial_{z_S} T_{up}$  (c) calculées avec la variable de contrôle ainsi que son écart-type relatif. Quelles que soient les valeurs des paramètres ( $z_S$ ,  $k_s$ ,  $k_a$ ), l'utilisation de la variable de contrôle permet ici de gagner environ 2 ordres de grandeur sur l'écart-type relatif de la sensibilité.

10.  $E_1$  est la fonction exponentielle intégrale d'ordre 1 :  $E_1(x) = \int_0^1 \frac{1}{\mu} \exp(-\frac{x}{\mu}) d\mu$



$z_S$	$k_s$	$k_a$	$T_{up}$	$\sigma_{T_{up}}$	$\partial_{z_S} T_{up}$ (b)	$\frac{\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}}{\partial_{z_S} T_{up}}$ (b)	$\partial_{z_S} T_{up}$ (c)	$\frac{\sigma_{\partial_{z_S} T_{up}}}{\partial_{z_S} T_{up}}$ (c)
0.6	0.01	0.01	0.490	$1.55 \cdot 10^{-4}$	0.0466	10.9 %	0.0419	0.215 %
0.7	0.01	0.01	0.495	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0484	10.5 %	0.0436	0.164 %
0.8	0.01	0.01	0.501	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.0509	10.1 %	0.0463	0.129 %
0.9	0.01	0.01	0.507	$1.57 \cdot 10^{-4}$	0.0557	9.28 %	0.0513	0.160 %
0.6	0.1	0.01	0.503	$1.55 \cdot 10^{-4}$	0.183	24.3 %	0.140	0.667 %
0.7	0.1	0.01	0.518	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.189	23.5 %	0.148	0.588 %
0.8	0.1	0.01	0.533	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.230	23.0 %	0.151	0.182 %
0.9	0.1	0.01	0.551	$1.56 \cdot 10^{-4}$	0.242	22.0 %	0.167	0.285 %
0.6	0.01	1	0.194	$7.90 \cdot 10^{-5}$	0.349	1.08 %	0.352	$3.65 \cdot 10^{-2}$ %
0.7	0.01	1	0.235	$9.11 \cdot 10^{-5}$	0.446	1.42 %	0.455	$3.56 \cdot 10^{-2}$ %
0.8	0.01	1	0.288	$1.06 \cdot 10^{-4}$	0.604	1.19 %	0.614	$3.57 \cdot 10^{-2}$ %
0.9	0.01	1	0.364	$1.25 \cdot 10^{-4}$	0.903	0.907 %	0.915	$3.88 \cdot 10^{-2}$ %
0.6	0.1	1	0.193	$7.83 \cdot 10^{-5}$	0.378	5.11 %	0.364	$4.87 \cdot 10^{-2}$ %
0.7	0.1	1	0.236	$9.04 \cdot 10^{-5}$	0.474	5.76 %	0.468	$5.26 \cdot 10^{-2}$ %
0.8	0.1	1	0.290	$1.05 \cdot 10^{-4}$	0.639	5.21 %	0.636	$6.75 \cdot 10^{-2}$ %
0.9	0.1	1	0.370	$1.24 \cdot 10^{-4}$	0.944	3.27 %	0.948	$7.30 \cdot 10^{-2}$ %
0.6	1	1	0.182	$7.33 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		0.436	$6.90 \cdot 10^{-1}$ %
0.7	1	1	0.232	$8.57 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		0.580	$4.31 \cdot 10^{-1}$ %
0.8	1	1	0.300	$1.00 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		0.798	$2.81 \cdot 10^{-1}$ %
0.9	1	1	0.399	$1.18 \cdot 10^{-5}$	ne converge pas		1.22	$2.96 \cdot 10^{-1}$ %

TABLE 4.3 – Résultats de simulations pour :  $N = 10^7$ ,  $h = 1$  et une fonction de phase isotrope  $\Phi = \frac{1}{4\pi}$  ;  
(b) Estimations de la sensibilité avec la reformulation intégrale (sur les positions de diffusion) ;  
(c) Estimations de la sensibilité avec la variable de contrôle (poids  $w_{z_S,2}$ ).

La variable de contrôle a été beaucoup plus difficile à mettre en place ici qu’au paragraphe 4.3.3 parce que son espérance n’est pas nulle. Dans ce cas l’équation 2.11 du chapitre 2 devient :

$$A = \int_{\mathcal{D}_X} \int_{\mathcal{D}_Y(x)} p_X(\mathbf{x}) p_Y(\mathbf{y}|\mathbf{x}) [\hat{w}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] d\mathbf{y} d\mathbf{x} - \langle \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle \quad (4.74)$$

Il est alors indispensable de pouvoir quantifier (avec fiabilité) l’espérance  $\langle \hat{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rangle$  pour compenser la variable de contrôle. Dans le cas présent, la variable de contrôle est  $\tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{R_1}}{p_{R_1}}$  (cf. Eq. 4.73). Nous n’avons pas pu obtenir une valeur complètement analytique de son espérance. Le terme de compensation  $\langle \tilde{w} \rangle \frac{\partial_{z_S} \alpha}{\alpha}$  est donc calculé progressivement par l’algorithme dans le poids de la sensibilité.

Nous expliquons ceci afin de rejoindre la conclusion du chapitre 2 où nous avons envisagé d’utiliser des algorithmes spécifiques pour estimer les sensibilités. Si nous n’étions pas parvenus, ici (au 4.4.5.2), à quantifier formellement l’espérance  $\langle \tilde{w} \frac{\partial_{z_S} p_{R_1}}{p_{R_1}} \rangle$  de la variable de contrôle alors nous aurions pu l’estimer par un premier algorithme de Monte-Carlo puis utiliser cette estimation statistique comme terme de compensation dans un second algorithme spécifique pour estimer la sensibilité avec plus de précision (grâce à la variable de contrôle). Nous considérons sérieusement cette piste pour les calculs de sensibilités dans les photobioréacteurs ou les lits fluidisés (au cas où les problèmes de convergence soient plus difficiles à régler que sur la configuration académique présentée ici).



# Chapitre 5

## Conclusion

En introduction de ce manuscrit, nous nous étions posés la question suivante : l’association des deux savoirs-faire théorique sur les méthodes de Monte-Carlo et informatique sur les techniques de synthèse d’image est-elle bien adaptée aux besoins actuels de la communauté scientifique sur le solaire à concentration ?

Après avoir identifié les problématiques essentielles du solaire à concentration dans le chapitre 1, nous avons fait le point dans le chapitre 2 sur les bases théoriques de la méthode de Monte-Carlo et sur ses évolutions techniques les plus récentes en terme d’optimisation des algorithmes et de calcul de sensibilités. Nous avons ensuite montré dans le chapitre 3, au travers de quatre applications que la mise en pratique de cette méthodologie via des outils informatiques accessibles et généralistes permet souvent de répondre rapidement et précisément aux questions techniques de calcul de performances et d’analyse de sensibilités des procédés à énergie solaire concentrée. Cependant nous avons recensé au chapitre 4 un certain nombre de cas pour lesquels il est indispensable, aujourd’hui, de se ramener à des configurations académiques si l’on souhaite apporter ne serait-ce que des éléments de réponse partiels concernant l’estimation de sensibilités pour la conception de systèmes à concentration solaire.

### 5.1 Synthèse

En associant rigueur méthodologique et efficacité informatique, nous n’avons aucune difficulté à répondre aux besoins que les outils solaires actuels couvrent déjà. De plus, quand les grands codes disponibles ne permettent pas d’aborder les problématiques scientifiques des nouvelles pistes de développement du solaire à concentration, nous avons montré qu’il est possible de développer, pour un investissement minimum, des codes spécifiques et de calculer des sensibilités utiles à la compréhension des phénomènes mis en jeu. Un environnement de programmation qui est déjà utilisé par des industriels a été développé à ce sujet en parallèle du travail méthodologique de cette thèse.

La proposition que nous faisons ici ne vise en aucun cas à remplacer les outils dédiés au solaire à concentration, mais, lorsque ces outils sont insuffisants, elle permet aux scientifiques d’y remédier en développant facilement des codes “maison” (ce qui est déjà le cas mais demande beaucoup de travail) en attendant que de nouveaux outils spécifiques soient disponibles.

Une des originalités de ce travail réside simplement dans le fait de capitaliser des outils méthodologiques et techniques généralistes, dont les champs d'applications sont très vastes pour les appliquer aux besoins du solaire à concentration. Mais l'originalité essentielle est la systématisation des calculs de sensibilités. Sur les exemples traités, nous n'avons pas pu illustrer en détail l'intérêt pratique de disposer facilement de ces sensibilités mais leur utilisation pratique en terme d'analyse sera illustrée dans les thèses en cours et à venir<sup>1</sup> et, au cas par cas, en fonction des besoins des industriels. L'intérêt des sensibilités en terme d'optimisation automatique reste aujourd'hui un objectif à atteindre, mais nous avons vu qu'il est souvent facile de les estimer.

## 5.2 Perspectives

Pour certaines sensibilités cependant, nous avons rencontré des difficultés majeures et il n'a pas été possible de les estimer pour des procédés réels. Nous avons recensé et classé les problèmes auxquels nous avons été confrontés mais cette liste n'est certainement pas exhaustive et reste à compléter.

En ce qui concerne les difficultés identifiées, nous avons essayé d'aller très loin dans l'analyse des configurations académiques et, pour la plupart, il s'agit maintenant de transférer les solutions partielles que nous avons proposées aux problèmes réels pour valider ou non les pistes de travail envisagées.

Il faut mener plus loin la réflexion de fond sur la classification parce que nous n'avons pas traité tous les phénomènes qu'il est possible de simuler par la méthode de Monte-Carlo et aussi dans le but de pouvoir diagnostiquer rapidement si un problème de mise en oeuvre est formel ou algorithmique. Pour les problèmes de convergence, il faudra encore identifier précisément la source de variance pour y remédier en utilisant une technique appropriée.

---

1. Germain Baud (RAPSODEE) travaille sur les récepteurs solaires à lit fluidisé, François Veynandt (RAPSODEE - EDF) sur les concentrateurs de Fresnel, Jérémie Dauchet (LGCB - LAPLACE) sur les photobioréacteurs, Olivier Farges (RAPSODEE - TOTAL) sur les optiques Beam-Down.

# Bibliographie

- [1] Patrice Perez. *Algorithmes de synthèse d'image et propriétés spectrales des gaz de combustion : Méthode de Monte-Carlo pour la simulation des transferts radiatifs dans les procédés à haute température*. PhD thesis, INP Toulouse, 2003.
- [2] Amaury de Lataillade. *Modélisation détaillée des transferts radiatifs et couplage avec la cinétique chimique dans les systèmes de combustion*. PhD thesis, INP Toulouse, France, 2001.
- [3] Vincent Eymet. *Simulation Monte-Carlo et analyse en Puissance Nettes Echangées des transferts radiatifs infrarouges avec diffusion : vers une paramétrisation dans un modèle de Circulation Générale atmosphérique*. PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse, 2003.
- [4] Maxime Roger. *Modèles de sensibilité dans le cadre de la méthode de Monte-Carlo : Illustrations en transfert radiatif*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2006. Disponible en ligne : <http://perso.mines-albi.fr/~delatorr/These/Biblio/These-MaximeRoger.pdf>.
- [5] Pierre Garcia. *Outils d'évaluation technico-économique et d'aide à la conception des centrales solaires thermodynamiques du futur*. PhD thesis, Université de Perpignan, 2007.
- [6] Muriel Tardieu Alaphilippe. *Recherche d'un nouveau procédé de conversion thermodynamique de l'énergie solaire, en vue de son application à la cogénération de petite puissance*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2007.
- [7] François Nepveu. *Production décentralisée d'électricité et de chaleur par système Parabole/Stirling : Application au système EURODISH*. PhD thesis, Université de Perpignan, 2008.
- [8] Arezki Bounaceur. *Interaction lit fluidisé de particules solides-rayonnement solaire concentré pour la mise au point d'un procédé de chauffage de gaz à plus de 1000 K*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2008.
- [9] Mathieu Vrinat. *Contribution au développement d'un absorbeur surfacique à air pressurisé haute température pour centrale solaire à concentration à tour*. PhD thesis, Université de Perpignan Via Domitia, 2010.
- [10] A. de Lataillade, S. Blanco, Y. Clergent, J.L. Dufresne, M. El Hafi, and R. Fournier. Monte Carlo method and sensitivity estimations. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 75 :529–538, 2002.
- [11] M. Roger, S. Blanco, M. El Hafi, and R. Fournier. Monte Carlo estimates of domain-deformation sensitivities. *Physical Review Letter*, 95(18), october 2005.
- [12] Quatrième Rapport d'Evaluation du GIEC - Changements Climatiques 2007 : Rapport de Synthèse.

- [13] D. Mills. Advances in solar thermal electricity technology. *Solar Energy*, 76(1-3) :19 – 31, 2004. Solar World Congress 2001.
- [14] Masdar (the Abu Dhabi Future Energy Company). <http://www.masdar.ae>. [Online ; accessed 5-december-2010].
- [15] European Commission-Energy. Concentrating solar power : from research to implementation., 2007.
- [16] A. Häberle et al. The solarmundo project : Advanced technology for solar thermal power generation. In *Proceedings of the ISES 2001 Solar World Congress*, Adelaide, Australia, 25-30 November 2001.
- [17] David R. Mills and Graham L. Morrison. Compact linear fresnel reflector solar thermal powerplants. *Solar Energy*, 68(3) :263 – 283, 2000.
- [18] Alain Louche. La centrale électrosolaire de vignola. In *L'énergie solaire en France*, pages 201–210, Pau, 25-29 octobre 1993.
- [19] Lovegrove K, Zawadski A, and Coventy J. Paraboloidal dish solar concentrators for multi-megawatt power generation. In *ISES Solar World Congress*, Beijing, 18 - 22 September 2007.
- [20] CADDET Australian National Team. Power production using a paraboloidal solar concentrator. *CADDET Renewable Energy Newsletter*, pages 22–24, March 2000.
- [21] T. Mancini et al. Dish-Stirling systems : An overview of development and status. *Journal of Solar Energy Engineering*, 125(2) :135–151, 2003.
- [22] B. Bonduelle and B. Rivoire. Centrale expérimentale themis, résultats et projections. Technical report, CNRS, AFME, 1987.
- [23] Gilles Flamant. Fours solaires. *Techniques de l'Ingénieur*, BE 8849, 2008.
- [24] M. Romero, V. Fernández, and M. Sánchez. Optimization and performance of an optically asymmetrical heliostat field. *J. Phys. IV France*, 09(PR3) :Pr3–71–Pr3–76, mar 1999.
- [25] J.M. Chavez et al. *Second Generation Central Receiver Technologies : A status report*. M. Becker and P. Klimas (Eds.), Verlag C.F. Müller Karlsruhe, 1993.
- [26] D.W. Aitken. New economic thinking and approaches to utility scale application of solar energy in the 90s. *Advances in Solar Energy*, 11, Chapter 7 :329–414, ASME, New York. 1997.
- [27] M. Romero et al. Distributed power from solar tower systems : A MIUS approach. *Solar Energy*, 67 (4-6) :249–264, 2000.
- [28] J. Hoag and K. Terasawa. Some advantages of systems with small module size. In *Proceedings of the IASTED Energy Symposia, San Francisco*, pages 45–48. ACTA Press, Anaheim, California, 20 May 1981.
- [29] M.J. Marcos, M. Romero, S. Mendoza, and L.E. Díez. Distributed Power from Modular Solar Tower Systems : The SOLAUT Approach. In *EuroSun 2002 : the 4th ISES Europe Solar Congress*. Bologna, Italy, June 23-26 2002.
- [30] M. Haeger. Phoebus technology program : Solar Air Receiver (TSA). *PSA Tech. Report :PSA-TR02/94*, 1994.

- [31] L. L. Vant-Hull, M. E. Izygon, and A. Imhof. Optimization of central receiver fields to interface with applications requiring high flux density receivers. *J. Phys. IV France*, 09(PR3) :Pr3–65–Pr3–70, mar 1999.
- [32] A. Segal and M. Epstein. Comparative performances of tower-top and tower-reflector central solar receivers. *Solar Energy*, 65(4) :207–226, 1999.
- [33] Rabl A. Tower reflector for solar plant. *Solar Energy*, 18 :269–271, 1976.
- [34] A. Segal and M. Epstein. The optics of the solar tower reflector. *Solar Energy*, 69(Suppl.6) :229–241, 2000.
- [35] Motoaki Utamura et al. Optimal Heliostat Layout for Concentrating Solar Tower Systems. In *International Conference on Power Engineering*, Hangzhou, China, October 23-27 2007.
- [36] Y. Tamaura et al. Development of tokyo tech beam-down solar concentration power system. In *Proceedings of SolarPaces 2009*, Berlin, 15-18 September 2009.
- [37] H. Hasuike et al. Demonstration of tokyo tech beam-down solar concentration power system in 100kw pilot plant. In *Proceedings of SolarPaces 2009*, Berlin, 15-18 September 2009.
- [38] Philipp Schramek and David R. Mills. Multi-tower solar array. *Solar Energy*, 75(3) :249 – 260, 2003.
- [39] eSolar, URL : <http://www.esolar.com>.
- [40] M. Yuasa et al. Tokyo tech multi-tower beam down system. In *Proceedings of SolarPaces 2009*, Berlin, 15-18 September 2009.
- [41] F. M. F. Siala and M. E. Elayeb. Mathematical formulation of a graphical method for a no-blocking heliostat field layout. *Renewable Energy*, 23(1) :77–92, 2001.
- [42] Sargent & Lundy LLC. Assessment of Parabolic Trough and Power Tower Solar Technology Cost and Performance Forecasts. SL-5641, 2003.
- [43] R. Pitz-Paal et al. European Concentrated Solar Thermal Road-Mapping (ECOSTAR). EU-cofunded study SES6-CT-2003-502578, DLR, 2005.
- [44] F. W. Lipps and L. L. Vant-Hull. A cellwise method for the optimization of large central receiver systems. *Solar Energy*, 20(6) :505–516, 1978.
- [45] PK Falcone. *A handbook for solar central receiver design*. SAND86-8009, 1986.
- [46] Francisco J. Collado. Quick evaluation of the annual heliostat field efficiency. *Solar Energy*, 82(4) :379–384, 2008.
- [47] Francisco J. Collado. Preliminary design of surrounding heliostat fields. *Renewable Energy*, 34(5) :1359–1363, 2009.
- [48] F.J. Collado and J.A. Turégano. Calculation of the annual thermal energy supplied by a defined heliostat field. *Solar Energy*, 42(2) :149 – 165, 1989.
- [49] F. Biggs and C. N. Vittitoe. Helios model for the optical behavior of reflecting solar concentrators. Technical report, Sandia National Laboratories, 1979.
- [50] Marcelino Sánchez and Manuel Romero. Methodology for generation of heliostat field layout in central receiver systems based on yearly normalized energy surfaces. *Solar Energy*, 80(7) :861–874, 2006.

- [51] B.L. Kistler. *A User s Manual for DELSOL3 : A Computer Code for Calculating the Optical Performance and Optimal system Design for Solar Thermal Central Receiver Plants*. SAND86-8018, Albuquerque, 1986.
- [52] Lipps FW. *Theory of cellwise optimization for solar central receivers*. SAND85-8177, Albuquerque, 1985.
- [53] Robert Walraven. Calculating the position of the sun. *Solar Energy*, 20(5) :393 – 397, 1978.
- [54] J.A. Duffie and W.A. Beckmann. *Solar Engineering of Thermal Processes*. John Wiley & Sons Inc, 1991.
- [55] François Henault. *Concentration du rayonnement solaire par simple et double réflexion : contribution aux méthodes de réglage et de contrôle des surfaces réfléchissantes à facettes*. PhD thesis, Université Paris XI Orsay, 1987.
- [56] P. Garcia, A. Ferrière, and J-J Bézian. Codes for solar flux calculation dedicated to central receiver system applications : a comparative review. *Solar Energy*, 82(3) :189–197, 2008.
- [57] M.J. Blanco et al. Preliminary validation of tonatiuh. In *Proceedings of SolarPaces 2009*, Berlin, 15-18 September 2009.
- [58] F. J. Collado, A. Gómez, and J. A. Turégano. An analytic function for the flux density due to sunlight reflected from a heliostat. *Solar Energy*, 37(3) :215–234, 1986.
- [59] Nicholas Metropolis and S. Ulam. The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247) :335–341, Sept. 1949.
- [60] J.M. Hammersley and D.C. Handscomb. *Monte Carlo Methods*. Chapman and Hall, London, 1964.
- [61] J.R. Howell. The Monte Carlo method in radiative heat transfer. *Journal of Heat Transfer-Transactions of the Asme*, 120(3) :547–560, Aug. 1998.
- [62] D. Glouckov, K. Koshelev, and A. Schulz. Monte Carlo simulation of photon transport for optically thick, differentially moving plasmas : II. Escape factors for differentially moving spheres. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 81 :191–197, 2003.
- [63] M.H. Kalos and P.A. Whitlock. *Monte Carlo Methods*. John Wiley & Sons, 1986.
- [64] I. Lux and L. Koblinger. *Monte Carlo particle transport methods : neutron and photon calculations*. CRC Press, Boca Raton, 1991.
- [65] M. Cherkaoui, J.-L. Dufresne, R. Fournier, J.-Y. Grandpeix, and A. Lahellec. Monte carlo simulation of radiation in gases with a narrow-band model and a net-exchange formulation. *Journal of Heat Transfer*, 118(2) :401–407, 1996.
- [66] R Assaraf and M Caffarel. Zero-variance principle for Monte Carlo algorithms. *Physical Review Letters*, 83(23) :4682–4685, Dec. 1999.
- [67] J.E. Hoogenboom. Zero-variance Monte Carlo schemes revisited. *Nuclear Science and Engineering*, 160(1) :1–22, Sept. 2008.
- [68] S. Blanco and R. Fournier. An invariance property of diffusive random walks. *EPL (Europhysics Letters)*, 61(2) :168, 2003.



- [69] Stéphane Blanco and Richard Fournier. Short-path statistics and the diffusion approximation. *Phys. Rev. Lett.*, 97(23) :230604, Dec 2006.
- [70] M.J. Berger. Reflection and transmission of gamma radiation by barriers : Monte-carlo calculation by a collision-density method. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 55 :343–350, 1955.
- [71] M.J. Berger and J. Doggett. Reflection and transmission of gamma radiation by barriers : semianalytic monte-carlo calculation. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 56 :89–98, 1956.
- [72] Stavros Christoforou. *A zero-variance based scheme for Monte-Carlo criticality simulations*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2010.
- [73] Akira Ishimaru. *Wave Propagation and Scattering in Random Media*. IEE Press, 1997.
- [74] Groupe de recherche Star-West. ED-Star (Environnement de développement pour les Statistiques Radiatives). <http://wiki-energetique.laplace.univ-tlse.fr/wiki/index.php/Edstar>.
- [75] Star-West (Statistiques Radiatives du Sud-Ouest). <http://wiki-energetique.laplace.univ-tlse.fr/wiki/index.php/Starwest>.
- [76] GSL - GNU Scientific Library. <http://www.gnu.org/software/gsl>.
- [77] The Message Passing Interface (MPI) standard. <http://www.mcs.anl.gov/research/projects/mpi>.
- [78] M. Pharr and G. Humphreys. *Physically Based Rendering : from theory to implementation*. Elsevier, 2004.
- [79] J. Dersch, M. Morin, G. Eck, and A. Häberle. Comparison of linear fresnel and parabolic through collector systems - system analysis to determines break even costs of linear fresnel collectors. In *SolarPACES 2009*, Berlin, 2009.
- [80] Max Mertins. *Technische und wirtschaftliche Analyse von horizontalen Fresnel-Kollektoren*. PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2008. <http://digbib.ubka.uni-karlsruhe.de/volltexte/documents/1067166>.
- [81] R. Bader, M. Barbato, A. Pedretti, and A. Steinfeld. An Air-Based Cavity-Receiver for Solar Trough Concentrators. *ASME Journal of Solar Energy Engineering*, 132(3), 2010.
- [82] G. Flamant and T. Menigault. Combined wall-to-fluidized bed heat transfer. Bubbles and emulsion contributions at high temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30(9) :1803–1812, 1986.
- [83] I.M. Haddad and M.M. Elsayed. Transient performance fluidised bed solar receiver at various parametric conditions. *Solar and Wind Technology Journal*, 5(6) :653–659, 1988.
- [84] R. Muller., P.V. Zedtwitz, A. Wokaun, and A. Steinfeld. Kinetic investigation on steam gasification of charcoal under direct high-flux irradiation. *Chem. Engin. Sci.*, 58 :5111–5119, 2003.
- [85] D. Trommer and al. Hydrogen production by steam-gasification of petroleum coke using concentrated solar power : Thermodynamic and Kinetic analyses. *International Journal of Hydrogen Energy*, 30 :606–618, 2005.
- [86] G. Mie. Beitrage zur optik truber medien spiezell kolloidallen metallosungen. *Ann. d. physik*, 25 :377–445, 1908.

- [87] Cornet Jean-François and Dussap Claude-Gilles. A simple and reliable formula for assessment of maximum volumetric productivities in photobioreactors. *Biotechnology progress*, 25(2) :424–435, 2009.
- [88] J.F. Cornet. Calculation of optimal design and ideal productivities of volumetrically lightened photobioreactors using the constructal approach. *Chemical Engineering Science*, 65(2) :985–998, 2010.
- [89] Remi Carminatti. communication personnelle.
- [90] Benoît Gay. *Caractérisation de milieux diffusants chargés en particules par imagerie polarisée. Application aux agrégats fractals*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2010.
- [91] Jérémie De la Torre. Problème Héliostat-Tour 2D, sensibilité à la hauteur de la tour avec tirage aléatoire des points d’impact sur la cible. Communication interne, 2010.
- [92] J. De la Torre, J.Y. Rolland, M. Roger, M. El Hafi, R. Fournier, S. Blanco, and J.J. Bézian. Monte-Carlo estimations of domain-deformation sensitivities for optimal geometric design. In *Eurotherm Seminar 83, Computational Thermal Radiation in Participating Media III*, pages 143–152, Lisbon, Portugal, April 15-17 2009.
- [93] G.A. Mikhailov. *Optimization of Weighted Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, 1995.
- [94] Maxime Roger. Notes d’Odeillo sur les problèmes de convergence du calcul de sensibilité. Communication interne, 2009.