

THESE

PRESENTEE A

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Joël BERTRAND

*Ingénieur I.G.C.
Maître ès Sciences Economiques
Docteur Ingénieur*

AGITATION DE FLUIDES VISQUEUX

CAS DE MOBILES A PALES, D'ANCRES ET DE BARRIERES

I
TEXTE

Soutenu le 15 Décembre 1983 devant la Commission d'Examen

MM	J.P. COUDERC	Président
	H. ANGELINO	
	G. ANTONINI	
	J.C. CHARPENTIER	Examineurs
	J.L. CHEVALIER	
	H. GIBERT	
	J. MAHENC	

Joël BERTRAND .- Agitation de fluides visqueux. Cas de mobiles à pales, d'ancres et de barrières.

Thèse d'Etat : Génie Chimique ; Toulouse, INP, 1983

RESUME

L'agitation mécanique de fluides visqueux est étudiée dans le cas de mobiles à pales, d'ancres et de barrières.

Deux techniques sont utilisées : une technique numérique qui repose sur l'intégration des équations de Navier Stokes en régime laminaire et pour des fluides newtoniens et non-newtoniens ; une technique expérimentale, l'anémométrie à film chaud. La confrontation entre ces deux techniques est satisfaisante.

Les résultats concernant les fonctions courant et rotationnel, les composantes de la vitesse, les contraintes, la viscosité apparente, la dissipation visqueuse et la puissance consommée permettent de conclure que l'indice de comportement du fluide, le nombre de Reynolds auront peu d'influence sur les schémas d'écoulement.

Une application pratique, l'agitation du fromage fondu, est développée en fin de mémoire.

MOTS CLES

- ✓ - Agitation mécanique
 - Fluides visqueux, newtoniens ou pseudoplastiques
 - Agitateurs à pales
 - Ancres
 - Barrières
 - Analyse numérique, écoulement laminaire
 - Anémométrie à film chaud, écoulement laminaire
-

JURY et date de soutenance : 15 décembre 1983

Président :	J.P. COUDERC	I.G.C. Toulouse
Membres :	H. ANGELINO	I.G.C. Toulouse
	G. ANTONINI	U.T. Compiègne
	J.C. CHARPENTIER	E.N.S.I.C. Nancy
	J.L. CHEVALIER	U. Aix-Marseille
	H. GIBERT	I.N.P. Toulouse
	J. MAHENC	U.P.S. Toulouse

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

PRESIDENT D'HONNEUR

M. le Professeur MONTEL

PRESIDENT

M. le Professeur NOUGARO

VICE-PRESIDENT

M. BUGAREL	Professeur	(Attributions : Moyens et Personnels)
M. DABOSI	Professeur	(" : Recherche)
M. MARTY	Professeur	(" : Relations Internationales)

Directeur de l'E.N.S.A.T.	M. le Professeur CANDAU
Directeur de l'E.N.S.C.T.	M. le Professeur LATTES
Directeur de l'E.N.S.E.E.I.H.T.	M. l'Ingénieur Principal de l'Armement CRESTIN
Directeur de l'I.G.C.	M. le Professeur ANGELINO

SECRETAIRE GENERAL

M. CROS

PROFESSEURS HONORAIRES

Melle BERDUCOU
M. BIREBENT
M. DIEHL
M. HAMANT

PROFESSEURS

M. ALBERTINI	Cytologie et pathologie végétales
M. ALQUIER	Mécanique
M. AMALRIC	Micro-électronique, micro-ondes
M. ANDRE	Sciences Agronomiques
M. ANGELINO	Génie Chimique
M. BAJON	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. BAUDRAND	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. BELLET	Mécanique-Hydraulique
M. BEN AÏM	Génie Chimique
M. BONEL	Chimie Appliquée
M. BOUCHER	Electrotechnique - Electronique
M. BOURGEAT	Pédologie
M. BRUEL	Informatique
M. BUGAREL	Génie Chimique
M. BUIS	Biologie Quantitative
M. CABANEL	Informatique Fondamentale et Appliquée
M. CALMON	Chimie agricole
M. CANDAU	Zootchnie
M. CASTANIE	Automatique, Informatique Industrielle
M. CONSTANT	Chimie minérale
M. COSTES	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. COUDERC	Génie Chimique
M. DABOSI	Métallurgie et réfractaires
M. DAT	Mécanique - Hydraulique
M. DE FORNEL	Electrotechnique, Electronique

... / ...

M. DELMAS	Chimie Organique
M. DOMENECH	Génie Chimique
M. ECOCHARD	Amélioration des Plantes
M. ENJALBERT	Génie Chimique
M. FABRE	Mécanique - Hydraulique
M. FALLOT	Biotechnologie végétale appliquée
M. FARRENY	Informatique fondamentale appliquée
M. FOCH	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. GARDY	Génie Chimique
M. GASET	Chimie industrielle
M. GIBERT	Génie Chimique
M. GILOT	Génie Chimique
M. GOURDENNE	Chimie - Physique
M. GRUAT	Mécanique - Hydraulique
M. HA MINH	Mécanique
M. HOFFMANN	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. KALCK	Chimie minérale
M. LABAT	Ichtyologie appliquée
M. LAGUERIE	Génie Chimique
M. LEFEUVRE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. LENZI	Chimie industrielle
M. MARTY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MASBERNAT	Mécanique - Hydraulique
M. MATHEAU	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. MATHIEU	Chimie analytique
M. MOLINIER	Génie Chimique
M. MONCOULON	Sciences Agronomiques
M. MONTEL	Chimie inorganique
M. MORA	Génie Chimique
M. MORARD	Physiologie végétale appliquée
M. MORELIERE	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. NOAILLES	Mathématiques
M. NOUGARO	Mécanique - Hydraulique
M. PAREILLEUX	Sciences Agronomiques
M. PECH	Sciences Agronomiques
M. PLANCHON	Photo-synthèse et amélioration des plantes
M. RIBA	Génie Chimique
M. ROBERT	Génie Chimique
M. RODRIGUEZ	Informatique
M. SALLE	Informatique fondamentale appliquée
M. TERRON	Zoologie
M. THIRRIOT	Mécanique - Hydraulique
M. TRANNOY	Electronique, Electrotechnique, Automatique
M. TRUCHASSON	Mécanique - Hydraulique
M. VOIGT	Chimie minérale

(mis à jour le 3 octobre 1983)

à Joseph, Jeanne

Denise et Francis.

Je remercie Monsieur le Professeur H. GARDY, Directeur de l'Institut du Génie Chimique, de son accueil cordial et du climat agréable qu'il a contribué à établir parmi les chercheurs de son établissement.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur H. ANGELINO qui lui a succédé de m'avoir, le premier, accordé sa confiance ; il me fait l'honneur aujourd'hui de siéger au jury de cette thèse.

Monsieur le Professeur J.P. COUDERC, Directeur du Laboratoire de Génie Chimique, a dirigé cette étude. Ses encouragements quotidiens, son souci de rigueur m'ont été du plus grand recours, en particulier lors de la rédaction de ce mémoire qui lui doit beaucoup. Je voudrais ici lui témoigner ma reconnaissance.

Messieurs les Professeurs G. ANTONINI de l'Université Technologique de Compiègne et H. GIBERT de l'Institut National Polytechnique de Toulouse ont accepté d'examiner et juger ce travail : je les remercie de l'extrême attention qu'ils lui ont porté.

Je suis également reconnaissant à Messieurs les Professeurs J.L. CHEVALIER de l'Université d'Aix-Marseille, J.C. CHARPENTIER, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Industries Chimiques de Nancy, et J. MAHENC, Directeur d'Unité à l'Université Paul Sabatier de Toulouse d'examiner cette étude et de participer au jury de thèse.

Ce travail a été réalisé au sein d'une équipe et a bénéficié de la compétence et de l'expérience de ses membres. Je leur dis merci à tous, et plus particulièrement à mes amis D. BARRETEAU, H. DELMAS, B. KOEHRET et L. POLLINI, ce dernier pour son inappréciable soutien technique.

Enfin, la réalisation de ce mémoire est due à F. BELLON et J. RIGAUD que je remercie sincèrement.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION GENERALE	
PREMIERE PARTIE : SITUATION DU PROBLEME. TECHNIQUES ET APPAREILLAGES	
<u>CHAPITRE 1</u> - GENERALITES	1-1
1 - INTRODUCTION	1-2
2 - ELEMENTS DE RHEOLOGIE	1-2
2.1 GENERALITES	1-2
2.2 LOIS DE COMPORTEMENT	1-3
3 - GENERALITES SUR L'AGITATION DES MILIEUX DE FORTE CONSISTANCE	1-9
3.1 INTRODUCTION	1-9
3.2 HELICES	1-10
3.3 TURBINES	1-10
3.4 AGITATEURS-PLANS	1-10
3.5 AUTRES AGITATEURS	1-11
3.6 CONCLUSION	1-11
4 - CARACTERISTIQUES DES ECOULEMENTS	1-11
4.1 GENERALITES	1-11
4.2 ECOULEMENTS GENERES PAR UNE ANCRE	1-12
5 - PUISSANCE D'AGITATION	1-14
5.1 PRESENTATION	1-14
5.2 RESULTATS ANTERIEURS DANS LE CAS DE FLUIDES NEWTONIENS	1-14
5.3 THEORIE DE METZNER ET OTTO (1957)	1-19
6 - CONCLUSION	1-22
<u>CHAPITRE 2</u> - MODELISATION ET TRAITEMENT NUMERIQUE	2-1
1 - INTRODUCTION	2-2
2 - EQUATIONS A RESOUDRE	2-2
2.1 HYPOTHESES	2-2
2.2 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS	2-3
2.3 MODELES RHEOLOGIQUES	2-5
3 - MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE	2-7
3.1 TERMES ADIMENSIONNELS	2-7

3.2 EQUATIONS ADIMENSIONNELLES	2-8
3.3 ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DE FRONTIERE	2-9
4 - PRESENTATION DES METHODES NUMERIQUES	2-13
4.1 GENERALITES	2-13
4.2 METHODE DE GAUSS-SEIDEL	2-13
4.3 METHODE A.D.I.	2-15
5 - ALGORITHMES DE CALCUL	2-17
5.1 METHODE DE GAUSS-SEIDEL	2-17
5.2 METHODE A.D.I.	2-19
5.3 CALCULS SUPPLEMENTAIRES	2-21
6 - CONCLUSION	2-25
<u>CHAPITRE 3</u> - METHODES ET DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX	3-1
1 - INTRODUCTION	3-2
2 - DISPOSITIFS RHEOMETRIQUES. RESULTATS	3-2
2.1 GENERALITES	3-2
2.2 DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE	3-3
2.3 PROCEDURE DE MESURE	3-3
2.4 RESULTATS	3-5
3 - ETUDE ANEMOMETRIQUE	3-8
3.1 TRAVAUX ANTERIEURS	3-8
3.2 PRINCIPE DE L'ANEMOMETRIE THERMIQUE	3-8
3.3 ETALONNAGE DES SONDAS ANEMOMETRIQUES	3-10
3.4 MESURE DE LA VITESSE EN CUVE AGITEE	3-12
4 - DISPOSITIF D'AGITATION MECANIQUE	3-15
5 - CONCLUSION	3-16
DEUXIEME PARTIE : PRESENTATION DES RESULTATS	
<u>CHAPITRE 4</u> - AGITATEUR BIPALE	4-1
1 - INTRODUCTION	4-2
2 - FONCTION COURANT	4-2
2.1 GENERALITES	4-2
2.2 INFLUENCE DE D/T	4-2
2.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	4-7
2.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	4-7
2.5 MISE EN REGIME	4-8

3 - FONCTION ROTATIONNEL	4-9
3.1 GENERALITES	4-9
3.2 INFLUENCE DE D/T	4-10
3.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	4-10
3.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	4-10
3.5 REGIME TRANSITOIRE	4-11
4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE	4-11
4.1 GENERALITES	4-11
4.2 INFLUENCE DE D/T	4-12
4.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	4-12
4.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	4-19
4.5 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES	4-19
5 - CONTRAINTES	4-21
5.1 GENERALITES	4-21
5.2 INFLUENCE DE D/T	4-23
5.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	4-24
5.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	4-24
6 - VISCOSITE APPARENTE	4-26
6.1 GENERALITES	4-26
6.2 RESULTATS	4-26
7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE	4-28
7.1 GENERALITES	4-28
7.2 RESULTATS	4-28
8 - PUISSANCE D'AGITATION	4-30
9 - CONCLUSION	4-34

<u>CHAPITRE 5</u> - AGITATEUR A ANCRE	5-1
1 - INTRODUCTION	5-2
2 - FONCTION COURANT	5-2
2.1 GENERALITES	5-2
2.2 INFLUENCE DE D/T	5-4
2.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	5-5
2.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE ...	5-6
3 - FONCTION ROTATIONNEL	5-6
3.1 INFLUENCE DE D/T	5-6
3.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	5-8

3.3 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	5-8
4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE	5-9
4.1 GENERALITES	5-9
4.2 INFLUENCE DE D/T	5-10
4.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	5-10
4.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	5-10
4.5 COMPOSANTES DE LA VITESSE A $r^* = r^*_{IY}$ ET $r^* = D/T$	5-11
4.6 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES	5-11
5 - CONTRAINTES	5-20
5.1 GENERALITES	5-20
5.2 INFLUENCE DE D/T	5-22
5.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	5-22
5.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE	5-22
6 - VISCOSITE APPARENTE	5-24
6.1 GENERALITES	5-24
6.2 RESULTATS	5-24
7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE	5-25
7.1 GENERALITES	5-25
7.2 RESULTATS	5-25
8 - PUISSANCE D'AGITATION	5-26
8.1 RESULTATS	5-26
8.2 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES	5-28
9 - CONCLUSION	5-28
<u>CHAPITRE 6</u> - AGITATEUR BARRIERE	6-1
1 - INTRODUCTION	6-2
2 - FONCTION COURANT	6-3
2.1 GENERALITES	6-3
2.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	6-5
3 - FONCTION ROTATIONNEL	6-5
3.1 RESULTATS BRUTS	6-5
3.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS	6-6
4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE	6-6
4.1 RESULTATS DE L'ETUDE NUMERIQUE	6-6
4.2 COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX	6-8

5 - CONTRAINTES	6-10
6 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE	6-11
7 - PUISSANCE D'AGITATION	6-12
8 - CONCLUSION	6-14

TROISIEME PARTIE : ANALYSE ET EXPLOITATION DES RESULTATS

<u>CHAPITRE 7</u> - APPLICATION A L'AGITATION DU FROMAGE FONDU	7-1
1 - INTRODUCTION	7-2
2 - SITUATION DU PROBLEME	7-2
2.1 DESCRIPTION DE LA FABRICATION	7-2
2.2 LE CREMAGE ET SES PROBLEMES	7-4
2.3 LE PROGRAMME D'ETUDES	7-5
3 - ETUDE THEORIQUE DE L'AGITATION DU FROMAGE FONDU	7-7
3.1 GENERALITES	7-7
3.2 AGITATEUR-BARRIERE A DEUX PALES	7-7
3.3 AGITATEUR-BARRIERE A TROIS PALES	7-10
4 - ESSAIS PILOTES	7-11
4.1 APPAREILLAGE ET MODE OPERATOIRE	7-11
4.2 ESSAIS REALISES	7-12
5 - CONCLUSION	7-15

<u>CHAPITRE 8</u> - DISCUSSION DES RESULTATS	8-1
1 - INTRODUCTION	8-2
2 - PUISSANCE D'AGITATION	8-2
2.1 FLUIDES NEWTONIENS	8-3
2.2 FLUIDES NON-NEWTONIENS	8-7
3 - ANALYSE DES RESULTATS LOCAUX	8-9
3.1 COMPARAISON AVEC LES TRAVAUX ANTERIEURS	8-9
3.2 TENDANCES GENERALES	8-10
4 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES NUMERIQUES	8-12
4.1 METHODE DE GAUSS-SEIDEL	8-12
4.2 METHODE A.D.I.	8-14
4.3 NOMBRE DE REYNOLDS MAXIMUM	8-16
4.4 INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE MINIMUM	8-17
4.5 REMARQUES SUR L'INFLUENCE DU TEMPS DE CALCUL	8-18
5 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES EXPERIMENTALES	8-19

6 - COMMENTAIRES A POSTERIORI SUR LA MISE EN FORME DU PROBLEME	8-21
7 - CONCLUSION	8-23

CONCLUSION GENERALE

REFERENCES

NOMENCLATURE

ANNEXES

ANNEXE 1 : TRAITEMENT ANALYTIQUE DE L'ECOULEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX	A-2
ANNEXE 2 : SIGNIFICATION PHYSIQUE DE LA FONCTION COURANT	A-8
ANNEXE 3 : CALCUL DE LA FONCTION COURANT EN PAROI	A-9
ANNEXE 4 : ECRITURE DISCRETE DES EQUATIONS	A-12
ANNEXE 5 : ANEMOMETRIE THERMIQUE. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE .	A-18

I N T R O D U C T I O N
G E N E R A L E

L'agitation mécanique en cuve est un procédé si souvent exploité en génie chimique qu'on peut avoir le sentiment de faire acte inutile en rappelant son importance.

Citons, cependant, à nouveau, quelques utilisations essentielles : la plus évidente est certainement la réalisation de mélanges homogènes de liquides miscibles avec, ou non, intervention d'une réaction chimique ; rappelons ensuite toutes les utilisations impliquant la mise en contact de phases différentes, opérations de dissolution ou cristallisation, extraction liquide-liquide, aération de liquides.... etc ; puis encore, toutes les applications de type thermique, chauffage, refroidissement, évaporation, etc...

Malgré son importance pratique, le domaine de l'agitation mécanique est resté jusqu'à aujourd'hui assez fortement empirique. En particulier, il faut souligner un paradoxe : alors que tous les spécialistes s'accordent à reconnaître que les performances d'un système agité dépendent étroitement des caractéristiques hydrodynamiques détaillées des écoulements générés par le mobile dans la cuve, très peu d'informations sont disponibles dans ce domaine et, globalement, assez peu d'efforts sont fournis par les milieux de la recherche pour modifier cet état de fait.

Conscients de ce problème, les membres de notre laboratoire ont voulu contribuer à développer les connaissances à ce sujet. Ils s'y emploient de deux manières :

- par voie théorique, dans le cas d'écoulements de caractéristiques suffisamment simples ;
- par voie expérimentale, lorsque la première voie devient défailante.

Notre travail constitue une contribution au développement de ces deux approches, dans le cas de milieux fortement visqueux, qu'ils soient newtoniens ou non.

Reconnaissons tout de suite que nous avons davantage fait porter notre effort sur l'aspect théorique : nous avons recherché des géométries de dispositifs d'agitation et des conditions d'agitation, telles que la résolution numérique des équations de changement soit possible. Dans des cuves cylindriques à fond plat, non chicanées, nous avons ainsi examiné le cas des mobiles suivants :

- agitateur à deux pales, occupant toute la hauteur du liquide ;
- agitateur à ancre ;
- agitateur barrière.

Nous avons sélectionné des vitesses de rotation suffisamment lentes pour que le régime d'écoulement demeure laminaire.

Notre entreprise, cependant, n'aurait pas été satisfaisante si nous n'avions pas comparé les résultats ainsi obtenus, à des valeurs établies par voie expérimentale. Dans ce domaine, nous n'avons pas voulu nous limiter à la comparaison, pourtant déjà significative, de données globales, comme la puissance d'agitation. Nous avons donc adapté au cas des milieux consistants une technique d'anémométrie thermique connue par ailleurs, et qui nous a permis de réaliser des mesures locales de vitesse. Si cette technique n'a été exploitée ici que comme un outil de vérification, elle n'en est pas moins disponible, dorénavant, pour mener des études systématiques dans le cas de systèmes de géométries plus complexes, pour lesquels le traitement par voie numérique n'est pas encore connu.

Notre mémoire comporte huit chapitres. Les trois premiers précisent le cadre de notre travail et décrivent les moyens mis en jeu. Les trois chapitres suivants présentent les résultats bruts, un chapitre étant consacré à chacun des mobiles étudiés. Enfin dans les deux derniers chapitres, nous décrivons une application industrielle des techniques développées au cours de ce travail et analysons l'ensemble des résultats afin de dégager de grandes tendances et d'ouvrir, peut-être, des voies pour des recherches futures.

PREMIERE PARTIE :

SITUATION DU PROBLEME. TECHNIQUES ET APPAREILLAGES

CHAPITRE 1 : GENERALITES

CHAPITRE 2 : MODELISATION ET TRAITEMENT NUMERIQUE

CHAPITRE 3 : METHODES ET DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX

- INTRODUCTION DE LA PREMIERE PARTIE -

Les études numérique et expérimentale des écoulements générés par des mobiles en rotation au sein de fluides visqueux relèvent de plusieurs disciplines scientifiques ou techniques : la rhéologie, l'écoulement de fluides, l'analyse numérique, la métrologie. Comme beaucoup de travaux modernes de génie chimique, il s'agit d'une contribution de caractère pluridisciplinaire.

Dans ce contexte, il ne saurait être question de présenter des analyses bibliographiques exhaustives de toutes les spécialités impliquées et nous allons nous limiter à une description aussi brève que possible des éléments indispensables pour la compréhension du travail que nous avons réalisé.

Nous allons commencer par un rappel des notions de rhéologie utiles pour caractériser le comportement des liquides visqueux, newtoniens ou non, qui vont être traités dans ce travail. Nous présenterons ensuite un résumé des connaissances antérieures dans le domaine de l'agitation mécanique des fluides consistants. Ces mises au point générales, nécessaires pour situer le cadre de notre contribution, vont faire l'objet du chapitre 1.

Une fraction importante des résultats que nous allons présenter ici a été obtenue par voie numérique. La mise en équation du problème et les méthodes de traitement numérique sont présentées dans le chapitre 2.

Enfin, dans le chapitre 3, nous décrivons les dispositifs expérimentaux que nous avons utilisés et montrons l'adaptation des techniques expérimentales au cas de milieux de forte consistance.

C H A P I T R E 1 :

GENERALITES

1 - INTRODUCTION

2 - ELEMENTS DE RHEOLOGIE

3 - GENERALITES SUR L'AGITATION DES MILIEUX DE FORTE CONSISTANCE

4 - CARACTERISTIQUES DES ECOULEMENTS

5 - PUISSANCE D'AGITATION

6 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce chapitre présente, en premier lieu, les éléments de rhéologie nécessaires à la suite de notre mémoire. Il rassemble ensuite diverses informations relatives à l'agitation des milieux de forte consistance ; en particulier, et parce que certaines données sont disponibles, il décrit les écoulements générés par une ancre. Il insiste, enfin, sur la question de la puissance d'agitation et donne quelques résultats relatifs aux mobiles qui sont utilisés, spécifiquement, pour les milieux visqueux.

2 - ELEMENTS DE RHEOLOGIE -

2.1 GENERALITES

La rhéologie est la science qui étudie la liaison entre les forces appliquées à un milieu matériel et le mouvement ou les déformations qui en résultent. La première observation rhéologique remonte sûrement à HOOKE (1676) qui a établi que la déformation d'un milieu élastique est proportionnelle à la force appliquée. La rhéologie moderne fut vraisemblablement créée par BINGHAM (1928). Depuis, les écoulements de fluides ont inspiré un grand nombre d'études expérimentales, numériques et analytiques. Ce développement a été si important qu'en 1976, une revue spécialisée, "Journal of non-newtonian fluid mechanics" qui traite des écoulements de fluides non-newtoniens exclusivement, a été créée. Pour des informations plus détaillées sur l'historique et les domaines de la rhéologie, nous renvoyons aux travaux de BELLET (1973a, 1973b), ainsi qu'à d'importantes synthèses bibliographiques effectuées par ASTARITA et MASHELKAR (1977), BIRD (1977) et LY et BELLET (1976).

Il existe deux grandes variétés de comportement rhéologique :

- le comportement élastique qui est caractérisé par une relation entre les forces appliquées et l'amplitude de la déformation. Le mouvement ne se produit pas sous l'action d'une force, mais en raison d'un changement de force ;
- le comportement fluide ou visqueux qui est caractérisé par une relation entre la force appliquée et la vitesse de déformation ou mouvement.

Notons ici que le milieu viscoélastique combine les deux types de fonctionnalité : ce milieu ne peut pas être identifié par des schémas idéalisés tels que ceux des solides élastiques ou ceux des fluides visqueux. Dans ce travail, nous ne traitons que des milieux visqueux.

Dans la suite, nous noterons τ le tenseur des contraintes et γ le tenseur des vitesses de déformation en un point quelconque d'un milieu fluide. τ_{ij} et γ_{ij} représenteront les composantes respectives de chacun de ces deux tenseurs.

2.2 LOIS DE COMPORTEMENT

2.2.1 Loi de Newton

Le comportement newtonien est le plus simple que l'on connaisse. Il est caractérisé par la loi de proportionnalité suivante :

$$\tau = -\mu \gamma \quad , \quad (1.1)$$

entre le tenseur des contraintes et celui des vitesses de déformation. La constante de proportionnalité μ est la viscosité, propriété physique du milieu fluide qui ne dépend que de la température et de la pression. Le signe négatif dans l'équation (1.1) traduit le fait que les flux de quantité de mouvement sont orientés dans le sens des gradients de vitesse négatifs.

Tous les gaz et une proportion importante des liquides usuels présentent un comportement newtonien.

Tous les fluides qui ne suivent pas ce comportement simple sont appelés non-newtoniens.

2.2.2 Fluides non-newtoniens indépendants du temps

Le comportement de fluides non-newtoniens indépendants du temps ne peut plus être représenté par l'équation simple (1.1) ; la liaison entre τ et γ est plus complexe et peut prendre un grand nombre de formes. Dans la suite de ce travail, toutefois, nous conserverons la représentation linéaire :

$$\tau = -\eta \gamma \quad (1.2)$$

où le scalaire η est la viscosité apparente du fluide ; η dépend toujours de la pression et de la température mais en outre de la valeur de γ (ou de τ) au point considéré.

Les fluides non-newtoniens dont le comportement rhéologique est indépendant du temps sont divisés en trois catégories :

- les fluides à comportement plastique,
- les fluides pseudoplastiques,
- les fluides dilatants.

Les lois de comportement commentées ici sont rassemblées dans le tableau 1.1.

2.2.2.1 Comportement plastique

Les fluides à comportement plastique présentent une valeur minimale τ_0 de la contrainte en-dessous de laquelle l'écoulement ne se produit pas. Au-delà de τ_0 , l'écoulement se produit : la structure interne particulière qui opposait une résistance à l'écoulement lorsque τ était inférieur à τ_0 est alors totalement désintégrée. Ce changement brusque de comportement est appelé écoulement (COSTES, 1977 ; HARRIS, 1977).

Parmi les corps qui présentent un tel comportement, citons les peintures, les encres, les dentifrices, certaines pommades, certaines suspensions ou émulsions, etc....

Il existe plusieurs lois phénoménologiques permettant de représenter analytiquement ce comportement : nous en rapportons trois dans le tableau 1.1. Il s'agit de modèles, à deux ou trois paramètres. Si μ_0 et μ_2 ont des unités de viscosité, l'unité de μ_1 dépend de α . Le plus employé est le modèle de Bingham à propos duquel nous faisons quelques commentaires supplémentaires.

Modèle de Bingham

Le coefficient μ_0 est appelé viscosité plastique ou coefficient de rigidité (WILKINSON, 1960). Le rhéogramme correspondant à la relation du tableau 1.1 est linéaire, mais ne passe pas par l'origine, contrairement à celui d'un fluide newtonien [voir figure 1-17].

Rappelons ici que :

$$(\gamma:\gamma) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \gamma_{ji} \quad (1.3)$$

Pour un écoulement unidirectionnel dans la direction 1 sous l'effet d'une force dans la direction 2, l'équation (1.3) devient :

$$(\gamma:\gamma) = 2 \gamma_{12}^2 \quad (1.4)$$

Et donc, la relation du tableau 1.1 devient :

Type de fluide	Auteur	Equation rheologique
Plastique	Bingham	$\tau = - \left\{ \mu_0 + \frac{\tau_0}{\left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{1/2}} \right\} \dot{\gamma}$
Plastique	Herschel-Bulkley	$\tau = - \left\{ \mu_1 \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{\alpha-1}{2}} + \frac{\tau_0}{\left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{1/2}} \right\} \dot{\gamma}$
Plastique	Casson	$\tau = - \left\{ \mu_2 + \frac{\tau_0}{\left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{1/2}} + 2 \left(\mu_2 \frac{\tau_0}{\left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{1/2}} \right)^{1/2} \right\} \dot{\gamma}$
Pseudoplastique et dilatant	Ostwald de Waele	$\tau = - \left\{ m \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{n-1} \right\} \dot{\gamma}$ - pseudoplastique : $n < 1$ - dilatant : $n > 1$
Pseudoplastique	Eyring	$\tau = - \left\{ A \operatorname{argsh} \left[\frac{\left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{1/2}}{B} \right] \cdot \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{-1/2} \right\} \dot{\gamma}$
Pseudoplastique	Carreau	$\tau = - \left\{ \mu_\infty + (\mu_0 - \mu_\infty) \left[1 + \lambda^2 \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \dot{\gamma}$
Pseudoplastique et dilatant	Ellis	$\tau = - \left\{ \frac{\mu_0}{1 + A \mu_0 \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{\alpha-1}{2}}} \right\} \dot{\gamma}$ - pseudoplastique : $\alpha > 1$ - dilatant : $\alpha < 1$
Pseudoplastique	Sisko	$\tau = - \left\{ A + B \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{n-1}{2}} \right\} \dot{\gamma}$; $n < 1$
Pseudoplastique	Bellet	$\tau = - \left\{ \mu_\infty + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{1 + A \mu_0 \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{\alpha-1}{2}}} \right\} \dot{\gamma}$; $\alpha > 1$
Pseudoplastique	Bellet	$\tau = - \left\{ \frac{A \mu_0 \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{n-1}{2}} + \mu_\infty}{1 + A \left \underline{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2} (\dot{\gamma} : \dot{\gamma}) \right ^{\frac{n-1}{2}}} \right\} \dot{\gamma}$; $n < 1$

TABLEAU 1.1 - Expressions rheologiques

$$\tau_{12} = - \left\{ \mu_0 + \frac{\tau_0}{|\dot{\gamma}_{12}|} \right\} \dot{\gamma}_{12} \quad (1.5)$$

La viscosité apparente diminue lorsque le gradient de vitesse augmente et tend vers la valeur du coefficient de rigidité. Le rhéogramme correspondant aux modèles de Herschel-Bulkley et Casson n'est pas linéaire.

2.2.2.2 Comportement pseudoplastique

Il s'agit du comportement rhéologique le plus répandu. Le rhéogramme des substances pseudoplastiques est tel que la viscosité apparente diminue lorsque le gradient de vitesse augmente, passant de manière continue d'une valeur μ_0 à une valeur μ_∞ pour des gradients de vitesse respectivement nuls ou infinis [voir figure 1-1 et tableau 1.1]. Les corps à comportement pseudoplastique sont surtout les hauts polymères. Aux faibles gradients de vitesse, les molécules sont totalement désorientées ; l'augmentation du gradient de vitesse oriente ces molécules, diminuant ainsi les frictions internes et par conséquent la viscosité apparente.

Un grand nombre de modèles ont été proposés pour représenter le comportement pseudoplastique (ASTARITA, 1974 ; WILKINSON, 1960). Nous en présentons brièvement quelques-uns.

Modèle d'Ostwald de Waele

Les deux paramètres, n , indice de comportement fluide, et m , indice de consistance, dont l'unité est fonction de n sont tous deux positifs ; pour un fluide pseudoplastique, n est inférieur à 1.

Le modèle d'Ostwald de Waele, encore appelé loi puissance, a très souvent été employé (BIRD, 1977 ; BELLET et SENNELIN, 1971). Il présente néanmoins deux graves inconvénients :

- μ_0 est infini ;
- μ_∞ est égal à zéro.

Loin de ces deux limites, le modèle d'Ostwald de Waele peut être utilisé avec succès dans le plus grand nombre de cas. C'est surtout le plus simple des modèles pseudoplastiques.

Modèle d'Eyring

Il s'agit d'un modèle semi-empirique qui est fondé sur la théorie cinétique des liquides. Les valeurs limites de la viscosité apparente sont $\mu_0 = \frac{A}{B}$ et $\mu_\infty = 0$.

Modèle d'Ellis

Ce modèle à trois paramètres a été utilisé en remplacement de la loi puissance pour donner à la viscosité apparente une valeur convenable aux faibles gradients de vitesse. Dans ce but, Ellis a décomposé le gradient de vitesse γ en deux contributions, une contribution newtonienne et une contribution ostwaldienne ; pour un écoulement unidirectionnel, le gradient de vitesse γ_{12} devient donc :

$$\gamma_{12} = - \frac{\tau_{12}}{\mu_0} - A \tau_{12}^\alpha \quad (1.6)$$

Pour des gradients de vitesse très grands, la viscosité apparente tend vers zéro.

Modèle de Sisko

Sisko eut l'idée en 1958 (BELLET, 1973a ; BELLET, 1973b) de décomposer non pas le gradient de vitesse γ , mais les contraintes τ en deux contributions, l'une newtonienne, l'autre ostwaldienne pseudoplastique ; pour un écoulement unidirectionnel, l'écriture de τ_{12} est alors :

$$\tau_{12} = - A \gamma_{12} - B \gamma_{12}^n \quad (1.7)$$

Dans ce cas, la viscosité apparente est infinie pour un gradient de vitesse nul et égale à A pour un gradient de vitesse infini.

Ces deux modèles d'Ellis et Sisko, tous deux à trois paramètres, présentent de l'intérêt, le premier pour les faibles valeurs de gradients de vitesse, le second pour les forts gradients de vitesse.

Toutefois, il semble que pour caractériser avec une précision convenable un fluide pseudoplastique dans une large gamme de gradients de vitesse, seuls les modèles rhéologiques à quatre paramètres puissent convenir.

Modèle de Carreau

Dans ce modèle à quatre paramètres, λ a l'unité d'un temps. Bien souvent, dans des zones à faibles ou moyens gradients de vitesse, les auteurs du modèle préconisent de négliger μ_∞ : cette simplification d'ailleurs sera retenue dans ce travail. Dans ce cas, la loi rhéologique du tableau 1.1 devient :

$$\tau = - \left\{ \mu_0 \left[1 + \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\gamma} : \dot{\gamma} \right)^{\frac{n-1}{2}} \right] \right\} \dot{\gamma} \quad (1.8)$$

Modèles de Bellet

BELLET (1973b) a proposé deux modèles rhéologiques à quatre paramètres. Le premier apparaissant sur le tableau 1.1, est construit à partir du modèle d'Ellis ; il diffère simplement de ce dernier par le fait que la viscosité aux gradients de vitesse infinis n'est plus nulle. Le paramètre A du premier modèle doit être exprimé en $\text{kg}^{-\alpha} \text{s}^{2\alpha-1} \text{m}^{\alpha}$; celui du second modèle en s^{1-n} .

2.2.2.3 Comportement dilatant

Le comportement dilatant est tel que la viscosité apparente du fluide augmente lorsque les gradients de vitesse augmentent. Les fluides dilatants sont peu nombreux : par conséquent peu de modèles ont été développés. Le seul modèle utilisé en pratique est celui d'Ostwald de Waele, avec $n > 1$. Ces fluides dilatants sont composés dans la plupart des cas d'une phase dispersée au milieu d'une phase continue : par exemple, de l'amidon dans l'eau, du gypse dans l'eau. GREEN et GRISKEY (1968a, 1968b) proposent une explication au phénomène de dilatance. Au repos, le fluide est composé de paquets denses de particules entre lesquels existent des vides remplis par le fluide qui fait fonction de lubrifiant. Les contraintes appliquées vont détruire ces paquets de particules, augmentant ainsi les vides. Dans la nouvelle structure, il n'y a pas assez de liquide pour assurer la lubrification : il existe des frottements solides et par conséquent, la viscosité apparente augmente. Beaucoup de détails explicatifs ainsi que des réserves sont apportés dans les deux publications citées en référence (GREEN et GRISKEY, 1968a ; GREEN et GRISKEY, 1968b).

SUCKOW et coll. (1980) ont récemment fait une revue bibliographique sur les fluides dilatants. Bien que les premières constatations du phénomène de dilatance aient été faites en 1885 par REYNOLDS, SUCKOW et coll. (1980) ne mentionnent que dix-sept publications sur le sujet.

2.2.3 Fluides non-newtoniens dépendants du temps

Il faut préciser la signification exacte de ce terme générique. La viscosité apparente d'un tel fluide dépend de la durée d'application d'une contrainte sans interruption, et bien sûr de cette contrainte. Les principaux fluides non-newtoniens visqueux dépendants du temps sont les fluides thixotropes. L'application d'une contrainte constante détruit certaines parties de la structure du fluide conduisant ainsi à une diminution dans le temps de la viscosité apparente [voir figure 1-2]. Laissé au repos, le fluide reprend sa structure initiale ; certaines peintures sont

thixotropes. Le type opposé de comportement qui correspond à un renforcement de structure sous l'effet de contraintes constantes, est appelé la rhéopexie (ce comportement est très rare).

2.2.4 Conclusion

Nous venons brièvement de passer en revue les principaux comportements rhéologiques de fluides visqueux. Le comportement pseudoplastique est de loin le plus répandu : dans ce travail, nous ne nous intéressons pratiquement qu'à ce cas.

Notons ici que le comportement pseudoplastique est quelquefois difficile à différencier du comportement plastique en ce sens que les appareils de mesure permettent difficilement la détermination des contraintes aux gradients de vitesse très faibles.

De plus, en ce qui concerne les modèles à quatre paramètres, la détermination expérimentale de ceux-ci nécessite un nombre important d'essais et une méthode numérique sûre et précise : il faut que l'exploitation des résultats entraîne moins d'imprécision que l'abandon d'un paramètre ; cette condition est loin d'être toujours satisfaite.

3 - GENERALITES SUR L'AGITATION DES MILIEUX DE FORTE CONSISTANCE -

3.1 INTRODUCTION

L'agitation des milieux de forte consistance relève encore souvent du domaine de l'empirisme. En effet, les éléments de choix d'un système d'agitation sont difficiles à évaluer de manière rationnelle et sont le plus souvent appréciés en fonction du savoir-faire d'hommes de l'art.

Pour les fluides dont la viscosité apparente moyenne est inférieure à 10 Poiseuilles, des agitateurs de petite surface (hélices, turbines) peuvent convenir. Au-delà, on préconise souvent de faire appel à des mobiles de grande surface (GIBERT, 1979).

De manière générale, plus le fluide est visqueux, plus il est nécessaire de choisir un agitateur de grande surface de manière à éviter l'existence de zones mortes, mais tournant lentement pour que la consommation d'énergie ne devienne pas prohibitive.

Nous passons ci-après brièvement en revue divers types d'agitateurs. En ce qui concerne les trois premières catégories (hélices, turbines, agitateurs-plans), il s'agit de mobiles assez souvent utilisés avec des fluides visqueux ou très visqueux ; toutefois, les utilisateurs s'accordent généralement pour reconnaître qu'ils ne sont pas toujours bien adaptés.

3.2 HELICES

L'hélice marine classique est déconseillée dans le cas de fluides dont la viscosité apparente dépasse 5 Poiseuilles. Au-delà de cette valeur sont retenues des hélices à pales minces de grand diamètre ($\frac{D}{T} = 0,7$) ; la limite supérieure couramment rapportée est alors de 60 Poiseuilles.

3.3 TURBINES

Les turbines peuvent être utilisées jusqu'à des viscosités apparentes de l'ordre de 200 Poiseuilles. En fait, la limite de fonctionnement de ces agitateurs est généralement beaucoup plus faible, par exemple quand il s'agit de réaliser des émulsions homogènes de deux liquides visqueux immiscibles.

3.4 AGITATEURS-PLANS

Les agitateurs-plans sont principalement les agitateurs à pales, les ancres, les agitateurs barrières.

Les agitateurs à pales sont utilisés généralement pour des agitations douces avec une vitesse en bout de pale ne dépassant pas 3 ms^{-1} . Ils sont assez souvent exploités dans le cas de liquides visqueux.

Les agitateurs à pales peuvent comporter deux, quatre, huit pales ou plus. Notons que la hauteur des pales peut varier de $0,05 T$ à $0,9 T$ (NAGATA et coll., 1957).

Les ancres sont assez souvent utilisées avec des fluides pseudo-plastiques pour lesquels l'expérience a montré que la mise en oeuvre de turbines ou d'hélices conduisait à la création de zones stagnantes au voisinage des parois. En particulier, les ancres améliorent l'intensité des transferts thermiques entre des fluides de forte consistance et les parois des cuves qui les contiennent. Les agitateurs-barrières sont constitués de barres

horizontales ou verticales. Les vitesses de rotation sont faibles pour réduire la consommation d'énergie.

On utilise les agitateurs plans avec des liquides dont la viscosité apparente peut aller jusqu'à 70 Poiseuilles. Nous allons consacrer l'essentiel de nos travaux à l'analyse de ces mobiles.

3.5 AUTRES AGITATEURS

Pour un grand nombre de fabrications industrielles, il existe des agitateurs spécifiques, dont il n'est pas question ici de dresser une liste complète. Nous renvoyons pour cela à des ouvrages spécialisés (NAGATA, 1975) ou aux dépliants techniques des principaux fabricants d'agitateurs.

Parmi les mobiles les plus fréquents, on peut citer les vis d'Archimède et les rubans hélicoïdaux ou encore des combinaisons de ces deux mobiles (GELUS et coll., 1979 ; LE LAN, 1976).

3.6 CONCLUSION

Rappelons que nous n'avons pas trouvé de critères scientifiques précis pour orienter le choix d'un mobile d'agitation, mais bien plutôt un ensemble de règles empiriques et d'habitudes. L'utilisation des grands diamètres semble avoir été guidée par le souci d'éviter la formation de zones mortes ; pour ne pas accroître exagérément la consommation énergétique, la vitesse de rotation doit alors demeurer modérée (inférieure à 100 mn^{-1}).

Dans ce travail consacré aux agitateurs plans, nous essaierons lorsque cela sera possible, de dégager les éléments scientifiques permettant de justifier les règles de l'art habituellement respectées par le praticien, ou si nécessaire de les infirmer.

4 - CARACTERISTIQUES DES ECOULEMENTS -

4.1 GENERALITES

Les caractéristiques détaillées des écoulements générés par des mobiles en rotation au sein de milieux fortement visqueux sont très mal connues. Les distributions des vitesses ou des contraintes ont été rarement analysées

et les quelques informations disponibles ne sont ni toujours suffisamment claires, ni suffisamment fiables. En fait, seul le cas de l'ancre a été examiné en quelques détails par divers auteurs.

Les techniques utilisées sont peu nombreuses. Nous relevons quelques études expérimentales : emploi d'une méthode électrochimique par SATAYAPRASERT (1980) ; emploi de méthodes photographiques avec traceurs (MURAKAMI et coll., 1972 ; PETERS et SMITH, 1967). Nous relevons surtout plusieurs approches théoriques, en particulier par traitement numérique des équations de continuité et de Navier-Stokes (HIRAOKA et coll., 1978 ; KURIYAMA et coll., 1982 ; LHOTA et MITSCHKA, 1975 ; RAUTENBACH et BOLLENRATH, 1979 ; WALTON, 1981 ; WALTON et coll., 1981).

Les travaux de HIRAOKA et coll. (1978) ont constitué, pour nous, le point de départ de l'analyse numérique que nous avons largement développée dans ce travail. Nous reviendrons, dans le chapitre suivant, sur les aspects relatifs à la mise en équation et aux techniques de résolution.

Nous allons ici commenter quelques résultats obtenus par ces divers auteurs.

4.2 ÉCOULEMENTS GÉNÉRÉS PAR UNE ANCRE

Nous signalons tout d'abord que les sept publications auxquelles nous faisons référence présentent des résultats comparables (KURIYAMA et coll., 1982 ; MURAKAMI et coll., 1972 ; PETERS et SMITH, 1967 ; PETERS et SMITH, 1969 ; SATAYAPRASERT, 1980 ; WALTON, 1981 ; WALTON et coll., 1981).

- Écoulement axial

La plupart des auteurs s'accordent pour conclure que cet agitateur ne génère pas d'écoulement axial. Toutefois, PETERS et SMITH (1969) observent un écoulement secondaire vertical qui leur permet de justifier un modèle de mélange.

- Écoulement radial

La composante radiale est faible devant la composante tangentielle. Les travaux de KURIYAMA et coll. (1982) montrent qu'en aval d'une pale, la vitesse radiale est négative, c'est-à-dire qu'il y a écoulement de la périphérie vers le centre, alors qu'en amont elle est positive. C'est dans la

région proche de la pale qu'on observe les valeurs absolues les plus importantes. Pour un nombre de Reynolds égal à 1, KURIYAMA et coll. (1982) rapportent un maximum de la composante radiale égal à 40% du maximum de la composante tangentielle.

- Ecoulement tangentiel et lignes de courant

Pour décrire le mouvement primaire, nous choisissons un exemple de résultats tiré des travaux de PETERS et SMITH (1967) et qui est rapporté sur la figure 1-3. Ces auteurs ont utilisé une technique cinématographique : une caméra, tournant avec l'agitateur, suit le mouvement de particules solides (polystyrène) de même densité que l'huile étudiée, dans un plan horizontal, loin du fond de la cuve. Signalons qu'il ne s'agissait pas réellement d'une ancre, mais plus simplement de deux bras verticaux (nous utiliserons un mobile identique dans ce travail) dont les dimensions principales étaient les suivantes : $\frac{D}{T} = 0,85$; $\frac{C}{T} = 0,074$; $\frac{W}{T} = 0,11$.

La figure 1-3 présente la distribution des lignes de courant dans toute la cuve puis de la vitesse tangentielle dans le prolongement de l'agitateur, sur la médiatrice de celui-ci et 30° en amont de la pale. Le fluide étudié est newtonien ; le nombre de Reynolds varie de 3 à 10 environ.

En ce qui concerne les lignes de courant, on doit noter l'existence de zones de recirculation au voisinage de l'arbre central ; les lignes de courant n'entourent pas l'axe, traduisant ainsi la présence de rouleaux tournant avec l'agitateur. Dans le reste de la cuve, les lignes de courant entourent l'arbre d'agitation, la présence des pales provoquant des déformations d'autant plus marquées que l'on s'approche de ces pales. Entre les pales et la paroi de la cuve, les lignes de courant sont sensiblement circulaires.

La vitesse tangentielle est donnée dans un repère tournant avec l'agitateur, ce qui revient à imaginer la cuve en rotation et l'agitateur immobile. Dans ce cas, la vitesse est maximale sur la paroi de la cuve, nulle sur les pales de l'agitateur.

Dans le prolongement de l'agitateur, v_θ augmente à partir de l'arbre d'agitation, passe par un maximum local, puis décroît jusqu'à la valeur nulle sur la pale. Entre la pale et la paroi, nous observons une grande variation de v_θ .

Sur la médiatrice de l'agitateur, v_θ décroît légèrement à partir de l'axe et atteint assez vite un minimum local : nous notons ici un écoulement

de sens opposé à l'écoulement principal. La vitesse tangentielle augmente ensuite régulièrement jusqu'à la valeur de la paroi.

Sur la position angulaire de 30° en amont de la pale, v_θ augmente d'abord à partir de l'axe, passe par un maximum local, décroît légèrement ensuite, atteint une valeur minimale, puis augmente jusqu'à la valeur de la paroi.

Ajoutons en conclusion que les résultats de PETERS et SMITH (1967) sont les plus clairs, en ce qui concerne l'écoulement tangentiel généré par une ancre.

5 - PUISSANCE D'AGITATION -

5.1 PRESENTATION

La puissance nécessaire pour agiter un milieu quel qu'il soit, constitue toujours une donnée importante pour l'ingénieur. Dans le cas qui nous intéresse, de liquides de consistance élevée, le régime d'agitation est souvent laminaire. Par ailleurs, la surface supérieure du liquide reste plane et horizontale : les vitesses mises en jeu ne sont pas suffisantes pour provoquer la formation d'un vortex.

Dans ce cas particulier, l'ensemble des résultats expérimentaux disponibles dans des revues scientifiques montre une propriété intéressante de la puissance d'agitation. Le produit nombre de puissance-nombre de Reynolds, $N_p Re$ est généralement constant.

$$N_p Re = C_2 \quad (1.9)$$

Le nombre de puissance N_p est défini par $N_p = \frac{P}{\rho N^3 D^5}$.

La constante C_2 rassemble les caractéristiques géométriques de l'ensemble cuve-agitateur et les propriétés du fluide.

5.2 RESULTATS ANTERIEURS DANS LE CAS DE FLUIDES NEWTONIENS

De nombreux travaux expérimentaux ont été consacrés à l'analyse de la puissance d'agitation dans le cas d'agitateurs de géométries variées :

- pour des vis hélicoïdales par CHAPMAN et HOLLAND (1965), EDWARDS et coll. (1976) et NOVAK et RIEGER (1969) ;

- pour des rubans hélicoïdaux simples ou doubles par BLASINSKI et RZYSKI (1980), CHAVAN et ULBRECHT (1972), CHAVAN et ULBRECHT (1973), EDWARDS et coll. (1976), GRAY (1963), NAGATA et coll. (1972), PATTERSON et coll. (1979) et YAP et coll. (1979) ;

- pour des agitateurs combinant vis et rubans par CHOWDHURY et TIWARY (1979) ;

- pour des hélices, des turbines ou des agitateurs à pales par BOLT et coll. (1978), KOEN (1970) et NAGATA et coll. (1957) ;

- pour des ancras par EDWARDS et coll. (1976), KOEN (1978), LAHAYE (1978), RIEGER et NOVAK (1973), SAWINSKY et coll. (1976), SCHILO (1969) et TAKAHASHI et coll. (1980).

Dans tous les cas, on observe que l'équation (1.9) est sensiblement vérifiée à faible nombre de Reynolds. NOVAK et RIEGER (1969) ont observé l'évolution de la limite supérieure de validité en Re de cette loi avec la géométrie du système. Ainsi, dans le cas particulier d'une vis hélicoïdale située dans une cuve non munie de chicanes, la constante C_2 est-elle égale à 140 ; le nombre de Reynolds maximum est alors de 5. La même vis hélicoïdale munie cette fois d'un tube de guidage a les caractéristiques suivantes : $C_2 = 280$ et $Re_{\text{maximum}} = 30$.

5.2.1 Puissance consommée par des vis et des rubans

Les principaux résultats sont rassemblés dans le tableau 1.2. La constante a apparaissant dans les quatre dernières corrélations englobe les caractéristiques géométriques qui ne figurent pas dans ces corrélations. Nous devons signaler que la géométrie précise des agitateurs n'est généralement pas donnée ; de même la limite supérieure en Re de validité des corrélations, n'est pas précisée.

Sur les résultats présentés, nous ferons trois commentaires :

- la puissance consommée diminue lorsque le pas du ruban ou de la vis augmente : lorsque le pas est multiplié par deux, la puissance consommée est divisée par deux (CHAVAN et ULBRECHT, 1972) ou divisée par 1,4 (NAGATA et coll., 1972) ;

- la distance séparant la paroi de la cuve de l'extrémité de la pale, c , constitue un paramètre important ; le produit $NpRe$ augmente lorsque $\frac{c}{D}$ diminue ;

TABLEAU 1.2 - Puissance consommée par des vis et des rubans

Agitateur	Référence	Np Re
Vis	CHAPMAN et HOLLAND (1965)	$260 Re^{0,1}$
Ruban	PATTERSON et coll. (1979)	$24 Re^{0,07} n_B \left(\frac{T}{D}\right)^{-0,91} \left(\frac{l}{D}\right)^{1,23}$ simple ruban : $n_B = 1$ double ruban : $n_B = 2$ l : longueur d'un ruban
Ruban	BLASINSKI et RZYSKI (1980)	$a \left(\frac{p}{D}\right)^{-0,63} n_B^{0,77} \left(\frac{c}{D}\right)^{-0,53}$ a : constante p : pas
Ruban	CHAVAN et ULBRECHT (1972)	$a \left(\frac{p}{D}\right)^{-1} \left(\frac{c}{D}\right)^{-y}$ $y > 0$
Ruban	NAGATA et coll. (1972)	$a \left(\frac{p}{D}\right)^{-0,5} n_B^{0,5} \left(\frac{c}{D}\right)^{-0,5}$
Vis, ruban, combinaison des deux	EDWARDS et coll. (1976)	$a \left(\frac{p}{D}\right)^{-x}$ $x > 0$

- CHAPMAN et HOLLAND (1965) et PATTERSON et coll. (1979) notent une légère déviation à l'équation (1.9) ; dans les autres cas, cette équation est parfaitement vérifiée.

A l'évidence, les travaux cités en référence, malgré les quelques tendances générales présentées ci-dessus, conduisent à des résultats très dispersés : la géométrie des systèmes est trop variée, et ceci ne nous permet pas des comparaisons utiles.

5.2.2 Puissance consommée par des agitateurs à pales

Il existe une seule corrélation entre le nombre de Reynolds et la puissance consommée par un agitateur à pales ; elle est due à NAGATA et coll. (1957) :

$$NpRe = A + BRe \left(\frac{1000 + 1,2 Re^{0,66}}{1000 + 3,2 Re^{0,66}} \right)^P \left(\frac{H}{T} \right)^{0,35 + \frac{b}{T}} (\sin \theta)^{1,2} \quad (1.10)$$

Dans cette équation, le produit $NpRe$ augmente légèrement avec Re .
A titre d'exemple, pour :

- $\theta = \frac{\pi}{2}$, agitateur à pales droites ;
- $H = T$;
- $D = \frac{T}{2}$;
- $b = 0,9 T$ (maximum étudié par NAGATA et coll., 1957),

la corrélation (1.10) devient :

$$NpRe = 187 + 1,23 Re \left(\frac{1000 + 1,2 Re^{0,66}}{1000 + 3,2 Re^{0,66}} \right)^{-0,333} \quad (1.11)$$

Lorsque $Re = 1$, $NpRe = 188$, et lorsque $Re = 10$, $NpRe = 199$; les variations ne sont, par conséquent, pas très importantes.

5.2.3 Puissance consommée par des ancres

Nous rassemblons, dans le tableau 1.3, les résultats relatifs à ce mobile. Les auteurs ont généralement fait varier le diamètre du mobile et par conséquent la distance entre la pale et la paroi, la hauteur de l'agitateur et la largeur des pales. Dans certains cas, pourtant, certains rapports ne sont pas précisés, ce qui suggère de faire preuve d'une certaine

TABLEAU 1.3 * Puissance consommée par une ancre

Référence	D/T	c/T	b/D	w/T	Np Re
EDWARDS et coll. (1976)	0,89 0,90 0,90 0,90	0,056 0,050 0,050 0,050	1,06		190 200* 175* 215*
LAHAYE (1978)	variable 0,90	variable 0,050			462 $(\frac{c}{T})^{-0,16}$ 746
TAKAHASHI et coll. (1980)	variable 0,90	variable 0,050	variable 1	variable 0,10	248 $\frac{b}{D} \sqrt{1 + 0,00735 (\frac{T}{c})^{0,832}} \sqrt{\alpha}$ avec $\frac{1}{\alpha} = \text{Ln} (4 + \frac{8c}{w}) - 1$ 250
SAWINSKI et coll. (1976)	variable 0,90	variable 0,050	variable 1		17 $(2 \frac{b}{D} + 1) (\frac{T}{c})^{0,45}$ 196
SCHILO (1969)	variable 0,90	variable 0,050	variable 1		86,8 Re ^{0,1} $\frac{b}{D} \frac{(T/D)^2}{(\frac{T}{D})^2 - 0,75}$ Re = 1 , Np Re = 221 Re = 10 , Np Re = 278
RIEGER et NOVAK (1973)	0,90	0,050	0,89	0,120	180

* il s'agit d'autres travaux rapportés par EDWARDS et coll. (1976)

prudence lors de l'utilisation des corrélations.

Pour les rapports géométriques moyens qui sont les suivants :

$$\frac{D}{T} = 0,90 \quad ; \quad \frac{c}{T} = 0,05 \quad ; \quad \frac{b}{D} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{w}{T} = 0,10 \quad ,$$

le produit $NpRe$ oscille entre 175 et 250. La dispersion des résultats peut avoir deux origines :

- la limite supérieure en Re n'apparaît pas clairement. SCHILO (1969) a noté, par exemple, que lorsque Re passait de 1 à 10, le produit $NpRe$ était augmenté de 26% ;
- certaines caractéristiques géométriques ne sont jamais définies : diamètre de l'arbre, distance de l'agitateur au fond de la cuve, épaisseur de l'agitateur, etc....

5.3 THEORIE DE METZNER ET OTTO (1957)

METZNER et OTTO (1957) ont développé un ensemble de propositions qui vise à unifier le traitement de la puissance d'agitation dans le cas de fluides à comportements rhéologiques newtonien et pseudoplastique. La procédure qu'ils recommandent et qui a été adoptée par de nombreux chercheurs est la suivante :

1 - déterminer les variations du nombre de puissance avec le nombre de Reynolds dans le cas d'un fluide newtonien de viscosité connue. Tracer la courbe a ;

2 - déterminer la rhéologie du fluide considéré dans le cadre du modèle d'Ostwald de Waele (voir tableau 1-1). Tracer la courbe b, viscosité apparente μ_a en fonction du gradient de vitesse γ_a : $\mu_a = m \gamma_a^{n-1}$;

3 - mesurer la puissance nécessaire pour agiter le liquide pseudoplastique et calculer le nombre de puissance Np . En utilisant la courbe a, on peut faire correspondre à ce nombre de puissance une valeur Re_a , dite nombre de Reynolds apparent. On en déduit une viscosité apparente

$$\mu_a = \frac{\rho N D^2}{Re_a} \quad ;$$

4 - l'exploitation de la courbe b permet alors de faire correspondre à μ_a un gradient de vitesse γ_a , appelé gradient de vitesse apparent ou effectif ;

5 - au cours d'essais expérimentaux systématiques, METZNER et OTTO (1957), METZNER et coll. (1961), ont alors montré qu'il existe une relation de proportionnalité entre γ_a et la vitesse de rotation de l'agitateur, soit :

$$\gamma_a = B N \quad (1-12)$$

La constante B ne dépend que des caractéristiques géométriques de l'ensemble cuve-agitateur et est indépendante de la rhéologie du fluide.

La viscosité apparente s'écrit alors :

$$\mu_a = m (B N)^{n-1} \quad (1.13)$$

et le nombre de Reynolds apparent :

$$Re_a = B^{1-n} Re \quad (1.14)$$

Commentaires

Les propositions de METZNER et OTTO (1957) permettent à l'ingénieur de régler de manière simple les calculs de consommation énergétique lors de l'agitation de milieux pseudoplastiques. Si le coefficient B, caractéristique de la géométrie utilisée, est connu, il suffit en effet de disposer de la courbe de puissance établie avec un liquide newtonien, et de l'équation rhéologique du fluide. Il est certain par contre que, d'un point de vue fondamental, les concepts de nombre de Reynolds apparent, de viscosité apparente, de gradient de vitesse apparent, sont peu clairs. Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur cette question importante.

Nous avons rassemblé dans le tableau 1-4 divers résultats obtenus en appliquant la théorie de METZNER et OTTO (1957). Si certains auteurs vérifient bien l'indépendance de B par rapport à l'indice de comportement n, d'autres notent des relations, essentiellement dans le cas de l'ancre, agitateur le plus souvent étudié :

$\frac{n}{(3n+1)^{1-n}}$ - CALDERBANK et MOO-YOUNG (1959) suggèrent que B est proportionnel à $\frac{n}{(3n+1)^{1-n}}$. Numériquement, ceci signifie que lorsque n croît de 0,3 à 0,9, B est divisé par 1,05 ;

- RIEGER et NOVAK (1973) proposent une corrélation qui est telle que lorsque n croît de 0,3 à 0,9, B est divisé par 4 environ, ce qui traduit une dépendance très marquée vis-à-vis de n ;

- de la relation de SCHILO (1969), lorsque $\frac{D}{T} = 0,9$, nous observons qu'une variation de n de 0,3 à 0,9 entraîne une diminution de B, de 23 à

TABLEAU 1.4 - Coefficient B de la théorie de METZNER et OTTO (1957)

Agitateur	Référence	B
hélice marine, turbine, agitateur à pale avec $0,33 < \frac{D}{T} < 0,66$	KOEN (1978)	$7 < B < 13$
agitateur bipale avec $\frac{D}{T} = 0,5$	HIRAOKA et coll. (1979)	$6,8 < B < 7,9$
ruban hélicoïdal	EDWARDS et coll. (1976) YAP et coll. (1979) CHOWDHURY et TIWARI (1979)	B voisin de 30
vis hélicoïdale	EDWARDS et coll. (1976)	$B = 12$
ancre $\frac{D}{T} = 0,89$; $\frac{c}{T} = 0,056$; $\frac{b}{D} = 1,06$. dimensions variables $\frac{D}{T} = 0,90$; $\frac{c}{T} = 0,05$; $\frac{b}{D} = 0,89$; $\frac{w}{T} = 0,120$. dimensions variables . dimensions variables, avec $0,68 < \frac{D}{T} < 0,96$	EDWARDS et coll. (1976) CALDERBANK et MOO-YOUNG (1959) RIEGER et NOVAK (1973) SCHILO (1969) BECKNER et SMITH (1966) cités par RIEGER et NOVAK (1973)	$B = 21,5$ $B = \sqrt[9]{9,5 + \frac{9 \left(\frac{T}{D}\right)^2}{\left(\frac{T}{D}\right)^2 - 1} \left(\frac{4n}{3n+1}\right)^{\frac{n}{1-n}}}$ $B = n \frac{2,21}{n-1}$ $B = \left\{ 7,96 \cdot 10^{-2} \left(\frac{4\pi}{n}\right)^n \frac{\left(\frac{T}{D}\right)^2 - 0,75}{\sqrt{\left(\frac{T}{D}\right)^2 - 0,75}} \right\}^{\frac{1}{n-1}}$ $B = \sqrt[37-60 \left(1 - \frac{D}{T}\right)]{7(1-n)}$

- BECKNER et SMITH (1966) notent également une diminution assez marquée de B avec n.

Le tableau 1-4 montre aussi le sens de variation de B avec $\frac{D}{T}$: CALDERBANK et MOO-YOUNG (1959), SCHILO (1969) et BECKNER et SMITH (1966) s'accordent pour dire que B augmente avec $\frac{D}{T}$.

6 - CONCLUSION -

Alors que les performances d'un agitateur dépendent, à l'évidence, de la structure détaillée des écoulements qu'il génère au sein de la cuve, les informations disponibles à ce propos sont rares. Ce paradoxe, que nous avons souligné dès l'introduction de ce mémoire, est confirmé par les investigations bibliographiques que nous venons de rapporter : pour les quinze dernières années, nous n'avons relevé qu'une dizaine de publications abondant, avec une efficacité pas toujours évidente, ce thème, et pour la plupart, dans le cas d'une ancre.

Ainsi, notre contribution correspond-elle à une lacune actuelle dans la connaissance scientifique détaillée des propriétés des systèmes visqueux, agités mécaniquement.

Les résultats, par contre, sont plus nombreux dans le cas de la puissance d'agitation, donnée globale beaucoup plus simple à mesurer. Ainsi pourrions-nous, à ce niveau, nous livrer à des comparaisons intéressantes avec les données établies lors de travaux antérieurs.

Dans les deux chapitres suivants, nous allons présenter les méthodes numérique, puis expérimentale que nous avons utilisées au cours de ce travail pour examiner les caractéristiques des écoulements de fluides consistants au sein de cuves mécaniquement agitées.

C H A P I T R E 2 :

MODELISATION ET TRAITEMENT NUMERIQUE

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - EQUATIONS A RESOUDRE
- 3 - MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE
- 4 - PRESENTATION DES METHODES NUMERIQUES
- 5 - ALGORITHMES DE CALCUL
- 6 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce deuxième chapitre est entièrement consacré à la présentation des méthodes numériques que nous avons mises au point pour analyser l'agitation de fluides visqueux. Ces méthodes nous permettront d'obtenir des informations locales relatives aux distributions des vitesses et des contraintes et aussi des informations globales comme la puissance consommée par les mobiles.

Il est honnête d'indiquer ici que l'idée originale de tenter de mettre au point un traitement numérique des équations de changement nous a été suggérée par une publication, due à HIRAOKA et coll. (1978), dans laquelle ces auteurs indiquaient le principe et les grandes lignes d'une méthode qui leur avait permis de déterminer la distribution des lignes de courant au sein d'une cuve, remplie d'un liquide newtonien et agitée par un agitateur à pales. En nous aidant des indications, parfois bien succinctes, disponibles dans le texte correspondant, nous avons progressivement repris le travail de HIRAOKA et coll. (1978), puis modifié et perfectionné la méthode pour traiter d'autres géométries et d'autres fluides. Dans une dernière phase, nous avons changé complètement la technique numérique.

Après avoir ainsi précisé ce que nous devons à nos prédécesseurs, nous allons dans la suite, abandonner tout souci historique pour retenir une présentation qui nous a semblé plus claire pour le lecteur.

2 - EQUATIONS A RESOUDRE -

2.1 HYPOTHESES

Cinq hypothèses ont été systématiquement émises en préliminaire à ce travail :

- 1 - les fluides considérés sont supposés incompressibles,
- 2 - le nombre de Reynolds reste suffisamment faible (toujours inférieur à 50) pour que le régime d'écoulement demeure laminaire,
- 3 - la géométrie des agitateurs est telle qu'ils ne génèrent pas d'écoulement axial,
- 4 - en négligeant les zones voisines du fond de la cuve et de la surface supérieure du liquide, nous supposons que tous les plans horizontaux sont identiques,
- 5 - le système est isotherme.

Nous avons retenu ici un système de coordonnées cylindriques. Les hypothèses 3 et 4 s'écrivent alors :

$$v_z = 0 \quad (2.1)$$

et
$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

2.2 ETABLISSEMENT DES EQUATIONS

En tenant compte des hypothèses précédemment énoncées, les équations de continuité et de mouvement s'écrivent :

$$\text{div} (\mathbf{v}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \text{grad} \mathcal{P} - \rho \text{div} (\mathbf{v}\mathbf{v}) - \text{div} (\boldsymbol{\tau}) \quad (2.4)$$

Dans toute la suite de ce travail, nous ne nous intéressons pas à la distribution de la pression dans les cuves agitées. Dans ces conditions, seules les composantes suivant r et θ de l'équation (2.4) seront prises en considération dans la suite. En termes scalaires, les équations (2.3) et (2.4) deviennent :

$$\frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_r}{\partial t} + \rho \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = & - \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rr}}{r} \right] \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = & - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} - \\ & \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} \right] \quad (2.7) \end{aligned}$$

Les équations (2.6) et (2.7) peuvent être combinées afin d'éliminer le terme de pression \mathcal{P} . Pour ce faire, l'équation (2.6) est dérivée par rapport à θ ; chacun des termes de l'équation (2.7) est multiplié par r et l'équation résultante est dérivée par rapport à r . Dans chacune des deux équations apparaît alors un terme en $\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial r \partial \theta}$ qui est éliminé

(BIRD et coll., 1977 ; HIRAOKA et coll., 1979).

Deux nouvelles variables sont ensuite introduites, la fonction courant ϕ et la fonction rotationnel ω (BIRD et coll., 1960).

$$v_{\theta} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (2.8)$$

$$v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2.9)$$

$$\omega = \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (2.10)$$

En raison de la définition de la fonction courant, les équations (2.8) et (2.9), l'équation de continuité (2.5) est automatiquement vérifiée. Une seule équation demeure, combinaison des équations (2.6) et (2.7) et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} -r \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) = & -2 \frac{\partial^2 \tau_{rr}}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} \\ & + r \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

accompagnée de la définition de la fonction rotationnel, (2.10), soit :

$$\omega = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.12)$$

A ce niveau de formulation, le problème comporte davantage d'inconnues (ϕ , ω , τ_{rr} et $\tau_{r\theta}$) que d'équations (2). Il convient donc, maintenant, d'introduire les lois de comportement rhéologique des fluides considérés qui relient les composantes du tenseur des contraintes (τ_{rr} et $\tau_{r\theta}$) aux composantes du tenseur des déformations, ou en d'autres termes, à diverses dérivées des composantes de la vitesse et à la viscosité ou aux paramètres rhéologiques des modèles retenus.

Nous utilisons les concepts de fluide newtonien généralisé et de viscosité apparente η afin de conserver la même forme générale d'équations, que le fluide soit newtonien ou non. Nous écrivons donc,

$$\tau_{rr} = -\eta \gamma_{rr} \quad (2.13)$$

$$\tau_{r\theta} = -\eta \gamma_{r\theta} \quad (2.14)$$

Les deux composantes du tenseur des vitesses de déformation, γ , s'écrivent :

$$\gamma_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (2.15)$$

et
$$\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \quad (2.16)$$

En fonction des nouvelles variables ϕ et ω , ces expressions deviennent :

$$\gamma_{rr} = 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) \quad (2.17)$$

et
$$\gamma_{r\theta} = 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \omega \quad (2.18)$$

En portant les expressions (2.13), (2.14), (2.17), (2.18) dans l'équation générale (2.11), on obtient alors :

$$\begin{aligned} \rho r \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) &= \eta r \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\omega + 2r \frac{\partial \omega}{\partial r} - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \right) \\ &+ \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \left(\frac{\omega}{r} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \left(2r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - r \omega \right) \\ &+ \frac{\partial^2 \eta}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{4}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les équations (2.12) et (2.19), associées au modèle rhéologique décrivant le comportement du fluide considéré constituent un système qui permet de déterminer les trois inconnues ϕ , ω et η , lorsque les conditions de frontières ont été clairement établies. Les équations (2.8) et (2.9) permettent alors de calculer les composantes radiale et tangentielle de la vitesse.

2.3 MODELES RHEOLOGIQUES

Nous considérons ici des fluides newtoniens, pseudoplastiques et dilatants, dont le comportement rhéologique est représenté par les modèles de Newton, Ostwald de Waele ou Carreau.

2.3.1 Modèle de Newton

La viscosité ne varie pas avec la position. Seules les équations (2.12) et (2.19) sont à résoudre, cette dernière devenant :

$$\rho r \frac{\partial \omega}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = \eta r \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.20)$$

2.3.2 Modèle d'Ostwald de Waele

La viscosité apparente, définie au chapitre précédent, s'écrit :

$$\eta = m \int \frac{1}{2} |(\gamma : \gamma)| \int^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.21)$$

Pour l'écoulement bidimensionnel étudié ici, rappelons que :

$$(\gamma : \gamma) = 2 \gamma_{rr}^2 + 2 \gamma_{r\theta}^2 \quad (2.22)$$

La viscosité apparente devient donc :

$$\eta = m \int^4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \omega \right)^2 \int^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.23)$$

2.3.3 Modèle de Carreau

Nous négligeons, dans ce travail, la viscosité du fluide aux gradients de vitesse infinis. La viscosité apparente devient alors :

$$\eta = \mu_0 \int^1 + \lambda^2 \int \frac{1}{2} |(\gamma : \gamma)| \int^{\frac{n-1}{2}} \quad (2.24)$$

En termes de fonctions courant et rotationnel, elle s'écrit :

$$\eta = \mu_0 \left\{ 1 + \lambda^2 \int^4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \omega \right)^2 \int^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (2.25)$$

3 - MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE -3.1 TERMES ADIMENSIONNELS

Afin de rendre le problème adimensionnel, nous avons retenu trois grandeurs de référence :

- le rayon de la cuve $\frac{T}{2}$;
- la masse volumique du fluide ;
- la vitesse de rotation exprimée en rad.s^{-1} , $2 \pi N$.

De nouvelles grandeurs sont ainsi définies :

$$r^* = \frac{2r}{T} \quad (2.26)$$

$$\theta^* = \theta \quad (2.27)$$

$$t^* = 2 \pi N t \quad (2.28)$$

$$v^* = \frac{v}{\pi N T} \quad (2.29)$$

$$\phi^* = \frac{2}{\pi N T^2} \phi \quad (2.30)$$

et
$$\omega^* = \frac{\omega}{2 \pi N} \quad (2.31)$$

. Viscosités adimensionnelles

- modèle de Newton :

$$\eta^* = \frac{\eta}{\mu} = 1 \quad (2.32)$$

- modèle d'Ostwald de Waele : l'équation (2.21) nous conduit à :

$$\eta^* = \frac{\eta}{m (2 \pi N)^{n-1}} \quad (2.33)$$

- modèle de Carreau : dans ce cas, η^* est défini comme :

$$\eta^* = \frac{\eta}{\mu_0} \quad (2.34)$$

L'expression adimensionnelle de λ est donnée par :

$$\lambda^* = 2 \pi N \lambda \quad (2.35)$$

Nombres de Reynolds

A chacun des trois modèles rhéologiques est associé un nombre de Reynolds que nous noterons Re_N pour le modèle de Newton, Re_{OW} pour le modèle d'Ostwald de Waele et Re_C pour le modèle de Carreau :

$$Re_N = \frac{\rho N D^2}{\mu} \quad (2.36)$$

$$Re_{OW} = \frac{\rho N^{2-n} D^2}{m} \quad (2.37)$$

et
$$Re_C = \frac{\rho N D^2}{\mu_0} \quad (2.38)$$

3.2 EQUATIONS ADIMENSIONNELLES

Dans les trois cas, la relation entre la fonction rotationnel et la fonction courant est la même : c'est la forme adimensionnelle de l'équation (2.12) :

$$\omega^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}} \quad (2.39)$$

Modèle de Newton

L'équation de mouvement s'écrit pour ce modèle :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 Re_N \left(r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \right) = r^* \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^{*2}} \right) \quad (2.40)$$

Modèle d'Ostwald de Waele

La viscosité apparente adimensionnelle est :

$$\eta^* = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^* \partial \theta^*} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \omega^* \right)^2} \sqrt[2]{\frac{n-1}{2}} \quad (2.41)$$

L'équation de mouvement est :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 (2\pi)^{1-n} Re_{OW} \left(r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \right) = X^* \quad (2.42)$$

Modèle de Carreau

La viscosité apparente adimensionnelle s'écrit :

$$\eta^* = \left\{ 1 + \lambda^{*2} \left[4 \left(\frac{1}{r^*} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^* \partial \theta^*} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \omega^* \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (2.43)$$

L'équation de mouvement est :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D} \right)^2 \text{Re}_C \left(r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \right) = X^* \quad (2.44)$$

Le terme X^* qui apparaît dans les deux dernières équations de mouvement est l'expression adimensionnelle du deuxième membre de l'équation (2.19) :

$$\begin{aligned} X^* = & \eta^* r^* \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^{*2}} \right) + \frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} \left(\omega^* + 2r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} - 2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} \right) \\ & + \frac{\partial \eta^*}{\partial \theta^*} \left(\frac{2}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} + \frac{4}{r^{*3}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} - \frac{4}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^* \partial \theta^*} \right) + \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial \theta^{*2}} \left(\frac{\omega^*}{r^*} - \frac{2}{r^*} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} \right) \\ & + \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial r^{*2}} \left(2r^* \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - r^* \omega^* \right) + \frac{\partial^2 \eta^*}{\partial r^* \partial \theta^*} \left(\frac{4}{r^*} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^* \partial \theta^*} - \frac{4}{r^{*2}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \right) \quad (2.45) \end{aligned}$$

En résumé, pour le modèle de Newton, sont à résoudre les équations (2.39) et (2.40). Pour le modèle d'Ostwald de Waele, ce sont les équations (2.39), (2.41) et (2.42) associées à l'équation (2.45), pour le modèle de Carreau, les équations (2.39), (2.43) et (2.44) associées à (2.45).

3.3 ETABLISSEMENT DES CONDITIONS DE FRONTIERE

3.3.1 Choix du repère

Dans un repère lié aux parois de la cuve, la vitesse en un point donné fluctue périodiquement à la fréquence de passage des pales de l'agitateur. Par contre, dans un repère tournant à la même vitesse angulaire que l'agitateur, la vitesse en un point donné atteint un régime permanent : nous avons choisi ce repère.

Ces problèmes de repère ont été amplement discutés par GREENSPAN (1969). Nous montrons en annexe 1, dans le cas simple de l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux qu'il est aisé de passer du repère tournant à un repère fixe par rapport à la paroi de la cuve.

3.3.2 Limites du domaine

Un seul plan horizontal est étudié. Les trois géométries d'agitateur retenues pour ce travail présentent des pales situées de part et d'autre de l'arbre d'agitation : il existe donc une symétrie par rapport à l'axe de rotation du mobile (voir figure 2-1). C'est pourquoi nous limitons notre analyse au domaine suivant :

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

et $r_A \leq r \leq \frac{T}{2}$

qui en grandeurs adimensionnelles devient :

$$0 \leq \theta^* \leq \pi$$

et $r_A^* \leq r^* \leq 1.$

3.3.3 Condition initiale

Pour traiter du régime transitoire correspondant à la mise en mouvement du fluide situé dans la cuve, il faut préciser la condition initiale dans laquelle se trouve le système. Dans tous les cas traités, nous choisissons de considérer initialement le cas d'un liquide au repos au sein duquel on lance brusquement l'agitateur à la vitesse de rotation N . Dans le repère tournant adopté pour la résolution des équations, cette situation se traduit par :

. $t = 0$: $v_r = 0$
 et $v_\theta = -2\pi Nr$ pour le liquide et la cuve
 $v_\theta = 0$ pour l'axe et l'agitateur

soit, adimensionnellement :

. $t^* = 0$: $v_r^* = 0$
 et $v_\theta^* = -r^*$ pour le liquide et la cuve
 $v_\theta^* = 0$ pour l'axe et l'agitateur.

- Valeurs de ϕ^* , ω^* et η^* pour $t^* = 0$

Sur l'axe d'agitation, $\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*}$ et $\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*}$ sont nuls ; par conséquent la fonction courant est une constante. Comme la fonction courant est toujours définie

à une constante près, nous pouvons choisir $\phi^* = 0$ sur cet axe.

Dans le liquide, ϕ^* s'obtient par intégration de v_{θ}^* par rapport à r^* :

$$\phi^* = -\frac{r^{*2}}{2} + C_1 \quad (2.46)$$

Lorsque $r^* = r_A^*$, $\phi^* = 0$, et donc :

$$\phi^* = 0,5 (r_A^{*2} - r^{*2}) \quad (2.47)$$

$$\text{En paroi de cuve, } \phi^* = 0,5 r_A^{*2} - 0,5 \quad (2.48)$$

. agitateur bipale de diamètre $r^* = \frac{D}{T}$

Pour des raisons de continuité, sur les deux pales de l'agitateur bipale, la fonction courant ϕ^* est égale à zéro.

. ancre

L'extrémité intérieure de la pale est située sur la position radiale $r^* = r_{IY}^*$ et l'extrémité extérieure à $r^* = \frac{D}{T}$ (voir figure 5-1 du chapitre 5).

Par utilisation des résultats de l'annexe 2, nous pouvons calculer le débit tangentiel entre l'axe et la première extrémité de la pale ; ce débit est donné par :

$$\phi^* (r^* = r_{IY}^*) = \frac{-r_{IY}^{*2} + r_A^{*2}}{2} \quad (2.49)$$

De même, nous pouvons calculer le débit tangentiel entre la seconde extrémité et la paroi de la cuve.

$$\phi^* (r^* = 1) - \phi^* (r^* = \frac{D}{T}) = 0,5 \left[\left(\frac{D}{T}\right)^2 - 1 \right] \quad (2.50)$$

En portant la valeur donnée par (2.48) dans (2.50), nous obtenons :

$$\phi^* (r^* = \frac{D}{T}) = \frac{r_A^{*2} - (D/T)^2}{2} \quad (2.51)$$

Or, sur la pale de l'agitateur, $\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*}$ et $\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*}$ sont nuls ; ϕ^* est donc une constante. Nous choisissons la moyenne entre les valeurs données par les équations (2.49) et (2.51) :

$$\phi^*(\text{pale}) = \frac{2 r_A^{*2} - r_{IY}^{*2} - (D/T)^2}{4} \quad (2.52)$$

. agitateur-barrière

Les côtes extrêmes de la première pale sont $r^* = r_{IYO}^*$ et $r^* = r_{IPO}^*$; celles de la deuxième pale sont $r^* = r_{IY}^*$ et $r^* = \frac{D}{T}$ (voir figure 6-1 du chapitre 6). Un raisonnement identique au précédent nous conduit à :

$$\phi^*(\text{première pale}) = \frac{2 r_A^{*2} - r_{IYO}^{*2} - r_{IPO}^{*2}}{4} \quad (2.53)$$

$$\phi^*(\text{deuxième pale}) = \frac{2 r_A^{*2} - r_{IY}^{*2} - (D/T)^2}{4} \quad (2.54)$$

Les valeurs initiales de ω^* sont calculées à partir de celles de ϕ^* et de l'équation (2.39). Nous obtenons, pour les trois agitateurs :

$$\omega^* = -2 \quad \text{pour le liquide et la cuve,}$$

$$\omega^* = 0 \quad \text{pour l'axe et l'agitateur.}$$

Les valeurs initiales de η^* sont calculées à partir de celles de ϕ^* , ω^* et des équations rhéologiques. Ceci nous mène à :

$$\eta^* = 1 \quad \text{pour les modèles de Newton et Carreau,}$$

$$\eta^* \rightarrow \infty \quad \text{pour le modèle d'Ostwald de Waele et un fluide pseudoplastique,}$$

$$\eta^* = 0 \quad \text{pour le modèle d'Ostwald de Waele et un fluide dilatant.}$$

3.3.4 Régime permanent

En régime permanent, la condition temporelle n'est bien sûr plus utile puisque $\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} = 0$. Il est nécessaire par contre de préciser les conditions aux frontières géométriques du système. Pour le système d'équations considéré qui comprend six dérivées secondes spatiales de deux variables indépendantes, douze conditions limites indépendantes sont nécessaires.

Nous avons déjà traité du problème de la fonction courant qui, rappelons-le, est nulle sur l'axe et égale à des constantes sur les pales. Les valeurs aux frontières de ω^* et η^* sont calculées à partir de celles de ϕ^* .

Les trois variables sont ainsi définies en quatre lieux géométriques, soit l'axe, la paroi, les pales et les extrémités de pales : les douze conditions sont ainsi réunies (voir tableau 2.1). Sur ce tableau apparaissent :

- pour l'agitateur bipale, une constante ϕ_P^*
- pour l'ancre, deux constantes ϕ_P^* et ϕ_A^* ,
- pour l'agitateur-barrière, trois constantes ϕ_P^* , ϕ_{B1}^* et ϕ_{B2}^* .

Nous devons déterminer ces constantes. Pour cela, nous effectuons les calculs présentés en annexe 3.

4 - PRESENTATION DES METHODES NUMERIQUES -

4.1 GENERALITES

Nous n'allons pas ici passer en revue l'ensemble des méthodes numériques permettant de résoudre des équations non linéaires aux dérivées partielles : une telle revue apparaît dans les analyses bibliographiques de travaux spécialisés.

Simplement, nous avons choisi deux méthodes qui ont fait leurs preuves dans des problèmes analogues :

- la méthode de Gauss-Seidel ;
- la méthode implicite aux directions alternées (méthode A.D.I.).

4.2 METHODE DE GAUSS-SEIDEL

Il s'agit d'une méthode itérative implicite à substitutions successives. Les équations continues associées à leurs conditions de frontière doivent être écrites sous une forme discrète. Nous avons retenu ici des schémas aux différences finies.

Cette méthode a été employée un grand nombre de fois, et en particulier lors d'études d'agitation en cuves (LHOTA et coll., 1975 ; HIRAOKA et coll., 1978 ; HIRAOKA et coll., 1979 ; WALTON, 1981 ; WALTON et coll., 1981). Retenons qu'elle ne permet pas d'atteindre les valeurs du régime transitoire ; ainsi suppose-t-elle que $\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*}$ est nul, et que donc, seule la solution du régime permanent peut être obtenue.

TABLEAU 2.1 - Conditions de frontière géométriques

Agitateur	lieu	ϕ^*	ω^*	η^*		
				Newton	Ostwald de Waele	Carreau
bipale, ancre, barrière	axe	0	$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}}$	1	$ \omega^* ^{\eta-1}$	$(1 + \lambda^{*2} \omega^{*2})^{\frac{\eta-1}{2}}$
	paroi	ϕ_P^*	$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - 1$	1	$ \omega^* + 2 ^{\eta-1}$	$\frac{\sqrt{1 + \lambda^{*2}}}{(\omega^* + 2)^2} \sqrt{\frac{\eta-1}{2}}$
	extrémités interne et externe des pales	0, ϕ_A^* , ϕ_{B1}^* , ou ϕ_{B2}^*	$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} +$ $\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}}$	1	$ \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}} ^{\eta-1}$	$\frac{\sqrt{1 + \lambda^{*2}}}{r^{*2} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}}} \left(\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{r^{*2} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}}} \right)^2 \sqrt{\frac{\eta-1}{2}}$
bipale	pale	0				
ancre	pale	ϕ_A^*				
barrière	première pale	ϕ_{B1}^*	$\frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}}$	1	$ \omega^* ^{\eta-1}$	$(1 + \lambda^{*2} \omega^{*2})^{\frac{\eta-1}{2}}$
	deuxième pale	ϕ_{B2}^*				

. Choix du maillage

Les schémas aux différences finies imposent souvent des conditions contraignantes pour obtenir la solution avec une précision convenable ou même simplement ne pas diverger. Ainsi, en toute première analyse, le produit des pas d'espace $r^* \Delta_\theta \Delta_r$ devrait être inversement proportionnel au nombre de Reynolds : nous n'avons pas dans ce travail modifié le maillage lorsque Re augmentait.

Certains auteurs (DEYSARKAR et coll., 1978 ; HA MINH, 1977 ; MARTINEZ, 1979) préconisent le choix de maillages non réguliers ; le maillage devrait être plus serré autour de parois solides : précisons qu'il s'agit d'écoulements dans le cas de géométries simples, autour d'un cylindre ou entre deux plaques planes. Dans une cuve agitée, un maillage variable est plus difficile à mettre en oeuvre, mais contribuerait sûrement à diminuer les temps de calcul (HIRAOKA, 1980).

Nous avons retenu ici le maillage suivant : 40 points sur un rayon et 33 points sur un demi-cercle. Ceci, dans le domaine d'étude considéré conduit à 1320 points, régulièrement espacés. Cette répartition est celle qui, après des essais préliminaires, s'est avérée l'une des plus satisfaisantes à deux points de vue :

- maillage suffisamment serré pour que la précision soit convenable ;
- maillage suffisamment lâche pour que le temps de calcul sur ordinateur ne soit pas prohibitif.

Ce maillage apparaît sur la figure 2-2. L'axe d'agitation est défini par $i = 1$ et j quelconque. La paroi de la cuve, quant à elle, est représentée par $i = 40$ et j quelconque.

L'écriture discrète des équations est présentée en annexe 4.

4.3 METHODE A.D.I.

Contrairement à la précédente, cette méthode permet d'atteindre le régime transitoire. Son principe est le suivant :

- au temps t^* , la solution est connue ;
- au temps $t^* + \frac{\Delta_t}{2}$, seules les dérivées par rapport à la première variable sont modifiées (par exemple : $\frac{\partial \omega^*}{\partial r^*}$) ; celles par rapport à la seconde variable ne changent pas (par exemple : $\frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} (t^* + \frac{\Delta_t}{2}) = \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} (t^*)$).
- au temps $t^* + \Delta_t$, l'inverse est réalisé. Ainsi pour l'exemple choisi, obtiendrions-nous :

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} (t^* + \Delta t) = \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \left(t^* + \frac{\Delta t}{2} \right)$$

Cette méthode a été employée avec succès pour résoudre plusieurs problèmes :

- écoulement autour d'un cylindre par HA MINH (1977) et MARTINEZ (1979) ;
- détermination de profils de concentration et température par WOHLFAHRT et coll., (1979) ;
- problèmes de convection naturelle par CHU et CHURCHILL (1977) et OZOE et CHURCHILL (1972) ;
- problèmes de convection forcée par RICHARDS et TOWNSEND (1982) ;
- écoulement en cuve agitée par KURIYAMA et coll. (1982).

. Choix du maillage

Le maillage géométrique est le même que dans le cas précédent. Le pas de temps Δt doit en première approximation être proportionnel à $r^* \Delta r \Delta \theta$. Nous avons choisi dans la plupart des cas :

$$\Delta t = 0,0001$$

. Cas particulier de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson, équation (2.39) reliant ω^* et ϕ^* est vérifiée à chaque instant. Elle peut être résolue de deux façons différentes :

- par la méthode de Gauss-Seidel ;
- par la méthode A.D.I. en écrivant que :

$$\omega^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}} + \frac{\partial \phi^*}{\partial \tau^*} \quad (2.55)$$

Dans l'équation (2.55), τ^* est un temps fictif. Cette équation (2.55) est résolue jusqu'à ce que $\frac{\partial \phi^*}{\partial \tau^*}$ soit nul.

Dans ce travail, nous avons résolu l'équation de Poisson par la méthode de Gauss-Seidel.

5 - ALGORITHMES DE CALCUL -5.1 METHODE DE GAUSS-SEIDEL

Nous présentons l'organigramme correspondant à la mise en oeuvre de la méthode de Gauss-Seidel sur le tableau 2-2. En premier lieu, il faut fixer les caractéristiques géométriques de l'agitateur, le nombre de Reynolds et les paramètres rhéologiques caractéristiques du fluide.

Des valeurs initiales sont ensuite choisies ; nous avons vérifié que les résultats obtenus sont indépendants de ces conditions initiales. Celles-ci influent simplement sur le temps de calcul.

Une valeur est affectée à la fonction courant en paroi et sur les pales de l'agitateur. A l'issue de l'itération K, les valeurs calculées sont comparées avec celles obtenues lors de l'itération (K-1). En chaque point (i,j) les inégalités du tableau 2-2 doivent être vérifiées. Les résultats qui seront présentés dans les chapîtres 4 à 6 proviennent de calculs au cours desquels nous avons retenu :

$$\begin{aligned} \text{err}(\phi) &= 10^{-4} \\ \text{err}(\omega) &= 10^{-3} \\ \text{err}(\eta) &= 10^{-3}. \end{aligned}$$

Nous avons vérifié que ces écarts sont suffisamment faibles pour ne pas avoir d'incidence sur les résultats.

Si ces trois inégalités ne sont pas satisfaites, l'itération (K+1) est entamée, non pas à partir des valeurs de l'itération K, mais à partir des valeurs modifiées apparaissant sur le tableau 2-2. Les coefficients α , β , γ sont des coefficients de sur-relaxation destinés à accélérer le processus de convergence. Dans ce travail, ces coefficients ont varié de 0 à 0,7 (lorsque ces coefficients sont égaux à 0, la convergence est dite naturelle).

Nous devons ensuite vérifier la valeur de ϕ_p^* (voir annexe 3 et paragraphe 4 de l'annexe 4). Ainsi, pour un fluide newtonien et en paroi de cuve, la condition suivante doit être satisfaite :

$$\sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j} - \sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j} = 0 \quad (2.56)$$

Nous avons fixé comme critère que $\left| \sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j} - \sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j} \right|$ devait être inférieur à 10^{-3} . Dans le cas contraire, une procédure visant à modifier

Paramètres : modèle de Newton : Re_N
 modèle d'Ostwald de Waele : Re_{OW}, n
 modèle de Carreau : Re_C, n, λ^*
 et caractéristiques géométriques de l'agitateur

Choix des valeurs initiales : $\phi_{i,j}, \omega_{i,j}, \eta_{i,j}$

Hypothèses sur les constantes : bipale : ϕ_P^*
 ancre : ϕ_A^* et ϕ_P^*
 barrière : ϕ_{B1}^*, ϕ_{B2}^* et ϕ_P^*

L = 0

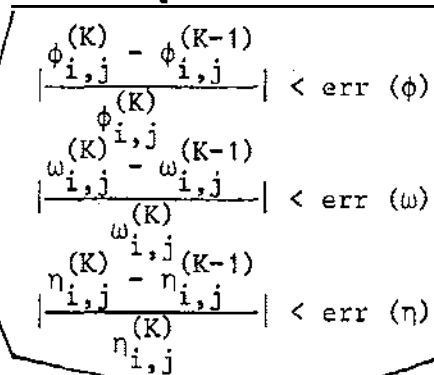
L = L + 1

K = 0

K = K + 1

Calcul d'une nouvelle distribution dans toute la cuve :

$\phi_{i,j}$ par équation (A.44)
 $\omega_{i,j}$ par équations (A.45) et (A.46) (modèle de Newton) ; par équations (A.45), (A.46) et (A.49) (modèle d'Ostwald de Waele) ; par équations (A.45), (A.46) et (A.51) (modèle de Carreau)
 $\eta_{i,j}$ par équations (A.47) et (A.48) (modèle d'Ostwald de Waele) ; par équations (A.47) et (A.50) (modèle de Carreau)
 $\phi_{i,j}, \omega_{i,j}$ et $\eta_{i,j}$ aux frontières géométriques par les conditions du tableau A-1.



$\phi_{i,j}^{(K)} = \phi_{i,j}^{(K-1)} + \alpha(\phi_{i,j}^{(K)} - \phi_{i,j}^{(K-1)})$
 $\omega_{i,j}^{(K)} = \omega_{i,j}^{(K-1)} + \beta(\omega_{i,j}^{(K)} - \omega_{i,j}^{(K-1)})$
 $\eta_{i,j}^{(K)} = \eta_{i,j}^{(K-1)} + \gamma(\eta_{i,j}^{(K)} - \eta_{i,j}^{(K-1)})$

Exemple choisi : fluide newtonien ; domaine \mathcal{D}_1
 $ECAR^{(L)} = \sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j} - \sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j}$

OUI $|ECAR^{(L)}| < \epsilon$ NON

Calcul des constantes :
 $\phi_P^*, \phi_A^*, \phi_{B1}^*$ et ϕ_{B2}^* par la méthode de Regula Falsi :

$$\phi_P^{*(L+1)} = \frac{\phi_P^{*(L)} ECAR^{(L-1)} - \phi_P^{*(L-1)} ECAR^{(L)}}{ECAR^{(L-1)} - ECAR^{(L)}}$$

Calculs de $v_{i,j}, \tau_{i,j}$
 $\phi_{V i,j}, Np$

FIN

la valeur de la fonction courant en paroi est suivie. Si, à l'itération L, la valeur en paroi $\phi_p^{*(L)}$ conduit à :

$$\sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j} - \sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j} = \text{ECAR}^{(L)} \quad (2.57)$$

et si, à l'itération (L-1), $\phi_p^{*(L-1)}$ avait permis d'obtenir $\text{ECAR}^{(L-1)}$, la valeur de la fonction courant en paroi pour débiter l'itération (L+1) est calculée par la méthode de Regula Falsi. Cette méthode suppose que les variations de ECAR avec ϕ_p^* sont linéaires : ainsi $\phi_p^{*(L+1)}$ donné sur le tableau 2-2 correspond-il au cas où $\text{ECAR} = 0$.

Lorsque en tout point (i,j) les valeurs des fonctions $\phi_{i,j}$, $\omega_{i,j}$ et $\eta_{i,j}$ ont été obtenues, d'autres grandeurs peuvent être calculées, comme nous allons le détailler au paragraphe 5.3.

5.2 METHODE A.D.I.

Nous présentons l'organigramme correspondant à la mise en oeuvre de cette méthode numérique sur le tableau 2.3. Comme précédemment, au début du programme, il faut définir les paramètres du système étudié. Les valeurs initiales calculées au paragraphe 3.3.3 sont introduites dans le programme.

Le calcul, à l'instant $(t^* + \Delta t)$ est mené de la façon suivante : à l'instant $t^* + \frac{\Delta t}{2}$, l'équation matricielle (A.52) (voir annexe 4) est résolue. Pour chaque j, une matrice tridiagonale 40 x 40 doit être inversée. Afin que cette matrice soit tridiagonale, nous choisissons le terme β à l'instant t^* ; ainsi la dérivée de ϕ^* par rapport à r^* , n'est pas définie à $t^* + \frac{\Delta t}{2}$, mais à t^* , ce qui est une exception à la convention adoptée au paragraphe 4.3. L'inversion des 33 matrices est alors effectuée en un temps très court et $\omega_{i,j}^{n+1/2}$ est connu en chaque point.

A l'instant $t^* + \Delta t$, c'est l'équation matricielle (A.53) de l'annexe 4 qui est résolue. Pour chaque i, une matrice tridiagonale 33 x 33 est inversée. Le terme α (paragraphe 3.1 de l'annexe 4) devrait être considéré à l'instant $t^* + \Delta t$; nous avons utilisé la valeur qu'il avait à l'instant t^* : il s'agit d'une deuxième exception à notre convention, motivée pour les mêmes raisons que précédemment.

Ces deux exceptions à la règle adoptée n'ont pas d'influence sur les résultats si le pas de temps est suffisamment petit.

Paramètres : modèle de Newton : Re_N
 modèle d'Ostwald de Waele : Re_{OW}, n
 modèle de Carreau : Re_C, n, λ^*
 et caractéristiques géométriques de l'agitateur

Calcul des valeurs au temps $t^* = 0$ par données du paragraphe 3.3.3

$n = 0 ; t^* = 0$

$n = n + 1 ; t^* = t^* + \Delta t$

Calcul de $\omega_{i,j}^{n+1/2}$: (exemple choisi : fluide newtonien)
 $J : 1 \rightarrow 33$
 Résolution de l'équation matricielle (A.52)
 (33 inversions de matrices 40×40)
 Conditions de frontières géométriques du tableau A-1

Calcul de $\omega_{i,j}^{n+1}$:
 $I : 1 \rightarrow 40$
 Résolution de l'équation matricielle (A.53)
 (40 inversions de matrices 33×33)
 Conditions de frontières géométriques du tableau A-1

$K = 0$

$K = K + 1$

Calcul de la distribution de $\phi_{i,j}$ par équation (A.44) et conditions de frontières géométriques du tableau A-1

$\phi_{i,j}^{(K)} = \phi_{i,j}^{(K-1)} + \alpha(\phi_{i,j}^{(K)} - \phi_{i,j}^{(K-1)})$

Decision: $\left| \frac{\phi_{i,j}^{(K)} - \phi_{i,j}^{(K-1)}}{\phi_{i,j}^{(K)}} \right| < \text{err}(\phi)$

NON

OUI

Vérification que ϕ_{p^*} est correct
 sinon diminution de Δt

Calculs de $v_{i,j}^{(n+1)}, \tau_{i,j}^{(n+1)}$
 $\phi_{V i,j}^{(n+1)}$ et N_p

Decision: $\frac{|\omega_{i,j}^{(n+1)} - \omega_{i,j}^{(n)}|}{\Delta t} < \text{ERR}$

NON

OUI

Calculs des valeurs du régime permanent
 et FIN

Lorsque $\omega_{i,j}$ est déterminé au temps $(t^* + \Delta t)$, $\phi_{i,j}$ est calculé en ce même temps par la méthode de Gauss-Seidel.

Grâce à l'utilisation de la méthode A.D.I., la fonction ϕ_p^* est en principe toujours correcte, puisque nous avons introduit l'égalité

$$\sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j} = \sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j}$$

au niveau des conditions de frontières géométriques dans le calcul de $\omega_{i,j}^{n+1}$. Les écarts éventuels proviennent d'un pas de temps trop grand. A chaque pas de temps, nous pouvons calculer les vitesses, les contraintes, la dissipation visqueuse et la puissance consommée.

Le calcul est ensuite poursuivi jusqu'à l'obtention du régime permanent qu'arbitrairement nous définissons de la façon suivante :

$$\left| \frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} \right| < 1\%,$$

ce qui correspond à :

$$\left| \omega_{i,j}^{(n+1)} - \omega_{i,j}^{(n)} \right| < 10^{-6}, \text{ lorsque } \Delta t = 0,0001.$$

5.3 CALCULS SUPPLEMENTAIRES

5.3.1 Vitesses

Les deux composantes de la vitesse sont déterminées à partir des formes discrètes des équations (2.8) et (2.9) :

$$(v_r)_{i,j} = \frac{\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j+1}}{2 r_i \Delta \theta} \quad (2.58)$$

$$(v_\theta)_{i,j} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 \Delta r} \quad (2.59)$$

Dans les chapîtres 4 à 6, nous présenterons les valeurs de la vitesse tangentielle dans un repère lié aux parois de la cuve. Pour obtenir ces valeurs, nous avons ajouté la vitesse de l'agitateur aux valeurs données par l'équation (2.59).

5.3.2 Contraintes

En utilisant les équations (2.13) et (2.14), nous obtenons :

$$(\tau_{rr})_{i,j} = \eta_{i,j} \frac{(v_r)_{i-1,j} - (v_r)_{i+1,j}}{\Delta r} \quad (2.60)$$

et

$$(\tau_{r\theta})_{i,j} = \eta_{i,j} \left[\frac{(v_\theta)_{i,j}}{r_i} - \frac{(v_\theta)_{i+1,j} - (v_\theta)_{i-1,j}}{2 \Delta r} - \frac{(v_r)_{i,j+1} - (v_r)_{i,j-1}}{2 r_i \Delta \theta} \right] \quad (2.61)$$

5.3.3 Taux de dissipation visqueuse

Le taux de dissipation visqueuse ϕ_v mesure le taux de transformation irréversible de l'énergie mécanique en énergie thermique : il s'exprime en s^{-2} et, dans notre cas, est donné par la relation :

$$\phi_v = (\gamma_{rr}^2 + \gamma_{r\theta}^2) \quad (2.62)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\phi_v = \frac{\tau_{rr}^2 + \tau_{r\theta}^2}{\eta^2} \quad (2.63)$$

qui, sous forme adimensionnelle, devient :

$$\phi_v^* = \frac{\tau_{rr}^{*2} + \tau_{r\theta}^{*2}}{\eta^{*2}} \quad (2.64)$$

La forme discrète est immédiate :

$$(\phi_v)_{i,j} = \frac{(\tau_{rr})_{i,j}^2 + (\tau_{r\theta})_{i,j}^2}{\eta_{i,j}^2} \quad (2.65)$$

Les valeurs aux frontières géométriques, des vitesses et des contraintes sont indiquées dans le tableau 2-4. Nous remarquerons que, dans certains cas, les valeurs doivent être calculées par des différences finies non centrées, ce qui amoindrit leur précision, en particulier à l'extrémité des pales.

5.3.4 Puissance dissipée

Il s'agit maintenant du calcul d'une grandeur intégrale.

Au chapitre 1, nous avons défini la puissance comme l'intégrale, sur la surface de l'agitateur, du travail par unité de temps exercé par le

TABLEAU 2-4 - Valeurs aux frontières des vitesses, des contraintes

Lieu	$(v_r)_{i,j}$	$(v_\theta)_{i,j}$	$(\tau_{rr})_{i,j}$	$(\tau_{r\theta})_{i,j}$
axe	0	r_1	$-2 \eta_{1,j} \frac{(v_r)_{2,j}}{\Delta r}$	$\eta_{1,j} \left[1 - \frac{(v_\theta)_{2,j} - r_1}{\Delta r} \right]$
paroi	0	0	$2 \eta_{40,j} \frac{(v_r)_{39,j}}{\Delta r}$	$\eta_{40,j} \frac{(v_\theta)_{39,j}}{\Delta r}$
pales	0	r_i	0	$(\tau_{r\theta})_{i,1} = - \eta_{i,1} \frac{(v_r)_{i,2}}{r_i \Delta \theta}$ $(\tau_{r\theta})_{i,33} = \eta_{i,33} \frac{(v_r)_{i,32}}{r_i \Delta \theta}$
extrêmités externes des pales	0	r_i	$- 2 \eta_{i,1} \frac{(v_r)_{i+1,1}}{\Delta r}$	$- \eta_{i,1} \left[\frac{(v_\theta)_{i+1,1} - r_i}{\Delta r} - \right.$ $\left. 1 + \frac{(v_r)_{i,2} - (v_r)_{i,32}}{2 r_i \Delta \theta} \right]$
extrêmités internes des pales	0	r_i	$2 \eta_{i,1} \frac{(v_r)_{i-1,1}}{\Delta r}$	$- \eta_{i,1} \left[\frac{r_i - (v_\theta)_{i-1,1}}{\Delta r} - 1 \right.$ $\left. + \frac{(v_r)_{i,2} - (v_r)_{i,32}}{2 r_i \Delta \theta} \right]$

mobile sur le fluide. Il est équivalent de dire que la puissance d'agitation est entièrement transmise par le mobile au milieu fluide au sein duquel, elle est entièrement dissipée sous forme de chaleur (NAGATA, 1975).

Dans ces conditions :

$$P = \int_{\text{volume cuve}} \eta \phi_v dW \quad (2.66)$$

W étant le volume total de la cuve.

L'élément dW s'écrit :

$$dW = r dr d\theta dz$$

ou encore $dW = D^3 dW^*$.

Sous forme adimensionnelle, (2.66) devient :

- pour un fluide newtonien

$$Np = \frac{4\pi^2}{Re_N} \int_{\text{volume}} \phi_v^* dW^* \quad (2.67)$$

- pour un fluide suivant la loi d'Ostwald de Waele,

$$Np = \frac{(2\pi)^{n+1}}{Re_{OW}} \int_{\text{volume}} \eta^* \phi_v^* dW^* \quad (2.68)$$

- pour un fluide suivant la loi de Carreau,

$$Np = \frac{4\pi^2}{Re_C} \int_{\text{volume}} \eta^* \phi_v^* dW^* \quad (2.69)$$

En termes discrets, dans le cas d'un fluide newtonien par exemple, nous obtenons :

$$Np = \frac{4\pi^2}{Re_N} \Delta r \Delta \theta \sum_{i=1}^{40} r_i \sum_{j=1}^{33} (\phi_v)_{i,j} \quad (2.70)$$

Remarque :

Les résultats des travaux antérieurs présentés au chapitre 1 montrent que, lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment petit, le produit $NpRe$ est indépendant de Re et, pour un fluide newtonien, ne dépend que des caractéristiques géométriques de l'ensemble cuve-agitateur. Si nous

considérons les équations (2.67) à (2.69), les termes $\int_{\text{volume}} \phi_v^* dW^*$ et $\int_{\text{volume}} \eta^* \phi_v^* dW^*$ doivent donc être indépendants de Re.

6 - CONCLUSION -

Nous venons de présenter, en détail, les hypothèses, équations, techniques numériques qui constituent le fondement de la méthode théorique que nous avons mise en oeuvre pour analyser la structure détaillée des écoulements de fluides consistants au sein de cuves agitées.

Au point de vue pratique, l'ensemble des programmes ainsi constitué a été exploité sur l'ordinateur MITRA 125 de l'Institut du Génie Chimique.

D'un point de vue général, nous tenons à faire remarquer que les hypothèses que nous avons dû émettre pour pouvoir traiter le problème sont peu nombreuses et peu contraignantes :

- au point de vue physique, nous nous limitons à des problèmes à deux dimensions, sans mouvement axial. La bibliographie présentée au cours du chapitre 1 nous a déjà indiqué que plusieurs systèmes d'intérêt industriel non négligeable satisfont très probablement à cette restriction ; il s'agit des mobiles à pales verticales, tels que les agitateurs à pales, à ancre, barrière. Ce sont ces mobiles que nous allons étudier.

- au point de vue numérique, nous avons retenu des techniques numériques traditionnelles, dont les hypothèses de base ont été largement vérifiées par l'usage.

Cependant, notre travail aurait largement prêté le flanc à la critique, si nous n'avions soumis les résultats ainsi obtenus à une confrontation avec l'expérience. Nous allons maintenant présenter les techniques et appareillages qui ont été mis en oeuvre dans ce but.

C H A P I T R E 3 :

METHODES ET DISPOSITIFS EXPERIMENTAUX

1 - INTRODUCTION

2 - DISPOSITIFS RHEOMETRIQUES. RESULTATS

3 - ETUDE ANEMOMETRIQUE

4 - DISPOSITIF D'AGITATION MECANIQUE

5 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce chapitre 3 traite des techniques et dispositifs utilisés au cours de cette étude. Ces moyens expérimentaux sont de trois ordres : rhéométriques, anémométriques et dispositifs de mesure de puissance.

Afin d'alléger la deuxième partie exclusivement consacrée à la présentation des résultats d'agitation, nous indiquons ici les résultats expérimentaux de rhéologie et d'anémométrie.

2 - DISPOSITIFS RHEOMETRIQUES. RESULTATS -

2.1 GENERALITES

La rhéométrie consiste en la détermination des propriétés rhéologiques d'une substance. Pour cela, le dispositif utilisé doit généralement créer un écoulement dont les caractéristiques sont parfaitement connues. Ces écoulements rhéométriques sont principalement des écoulements de Poiseuille et des écoulements de Couette.

- Écoulement de Poiseuille

Entre deux plans parallèles ou, plus souvent, dans un tube, un gradient de pression est créé parallèlement à l'axe. La mesure, en régime laminaire, du champ de vitesses ou du débit permet d'accéder aux caractéristiques rhéologiques du fluide.

- Écoulement de Couette

Il existe trois principaux dispositifs créant un écoulement de Couette. Celui-ci provient du mouvement relatif de deux parois solides qui peuvent être : deux plans parallèles, deux cylindres coaxiaux, un cône et une plaque plane. Le premier cas n'est jamais exploité en pratique mais l'écoulement correspondant serait assez peu différent de celui obtenu entre deux cylindres, dans la mesure où l'entrefer est petit (HARRIS, 1977).

Dans ce travail, nous avons utilisé un écoulement de Couette créé par le mouvement relatif de deux cylindres coaxiaux.

2.2 DESCRIPTION DE L'APPAREILLAGE

L'appareil de mesure est un viscosimètre Rheomat 15 : le cylindre intérieur tourne, le cylindre extérieur est fixe. Quinze vitesses de rotation connues avec précision sont possibles ; la variation de vitesse peut aussi être rendue automatique.

Le couple de torsion nécessaire pour maintenir le cylindre intérieur en rotation constante est lu sur un galvanomètre associé au moteur. Le cylindre intérieur est prolongé à sa base par un cône dont l'angle est très aigu (voir figure 3-1). Ceci permet, lors de l'introduction du mobile dans le liquide étudié, une élimination aisée des bulles d'air.

Le cylindre extérieur est situé dans une cuve dont la température est réglée par un fluide caloporteur en circulation. Comme l'entrefer entre les deux cylindres est petit (inférieur au centimètre dans la plupart des cas), le liquide est facilement maintenu à une température constante.

Des cylindres intérieurs de plusieurs dimensions peuvent être utilisés, ce qui autorise des mesures dans une large gamme de viscosités.

BIRD et coll. (1960) indiquent que le nombre de Reynolds de cet écoulement est donné par :

$$Re_v = \frac{\pi N DT \rho}{2 \mu} \quad (3.1)$$

Ce nombre de Reynolds doit rester inférieur à $\frac{41,3}{(1 - D/T)^{3/2}}$ pour que l'écoulement entre les deux cylindres demeure laminaire. Nous avons veillé à ce que cette condition soit satisfaite.

2.3 PROCEDURE DE MESURE

Pour chaque vitesse de rotation N , un couple est déterminé, \mathcal{C}_T . Ce couple correspond à l'écoulement dans l'entrefer et à l'écoulement dans le fond de la cuve. Nous pouvons écrire :

$$\mathcal{C}_T = \mathcal{C} + \mathcal{C}_F \quad (3.2)$$

qui devient :

$$\mathcal{C}_T = c_T \mathcal{C} \quad (3.3)$$

La constante C_T dépend des caractéristiques géométriques des deux cylindres : elle est appelée constante du viscosimètre et est fournie par le constructeur.

Le couple \mathcal{C} correspondant à l'écoulement dans l'entrefer est donné par :

$$\mathcal{C} = \frac{P}{2 \pi N} \quad (3.4)$$

Dans ce cas, P est la puissance consommée et nous avons indiqué la relation entre P , N , les caractéristiques géométriques du système et les propriétés rhéologiques du fluide au paragraphe 5 de l'annexe 1.

Rappelons que, pour un fluide newtonien :

$$P = 4 \pi^3 \mu N^2 D^3 \left(\frac{H}{D}\right) \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^2} \omega^2 \quad (3.5)$$

Ceci conduit à :

$$\mathcal{C}_T = 2 \pi^2 C_T \mu N D^3 \left(\frac{H}{D}\right) \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^2} \omega \quad (3.6)$$

ou à

$$\mathcal{C}_T = C_N \mu N \quad (3.7)$$

Ainsi, pour un fluide newtonien, les variations du couple mesuré avec la vitesse de rotation sont linéaires. Le produit $C_N \mu$ est la pente de la droite ; la constante C_N étant calculée grâce à l'équation (3.6), la détermination de la viscosité est immédiate.

Pour un fluide suivant la loi d'Ostwald de Waele, nous avons établi que (équation A.25 de l'annexe 1) :

$$P = m N^{1+n} D^3 \pi^2 \left(\frac{H}{D}\right) \left(\frac{4\pi}{n}\right)^n \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{2/n}} \omega^n \quad (3.8)$$

et donc :

$$\mathcal{C}_T = m N^n D^3 \left(\frac{H}{D}\right) C_T \frac{\pi}{2} \left(\frac{4\pi}{n}\right)^n \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{2/n}} \omega^n \quad (3.9)$$

Les variations de \mathcal{C}_T avec N ne sont pas linéaires ; en coordonnées logarithmiques par contre :

$$\text{Log } \mathcal{E}_T = n \text{ Log } N + \text{Log} \left\{ m D^3 \left(\frac{H}{D} \right) C_T \frac{\pi}{2} \left(\frac{4\pi}{n} \right)^n \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{2/n}} \right]^n \right\}, \quad (3.10)$$

les variations de $\text{Log } \mathcal{E}_T$ avec $\text{Log } N$ sont linéaires ; la pente de la droite indique la valeur de n . L'ordonnée à l'origine permet d'atteindre l'indice de consistance m .

Des développements analogues à celui présenté en annexe 1 permettent le calcul de la puissance consommée dans le cas d'un fluide pseudoplastique suivant la loi de Carreau, dans le cas aussi d'un fluide plastique suivant la loi de Bingham, etc.... Nos déterminations expérimentales s'étant limitées à un liquide newtonien et à un liquide pseudoplastique suivant la loi d'Ostwald de Waele, nous ne présentons pas ces développements.

Ecriture en termes de contraintes et gradients

Pour cet écoulement, la seule composante non nulle du tenseur de vitesse de déformation est :

$$\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \quad (3.11)$$

L'équation (A.12) de l'annexe 1 donne l'expression de v_θ :

$$v_\theta = - \frac{\pi N D}{1 - \left(\frac{T}{D} \right)^{2/n}} \left[\frac{T}{D} \left(\frac{2r}{T} \right)^{1-2/n} - \frac{2r}{D} \right] \quad (3.12)$$

Par conséquent, sur le cylindre intérieur ($r = \frac{D}{2}$), $\gamma_{r\theta}$ s'écrit :

$$\gamma_{r\theta} = - \frac{4 \pi N}{n} \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{2/n}} \quad (3.13)$$

La contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ sur ce cylindre intérieur est donnée par :

$$\tau_{r\theta} = \frac{2 \mathcal{E}_T}{C_T \pi H D^2} \quad (3.14)$$

Les résultats qui suivent sont présentés en termes de contraintes de cisaillement et de gradients de vitesse.

2.4 RESULTATS

2.4.1 Viscosité du fuel

Le fuel, comme beaucoup d'autres produits pétroliers, présente

l'avantage pour cette étude d'être un produit très visqueux et néanmoins de rester newtonien.

Nous avons utilisé un fuel caractérisé par une viscosité cinématique à 100°C inférieure à 40 centistokes. Dans la nomenclature américaine, ce fuel est appelé fuel lourd numéro 6.

Les mesures effectuées (figure 3-2) montrent que la contrainte de cisaillement observée varie linéairement en fonction du gradient de vitesse imposé dans le domaine étudié : gradients de vitesse inférieurs à 160 s⁻¹ et températures comprises entre 40°C et 80°C. Nous vérifions que le fuel est newtonien.

La figure 3-3 représente les variations de la viscosité en fonction de la température : cette viscosité décroît et une loi du type loi d'Arrhénius, suggérée par les théories moléculaires et vérifiée par BELLET (1973) et PRASERTVITAYAKIJ (1978), représente correctement nos résultats :

$$\mu = 1,87 \cdot 10^{-11} \exp\left(\frac{7730}{T}\right) \quad (3.15)$$

Nous avons rapproché nos résultats de ceux fournis par PAPACHRISTODOULOU et TRASS (1981) : la comparaison est faite sur la figure 3-4. Les légers écarts peuvent provenir de différences de composition entre les deux fuels.

2.4.2 Rhéologie du Carbopol

Nous avons retenu, comme fluide pseudoplastique, une variété de carbopol, le carbopol 934. Par rapport à d'autres produits pseudoplastiques, telle la carboxyméthylcellulose de sodium, cette macromolécule présente trois caractéristiques :

- ses propriétés rhéologiques n'évoluent pas de manière sensible dans le temps, pour autant que les observations soient faites dans un intervalle de trente jours ;
- ses propriétés ne sont pas modifiées par agitation mécanique ;
- il ne présente pas de caractère élastique : ainsi ne "monte"-t-il pas le long d'un arbre en rotation (effet Weissenberg).

Deux concentrations ont été retenues, 0,05% et 0,10% en masse et trois températures, 15°C, 20°C et 25°C. Après dépouillement des résultats bruts présentés sur les figures 3-5 et 3-6, et représentation sous la forme de la loi d'Ostwald de Waele, nous obtenons les indices de consistance m et de comportement fluide n du tableau 3-1.

TABLEAU 3-1 - Rhéologie du Carbopol 934

t (°C)	C = 0,05%			C = 0,10%			Viscosité de l'eau
	m	n	$\frac{m}{\mu_{\text{eau}}}$	m	n	$\frac{m}{\mu_{\text{eau}}}$	
15	6,30	0,47	5483	18,50	0,24	16101	$1,149 \cdot 10^{-3}$
20	5,30	0,50	5289	14,60	0,28	14571	$1,002 \cdot 10^{-3}$
25	4,20	0,52	4740	11,80	0,31	13318	$0,886 \cdot 10^{-3}$

Des comparaisons précises avec des mesures antérieures sont difficiles à effectuer car les variétés de carbopol varient largement.

Nous pouvons signaler cependant que, comme nos prédécesseurs (BELLET et SENDELIN, 1971 ; PRASERTVITAYAKIJ, 1978) nous observons que l'indice de consistance m diminue quand la température augmente et augmente avec la concentration en macromolécules ; l'indice de comportement n augmente légèrement avec la température et diminue lorsque la concentration en macromolécules augmente.

Enfin, BELLET et SENDELIN (1971) prédisent un rapport $\frac{m}{\mu_{\text{eau}}}$ indépendant de la température, μ_{eau} étant la viscosité du solvant prise à la même température que m. Dans le cas présenté ici, pour une concentration de 0,05% en masse, nos résultats s'écartent de 16% de la règle précédente ; pour une concentration de 0,1% en masse, ils s'en écartent de 21% ; l'indice de consistance décroît plus vite avec la température que la viscosité de l'eau.

3 - ETUDE ANEMOMETRIQUE -

3.1 TRAVAUX ANTERIEURS

En agitation de fluides visqueux, les méthodes de mesure de vitesse qui ont été employées, au niveau expérimental, sont :

- une technique électrochimique (SATAYAPRASERT, 1980) ;
- une méthode photographique avec traceur (MURAKAMI et coll., 1972 ; PETERS et SMITH, 1967).

La technique électrochimique consiste à repérer l'intensité du transfert de matière entre une sphère et le milieu environnant ; ce transfert est fonction des conditions hydrodynamiques au niveau de la sphère et des propriétés physiques du liquide. Le coefficient de transfert autour de la sonde est sensiblement proportionnel à la racine carrée du module de la vitesse.

Cette technique présente l'avantage d'être assez facile à mettre en oeuvre mais les sondes employées ont des dimensions telles (plusieurs millimètres) qu'il est impossible d'obtenir des mesures ponctuelles de la vitesse ; de plus cette méthode ne donne pas accès aux composantes de la vitesse, mais seulement à son module.

Les méthodes photographiques consistent à éclairer un plan de la cuve et à réaliser des photographies à des instants suffisamment rapprochés. Nous ne pouvons pas les utiliser ici, car le fuel et le carbopol ne sont pas transparents. Pour la même raison de non transparence des produits, nous ne pouvons pas retenir l'anémométrie à laser.

Nous avons en définitive utilisé l'anémométrie thermique à température constante, qui a déjà été retenue pour étudier des écoulements simples de fluides visqueux (JAMES et ACOSTA, 1970 ; METZNER et ASTARITA, 1967 ; SERTH et KISER, 1970 ; SMITH et coll., 1967).

3.2 PRINCIPE DE L'ANEMOMETRIE THERMIQUE

Un cylindre de petite taille (longueur voisine de 1 mm et diamètre voisin de 60 μ m) est maintenu à une température constante supérieure à celle du fluide d'environ 20°. Par convection forcée, il est refroidi par le fluide. La puissance électrique nécessaire pour le maintenir à température constante est mesurée par un appareillage électronique adéquat.

Cette puissance s'écrit :

$$P_{CTA} = E I \quad (3.16)$$

ou

$$P_{CTA} = \frac{E^2}{R_{CTA}} \quad (3.17)$$

La puissance est également proportionnelle au coefficient d'échange thermique h_m entre la sonde et le fluide,

$$P_{CTA} = h_m A \Delta T \quad (3.18)$$

Par conséquent, h_m est proportionnel au carré de la différence de potentiel entre les deux bornes de la sonde :

$$h_m = \frac{E^2}{R_{CTA} A \Delta T} \quad (3.19)$$

Or le transfert thermique entre un cylindre immergé dans un fluide et ce fluide en mouvement peut être représenté par une loi du type :

$$Nu = f (Re, Pr) \quad (3.20)$$

où

$$Nu = \frac{h_m D_S}{k_F}$$

et dans le cas d'un fluide newtonien :

$$Re = \frac{D_S V_\infty \rho_F}{\mu_F} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{C_{PF} \mu_F}{k_F},$$

dans le cas d'un fluide pseudoplastique suivant la loi d'Ostwald de Waele :

$$Re = \frac{\rho_F V_\infty^{2-n} D_S^n}{m}$$

et

$$Pr = C_{PF} \frac{m}{k_F} \left(\frac{V_\infty}{D_S} \right)^{n-1} \quad (\text{voir annexe 5})$$

Ainsi le transfert thermique est-il influencé par la température, par les caractéristiques de la sonde et du fluide et par la vitesse d'approche du fluide. Les caractéristiques de la sonde (broches, dimensions exactes, imperfection des cylindres,....) sont difficiles à évaluer. C'est pourquoi, l'équation (3.20) doit-elle être déterminée expérimentalement, à l'occasion

d'un étalonnage. Dans ce cas, une relation entre la tension E et la vitesse V_{∞} est recherchée.

3.3 ETALONNAGE DES SONDES ANEMOMETRIQUES

3.3.1 Appareillage

L'appareillage utilisé (voir figure 3-7) se compose d'un canal circulaire dont le diamètre moyen est égal à 1,80 m ; ce canal est situé à l'intérieur d'une cuve de 2 m de diamètre. La sonde est déplacée dans le canal où le fluide est immobile, à une vitesse constante.

La section du canal est rectangulaire : 0,15 m de hauteur, 0,10 m de largeur. Le canal circulaire est rempli de 50 litres de liquide, fuel ou carbopol. Celui-ci est maintenu à une température constante par un écoulement permanent d'eau dans la cuve extérieure. La régulation de température utilise un serpentin réfrigérant et un ensemble de résistances chauffantes de puissance 4,5 kW ; cette régulation est commandée en tout ou rien à partir d'un thermomètre à contact. Elle permet d'obtenir à l'intérieur du canal circulaire une température précise à 0,1°C. Notons ici que la mise en température des deux fluides est très longue, et demande pour des températures courantes (inférieures à 30°C) environ vingt heures.

Un axe central soutient le bras tournant qui porte la sonde. Cet axe est mis en rotation par un moteur d'entraînement de faible puissance (300 W). Les connexions électriques avec la sonde sont réalisées grâce à des contacts à mercure.

La vitesse est déterminée grâce à la mesure du temps nécessaire à la sonde pour effectuer un nombre entier de tours. Cette détermination est simple et précise : la vitesse de déplacement de la sonde est rigoureusement constante et elle est connue avec une précision de l'ordre de 0,2%. Ajoutons que le choix de ce grand diamètre est tel que la sonde avant de revenir dans son propre sillage doit parcourir 5,65 m, ce qui évite tout effet d'entraînement du liquide. Par ailleurs, les différences de position radiale et donc de vitesse des différentes parties de la sonde cylindrique sont négligeables.

3.3.2 Résultats

Nous avons utilisé des sondes à film cylindrique DISA 55 R11 maintenues à température constante par un pont de mesure DISA 55 M01. La tension E

a été relevée grâce à un voltmètre DISA 55 D31. Nous présentons un exemple de résultats sur les figures 3-8 à 3-10.

. Etalonnage dans du fuel

Les figures 3-8 et 3-9 sont consacrées à des étalonnages dans le fuel, à 20°C, avec deux sondes différentes. Dans les deux cas, les enregistrements sont comparables : la tension aux bornes de la sonde, portée en ordonnée, augmente avec la vitesse, portée en abscisse.

Par régression linéaire, nous avons déterminé la loi de refroidissement de la sonde 1 :

$$E = 2,68 + 4,67 V_{\infty}^{0,255} \quad (3.21)$$

et celle de la sonde 2 :

$$E = 2,13 + 3,88 V_{\infty}^{0,297} \quad (3.22)$$

La différence entre les deux lois provient de différences géométriques entre les deux sondes. Notons que les exposants 0,255 et 0,297 sont en bon accord avec l'ensemble des relations de transfert thermique entre un cylindre et le milieu environnant. En effet, généralement, l'équation (3.20) est telle que le nombre de Nusselt est proportionnel à la racine carrée du nombre de Reynolds. Donc, la tension E devrait être proportionnelle à $V_{\infty}^{0,25}$.

. Sensibilité directionnelle

Sur la figure 3-9, apparaît également le refroidissement longitudinal du film (position à 0°). Dans ce cas, l'angle α défini sur la figure 3-11 est égal à 0°.

Il a été montré plusieurs fois (références données par COMTE-BELLOT en 1973) que la loi de refroidissement était, quel que soit l'angle α , identique aux lois (3.21) ou (3.22), en remplaçant V_{∞} par $(V_{\infty})_{\alpha}$ qui est défini par :

$$(V_{\infty})_{\alpha} = V_{\infty} (\sin^2 \alpha + k^2 \cos^2 \alpha)^{1/2} \quad (3.23)$$

Le coefficient k est appelé coefficient de refroidissement longitudinal. La sonde 2 dont les lois de refroidissement apparaissent sur la figure 3-9 suit moyennement cette loi puisque le coefficient k varie de 0,34 à 0,42, admettant une valeur moyenne de 0,39. Les sondes à film cylindrique DISA 55 R11 ont généralement un coefficient k voisin de 0,40 (BERTRAND, 1977). Une étude théorique de transfert thermique (CHAMPAGNE, 1967, cité par COMTE-BELLOT, 1973) a montré que ce coefficient ne dépendait que du rapport diamètre du cylindre sur longueur du cylindre, et était indépendant des autres propriétés de la sonde, du fluide et de la température.

. Etalonnage dans du carbopol

La figure 3-10 représente la loi de refroidissement d'une sonde dans du carbopol de concentration 0,05% en masse et à 20°C ; l'indice de comportement fluide de ce produit est égal à 0,50 (tableau 3-1). La loi de refroidissement est :

$$E = 4,58 + 8,37 v_{\infty}^{0,267} \quad (3.24)$$

Cette loi est en tout point comparable aux équations (3.21) et (3.22). Le caractère non-newtonien du fluide ne modifie que très peu la loi de refroidissement de la sonde, ainsi que l'attestent les équations (A.64) et (A.65) de l'annexe 5.

L'étude du refroidissement longitudinal de cette sonde conduit à un coefficient k compris entre 0,34 et 0,40, comme dans le cas précédent.

. Effet de broches

Pour les trois sondes dont les résultats sont donnés ici, nous avons vérifié que les faire avancer dans le canal circulaire avec les positions A et C de la figure 3-11, donnait la même tension E . Par conséquent, l'influence des broches de la sonde n'est pas perceptible.

3.4 MESURE DE LA VITESSE EN CUVE AGITEE

Comme pour l'analyse théorique, nous avons choisi d'effectuer les mesures de vitesse dans un repère lié au mobile d'agitation : la sonde est donc fixée à l'agitateur et tourne avec lui.

Cette solution présente deux avantages importants :

- elle élimine toutes les difficultés que présente la mise en place d'une sonde immobile dans un milieu au sein duquel tourne un mobile de taille importante,

- elle situe la sonde dans un champ de vitesses permanent et évite les fluctuations périodiques, liées à la rotation du mobile que subirait une sonde fixe par rapport à la cuve.

Les mesures ont toutes été réalisées dans le cas d'écoulements en régime laminaire. Dans ces conditions et dans le cas le plus général de mouvements de direction quelconque, le problème comporte trois inconnues, les trois composantes v_r , v_θ et v_z de la vitesse.

Chaque mesure avec la sonde thermique fournit une information et donc pour disposer d'autant de données que d'inconnues, il faut réaliser, en chaque point, trois mesures correspondant à trois orientations indépendantes de la sonde. Nous avons retenu de disposer la sonde parallèlement aux trois axes de coordonnées du système cylindrique utilisé au cours de ce travail (voir figure 3-11).

Dans ces conditions, on peut écrire les trois équations :

$$v_A^2 = k^2 v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2 \quad (3.26)$$

$$v_B^2 = v_r^2 + k^2 v_\theta^2 + v_z^2 \quad (3.27)$$

$$v_C^2 = v_r^2 + v_\theta^2 + k^2 v_z^2 \quad (3.28)$$

Les équations (3.26) à (3.28) constituent un système de Kramer, dont la résolution conduit à :

$$|v_r| = \left(\frac{-v_A^2 (1 + k^2) + v_B^2 + v_C^2}{2 - k^2 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.29)$$

$$|v_\theta| = \left(\frac{v_A^2 - v_B^2 (1 + k^2) + v_C^2}{2 - k^2 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.30)$$

et
$$|v_z| = \left(\frac{v_A^2 + v_B^2 - v_C^2 (1 + k^2)}{2 - k^2 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.31)$$

Il est possible de simplifier grandement le problème si on suppose qu'il n'y a pas d'écoulement axial, $v_z = 0$. Dans ce cas, qui correspondra à la plus grande partie de nos expériences, le problème ne comporte plus que deux inconnues, ne nécessite donc plus que deux orientations de la sonde et conduit aux résultats,

$$|v_r| = \left(\frac{-k^2 v_A^2 + v_B^2}{1 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.33)$$

$$|v_\theta| = \left(\frac{v_A^2 - k^2 v_B^2}{1 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.34)$$

. Remarques

- La technique retenue ne permet pas de déterminer le signe de la vitesse ; ceci est une limitation de la méthode, car pour mettre en évidence les circulations dans la cuve, nous devons le supposer. Notons ici que les méthodes numériques ne présentent pas cet inconvénient.

- Les équations (3.30) et (3.34) expriment la vitesse tangentielle dans un repère lié à l'agitateur. Pour obtenir cette vitesse dans un repère fixe, nous avons supposé que la vitesse tangentielle du liquide était toujours inférieure à la vitesse tangentielle de l'agitateur prise sur le même rayon ; donc, en repère fixe, si v_z est nul :

$$v_\theta = 2 \pi N r - \left(\frac{v_A^2 - k^2 v_B^2}{1 - k^4} \right)^{1/2} \quad (3.35)$$

- Afin de nous assurer que le régime d'écoulement demeurerait bien laminaire, nous avons réalisé des mesures de fluctuations de vitesse à l'aide d'un voltmètre DISA 55 D35. Les fluctuations du signal brut sont toujours restées inférieures à 0,005 fois la valeur moyenne. En enlevant l'agitateur et en faisant tourner la sonde seule dans le liquide, nous avons observé des fluctuations du même ordre. Nous pensons donc que ces fluctuations sont dues à de légères vibrations du système et non pas à de la turbulence.

4 - DISPOSITIF D'AGITATION MECANIQUE -

Nous avons retenu, pour ce travail, une cuve cylindrique à fond plat remplie de 200 litres de liquide. Le diamètre de la cuve est de 634 mm ; la hauteur de liquide dans la cuve est égale à ce diamètre. Pour tenter d'éliminer le plus grand nombre de vibrations, la cuve est supportée par un châssis indépendant de celui qui soutient le mobile et son moteur d'entraînement. La thermorégulation est assurée par une circulation, dans une double enveloppe, d'un fluide caloporteur qui assure à l'intérieur de la cuve une homogénéité de température à 0,2°C près.

La géométrie des trois agitateurs utilisés sera précisée lors de la présentation des résultats dans la deuxième partie. Nous dirons simplement ici que l'épaisseur de l'acier inoxydable avec lequel ils sont construits est de 2 mm, valeur nécessaire pour qu'ils restent rigides. Les mobiles sont placés à une distance de 20 mm du fond de la cuve, leur partie supérieure affleure la surface libre du liquide.

La vitesse de rotation des agitateurs est déterminée par mesure du temps nécessaire pour accomplir un nombre entier de tours : cette méthode est très précise.

. Détermination de la puissance d'agitation

Le système de support adopté qui coince l'arbre entre deux pointes montées sur roulement, laisse le stator du moteur d'entraînement libre de suivre le rotor dans sa rotation (figure 3-12). Le couple nécessaire pour maintenir le stator immobile ou couple résistant, est égal au couple moteur, c'est-à-dire au couple nécessaire pour agiter le fluide, augmenté de l'ensemble des pertes.

Ces pertes comprennent les pertes par frottement dans le moteur, les pertes par effet Joule, les pertes dans les divers roulements, etc.... En toute rigueur, la somme des pertes, à vitesse de rotation donnée augmente légèrement avec le couple. En négligeant ces variations, nous avons réalisé la mesure des pertes à vide, en faisant varier la vitesse de rotation de l'agitateur dans la cuve vide. Pour les trois agitateurs, la masse nécessaire pour maintenir le stator fixe peut être représentée par l'équation suivante :

$$m_0 = 0,092 + 0,0186 N \quad (3.36)$$

Si m_1 est la masse nécessaire pour maintenir le stator fixe lorsque la cuve est remplie de liquide, le couple sur l'arbre d'agitation, \mathcal{C} , est alors :

$$\mathcal{C} = (m_1 - m_0) g l \quad (3.37)$$

La puissance consommée par le mobile devient alors :

$$P = (m_1 - m_0) g l p 2 \pi N \quad (3.38)$$

où p est le rapport entre les diamètres des poulies du système d'entraînement et de réduction de vitesse ($p > 1$). En portant (3.36) dans (3.38) et en tenant compte du fait que $l = 0,25$ m, on obtient la puissance en watts, soit :

$$P = 48,54 m_1 N - 4,466 N - 0,903 N^2 \quad (3.39)$$

N étant en tours. s^{-1} et m_1 en kilogrammes.

5 - CONCLUSION -

Au cours de ce chapitre, nous venons de décrire les techniques et dispositifs expérimentaux qui ont été mis en oeuvre au cours de ce travail.

Si les diverses mesures rhéologiques ou de puissance d'agitation ne présentent aucune originalité, par contre, à notre connaissance, l'anémométrie thermique, avec une sonde tournante n'avait encore jamais été utilisée, pour déterminer les profils de vitesse au sein de fluides consistants mécaniquement agités.

Nous tenons à dire ici que si, dans le principe, ce type de mesure ne présente pas de difficulté apparente - beaucoup moins en tout cas que lorsqu'il s'agit de fluides peu visqueux et d'écoulements turbulents - il nécessite cependant beaucoup de soin pour obtenir une précision des données qui soit convenable. Nous pouvons signaler, en particulier, les difficultés de thermostatage de ces milieux très visqueux ainsi que les difficultés de mise en place des sondes pour réaliser plusieurs orientations différentes, mais au même point.

Nous avons déjà indiqué que, dans ce travail, l'approche expérimentale a été surtout exploitée comme un moyen de confirmer les résultats obtenus par le calcul. Il n'en reste pas moins que la technique mise au point est maintenant disponible pour traiter de cas plus complexes pour lesquels l'approche théorique ne serait plus praticable. C'est ainsi que des travaux sont actuellement en cours, dans notre laboratoire, pour déterminer par anémométrie thermique, la structure des écoulements tridimensionnels générés par un ruban hélicoïdal.

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

Dans les trois premiers chapîtres de ce mémoire, nous venons de faire le point des connaissances actuelles et de présenter les méthodes, techniques et appareillages que nous avons conçus pour essayer de progresser.

Rappelons que notre propos est de contribuer à combler la lacune importante que nous avons notée en ce qui concerne la connaissance de la structure fine des écoulements de fluides consistants au sein de cuves mécaniquement agitées.

L'approche théorique que nous proposons est, par sa nature même, limitée au cas relativement simple d'écoulements plans (composante axiale nulle). Elle permet, cependant, d'étudier trois mobiles importants dans la pratique, les agitateurs à pales, à ancre et barrière. Nous verrons que l'approche théorique est extrêmement puissante et qu'elle fournit réellement la totalité des données susceptibles d'intéresser l'utilisateur.

Comme la voie théorique nécessite l'émission d'un certain nombre d'hypothèses, notre travail n'aurait pas été entièrement convaincant si nous n'avions soumis les résultats obtenus à confrontation avec des données expérimentales. Voilà pourquoi nous avons consacré une part importante de notre étude à la mise au point des techniques et dispositifs expérimentaux que nous venons de présenter et qui nous ont permis d'obtenir la confirmation nécessaire.

Rappelons, pour terminer, que si les techniques anémométriques n'ont été utilisées, ici, que pour confirmation de l'approche théorique, elles sont maintenant disponibles pour analyser le cas de systèmes pour lesquels la théorie demeure encore impuissante.

DEUXIEME PARTIE :

PRESENTATION DES RESULTATS

CHAPITRE 4 : AGITATEUR BIPALE

CHAPITRE 5 : AGITATEUR A ANCRE

CHAPITRE 6 : AGITATEUR BARRIERE

- INTRODUCTION DE LA DEUXIEME PARTIE -

Les méthodes numériques que nous avons présentées dans la première partie de ce mémoire permettent d'obtenir une quantité considérable de résultats qu'il n'est pas possible de retranscrire intégralement. Nous en avons donc sélectionné arbitrairement certains qui nous ont paru significatifs. Il n'en demeure pas moins que l'utilisateur d'un des mobiles que nous avons étudiés aurait intérêt à analyser la totalité des informations qui sont disponibles au Laboratoire de Génie Chimique, sous forme de tableaux de valeurs tels que l'ordinateur les a fournis.

Pour chacun des trois mobiles étudiés, nous avons généralement fait varier le nombre de Reynolds, les paramètres rhéologiques et la géométrie. En ce qui concerne ce dernier point, ceci nous amène à présenter successivement et à comparer entre eux divers résultats relatifs à des systèmes différents, qui n'ont plus la même forme, pour lesquels le nombre de Reynolds n'a plus la même signification puisque rapporté à une dimension caractéristique dont la définition a varié. Si ces comparaisons n'offrent pas toute la rigueur souhaitable, elles n'en sont pas moins précieuses pour le praticien qui doit rechercher la géométrie la plus utile pour résoudre le problème particulier qui se pose à lui. Nous en avons donc développé certaines, que nous présentons dans la suite sous la forme qui nous a paru la moins approximative (souvent à vitesse de rotation constante) et sans jamais revenir sur les imperfections que nous venons de signaler ici.

En début de chacun des trois chapîtres suivants, nous précisons la géométrie des systèmes étudiés et pour lesquels les résultats sont disponibles, même s'ils ne sont pas toujours détaillés dans ce mémoire.

La gamme de variation du nombre de Reynolds présente un borne supérieure, imposée par les méthodes numériques et au-delà de laquelle il n'y a plus convergence. De la même façon, pour un fluide pseudoplastique, il existe une borne inférieure pour les variations de l'indice de comportement fluide : nous avons constaté que cette borne inférieure est plus basse dans le cas d'un fluide dont le comportement est représenté par le modèle de Carreau que lorsqu'on utilise le modèle d'Ostwald de Waele.

Au chapitre 2, nous avons indiqué que la méthode A.D.I. permet d'évaluer le temps de mise en régime hydrodynamique d'une cuve agitée.

Les divers essais que nous avons réalisés ne nous ont cependant pas donné entière satisfaction au plan de la qualité. Nous discuterons de ce point dans le cours du chapitre 4 et nous nous limiterons, à titre d'exemple, à présenter les variations des fonctions courant et rotationnel à la paroi d'une cuve équipée d'un agitateur bipale.

De façon générale, les chapitres 4 à 6 sont de nature essentiellement descriptive : nous y présentons, pour une grande part, les résultats de l'analyse théorique et, beaucoup plus brièvement, les résultats expérimentaux avec lesquels les comparaisons sont possibles. Nous avons réservé la discussion des résultats et la recherche de conclusions un peu générales pour la troisième partie de ce mémoire.

La présentation des résultats pour l'agitateur bipale, pour l'agitateur à ancre et pour l'agitateur barrière se fera selon le même schéma. Nous donnerons successivement les résultats relatifs à :

- la fonction courant
- la fonction rotationnel
- les deux composantes de la vitesse
- la contrainte de cisaillement et la contrainte normale
- la viscosité apparente
- le taux de dissipation visqueuse
- la puissance d'agitation.

C H A P I T R E 4 :

AGITATEUR BIPALE

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - FONCTION COURANT
- 3 - FONCTION ROTATIONNEL
- 4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE
- 5 - CONTRAINTES
- 6 - VISCOSITE APPARENTE
- 7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE
- 8 - PUISSANCE D'AGITATION
- 9 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce chapitre est entièrement consacré à la présentation des résultats concernant l'agitateur bipale. La figure 4-1 précise la nomenclature relative à ce mobile, ainsi que les dimensions caractéristiques. Il est formé de deux pales planes verticales dont la hauteur est au moins égale à celle du liquide dans la cuve. Ces deux pales sont fixées sur un arbre central cylindrique de dimension $\frac{D_A}{T} = 0,0417$. Quatre rapports entre les diamètres de l'agitateur et de la cuve ont été retenus, soit 0,336, 0,508, 0,656 et 0,828 ; les analyses expérimentales ont été réalisées avec un mobile de diamètre 322 mm, ce qui correspond à $\frac{D}{T} = 0,508$.

Les résultats numériques qui sont présentés ici ont été obtenus à l'aide de l'une ou l'autre des deux méthodes numériques que nous avons utilisées ; elles fournissent des données strictement équivalentes. L'ensemble des résultats disponibles est indiqué sur les tableaux 4-1 et 4-2 ; nous choisissons de ne présenter que ceux qui nous semblent les plus significatifs.

2 - FONCTION COURANT -

2.1 GENERALITES

Rappelons que les lignes de courant sont les lignes le long desquelles la fonction courant est constante. Ces lignes sont en tout point tangentes à la vitesse. Nous présentons, sur la figure 4-2, les lignes de courant pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $Re = 0,082$ et pour un fluide newtonien. Il est clair, sur cette figure, qu'il existe dans la cuve deux zones différentes, séparées par la ligne fermée $\phi^* = 0$. Loin de l'agitateur, le liquide tourne autour de l'axe de la cuve. Dans la région voisine de l'agitateur, les lignes de courant sont fermées sur elles-mêmes, démontrant ainsi l'existence d'un tourbillon qui tourne avec l'agitateur. Précisons que ce résultat présente un caractère très général et a été retrouvé dans tous les cas que nous avons traités, avec des fluides newtoniens ou non.

2.2 INFLUENCE DE D/T

Les figures 4-3 et 4-4 représentent les variations de ϕ^* en fonction de la position radiale r^* pour deux angles différents : $\theta^* = 0$ (prolongement

TABLEAU 4-1 - Résultats disponibles pour l'Agitateur Bipale. Fluide newtonien

D/T	Re
0,336	0,036
	0,360
	3,60
	7,21
0,508	0,082
	0,100
	0,247
	0,823
	1,00
	2,47
	4,12
	8,23
	10,00
	12,35
	16,46
	24,69
	32,92
37,86	
44,45	
0,656	0,137
	1,37
	13,70
0,828	0,218
	2,18
	21,82

TABLEAU 4-2 - Résultats disponibles pour l'Agitateur Bipale.

Fluide non-newtonien. Rapport de diamètres $\frac{D}{T} = 0,508$

Modèle d'Ostwald de Waele		
n	Re	
0,7	0,1 1 10	
0,8	0,1 1 10	
0,9	0,1 1 10	
1,1	0,1 1 10	
1,2	0,1 1	
1,3	, 0,1	
Modèle de Carreau		
n	λ^*	Re
0,4	1	0,301
0,5	1	0,251
0,6	1	0,209
	2	
	10	
0,7	1	0,174
0,8	1	0,144
	2	
	10	
	100	
0,9	1	0,120

de l'agitateur) et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ (médiatrice de l'agitateur).

Pour les quatre tailles d'agitateurs, le cas présenté correspond à un fluide newtonien avec une vitesse de rotation de l'agitateur constante ($N = \frac{\mu Re}{\rho D^2}$, ce qui dans la cuve expérimentale, pour l'agitation du fuel à 30°C correspond à une vitesse de rotation égale à 9,65 tours.mn⁻¹). Dans les quatre cas, l'allure de variation est la même. Pour $\theta^* = 0$, soit sur l'agitateur, la fonction courant est nulle, puis à partir de l'extrêmité des pales, décroît jusqu'à la valeur négative correspondant à la paroi. Sur la médiatrice de l'agitateur, $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, la fonction courant augmente d'abord, passe par une valeur maximale et décroît ensuite jusqu'à la valeur de la paroi. La figure 4-4 montre que la taille de la zone de recirculation au voisinage de l'agitateur, limitée par la ligne $\phi^* = 0$, augmente avec le diamètre de l'agitateur. En outre, la valeur maximum de ϕ^* augmente avec $\frac{D}{T}$, indiquant des mouvements de plus en plus intenses. En nous inspirant du développement de l'annexe 2, nous pouvons écrire :

$$\phi_p^* = \phi_p^* - \phi^* \quad (\text{extrêmité des pales}) \quad (4.1)$$

$$\text{car } \phi^* (\text{extrêmité des pales}) = 0$$

$$\text{et donc } \phi_p^* = \int_{r^* = \frac{D}{T}}^{r^* = 1} (v_{\theta^*})_{\theta^* = 0} dr^* \quad (4.2)$$

Cette équation (4.2) indique que la fonction courant en paroi est égale au débit de fluide par unité de hauteur, passant entre l'extrêmité de la pale et la paroi de la cuve.

L'intégration de cette équation permet d'établir l'équation suivante, donnant la valeur de la vitesse moyenne entre l'extrêmité de la pale et la paroi de la cuve :

$$\langle v_{\theta^*} \rangle_{\theta^* = 0} = \frac{\phi_p^*}{1 - \frac{D}{T}} \quad (4.3)$$

Les valeurs correspondantes, exprimées dans le cas d'un repère lié à l'agitateur, sont rassemblées dans le tableau 4-3. La vitesse moyenne est fonction décroissante de la taille de l'agitateur, mais ces variations demeurent modérées.

TABLEAU 4-3 - Valeurs de $\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0}$;
Exemples donnés sur les figures 4-3 et 4-4

$\frac{D}{T}$	ϕ_P^*	$\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0}$
0,828	- 0,120	- 0,698
0,656	- 0,231	- 0,672
0,508	- 0,311	- 0,632
0,336	- 0,404	- 0,608

2.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

La figure 4-5 présente les lignes de courant dans le cas d'un fluide newtonien, d'un diamètre $\frac{D}{T} = 0,508$ et pour un nombre de Reynolds égal à 37,86. En comparant cette figure à la figure 4-2, deux différences essentielles apparaissent : la zone de recirculation est plus grande dans le cas du grand nombre de Reynolds, puisque la ligne $\phi^* = 0$ est pratiquement confondue avec la circonférence décrite par l'extrémité des pales. De plus, les tourbillons perdent de leur symétrie par rapport à la médiatrice de l'agitateur.

Rappelons ici que, dans le repère lié à l'agitateur, la cuve et le liquide tournent dans le sens des aiguilles d'une montre.

Les figures 4-6 et 4-7 présentent les variations de ϕ^* en fonction de la position radiale r^* dans le prolongement et sur la médiatrice de l'agitateur, pour un fluide newtonien et un rapport $\frac{D}{T} = 0,508$.

La valeur de la fonction courant en paroi augmente avec le nombre de Reynolds :

$$\phi_p^* = - 0,327 \quad \text{pour} \quad Re = 0,082$$

et
$$\phi_p^* = - 0,299 \quad \text{pour} \quad Re = 44,45$$

La figure 4-8 précise cette évolution. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, le débit entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve diminue.

2.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

En première approximation, pour une valeur donnée du nombre de Reynolds, la distribution de la fonction courant à l'intérieur de la cuve se révèle pratiquement indépendante de la valeur de l'indice de comportement fluide, dans la plage des valeurs couverte dans ce travail et qui est :

$$0,7 < n < 1,3 \quad \text{pour un fluide suivant la loi d'Ostwald de Waele}$$

$$0,4 < n < 1 \quad \text{pour un fluide suivant la loi de Carreau.}$$

2.5 MISE EN REGIME

Nous avons défini au paragraphe 3.3.3 du chapitre 2 les conditions initiales dans lesquelles se trouvait le système. Sur la figure 4-9, nous matérialisons pour ϕ^* ces conditions initiales. Il se trouve que, sur la position angulaire, $\theta^* = 0$ et pour $r^* = \frac{D}{T}$, existe une discontinuité. Cette discontinuité signifie qu'en un point de la cuve agitée, il y a création de débit.

En programmant la méthode A.D.I. avec de telles conditions initiales, le calcul diverge immédiatement. A cause des difficultés numériques rencontrées et sur lesquelles nous n'avons pas fait porter notre effort principal, cette question de mise en régime n'a pas été étudiée en détail.

Les conditions initiales ont été modifiées et nous nous sommes donc éloignés de la réalité physique du temps $t^* = 0$.

Les modifications suivantes ont été introduites :

$$\theta^* = 0, \quad r^* = \frac{D}{T} + 0,0246, \quad \phi^* = 0,167 \left[1,736 \cdot 10^{-3} - \left(\frac{D}{T} + 0,0737 \right)^2 \right]$$

$$r^* = \frac{D}{T} + 0,0491, \quad \phi^* = 0,333 \left[1,736 \cdot 10^{-2} - \left(\frac{D}{T} + 0,0737 \right)^2 \right]$$

En faisant cette approximation, nous écrivons que la fonction courant varie linéairement de l'extrémité de la pale jusqu'au troisième point de maillage après cette pale.

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \theta^* = 5,6^\circ \\ \theta^* = 174,4^\circ \end{array} \right\} r_A < r^* \leq \frac{D}{T}, \quad \phi^* = 0,167 (r_A^2 - r^{*2})$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \theta^* = 11,2^\circ \\ \theta^* = 168,8^\circ \end{array} \right\} r_A < r^* \leq \frac{D}{T}, \quad \phi^* = 0,333 (r_A^2 - r^{*2})$$

Pour ces dernières positions angulaires, nous écrivons que ϕ^* varie linéairement en fonction de θ^* pour les trois premières positions angulaires du maillage, sur les positions radiales correspondant au déplacement de l'agitateur.

Ces modifications devraient n'avoir pas d'incidence sur le temps de mise en régime calculé. Nous n'avons pas sur ce point précis, effectué de contrôle expérimental. Ceci fait que, les divers essais réalisés ne nous donnent pas entière satisfaction.

Les résultats fournis montrent néanmoins les allures de variation de ϕ^* . La figure 4-10 montre un exemple de résultats, en présentant les variations de la fonction courant en paroi, en fonction du temps. Les conditions sont : $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 1$ et $Re = 16,46$. Il est à noter que le démarrage conduit à de brusques variations de ϕ_p^* : passage de $-0,499$ à $-0,585$ sur les premiers pas de temps. Ensuite, la fonction courant croît régulièrement jusqu'à la valeur de $\phi_p^* = -0,306$ (valeur du régime permanent calculée par la méthode itérative de Gauss Seidel). Lorsque ϕ_p^* devient supérieur à $-0,312$ (valeur différente de $-0,306$ à moins de 2%), le calcul est arrêté. Le temps adimensionnel t^* requis pour obtenir cette valeur de la fonction courant en paroi est égal à 6,4 : il s'agit simplement, répétons-le, d'un ordre de grandeur du temps de mise en régime.

Dans le cas d'agitation de fuel dans la cuve de 200 litres, à 30°C, pour que le nombre de Reynolds soit égal à 16,46, N doit être égal à $0,32 \text{ s}^{-1}$ ($19,3 \text{ tours.mn}^{-1}$) et nous obtiendrions $t = 3,2 \text{ s}$ ($t = \frac{t^*}{2\pi N}$).

Nous pouvons noter la valeur très faible de ce temps de mise en régime qui correspond à peine à une révolution complète de l'agitateur dans la cuve.

3 - FONCTION ROTATIONNEL -

3.1 GENERALITES

De manière générale, quelle que soit la valeur du nombre de Reynolds, quelle que soit la nature du fluide, quel que soit le diamètre de l'agitateur, la fonction rotationnel ω^* présente toujours la même allure de variations.

Ainsi dans le prolongement de l'agitateur ($\theta^* = 0$), la figure 4-11, par exemple, montre que ω^* , nul sur l'arbre, augmente, passe par un maximum et décroît très rapidement jusqu'à un minimum assez important situé à l'extrémité de la pale : en ce point précis, l'écoulement est très fortement cisailé. Au-delà de l'agitateur, au sein du liquide, ω^* augmente à nouveau

pour atteindre la valeur en paroi, qui est toujours comprise entre -1 et -3.

Sur la médiatrice de l'agitateur ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$), la figure 4-12, par exemple, met en évidence la décroissance continue de ω^* , d'une valeur comprise entre 1 et 4 sur l'arbre à la valeur de paroi, comprise entre -1 et -4.

3.2 INFLUENCE DE D/T

Cette influence apparaît nettement sur les figures 4-11 et 4-12. On y observe que lorsque $\frac{D}{T}$ augmente, les valeurs maximales de ω^* augmentent, alors que les valeurs minimales diminuent. Cette proposition est aussi bien vérifiée pour $\theta^* = 0$ que pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$.

Il nous semble nécessaire d'insister sur l'importance que peut prendre, en valeur absolue, le rotationnel en bout de pale ; cette position s'avère ainsi, tout à fait remarquable. On peut noter par ailleurs l'existence, près de la paroi de la cuve, de larges zones à rotationnel constant tant que $\frac{D}{T}$ demeure relativement faible.

3.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Les figures 4-13 et 4-14 présentent un exemple d'influence du nombre de Reynolds. On observe des variations nettes dans la zone de recirculation avec, en particulier, une augmentation de la valeur du maximum, pour $\theta^* = 0$. La valeur du minimum en bout de pale est très peu affectée par les variations de Re mais, par contre, le rotationnel au sein du liquide devient plus rapidement constant pour les fortes valeurs de Re.

3.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

Comme le démontre la figure 4-15, les variations de l'indice de comportement provoquent des évolutions presque insensibles du profil de rotationnel, sauf en ce qui concerne les valeurs en bout de pale : plus n est faible, plus le minimum observé est accusé.

3.5 REGIME TRANSITOIRE

Nous avons représenté sur la figure 4-10 les variations de ω^* au point $r^* = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, en fonction de t^* , à partir de l'état initial du paragraphe 3.3.3 du chapitre 2. La fonction rotationnel varie brusquement de -2 à une valeur de l'ordre de -11 sur les premiers pas de temps, pour ensuite croître de façon monotone vers la valeur du régime permanent, $\omega^* = -2,51$.

Il est normal que les variations soient très fortes sur les premiers pas de temps. Néanmoins, si elles sont si prononcées, c'est probablement parce que l'initialisation ne représente pas la réalité physique : nous sommes en présence de phénomènes parasites, dûs à des raisons numériques.

4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE -

4.1 GENERALITES

Les composantes de la vitesse apparaissent sur les figures 4-16 à 4-24. Nous avons choisi de donner des résultats pour les trois cas de fluides étudiés :

- les figures 4-16 à 4-20 sont consacrées à un fluide newtonien, agité par le bipale de dimension $\frac{D}{T} = 0,828$, à un nombre de Reynolds égal à 21,82 ;
- les figures 4-21 et 4-22 concernent un fluide dilatant ($n = 1,1$) agité par le bipale de dimension $\frac{D}{T} = 0,508$ à $Re = 10$;
- les figures 4-23 et 4-24 présentent l'agitation d'un fluide pseudoplastique suivant la loi de Carreau ($n = 0,4$, $\lambda^* = 1$), par un bipale tel que $\frac{D}{T} = 0,508$, à $Re = 0,301$.

Ces neuf figures montrent clairement que la composante radiale est faible devant la composante tangentielle.

La figure 4-16 est une illustration des variations de v_r^* en fonction de r^* pour une position angulaire $\theta^* = 0,10$, c'est-à-dire légèrement en aval des pales. Le changement de signe de v_r^* indique que, le long de la pale, le liquide a tendance à s'écouler vers l'intérieur de la cuve ; par contre, à partir de l'extrémité de celle-ci, il s'écoule vers

l'extérieur. Les valeurs positives de v_r^* présentées sur cette figure sont les plus importantes pour l'ensemble de la cuve.

L'écoulement généré par l'agitateur bipale est donc essentiellement un écoulement tangential. Les commentaires ci-dessous ne concernent donc plus que la composante tangentielle.

4.2 INFLUENCE DE D/T

Nous avons représenté sur les figures 4-25 et 4-26 les variations de la composante tangentielle de la vitesse v_θ^* en fonction de la position radiale, pour un fluide newtonien, et pour les quatre géométries d'agitateur étudiées à même vitesse de rotation.

La figure 4-25 décrit v_θ^* dans le prolongement de l'agitateur ($\theta^* = 0$). Sur la pale, v_θ^* est égal à la vitesse de cette pale ; à partir de l'extrémité des pales, la décroissance de v_θ^* est d'autant plus rapide que $\frac{D}{T}$ est grand.

La figure 4-26 représente les variations de v_θ^* sur la médiatrice de l'agitateur ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$). Lorsque $\frac{D}{T}$ augmente, le maximum de v_θ^* augmente et est décalé vers les grands rayons. Cette observation confirme celle du paragraphe 2.2 annonçant une région de recirculation d'autant plus étendue que $\frac{D}{T}$ augmente.

4.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Les figures 4-27 et 4-28 présentent l'influence du nombre de Reynolds sur les profils de vitesse tangentielle, dans le cas d'un fluide newtonien. Pour $\theta^* = 0$, on observe que plus Re est important, plus les variations de v_θ^* sont lentes entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve. A nombre de Reynolds élevé, on note une importante zone où le profil de v_θ^* est sensiblement linéaire, ce qui correspond aux valeurs constantes du rotationnel observées précédemment (figure 4-13).

Pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, les variations de v_θ^* ne sont importantes que dans la zone de recirculation où la vitesse tangentielle augmente avec Re . On peut encore analyser les variations de v_θ^* avec la position ou le nombre de Reynolds en examinant les tableaux 4-4 et 4-5 qui sont consacrés en priorité, à une comparaison entre les valeurs calculées et les données de l'expérience, mais sur lesquels les évolutions apparaissent clairement.

TABLEAU 4-4 - Valeurs mesurées de v_{θ}^* et comparaison avec les valeurs numériques. Cas du fluide newtonien (fuel 31°C, $\rho = 1077 \text{ kg.m}^{-3}$)

$\theta^* = 0$

r^*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,509		0,509			0,509			0,509	
0,522	0,378	0,423	11,9	0,385	0,424	10,1	0,401	0,427	6,5
0,533		0,350			0,352			0,358	
0,631	0,087	0,144	65,5	0,108	0,181	67,6	0,122	0,215	76,2
0,730	0,067	0,070	4,5	0,074	0,129	74,3	0,081	0,156	92,6
0,877	0,018	0,013	38,5	0,027	0,055	103,7	0,081	0,066	22,7

$\theta^* = 0,59 (34^\circ)$

r^*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,201	0,227	12,9	0,227	0,260	14,5	0,263	0,280	6,4
0,312	0,243	0,286	17,7	0,289	0,325	12,5	0,330	0,348	5,5
0,435	0,258	0,293	13,6	0,291	0,325	11,7	0,319	0,341	6,9
0,509	0,264	0,268	1,5	0,230	0,294	27,8	0,357	0,307	16,3
0,631	0,231	0,207	11,6	0,197	0,222	12,7	0,277	0,231	19,9
0,730	0,203	0,155	31,0	0,126	0,161	27,8	0,159	0,164	3,1
0,877	0,100	0,073	37,0	0,098	0,074	32,4	0,098	0,071	38,0

TABLEAU 4-4 (suite)

 $\theta^* = 1,08 (62^\circ)$

r*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,279	0,236	18,2	0,304	0,285	6,7	0,371	0,298	24,5
0,312	0,285	0,272	4,8	0,321	0,322	0,3	0,402	0,337	19,3
0,435	0,277	0,271	2,2	0,308	0,308	0,0	0,391	0,327	19,6
0,509	0,197	0,253	28,4	0,293	0,280	4,6	0,362	0,300	20,7
0,631	0,174	0,208	19,5	0,225	0,213	5,6	0,281	0,226	24,3
0,730	0,124	0,162	30,6	0,193	0,154	25,3	0,223	0,158	41,1
0,877	0,111	0,080	38,8	0,107	0,069	55,1	0,113	0,067	68,7

 $\theta^* = 1,57 (90^\circ)$

r*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,230	0,244	6,1	0,251	0,288	14,7	0,284	0,290	2,1
0,312	0,241	0,276	14,5	0,284	0,325	14,4	0,317	0,333	5,0
0,435	0,247	0,271	9,7	0,279	0,313	12,2	0,328	0,337	2,7
0,509	0,218	0,251	15,1	0,298	0,284	4,9	0,299	0,310	3,7
0,631	0,167	0,203	21,6	0,184	0,211	14,7	0,197	0,228	15,7
0,730	0,135	0,155	14,8	0,109	0,146	33,9	0,130	0,154	18,5
0,877	0,070	0,076	8,6	0,050	0,061	0,22	0,059	0,063	6,8

TABLEAU 4-4 (suite)

 $\theta^* = 2,06 (118^\circ)$

r*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,219	0,251	14,6	0,221	0,279	26,2	0,220	0,273	24,1
0,312	0,263	0,293	11,4	0,267	0,333	24,7	0,296	0,338	14,2
0,435	0,291	0,287	1,4	0,300	0,335	11,7	0,324	0,360	11,1
0,509	0,282	0,261	8,0	0,284	0,302	6,3	0,299	0,330	10,4
0,631	0,219	0,196	11,7	0,196	0,213	8,7	0,247	0,230	7,4
0,730	0,173	0,140	23,6	0,126	0,138	9,5	0,200	0,150	33,3
0,877	0,121	0,063	92,1	0,086	0,052	65,4	0,095	0,060	58,3

 $\theta^* = 2,55 (146^\circ)$

r*	Re = 4,12			Re = 16,46			Re = 37,86		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,273	0,244	11,9	0,273	0,254	7,5	0,280	0,247	13,4
0,312	0,341	0,320	6,6	0,350	0,341	2,6	0,350	0,342	23,4
0,435	0,368	0,339	8,6	0,373	0,378	1,3	0,380	0,397	4,5
0,509	0,340	0,300	13,3	0,351	0,340	3,2	0,362	0,362	0,0
0,631	0,256	0,192	33,3	0,270	0,214	26,2	0,281	0,227	23,8
0,730	0,184	0,110	67,3	0,190	0,125	52,0	0,200	0,145	37,9
0,877	0,080	0,031	158,1	0,086	0,042	104,8	0,090	0,058	55,2

TABLEAU 4-5 - Valeurs mesurées de v_{θ}^* et comparaison avec les valeurs numériques. Cas du carbopol 0,05% en poids, 20°C,
 $\rho = 1005 \text{ kg.m}^{-3}$

$\theta^* = 0$

r^*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,509		0,509			0,509	
0,522	0,375	0,400	6,7	0,327	0,396	21,1
0,533		0,317			0,300	
0,631	0,145	0,137	5,8	0,166	0,124	33,9
0,730	0,080	0,068	17,6	0,120	0,084	42,9
0,877	0,052	0,014	271,4	0,068	0,029	134,5

$\theta^* = 0,59 (34^\circ)$

r^*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,250	0,226	10,6	0,287	0,260	10,4
0,312	0,316	0,297	6,4	0,298	0,326	9,4
0,435	0,341	0,308	10,7	0,334	0,308	8,4
0,509	0,332	0,273	21,6	0,299	0,261	14,6
0,631	0,282	0,195	44,6	0,211	0,173	22,0
0,730	0,124	0,137	10,5	0,130	0,114	14,0
0,877	0,072	0,059	22,0	0,080	0,045	77,8

TABLEAU 4-5 (suite)

 $\theta^* = 1,08 (62^\circ)$

r*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,224	0,232	3,6	0,260	0,282	8,5
0,312	0,263	0,278	5,7	0,310	0,323	4,2
0,435	0,267	0,276	3,4	0,316	0,293	7,8
0,509	0,246	0,255	3,7	0,280	0,250	12,0
0,631	0,211	0,204	3,4	0,237	0,166	42,8
0,730	0,180	0,154	16,9	0,200	0,106	88,7
0,877	0,093	0,071	31,0	0,099	0,041	141,5

 $\theta^* = 1,57 (90^\circ)$

r*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,230	0,235	2,2	0,291	0,284	2,5
0,312	0,268	0,275	2,6	0,340	0,327	4,0
0,435	0,279	0,272	2,6	0,353	0,303	16,5
0,509	0,251	0,252	0,4	0,315	0,258	22,1
0,631	0,208	0,204	2,0	0,243	0,161	50,9
0,730	0,175	0,155	12,9	0,207	0,095	117,9
0,877	0,129	0,071	81,7	0,130	0,033	293,9

TABLEAU 4-5 (suite)

 $\theta^* = 2,06 (118^\circ)$

r*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,214	0,237	10,7	0,250	0,274	9,6
0,312	0,269	0,286	6,3	0,307	0,337	9,8
0,435	0,280	0,283	1,1	0,324	0,331	2,2
0,509	0,213	0,258	21,1	0,246	0,278	13,0
0,631	0,160	0,198	23,8	0,176	0,156	12,8
0,730	0,121	0,145	19,8	0,129	0,083	55,4
0,877	0,082	0,066	24,2	0,094	0,025	276,0

 $\theta^* = 2,55 (146^\circ)$

r*	Re = 1			Re = 10		
	Exper.	Numer.	Ecart (%)	Exper.	Numer.	Ecart (%)
0,214	0,216	0,231	6,9	0,234	0,251	7,3
0,312	0,296	0,309	4,4	0,326	0,342	4,9
0,435	0,318	0,328	3,1	0,334	0,382	14,4
0,509	0,262	0,288	9,9	0,287	0,319	11,1
0,631	0,192	0,188	2,1	0,213	0,146	45,9
0,730	0,127	0,118	7,6	0,146	0,070	108,6
0,877	0,090	0,044	104,5	0,106	0,017	523,5

4.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

L'indice de comportement fluide a peu d'influence sur les variations de v_{θ}^* . Signalons simplement qu'à l'extrémité des pales, le gradient de vitesse $\frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial r^*}$ augmente en valeur absolue lorsque le caractère pseudo-plastique du fluide s'accroît : ce point sera commenté dans le paragraphe consacré à l'étude des contraintes.

4.5 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES

Les dispositifs et les techniques de mesure anémométriques ont été décrits au chapitre 3. Les expériences ont été réalisées dans le cas d'un rapport $\frac{D}{T} = 0,508$.

Il faut insister, tout d'abord, sur le fait que, à la précision des mesures près, les hypothèses émises pour réaliser le traitement numérique, ont toutes été vérifiées :

- la composante axiale n'est jamais perceptible ;
- à moins de 1% près, toutes les mesures se sont avérées indépendantes de la position axiale, tant que la distance au fond de la cuve est restée supérieure à 80 mm. Au-dessous de cette cote, la vitesse axiale n'est plus négligeable et la vitesse tangentielle est plus faible qu'aux autres côtes.

En outre, le fait que la composante radiale soit négligeable devant la composante tangentielle a été observé expérimentalement, ce qui confirme les résultats du calcul.

Nous présentons donc dans les tableaux 4-4 et 4-5 diverses valeurs de la composante tangentielle de la vitesse.

L'examen de ces tableaux, l'un relatif à du fuel de rhéologie newtonienne, l'autre à une solution pseudoplastique de carbopol, met en évidence un bon accord entre valeurs expérimentales et valeurs issues du calcul numérique. L'écart moyen en effet est dans le cas du fuel de 15,2%, dans le cas du carbopol de 17,2%. Signalons à ce sujet que les écarts des tableaux 4-4 et 4-5 représentent la différence en valeur absolue des deux vitesses, divisée par la plus petite des vitesses.

Deux points particuliers cependant, méritent un commentaire supplémentaire :

- à l'extrémité des pales ($\theta^* = 0$, $r^* = 0,509$), les valeurs numériques calculées correspondent aux vitesses tangentielles de la pale. Les valeurs expérimentales sont déterminées au sein du liquide, pour un rayon très proche de celui de l'extrémité de la pale (supérieur seulement de 4 mm, $r^* = 0,522$).

Dans les tableaux 4-4 et 4-5, nous rapportons la valeur numérique à l'extrémité des pales ainsi que celle obtenue pour le premier point de maillage suivant, $r^* = 0,533$. La valeur expérimentale est à chaque fois comprise entre ces deux valeurs numériques. Bien que dans cette zone, les gradients de vitesse $\left| \frac{\partial v_{\theta^*}}{\partial r^*} \right|$ soient importants, nous avons calculé par interpolation linéaire une valeur numérique pour $r^* = 0,522$. Cette vitesse calculée est toujours supérieure à la vitesse expérimentale ; ceci est normal car la concavité des courbes (voir figure 4-27) montre que, par interpolation linéaire, elle est légèrement majorée. Nous obtenons néanmoins un accord très satisfaisant.

- pour les petites valeurs de la vitesse, qui correspondent souvent aux grands rayons ($r^* = 0,877$, par exemple), les écarts entre valeurs expérimentales et valeurs numériques sont généralement importants. Rappelons à ce propos que les valeurs expérimentales des tableaux 4-4 et 4-5 représentent la différence entre la vitesse tangentielle de l'agitateur et une valeur issue des lectures sur les voltmètres (équation 3.35 du chapitre 3). Une faible erreur sur cette dernière provenant par exemple d'une imprécision de mise en place des sondes, d'incertitudes de lecture, etc..., entraîne un écart important. A titre d'exemple, pour $\theta^* = 1,08$ et $r^* = 0,877$ dans le cas où $Re = 37,86$ et pour le fluide newtonien, l'écart observé est de 68,7%. La valeur lue, et donc en repère tournant, correspondait à $|v_{\theta^*}| = 0,764$. La vitesse tangentielle calculée par analyse numérique était en repère tournant égale à 0,810. L'écart est alors de 6% : l'accord est donc bien meilleur que ne le laisse supposer une première lecture des tableaux 4-4 et 4-5.

Ajoutons que pour ces grands rayons, la valeur numérique est pratiquement toujours inférieure à l'expérimentale. En repère tournant, la valeur expérimentale est donc légèrement sous-estimée. Dans cette région, loin de l'agitateur, il est possible que la sonde en mouvement crée un sillage et que lorsqu'elle y retourne, elle enregistre une vitesse plus faible que la vitesse due uniquement à l'agitateur.

5 - CONTRAINTES -5.1 GENERALITES

Dans le cas général, les composantes des contraintes constituent un tenseur du second ordre dont la symétrie permet de réduire le nombre d'inconnues à six, trois contraintes normales et trois contraintes de cisaillement. Dans le cas plus simple, que nous considérons ici, d'écoulements plans, seules les composantes τ_{rr} , $\tau_{\theta\theta}$, $\tau_{r\theta}$ et $\tau_{\theta r}$ demeurent non nulles ; en raison de la symétrie du tenseur, $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}$, et on démontre facilement que pour un fluide incompressible $\tau_{rr} = -\tau_{\theta\theta}$. Ainsi, le problème que nous examinons ne comporte-t-il plus que deux inconnues.

Nous présentons sur les figures 4-29 à 4-33 les évolutions simultanées de la contrainte normale τ_{rr}^* ($\tau_{rr}^* = -2\eta^* \frac{\partial v_r^*}{\partial r^*}$) et de la contrainte de cisaillement

$$\tau_{r\theta}^* \left(\tau_{r\theta}^* = -\eta^* \left[r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_\theta^*}{r^*} \right) + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} \right] \right)$$

pour cinq angles différents compris entre 6° et 174° . Nous avons choisi l'exemple d'un fluide dilatant ($n = 1,1$) agité par un bipale tel que $\frac{D}{T} = 0,508$, à $Re = 10$.

. $\theta^* = 6^\circ$ (figure 4-29)

En aval de la pale, la contrainte normale présente un minimum très accentué pour les rayons juste inférieurs à celui correspondant à l'extrémité de la pale : en ces points, la composante radiale de la vitesse augmente assez fortement avec r^* : le fluide est chassé vers la paroi de la cuve.

La contrainte de cisaillement, quant à elle, passe par un maximum très marqué pour les rayons immédiatement supérieurs à celui correspondant à l'extrémité de la pale : c'est en ces points que la vitesse angulaire du fluide décroît le plus vite. Nous pouvons remarquer que, pour cette région, les deux contraintes atteignent des valeurs absolues du même ordre de grandeur, alors que la vitesse radiale est toujours plus faible que la vitesse tangentielle.

. $\theta^* = 45^\circ$ (figure 4-30)

Les variations de τ_{rr}^* et $\tau_{r\theta}^*$ en fonction de r^* sont nettement moins tourmentées. Hors la région du mobile, la contrainte normale τ_{rr}^* est

proche de zéro. La contrainte de cisaillement varie de $-0,94$ à $0,76$ en passant par un maximum, correspondant approximativement au rayon de l'extrémité des pales, égal à $0,94$; pour l'angle de 6° , le maximum était de $2,63$ (figure 4-29).

Cette figure nous permet d'illustrer l'influence de l'arbre d'agitation : alors que pour un angle de 6° (figure 4-29), au point de rencontre arbre-pale d'agitation, les deux contraintes étaient pratiquement nulles, pour un angle de 45° , elles sont en valeur absolue relativement importantes : $\tau_{rr}^* = 0,84$ et $\tau_{r\theta}^* = -0,94$. Ainsi, en-dehors de l'angle mort au raccordement arbre-pale, l'arbre exerce-t-il des contraintes appréciables sur le liquide.

Pour un rayon supérieur à $0,5$ environ, la contrainte de cisaillement apparaît relativement indépendante de r^* : ce phénomène se poursuit de 45° jusqu'à environ 120° , créant ainsi une région importante à contrainte constante.

. $\theta^* = 90^\circ$ (figure 4-31)

La contrainte normale est sensiblement nulle pour toutes les valeurs de la position radiale. La contrainte de cisaillement augmente comme dans le cas précédent, mais l'amplitude de variations est plus grande puisque $\tau_{r\theta}^*$ sur l'arbre est égal à $-1,86$.

. $\theta^* = 135^\circ$ (figure 4-32)

Nous avons pu observer que lorsque le nombre de Reynolds est faible, les évolutions de $\tau_{r\theta}^*$ pour θ^* égal à 135° sont identiques à celles obtenues pour un angle égal à 45° ; les évolutions de τ_{rr}^* sont identiques en valeur absolue, mais de signe opposé. Dans le cas présenté ici où le nombre de Reynolds est déjà élevé pour un régime laminaire, quelques différences apparaissent entre les figures 4-30 et 4-32 ; la contrainte normale atteint des valeurs absolues parfois plus importantes :

- le maximum de τ_{rr}^* est égal à $0,51$; le minimum pour $\theta^* = 45^\circ$ était de $-0,31$;
- le minimum de τ_{rr}^* est égal à $-0,84$; le maximum pour $\theta^* = 45^\circ$ était de $0,84$. Notons ici que dans la région de l'arbre, une symétrie presque parfaite existe.

La contrainte de cisaillement atteint un maximum de 1,23 (0,94 précédemment) et, pour cet angle, il n'est pas possible de discerner une zone où la contrainte serait uniforme.

. $\theta^* = 174^\circ$ (figure 4-33)

Les deux contraintes présentent toutes deux un maximum très marqué. La valeur de 2,71 pour $\tau_{r\theta}^*$ est très comparable à celle de la figure 4-29 ($\tau_{r\theta}^* = 2,53$ pour $r^* = 0,533$). Par contre le maximum de τ_{rr}^* ($\tau_{rr}^* = 1,31$ pour $r^* = 0,484$) est de l'ordre de la moitié de la valeur absolue du minimum de la figure 4-29.

Notons qu'en paroi de cuve, pour les deux positions $\theta^* = 6^\circ$ et $\theta^* = 174^\circ$, les deux contraintes sont très faibles, indiquant une agitation peu intense.

Dans toute la suite, nous limitons notre analyse à la contrainte de cisaillement.

5.2 INFLUENCE DE D/T

Les figures 4-34 et 4-35 représentent les variations de $\tau_{r\theta}^*$ en fonction de r^* , dans le prolongement de l'agitateur ($\theta^* = 0$) et sur la médiatrice de celui-ci ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$), à même vitesse de rotation pour les quatre agitateurs étudiés. Le liquide est newtonien.

Les allures de variation sont semblables, quel que soit le rapport $\frac{D}{T}$. De l'arbre d'agitation jusqu'à l'extrémité de la pale, $\tau_{r\theta}^*$ augmente, passe par un maximum puis décroît jusqu'à une valeur négative. A l'extrémité de la pale, $\tau_{r\theta}^*$ subit une augmentation brutale et atteint sa valeur maximale pour tout le volume de la cuve ; cette valeur maximale augmente très fortement avec le rapport $\frac{D}{T}$, puisque par exemple pour $\frac{D}{T} = 0,336$, $\tau_{r\theta}^*$ vaut 2,4 à l'extrémité des pales et pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $\tau_{r\theta}^*$ vaut 13,1.

Sur la médiatrice de l'agitateur, $\tau_{r\theta}^*$ augmente de l'arbre jusqu'à un point situé sur un rayon augmentant avec $\frac{D}{T}$, puis décroît très lentement jusqu'à la paroi de la cuve. Lorsque $\frac{D}{T}$ augmente, l'amplitude de variation de la contrainte de cisaillement devient plus importante ; d'autre part, la valeur en paroi pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ augmente avec $\frac{D}{T}$.

5.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

L'influence du nombre de Reynolds sur la contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}^*$ est illustrée ici par le tableau 4-6 et les figures 4-36 et 4-37. Le tableau 4-6 donne, pour le mobile de taille $\frac{D}{T} = 0,508$, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement, c'est-à-dire la valeur à l'extrémité des pales. Lorsque le nombre de Reynolds demeure petit ($Re < 2$), $\tau_{r\theta}^*$ n'est pas affecté par Re ; au-delà, $\tau_{r\theta}^*$ augmente légèrement avec Re . Pour une variation du nombre de Reynolds allant de presque 0 à 20 environ, $\tau_{r\theta}^*$ est multiplié par un peu moins de 1,1.

En paroi de cuve, quelle que soit la nature du fluide, les figures 4-36 et 4-37 montrent que la contrainte de cisaillement est minimale en face de l'extrémité des pales ($\theta^* = 0$ et $\theta^* = \pi$) ; à petit nombre de Reynolds ($Re < 1$), le maximum de $\tau_{r\theta}^*$ en paroi, est obtenu sur la médiatrice de l'agitateur. A haut nombre de Reynolds, ce maximum se déplace vers la pale amont et est situé entre 40° et 50° . Notons ici que les valeurs de $\tau_{r\theta}^*$ en paroi de cuve sont très faibles, comparées aux valeurs aux extrémités des pales.

5.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

La contrainte de cisaillement est très influencée par l'indice de comportement fluide. Considérons par exemple un fluide à comportement rhéologique de Carreau. Pour $\lambda^* = 1$, lorsque n passe de 0,4 à 1, à faible Re , $\tau_{r\theta}^*$ est multiplié par 3,3 (tableau 4-7).

TABLEAU 4-7 - Valeurs maximales de $\tau_{r\theta}^*$: variations en fonction de n (modèle de Carreau) dans le cas où $\frac{D}{T} = 0,508$; $0,12 < Re < 0,30$ et $\lambda^* = 1$

$$\theta^* = 0 \quad ; \quad r^* = 0,508$$

n	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\tau_{r\theta}^*$	1,85	2,39	2,96	3,57	4,42	5,19	6,08

TABLEAU 4-6 - Valeurs maximales de $\tau_{r\theta}^*$: variations en fonction de Re dans le cas ou $\frac{D}{T} = 0,508$

. n = 1

Re	0,082	0,247	0,823	2,47	4,12	8,23	12,53	16,46	24,69	32,92	37,86	44,45
$\tau_{r\theta}^*$	6,13	6,13	6,13	6,16	6,39	6,43	6,56	6,70	6,70	6,77	6,81	7,04

. n = 0,7 (modèle d'Ostwald de Waele)

Re	0,10	1,00	10,00
$\tau_{r\theta}^*$	3,76	3,76	4,39

. n = 0,8 (modèle d'Ostwald de Waele)

Re	0,10	1,00	10,00
$\tau_{r\theta}^*$	4,47	4,49	4,69

. n = 0,9 (modèle d'Ostwald de Waele)

Re	0,10	1,00	10,00
$\tau_{r\theta}^*$	5,26	5,29	5,29

Les figures 4-38 et 4-39 donnent les variations de $\tau_{r\theta}^*$ et τ_{rr}^* en fonction de r^* pour deux positions angulaires ($\theta^* = 6^\circ$; $\theta^* = 45^\circ$) dans le cas d'un fluide pseudoplastique ($n = 0,4$). Si nous comparons ces figures à celles obtenues pour les mêmes positions angulaires (figures 4-29 et 4-30), mais avec $n = 1,1$, il apparaît que les valeurs absolues des contraintes sont en tout point supérieures dans le cas où $n = 1,1$. (Les nombres de Reynolds sont différents, mais nous avons vérifié au paragraphe précédent la faiblesse de l'influence de Re .)

6 - VISCOSITE APPARENTE -

6.1 GENERALITES

Rappelons que nous avons choisi, dans la mise en équation retenue ici, d'utiliser le concept de fluide newtonien généralisé et de viscosité apparente. La viscosité apparente n'est pas une propriété physique du fluide, mais une fonction de la position ou, plus précisément, de l'état des contraintes au point considéré. Ainsi, pour un fluide pseudoplastique, la viscosité apparente est-elle d'autant plus faible que les contraintes sont importantes ; les variations sont inversées dans le cas d'un fluide dilatant.

Dans ces conditions, la viscosité apparente apparaît comme un indice de l'état des contraintes au point considéré. Cet indice, de caractère scalaire, est donc global et par là même, relativement simple. Précisons cependant qu'il subit des variations d'autant plus intenses que le caractère non newtonien du fluide est accentué. A contrario, cet indice n'a plus aucune signification pour un fluide newtonien.

6.2 RESULTATS

La figure 4-40 représente les variations de la viscosité apparente η^* en fonction de r^* pour $\theta^* = 0$ (prolongement de l'agitateur).

Pour un fluide pseudoplastique, la viscosité apparente est importante sur l'arbre d'agitation, elle décroît ensuite, augmente vers un maximum local puis devient minimale à l'extrémité de la pale. De là, elle augmente régulièrement jusqu'à la valeur de la paroi. Deux séries de

résultats sont présentés en ce qui concerne le cas pseudoplastique (ici, $n = 0,7$) : $Re = 0,1$ et $Re = 1$. Sauf pour les extrema, le nombre de Reynolds a assez peu d'influence sur la viscosité apparente. Pour $Re = 0,1$, la valeur de η^* à la paroi de la cuve est très importante, $\eta^* = 7,08$; à faible nombre de Reynolds, il est probable que cette zone est très peu agitée.

Pour un fluide dilatant, des résultats inverses sont obtenus : maximum à l'extrémité de la pale, minimum pour un rayon r^* égal à 0,902.

On peut noter que la figure 4-41 présente les mêmes évolutions en fonction de la position radiale, mais pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, soit sur la médiatrice de l'agitateur. A partir de $r^* = 0,3$, la viscosité apparente demeure sensiblement constante jusqu'à la paroi de la cuve et égale à une valeur proche de 1 pour les trois cas présentés. Rappelons ici que les deux contraintes étaient sensiblement constantes pour la région considérée : voir figures 4-31 et 4-35.

Sur la figure 4-41, un maximum de η^* égal à 2,93 est observé pour $r^* = 0,115$ dans le cas où $n = 0,7$ et $Re = 0,1$. Les contraintes dans cette zone sont, en effet, extrêmement faibles ($\tau_{rr}^* = -0,13$ et $\tau_{r\theta}^* = 0,02$).

Sur la figure 4-42, nous avons représenté les variations de la viscosité apparente en paroi en fonction de l'angle θ^* . Pour le cas dilatant ($n = 1,3$; $Re = 0,1$), l'amplitude de variation de η^* est relativement faible (de 0,52 à 0,92). Par contre pour un fluide pseudoplastique l'amplitude des variations de η^* est beaucoup plus importante (par exemple, pour $Re = 0,1$ et dans le cas présenté ici, $n = 0,7$, η^* évolue de 1,16 à 7,28). Les maxima sont obtenus dans le prolongement exact de l'extrémité des pales pour un nombre de Reynolds faible. Pour $Re = 1$, le maximum est obtenu pour $\theta^* = 174^\circ$ ($\eta^* = 3,76$) ; pour $Re = 10$, il est obtenu pour $\theta^* = 163^\circ$ ($\eta^* = 3,76$).

Ces résultats montrent, qu'en paroi de cuve, il existe une zone à faibles contraintes. Toutefois, lorsque Re augmente, les figures 4-36 et 4-37 montrent que les contraintes de cisaillement en paroi tendent à s'uniformiser ; il en va de même pour les viscosités apparentes.

7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE -

7.1 GENERALITES

Le taux de dissipation visqueuse représente la quantité d'énergie, par unités de temps et de volume, transformée irréversiblement en chaleur par l'intermédiaire des frottements visqueux. Il est évidemment intéressant de connaître la distribution de cette grandeur dans la cuve pour préciser dans quelles zones les dégradations sont les plus intenses. Par ailleurs, cette donnée suggère à quels endroits de la cuve existent des risques d'échauffement local, si la cinétique de transfert de chaleur vers l'extérieur (que nous n'avons pas étudiée) n'est pas suffisamment rapide.

7.2 RESULTATS

Nous avons choisi d'illustrer les variations de ϕ_v^* en présentant les résultats relatifs aux conditions $\frac{D}{T} = 0,508$, $Re = 0,1$, $n = 0,7$ (modèle d'Ostwald de Waele). Les variations en fonction de r^* , pour cinq positions angulaires, apparaissent sur les figures 4-43 à 4-47. Un maximum pour ϕ_v^* apparaît pratiquement toujours pour $r^* = 0,508$; ce maximum décroît fortement lorsque θ^* passe de 0 à $\frac{\pi}{2}$; il augmente ensuite de $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ à $\theta^* = \pi$. Notons que pour les faibles valeurs de Re , les profils sont sensiblement symétriques par rapport à la médiatrice de l'agitateur : les figures 4-43 et 4-47 d'une part, les figures 4-44 et 4-46 d'autre part, sont pratiquement identiques.

Le tableau 4-8 donne les valeurs maximales du taux de dissipation visqueuse, pour l'ensemble de la cuve, correspondant aux point $r^* = \frac{D}{T} = 0,508$, $\theta^* = 0$.

Nous observons d'abord que ces maxima sont importants (plusieurs dizaines d'unités) par comparaison avec les valeurs observées ailleurs dans la cuve. En second lieu, nous notons que le maximum de dissipation visqueuse ϕ_v^* augmente avec le nombre de Reynolds : ce résultat doit être nuancé en notant que plus l'indice de comportement est grand, moins l'augmentation de ϕ_v^* est rapide. Enfin, ϕ_v^* maximum diminue lorsque n augmente, quel que soit le nombre de Reynolds.

La figure 4-48 montre, pour un angle égal à 6° et pour $\frac{D}{T} = 0,508$, les variations de ϕ_v^* en fonction de r^* pour plusieurs fluides de rhéologies

TABLEAU 4-8 - Valeur de la dissipation visqueuse ϕ_v^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$
 $\theta^* = 0, r^* = 0,508$

n = 0,7

Re	0,1	1	10
ϕ_v^*	58,6	60,2	134,8

n = 0,8

Re	0,1	1	10
ϕ_v^*	48,7	51,3	74,0

n = 0,9

Re	0,1	1	10
ϕ_v^*	42,3	44,4	57,9

n = 1

Re	0,100	0,247	0,823	2,47	4,12	8,23	12,35	16,46	24,67	32,92	37,86	44,45
ϕ_v^*	37,1	37,7	38,4	44,0	53,8	60,4	63,7	66,1	62,6	61,3	61,2	64,9

n = 1,1

Re	0,1	1	10
ϕ_v^*	32,7	33,7	46,1

n = 1,2

Re	0,1	1
ϕ_v^*	30,3	30,7

n = 1,3

Re	0,1
ϕ_v^*	27,2

différentes. On observe dans tous les cas, un maximum au droit de l'extrémité des pales. Nous avons retenu pour cette figure des exemples où le nombre de Reynolds demeure faible et n'a encore que peu d'influence sur ϕ_v^* ; pour $r^* = 0,508$, il apparaît clairement que ϕ_v^* diminue lorsque n augmente (pour $n = 0,4$, $\phi_v^* = 11,5$; pour $n = 0,7$, $\phi_v^* = 8,5$ et pour $n = 1,3$, $\phi_v^* = 5,9$). Cette tendance est déjà inversée pour $r^* = 0,607$ où $\phi_v^* = 1,2$ pour $n = 0,4$, $\phi_v^* = 1,5$ pour $n = 0,7$ et $\phi_v^* = 2,0$ pour $n = 1,3$.

8 - PUISSANCE D'AGITATION -

Rappelons que la puissance d'agitation constitue un résultat macroscopique, obtenu par intégration sur l'ensemble de la cuve. C'est une donnée importante pour le praticien et assez facile à mesurer ; nous allons donc pouvoir ici effectuer une deuxième série de comparaisons entre résultats théoriques et expérimentaux.

Nous présentons dans les tableaux 4-9 et 4-10 l'ensemble des résultats obtenus par le calcul et dans les tableaux 4-11 et 4-12 les données de l'expérience, respectivement pour les fluides newtoniens et non-newtoniens.

Les résultats les plus complets sont ceux fournis par la théorie. Nous observons que, quelles que soient la géométrie considérée et la rhéologie du fluide, le produit $NpRe$ a tendance à augmenter avec Re , de manière presque imperceptible à faible Re ($Re < 1$), de plus en plus vite au fur et à mesure que Re croît.

Si nous nous en tenons aux très faibles nombres de Reynolds, les résultats du tableau 4-9 montrent que, lorsque $\frac{D}{T}$ augmente, le produit $NpRe$ commence à diminuer, passe par une valeur minimale, puis augmente ensuite.

Que ce soit pour le modèle d'Ostwald de Waele ou pour le modèle de Carreau à λ^* constant, $NpRe$ augmente nettement avec l'indice de comportement fluide. Ajoutons ici que, à n constant, $NpRe$ diminue lorsque λ^* augmente.

Volontairement, nous nous limitons ici à de brefs commentaires, car le sujet sera repris au chapitre 8. Nous voulons simplement faire remarquer que les évolutions de $NpRe$ avec Re et n sont très semblables à

TABLEAU 4-9 - Puissance d'agitation dans le cas de fluides newtoniens

D/T	Re	Np	NpRe
0,336	0,036	5893	212
	0,360	592,8	213
	3,60	69,33	250
	7,21	37,15	268
0,508	0,082	2170	178
	0,100	1751	175
	0,247	723,5	179
	0,823	218,0	179
	1,00	175,8	176
	2,47	75,0	185
	4,12	46,79	193
	8,23	25,07	206
	10,00	20,08	201
	12,35	17,35	214
	16,46	13,34	220
	24,69	9,136	226
	32,92	6,993	230
	37,86	6,140	232
44,45	5,318	236	
0,656	0,137	1328	182
	1,37	133,1	182
	13,70	14,67	201
0,828	0,218	1041	227
	2,18	104,3	228
	21,82	11,06	241

TABLEAU 4-10 - Puissance d'agitation dans le cas de fluides non-newtoniens

$$\frac{D}{T} = 0,508$$

Modèle d'Ostwald de Waele				
n	Re	Np	NpRe	
0,7	0,1	973,8	97,4	
	1	98,44	98,4	
	10	11,35	113,5	
0,8	0,1	1189	119	
	1	120,2	120	
	10	13,73	137	
0,9	0,1	1441	144	
	1	145,5	146	
	10	16,64	166	
1,1	0,1	2127	213	
	1	214,3	214	
	10	24,32	243	
1,2	0,1	2606	261	
	1	260,6	261	
1,3	0,1	3150	315	
Modèle de Carreau				
n	λ^*	Re	Np	NpRe
0,4	1	0,301	422,8	127
0,5	1	0,251	536,0	134
0,6	1	0,209	686,3	143
	2		572,9	120
	10		320,5	66,9
0,7	1	0,174	878,9	153
0,8	1	0,144	1098	159
	2		1007	146
	10		749,9	108
	100		474,0	68,5
0,9	1	0,120	1389	167,0

TABLEAU 4-11 - Puissance d'agitation dans le cas du fuel : détermination expérimentale. $\frac{D}{T} = 0,508$

Re	Np	NpRe
2,88	63,10	182
5,13	40,74	209
7,24	25,70	186
9,12	20,89	191
12,02	15,14	182
16,22	11,48	186
19,50	10,23	199
23,44	10,00	234
32,36	8,13	263
63,10	6,31	398

TABLEAU 4-12 - Puissance d'agitation dans le cas du carbopol : détermination expérimentale. $\frac{D}{T} = 0,508$; $n = 0,5$

Re	Np	NpRe
3,16	20,42	64,5
7,08	10,23	72,4
10,00	7,41	74,1
15,85	5,89	93,4
19,50	5,37	104,7
23,44	4,68	109,7
31,60	4,47	141,3
63,10	3,80	239,8

celles de $\tau_{r\theta}^*$ en bout de pale. Comme l'essentiel de la puissance mécanique est dissipé au niveau de l'extrémité des pales, cette observation nous semble raisonnable.

Comparaison avec les déterminations expérimentales

La méthode de mesure de puissance a été décrite au chapitre 3. La figure 4-49 représente, en coordonnées logarithmiques, les variations du nombre de puissance N_p avec le nombre de Reynolds Re pour les deux liquides testés. L'accord entre les valeurs expérimentales et les valeurs numériques (cas du fuel, $n = 1$) est tout à fait satisfaisant.

9 - CONCLUSION -

Nous venons de présenter les résultats principaux des divers travaux que nous avons effectués dans les cas d'agitation, en régime laminaire, de milieux consistants, newtoniens ou non, par un agitateur bipale.

Nous voulons, en premier lieu, insister sur le bon accord qui a été observé entre résultats de l'analyse numérique et résultats expérimentaux. La concordance est quasiment parfaite en ce qui concerne la puissance d'agitation, de qualité plus faible en ce qui concerne les données locales de vitesse tangentielle ; mais, les hypothèses de base de la modélisation ($v_z = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$) ont été nettement confirmées et les écarts observés résultent, à notre avis, beaucoup plus d'erreurs expérimentales que d'une éventuelle incorrection de la méthode numérique.

La seconde remarque qui se dégage nettement concerne les possibilités de la voie théorique. Après notre présentation, volontairement limitée aux informations qui nous ont paru les plus significatives, la puissance de l'approche numérique ne peut être contestée par personne. Il est certain que, dorénavant, l'ingénieur du génie chimique pourra obtenir, par cette voie, toute information de caractère hydrodynamique qui lui serait nécessaire. Nous pensons d'ailleurs que la nature et la qualité des résultats ainsi obtenus permettent au chercheur d'envisager des traitements et développements ultérieurs, sur lesquels nous reviendrons dans nos conclusions générales, dans d'excellentes conditions économiques, puisqu'aucun investissement de nature expérimentale n'est nécessaire.

CHAPITRE 5 :

AGITATEUR A ANCRE

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - FONCTION COURANT
- 3 - FONCTION ROTATIONNEL
- 4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE
- 5 - CONTRAINTES
- 6 - VISCOSITE APPARENTE
- 7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE
- 8 - PUISSANCE D'AGITATION
- 9 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce chapitre 5 est consacré à la présentation des résultats bruts relatifs aux écoulements générés par un agitateur à ancre. La nomenclature et les dimensions caractéristiques sont précisées sur la figure 5-1. Ce mobile est formé de deux bras plans verticaux de hauteur au moins égale à celle du liquide dans la cuve. Leur largeur w est telle que $\frac{w}{T} = 0,0737$. Quatre diamètres d'agitateurs ont été retenus, soit $\frac{D}{T} = 0,730 ; 0,779 ; 0,828$ et $0,926$. Les analyses expérimentales ont été réalisées avec un mobile tel que $\frac{D}{T} = 0,779$.

Les analyses du chapitre précédent nous ont montré qu'un fluide à comportement rhéologique d'Ostwald de Waele ou un fluide à comportement rhéologique de Carreau, à même indice de comportement et à coefficient $\lambda^* = 2\pi$ ($\lambda = 1$) conduisent à des schémas d'écoulement sensiblement identiques. Nous avons également observé qu'il est plus facile de résoudre les problèmes numériques dans le cas du modèle de Carreau : nous discuterons plus en détail ces deux observations dans le chapitre 8.

C'est pourquoi nous ne présentons ici que des résultats acquis dans le cas de fluides représentés par le modèle de Carreau ; nous avons délibérément choisi $\lambda^* = 1$.

L'ensemble des cas qui ont été analysés est précisé sur le tableau 5-1.

2 - FONCTION COURANT -

2.1 GENERALITES

La figure 5-2 présente la distribution des lignes de courant dans le cas où $\frac{D}{T} = 0,730$ et pour $Re = 0,1$ et $n = 1$. Quels que soient le nombre de Reynolds, l'indice de comportement fluide et le diamètre du mobile étudié, il existe pour une ancre cinq zones d'écoulement :

- près de l'arbre à l'intérieur de la ligne fermée $\phi^* = 0$, existe une zone de recirculation qui suit l'agitateur dans sa rotation. Cette zone est de plus faible surface que dans le cas de l'agitateur bipale ;
- ensuite, de cette ligne $\phi^* = 0$, jusqu'à la ligne de courant $\phi^* = -0,1097$, qui correspond à la valeur de la fonction courant sur les

TABLEAU 5-1 - Résultats disponibles pour l'agitateur à ancre

D/T	C/T	n	Re
0,730	0,135	1	0,069 0,1 1
0,779	0,111	0,75 0,8 0,9 1	0,257 0,257 0,257 0,1 0,257 1 10 20
0,828	0,086	0,65 0,7 0,8 0,9 1	1 1 0,1 1 10 0,1 1 10 0,1 1 10
0,926	0,037	0,9 1	0,399 0,332

deux bras de l'ancre, existe une première zone animée d'un mouvement de rotation autour de l'axe ;

- au-delà de cette ligne et jusqu'à la paroi de la cuve, on observe une seconde zone en rotation autour de l'axe ;

- deux autres zones de recirculation, de faible extension, apparaissent au voisinage immédiat des deux pales constituant l'ancre en amont et en aval de chacune d'elles. Ces zones sont délimitées par deux lignes $\phi^* = -0,1097$ (dans le cas de la figure 5-2).

2.2 INFLUENCE DE D/T

Les figures 5-3 et 5-4 représentent les variations de la fonction courant ϕ^* en fonction de la position radiale r^* pour deux angles différents, $\theta^* = 0$ (prolongement de l'agitateur) et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ (médiatrice de l'agitateur).

Sauf pour le cas $\frac{D}{T} = 0,926$, la fonction courant, pour $\theta^* = 0$, décroît de la valeur zéro sur l'arbre, jusqu'à la valeur sur les bras de l'ancre où elle demeure constante ; elle décroît, ensuite, jusqu'à la valeur de la paroi. Notons que, dans les trois cas correspondant aux plus petits diamètres, la valeur sur la pale augmente en valeur absolue avec le rapport $\frac{D}{T}$: ceci signifie que le débit de fluide entre l'arbre d'agitation et la pale augmente avec $\frac{D}{T}$.

Dans le cas, souvent plus intéressant pour la pratique, où $\frac{D}{T} = 0,926$, la fonction courant augmente d'abord, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'à la valeur de la pale ; la fonction courant devient nulle pour $r^* = 0,558$: de l'arbre jusqu'à ce point existe une zone de rouleaux qui tournent avec l'agitateur. La figure 5-4 montre que la position radiale fermant cette zone pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ est $r^* = 0,877$. La première région décrite au paragraphe 2.1 est, dans ce cas de très grande surface.

Pour les trois autres mobiles, la figure 5-4 nous montre que cette région est relativement limitée et très correctement illustrée par la figure 5-2.

Le débit de fluide, par unité de hauteur, entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve, est donné par :

$$\phi_P^* - \phi_{\text{extrémité}}^* = \int_{r^* = \frac{D}{T}}^{r^* = 1} (v_{\theta^*})_{\theta^* = 0} dr^* \quad (5.1)$$

L'intégration de (5.1) donne la vitesse moyenne entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve :

$$\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0} = \frac{\phi_p^* - \phi_{\text{extrémité}}^*}{1 - \frac{D}{T}} \quad (5.2)$$

Les valeurs correspondantes, exprimées dans un repère lié à l'agitateur, sont rapportées dans le tableau 5-2 : aucune variation régulière n'apparaît clairement.

TABLEAU 5-2 - Valeurs de $\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0}$: $n = 1$ et $Re = 0,1$

D/T	ϕ^* (paroi)	ϕ^* (extrémité de pale)	$\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0}$
0,730	- 0,293	- 0,111	- 0,674
0,779	- 0,305	- 0,148	- 0,710
0,828	- 0,266	- 0,177	- 0,517
0,926	- 0,102	- 0,060	- 0,568

2.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Les figures 5-5 et 5-6 illustrent les variations de la fonction courant ϕ^* en fonction de la position radiale r^* , d'une part sur la position angulaire correspondant aux pales, d'autre part sur la médiatrice de l'agitateur : le cas choisi est celui d'un fluide newtonien, agité par un mobile de diamètre $\frac{D}{T} = 0,779$.

La fonction courant en paroi augmente avec le nombre de Reynolds. Pour $Re = 0,1$, $\phi_p^* = - 0,305$ et pour $Re = 20$, $\phi_p^* = - 0,280$. La tendance est la même pour la valeur de la fonction courant sur la pale de l'agitateur. Par conséquent, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le débit entre l'arbre d'agitation et l'extrémité interne de la pale diminue. D'ailleurs, de manière globale, le débit de circulation entre l'arbre et la paroi

de la cuve diminue. Par contre, le débit de liquide entre l'extrémité externe de la pale et la paroi de la cuve ne semble pas affecté par le nombre de Reynolds.

Les premiers points de la figure 5-6 montrent que la zone de recirculation qui suit l'agitateur dans sa rotation est de plus grande surface, lorsque le nombre de Reynolds est plus faible ; sur cette position angulaire, elle n'apparaît plus à $Re = 20$.

2.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

La figure 5-7 représente les variations de ϕ^* en fonction de la position radiale, pour un angle θ^* en aval de la pale, égal à $\frac{\pi}{4}$. Le cas présenté sur cette figure ($Re = 0,257$; $\frac{D}{T} = 0,779$) montre qu'en première approximation, l'indice de comportement fluide n'affecte pas grandement les variations de la fonction courant. Toutefois, lorsque n augmente, la fonction courant en paroi diminue légèrement. A nombre de Reynolds constant, le débit de liquide entre l'arbre d'agitation et la paroi de la cuve semble augmenter un peu avec l'indice de comportement fluide. Les résultats mentionnés dans le tableau 5-3 illustrent cette observation.

3 - FONCTION ROTATIONNEL -

3.1 INFLUENCE DE D/T

Nous avons porté sur les figures 5-8 et 5-9 les variations de la fonction rotationnel en fonction de la position radiale r^* pour un fluide newtonien et dans le cas d'un faible nombre de Reynolds ($Re = 0,1$). Pour la position angulaire $\theta^* = 0$ (figure 5-8), ω^* est d'abord relativement faible sur l'arbre d'agitation, puis augmente jusqu'à l'extrémité interne de la pale : la valeur en ce point constitue d'ailleurs le maximum de ω^* pour l'ensemble de la cuve ; ce maximum augmente avec le rapport $\frac{D}{T}$. Sur la pale de l'ancre, ω^* décroît de façon lente et régulière ; en effet, ω^* s'écrit alors :

$$\omega^* = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} \quad (5.3)$$

TABLEAU 5-3 - Valeurs de la fonction courant en paroi de cuve et sur les pales de l'agitateur

n	D/T	Re	$\phi^*(\text{paroi})$	$\phi^*(\text{pale})$	
1	0,730	0,069	- 0,322	- 0,136	
		0,1	- 0,293	- 0,110	
		1	- 0,293	- 0,104	
	0,779	0,1	- 0,305	- 0,147	
		0,257	- 0,277	- 0,123	
		1	- 0,282	- 0,122	
		10	- 0,280	- 0,122	
		20	- 0,280	- 0,124	
	Re	D/T	n	$\phi^*(\text{paroi})$	$\phi^*(\text{pale})$
	0,257	0,779	0,75	- 0,294	- 0,138
0,8			- 0,292	- 0,140	
0,9			- 0,268	- 0,153	
1			- 0,277	- 0,123	
0,1	0,828	0,8	- 0,280	- 0,178	
		0,9	- 0,270	- 0,160	
		1	- 0,266	- 0,177	

Sur l'extrémité externe de la pale, ω^* décroît brusquement. Généralement, la valeur obtenue en ce point constitue un minimum pour toute la cuve agitée. Insistons ici sur l'importance, en valeur absolue, du rotationnel aux extrémités des pales : il existe, là, deux régions d'écoulement très fortement cisailé. La fonction rotationnel croît ensuite jusqu'à la valeur de la paroi sans que, comme dans le cas de l'agitateur bipale, nous observions une plage à ω^* constant.

Sur la médiatrice de l'agitateur ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$), ω^* décroît de façon monotone de l'arbre d'agitation à la paroi de la cuve. La valeur maximale obtenue sur l'arbre augmente avec le rapport D/T, alors que la valeur minimale en paroi de cuve diminue, indiquant ainsi que l'amplitude de variation de ω^* augmente avec D/T.

Sur ces figures 5-8 et 5-9, les résultats relatifs au rapport $\frac{D}{T} = 0,926$ sont donnés pour un nombre de Reynolds égal à 0,33. Ceci ne nuit pas aux comparaisons effectuées car, comme nous allons le voir ci-dessous, l'influence du nombre de Reynolds sur ω^* est très peu marquée.

3.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Les figures 5-10 et 5-11 représentent l'influence du nombre de Reynolds sur la fonction rotationnel. En première approximation, dans le prolongement de l'agitateur, ω^* varie peu avec Re. Toutefois, sur la pale de l'ancre, l'amplitude de variation de ω^* augmente avec Re : ce fait a été observé lors de la présentation de l'agitateur bipale (voir figure 4-13). Par conséquent, la zone fortement cisailée autour de l'extrémité des pales s'élargit lorsque Re augmente.

A Re = 20, sur la figure 5-11, nous observons un maximum à partir duquel ω^* décroît jusqu'à la valeur de la paroi.

3.3 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

L'ensemble des résultats a montré que les variations de l'indice de comportement fluide provoquaient des évolutions presque insensibles du profil de rotationnel.

4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE -4.1 GENERALITES

Les figures 5-12 à 5-17 représentent les variations des deux composantes non nulles de la vitesse (v_r^* , v_{θ}^*) en fonction de la position radiale dans le cas du rapport de diamètres $\frac{D}{T} = 0,828$. Les résultats des figures 5-13 à 5-17 correspondent à un fluide newtonien et un nombre de Reynolds égal à 10. En comparant les figures 5-12 et 5-13, il apparaît que pour les deux cas représentés ici, les allures de variation sont identiques. C'est ainsi que pour une position angulaire de 6° en aval de la pale, la vitesse tangentielle augmente lentement jusqu'aux positions radiales correspondant à la pale, puis décroît ensuite jusqu'à devenir nulle en paroi. Notons qu'en passant de l'angle correspondant à la pale ($\theta^* = 0$) à $\theta^* = 6^\circ$, la vitesse tangentielle maximale décroît de 0,83 à 0,67 ($Re = 1$; $n = 0,65$) et de 0,83 à 0,61 ($Re = 10$; $n = 1$) ; nous reviendrons plus tard sur les quelques différences entre les deux courbes. La vitesse radiale est d'abord négative, passe par un minimum égal à $-0,17$ ($Re = 1$; $n = 0,65$) ou à $-0,25$ ($Re = 10$; $n = 1$) ; v_r^* augmente ensuite vers un maximum local compris entre 0,11 et 0,12 et diminue jusqu'à zéro en paroi. Devant la pale donc et séparés par la ligne de courant se fermant sur la pale, existent deux courants qui divergent : le courant interne est poussé vers l'intérieur de la cuve, alors que le liquide près de la paroi se déplace vers l'extérieur. Dans cette région de la paroi, il est possible, parfois, d'observer une vitesse tangentielle négative.

Pour un angle de 45° en aval de la pale (figure 5-14), les caractéristiques de l'écoulement sont déjà totalement différentes ; la vitesse tangentielle, au lieu d'être seulement importante dans la région de la pale, est beaucoup mieux distribuée : le maximum est maintenant égal à 0,33 et est approximativement situé à la position radiale $r^* = 0,5$. La vitesse radiale est partout négative, mais demeure faible en valeur absolue. Sur la médiatrice de l'agitateur (figure 5-15), la vitesse tangentielle présente un profil identique à celui de la figure précédente ; la vitesse radiale est pratiquement nulle.

Sur la position angulaire $\theta^* = 135^\circ$, le profil de v_{θ}^* est encore identique, mais le maximum est supérieur à celui du cas précédent et, surtout, est déplacé vers la périphérie de la cuve, alors que v_r^* prend

des valeurs positives près de l'arbre d'agitation. Globalement, à partir de cette position angulaire, le liquide est chassé du centre vers la paroi de la cuve.

Juste derrière la pale, $\theta^* = 174^\circ$ (figure 5-17), la vitesse tangentielle présente sensiblement la même allure qu'en aval : le maximum est toutefois plus accentué (0,70 au lieu de 0,61). Sur les positions radiales correspondant aux extrémités des pales, v_r^* est de signe opposé à ce qu'il était pour $\theta^* = 6^\circ$ (figure 5-13).

4.2 INFLUENCE DE D/T

Les phénomènes décrits précédemment se retrouvent pour les autres rapports D/T. Indiquons simplement que, lorsque D/T augmente, les valeurs sur les pales augmentent et les maxima qui correspondent aux positions angulaires immédiatement en amont ou en aval des pales augmentent également, aussi bien en ce qui concerne la vitesse tangentielle que la vitesse radiale.

4.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Les figures 5-12 et 5-13 montrent l'influence simultanée du nombre de Reynolds et de l'indice de comportement fluide. Il est apparu que lorsque Re et n augmentent, v_θ^* sur la position radiale correspondant à la pale, diminue plus vite lorsque θ^* passe de 0° à 6° . Par contre, la vitesse radiale augmente en valeur absolue.

La figure 5-18 traduit l'influence, sur v_θ^* , de Re seul, dans le prolongement de l'agitateur. Nous ferons deux remarques :

- de $r^* = \frac{D}{T}$ jusqu'à $r^* = 1$, v_θ^* semble augmenter avec Re (phénomène également noté dans le cas de l'agitateur bipale) ;
- juste avant l'extrémité interne de la pale, v_θ^* diminue avec Re.

4.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

La figure 5-19 présente un exemple caractéristique. S'il est certain que les variations de n ne transforment pas de façon radicale la forme des profils de vitesse, des différences significatives apparaissent cependant. Entre l'arbre et la pale, v_θ^* augmente quand n diminue, alors qu'on observe le phénomène inverse entre la pale et la paroi de la cuve.

4.5 COMPOSANTES DE LA VITESSE A $r^* = r^*$ ET $r^* \neq D/T$

Nous présentons sur les figures 5-20 à 5-23 les variations des deux composantes de la vitesse, pour les deux positions radiales correspondant aux extrêmités d'une pale, en fonction de la position angulaire. Ces quatre figures montrent que le profil de vitesse tangentielle est symétrique par rapport à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, alors que le profil de vitesse radiale est antisymétrique (symétrique avec changement de signe). Nous ajouterons que lorsque D/T augmente, l'amplitude de variations de v_{θ}^* est plus grande, et les maxima et minima de v_r^* sont plus importants en valeur absolue.

4.6 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES

Rappelons que les vérifications expérimentales ont été réalisées dans le cas du mobile de diamètre tel que $\frac{D}{T} = 0,779$. Les premières expériences réalisées ont permis de vérifier sans restriction les hypothèses à la base de la résolution numérique, à savoir :

- la composante axiale de la vitesse n'est jamais perceptible, sauf au fond de la cuve ;
- les vitesses sont indépendantes de la position axiale, pour autant que la distance au fond de la cuve soit supérieure à 100 mm. En effet, le fond de la cuve provoque une diminution de vitesse, alors que le bras de hauteur 20 mm reliant les deux pales de l'ancre, génère une faible composante axiale.

Les mesures ont aussi montré que la composante radiale demeure, en général, faible devant la composante angulaire. Nous nous limitons donc à comparer les valeurs expérimentales et numériques de la vitesse angulaire, pour un fluide newtonien (fuel) dans le tableau 5-4 et pour un fluide pseudoplastique (carbopol) dans le tableau 5-5.

TABLEAU 5-4 - Valeurs mesurées de v_{θ}^* et comparaison avec les valeurs numériques. Cas du fuel à 19°C ($\mu = 5,766$ poiseilles)
Déterminations expérimentales effectuées à la côte $z^* = 0,679$

$\theta^* = 0,17$ (10°)

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,506	1,00	0,294	0,245	20,0
	1,57	0,296	0,245	20,8
	1,68	0,285	0,245	16,3
	1,95	0,283	0,245	15,5

$\theta^* = 0,87$ (50°)

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,506	0,97	0,386	0,322	19,9
	1,07	0,379	0,322	17,7
	1,27	0,378	0,322	17,4
	1,57	0,371	0,322	15,2

$\theta^* = 1,22$ (70°)

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,506	1,19	0,397	0,313	26,8
	1,34	0,330	0,313	5,4
	1,50	0,398	0,313	27,2
	1,78	0,395	0,313	26,2

$\theta^* = 2,09$ (120°)

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,506	0,81	0,345	0,318	8,5
	1,14	0,350	0,318	10,1
	1,34	0,388	0,318	22,0

TABLEAU 5-4 (suite)

 $\theta^* = 2,44 (140^\circ)$

r^*	Re	v_{θ^*} (exp.)	v_{θ^*} (num.)	$\Delta v_{\theta^*}/v_{\theta^*}$ (%)
0,506	0,43	0,265	0,325	22,6
	0,74	0,256	0,325	27,0
	1,09	0,304	0,325	6,9

 $\theta^* = 2,79 (160^\circ)$

r^*	Re	v_{θ^*} (exp.)	v_{θ^*} (num.)	$\Delta v_{\theta^*}/v_{\theta^*}$ (%)
0,506	0,74	0,198	0,304	53,5
	0,87	0,285	0,304	6,7
	1,33	0,326	0,304	7,2

 $\theta^* = 1,57 (90^\circ : \text{médiane de l'agitateur})$

r^*	Re	v_{θ^*} (exp.)	v_{θ^*} (num.)	$\Delta v_{\theta^*}/v_{\theta^*}$ (%)
0,506	0,28	0,391	0,308	26,9
	0,29	0,416	0,308	35,1
	0,42	0,392	0,308	27,3
	0,43	0,364	0,308	18,2
	0,56	0,383	0,308	24,4
	0,68	0,352	0,308	14,3
	1,12	0,347	0,308	12,7
	1,22	0,360	0,308	16,9
	1,34	0,365	0,308	18,5
	10,15	0,404	0,328	23,2
	18,00	0,362	0,324	17,3
	25,55	0,363	0,320	13,4

TABLEAU 5-4 (suite)

 $\theta^* = 1,57$ (90° : médiatrice de l'agitateur)

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,322	3,68	0,317	0,288	10,1
	3,89	0,316	0,287	10,1
	4,28	0,317	0,286	10,8
	4,36	0,311	0,285	9,1
	5,70	0,316	0,280	12,9
	5,78	0,315	0,279	12,9
	6,39	0,315	0,277	13,7
	26,75	0,292	0,197	48,2
	26,88	0,293	0,197	48,7
	45,03	0,283	0,126	124,6
	52,35	0,290	0,098	195,9
0,401	3,35	0,353	0,320	10,3
	6,77	0,344	0,311	10,6
	8,75	0,341	0,306	11,4
0,648	20,32	0,495	0,330	50,0
	22,44	0,458	0,357	28,3
	26,07	0,486	0,368	32,1
	27,07	0,483	0,372	29,8
	30,60	0,492	0,383	28,5
	33,13	0,536	0,391	37,1
	34,58	0,490	0,396	23,7
	36,48	0,519	0,402	29,1
	37,61	0,521	0,405	28,6
	40,45	0,513	0,414	23,9
	41,38	0,524	0,417	25,7
	44,63	0,500	0,428	16,8
	45,89	0,531	0,432	22,9
	49,98	0,492	0,445	10,6
0,837	2,55	0,282	0,159	77,4
	9,34	0,167	0,186	11,4
	14,16	0,326	0,206	58,3

. Tableau 5-4

Pour les nombres de Reynolds de ce tableau, les valeurs numériques ont été calculées par extrapolation ou interpolation entre l'ensemble de nos résultats.

Nous avons sur ce tableau rapporté l'écart $\frac{\Delta v_{\theta}^*}{v_{\theta}^*}$, calculé comme au chapitre précédent : la différence entre les deux déterminations est divisée par la plus petite vitesse en valeur absolue. L'écart moyen est d'environ 26%, ce qui est relativement élevé. Remarquons toutefois que l'écart moyen correspondant aux cas où Re est supérieur à 20 est égal à 43%. Pour la position radiale $r^* = 0,837$, cet écart est égal à 49%. Si nous ne tenons pas compte des résultats obtenus dans ces deux situations, l'écart moyen devient égal à 17%.

En ce qui concerne les résultats relatifs à la position radiale $r^* = 0,837$, nous avons déjà signalé (paragraphe 4.5 du chapitre 4) que pour ces grands rayons, la technique de la sonde tournante était peu adaptée pour la détermination des vitesses dans un repère fixe. A titre d'exemple, les valeurs en repère mobile, pour $Re = 14,16$, sont $(v_{\theta}^*)_{exp} = 0,511$ de $(v_{\theta}^*)_{num} = 0,631$. L'écart n'est plus de 58,3% mais de 23,5%.

Aux nombres de Reynolds supérieurs à 20, les vitesses expérimentales deviennent systématiquement supérieures aux vitesses numériques. Dans ce cas, les valeurs numériques qui sont obtenues par extrapolation sont sûrement moins correctes que les expérimentales. Sur la position angulaire concernée ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$), à partir de $Re = 20$, v_{θ}^* augmente de manière sensible avec Re .

Nos résultats expérimentaux d'ailleurs, dans leur ensemble, permettent de préciser l'influence de Re sur v_{θ}^* . Sur la position radiale $r^* = 0,506$, c'est-à-dire pour $r^* < r^*_{IY}$, de $\theta^* = 0$ jusqu'à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, lorsque Re augmente, v_{θ}^* diminue légèrement. De $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\theta^* = \pi$, l'effet contraire est observé. Retenons que sur une large gamme de nombres de Reynolds, Re pouvant atteindre 50, les variations relatives de v_{θ}^* n'excèdent pas 10%.

TABLEAU 5-5 - Valeurs mesurées de v_{θ}^* et comparaison avec les valeurs numériques. Cas du carbopol 0,05% en poids, 20°C, $\rho = 1005 \text{ kg.m}^{-3}$, $m = 5,30 \text{ kg.m}^{-1} \cdot \text{s}^{n-2}$, $n = 0,50$

$\theta^* = 0 (0^\circ)$

r^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,803	2,10	0,371	0,387	4,3
0,803	8,85	0,403	0,387	4,1
0,869	1,44	0,224	0,124	80,6
0,869	10,77	0,186	0,130	43,1

. ces déterminations expérimentales ont été effectuées à la côte $z^* = 0,679$.

$\theta^* = 0,13 (7^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,616	0,679	2,85	0,335	0,501	49,6
0,616	0,679	9,75	0,444	0,483	8,8
0,616	0,679	28,56	0,502	0,451	11,3
0,742	0,071	2,03	0,357	0,497	39,2
0,742	0,071	2,85	0,496	0,535	7,9
0,742	0,071	4,02	0,467	0,529	13,3
0,742	0,071	12,40	0,491	0,495	0,8
0,742	0,071	13,99	0,479	0,490	2,3

$\theta^* = 0,39 (22^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,742	0,071	2,99	0,371	0,374	0,8
0,742	0,071	8,14	0,324	0,348	7,4
0,742	0,071	18,62	0,307	0,322	4,9

TABLEAU 5-5 (suite)

 $\theta^* = 0,47 (27^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,742	0,071	4,39	0,331	0,345	4,2
	0,071	21,50	0,241	0,302	25,3
	0,118	4,12	0,413	0,344	20,1
	0,118	11,84	0,408	0,315	29,5
	0,182	3,57	0,401	0,349	14,9
	0,182	16,47	0,439	0,309	42,1
	0,585	3,09	0,361	0,332	8,7
	0,585	10,47	0,343	0,298	15,1
	0,679	3,07	0,430	0,332	29,5
	0,679	11,23	0,343	0,298	15,1
	0,790	2,75	0,426	0,334	27,5
	0,790	9,98	0,344	0,299	15,1

 $\theta^* = 0,66 (38^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,616	0,679	4,16	0,407	0,356	14,3
0,616	0,679	17,13	0,427	0,337	26,7
0,742	0,071	4,04	0,210	0,297	41,4
0,742	0,071	13,71	0,250	0,274	9,6

 $\theta^* = 0,84 (48^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,742	0,071	3,10	0,263	0,271	3,0
0,742	0,071	15,68	0,280	0,264	6,1

TABLEAU 5-5 (suite)

 $\theta^* = 1,18 (68^\circ)$

r^*	z^*	Re	v_θ^* (exp.)	v_θ^* (num.)	$\Delta v_\theta^*/v_\theta^*$ (%)
0,616	0,679	0,77	0,044	0,297	-
0,616	0,679	7,53	0,345	0,313	10,2
0,742	0,071	4,69	0,204	0,241	18,1
0,742	0,071	18,58	0,297	0,264	12,5

 $\theta^* = 1,57 (90^\circ \text{ médiatrice de l'agitateur})$

r^*	z^*	Re	v_θ^* (exp.)	v_θ^* (num.)	$\Delta v_\theta^*/v_\theta^*$ (%)
0,205	0,679	3,30	0,123	0,174	41,5
0,205	0,679	12,60	0,125	0,112	11,6
0,427	0,679	2,30	0,357	0,327	9,2
0,427	0,679	2,74	0,340	0,326	4,3
0,427	0,679	23,13	0,341	0,282	20,9
0,506	0,679	1,31	0,256	0,328	28,1
0,506	0,679	1,51	0,252	0,328	30,2
0,506	0,679	19,33	0,424	0,325	30,5
0,616	0,679	1,87	0,316	0,300	5,3
0,616	0,679	15,29	0,431	0,342	26,0
0,632	0,679	2,46	0,334	0,296	12,8
0,742	0,071	1,56	0,191	0,228	19,4
0,742	0,071	1,74	0,182	0,229	25,8
0,742	0,071	2,43	0,202	0,232	14,9
0,742	0,071	12,37	0,278	0,279	0,4
0,742	0,071	17,43	0,297	0,302	1,7
0,742	0,182	4,30	0,239	0,241	0,8
0,742	0,182	13,79	0,256	0,285	11,3
0,742	0,245	3,86	0,258	0,239	7,9
0,742	0,245	10,28	0,246	0,269	9,3
0,803	0,679	2,77	0,271	0,188	44,1
0,803	0,679	7,88	0,254	0,211	20,4

TABLEAU 5-5 (suite)

 $\theta^* = 2,06$ (118°)

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,616	0,679	4,44	0,408	0,336	21,4
0,616	0,679	21,57	0,440	0,397	10,8
0,742	0,071	1,87	0,288	0,263	9,5
0,742	0,071	5,05	0,313	0,287	9,1
0,742	0,071	11,30	0,287	0,330	15,0
0,742	0,071	13,85	0,325	0,348	7,1

 $\theta^* = 2,30$ (132°)

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,742	0,071	3,22	0,227	0,303	33,5
0,742	0,071	11,75	0,305	0,364	19,3

 $\theta^* = 2,54$ (146°)

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,616	0,679	3,29	0,453	0,393	15,3
0,616	0,679	23,51	0,565	0,469	20,5

 $\theta^* = 2,80$ (160°)

r^*	z^*	Re	v_{θ}^* (exp.)	v_{θ}^* (num.)	$\Delta v_{\theta}^*/v_{\theta}^*$ (%)
0,616	0,679	9,63	0,504	0,484	4,1
0,616	0,679	29,97	0,570	0,548	4,0

. Tableau 5-5

Comme dans le cas précédent, les vitesses tangentielles provenant de l'analyse numérique, ont été pour les divers nombres de Reynolds, calculées par interpolation ou extrapolation. Sur ce tableau apparaissent des résultats acquis à plusieurs côtes z^* et en particulier à $z^* = 0,071$, soit à 45 mm du fond de la cuve. A cette hauteur, la composante axiale n'est pas perceptible, mais les signaux anémométriques ne sont pas identiques à ceux obtenus aux côtes $z > 100$ mm : la vitesse tangentielle est plus faible. La comparaison d'ailleurs avec la valeur numérique montre que pour $z^* = 0,071$, les valeurs numériques sont supérieures aux valeurs expérimentales (23 fois sur 27) ; pour les autres côtes, les valeurs expérimentales sont légèrement supérieures aux valeurs numériques (34 fois sur 44).

De façon générale, un bon accord est observé entre vitesses numériques et expérimentales. Les points de plus grand désaccord correspondent aux valeurs les plus petites ($\theta^* = 0$, $r^* = 0,869$, $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, $r^* = 0,205$, etc.....). Si nous ne tenons pas compte de ces points, l'écart moyen se situe aux alentours de 14% ; il est très satisfaisant car il est du même ordre que la précision attendue de l'anémométrie à film chaud. Les possibilités d'erreur sont en effet nombreuses : étalonnage des sondes, position de celles-ci en cuve agitée, mauvaise distribution de températures en cuve agitée, surchauffe du film chaud non constante, etc....

5 - CONTRAINTES -5.1 GENERALITES

Nous présentons sur les figures 5-24 à 5-35 les évolutions simultanées de la contrainte normale τ_{rr}^* et de la contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}^*$ pour deux conditions différentes :

- pour la première : $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $Re = 20$ (figures 5-24 à 5-29) ;
- pour la seconde : $\frac{D}{T} = 0,828$, $n=0,65$ et $Re = 1$ (figures 5-30 à 5-35).

Dans le cas d'un fluide newtonien, pour la position angulaire correspondant aux pales de l'ancre ($\theta^* = 0$), la contrainte de cisaillement présente deux extrema très marqués : - 4,6 pour l'extrémité intérieure de la pale et 12,1 pour l'extrémité extérieure (figure 5-24). La caractéristique essentielle de la contrainte normale τ_{rr}^* , est que, à chaque extrémité de pale et surtout pour l'extrémité intérieure, on observe un minimum très accentué, ce qui signifie qu'en ces points, v_r^* varie fortement avec r^* .

Très légèrement en aval de la pale, pour la position angulaire $\theta^* = 6^\circ$, les extrema sont déjà beaucoup plus faibles : le minimum de $\tau_{r\theta}^*$ est égal à - 0,86, le maximum à 3,88 (figure 5-25 ; l'échelle est différente de celle de la figure 5-24). Notons que le minimum est déplacé vers le centre de la cuve, le maximum vers la paroi. Pour ce qui est de la contrainte normale, sa valeur absolue est importante dans la zone correspondant au passage des pales, en accord avec les variations rapides de v_r^* observées dans cette région (voir figure 5-13).

Pour des angles allant approximativement de 45° à 135° (figures 5-26 à 5-28), la contrainte de cisaillement offre sensiblement les mêmes allures de variation : d'une valeur généralement positive au niveau de l'arbre central, elle décroît, passe par un minimum situé aux alentours de $r^* = 0,3$, puis augmente jusqu'à un maximum voisin de la paroi de la cuve.

Dans ces régions, il n'est pas possible de mettre en évidence une allure de variation systématique pour la contrainte normale. Nous retiendrons que les valeurs sont du même ordre que celles de la contrainte de cisaillement, souvent un peu plus faibles.

Pour la position angulaire $\theta^* = 174^\circ$ (6° en amont de la pale), les variations sont comparables à ce qu'elles étaient pour l'angle de 6° en aval de la pale ; il en est de même pour τ_{rr}^* mais avec un changement de signe (figure 5-29).

Les descriptions ci-dessus correspondent également à la seconde condition : les allures de variation sont indépendantes de $\frac{D}{T}$, Re et n ; seules les valeurs changent de façon significative (figures 5-30 à 5-35).

5.2 INFLUENCE DE D/T

Pour l'agitateur à ancre, faire varier le rapport $\frac{D}{T}$ revient à déplacer le bras de l'ancre qui conserve toujours la même largeur. Pour les quatre géométries considérées ici, nous faisons la comparaison pour un fluide newtonien et à nombre de Reynolds constant ($Re = 1$) : dans ce cas, la comparaison est réalisée à vitesse de rotation variable.

L'examen des figures 5-24 à 5-35 montre clairement que la contrainte de cisaillement maximum est observée à $\theta^* = 0$ et $r^* = \frac{D}{T}$: $\tau_{r\theta}^* = 12,1$ ($\frac{D}{T} = 0,779$, $Re = 20$ et $n = 1$) et $\tau_{r\theta}^* = 6,2$ ($\frac{D}{T} = 0,828$, $Re = 1$ et $n = 0,65$). Nous rapportons des valeurs maximales sur le tableau 5-6 : il semble que la contrainte de cisaillement maximale augmente avec le rapport $\frac{D}{T}$; cette évolution n'est cependant pas nette.

5.3 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

L'influence de Re est illustrée par certains résultats du tableau 5-6 et par la figure 5-36. Pour deux cas particuliers ($\frac{D}{T} = 0,779$; $n = 1$ et $\frac{D}{T} = 0,828$; $n = 0,8$), nous donnons les variations de la valeur maximale de la contrainte de cisaillement en fonction du nombre de Reynolds. $\tau_{r\theta}^*$ en bout de pale augmente avec Re , mais très modérément, puisque, par exemple, pour un nombre de Reynolds allant de 0,1 à 20, pour un fluide newtonien, $\tau_{r\theta}^*$ est simplement multiplié par 1,06 environ.

La figure 5-36 représente les évolutions de $\tau_{r\theta}^*$ en paroi de cuve. En face des pales ($\theta^* = 0$ ou $\theta^* = \pi$), un minimum local est observé, alors que pour des positions angulaires proches des pales (10° et 170° environ), c'est un maximum qui apparaît. A petit nombre de Reynolds, nous observons un minimum local au voisinage de $\theta^* = \frac{\pi}{2}$. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, ce minimum se déplace vers l'amont.

5.4 INFLUENCE DE L'INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE

Sur le tableau 5-6, la contrainte maximale est donnée pour plusieurs indices de comportement fluide, dans deux situations ($\frac{D}{T} = 0,828$ et $Re = 1$; $\frac{D}{T} = 0,779$ et $Re = 0,26$). A chaque fois $\tau_{r\theta}^*$ augmente avec n .

Une comparaison méticuleuse des figures 5-24 à 5-35, prises

TABLEAU 5-6 - Valeurs de $\tau_{r\theta}^*$ à l'extrémité extérieure des pales,
 . pour $Re = 1$ et pour un fluide newtonien

D/T	0,730	0,779	0,828	0,926 (Re = 0,33)
$\tau_{r\theta}^*$ (maxi)	9,75	10,87	8,45	17,31

. pour D/T = 0,779 et pour un fluide newtonien

Re	0,1	0,26	1	10	20
$\tau_{r\theta}^*$ (maxi)	11,40	10,87	11,58	11,73	12,04

. pour D/T = 0,828 et pour $n = 0,8$

Re	0,1	1	10
$\tau_{r\theta}^*$ (maxi)	6,18	9,62	9,70

. pour D/T = 0,828 et pour $Re = 1$

Re	0,65	0,7	0,8	0,9	1
$\tau_{r\theta}^*$ (maxi)	6,24	5,98	9,62	12,57	8,45

. pour D/T = 0,779 et pour $Re = 0,26$

n	0,75	0,8	0,9	1
$\tau_{r\theta}^*$ (maxi)	6,25	6,81	5,41	10,87

deux à deux pour la même position angulaire nous indique que lorsque n est plus grand ($n = 1$) ($\frac{D}{T}$ et Re n'ayant pas d'influence nette), les extrema de $\tau_{r\theta}^*$ sont plus importants.

6 - VISCOSITE APPARENTE -

6.1 GENERALITES

Rappelons que, dans ce chapitre, nous n'avons étudié que les fluides dont le comportement rhéologique est représenté par le modèle de Carreau. Lorsque les contraintes sont faibles, la viscosité apparente au point considéré approche la viscosité du fluide au repos ($\eta^* = 1$). Inversement, lorsque l'agitation est intense, η^* est proche de zéro.

6.2 RESULTATS

Nous présentons des résultats de viscosité apparente en trois zones de la cuve : dans le prolongement de l'agitateur ($\theta^* = 0$), sur la médiatrice de celui-ci ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$) et en paroi de cuve.

Les trois premières figures (figures 5-37 à 5-39) présentent les variations de η^* , pour $\frac{D}{T} = 0,828$ et $Re = 1$; le paramètre est l'indice de comportement fluide ($0,65 < n < 1$) ; les trois autres figures (figures 5-40 à 5-42) concernent le cas où $\frac{D}{T} = 0,828$ et $n = 0,8$; le paramètre est le nombre de Reynolds ($0,1 < Re < 10$).

Dans le prolongement de l'agitateur (figures 5-37 et 5-40), entre l'arbre d'agitation et l'extrémité interne de la pale, η^* demeure à un niveau relativement élevé ($\eta^* > 0,7$). η^* admet un minimum local sur l'arbre (cisaillement assez important), augmente, passe par un maximum, puis décroît jusqu'à un minimum local assez proche de la première extrémité de la pale. Juste avant la pale, un maximum local est observé.

Sur le bras de l'ancre, aux deux extrémités, deux minima très marqués, généralement comparables apparaissent. Ces minima indiquent les deux points les plus cisailés de la cuve. Sur la pale, en un point plus proche de l'extrémité extérieure que de l'intérieure, η^* est très proche de 1. En ce point, le fluide est quasiment au repos, puisque suivant l'agitateur dans sa rotation.

Sur la médiatrice de l'agitateur (figures 5-38 et 5-41 ; l'échelle est différente de celle des figures 5-37 et 5-40), la viscosité apparente varie beaucoup moins que pour $\theta^* = 0$, puisqu'elle demeure comprise entre 0,88 et 1, pour les cas représentés ici. Remarquons que pour r^* voisin de 0,3, existe un point où $\eta^* = 1$: il s'agit du centre du plus petit rouleau tournant à la même vitesse angulaire que l'agitateur. En paroi de cuve (figures 5-39 et 5-42), les variations de η^* avec θ^* sont de moyenne importance, puisque η^* évolue de 0,7 à 1. Signalons deux minima locaux pour des angles voisins de 10° et 170° , et un maximum local sur la médiatrice de l'agitateur, sauf pour $Re = 10$ (figure 5-42).

Un examen attentif des figures 5-40 à 5-42 montre que lorsque $Re = 10$, jamais la viscosité apparente n'atteint la valeur 1 : seul un point sur la pale fait exception ; en un autre point, mais sur l'arbre, à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, η^* est proche de 1. Il apparaît donc qu'augmenter le nombre de Reynolds diminue l'importance des zones mortes.

7 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE -

7.1 GENERALITES

Une valeur élevée du taux de dissipation visqueuse est l'indice de la présence de forts gradients de vitesse et désigne les zones où existent des risques d'échauffement local.

7.2 RESULTATS

Les figures 5-43 à 5-48 constituent un exemple caractéristique des évolutions de ϕ_v^* . Le système choisi correspond à $\frac{D}{T} = 0,779$; $Re = 0,257$ et $n = 0,75$.

Le maximum de ϕ_v^* est obtenu à l'extrémité externe de la pale (figures 5-43, où $\phi_{v \max}^* = 152$). A l'extrémité interne, ϕ_v^* ne vaut que 30. Très près des pales, aussi bien en position radiale qu'angulaire, les valeurs de ϕ_v^* sont encore importantes :

- . $\theta^* = 0$, $r^* = 0,803$: $\phi_v^* = 80$ (figure 5-43) ;
- . $\theta^* = 6^\circ$, $r^* = 0,779$: $\phi_v^* = 23$ (figure 5-44) ;
- . $\theta^* = 174^\circ$, $r^* = 0,779$: $\phi_v^* = 24$ (figure 5-48).

Dans le coeur de la cuve (figures 5-45 à 5-47), ϕ_v^* demeure toujours inférieur à 2 : nous ne commentons pas ici les évolutions enregistrées. Nous nous attachons plutôt à l'examen des valeurs maximales de ϕ_v^* qui sont présentées dans le tableau 5-7, dans le cas où $\frac{D}{T} = 0,828$.

Le taux de dissipation visqueuse augmente avec le nombre de Reynolds et semble diminuer quand l'indice de comportement fluide augmente. Signalons cependant les deux exceptions : $n = 0,9$ et $Re = 0,1$; $n = 0,7$ et $Re = 1$.

TABLEAU 5-7 - Valeur de la dissipation visqueuse ϕ_v^*
pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $\theta^* = 0$, $r^* = 0,828$

$n \backslash Re$	0,65	0,7	0,8	0,9	1
0,1			102,3	130,8	57,9
1	384,6	198,2	319,1	288,3	71,4
10			341,0	305,7	280,8

8 - PUISSANCE D'AGITATION -

8.1 RESULTATS

Nous présentons, dans les tableaux 5-8, l'ensemble des résultats obtenus par voie numérique, au cours de ce travail. On peut observer que, en première approximation, et sur la plage de nombres de Reynolds couverte (le maximum est $Re = 20$), le produit $NpRe$ demeure sensiblement constant.

TABLEAU 5-8 - Puissance consommée par un agitateur à ancre. Fluide newtonien et pseudoplastique suivant le modèle de Carreau : $\lambda^* = 1$

. Fluide newtonien

D/T	Re	Np	NpRe
0,730	0,069	2144	149
	0,100	1488	149
	1	146,9	147
0,779	0,100	1468	147
	0,257	582,5	150
	1	147,9	148
	10	15,99	160
	20	9,026	180
0,828	0,100	1826	183
	1	174,9	175
	10	16,26	163
0,926	0,332	683,6	227

. Fluide pseudoplastique

D/T	n	Re	Np	NpRe
0,779	0,75	0,257	450,1	116
	0,8	0,257	477,0	123
	0,9	0,257	653,2	168
0,828	0,65	1	101,4	101
		1	111,6	112
		0,100	1347	135
		1	121,9	122
		10	13,51	135
	0,9	0,100	1433	143
		1	138,7	139
	10	15,03	150	
0,926	0,9	0,399	523,5	209

Plus en détail, on peut noter soit de légères augmentations de ce produit avec Re (par exemple, $\frac{D}{T} = 0,779$; $n = 1$), soit des diminutions limitées ($\frac{D}{T} = 0,828$; $n = 1$). Il est intéressant de remarquer que le produit $NpRe$ est à peu près indépendant de $\frac{D}{T}$ pour les plus faibles valeurs, puis augmente ensuite avec $\frac{D}{T}$.

En ce qui concerne l'influence de l'indice de comportement fluide, en règle générale, le produit $NpRe$ diminue avec n . Nous signalons cependant l'exception qui apparaît, pour $\frac{D}{T} = 0,779$, lorsqu'on passe de $n = 1$ à $n = 0,9$.

8.2 COMPARAISON AVEC LES DETERMINATIONS EXPERIMENTALES

Pour le rapport des diamètres $\frac{D}{T} = 0,779$, la figure 5-49 représente, en échelles logarithmiques, les variations du nombre de puissance Np en fonction du nombre de Reynolds Re , obtenues pour les deux liquides retenus au cours de ce travail. Sur le tableau 5-9, nous donnons les valeurs du produit $NpRe$. L'accord entre valeurs expérimentales et résultats du modèle numérique est satisfaisant : nous y reviendrons au chapitre 8.

9 - CONCLUSION -

Dans le cas de l'agitateur à ancre, nous venons d'observer une seconde fois la puissance de l'analyse numérique qui fournit une quantité considérable de résultats, que nous n'avons d'ailleurs pas tous présentés.

Toujours pour la seconde fois, l'accord très satisfaisant entre données numériques et données expérimentales permet de renforcer la crédibilité de l'analyse théorique ; en particulier, les hypothèses essentielles émises pour constituer le modèle hydrodynamique ont été confirmées avec une grande précision.

A l'issue des deux premiers chapîtres consacrés à un examen détaillé des résultats relatifs aux agitateurs à pales et à ancre et en première approximation, il apparaît que, l'influence du nombre de Reynolds sur les distributions de toutes les grandeurs analysées et en particulier des vitesses et des contraintes est très faible, sensiblement nulle dans la gamme des faibles valeurs de Re . Au plan macroscopique, rappelons que

TABLEAU 5-9 - Puissance consommée par un agitateur à ancre.
 Déterminations expérimentales pour $\frac{D}{T} = 0,779$

. Fuel

Re	Np	NpRe
3,72	40,74	152
3,89	34,67	135
4,37	34,01	149
5,75	26,00	149
6,46	24,55	159
9,77	19,05	186
13,43	13,65	183
19,95	11,48	229
22,39	10,00	224

. Carbopol

Re	Np	NpRe
4,07	10,00	4,07
5,75	7,24	41,6
7,55	5,75	43,4
9,46	4,42	41,8
13,80	3,72	51,4
15,85	2,96	46,9
19,50	2,54	49,5
22,80	2,36	53,8

le produit du nombre de puissance par le nombre de Reynolds demeure également sensiblement constant.

Ainsi, à l'usage de l'ingénieur, pouvons-nous dégager de l'ensemble complexe de données fournies par l'étude numérique, les tendances finalement très simples que nous venons de proposer.

C H A P I T R E 6 :

AGITATEUR BARRIERE

- 1 - INTRODUCTION
- 2 - FONCTION COURANT
- 3 - FONCTION ROTATIONNEL
- 4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE
- 5 - CONTRAINTES
- 6 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE
- 7 - PUISSANCE D'AGITATION
- 8 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats bruts relatifs à l'agitateur-barrière. La nomenclature et les dimensions caractéristiques des six mobiles qui ont été examinés sont précisées sur la figure 6-1 et dans le tableau 6-1.

TABLEAU 6-1 - Géométries étudiées

Géométrie	D_A/T	D_{YO}/T	D_{PO}/T	D_Y/T	D/T
1	0,0417	0,165	0,312	0,484	0,631
2	0,0417	0,189	0,337	0,509	0,656
3	0,0417	0,263	0,410	0,582	0,730
4	0,0417	0,361	0,509	0,681	0,828
5	0,167	0,252	0,380	0,530	0,615
6	0,250	0,327	0,442	0,577	0,615

Dans tous les cas, l'agitateur-barrière est formé de quatre bras plans verticaux (deux de chaque côté de l'arbre d'agitation), de hauteur suffisante pour dépasser le niveau du liquide dans la cuve.

Pour les géométries numéros 1 à 4, nous avons maintenu constants les largeurs de bras et l'espacement entre eux : les deux largeurs sont égales à 0,147, l'espacement à 0,172. Seules changent les distances par rapport à l'arbre d'agitation et la paroi de la cuve.

Pour les géométries numéros 5 et 6, nous avons fait varier le diamètre de l'arbre central.

Volontairement ici, nous raccourcissons la présentation des résultats : nous limitons les commentaires sur les influences du nombre de

Reynolds et de l'indice de comportement fluide ; nous ne commentons plus les résultats de viscosité apparente. Sauf avis contraire, les données fournies ci-après concernent un fluide newtonien.

2 - FONCTION COURANT -

2.1 GENERALITES

La figure 6-2 présente un exemple caractéristique de répartition des lignes de courant dans le cas de la géométrie numéro 4, pour un nombre de Reynolds égal à 0,1. Pour l'agitateur-barrière, on peut distinguer deux grandes zones d'écoulement :

- à l'intérieur de la ligne de courant $\phi^* = 0$, une zone de recirculation ;
- en-dehors de cette zone, les lignes de courant entourent l'arbre de l'agitateur, dénotant une circulation de type tangentiel.

Remarquons en amont et en aval de chaque pale, des recirculations locales délimitées par les lignes de courant fermées sur chacune des pales ($\phi^* = -0,0251$ sur la première pale ; $\phi^* = -0,0538$ sur la seconde).

La distribution de la fonction courant est précisée par les quelques exemples fournis sur les figures 6-3 pour $\theta^* = 0$ et 6-4 pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$. Trois cas sont présentés, dont un non-newtonien (modèle de Carreau : $n = 0,9$; $\lambda^* = 1$). Nous retenons que, quelle que soit la géométrie exacte, les variations importantes de ϕ^* sont observées au voisinage de la paroi.

Nous pouvons déduire des valeurs de la fonction courant, l'importance du débit tangentiel entre l'arbre et la première pale, entre les deux pales, et entre la dernière pale et la paroi de la cuve. Ces valeurs, exprimées en termes de vitesses tangentielles moyennes par rapport à un référentiel tournant avec l'agitateur, sont présentées dans le tableau 6-2. Elles sont négatives (vitesses de sens opposé à la rotation de l'agitateur) et expriment l'écart qui existe entre le mouvement réel et une rotation en bloc. On note que cet écart, peu important au centre de la cuve, devient notable dans l'espace entre la seconde pale et la paroi de la cuve ; ce résultat n'est pas surprenant dans la mesure où l'élément qui freine est justement la paroi de la cuve.

Géométrie	Re	ϕ^*			$\langle v_{\theta}^* \rangle_{\theta^*=0}$		
		Première pale I	Deuxième pale II	Paroi P	Arbre et première pale $= \frac{\phi_I^*}{\frac{D_{YO}}{T} - \frac{D_A}{T}}$	Première pale et deuxième pale $= \frac{\phi_{II}^* - \phi_I^*}{\frac{D_Y}{T} - \frac{D_{PO}}{T}}$	Deuxième pale et paroi $= \frac{\phi_P^* - \phi_{II}^*}{1 - \frac{D}{T}}$
1	4,63	- 0,004426	- 0,01898	- 0,2687	- 0,030	- 0,085	- 0,677
2	5	- 0,007011	- 0,02277	- 0,2563	- 0,048	- 0,092	- 0,679
3	0,1	- 0,01501	- 0,03302	- 0,3016	- 0,068	- 0,105	- 0,995
4	0,1	- 0,02512	- 0,05381	- 0,2418	- 0,079	- 0,167	- 1,093
5	1,028	- 0,002530	- 0,01668	- 0,2724	- 0,030	- 0,094	- 0,664
6	1,028	- 0,002464	- 0,01539	- 0,2728	- 0,032	- 0,096	- 0,669

TABLEAU 6-2 - Vitesses tangentielles moyennes dans le prolongement des pales ;
cas newtonien

Notons que, dans le cas de la géométrie numéro 4, la vitesse tangentielle moyenne est inférieure à -1 , ce qui signifie que, dans un repère lié à la paroi de la cuve, le liquide circule en sens inverse de celui de l'agitateur. Nous reviendrons sur ce phénomène lors de la présentation des distributions de vitesse.

Les résultats obtenus pour les géométries numéros 5 et 6 sont pratiquement identiques. Nous en déduisons que le diamètre de l'arbre et la largeur de la deuxième pale n'ont pas d'influence nette sur les vitesses tangentielles moyennes.

2.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

Dans le cas de la géométrie numéro 2, nous avons représenté sur la figure 6-5 les évolutions de ϕ^* en fonction de r^* pour $\theta^* = 0$, pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds. Aucune influence nette ne se dégage de nos résultats, sinon une légère augmentation de ϕ^* avec Re au voisinage de la paroi de la cuve.

De même, l'indice de comportement fluide, n , n'a aucune influence notable sur les variations de la fonction courant.

3 - FONCTION ROTATIONNEL -

3.1 RESULTATS BRUTS

Des exemples de variations du rotationnel ω^* en fonction de la position radiale r^* sont représentés sur les figures 6-6 à 6-8. La figure 6-6 concerne le prolongement des pales ($\theta^* = 0$), pour trois géométries différentes et avec trois nombres de Reynolds différents.

ω^* est d'abord faible sur l'arbre d'agitation, puis augmente jusqu'à l'extrémité interne de la première pale où un maximum local est observé. En comparant les géométries numéros 1 et 4 où seule la position des pales par rapport à l'arbre d'agitation a été modifiée, nous constatons que plus la première pale est éloignée du centre, plus ce maximum local est important. Sur la pale, ω^* décroît ensuite de façon lente et régulière ; ω^* s'écrit en effet :

$$\omega^* = - \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_r^*}{\partial \theta^*} \quad (6.1)$$

et est proportionnel à $-\frac{1}{r^*}$.

Sur l'extrémité externe de la première pale, ω^* décroît brusquement et augmente ensuite jusqu'à la deuxième pale. De celle-ci, jusqu'à la paroi de la cuve, les phénomènes précédents se répètent avec une intensité plus grande.

Les quatre extrémités de pales apparaissent donc comme des points où la fonction rotationnel est importante en valeur absolue.

Sur la médiatrice de l'agitateur (figure 6-7), ω^* décroît de façon monotone de l'arbre d'agitation jusqu'à la paroi de la cuve. Ajoutons que les géométries numéros 1 et 4 conduisent ici à des résultats identiques : le diamètre du mobile n'a absolument aucune influence sur les valeurs de la fonction rotationnel dans cette région de la cuve. Par contre, le diamètre de l'arbre augmentant, la valeur de ω^* sur l'arbre diminue : ce phénomène se retrouve lors de l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux (voir équation A.20 de l'annexe 1).

3.2 INFLUENCE DU NOMBRE DE REYNOLDS

La figure 6-8 illustre l'influence de Re sur les variations de ω^* avec r^* dans le prolongement de l'agitateur et pour la géométrie numéro 2. Dans la zone centrale, le nombre de Reynolds exerce peu d'influence ; les variations sont plus nettes près de la paroi, mais n'apparaissent pas monotones et sont donc difficiles à résumer.

4 - COMPOSANTES DE LA VITESSE -

4.1 RESULTATS DE L'ETUDE NUMERIQUE

Des exemples de variations des deux composantes de la vitesse, v_r^* et v_θ^* , en fonction de la position radiale sont donnés sur les figures 6-9 à 6-16 dans deux cas particuliers :

- géométrie numéro 4 ; Re = 0,1 ; fluide newtonien ;
- géométrie numéro 6 ; Re = 1,028 ; fluide pseudoplastique
(Carreau : n = 0,9 ; $\lambda^* = 1$).

Pour la position angulaire correspondant aux pales (figures 6-9 et 6-10), la composante radiale est nulle ; la composante tangentielle varie de la même manière pour les deux géométries considérées : augmentation de l'arbre jusqu'à la première pale, décrochage entre les deux pales, décroissance de la deuxième pale jusqu'à la paroi.

Pour un angle de 6° en avant des pales, les variations des vitesses apparaissent sur les figures 6-11 et 6-12. Pour la géométrie numéro 4, nous observons que la composante tangentielle admet deux maxima locaux correspondant aux deux pales ; pour la géométrie numéro 6, les allures de v_θ^* traduisent peu l'existence des deux pales.

Nous remarquons qu'en avant de la première pale, v_r^* est négatif, en avant de la seconde, v_r^* est surtout positif : ceci signifie que la pale intérieure pousse le liquide vers le centre de la cuve, alors que la pale extérieure a tendance à le pousser vers la paroi de la cuve.

De la figure 6-13 à la figure 6-15, on observe dans le cas de la géométrie numéro 4, l'évolution des profils de vitesse lorsque l'angle θ^* augmente de 45° à 135° . Pour v_θ^* , l'influence locale des pales n'apparaît plus ; on ne trouve plus que des évolutions régulières avec un maximum. Les maxima locaux apparaissent à nouveau, à l'amont des pales, pour $\theta^* = 174^\circ$ (figure 6-16). La composante radiale reste toujours plus faible. Elle est quasiment nulle pour $\theta^* = 90^\circ$ (figure 6-14). Les deux enregistrements correspondant à $\theta^* = 6^\circ$ et $\theta^* = 174^\circ$ sont identiques en ce qui concerne v_θ^* , symétriques par rapport à l'axe des abscisses en ce qui concerne v_r^* .

La figure 6-17 constitue un exemple des variations avec la position angulaire ; nous avons retenu quatre valeurs de r^* correspondant aux extrémités intérieures et extérieures des deux pales. On notera encore une fois la symétrie des profils de v_θ^* par rapport à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ et l'antisymétrie de v_r^* . On observera également les augmentations des composantes de la vitesse à l'extrémité de la pale externe ($r^* = 0,828$). Enfin le rôle joué par chacune des deux pales quant à l'orientation du liquide dans la cuve apparaît de façon plus précise sur cette figure 6-17 : de 0° à 90° , v_r^* est positif ou voisin de zéro sur les rayons correspondant à la pale externe ; v_r^* est négatif sur les rayons correspondant à la pale interne.

4.2 COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous avons étudié expérimentalement le mobile de géométrie numéro 2. Il faut signaler que, pour des raisons mécaniques évidentes, les pales sont reliées dans leur partie inférieure par un bras de hauteur 20 mm ; elles sont également reliées au niveau supérieur, mais le bras correspondant a toujours été maintenu émergé ; par conséquent, il n'exerce aucune influence sur l'écoulement.

Nous avons vérifié que les signaux anémométriques sont indépendants de la position axiale, pour autant que la distance au fond de la cuve soit supérieure à 110 mm. Les décompositions du signal anémométrique ont montré que la composante axiale est négligeable, ce qui confirme la validité de l'hypothèse émise lors du traitement numérique ; par ailleurs, la composante radiale s'avère faible devant la composante tangentielle, ce qui est conforme aux résultats de l'analyse numérique.

Les vérifications expérimentales ont été effectuées à la côte $z^* = 0,499$ (milieu de la cuve), et pour un seul nombre de Reynolds, $Re = 10$. Nous n'examinons que le cas du fluide newtonien (fuel lourd à 28°C) ; les résultats sont présentés dans le tableau 6-3.

Les valeurs numériques et expérimentales sont en bon accord pour les positions angulaires $\theta^* = 0,88$, $\theta^* = 1,47$ et $\theta^* = 2,26$: l'écart moyen est en effet de 13%. Cet écart se situe dans l'intervalle de confiance que l'on peut accorder à l'anémométrie thermique.

Pour la position angulaire, $\theta^* = 2,85$, sauf pour le rayon $r^* = 0,656$, l'accord n'est pas satisfaisant. Notons que les trois valeurs expérimentales sont inférieures aux valeurs numériques ; nous remarquons en outre qu'il s'agit des trois plus petites vitesses que nous ayons déterminées lors de l'étude de cet agitateur-barrière. Dans ce cas, nous l'avons déjà signalé, l'anémométrie thermique est peu précise. Ces résultats par conséquent ne remettent pas en cause les concordances entre résultats numériques et expérimentaux.

TABLEAU 6-3 - Valeurs mesurées de v_{θ}^* et comparaison avec les valeurs numériques.

Mesures effectuées à la côte $z^* = 0,449$

Fluide newtonien : fuel lourd à 28°C ($\mu = 2,616$ poiseuilles)

GEOMETRIE numéro 2

Re = 10 (N = 8,43 tours mn^{-1})

$\theta^* = 0,88 (51^\circ)$				
r^*	(v_{θ}^*) num.	(v_{θ}^*) exp.	$\frac{\Delta v_{\theta}^*}{v_{\theta}^*} (\%)$	Ecart moyen
0,214	0,320	0,337	5,3	7,0
0,410	0,468	0,464	0,9	
0,509	0,472	0,428	10,3	
0,656	0,406	0,364	11,5	
$\theta^* = 1,47 (84^\circ)$				
0,214	0,340	0,295	15,3	19,2
0,410	0,454	0,539	18,7	
0,509	0,455	0,547	20,2	
0,656	0,398	0,325	22,5	
$\theta^* = 2,26 (129^\circ)$				
0,214	0,279	0,343	22,9	13,3
0,410	0,433	0,526	21,5	
0,509	0,467	0,495	6,0	
0,656	0,444	0,456	2,7	
$\theta^* = 2,85 (163^\circ)$				
0,214	0,221	0,039	466,7	sans signification
0,410	0,375	0,104	260,6	
0,509	0,484	0,260	86,2	
0,656	0,530	0,559	5,5	

5 - CONTRAINTES -

Les figures 6-18 à 6-25 présentent des exemples des évolutions des deux contraintes, τ_{rr}^* et $\tau_{r\theta}^*$, en fonction de la position radiale pour différentes positions angulaires. Les allures et phénomènes caractéristiques observés se retrouvent, quels que soient la nature du fluide, le nombre de Reynolds, et dans une moindre mesure, la géométrie du mobile.

Ainsi, les figures 6-18 et 6-19 concernant la position angulaire $\theta^* = 0$ et obtenues pour deux géométries différentes mettent-elles en évidence deux phénomènes :

- la contrainte de cisaillement présente des extrema aux quatre extrêmités des pales : elle est négative aux extrêmités intérieures et moins importante en valeur absolue ; elle est positive aux extrêmités extérieures et prépondérante sur la deuxième pale (la plus éloignée de l'axe) ;

- plus la deuxième pale est proche de la paroi, plus la contrainte de cisaillement sur l'extrêmité extérieure est grande et plus la valeur de $\tau_{r\theta}^*$ en paroi est faible : la figure 6-26 confirme cette deuxième remarque, ainsi que les figures 6-20 et 6-21, relatives à la position angulaire $\theta^* = 6^\circ$. Cette remarque peut, de plus, être élargie au cas de la contrainte normale.

A $\theta^* = 6^\circ$, les maxima de $\tau_{r\theta}^*$ et τ_{rr}^* sont respectivement égaux à 6,5 et 4,7 pour la géométrie numéro 4 ; ils sont de 2,3 et 0,7 pour la géométrie numéro 6 : Re et n n'influençant que très peu $\tau_{r\theta}^*$, les différences enregistrées sont imputables essentiellement aux différences de géométrie. Notons que les minima respectifs de $\tau_{r\theta}^*$ et τ_{rr}^* sont de - 5 et - 5,4 pour la géométrie numéro 4, de - 0,4 et - 2,7 pour la géométrie numéro 6. Lorsque r^* est inférieur à 0,3 environ, dans le cas de la géométrie numéro 4, la contrainte de cisaillement demeure sensiblement homogène. Les figures 6-22 à 6-24 montrent les variations des contraintes dans la région centrale ($45^\circ < \theta^* < 135^\circ$). Les évolutions de $\tau_{r\theta}^*$ sont identiques pour $\theta^* = 45^\circ$ et pour $\theta^* = 135^\circ$; les maxima sont obtenus sur la paroi de la cuve et valent environ 1,4. Les extrema de τ_{rr}^* sont observés sur l'arbre d'agitation. Nous pouvons noter que la zone $0,25 < r^* < 0,30$ est à contraintes nulles ; elle correspond au centre de la zone de recirculation qui tourne avec l'agitateur et qui a été observée sur les profils de fonction courant (figure 6-2).

La figure 6-25 retrouve les phénomènes observés sur la figure 6-20, avec une inversion de signe pour τ_{rr}^* .

La figure 6-26 présente les variations de la contrainte de cisaillement en paroi de cuve, pour la géométrie numéro 2 et pour deux nombres de Reynolds, en fonction de la position angulaire. On observe des minima locaux en face des pales ($\theta^* = 0$ et π) et sur la médiatrice de l'agitateur pour des nombres de Reynolds faibles. Lorsque Re augmente, ce dernier minimum se déplace vers la pale amont et il n'y a plus symétrie par rapport à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$. Les maxima sont observés à des positions angulaires voisines de 10° et 170° . Pour cette géométrie ($\frac{D}{T} = 0,656$), les amplitudes de variation de $\tau_{r\theta}^*$ en paroi demeurent modérées.

6 - TAUX DE DISSIPATION VISQUEUSE -

Des exemples de résultats sont présentés sur les figures 6-27 à 6-33. On observe que ϕ_v^* passe par un maximum très accusé pour la position radiale correspondant à l'extrémité extérieure de la deuxième pale, à la position angulaire $\theta^* = 0$ (figure 6-27) et à un degré moindre, à $\theta^* = 6^\circ$ (figures 6-28 et 6-29) et $\theta^* = 174^\circ$ (figure 6-33).

En comparant les figures 6-28 et 6-29, il apparaît que, à $\theta^* = 6^\circ$, les maxima sont multipliés par 5 environ lorsqu'on passe de la géométrie numéro 6 à la géométrie numéro 4, c'est-à-dire lorsqu'on rapproche la pale extérieure de la paroi de la cuve. On peut observer, également, l'augmentation du taux de dissipation visqueuse en paroi de cuve.

Dans le coeur de la cuve, l'influence des pales de l'agitateur n'apparaît pas clairement sur les profils de ϕ_v^* . Il est intéressant de remarquer le passage par zéro pour $0,25 < r^* < 0,30$, ce qui correspond aux valeurs nulles des deux contraintes dans cette région. Enfin, à une exception près, pour $r^* = 0,656$, le tableau 6-4 indique que la dissipation visqueuse aux extrémités des pales, augmente avec le nombre de Reynolds.

TABLEAU 6-4 - Dissipation visqueuse aux extrêmités des pales ;
géométrie numéro 2, fluide newtonien

r^* \ Re	0,189	0,337	0,509	0,656
0,1	0,04	10,39	1,86	26,84
5	0,36	11,72	4,73	72,12
10	0,73	13,25	7,81	22,95

7 - PUISSANCE D'AGITATION -

Les résultats du tableau 6-5 et de la figure 6-34, consacrés à la géométrie numéro 2, indiquent que généralement, le produit $NpRe$ est indépendant du nombre de Reynolds lorsque ce dernier demeure faible ($Re < 5$) (notons l'exception $Re = 0,1$).

Ce résultat semble absolument général, quel que soit le type d'agitateur. En examinant les autres géométries (tableau 6-6), il apparaît que le produit $NpRe$ augmente avec le rapport $\frac{D}{T}$. Les deux autres familles d'agitateurs étudiées aux chapîtres 4 et 5 subissaient la même évolution.

Sur la figure 6-34 apparaît la comparaison avec quelques données expérimentales obtenues avec du fuel lourd : l'accord est très convenable.

TABLEAU 6-5 - Puissance d'agitation ; géométrie numéro 2

Fluide	Re	Np	NpRe
newtonien	0,1	2101	210
	0,63	269,2	170
	1	169,8	170
	5	33,74	169
	10	23,01	230
Fluide pseudoplastique : Carreau ; $n = 0,95$ $\lambda^* = 1$	5	32,58	163

TABLEAU 6-6 - Puissance d'agitation ; autres géométries ;
fluide newtonien

Géométrie	Re	Np	NpRe
1	4,63	36,06	167
3	0,1	2134	213
4	0,1	2365	236
5	1,028	162,5	167
6	1,028	160,7	165
6 fluide pseudo- plastique Carreau : $n = 0,9$; $\lambda^* = 1$	1,028	151,0	155

8 - CONCLUSION -

L'étude des agitateurs-barrières, troisième géométrie que nous avons examinée au cours de ce travail, confirme très largement les conclusions que nous avons dégagées à l'issue des chapîtres 4 et 5 : puissance de la méthode numérique, bon accord entre données théoriques et expérimentales, mais aussi faible influence du nombre de Reynolds sur la distribution de toutes les grandeurs adimensionnelles étudiées.

Nous voulons ici ajouter quelques éléments caractéristiques relatifs à l'influence de l'indice de comportement fluide. De façon très générale, il apparaît que, lorsque n diminue, l'importance de la dérivée $\frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial r^*}$ en bout des pales augmente alors que, près de la paroi de la cuve, se forme une zone peu agitée, de volume croissant. C'est le seul élément général qui se dégage au plan local des diverses évolutions que nous avons enregistrées en faisant varier l'indice de comportement fluide. En ce qui concerne la puissance d'agitation, le produit $NpRe$ diminue avec n , dans tous les cas.

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

Dans les chapîtres 4, 5 et 6 de la deuxième partie, nous venons de présenter un grand nombre de résultats illustrés par 132 figures et 27 tableaux, pour quatre agitateurs bipales, quatre agitateurs à ancre et six agitateurs barrières. Pourtant, toutes ces données ne constituent que des échantillons de l'ensemble d'informations que nous avons obtenu, montrant ainsi toute la richesse de la procédure mise en oeuvre. Un élément très important du développement nous semble être le bon accord entre données numériques et expérimentales ; toutes les hypothèses émises lors de la mise en équation ont été vérifiées. Ainsi, disposons-nous maintenant d'une méthode performante et confirmée que l'utilisateur peut exploiter pour résoudre les problèmes d'agitation de milieux consistants qui intéressent l'industrie. Dans la troisième partie de ce travail, nous allons présenter un exemple d'exploitation, puis nous efforcer de mettre en évidence les enseignements généraux qui se dégagent de l'ensemble de nos travaux.

TROISIEME PARTIE :

ANALYSE ET EXPLOITATION DES RESULTATS

CHAPITRE 7 : APPLICATION A L'AGITATION DU FROMAGE FONDU

CHAPITRE 8 : DISCUSSION DES RESULTATS

- INTRODUCTION DE LA TROISIEME PARTIE -

La seconde partie de ce mémoire vient de consister essentiellement, en une longue énumération que nous avons tenté de rendre la moins fastidieuse possible des résultats essentiels que l'analyse théorique permet d'atteindre. Nous avons ainsi constitué un catalogue de données ou d'éventuels utilisateurs pourraient puiser les informations qu'ils jugent utiles.

Notre travail, cependant, ne nous aurait pas semblé complet si, d'une part, nous n'avions pas proposé un exemple d'exploitation, en relation avec des problèmes industriels concrets et si, d'autre part, nous n'avions pas tenté d'exploiter davantage la masse de résultats nouveaux que nous proposons, afin d'en tirer des enseignements généraux et d'ouvrir de nouvelles voies de recherche.

Les deux chapitres qui constituent cette troisième partie de notre mémoire sont consacrés à ces deux tâches différentes.

C H A P I T R E 7 :

APPLICATION A L'AGITATION DU FROMAGE FONDU

1 - INTRODUCTION

2 - SITUATION DU PROBLEME

3 - ANALYSE NUMERIQUE DE L'AGITATION DU FROMAGE FONDU

4 - ESSAIS PILOTES

5 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

Disposer d'une technique numérique comme celle qui a été développée au cours de ce travail permet à l'ingénieur d'envisager des améliorations très nettes des dispositifs d'agitation qu'il utilise. En effet, sans avoir à réaliser d'essais expérimentaux toujours longs et coûteux, il peut, par le calcul, chercher à mieux ajuster les diverses caractéristiques, vitesses, contraintes, ... des mouvements créés par le mobile.

Il est certain cependant, et nous allons le constater au cours de ce chapitre, que les analyses locales détaillées que l'on peut ainsi pratiquer nécessitent, par ailleurs, des informations très précises sur la nature des problèmes à résoudre, les propriétés des produits mis en jeu et la cinétique d'éventuelles transformations physico-chimiques.

Nous allons rapidement présenter ici le travail que nous avons effectué, à la demande des Fromageries BEL et en collaboration avec le professeur GIBERT, dans le cadre d'une aide accordée par la Direction des Industries Agricoles et Alimentaires du Ministère de l'Agriculture (D.I.A.A.).

2 - SITUATION DU PROBLEME -

Les Fromageries BEL ont été intéressées par nos travaux sur l'agitation des milieux visqueux et nous ont associés aux efforts permanents qu'elles consentent pour améliorer la fabrication du fromage fondu qu'elles commercialisent sous l'appellation "La Vache qui Rit".

2.1 DESCRIPTION DE LA FABRICATION

"La Vache qui Rit" est le produit de la fonte simultanée de plusieurs fromages auxquels ont été ajoutés divers produits laitiers (crème, beurre, caséine, lactosérum), des épices ou des aromates. Des sels, dits sels de fonte, sont également ajoutés dans une proportion inférieure à 3%. Le rôle de ces sels est double :

- ils peptidisent les molécules de caséine. La caséine se présente sous la forme d'un réseau de protéines, reliées entre elles par des ponts calcium-phosphore. Certains sels (les polyphosphates de sodium et

potassium) peuvent rompre ces ponts (peptidisation), en provoquant un échange entre les ions calcium et sodium ;

- ils assurent un rôle de tampon et maintiennent le pH du fromage fondu entre 5,6 et 6, limites entre lesquelles une bonne qualité au point de vue texture et stabilité est obtenue.

Le schéma de la fabrication est présenté sur la figure 7-1.

Les matières premières, après avoir subi toutes les préparations nécessaires (broyage, laminage), sont envoyées dans un réacteur où la cuisson est réalisée par injection directe de vapeur et où règne une agitation mécanique intense. Il en résulte un mélange complexe de molécules de caséine peptidisées, de matières grasses, de polyphosphates, d'eau, etc..., qui se présente sous la forme d'un liquide blanc peu visqueux.

Il faut signaler qu'au niveau du cuiseur, on introduit également une quantité adéquate de réemploi, c'est-à-dire de fromage fondu obtenu lors d'une fabrication antérieure. On sait que ce réemploi accélère la reconstitution d'une texture satisfaisante que l'on provoquera plus loin dans le procédé, au niveau des cuves de crémage. Nous faisons remarquer ici que les mécanismes d'action du réemploi sont très mal connus.

Une cuve de stockage intermédiaire permet ensuite de passer d'un fonctionnement de type discontinu au niveau des cuiseurs à un fonctionnement quasi-continu dans le reste de l'unité.

Le fromage fondu est alors stérilisé dans trois échangeurs de chaleur à surface raclée, appelés canons : un canon de préchauffage, un canon de chauffage et un canon de refroidissement. Le fondu circule dans l'espace annulaire compris entre deux cylindres concentriques, chauffé, à l'extérieur, par de la vapeur. Le cylindre intérieur tourne de manière à maintenir une agitation continue.

Après stérilisation, le fromage fondu est envoyé vers les cuves de crémage où il doit acquérir sa texture définitive.

L'opération de crémage a lieu à une température proche de 90°C, sous agitation modérée, en une trentaine de minutes environ. Le fromage fondu est ensuite dirigé vers les ateliers de conditionnement, puis est refroidi jusqu'à environ 7°C, température à laquelle il est stocké.

2.2 - LE CREMAGE ET SES PROBLEMES

C'est à l'opération de crémage que nous nous sommes particulièrement intéressé au cours de ce travail.

L'ensemble des phénomènes physico-chimiques qui prennent place au cours du crémage ainsi que l'action des diverses variables, temps de séjour, quantité de réemploi, degré d'agitation, température, etc...., sont mal connus. Sans entrer dans une analyse détaillée, nous dirons simplement que cette étape de la fabrication a pour objet de recréer des liaisons interprotéines pour donner au fromage fondu la texture désirée pour sa commercialisation.

Les trois cuves de crémage de la figure 7-1 fonctionnent en semi-continu. Lorsqu'une cuve est en vidange, la seconde réalise le crémage et la troisième est en remplissage.

Les cuves de crémage offrent, chacune, une capacité de 750 litres. Le fond de la cuve est cylindro-conique. L'agitateur est de type barrière, mais les pales ne sont disposées que sur un seul rayon. Ce mobile comporte trois pales et est muni d'un racleur de paroi qui doit favoriser le transfert thermique avec la double enveloppe, et éviter la formation de croûtes en paroi. La partie inférieure de l'agitateur épouse la forme du fond de la cuve.

Dans les cuves de crémage, la température du fromage fondu est maintenue aux alentours de 90°C et la vitesse de rotation des agitateurs entre 10 et 20 tours par minute.

Les problèmes que la Société BEL nous a soumis, et que nous avons voulu contribuer à résoudre, étaient de deux ordres.

1) Formation de blocs solides

Dans certains cas, des blocs solides se forment au sein des cuves de crémage. Il s'agit, à l'évidence, de fromage trop polymérisé. Une fois que de telles particules sont apparues, elles grossissent de façon irréversible, obligeant à stopper l'opération, à vidanger la cuve et à nettoyer.

2) Hétérogénéité de texture du produit fini

La texture du fromage fondu final est loin d'être parfaitement

constante. Au contraire, elle peut fluctuer largement, ce qui constitue un inconvénient pour la commercialisation et oblige même, dans certains cas, à rejeter des lots entiers.

Plusieurs réunions de travail nous ont permis d'analyser ces problèmes avec les spécialistes de la société BEL et nous ont conduit au diagnostic préliminaire suivant, comportant deux points essentiels :

- le fromage fondu, l'expérience le démontre clairement, est un produit sensible aux contraintes mécaniques. C'est ainsi, par exemple, que le passage à travers une pompe le fluidifie très nettement. En conséquence, nous avons pensé que la formation de blocs solides pouvait être liée à l'existence de zones peu agitées où la polymérisation est trop rapide car non contrebalancée par des ruptures mécaniques de liaisons ;

- les hétérogénéités de structure nous ont paru résulter à la fois de l'inhomogénéité de l'agitation dans tout le volume de la cuve, et de variations du temps de séjour des divers éléments de fromage dans la cuve de crémage ou bien encore de variations des temps de séjour d'une fabrication à une autre. Il faut ici signaler que les contrôles de fabrication, totalement empiriques, reposent sur l'habileté de techniciens expérimentés qui déterminent, à l'oeil, la fin du crémage.

2.3 LE PROGRAMME D'ETUDES

Une solution entièrement rationnelle de tous ces problèmes aurait nécessité la réalisation de très nombreux travaux dont certains, de nature très fondamentale, relatifs en particulier aux mécanismes et à la cinétique du crémage. Nous nous sommes arrêtés à une approche beaucoup moins ambitieuse, centrée essentiellement sur l'analyse des caractéristiques de l'agitation par l'agitateur-barrière et sur un examen des phénomènes de mélange.

Etant données les compétences respectives de divers partenaires et les possibilités de chacun, le programme suivant a été arrêté :

- 1) Etude théorique des caractéristiques des écoulements générés par un agitateur-barrière comportant six pales disposées suivant un diamètre et tournant dans une cuve cylindrique à fond plat. Au cours de cette phase du travail, on doit rechercher quelle géométrie précise de l'agitateur permet de réduire les hétérogénéités de distribution des contraintes, de limiter ou supprimer les zones mortes.

C'est cette partie de l'étude que nous allons développer ici.

2) Etude des caractéristiques du mélange dans des cuves cylindriques à fond plat agitées par un mobile-barrière. Ces travaux ont été réalisés sous la responsabilité du professeur GIBERT, en exploitant une technique électrochimique développée par son équipe (SATAYAPRASERT, 1980), avec un liquide présentant des propriétés voisines de celles du fromage fondu.

3) Réalisation d'essais à l'échelle pilote, avec du fromage fondu, dans le cas de géométries de mobiles s'étant avérées particulièrement convenables au cours des parties 1 et 2. Cette partie relevait de la responsabilité de la société BEL.

Ces projets ont reçu l'agrément de la Direction des Industries Agricoles et Alimentaires qui a accordé une aide financière pour leur réalisation.

Il est bon d'indiquer ici qu'au moment du lancement de ce programme, nos travaux étaient encore peu avancés et, en particulier, nous n'avions réalisé aucune étude de l'agitateur-barrière. Ce sont d'ailleurs les problèmes concrets de la société BEL qui nous ont conduit à examiner ce mobile. Nous avons abordé le travail par le cas des géométries les plus simples, à deux pales de chaque côté de l'axe, à l'aide de la méthode numérique de Gauss-Seidel. Nous avons longuement travaillé sur ce type d'agitateurs, analysant l'influence de la position et de la largeur des pales, et du diamètre de l'arbre. Nous avons déjà présenté au chapitre 6 une partie des résultats ainsi acquis, mais nous y reviendrons pour en tirer les enseignements spécifiques importants pour l'agitation du fromage fondu.

Les difficultés numériques que nous avons rencontrées avec deux pales de chaque côté de l'axe, nous ont fortement fait craindre de ne pouvoir résoudre le cas de la géométrie plus complexe comportant trois pales de chaque côté de l'axe. Voilà pourquoi nous avons développé la méthode numérique A.D.I. que nous avons déjà décrite et que nous avons exploitée en premier lieu dans le cas simple de l'agitateur-bipale.

Nous allons maintenant présenter les travaux que nous avons réalisés en vue de l'amélioration de la fabrication du fromage fondu.

3 - ETUDE THEORIQUE DE L'AGITATION DU FROMAGE FONDU -

3.1 GENERALITES

Bien que cette proposition ne soit pas indiscutable, d'un commun accord, nous avons retenu de chercher à générer, dans la cuve agitée, une distribution aussi uniforme que possible des contraintes, c'est-à-dire que nous avons voulu modifier la géométrie de l'agitateur de telle sorte que les contraintes les plus faibles soient augmentées (disparition des zones mortes à haut risque de formation de blocs) et que les contraintes les plus fortes soient diminuées (élimination des risques de trop grande fluidification du produit). Une fois cette uniformisation réalisée dans toute la mesure du possible, par modification de la géométrie, on peut fixer le niveau des contraintes, par action sur la vitesse de rotation de l'agitateur. Ce dernier réglage ne peut qu'être de nature empirique, puisqu'on ne connaît pas les lois cinétiques du crémage ; notons d'ailleurs que plusieurs solutions sont certainement possibles, en fonction de la vitesse de rotation de l'agitateur ou de la durée du crémage, par exemple.

Notre travail a donc consisté à rechercher, par modifications successives de la géométrie, à uniformiser la distribution des contraintes.

3.2 AGITATEUR-BARRIERE A DEUX PALES

C'est avec un mobile à deux pales de part et d'autre de l'axe que nous avons commencé à travailler et que nous avons obtenu l'ensemble des résultats qui ont déjà été présentés dans le chapitre 6, hors du contexte de crémage du fromage fondu. Nous voulons ici insister sur le fait que ces travaux ont fourni une masse considérable de renseignements qui étaient tout à fait inconnus auparavant. Par dessus tout, nous retiendrons qu'ils ont montré très clairement que la distribution des contraintes était très inhomogène, dans le cas correspondant aux mobiles mis en oeuvre jusque là chez BEL, à pales de même largeur (voir le cas des géométries numéros 1 à 4). Ainsi, l'hypothèse initiale consistant à corrélérer les ennuis de fabrication à une mauvaise distribution des contraintes, sortait-elle confortée de l'examen de cette première série de résultats.

Plus en détail, cette première étude nous a permis d'établir les éléments suivants.

3.2.1 Agitation au centre de la cuve

Nous examinons avec attention ce qui se passe dans cette région, car c'est au voisinage immédiat de l'axe que la plupart du temps apparaissent les blocs solides. Nous allons revenir sur l'écoulement généré par cinq des géométries définies et étudiées au chapitre 6.

Les figures 7-2 à 7-4 montrent les variations des contraintes de cisaillement et de la dissipation visqueuse dans la région de l'arbre d'agitation, pour les géométries 1, 5 et 6 (variations de D_A/T de 0,042 à 0,250).

En première approximation, les contraintes de cisaillement (figures 7-2 et 7-3) sont peu affectées par le diamètre de l'arbre d'agitation. Néanmoins, en certains points au voisinage de $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, nous observons que $\tau_{r\theta}^*$ augmente en valeur absolue lorsque le rayon de l'axe diminue, aussi bien sur l'axe que sur le rayon qui lui est le plus proche. Le taux de dissipation visqueuse ϕ_v^* , en-dehors des positions angulaires $\theta^* = 0$ et $\theta^* = \pi$, augmente lorsque D_A/T diminue.

En conséquence, pour augmenter au centre de la cuve la valeur des contraintes, il faut un axe de petit diamètre. Ce diamètre toutefois ne doit pas être trop faible car, à l'occasion d'essais expérimentaux où un agitateur sans arbre a été testé, nous avons assisté à la formation de croûtes, dues à un évident manque d'agitation. C'est pourquoi nous retenons le diamètre déjà utilisé par la société BEL et tel que $D_A/T = 0,05$.

Nous présentons sur la figure 7-5 les variations de $\tau_{r\theta}^*$ en fonction de la position radiale r^* pour trois positions angulaires différentes $\theta^* = 0$, $\theta^* = \frac{\pi}{4}$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$. Les deux géométries considérées sont la numéro 2 et la numéro 4. Nous nous intéressons simplement à la zone $D_A/T < r^* < \frac{D_{Y0}}{T}$ ($\frac{D_{Y0}}{T} = 0,189$ pour la géométrie numéro 2 et $\frac{D_{Y0}}{T} = 0,361$ pour la géométrie numéro 4) :

- sur l'arbre d'agitation, $\tau_{r\theta}^*$ est légèrement plus grand en valeur absolue pour la géométrie numéro 2 ;
- la géométrie numéro 2 permet d'atteindre un maximum pour $\tau_{r\theta}^*$ ($\tau_{r\theta}^* = 1,7$) assez rapidement ($r^* = 0,189$) ;
- à $\theta^* = \frac{\pi}{4}$ et à $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, pour les positions radiales $D_A/T < r^* < 0,12$, la contrainte de cisaillement est plus grande en valeur absolue dans le cas de la géométrie numéro 2.

En conséquence, et sans donner plus de résultats, nous préconisons de rapprocher la première pale de l'axe pour éviter les blocs solides dans cette région.

3.2.2 Agitation à la périphérie de la cuve

Dans le but de ne pas multiplier les résultats présentés, nous n'indiquons sur la figure 7-6 que les valeurs de $\tau_{r\theta}^*$ pour la position angulaire, $\theta^* = 0$, là où les maxima sont observés. Dans le cas, par exemple, de la géométrie numéro 4, ce maximum est voisin de 13 : cette valeur est de l'ordre de 10 fois celles observées près de l'axe.

Pour diminuer cette valeur, nous avons rapproché la deuxième pale du centre de la cuve, et obtenu la géométrie numéro 2. La contrainte maximale est alors égale à 8.

D'autre part, en diminuant la largeur de la pale, aucune variation importante de $\tau_{r\theta}^*$ n'est notée. Rappelons à ce sujet que nous avons mis en évidence, lors de l'étude de l'agitateur à ancre, une viscosité apparente proche de celle du fluide au repos sur la pale de l'agitateur (chapître 5, paragraphe 6) : dans le cas du fromage fondu, ceci se traduirait par une agglomération de produit sur la pale. Comme, dans cette région, les contraintes sont suffisantes, nous avons intérêt à diminuer la largeur de la pale, ne serait-ce que pour économiser de l'énergie mécanique.

Ajoutons qu'à l'extrémité de la deuxième pale, pour $\theta^* = 6^\circ$, le maximum de ϕ_v^* est divisé par 5 environ, lorsqu'on passe de la géométrie numéro 4 à la géométrie numéro 6 (figures 6-28 à 6-29 du chapître 6).

Nous avons observé au chapître 6 que, pour les géométries numéros 2 et 6 (figures 6-19, 6-21, 6-26 et 6-29), les contraintes et la dissipation visqueuse étaient petites en paroi de cuve. Comme, de plus, du fait de l'adhérence à une paroi solide, existent des risques de croûtage, on a intérêt à racler cette surface, ce qui est réalisé en pratique.

3.2.3 Eléments de conclusion

Les remarques précédentes nous ont conduit à simuler par la méthode A.D.I. l'écoulement généré par un agitateur-barrière à trois pales, ayant les caractéristiques suivantes :

- faible écartement entre axe et première pale ;
- écartement important entre dernière pale et paroi ;
- dernière pale étroite.

3.3 AGITATEUR-BARRIÈRE A TROIS PALES

3.3.1 Description

Après quelques essais numériques, nous avons proposé pour la chaîne pilote, constituée essentiellement par une cuve de diamètre égal à 500 millimètres, le mobile dont les dimensions apparaissent sur la figure 7-7, en millimètres. Les caractéristiques de cet agitateur sont telles que, lorsqu'on s'éloigne de l'axe vers la paroi de la cuve, la largeur des pales diminue et l'espacement entre pales augmente. Nous avons simulé le fonctionnement de ce mobile, dans le cadre de nos hypothèses habituelles, pour un nombre de Reynolds égal à 1 et pour un fluide newtonien.

3.3.2 Résultats

La figure 7-8 représente les variations de la composante tangentielle v_{θ}^* en fonction de la position radiale r^* . Le résultat obtenu est très similaire à ceux déjà observés avec les mobiles à deux pales. On peut noter le léger écoulement en retour au voisinage de la paroi de la cuve.

Pour la position angulaire $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ (figure 7-9), les variations de v_{θ}^* avec r^* sont représentées par une courbe à maximum : le maximum est assez proche du centre de la cuve, puisque situé à $r^* = 0,312$. La composante radiale est représentée sur la figure 7-10, à la position angulaire $\theta^* = 6^\circ$: nous notons surtout une valeur importante à la périphérie de la cuve où le liquide est chassé vers la paroi. Aux autres positions angulaires, les variations de v_r^* et v_{θ}^* sont identiques à celles enregistrées avec des agitateurs-barrières à deux pales.

La figure 7-11 montre les variations des contraintes τ_{rr}^* et $\tau_{r\theta}^*$ en fonction de r^* pour $\theta^* = 0$. $\tau_{r\theta}^*$ offre toujours les mêmes caractéristiques : un minimum local au bord interne d'une pale, un maximum local sur le bord externe. De plus, il apparaît sur la figure 7-11 qu'il n'existe pas de zones importantes où $\tau_{r\theta}^*$ est faible en valeur absolue. Par conséquent, multiplier le nombre de pales crée une succession de minima et maxima, probablement favorable à l'agitation du fromage fondu. Sur la figure 7-12, nous avons représenté les variations du taux de dissipation visqueuse en fonction de r^* pour $\theta^* = 0$. Toutes les extrémités de pales, à l'exception de l'extrémité interne de la première, et la surface de l'arbre sont des points où ϕ_v^* n'est pas négligeable. Par conséquent, les

gradients de vitesse apparaissent régulièrement répartis sur cette position angulaire.

Pour $Re = 1$, le nombre de puissance de ce mobile vaut 197.

Cet agitateur à trois pales possède un diamètre tel que $\frac{D}{T} = 0,73$, exactement comme le mobile de la géométrie numéro 3. Or, dans ce dernier cas, le produit $NpRe$ était égal à 213. Les deux résultats sont très comparables ; nous verrons d'ailleurs au chapitre 8, que le rapport $\frac{D}{T}$ est le principal paramètre qui influence $NpRe$.

3.3.3 Eléments de conclusion

A l'issue de cette analyse, il est clair que la géométrie que nous avons proposée et testée, permet d'obtenir une répartition beaucoup plus homogène des contraintes dans tout le volume de la cuve. Pour s'assurer de cette proposition, il suffit de comparer les résultats présentés sur la figure 7-11 avec ceux présentés dans le chapitre 6, sur la figure 6-18 par exemple. Il est également clair qu'avec un agitateur barrière, il ne sera jamais possible d'obtenir une distribution complètement homogène et qu'il existera toujours, au voisinage immédiat des pales, des extrema de contraintes.

Etant données toutes les hypothèses émises lors de la formulation du problème, nous avons choisi d'arrêter là la procédure théorique et de confronter la géométrie de mobile retenue à des tests expérimentaux.

4 - ESSAIS PILOTES -

4.1 APPAREILLAGE ET MODE OPERATOIRE

Rappelons que nous venons d'étudier le comportement d'un agitateur barrière comportant trois pales de chaque côté de l'axe. Le mobile construit et monté sur une chaîne-pilote par la société BEL diffère de celui-ci en trois points :

- pour des raisons de facilité de montage et de nettoyage, il ne comprend de pales que sur un rayon, et possède donc trois pales au total ;
- il est muni d'un racleur en paroi de cuve (nous en avons justifié l'existence) ;

- le fond de cuve est cylindro-conique et raclé par l'agitateur (figure 7-7).

Les essais ont été réalisés aux Fromageries BEL de Lons le Saunier dans une cuve de diamètre 500 mm. Cette cuve a été installée en dérivation d'une chaîne de fabrication, de façon à ce que son fonctionnement puisse à tout moment être comparé à celui des cuves actuellement en fonctionnement.

Le mode opératoire retenu ne comprend que l'observation visuelle de la surface supérieure de la cuve et la recherche éventuelle de blocs solides. Bien qu'il ne s'agisse là que d'une méthode qualitative, l'expérience montre qu'elle est extrêmement fiable pour caractériser la qualité du fromage fondu, lorsqu'elle est mise en oeuvre par des gens compétents. Précisons que c'est à l'aide des mêmes procédures que les mêmes spécialistes contrôlent le fonctionnement des cuves de crémage sur les chaînes de production.

4.2 ESSAIS REALISES

Nous rapportons ci-dessous l'essentiel des essais réalisés.

Essai 1

Il s'agit de l'observation du comportement de l'agitateur utilisé couramment par les Fromageries BEL, agitateur-rayon ayant deux pales verticales de faible largeur et créant trois espaces identiques dans la cuve. Nous reprenons les termes exacts du rapport que Monsieur Daurelles, ingénieur à la société BEL, a rédigé à l'intention de la D.I.A.A.

"Ce module génère, après quatre heures de manipulation, un gradient de consistance très important entre le centre de la cuve où le fondu se solidifie et sa périphérie où il est très liquide (...). Ce type d'agitateur, actuellement sur la chaîne de fabrication, est mal adapté à la production d'un produit régulier en consistance".

Essai 2

Cet essai a été mené avec le mobile de la figure 7-7. Dès le début de la manipulation apparaît en avant de la première pale un fondu très visqueux qui forme pratiquement un bloc solide sur un quart de tour. Cette zone morte est poussée par la pale. Comme précédemment, la grosse partie du bloc s'évacue lors de la vidange causant d'importantes

perturbations. Après cinq heures de manipulation, le premier espace axe-pale est obstrué ; la pâte forme avec l'axe un bloc compact où ne règne aucune circulation.

Au niveau de la deuxième pale et jusqu'à la paroi s'effectue par contre une bonne agitation.

Essai 3

Les résultats du chapitre 6 ont montré que, quelle que soit la géométrie du mobile étudiée, la vitesse radiale est toujours faible dans la zone proche de l'arbre d'agitation. Or, dans cette région qui se montre propice à la création de blocs solides, on a intérêt à générer une circulation radiale. Nous avons donc envisagé d'incliner la première pale de l'agitateur. Un bloc solide se forme toujours autour de l'axe ; il est néanmoins de moins grand volume que précédemment.

Cet essai nous conduit à revenir sur la cause de formation du bloc :

- défaut de contrainte à ce niveau,
- ou caractéristiques très collantes du fondu qui adhérerait à l'arbre de l'agitateur et constituerait une croûte.

Essai 4

Dans ce cas, l'axe de l'agitateur que nous avons suggéré (figure 7-7) a été enlevé. On note après plusieurs heures de fonctionnement l'apparition d'un bloc au centre de la cuve. Comme il n'y a pas d'arbre central, l'hypothèse de la formation d'une croûte en surface ne peut plus être retenue ; incontestablement donc, les blocs solides résultent d'un manque de cisaillement. Les blocs s'évacuent à la vidange mais cette solution n'est pas satisfaisante, car elle génère des irrégularités de consistance du produit fini.

A l'issue des quatre premiers essais nous savons que l'absence de contraintes suffisantes provoque, comme on l'avait supposé dès le début, la formation de blocs. Il faut donc conserver un mobile avec arbre central qui évite l'existence de la zone nécessairement morte au niveau de l'axe de symétrie.

Mais nous savons aussi qu'alors que le calcul démontre l'existence de contraintes non négligeables au voisinage de l'arbre il y a néanmoins

formation de blocs. Nous pensons donc que la seconde possibilité (adhérence à l'arbre et formation de croûtes) doit aussi être prise en considération. Comme nous n'avons pas envisagé cette éventualité en posant le problème, nulle solution n'avait été prévue.

Après analyse et discussion avec les autres partenaires partie prenante au programme, nous avons réalisé les essais suivants.

Essai 5

L'arbre en acier inox a été revêtu d'une bande de téflon. Dans ce cas, le dépôt sur l'axe a été moins important. Le téflon toutefois n'empêche pas la formation du bloc solide. Celui-ci glisse seulement plus vite le long de l'axe et s'évacue au cours de la vidange. Cette solution n'est pas idéale car on observe encore des irrégularités de consistance sur le produit fini. C'est pourquoi, lors d'une réunion de synthèse avec les spécialistes de la société BEL, nous avons retenu de disposer un râcleur sur l'axe, de la même manière qu'il en existe un en paroi de cuve.

Essai 6

Deux racleurs diamétralement opposés ont été fixés en bas de cuve ; pour permettre le passage de ces racleurs, le support inférieur des pales a été coupé, ce qui diminue la solidité de l'agitateur. Ce montage a été testé et a donné de bons résultats : absence totale de dépôt sur l'axe, pas de formation de blocs et bonne circulation du produit. Deux points particuliers demeurent à régler :

- la résistance mécanique de l'agitateur ;
- la facilité de montage et de nettoyage.

Essai 7

Un système de raclage différent a été envisagé. Un tube fixé à la base de la cuve entoure l'axe d'agitation qui n'est plus en contact avec le fondu. Ce tube est raclé par une pale supplémentaire fixée sur l'agitateur. Les résultats sont excellents.

Les deux problèmes précédents restent néanmoins à régler.

5 - CONCLUSION -

Nous empruntons notre premier élément de conclusion à Monsieur Daurelles, qui conclut son rapport de la façon suivante :

"Cette étude importante pour les Fromageries BEL a permis de définir et de tester deux systèmes (agitateurs + racleurs) utilisables industriellement moyennant quelques optimisations de montage. Ce système d'agitation permet une bonne répartition des contraintes de cisaillement et donc une polymérisation homogène dans ce réacteur. Cette régularité se traduit sur le produit fini par une consistance et une texture optimales et stables. Notons de plus, que ce système d'agitation est simple, peu énergivore et adaptable sur toutes les cuves actuellement en service dans nos usines de fonte".

Ainsi l'objectif industriel poursuivi a-t-il été atteint, à la satisfaction des Fromageries BEL.

Nous pouvons ajouter deux brefs commentaires supplémentaires.

Le premier commentaire concerne le diagnostic initial qui a posteriori apparaît maintenant très incomplet. Le problème de l'uniformité de qualité du produit lié à une distribution homogène des contraintes avait été posé correctement et le résultat a pu être observé immédiatement. Par contre, le phénomène de croûtage sur l'axe de l'agitateur n'avait pas été évoqué et son importance n'a été mise en évidence que par les tests sur cuve pilote. Dans ce cas, la solution n'était en rien liée à l'étude théorique que nous avons réalisée.

Notre second commentaire veut insister sur le fait que la connaissance hydrodynamique détaillée que nous possédons maintenant permettrait des analyses beaucoup plus fines, si nous disposions des données physico-chimiques nécessaires, relatives en particulier à la cinétique de crémage et à son évolution avec l'intensité des contraintes appliquées. Une poursuite du travail en ce sens serait très intéressante au plan scientifique même si, aujourd'hui, aucun problème particulier de fabrication ne semble justifier un tel effort.

C H A P I T R E 8 :

DISCUSSION DES RESULTATS

1 - INTRODUCTION

2 - PUISSANCE D'AGITATION

3 - ANALYSE DES RESULTATS LOCAUX

4 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES NUMERIQUES

5 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES EXPERIMENTALES

6 - COMMENTAIRES A POSTERIORI SUR LA MISE EN FORME DU PROBLEME

7 - CONCLUSION

1 - INTRODUCTION -

L'intérêt majeur des résultats acquis par voie théorique qui ont été présentés dans la deuxième partie de ce mémoire et confirmés par une confrontation détaillée avec des données expérimentales, est d'exister et d'être disponibles pour quiconque souhaite les utiliser pour résoudre un problème donné. En ce sens, ils ne nécessitent pas d'analyses ou de commentaires supplémentaires.

Il nous a semblé toutefois intéressant de dépasser ce premier niveau et de tenter de dégager des enseignements supplémentaires et des conclusions plus générales.

En premier lieu, nous pensons qu'il est nécessaire de revenir sur l'examen des résultats antérieurs, tels qu'ils ont été présentés dans le chapitre 1 et de développer quelques comparaisons, soit en ce qui concerne des données locales (résultats de PETERS et SMITH, 1967, par exemple), soit en ce qui concerne la puissance d'agitation (théorie macroscopique de METZNER et OTTO, par exemple).

En second lieu, il n'est pas inutile de chercher à dégager des tendances générales pour l'influence de certains paramètres. Nous pourrions ainsi suggérer de grandes lois, éventuellement extrapolables, avec toute la prudence nécessaire, à d'autres mobiles dont la géométrie ne se prête pas à une analyse théorique.

Enfin, nous voulons dresser le bilan des difficultés que nous avons rencontrées et suggérer des voies de développement pour le futur.

2 - PUISSANCE D'AGITATION -

La puissance d'agitation constitue une donnée de grande importance pour l'ingénieur qui conçoit un système mécaniquement agité. Notre travail offre la possibilité de calculer la puissance par intégration sur tout le volume de la cuve du taux de dissipation visqueuse ; maintenant que les méthodes sont au point, cette procédure n'est ni très longue, ni très coûteuse. Nous pensons cependant que beaucoup de praticiens souhaitent disposer de méthodes plus simples. Nous proposons donc les développements suivants.

2.1 FLUIDES NEWTONIENS

Pour tous les mobiles étudiés, nous avons établi que le produit $NpRe$ demeure constant, à faible nombre de Reynolds, puis pour des valeurs plus élevées augmente légèrement avec le nombre de Reynolds. Ainsi, dans le domaine où il y a constance et pour un fluide newtonien, $NpRe$ ne dépend que de la géométrie du système.

Dans le cas simple d'un agitateur constitué de deux cylindres coaxiaux, nous avons montré (équation A.27 de l'annexe 1) que $NpRe$ est égal à :

$$NpRe = \frac{124}{\frac{D}{T} - \left(\frac{D}{T}\right)^3} \quad (8.1)$$

Pour ce système, D désigne le diamètre du cylindre intérieur et T celui du cylindre extérieur. Cette relation a été représentée graphiquement sur la figure A-5 de l'annexe 1, nous observons que les variations de $NpRe$ avec $\frac{D}{T}$ sont illustrées par une courbe à minimum.

Nos résultats concernant la puissance consommée par un agitateur-bipale à faible nombre de Reynolds sont rassemblés dans le tableau 8-1, où nous avons également rapporté les travaux de NAGATA et coll. (1957) déjà cités, dans le chapitre 1. Nous ferons deux commentaires :

- l'accord entre nos résultats numériques et ceux de NAGATA et coll. (1957) est très satisfaisant, puisque l'écart maximum est de 7,1% ;
- les variations de $NpRe$ avec $\frac{D}{T}$ sont semblables à celles observées dans le cas de deux cylindres coaxiaux.

Nous rapportons dans le tableau 8-2 les valeurs du produit $NpRe$, à faible nombre de Reynolds dans le cas de l'agitateur à ancre. Dans la gamme de variations de $\frac{D}{T}$ examinée, nous observons que $NpRe$ augmente d'abord lentement avec $\frac{D}{T}$, puis que l'augmentation s'accélère à partir de 0,85-0,90.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux fournis par trois groupes d'auteurs. Sauf dans le cas de TAKAHASHI et coll. (1980), la largeur des pales et celle du bras inférieur ne sont pas précisées dans les travaux correspondants. Rappelons que dans notre cas, nous avons maintenu constante la largeur des pales, $\frac{w}{T} = 0,0737$.

TABLEAU 8-1 - Valeurs comparées du produit $NpRe$ à faible nombre de Reynolds
Agitateur bipale

$\frac{D}{T}$	0,336	0,508	0,656	0,828
$NpRe$ calculé	212	175	182	227
$NpRe$ donné par NAGATA et coll. (1957)	224	187	183	212
Ecart (%)	5,7	6,9	0,5	7,1

TABLEAU 8-2 - Valeurs comparées du nombre de puissance à faible nombre de Reynolds. Agitateur à ancre

$\frac{D}{T}$	0,730	0,779	0,828	0,926
$NpRe$ calculé	148	149	173	227
$NpRe$ donné par SAWINSKY et coll. (1976)	156	163	175	237
$NpRe$ donné par SCHILO (1969) $Re = 0,1$	157	162	171	209
$NpRe$ donné par SCHILO (1969) $Re = 1$	198	204	216	263
$NpRe$ donné par TAKAHASHI et coll. (1980) $\frac{w}{T} = 0,0737$	183	188	199	277

En ce qui concerne les valeurs de $NpRe$, nos résultats sont en accord avec ceux de SAWINSKY et coll. (1976) et de SCHILO (1969), à $Re = 0,1$, plus faibles que ceux des autres chercheurs.

Nous observons, en outre, une très grande similitude des allures de variation entre tous les résultats.

Enfin, sur le tableau 8-3, nous donnons les valeurs du produit $NpRe$ pour un agitateur-barrière. Nous ne considérons que les quatre premières géométries pour lesquelles le rapport $\frac{D_A}{T}$ est égal à celui des deux cas précédents, et où la largeur des pales est la même, et égale à 0,0737. Comme pour l'agitateur à ancre, nous observons une croissance, lente au début, puis qui s'accélère.

Par conséquent, pour les quatre systèmes examinés ci-dessus, les tendances sont les mêmes. Aussi en nous inspirant de l'équation (8.1), avons-nous recherché pour chaque mobile une corrélation du type :

$$NpRe = \frac{C}{\frac{D}{T} - \left(\frac{D}{T}\right)^3} \quad (8.2)$$

Les valeurs de la constante C sont rapportées dans le tableau 8-4.

En première approximation, nos résultats sont bien représentés par l'équation (8.2) pour un agitateur-bipale et un agitateur-barrière puisque les écarts moyens respectifs sont de 4,5 et 6%. Ils sont moins bien représentés par la corrélation (8.2) dans le cas d'un agitateur à ancre. Mais, il faut indiquer que l'écart provient essentiellement du cas du plus grand diamètre. En effet, si on élimine le mobile à $\frac{D}{T} = 0,926$, la constante C devient égale à 47 et l'écart moyen à 4,3%, ce qui est très convenable.

Nous avons également indiqué les valeurs de la constante C pour l'agitateur à cylindres coaxiaux et l'agitateur-barrière à trois pales. Nous pouvons ainsi établir une hiérarchie entre les divers mobiles, en allant de celui qui consomme le moins à celui qui consomme le plus, à diamètre D donné, soit :

- l'agitateur à ancre ;
- l'agitateur-bipale ; les agitateurs-barrières ;
- les cylindres coaxiaux.

TABLEAU 8-3 - Valeurs comparées du nombre de puissance à faible nombre de Reynolds. Agitateur barrière (géométries numéros 1 à 4)

$\frac{D}{T}$	0,631	0,656	0,730	0,828
NpRe calculé	167	170	213	236

TABLEAU 8-4 - Constante C définie par l'équation (8.2)

Agitateur	C _{moyen}	Ecart moyen (%)
Bipale	64	4,5
Ancre	43	17,8
Barrière	65	6
Cylindres coaxiaux	124	-
Barrière à trois pales	67	-

2.2 FLUIDES NON-NEWTONIENS

Nous avons cherché à analyser nos résultats dans le cadre de la théorie de Metzner et Otto (1957). Rappelons que cette théorie prévoit, dans le cas d'un fluide pseudoplastique suivant la loi d'Ostwald de Waele, $NpRe = A(B)^{n-1}$.

Le coefficient A est la valeur du produit $NpRe$ obtenu lors de l'agitation d'un fluide newtonien. Le coefficient B représente le rapport entre le gradient de vitesse moyen dans la cuve agitée et la vitesse de rotation du mobile (voir chapitre 1).

Pour les trois agitateurs étudiés, la représentation de Metzner et Otto (1957) s'avère convenable.

Ainsi, nous avons obtenu :

- pour un agitateur bipale de diamètre $\frac{D}{T} = 0,508$:

$$NpRe = 175 (7,3)^{n-1} \quad \text{pour le modèle d'Ostwald de Waele} \quad (8.3)$$

et
$$NpRe = 175 (1 + 1,35 \lambda^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{pour le modèle de Carreau} \quad (8.4)$$

- pour un agitateur à ancre :

$$\frac{D}{T} = 0,779 \quad : \quad NpRe = 149 (1 + 6,5 \lambda^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad (8.5)$$

$$\frac{D}{T} = 0,828 \quad : \quad NpRe = 173 (1 + 19,9 \lambda^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad (8.6)$$

Nous avons signalé en introduction du chapitre 5 que l'utilisation du modèle de Carreau avec $\lambda^* = 2 \pi$ conduit à des résultats presque identiques à ceux fournis par le modèle d'Ostwald de Waele avec le même indice de comportement fluide. C'est pourquoi nous pouvons transformer les corrélations (8.5) et (8.6) pour qu'elles s'appliquent à un fluide suivant le modèle d'Ostwald de Waele ; nous obtenons :

$$\frac{D}{T} = 0,779 \quad : \quad NpRe = 149 (16)^{n-1} \quad (8.7)$$

$$\frac{D}{T} = 0,828 \quad : \quad NpRe = 173 (28)^{n-1} \quad (8.8)$$

N'oublions pas que le nombre de Reynolds n'est pas défini de la même manière pour tous les modèles (voir chapitre 2).

- Pour un agitateur-barrière, les résultats sont :

géométrie numéro 2

$$\frac{D}{T} = 0,656 \quad ; \quad NpRe = 169 (1 + 3,05 \lambda^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad (8.9)$$

pour le modèle de Carreau, et

$$NpRe = 169 (12,6)^{n-1} \quad (8.10)$$

pour le modèle d'Ostwald de Waele.

géométrie numéro 6

$$\frac{D}{T} = 0,615 \quad ; \quad NpRe = 161 (1 + 2,47 \lambda^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad (8.11)$$

pour le modèle de Carreau, et

$$NpRe = 161 (9,9)^{n-1} \quad (8.12)$$

pour le modèle d'Ostwald de Waele.

Pour un agitateur à cylindres coaxiaux, nous obtenions en annexe 1 :

$$B = \left\{ 7,96 \cdot 10^{-2} \left(\frac{4\pi}{n} \right)^n \frac{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^n} \sqrt{7}^n} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (8.13)$$

L'ensemble des résultats précédents montre que le coefficient B augmente avec le rapport $\frac{D}{T}$.

Pour un agitateur bipale tel que $\frac{D}{T} = 0,5$, HIRAOKA et coll. (1979) ont obtenu :

$$6,8 < B < 7,9 \quad (8.14)$$

Notre résultat, $B = 7,3$, est compris entre les deux bornes précédentes.

Pour un agitateur à ancre, nos résultats sont pour $\frac{D}{T} = 0,779$, du même ordre que ceux de SCHILO (1969), ($B = 14,2$ pour $n = 0,7$), et pour $\frac{D}{T} = 0,828$, du même ordre que ceux de CALDERBANK et MOO-YOUNG (1959), ($B = 30,1$ pour $n = 0,7$). Les différences proviennent certainement du fait que les caractéristiques géométriques des mobiles ne sont pas identiques. Rappelons en effet que le coefficient B calculé dans ce travail a pour origine une analyse numérique sur un agitateur à ancre sans bras inférieur, alors que les coefficients B rapportés par CALDERBANK et MOO-YOUNG (1959), SCHILO (1969), etc.... résultent de calculs effectués à partir de déterminations expérimentales sur une ancre munie d'un bras inférieur.

Ainsi, au cours de ce paragraphe, avons-nous pu successivement proposer une première série de corrélations pour calculer la puissance d'agitation d'un fluide newtonien, puis une seconde série, inspirée de la théorie de METZNER et OTTO (1957), pour traiter le cas de fluides pseudo-plastiques. L'utilisateur trouvera donc là, les outils simples et précis dont il a besoin.

Nous suggérons par ailleurs des formes de fonction qui sont peut-être, avec toute la prudence nécessaire, transposables à d'autres types de mobiles.

Enfin, nous avons exprimé lors de l'analyse bibliographique du chapitre 1 quelques réserves quant à la clarté des divers concepts utilisés par METZNER et OTTO (1957). Après avoir décrit dans les chapitres 4, 5 et 6 les distributions détaillées de vitesses et de contraintes, nous pouvons confirmer sans discussion, que les viscosités et gradients de vitesse apparents manipulés par ces auteurs ne présentent aucune réalité physique et ne traduisent en rien la complexité des phénomènes réels. Ainsi, suggérons-nous de retenir la procédure en tant que technique d'ingénierie commode, mais sans lui attribuer un fondement scientifique quelconque.

3 - ANALYSE DES RESULTATS LOCAUX -

3.1 COMPARAISON AVEC LES TRAVAUX ANTERIEURS

Les comparaisons entre les résultats locaux que nous avons obtenus au cours de ce travail et les données d'autres auteurs sont difficiles,

étant donné le manque presque total de travaux dans ce domaine (déjà signalé au chapitre 1).

Les résultats que donnent HIRAOKA et coll. (1978) sont d'une part rares, d'autre part difficilement comparables aux nôtres, car ils apparaissent essentiellement sous une forme qualitative. Nous signalerons simplement que les lignes de courant par exemple sont similaires dans les deux études.

Sur la figure 4-3 du chapitre 1, nous présentons des profils de vitesse tangentielle acquis par PETERS et SMITH (1967) en trois positions angulaires différentes dans la cuve, $\theta^* = 0$, $\theta^* = 90^\circ$ et $\theta^* = 150^\circ$. Ces travaux étaient relatifs à un fluide newtonien et à un nombre de Reynolds égal à 10. PETERS et SMITH (1967) ont utilisé un agitateur à ancre tel que :

$$\frac{D}{T} = 0,85 \quad \text{et} \quad \frac{W}{T} = 0,11$$

Nous avons comparé ces résultats à ceux obtenus pour l'agitateur à ancre tel que $\frac{D}{T} = 0,828$ et $\frac{W}{T} = 0,0737$. La comparaison apparaît sur la figure 8-1 où les valeurs de v_{θ^*} sont exprimées dans un repère lié à l'agitateur. Les allures de variation sont très semblables. Remarquons en particulier que, à la position angulaire $\theta^* = 90^\circ$, nos valeurs et celles de PETERS et SMITH (1967) sont, malgré les différences de géométrie, presque identiques.

3.2 TENDANCES GENERALES

De l'ensemble des travaux que nous avons réalisés, ressortent plusieurs tendances générales que nous mettons brièvement en évidence ci-dessous.

3.2.1 Distributions des fonctions courant et rotationnel, des vitesses et des contraintes

A $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, pour les trois systèmes étudiés, la fonction courant augmente légèrement, lorsqu'on s'éloigne de l'axe puis décroît ensuite jusqu'à la valeur ϕ_p^* . A part le début de l'enregistrement, une même variation se retrouve dans le cas des deux cylindres coaxiaux (figure A-1 de l'annexe 1). A $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, la fonction rotationnel pour les trois systèmes décroît de façon monotone. La vitesse tangentielle v_{θ^*} est une courbe à maximum.

La contrainte normale est dans les trois cas, très faible. La contrainte de cisaillement augmente presque régulièrement de l'axe jusqu'à la paroi de la cuve. Ainsi, sur cette position angulaire, et pour l'ensemble des grandeurs examinées, tous les types de mobile conduisent sensiblement au même résultat.

Par opposition à ce qui précède, dans le prolongement de l'agitateur, à $\theta^* = 0$, chaque enregistrement est caractéristique de la géométrie considérée. Par exemple, à chaque extrémité de pales, ω^* , $\tau_{r\theta}^*$, τ_{rr}^* et ϕ_v^* prennent des valeurs très grandes en valeur absolue ; les valeurs les plus élevées sont toujours obtenues à l'extrémité externe de la dernière pale. Dans tous les cas, plus le rapport $\frac{D}{T}$ est important et plus les maxima de chacune des quatre grandeurs considérées sont importants.

Nous avons également noté que la composante radiale de la vitesse v_r^* demeure presque toujours faible.

3.2.2 Influence du nombre de Reynolds

De manière générale, le nombre de Reynolds n'a qu'une influence modérée sur l'ensemble des distributions de vitesses, de contraintes, et également sur le produit $NpRe$.

Toutefois, et en nous penchant sur des détails, nous avons constaté au chapitre 4 par exemple des variations de la fonction courant en paroi avec le nombre de Reynolds. La première conséquence de nos résultats qui est apparue est que, dans un repère lié à l'agitateur, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le débit entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve diminue. La même tendance a été observée lors de l'étude de l'agitateur à ancre.

Dans un repère lié à la paroi de la cuve, ceci signifie que le débit entre l'extrémité de la pale et la paroi augmente avec le nombre de Reynolds. Toutes choses étant égales par ailleurs, pour un fluide newtonien par exemple, lorsque la viscosité diminue, le débit de liquide augmente.

3.2.3 Influence de la rhéologie

Dans la plupart des cas, nous avons constaté que les distributions de vitesses et contraintes par exemple étaient sensiblement indépendantes de l'indice de comportement fluide. Néanmoins, de manière plus précise,

en observant les courbes de vitesse tangentielle que nous avons données, en considérant la figure A-2 de l'annexe 1 relative aux cylindres coaxiaux, il apparaît qu'une diminution de l'indice de comportement d'un fluide pseudoplastique provoque les mêmes effets qu'une augmentation de viscosité sur le débit de circulation.

Rappelons que généralement, on s'accorde pour dire que plus le caractère pseudoplastique d'un fluide est marqué (n petit), plus l'étendue des zones mortes loin de l'agitateur est importante : c'est pour cette raison d'ailleurs que des agitateurs de grand diamètre sont préconisés pour l'agitation de fluides non-newtoniens.

Dans tous les cas où nous avons commenté l'influence de l'indice de comportement fluide, nos résultats ont montré que cette influence demeurait modérée. Mais, de manière plus précise, il est apparu que la région à vitesse voisine de zéro près de la paroi grossissait lorsque n diminuait. En complément de ce résultat, nous avons noté que le taux de dissipation visqueuse augmentait en bout de pale lorsque n diminuait. Par conséquent, lorsque n diminue le flux de quantité de mouvement dans la direction r est moins intense, davantage d'énergie étant dissipée au voisinage immédiat des pales.

4 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES NUMERIQUES -

Les deux techniques numériques utilisées à l'occasion de ce travail ont fourni un très grand nombre de résultats. Nous avons vu, en outre, au chapitre 7, que ces techniques pouvaient constituer la base d'outils de conception d'unités performantes. Néanmoins, ces méthodes présentent des limitations, certaines difficultés doivent être surmontées ; nous en faisons l'analyse ci-dessous.

4.1 METHODE DE GAUSS-SEIDEL

Pour que le calcul converge vers une solution, certaines conditions doivent être remplies :

- les deux valeurs introduites à l'instant initial pour chacune des constantes ϕ_D^* , ϕ_A^* , ϕ_{B1}^* et ϕ_{B2}^* doivent encadrer la valeur finale et être assez proches d'elles : environ 5% pour l'ancre et le bipale,

environ 2% pour le barrière. Dans ce dernier cas, où trois hypothèses doivent être émises, les essais ont été nombreux avant d'obtenir une solution du régime permanent. A titre d'exemple, nous pouvons indiquer que, dans le cas de l'agitateur barrière et pour la géométrie numéro 4, les valeurs en régime permanent de la fonction courant sur les parois solides sont, pour $Re = 0,1$: $\phi_{B1}^* = -0,02512$; $\phi_{B2}^* = -0,05381$ et $\phi_p^* = -0,2418$ (voir tableau 6-2 du chapitre 6).

Le programme relatif à cet essai n'a convergé que lorsque nous avons introduit comme valeurs initiales :

$$-0,026 < \phi_{B1}^* < -0,025$$

$$-0,055 < \phi_{B2}^* < -0,053$$

$$-0,244 < \phi_p^* < -0,234$$

Avant d'arriver à ces trois inégalités, un grand nombre de tâtonnements a été nécessaire (une vingtaine).

Le champ initial en fonctions courant et rotationnel et en viscosité apparente ne doit pas être trop éloigné de la solution finale.

Ainsi pour un type d'agitateur donné, le premier résultat est-il difficile à obtenir et nécessite-t-il de nombreux essais aveugles. Dans l'exemple cité ci-dessus, ces recherches de conditions initiales ont duré environ un mois. Voilà pourquoi nous n'avons même pas envisagé d'utiliser la méthode de Gauss-Seidel pour étudier l'agitateur-barrière à trois pales.

Une fois qu'un premier résultat correspondant à un régime permanent dans des conditions données a été obtenu, il devient valeur initiale pour l'examen d'un autre cas correspondant à des conditions voisines : variation modérée de Re ou de n (0,05).

Temps de calcul

Le temps de calcul peut être diminué si les coefficients de sur-relaxation α , β , γ , définis au paragraphe 5-1 du chapitre 2, sont optimisés. Or, ces coefficients dépendent chacun de la géométrie de l'agitateur, du nombre de Reynolds, de l'indice de comportement fluide, des coordonnées (r, θ) du point considéré et du numéro de l'itération en cours : l'optimisation est rendue difficile par ce grand nombre de paramètres.

Dans ce travail, une fois assurés de la reproductibilité des

résultats, nous n'avons généralement pas recommencé les calculs avec d'autres coefficients de sur-relaxation. Nous avons supposé α , β , γ , indépendants de Re , de n , de (r, θ) et du numéro de l'itération. Le programme le plus rapide a fonctionné avec $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,1$ et $\gamma = 0$ (convergence naturelle pour la viscosité apparente).

4.2 METHODE A.D.I.

L'équation de Poisson reliant les fonctions courant et rotationnel et donnant en tout point $\phi_{i,j}$ a été traitée, à chaque instant t , par la méthode itérative de Gauss-Seidel ; la méthode A.D.I. n'a servi à traiter que l'équation générale donnant les variations de ω dans le temps.

L'équation de Poisson a été supposée résolue lorsqu'en chaque point l'inégalité :

$$\left| \frac{\phi_{i,j}^{(k)} - \phi_{i,j}^{(k-1)}}{\phi_{i,j}^{(k)}} \right| < \text{err}(\phi)$$

(voir tableau 2-3 du chapitre 2) était satisfaite.

Le critère d'écart $\text{err}(\phi)$ doit être choisi tel que, le régime permanent soit obtenu avec un temps de calcul le plus petit possible. Pour un agitateur bipale, lorsque $\text{err}(\phi)$ était supérieur à $2 \cdot 10^{-3}$, la convergence n'a pas été obtenue : les erreurs accumulées dans la boucle interne introduisent des termes instables dans l'équation générale et la font diverger.

Lorsque $\text{err}(\phi)$ reste inférieur à 10^{-3} , beaucoup d'itérations sont nécessaires pour résoudre l'équation de Poisson : le temps de calcul est augmenté. Par conséquent, la zone optimale correspond à :

$$10^{-3} \leq \text{err}(\phi) \leq 2 \cdot 10^{-3}$$

Nous avons choisi $\text{err}(\phi) = 2 \cdot 10^{-3}$.

La convergence de l'équation de Poisson est accélérée lorsque cette dernière est sur-relaxée. Le coefficient de sur-relaxation optimum α est égal à 0,5 ; au-dessus, le système diverge lentement. En-dessous de $\alpha = 0,5$, un plus grand nombre d'itérations devient nécessaire pour résoudre

l'équation de Poisson. Nous présentons sur la figure 8-2 deux exemples de divergence. Les variations de la fonction rotationnel au point $r^* = 1$, $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ sont présentées en fonction du temps pour les premiers pas de temps et dans le cas d'un agitateur bipale agitant un fluide newtonien à $Re = 1$, $\frac{D}{T}$ étant égal à 0,508.

Lorsque $err(\phi) > 2 \cdot 10^{-3}$, la divergence constatée est extrêmement rapide et, très vite, les valeurs sortent des limites des possibilités du calculateur, le programme s'arrête donc seul. Par contre, lorsque $err(\phi) = 2 \cdot 10^{-3}$ et que l'équation de Poisson est trop sur-relaxée ($\alpha = 0,7$), la divergence est plus lente, puisque ce n'est que très progressivement que ω^* au point considérée diminue. Dans ce cas, ce n'est qu'après un temps de calcul long (plusieurs heures) que la divergence est constatée.

Ces deux exemples montrent la grande sensibilité du programme aux résultats acquis dans la boucle interne.

Choix du pas de temps

L'optimum de Δt correspondrait à la valeur maximale permettant d'obtenir la convergence. Dans la plupart des cas, nous avons choisi $\Delta t = 10^{-4}$.

En utilisant des pas de temps supérieurs, le programme divergeait (par exemple, avec $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$, le programme s'arrêtait au bout de 25 itérations). OZOE et CHURCHILL (1972), étudiant la variation d'un nombre de Nusselt avec le temps, par cette méthode A.D.I., ont observé les mêmes phénomènes.

Changement du pas de temps

Lors des premières itérations, les variations de ω^* et ϕ^* sont plus importantes que par la suite. Ceci nous a conduit à augmenter le pas de temps en cours de calcul, afin d'obtenir plus rapidement le régime permanent.

Nous avons toutefois noté que lors du changement de pas, une discontinuité sur ω^* apparaît. La figure 8-3 obtenue dans les mêmes conditions que la figure 8-2 mais mettant en oeuvre un changement de pas de 0,0001 à 0,0005 illustre ce phénomène ; sur cette figure sont également représentées les variations de la fonction courant en paroi qui, elle, n'est pas affectée

par le changement de pas de temps. Après la modification de Δt , les instabilités numériques apparaissent sur ω^* ($r^* = 1$, $\theta^* = \frac{\pi}{2}$), qui s'atténuent peu à peu.

Nous pensons que la discontinuité sur ω^* résulte de la nature même de la méthode A.D.I. Pour calculer ω^* aux itérations $n + \frac{1}{2}$ et $n+1$, nous avons utilisé les valeurs de $(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*})$ et $(\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*})$ calculées à l'itération n . Lors du changement de pas de temps, les écarts $\Delta \phi^*$ dans les équations discrètes correspondent à l'ancien pas de temps, mais sont rapportées à la nouvelle valeur du pas de temps. Il en résulte une erreur systématique importante sur l'évaluation de ω^* . Nous n'avons pas tenté de perfectionner notre programme pour limiter cette source d'erreur, car nous nous sommes intéressé uniquement au régime permanent.

4.3 NOMBRE DE REYNOLDS MAXIMUM

Pour un fluide newtonien et en utilisant la méthode itérative de Gauss-Seidel, on doit résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 \text{Re} \frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \right) = \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^{*2}}{\partial \theta^{*2}} \right) \quad (8.15)$$

Lorsque Re tend vers zéro, l'équation à résoudre tend à devenir :

$$\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^{*2}}{\partial \theta^{*2}} = 0 \quad (8.16)$$

Les termes non linéaires n'interviennent pas dans la résolution numérique. Par contre, lorsque Re augmente, ces termes deviennent prépondérants et l'équation (8.15) devient par sa nature même, (non linéaire), plus difficile à résoudre : il est donc concevable qu'existe une limite supérieure en Reynolds pour un bon fonctionnement de la méthode numérique. Dans le cas de l'agitateur-bipale, cette limite a été observée aux alentours de 45. Pour l'ancre et l'agitateur-barrière, elle était plus faible et voisine de 30. Pour un fluide newtonien et en utilisant la méthode A.D.I., l'équation suivante doit être résolue :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 \text{Re} \left[\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + \frac{1}{r^*} \left(\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} - \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} \right) \right] = \left(\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \omega^{*2}}{\partial \theta^{*2}} \right) \quad (8.17)$$

Les mêmes remarques que précédemment montrent l'existence d'une limite numérique en Reynolds. Toutefois, le terme $\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*}$ diminue relativement l'influence du terme non linéaire. C'est pourquoi la méthode A.D.I. est-elle réputée pour favoriser des simulations à des nombres de Reynolds plus élevés.

4.4 INDICE DE COMPORTEMENT FLUIDE MINIMUM

Pour un fluide non-newtonien, aux termes de droite des équations (8.15) et (8.17) s'ajoutent des expressions où apparaissent les deux dérivées premières de la viscosité apparente et ses trois dérivées secondes.

Pour un fluide suivant la loi d'Ostwald de Waele, la viscosité apparente s'écrit :

$$\eta^* = \gamma^{*n-1} \quad (8.18)$$

et par exemple le terme $\frac{\partial \eta^*}{\partial r^*}$ devient :

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} = (n-1) \gamma^{*n-2} \frac{\partial \gamma^*}{\partial r^*} \quad (8.19)$$

Pour un fluide suivant la loi de Carreau, nous obtenons :

$$\eta^* = (1 + \lambda^{*2} \gamma^{*2})^{\frac{n-1}{2}} \quad (8.20)$$

et

$$\frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} = (n-1) \lambda^{*2} \gamma^* (1 + \lambda^{*2} \gamma^{*2})^{\frac{n-3}{2}} \frac{\partial \gamma^*}{\partial r^*} \quad (8.21)$$

Lorsque n diminue, les dérivées de la viscosité apparente augmentent en valeur absolue ; les termes non linéaires correspondants deviennent donc importants et l'équation de mouvement s'avère plus difficile à résoudre. Comme dans le cas du nombre de Reynolds, il est concevable qu'existe une limite inférieure (limite supérieure pour un fluide dilatant) en indice de comportement fluide.

Les équations à résoudre sont identiques pour un fluide d'Ostwald de Waele et pour un fluide de Carreau. Imaginons qu'en chaque point existe une valeur maximum de $\left| \frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} \right|$; les gradients de vitesse correspondants sont identiques. Par conséquent, en notant n_0 l'indice de comportement pour la loi d'Ostwald de Waele et n_c celui pour la loi de Carreau, l'expression

suivante est obtenue lorsque $\lambda^* = 1$:

$$(n_c - 1) \gamma^* (1 + \gamma^{*2})^{\frac{n_c - 3}{2}} = (n_o - 1) \gamma^{*n_o - 2} \quad (8.22)$$

Aux forts gradients de vitesse, cette expression devient :

$$n_c = n_o \quad (8.23)$$

Aux faibles gradients de vitesse, l'expression (8.22) s'écrit :

$$(1 - n_c) = (1 - n_o) \gamma^{*n_o - 3} \quad (8.24)$$

Par conséquent, $(1 - n_c)$ est nettement supérieur à $(1 - n_o)$. Cette dernière corrélation nous montre que le modèle de Carreau permet une simulation numérique à n plus faible. Dans le cas de l'agitateur bipale, la limite inférieure pour n a été 0,4 dans le cas du fluide de Carreau, et 0,7 dans le cas du fluide suivant le modèle rhéologique d'Ostwald de Waele. Cette supériorité s'accompagne d'une difficulté expérimentale : trois paramètres sont à déterminer, au lieu de deux.

4.5 REMARQUES SUR L'INFLUENCE DU TEMPS DE CALCUL

Prenons l'exemple d'un agitateur-barrière. Dans ce cas, les temps de calcul sont longs :

- 6 heures environ pour un agitateur-barrière à deux pales, avec la méthode de Gauss-Seidel ;
- 13 heures environ pour un agitateur-barrière à trois pales, avec la méthode A.D.I..

Or, plus le temps de calcul est long, plus le nombre d'opérations effectuées par le calculateur est important. Les erreurs sur chacune d'elles s'ajoutent, ceci explique que pour des systèmes ayant demandé plus de temps de calcul, la précision soit moins bonne.

Les temps de calcul augmentent dans trois cas :

- diminution de l'indice de comportement fluide pour un fluide pseudoplastique ;
- augmentation du nombre de Reynolds ;
- passage à une géométrie plus complexe.

Les deux premiers cas s'expliquent aisément par le fait que le caractère non linéaire des équations à résoudre est accru. Le troisième cas est dû à la multiplication des approximations de premier ordre. Pour un agitateur-barrière par exemple, il existe quatre extrêmités de pales. En ces points, la fonction rotationnel est écrite :

$$\omega^* = \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}} \quad (8.25)$$

Le terme $\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}}$ est estimé en l'extrêmité exacte de la pale. Le terme $\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}}$ est estimé au point $(i+\frac{1}{4})$, s'il s'agit d'une extrêmité externe ; $(i-\frac{1}{4})$ s'il s'agit d'une extrêmité interne (voir annexe 4, tableau A-1).

Nous connaissons maintenant les grandes variations de ω^* dans ces régions. Aussi existe-t-il des possibilités d'erreur plus importantes en ce qui concerne les valeurs pour les extrêmités de pales ou les points adjacents que dans le reste du volume. De même, pour le calcul des deux contraintes, faisons-nous des approximations de premier ordre aux extrêmités des pales.

5 - COMMENTAIRES SUR LES TECHNIQUES EXPERIMENTALES -

Il existe plusieurs causes d'erreurs sur la détermination des vitesses. Enumérons-les brièvement :

- lors de l'étalonnage : imprécision de lecture de la tension, imprécision d'orientation de la sonde, légers dépôts de particules à la surface de la sonde, etc.... Cet ensemble d'erreurs conduit à une imprécision globale d'environ 10%.

- lors de la mesure en cuve agitée : considérons par exemple le cas de la sonde numéro 2 utilisée dans du fuel. Nous avons établi la réponse caractéristique de cette sonde à un écoulement perpendiculaire à son axe. La loi suivante a été obtenue :

$$E = 2,13 + 3,88 v^{0,297} \quad (8.26)$$

Nous nous cantonnons dans un premier temps aux conséquences d'erreurs de lecture ; les déterminations de tension s'effectuent à 0,05 V près.

Dans ce cas, un calcul d'erreur sur l'équation (8.26) conduit à :

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{1,152} \left(\frac{E - 2,13}{3,88} \right)^{2,37} \quad (8.27)$$

soit par exemple, lorsque $E = 5V$ à

$$\Delta V = 2,1 \text{ cm.s}^{-1}, \text{ ce qui correspond à 6\%}.$$

Ajoutons dans un deuxième temps l'erreur sur la température au sein de la cuve. Un écart de température de $0,5^\circ\text{C}$ entraîne une erreur de 2,5%, dans le cas de la surchauffe habituelle du film par rapport au fluide de 20°C .

Par conséquent, la somme des incertitudes peut causer des erreurs de près de 20% ($10\% + 6\% + 2,5\% + \text{autres erreurs} \dots$).

D'autre part, dans un repère fixe, la vitesse tangentielle s'écrit :

$$(v_\theta)_{\text{fixe}} = 2 \pi N r - (v_\theta)_{\text{mobile}} \quad (8.28)$$

L'erreur relative sur $(v_\theta)_{\text{fixe}}$ s'écrit :

$$\frac{\Delta (v_\theta)_{\text{fixe}}}{(v_\theta)_{\text{fixe}}} = \frac{\Delta (v_\theta)_{\text{mobile}}}{2 \pi N r - (v_\theta)_{\text{mobile}}} \quad (8.29)$$

Si la vitesse en repère fixe est petite, il apparaît clairement que l'incertitude sur sa détermination peut devenir importante et atteindre des valeurs de 100% ou plus.

Nos comparaisons de déterminations numériques et expérimentales des chapitres 4 à 6 nous ont conduit à des écarts allant de quelques % à plus de 100%, avec des moyennes de l'ordre de 16% : une bonne part de ces écarts est imputable à l'anémométrie thermique.

Après cette brève analyse, il apparaît clairement que ces méthodes de mesure, qui pourtant sont parmi les meilleures, ne sont pas encore bien adaptées, et en tout cas, moins performantes que les méthodes numériques.

6 - COMMENTAIRES A POSTERIORI SUR LA MISE EN FORME DU PROBLEME -

Certains résultats obtenus au cours de ce travail nous ont semblé tellement simples et systématiques, qu'ils devaient résulter de lois à caractère général que nous avons cherchées vainement pendant longtemps avant de pressentir la possibilité que nous exposons dans la suite. Nous avons en particulier été frappés par :

- la constance du produit $NpRe$ pour tous les systèmes agités étudiés, quelles que soient la géométrie du mobile ou la rhéologie du fluide ;
- la quasi-indépendance des profils de vitesse et de contraintes par rapport au nombre de Reynolds.

Une succession de tentatives infructueuses nous a finalement conduits à revenir sur la formulation initiale du problème. Les équations de changement, sous forme adimensionnelle, s'écrivent en régime permanent :

$$\text{équation de continuité : } \operatorname{div}^* v^* = 0 \quad (8.30)$$

$$\text{équation de mouvement : } Re (\operatorname{grad}^* \mathcal{P}^* + \operatorname{div}^* (v_x^* v^*)) = - \operatorname{div}^* \tau^* \quad (8.31)$$

Si nous nous intéressons au cas où la vitesse de rotation de l'agitateur tend vers zéro, c'est-à-dire où le nombre de Reynolds tend vers zéro, nous pouvons négliger, dans l'équation de mouvement, le membre de gauche et écrire alors :

$$\operatorname{div}^* \tau^* = 0 \quad (8.32)$$

Le système d'équations aux dérivées partielles ne comporte plus alors aucun facteur d'échelle. Pour des systèmes de forme donnée, c'est-à-dire en similitude géométrique, tels que les conditions aux limites qui accompagnent les équations différentielles soient identiques, on doit alors obtenir, pour les distributions de contraintes ou de vitesses, des solutions indépendantes du nombre de Reynolds. Nous trouvons ici, dans la limite où Re tend vers zéro, l'indépendance observée sur les résultats présentés dans les chapitres 4, 5 et 6.

En ce qui concerne la puissance d'agitation, maintenant, on peut écrire :

$$P = \int_{\text{volume}} \eta \phi_v dW \quad (8.33)$$

ou, sous forme adimensionnelle :

$$NpRe = f(n) \int_{\text{volume}} \eta^* \phi_v^* dW^* \quad (8.34)$$

Comme les distributions de viscosité apparente et le taux de dissipation visqueuse sont indépendantes du nombre de Reynolds, le produit $NpRe$ doit aussi l'être.

Ainsi, l'hypothèse d'un nombre de Reynolds très faible, c'est-à-dire d'un écoulement rampant, permet de démontrer par simple analyse dimensionnelle des équations aux dérivées partielles initiales, que les solutions donnant les profils de vitesses et de contraintes, ainsi que le produit $NpRe$, doivent être indépendantes du nombre de Reynolds.

A posteriori, nos résultats suggèrent que ces propriétés asymptotiques, pour Re tendant vers zéro, demeurent valables jusqu'à des valeurs de Re appréciables, de l'ordre de 10 en général.

Les développements que nous venons de proposer nous suggèrent les réflexions suivantes :

- la solution de $\text{div}^* \tau^* = 0$ pourrait être utilisée pour la recherche d'une première solution, à faible Re , qui servirait ensuite de point de départ pour le programme utilisant la méthode de Gauss-Seidel. Ainsi, éviterions-nous les longs tâtonnements qui constituent l'inconvénient majeur de cette technique ;

- étant donnée sa plus grande simplicité, l'équation $\text{div}^* \tau^* = 0$ devrait nous permettre d'envisager le traitement, à faible nombre de Reynolds, de systèmes de géométrie plus complexe.

Nous tenons cependant à bien préciser que le traitement de cette équation simple ne suffira jamais à résoudre le problème de l'agitation des milieux consistants et que le traitement de l'équation complète peut seul indiquer la limite de validité de l'hypothèse d'écoulement rampant.

7 - CONCLUSION -

Dans ce chapitre, nous avons voulu dégager certaines caractéristiques générales des résultats obtenus. Nous retenons ici que :

- les profils de vitesse et de contraintes dépendent assez peu du nombre de Reynolds, en particulier dans le domaine de faibles valeurs de Re ;

- plus le fluide devient pseudoplastique, plus les gradients de vitesse au voisinage du mobile augmentent, ménageant ainsi des zones mal agitées de plus grande extension. Nous retrouvons ainsi cette règle empirique qui veut que l'on sélectionne des agitateurs de taille d'autant plus importante que le caractère pseudoplastique s'accroît ;

- nous avons pu proposer des équations reliant le produit $NpRe$ à la taille de l'agitateur, sur le modèle des relations que nous avons établies analytiquement dans le cas de deux cylindres coaxiaux (voir annexe 1) et à son indice de comportement en suivant le schéma suggéré par la théorie de METZNER et OTTO (1957).

Enfin, nous avons réalisé a posteriori que nous aurions pu analyser les phénomènes au sein de cuves agitées, à très faible nombre de Reynolds, en résolvant numériquement l'équation, beaucoup plus simple, de l'écoulement rampant. Cette idée, évidente une fois exprimée clairement, ne nous étant apparue que récemment, nous ne l'avons pas exploitée dans ce travail, mais elle ouvre certainement des perspectives nouvelles pour des développements futurs et, dès à présent, fournit une explication claire de certaines des observations que nous avons faites.

CONCLUSION DE LA TROISIEME PARTIE

Rappelons ici que l'intérêt majeur des résultats que nous avons obtenus par voie théorique et confirmés par l'expérience est d'être maintenant disponibles pour tout chercheur ou tout ingénieur qui souhaite les utiliser pour résoudre un problème d'agitation de milieux consistants.

Nous avons cependant voulu dépasser ce stade au cours de la troisième partie de ce mémoire.

C'est ainsi que nous avons d'abord rapporté comment, en collaboration avec le Laboratoire de Génie Agroalimentaire du professeur GIBERT et la Société des Fromageries BEL, les méthodes et techniques mises au point au cours de ce travail ont contribué à améliorer les performances d'un dispositif d'agitation utilisé pour effectuer le crémage de fromage fondu.

C'est ainsi que nous nous sommes efforcés d'analyser et de discuter plus à fond les méthodes mises en oeuvre et, les résultats obtenus. Il en résulte des corrélations simples pour le calcul de la puissance d'agitation et des suggestions intéressantes pour la conduite de nouveaux travaux, en particulier dans l'hypothèse de l'écoulement rampant.

CONCLUSION GENERALE

Notre travail constitue une contribution à l'étude des problèmes d'agitation en cuves de milieux visqueux, de rhéologie newtonienne ou non. Rappelons que de tels problèmes se posent dans différents secteurs industriels de grande importance économique, industrie des matières plastiques, des encres et peintures, des cosmétiques et produits de beauté, industries agroalimentaires, bioindustries, etc.....

Au départ, nous avons exploité les renseignements, souvent succincts, disponibles dans une publication écrite par une équipe japonaise pour construire un programme de traitement numérique des équations de mouvement permettant d'établir, par voie théorique, l'ensemble des caractéristiques de l'écoulement généré par un agitateur bipale au sein d'un fluide newtonien. Nous avons ensuite élargi ce traitement au cas de fluides pseudoplastiques ou dilatants et au cas de nouvelles géométries, agitateurs à ancre ou barrière.

Limités par les possibilités de la technique numérique, nous avons ensuite mis au point une nouvelle méthode de traitement, de type A.D.I., qui permet de suivre les évolutions dans le temps, au cours d'un régime transitoire, et qui permet, en outre, l'analyse de géométries plus complexes.

Au plan expérimental, nous avons utilisé l'expérience de l'anémométrie thermique que nous avons acquise lors de la préparation d'une thèse de docteur-ingénieur, pour mettre au point une technique de mesure de vitesse, à sonde tournante, qui a permis d'établir toutes les données qui confirment la validité des hypothèses et la qualité des résultats de l'approche théorique.

A l'issue de ce travail, deux conclusions importantes nous semblent devoir être mises en exergue :

- dans tous les cas d'agitation de fluides consistants, newtoniens ou pseudoplastiques, l'anémométrie thermique permet, quelle que soit la géométrie de déterminer les profils de vitesse. Ce type d'information est déjà tellement plus détaillé que les données conventionnelles sur la puissance ou les temps de mélange que nous ne voyons pas comment un industriel pour lequel il existe un enjeu économique important pourrait se passer de cette information. Dans notre laboratoire, nous avons déjà lancé des travaux pour exploiter cette possibilité dans le cas de rubans hélicoïdaux ;

- lorsqu'elle est praticable, l'approche théorique est beaucoup plus puissante que la voie expérimentale. Outre les profils de vitesse, elle fournit les distributions des diverses contraintes, du taux de

dissipation visqueuse, de la viscosité apparente, etc..... Par ailleurs, elle est beaucoup moins onéreuse et remplace des campagnes de mesure d'une durée de l'ordre d'un mois par quelques heures de calcul sur ordinateur. Ainsi, le développement de travaux dans ce domaine nous semble-t-il indispensable. Pour notre part, nous sommes décidés à poursuivre dans cette voie.

Si le travail que nous avons présenté était à refaire, nous attacherions beaucoup plus d'importance au cas des très faibles nombres de Reynolds et nous nous efforcerions de résoudre les équations simplifiées correspondantes dont nous avons réalisé l'importance a posteriori, en analysant les résultats obtenus. Cette possibilité va constituer, sans aucun doute, l'un des développements que nous aborderons le plus rapidement.

Mais beaucoup d'autres travaux restent encore à effectuer.

Enumérons-en quelques-uns :

- perfectionnement des techniques numériques et en particulier de la méthode A.D.I. ;
- étude d'agitateurs à pales, mais équipés de trois, quatre pales ou plus ;
- traitement de problèmes non isothermes ;
- étude d'agitateurs à pales inclinées ;
- traitement d'écoulements tridirectionnels, dans le cadre de l'hypothèse de l'écoulement rampant ;
- etc.....

Cette liste, bien sûr incomplète, montre que notre travail ouvre au moins autant de voies pour la recherche future qu'il n'a résolu de problèmes!...

REFERENCES

ASTARITA G. et MARUCCI G.

"Principles of non-newtonian fluid mechanics", Mc Graw Hill,
Maidenhead (1974)

ASTARITA G. et MASHELKAR R.A.

"Heat and mass transfer in non-newtonian fluid", The Chemical Engineer,
100-105 (1977)

ASTARITA G.

"Scale-up problems arising with non-newtonian fluids",
J. of non-newtonian fluid mechanics, 4, 285-298 (1979)

BELLET D. et SENDELIN M.

"Caractéristiques rhéologiques de solutions non-newtoniennes :
influence de la température et de la concentration",
C.R. Acad. Sc., Paris, 273, 126-128 (1971)

BELLET D.

"Relation entre comportements rhéologiques pseudoplastiques et
échanges thermiques", Thèse Doctorat ès Sciences, Université
Paul Sabatier, Toulouse (1973), a

BELLET D.

"Panorama des milieux continus entre solides et liquides",
Rheol. Acta 12, 299-310 (1973), b

BERTRAND J.

"Contribution à l'étude de la capacité de pompage et de la turbulence
dans une cuve agitée", Thèse de Docteur Ingénieur, Université
Paul Sabatier, Toulouse (1977)

BIRD R.B., STEWART W.E. et LIGHTFOOT E.N.

"Transport phenomena", John Wiley, New York (1960)

BIRD R.B.

"The relevance of rheology to the solution of practical problems
in the polymer industry", The Chemical Engineer, 317, 98-99 (1977)

BIRD R.B., ARMSTRONG R.C. et HASSAGER O.

"Dynamic et polymeric liquids : fluid mechanics", John Wiley,
New York (1977)

BLASINSKI H. et RZYSKI E.

"Power requirements of helical ribbon mixers", The Chem. Eng. J.,
19, 157-160 (1980)

BOLT A., KREBSER E. et STADE K.

"Energy dissipation in a multi-stage axial flow mixing turbine",
Inter. Symp. on mixing, Mons, Belgique (1978)

CALDERBANK P.H. et MOO YOUNG M.B.

"The prediction of power consumption in the agitation of non-newtonian
fluids", Trans. Instn. Chem. Engrs 37, 26-33 (1959)

- CHAPMAN F.S. et HOLLAND F.A.
"A study of turbine and helical-screw agitators in liquid mixing",
Trans. Instn Chem. Engrs 43, 131-140 (1965)
- CHAVAN V.V. et ULBRECHT J.
"Power correlation for helical ribbon impellers in inelastic
non-newtonian fluids", The Chem. Eng. Journal, 3, 308-311 (1972)
- CHAVAN V.V. et ULBRECHT J.
"Power correlation for close-clearance helical impellers in
non-newtonian liquids", Ind. Eng. Chem. Process Des. Dev., 12,
4, 472-476 (1973)
- CHIRAPATPIMOL M.
"Hydrodynamique et temps de mélange d'un fluide non-newtonien dans
une cuve isotherme mécaniquement agitée", Thèse de Docteur-Ingénieur,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier (1978)
- CHOWDHURY R. et TIWARI K.T.
"Power consumption studies of helical ribbon-screw mixers",
Ind. Eng. Chem. Process. Des. Dev., 18, 2, 227-231 (1979)
- CHU H.N.S. et CHURCHILL S.W.
"The development and testing of a numerical method for computation of
laminar natural convection in enclosures", Computers and Chem. Eng.,
1, 103-108 (1977)
- COMPTE-BELLOT G.
"Techniques de mesures dans les écoulements", Eyrolles, 117 (1973)
- COSTES J.
"Contribution à l'étude des systèmes diphasiques", Thèse de
Docteur-Ingénieur, Université Paul Sabatier, Toulouse (1977)
- DEYSARKAR A.K., SCHUMMER P. et ULBRECHT J.
"Plane converging drag flow of newtonian and inelastic non-newtonian
fluids", Chem. Eng. Commun., 2, 197-218 (1978)
- EDWARDS M.F., GODFREY J.C. et KASHANI M.M.
"Power requirement for the mixing of thixotropic liquids", J. of
non-newtonian fluid mech., 1, 309-322 (1976)
- GELUS M., LE CARDINAL G. et GERMAIN E.
"Choix d'un agitateur lorsque la viscosité varie de 1 centipoise à
2000 poises", Entropie, 88, 54-59 (1979)
- GIBERT H.
"Agitation et mélange de fluides très visqueux ou non-newtoniens",
Cycle de conférences sur l'Agitation Mécanique, Institut National
Polytechnique de Toulouse (1979)
- GRAY J.B.
"Batch mixing of viscous liquids", Chem. Eng. Progress, 59, 3, 55-59 (1963)
- GREEN R.G. et GRISKEY R.G.
"Rheological behaviour of dilatant (shear-thickening) fluids. Part 1 :
Experimental and data", Trans. of Soc. of Rheol., 12:1, 13-25 (1968), a

- GREEN R.G. et GRISKEY R.G.
"Rheological behaviour of dilatant (shear-thickening) fluids. Part 2 : Mechanism and theory", Trans. of Soc. of Rheol. 12:1, 27-37 (1968), b
- GREENSPAN H.P.
"The theory of rotating fluids", Cambridge university press (1969)
- HA MINH H.
"Application de la méthode implicite des directions alternées à la résolution des équations de Navier-Stokes autour d'un cercle", rapport M3-4, Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse (1977)
- HA MINH H.
"Equations relatives à l'écoulement plan autour d'un cylindre en fluide incompressible", rapport M3-3, Institut de Mécanique des Fluides, Toulouse (1977)
- HARRIS J.
"Rheology and non-newtonian flow", Longman, Londres (1977)
- HIRAOKA S., YAMADA I. et MIZOGUCHI K.
"Numerical analysis of flow behaviour of highly viscous fluid in agitated vessel", J. of Chem. Eng. of Japan, 11, 6, 487-493 (1978)
- HIRAOKA S., YAMADA I. et MIZOGUCHI K.
"Two dimensional model analysis of flow behaviour of highly viscous non-newtonian fluid in agitated vessel with paddle impeller", J. of Chem. Eng. of Japan, 12, 1, 56-62 (1979)
- HIRAOKA S.
Communication personnelle (1980)
- JAMES D.F. et ACOSTA A.J.
"The laminar flow of dilute polymer solutions around circular cylinders", J. Fluid Mech., 42, 2, 269-288 (1970)
- KOEN C.G.
"La viscosité apparente dans l'agitation des fluides non-newtoniens", Chimie et Industrie, Génie Chimique, 103, 5, 583-590 (1970)
- KOEN C.G.
"Echauffements locaux par dissipation visqueuse lors de l'agitation des fluides non-newtoniens", Inter. Symp. on Mixing, Mons, Belgique (1978)
- KURIYAMA M., INOMATA H., ARAI K. et SAITO S.
"Numerical solution for the flow of highly viscous fluid in agitated vessel with anchor impeller", AIChE Journal, 28, 3, 385-391 (1982)
- LAHAYE P.
"Transferts de chaleur dans les fluides visqueux agités par des dispositifs de type ancre", Inter. Symp. on Mixing, Mons, Belgique (1978)
- LE LAN A.
"L'agitation des fluides non-newtoniens", Agitation Ind. Chim., Symp. Int. Génie Chim., 1, 419-432 (1976)

LHOTA E. et MITSCHKA P.

"Mixing of viscous newtonian fluids with low speed agitators",
5ème Congrès CHISA, communication B4-3, Prague (1975)

LY D.P. et BELLET D.

"The study of time-dependent pipe flows of inelastic non-newtonian fluids using a multiviscous approximation", J. of non-newtonian fluid mechanics, 1, 287-304 (1976)

MARTINEZ G.

"Caractéristiques dynamiques et thermiques de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire à nombres de Reynolds modérés", Thèse de Docteur-Ingénieur, Institut National Polytechnique, Toulouse (1979)

METZNER A.B. et OTTO R.E.

"Agitation of non-newtonian fluids", AIChE Journal, 3, 1, 3-10 (1957)

METZNER A.B., FEEHS R.H., LOPEZ RAMOS H., OTTO R.E. et TUTHILL J.D.

"Agitation of viscous newtonian and non-newtonian fluids",
AIChE Journal, 7, 1, 3-9 (1961)

METZNER A.B. et ASTARITA G.

"External flows of viscoelastic materials : fluid property restrictions on the use of velocity-sensitive probes", Am. Instn. Chem. Eng. Journal, 13, 3, 550-555 (1967)

MURAKAMI Y., FUJIMOTO K., SHIMADA T., YAMADA A. et ASANO K.

"Evaluation of performance of mixing apparatus for high viscosity fluids",
J. of Chem. Eng. of Japan, 5, 3, 297-303 (1972)

NAGATA S., YAMAMOTO K., YOKOYAMA T. et SHIGA S.

"Studies on the power requirement of mixing impellers", Memoirs Fac. Eng., Kyoto Univ., 19, 3, 274-290 (1957)

NAGATA S., NISHIKAWA M., KATSUBE T. et TAKAISH K.

"Mixing of highly viscous non-newtonian liquids", Inter. Chem. Eng., 12, 1, 175-182 (1972)

NAGATA S.

"Mixing : principles and applications", Kodansha, Tokyo (1975)

NOVAK V. et RIEGER F.

"Homogenization with helical screw agitators", Trans. Instn. Chem. Engrs, 47, 335-340 (1969)

OZOE H. et CHURCHILL S.W.

"Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald de Waele and Ellis fluids : the development of a numerical solution",
AIChE Journal, 18, 6, 1196-1207 (1972)

PAPACHRISTODOULOU G. et TRASS O.

"Rheological properties of ultrafine COM", Third International Symposium on COM combustion, Orlando, Floride (1981)

- PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS DEJA EFFECTUEES A PROPOS DE CE TRAVAIL -

BERTRAND J., KOEHRET B., COUDERC J.P.

"Ecoulement d'un liquide newtonien visqueux généré par un agitateur bipale", Communication présentée aux Journées d'Etude sur l'Agitation Mécanique, Toulouse (1980)

BERTRAND J., COUDERC J.P.

"Agitation of viscous fluids by paddles of different widths", IChemE Symposium Series 64, Fluid mixing, 1981

BERTRAND J., COUDERC J.P.

"Flow generated by a two blades paddle in a pseudoplastic fluid", 7th CHISA Congress, Paper A2-6, Prague, Tchécoslovaquie (1981)

BERTRAND J., COUDERC J.P.

"Agitation de fluides pseudoplastiques par un agitateur bipale", Can. J. of Chem. Eng., 60, 738 (1982)

BERTRAND J., COUDERC J.P.

"Numerical analysis of the flow generated by an anchor in a non-newtonian fluid", Communication présentée à Hydrodynamic and Physical Processes in Liquids and Disperse Systems, Prague (1983)

BERTRAND J., KOEHRET B., COUDERC J.P.

"Agitation of highly viscous fluids : comparison of two numerical methods", Communication présentée à 3ème Congrès International "Informatique et Génie Chimique", Paris (1983)

BERTRAND J., COUDERC J.P.

"Power consumption in non-newtonian flow mixing", Communication présentée à Conférence on Applied Chemistry Unit Operations and Processes, EFCE, Veszprem, Hongrie (1983)

PATTERSON W.I., CARREAU P.J. et YAP C.Y.

"Mixing with helical ribbon agitators, Part II : Newtonian fluids",
AIChE Journal, 25, 3, 508-516 (1979)

PETERS D.C. et SMITH J.M.

"Fluid flow in the region of anchor agitator blades",
Trans. Instn. Chem. Engrs., 45, 360-366 (1967)

PETERS D.C. et SMITH J.M.

"Mixing in anchor agitated vessels", Can. J. of Chem. Eng.,
47, 268-271 (1969)

PRASERTVITAYAKIJ P.

"Contribution à l'étude des systèmes diphasiques : étude de la formation
des bulles dans un liquide pseudoplastique visqueux", Thèse de
Doctorat d'INP, Institut National Polytechnique, Toulouse (1978)

RAUTENBACH R. et BOLLENRATH F.M.

"Heat transfer in stirred vessels to high-viscosity newtonian and
non-newtonian substances", Ger. Chem. Eng., 2, 18-24 (1979)

RICHARDS G.D. et TOWNSEND P.

"Computer modelling of flows of elastic liquids through complex vessels
and with forced convection", Journal of non-newtonian fluid mechanics,
10, 175-183 (1982)

RIEGER F. et NOVAK V.

"Power consumption of agitators in highly viscous non-newtonian liquids",
Trans. Instn Chem. Engrs, 51, 105-111 (1973)

RIEGER F. et NOVAK V.

"Power consumption scale-up in agitating non-newtonian fluids",
Chem. Eng. Sci., 29, 2229-2234 (1974)

SATAYAPRASERT C.

"Contribution à l'étude de l'agitation d'un fluide pseudoplastique dans
une cuve avec un agitateur à ancre", Université des Sciences et
Techniques du Languedoc, Montpellier (1980)

SAWINSKY J., HAVAS G. et DEAK A.

"Power requirement of anchor and helical ribbon impellers for the case
of agitating newtonian and pseudoplastic liquids", Chem. Eng. Sci.,
31, 507-509 (1976)

SCHILO D.

"Leistungsbedarf von Tangentialrührern beim Rühren von nicht-Newtonischen
Flüssigkeiten", Chemie Ing. Techn., 41, 5, 253-259 (1969)

SERTH R.W. et KISER K.M.

"The effect of turbulence on hot-film anemometer response in viscoelastic
fluids", Am. Instn. Chem. Eng. Journal, 16, 2, 163-168 (1970)

SMITH K.A., MERRILL E.W., MICKLEY H.S. et VIRK P.S.

"Anomalous pitot tube and hot film measurements in dilute polymer
solutions", Chem. Eng. Sci., 22, 619-626 (1967)

SUCKOW W.H., HRYCAK P. et GRISKEY R.G.

"Heat transfer to non-newtonian dilatant (shear-thickening) fluids flowing between parallel plates", AIChE Symposium Series, 199, 76, 257-261 (1980)

TAKAHASHI K., ARAI K. et SAITO S.

"Power correlation for anchor and helical ribbon impellers in highly viscous liquids", J. of Chem. Eng. of Japan, 13, 2, 147-150 (1980)

WALTON A.C.

"Non-newtonian flow in mixing vessels", PhD Thesis, University of Exeter (1981)

WALTON A.C., MASKELL S.J. et PATRICK M.A.

"Laminar mixing of non-newtonian fluids in cylindrical vessels", IChemE Symposium Series 64, C (1981)

WILKINSON W.L.

"Non-newtonian fluids", Pergamon, New-York (1960)

WOHLFAHRT K. et HOFFMAN U.

"Concentration and temperature profiles for complex reactions in porous catalyst", Chem. Eng. Sci., 34, 493-501 (1979)

YAP C.Y., PATTERSON W.I. et CARREAU P.J.

"Mixing with helical ribbon agitators, Part III : non-newtonian fluids", AIChE Journal, 25, 3, 516-521 (1979)

NOMENCLATURE

- A (tableau 1-1) : constante de modèle rhéologique
- A (équation 1.10) : constante définie par NAGATA et coll. (1957)
 $(A = 14 + \frac{b}{T} \sqrt[6]{670} (\frac{D}{T} - 0,6)^2 + 185 \frac{D}{T})$
- A (équation 3.18) : surface de la sonde (m^2)
- A (annexe 5) : constante
- A valeur du produit $NpRe$ pour un fluide newtonien
- A', B', A'', B'' (annexe 5) : constante
- a constante caractéristique de la géométrie d'un ruban ou d'une vis
- B (tableau 1-1) : constante de modèle rhéologique
- B (équation 1.10) : constante définie par NAGATA et coll. (1957)
 $(\log B = 1,3 - 4 (\frac{b}{T} - 0,5)^2 - 1,14 \frac{D}{T})$
- B (annexe 5) : constante
- B rapport entre le gradient de vitesse moyen et la vitesse de rotation de l'agitateur, dans le cadre de la théorie de METZNER et OTTO (1957)
- b hauteur de l'agitateur (m)
- C concentration d'une solution de carbopol ($kg \text{ carbopol} \cdot kg^{-1} \text{ eau}$)
- C (équation 8.2 et tableau 8-4) : constante
- C_1, C_2 (annexe 1) : constantes
- C_2 (équation 1.9) : valeur du produit $NpRe$
- C_N constante caractéristique des cylindres coaxiaux (m^3)
- C_P chaleur spécifique du fluide ($m^2 s^{-2} K^{-1}$)
- C_T constante caractéristique des cylindres coaxiaux
- c distance entre l'extrémité de la pale et la paroi de la cuve (m)
- D diamètre de l'agitateur (m)
- D_A diamètre de l'arbre d'agitation (m)
- D_{YO} diamètre correspondant à l'extrémité interne de la première pale d'un agitateur-barrière (m)
- D_S diamètre d'une sonde anémométrique (m)
- \mathcal{D} domaines d'intégration des équations de l'annexe 3

E	tension lue aux bornes d'une sonde anémométrique (volts)
ECAR	précision absolue d'une méthode numérique
ERR, err	précisions relatives d'une méthode numérique
H	niveau de liquide dans la cuve (m)
h_m	coefficient d'échange thermique entre la sonde et le fluide ($\text{kg s}^{-3} \text{K}^{-1}$)
I	(équation 3.16) : intensité du courant passant dans la sonde (ampères)
I, J	points du maillage spatial
K	(tableaux 2-2 et 2-3) : numéro d'itération
k	sensibilité directionnelle d'une sonde anémométrique
k_F	conductivité thermique du fluide ($\text{kg m s}^{-3} \text{K}^{-1}$)
L	(tableau 2-2) : numéro d'itération
l	longueur d'un ruban hélicoïdal (m)
m	indice de consistance d'un fluide pseudoplastique suivant la loi d'Ostwald de Waele ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{n-2}$)
m_0, m_1	masses nécessaires à l'équilibre du stator du moteur (kg)
N	vitesse de rotation de l'agitateur (s^{-1})
N_p	nombre de puissance de l'agitateur $(N_p = \frac{P}{\rho N^3 D^5})$
n	(méthode A.D.I.) : numéro de l'itération temporelle
n	indice de comportement fluide d'un liquide pseudoplastique ou dilatant
n_B	nombre de pales d'un ruban hélicoïdal
n_O, n_C	indices de comportement fluide spécifiques aux modèles d'Ostwald de Waele et de Carreau
P	puissance d'agitation ($\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$)
P_{CTA}	puissance consommée par l'anémomètre, l'indice CTA signifiant "constant temperature anemometer" ($\text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$)
Pr	nombre de Prandtl défini en annexe 5
\mathcal{P}	grandeur incluant les termes de pression et gravité de l'équation de mouvement ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2}$)

p	(équation 1.10) : constante définie par NAGATA et coll. (1957) $(p = 1,1 + 4 \frac{b}{T} - 2,5 (\frac{D}{T} - 0,5)^2 - 7 (\frac{b}{T})^4)$
p	(tableau 1-2) : pas d'un ruban hélicoïdal ou d'une vis (m)
Q	débit de fluide ($m^3 s^{-1}$)
R_{CTA}	résistance électrique de la sonde anémométrique (ohms)
Re	nombre de Reynolds
Re_a	nombre de Reynolds apparent ; cas de la théorie de METZNER et OTTO (1957)
Re_V	nombre de Reynolds dans le cas des cylindres coaxiaux
r_A	position radiale de l'arbre d'agitation (m)
r_{IYO}	position radiale de l'extrémité interne de la première pale d'un agitateur-barrière (m)
r_{IPO}	position radiale de l'extrémité externe de la première pale d'un agitateur-barrière (m)
r_{IY}	position radiale de l'extrémité interne de la pale d'une ancre ou de la deuxième pale d'un agitateur-barrière (m)
S	surface du cylindre intérieur, cylindres coaxiaux (m^2)
T	diamètre de la cuve agitée (m)
T	(équation 3.15) : température du liquide (K)
T_0, T_1	(annexe 5) : température de référence (K)
\mathcal{C}	couple relatif à l'écoulement dans l'entrefer de deux cylindres coaxiaux ($kg m^2 s^{-2}$)
\mathcal{C}_F	couple relatif à l'écoulement en fond de cuve, cylindres coaxiaux ($kg m^2 s^{-2}$)
\mathcal{C}_T	couple total, cylindres coaxiaux ($kg m^2 s^{-2}$)
t	temps (s)
v	vitesse ($m s^{-1}$)
v_∞	vitesse relative sonde-fluide ($m s^{-1}$)
v_A, v_B, v_C	vitesse obtenues après lecture sur le voltmètre ($m s^{-1}$)
W	volume de la cuve (m^3)
w	largeur de la pale d'une ancre (m)

X expression définie par l'équation (2.45)
 x,y constantes du tableau 1-2

Lettres grecques

α (tableau 1-3) : caractéristique géométrique d'une ancre
 α, β, γ (tableau 2-2) : coefficients de sur-relaxation de la méthode de Gauss-Seidel
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ (annexe 4) : intermédiaires de calcul, méthode A.D.I.
 α angle défini par la figure 3-11
 γ tenseur des vitesses de déformation (s^{-1})
 γ_a gradient de vitesse apparent, théorie de METZNER et OTTO (1957) (s^{-1})
 ΔT surchauffe d'une sonde anémométrique (K)
 $\Delta r, \Delta \theta$ pas d'espace
 Δt pas de temps
 ∇^2 (annexe 5) : Laplacien d'une fonction (m^{-2})
 ϕ fonction courant ($m^2 s^{-1}$)
 $\phi_A, \phi_{B1}, \phi_{B2}, \phi_P$ fonction courant respectivement sur la pale de l'ancre, sur la première pale de l'agitateur-barrière, sur la deuxième pale et en paroi de cuve ($m^2 s^{-1}$)
 ϕ_V dissipation visqueuse (s^{-2})
 λ paramètre du modèle rhéologique de Carreau (s)
 μ viscosité d'un fluide newtonien ($kg m^{-1} s^{-1}$)
 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_\infty$ paramètres rhéologiques du tableau 1-1
 μ_a viscosité apparente, théorie de METZNER et OTTO (1957) ($kg m^{-1} s^{-1}$)
 η viscosité apparente d'un fluide non-newtonien ($kg m^{-1} s^{-1}$)
 ρ masse volumique du fluide ($kg m^{-3}$)
 θ (équation 1.10) : angle de la pale avec un plan horizontal
 τ (équation 2.55) : temps fictif, méthode A.D.I. (s)

τ tenseur des contraintes ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)
 τ_0 caractéristique rhéologique, modèle de Bingham ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)
 ω fonction rotationnel (s^{-1})

indices

r, θ, z indices relatifs à la position radiale, tangentielle et axiale, coordonnées cylindriques
F indice signifiant que la propriété considérée est relative au fluide
N, OW, C indices signifiant que la grandeur concerne un fluide newtonien (N), un fluide d'Ostwald de Waele (OW), un fluide de Carreau (C)
 i, j caractérisent un point du maillage
 ij caractérise une composante de tenseur

L'exposant "*" indique que la grandeur considérée est adimensionnelle. Les signes "< >" indiquent que c'est la valeur moyenne dans l'espace de l'expression placée entre ces deux signes qui doit être considérée.

A N N E X E S

ANNEXE 1 : TRAITEMENT ANALYTIQUE DE L'ECOLEMENT ENTRE DEUX
CYLINDRES COAXIAUX

ANNEXE 2 : SIGNIFICATION PHYSIQUE DE LA FONCTION COURANT

ANNEXE 3 : CALCUL DE LA FONCTION COURANT EN PAROI

ANNEXE 4 : ECRITURE DISCRETE DES EQUATIONS

ANNEXE 5 : ANEMOMETRIE THERMIQUE. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

ANNEXE 1 : TRAITEMENT ANALYTIQUE DE L'ÉCOULEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES COAXIAUX1 - INTRODUCTION -

Nous n'avons pas trouvé en références, le traitement complet de l'écoulement de Couette entre deux cylindres coaxiaux. Il s'agit pourtant d'un écoulement dont les caractéristiques peuvent être atteintes par voie analytique. Nous nous proposons ici de traiter ce problème dans le cas d'un fluide suivant le modèle d'Ostwald de Waele. Les résultats qui sont ceux d'un système d'agitation particulier nous sont précieux en vue de comparaisons éventuelles puisqu'ils indiquent des tendances de variations et surtout peuvent nous guider dans la recherche de corrélations générales. Ils sont également utiles pour comprendre le fonctionnement du viscosimètre à cylindres coaxiaux utilisé dans ce travail.

2 - DETERMINATION DU CHAMP DE VITESSES -

Nous faisons ici les mêmes hypothèses que dans le paragraphe 2.1 du chapitre 2. En outre, dans cet écoulement, les équations suivantes sont vérifiées :

$$v_r = 0 \quad (A.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \quad (A.2)$$

En régime permanent, les équations de changement se résument à :

$$\rho v_\theta^2 = 2 \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial r} \quad (A.3)$$

et
$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) = 0 \quad (A.4)$$

Nous ne nous intéressons pas ici aux termes de pression ; nous résolvons donc seulement l'équation (A.4), qui devient :

$$\tau_{r\theta} = \frac{C_1}{r} \quad (A.5)$$

D'autre part, $\tau_{r\theta}$ peut également s'écrire :

$$\tau_{r\theta} = -\eta \gamma_{r\theta} \quad (\text{A.6})$$

avec $\eta = m \left| r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right|^{n-1}$ (A.7)

et $\gamma_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right)$ (A.8)

L'égalité suivante est alors obtenue :

$$\frac{C_1}{r^2} = -m \left| r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right|^n \quad (\text{A.9})$$

L'intégration de (A.9) conduit à :

$$v_\theta = \frac{n}{2} \left(\frac{C_1}{m} \right)^{\frac{1}{n}} r^{1-\frac{2}{n}} + C_2 r \quad (\text{A.10})$$

Nous traitons deux cas de conditions de frontière. Dans le premier cas, le cylindre intérieur est immobile, le cylindre extérieur tourne à la vitesse $-N$; dans le deuxième cas, le cylindre extérieur est immobile, le cylindre intérieur tourne à la vitesse N .

Premier cas

Nous notons T le diamètre du cylindre extérieur et D celui du cylindre intérieur.

Les deux conditions de frontière sont ici :

$$* r = \frac{D}{2}, v_\theta = 0$$

$$* r = \frac{T}{2}, v_\theta = -\pi NT$$

L'équation (A.10) s'écrit alors :

$$v_\theta = - \frac{\pi NT}{\left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}} - 1} \left[\frac{D}{T} \left(\frac{2r}{D} \right)^{1-\frac{2}{n}} - \frac{2r}{T} \right] \quad (\text{A.11})$$

Deuxième cas

Les conditions de frontière s'écrivent :

$$* r = \frac{D}{2}, v_{\theta} = \pi ND$$

$$* r = \frac{T}{2}, v_{\theta} = 0$$

L'équation (A.10) devient :

$$v_{\theta} = - \frac{\pi ND}{1 - \left(\frac{T}{D}\right)^{\frac{2}{n}}} \left[\left(\frac{2r}{D}\right)^{1-\frac{2}{n}} - \frac{2r}{D} \right] \quad (\text{A.12})$$

Si nous ajoutons à l'expression (A.11) le terme $2 \pi Nr$, nous obtenons exactement l'expression (A.12). Par conséquent, passer du premier repère au deuxième repère par cette addition est parfaitement légitime. C'est ce que nous avons fait dans ce travail.

En écrivant :

$$v_{\theta} = \pi NT v_{\theta}^*$$

et $r = \frac{T}{2} r^*$,

l'expression adimensionnelle de (A.11) s'écrit :

$$v_{\theta}^* = \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}}} \left[\left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}} r^{*(1-\frac{2}{n})} - r^* \right], \quad (\text{A.13})$$

celle de (A.12) s'écrit :

$$v_{\theta}^* = \frac{\left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}} r^*}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}}} \left[r^{*\frac{-2}{n}} - 1 \right] \quad (\text{A.14})$$

Sur la figure A-1, nous présentons les variations de v_{θ}^* avec r^* , dans le cas où $\frac{D}{T} = 0,8$ et pour trois indices de comportement fluide.

Lorsque n décroît, le gradient de vitesse devient plus important sur le cylindre intérieur : v_{θ}^* décroît plus vite.

3 - CALCULS DES FONCTIONS COURANT ET ROTATIONNEL -

La fonction courant ϕ^* , définie par $v_{\theta}^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*}$, s'obtient en intégrant l'expression (A.13) par rapport à r^* .

$$\phi^* = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}}}} \int \frac{n}{1-n} \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}} r^{*(2-\frac{2}{n})} - r^{*2} \sqrt{\quad} + C_3 \quad (\text{A.15})$$

Comme pour les trois mobiles étudiés dans ce travail, nous choisissons une valeur nulle pour ϕ^* sur l'arbre d'agitation :

$$r^* = \frac{D}{T}, \quad \phi^* = 0$$

La fonction courant devient donc :

$$\phi^* = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}}}} \int \frac{n}{1-n} \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}} r^{*(2-\frac{2}{n})} - r^{*2} + \left(\frac{1-2n}{1-n}\right) \left(\frac{D}{T}\right)^2 \sqrt{\quad} \quad (\text{A.16})$$

Pour un fluide newtonien, ϕ^* s'écrit :

$$\phi^* = \frac{\left(\frac{D}{T}\right)^2 - r^{*2}}{2 \sqrt{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^2}} \quad (\text{A.17})$$

La figure A-2 présente les variations de ϕ^* avec r^* dans le cas d'un rapport géométrique $\frac{D}{T} = 0,8$. Nous noterons que la valeur de paroi diminue lorsque n augmente. Ceci signifie (voir annexe 2) qu'en valeur absolue, le débit de liquide entre les deux cylindres diminue lorsque le caractère pseudoplastique du fluide augmente. Nous noterons toutefois qu'entre un liquide newtonien et un liquide dont l'indice de comportement fluide est égal à 0,4, la différence reste faible. Dans cet écoulement, le rotationnel est donné par :

$$\omega^* = \frac{\partial v_{\theta}^*}{\partial r^*} + \frac{v_{\theta}^*}{r^*} \quad (\text{A.18})$$

Par conséquent, dans le repère tournant avec l'agitateur :

$$\omega^* = \frac{2}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}}} \int \left(\frac{n-1}{n}\right) \left(\frac{D}{T}\right)^{\frac{2}{n}} r^{*\frac{-2}{n}} - 1 \sqrt{\quad} \quad (\text{A.19})$$

Pour un fluide newtonien, ω^* est une constante donnée par :

$$\omega^* = - \frac{2}{1 - \left(\frac{D}{T}\right)^2} \quad (\text{A.20})$$

La figure A-3 montre que lorsque $n = 0,4$, ω^* varie très peu avec r^* . Par contre, lorsque n est petit, les variations de ω^* sont très accentuées.

4 - CALCUL DE LA CONTRAINTE DE CISAILLEMENT -

La contrainte de cisaillement s'écrit :

$$\tau_{r\theta}^* = \left| r^* \frac{\partial}{\partial r^*} \left(\frac{v_{\theta}^*}{r^*} \right) \right|^n \quad (\text{A.21})$$

Les expressions (A.13) et (A.14) de la vitesse dans chacun des deux repères conduisent à la même valeur de $\tau_{r\theta}^*$:

$$\tau_{r\theta}^* = \left| \frac{2}{n} \left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}} \frac{r^{*-\frac{2}{n}}}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}}} \right|^n \quad (\text{A.22})$$

Nous avons porté les variations de $\tau_{r\theta}^*$ en fonction de r^* pour $\frac{D}{T} = 0,8$ dans le cas de trois indices de comportement fluide, sur la figure A-4. Pour chacun des trois cas considérés, $\tau_{r\theta}^*$ décroît modérément quand r^* augmente.

5 - PUISSANCE CONSOMMEE -

La puissance consommée par le cylindre intérieur s'écrit :

$$P = \int_{\text{surface cylindre}} v \cdot dF \quad (\text{A.23})$$

La seule force qui s'oppose au mouvement tangentiel de l'agitateur est égale à $\tau_{r\theta} dS$.

Donc :

$$P = \int_{\text{surface cylindre}} v_{\theta} \tau_{r\theta} dS \quad (\text{A.24})$$

La surface du cylindre est égale à πDH , H étant la hauteur du cylindre. Sur ce cylindre :

$$v_{\theta} = \pi ND$$

$$\tau_{r\theta} = m (2 \pi N)^n \tau_{r\theta}^* \left(r^* = \frac{D}{T} \right)$$

Par conséquent :

$$P = m N^{1+n} D^3 \pi^2 \left(\frac{H}{D} \right) \left(\frac{4\pi}{n} \right)^n \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}}} \int^{\frac{1}{2}} \int^n \quad (A.25)$$

Le rapport $\frac{P}{m N^{1+n} D^3}$ est égal au produit $NpRe$ pour un fluide dont la rhéologie suit la loi d'Ostwald de Waele. D'autre part, pour les trois agitateurs étudiés dans ce travail, nous avons supposé que leur hauteur était égale au diamètre de la cuve. Ainsi,

$$NpRe = \pi^2 \left(\frac{T}{D} \right) \left(\frac{4\pi}{n} \right)^n \int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}}} \int^{\frac{1}{2}} \int^n \quad (A.26)$$

Pour un fluide newtonien, la corrélation (A.26) s'écrit :

$$NpRe = \frac{124,0}{\left(\frac{D}{T} \right) - \left(\frac{D}{T} \right)^3} \quad (A.27)$$

La figure A-5 montre que lorsque $\frac{D}{T}$ augmente, le produit $NpRe$ commence à décroître, atteint une valeur minimale égale à 322 pour $\frac{D}{T} = 0,577$, puis augmente à nouveau, et rapidement, puisque lorsque $\frac{D}{T} = 0,9$, $NpRe$ vaut déjà 726.

En rapprochant les corrélations (A.26) et (A.27), il est possible de mettre en évidence le coefficient B de la théorie de METZNER et OTTO (1957) pour cet ensemble d'agitation :

$$B = \left\{ 7,96 \cdot 10^{-2} \left(\frac{4\pi}{n} \right)^n \frac{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^2}{\int \frac{1}{1 - \left(\frac{D}{T} \right)^{\frac{2}{n}}} \int^{\frac{1}{2}} \int^n} \right\}^{\frac{1}{n-1}} \quad (A.28)$$

Il apparaît très clairement sur la figure A-6 que B augmente avec $\frac{D}{T}$. Il est clair également que B est modérément influencé par n : B diminue lorsque n augmente. En ce sens, les propositions de METZNER et OTTO (1957) sont prises en défaut.

ANNEXE 2 - SIGNIFICATION PHYSIQUE DE LA FONCTION COURANT

Le débit de circulation tangentielle dans la cuve entre l'axe et la paroi, Q , est donné par :

$$Q = \int_0^H dz \int_{r_A}^{\frac{T}{2}} v_{\theta} dr \quad (\text{A.29})$$

ou :

$$Q = \frac{\pi NHT^2}{2} \int_{r_A^*}^1 v_{\theta}^* dr^* \quad (\text{A.30})$$

Comme $v_{\theta}^* = \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*}$, et que $H = T$:

$$Q = \frac{\pi NT^3}{2} \int_{r_A^*}^1 \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} dr^* \quad (\text{A.31})$$

Le débit Q est tel que $Q = \frac{\pi NT^3}{2} Q^*$, Q^* étant le débit adimensionnel,

$$Q^* = \int_{r_A^*}^1 \frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} dr^* \quad (\text{A.32})$$

$$Q^* = \phi_{(paroi)}^* - \phi_{(axe)}^* \quad (\text{A.33})$$

Nous avons toujours choisi $\phi_{(axe)}^* = 0$. Par conséquent, dans ce cas, $\phi_{(paroi)}^*$ représente le débit de circulation tangentielle dans la cuve.

ANNEXE 3 - CALCUL DE LA FONCTION COURANT EN PAROI

Pour calculer ϕ_p^* , les développements suivants sont nécessaires.

L'équation (2.7) du chapitre 2 peut être réécrite sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} - \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} \quad (A.34)$$

Intégrons chacun des termes de l'équation (A.34) de 0 à π pour les domaines suivants :

- agitateur bipale : $\frac{D}{T} < r^* < 1 \quad (\mathcal{D}'_1)$
- ancre : $\frac{D}{T} < r^* < 1 \quad (\mathcal{D}'_1)$
- et $r_A^* < r^* < r_{IY}^* \quad (\mathcal{D}''_2)$
- agitateur-barrière : $\frac{D}{T} < r^* < 1 \quad (\mathcal{D}'_1)$
- $r_{IPO}^* < r^* < r_{IY}^* \quad (\mathcal{D}''_2)$
- et $r_A^* < r^* < r_{IYO}^* \quad (\mathcal{D}''_3)$

L'intégration sur le domaine \mathcal{D}'_1 permet d'obtenir ϕ_p^* , celle sur \mathcal{D}''_2 , ϕ_A^* , celle sur \mathcal{D}''_3 , ϕ_{B2}^* et celle sur \mathcal{D}''_3 , ϕ_{B1}^* .

Le terme $\int_0^\pi \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta} \right) d\theta$ est égal à $-\frac{1}{r} \int \mathcal{P}(\pi) - \mathcal{P}(0) \int$ qui par raison de symétrie est nul, sur les domaines considérés pour tout r.

Par conséquent, nous obtenons :

$$\rho \int_0^\pi \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) d\theta + \int_0^\pi \int \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial \theta} \int d\theta = 0 \quad (A.35)$$

Ce qui s'écrit en changeant de variables :

$$\rho \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} + v_r \omega + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r^2 + v_\theta^2) \right] d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) d\theta - \frac{1}{r} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{rr} d\theta = 0 \quad (\text{A.36})$$

ou

$$\rho \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \omega \right] d\theta + \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) d\theta = 0 \quad (\text{A.37})$$

Et en développant la contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$:

$$\rho \int_0^\pi \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \omega \right] d\theta - \int_0^\pi \eta \frac{\partial \omega}{\partial r} d\theta - \int_0^\pi \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \omega \right) d\theta = 0 \quad (\text{A.38})$$

EXPRESSIONS ADIMENSIONNELLES DE (A.38) EN REGIME PERMANENT

- Pour un fluide suivant la loi de Newton :

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D} \right)^2 \text{Re}_N \int_0^\pi \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\omega^*}{r^*} d\theta^* + \int_0^\pi \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} d\theta^* = 0 \quad (\text{A.39})$$

- Pour un fluide suivant le modèle d'Ostwald de Waele :

$$\frac{\pi}{2} (2\pi)^{1-n} \text{Re}_{OW} \left(\frac{T}{D} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\omega^*}{r^*} d\theta^* + \int_0^\pi \left[\eta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \omega^* \right) \right] d\theta^* = 0 \quad (\text{A.40})$$

- Pour un fluide suivant le modèle de Carreau :

$$\frac{\pi}{2} \text{Re}_C \left(\frac{T}{D} \right)^2 \int_0^\pi \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} \frac{\omega^*}{r^*} d\theta^* + \int_0^\pi \left[\eta^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + \frac{\partial \eta^*}{\partial r^*} \left(2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} - \omega^* \right) \right] d\theta^* = 0 \quad (\text{A.41})$$

CAS PARTICULIER DU DOMAINE D_1 (PAROI DE LA CUVE)

- Modèle de Newton :

$$\int_0^\pi \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} d\theta^* = 0 \quad (\text{A.42})$$

- Modèle d'Ostwald de Waele et de Carreau :

$$\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r^*} \left[\eta^* (\omega^* + 2) \right] d\theta^* = 0 \quad (\text{A.43})$$

Si les équations (A.39) à (A.41) sont vérifiées, la fonction courant en paroi initialement choisie est correcte.

ANNEXE 4 - ECRITURE DISCRETE DES EQUATIONS

1 - GENERALITES -

Les équations à traiter sont écrites en termes de différences centrales finies. Ainsi, avec i représentant la direction r et j la direction θ , les principaux termes s'écrivent :

$$\phi^* = \phi_{i,j}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 \Delta r}$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} = \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2 \Delta \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \theta^{*2}} = \frac{\phi_{i,j+1} - 2 \phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}}{\Delta \theta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^{*2}} = \frac{\phi_{i+1,j} - 2 \phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial r^* \partial \theta^*} = \frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{4 \Delta r \Delta \theta}$$

2 - ECRITURE DES EQUATIONS POUR LA METHODE DE GAUSS-SEIDEL -

2.1 Equation (2.39)

$$\phi_{i,j} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta^2}} \left(\frac{\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2 r_i \Delta r} \right. \\ \left. + \frac{\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1}}{r_i^2 \Delta \theta^2} - \omega_{i,j} \right) \quad (\text{A.44})$$

2.2 Equation (2.40)

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{\frac{2}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i^2 \Delta \theta^2}} \left(\frac{\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j}}{\Delta r^2} + \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2r_i \Delta r} + \frac{\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}}{r_i^2 \Delta \theta^2} - \alpha_{i,j} \right) \quad (\text{A.45})$$

avec

$$\alpha_{i,j} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{T}{D} \right)^2 \frac{\text{Re}_N}{r_i \Delta r \Delta \theta} \sqrt{(\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j})(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) - (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1})(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})} \quad (\text{A.46})$$

2.3 Equation (2.41)

$$\beta_{i,j} = \sqrt{4} \left(\frac{\phi_{i+1,j+1} - \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i-1,j-1}}{4 r_i \Delta r \Delta \theta} - \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2 r_i^2 \Delta \theta} + (2 \frac{\phi_{i+1,j} - 2 \phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}}{\Delta r^2} - \omega_{i,j})^2 \right) \quad (\text{A.47})$$

et

$$\eta_{i,j} = \beta_{i,j}^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{A.48})$$

2.4 Equation (2.42)

$$X_{i,j} = \alpha_{i,j} (2\pi)^{1-n} \frac{\text{Re}_{OW}}{\text{Re}_N} \quad (\text{A.49})$$

Dans le programme correspondant, $\alpha_{i,j}$ est bien sûr écrit explicitement, comme donné par l'équation (A.46).

2.5 Equation (2.43)

$$\eta_{i,j} = (1 + \lambda^* \beta_{i,j})^{\frac{n-1}{2}} \quad (\text{A.50})$$

2.6 Equation (2.44)

$$X_{i,j} = \alpha_{i,j} \frac{\text{Re}_C}{\text{Re}_N} \quad (\text{A.51})$$

Dans les équations (A.49) et (A.51), $X_{i,j}$ est l'écriture sous forme discrète du terme X^* donné par l'équation (2.45) du chapitre 2.

3 - ECRITURE DES EQUATIONS POUR LA METHODE A.D.I. -

Nous n'allons traiter ci-dessous que l'équation de mouvement donnée pour le modèle newtonien, c'est-à-dire l'équation (2.40) du chapitre 2.

Nous supposons le champ des fonctions courant et rotationnel connu à l'instant t^* . Nous cherchons à le déterminer à l'instant $t^* + \Delta t$.

Pour cela, la fonction ω^* varie dans la direction r^* au premier demi-pas de temps et dans la direction θ^* au deuxième demi-pas de temps.

Dans la suite de cette annexe, lorsqu'une valeur est prise à l'instant t^* , elle est notée avec l'exposant n , lorsqu'elle est prise à l'instant $t^* + \frac{\Delta t}{2}$, avec l'exposant $n + \frac{1}{2}$, et à l'instant $t^* + \Delta t$, avec l'exposant $n + 1$.

3.1 Premier demi-pas de temps

Les écritures sous forme discrète sont les suivantes :

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} = \frac{2}{\Delta t} (\omega_{i,j}^{n+1/2} - \omega_{i,j}^n) ;$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} = \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{2 \Delta_r} ;$$

$$\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial r^{*2}} = \frac{\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2 \omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}}{\Delta_r^2} ;$$

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial \theta^*} = \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2 \Delta_\theta} ;$$

$$\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial \theta^{*2}} = \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2 \omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta_\theta^2}$$

Les dérivées de ϕ^* , $\frac{\partial \phi^*}{\partial r^*}$ et $\frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*}$ restent définies au temps t^* .

Nous posons :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 \operatorname{Re}_N \frac{\Delta_r}{2r_i^*} \left(\frac{\partial\phi^*}{\partial\theta^*}\right)_{i,j}^n ;$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 \operatorname{Re}_N \frac{r_i^* \Delta_\theta}{2} \left(\frac{\partial\phi^*}{\partial r^*}\right)_{i,j}^n ;$$

$$\gamma = \frac{\Delta_r}{2r_i^*} ;$$

$$\delta = \pi \left(\frac{T}{D}\right)^2 \operatorname{Re}_N \frac{\Delta_r^2}{\Delta t} ;$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\Delta_r}{r_i^* \Delta_\theta}\right)^2$$

L'équation (2.40) devient ainsi :

$$\begin{aligned} \omega_{i-1,j}^{n+1/2} (\gamma + \alpha - 1) + \omega_{i,j}^{n+1/2} (\delta + 2) - \omega_{i+1,j}^{n+1/2} (1 + \gamma + \alpha) \\ = \omega_{i,j-1}^n \varepsilon (1 - \beta) + \omega_{i,j}^n (\delta - 2\varepsilon) + \omega_{i,j+1}^n \varepsilon (1 + \beta) \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

3.2 Deuxième demi-pas de temps

Dans ce cas, la dérivée par rapport au temps devient :

$$\frac{\partial\omega^*}{\partial t^*} = \frac{2}{\Delta t} (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^{n+1/2}) ;$$

Les dérivées par rapport à r^* sont prises à l'instant $n+1/2$, celles par rapport à θ^* à l'instant $n+1$. Nous définissons $\frac{\partial\phi^*}{\partial r^*}$ et $\frac{\partial\phi^*}{\partial\theta^*}$ à l'instant n .

L'équation (2.40) est alors :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j-1}^{n+1} (\beta - 1) + \omega_{i,j}^{n+1} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} + 2\right) - \omega_{i,j+1}^{n+1} (1 + \beta) \\ = \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \frac{1}{\varepsilon} (1 - \gamma - \alpha) + \omega_{i,j}^{n+1/2} \frac{1}{\varepsilon} (\delta - 2) + \omega_{i+1,j}^{n+1/2} \frac{1}{\varepsilon} (1 + \gamma + \alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

4 - CONDITIONS DE FRONTIERES -

Au chapitre 2, nous avons écrit, dans le tableau 2-1, les conditions de frontières géométriques. Nous les présentons sous leur forme discrète dans le tableau A-1.

Nous observons que, pour un agitateur bipale, au point de rencontre axe-pale ($i = 1$; $j = 1$ ou $j = 33$), $\omega_{i,j}$ est égal à zéro. Par conséquent, dans le cas d'un fluide pseudoplastique suivant le modèle d'Ostwald de Waele, ceci conduit à :

$$\eta_{11} \rightarrow \infty$$

Nous avons, dans ce cas, attribué une valeur arbitraire mais grande à la viscosité apparente :

$$\eta_{11} = 10^3$$

qui est suffisamment importante pour ne pas modifier les résultats.

Nous avons présenté en annexe 3 le calcul de ϕ_p^* .

L'équation correspondante prend la forme suivante dans le cas d'un fluide newtonien :

$$\sum_{j=1}^{32} \omega_{i-1,j} = \sum_{j=1}^{32} \omega_{i+1,j} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{T}{D}\right)^2 \frac{\Delta_r}{r_i \Delta_\theta} \text{Re}_N \sum_{j=1}^{32} \omega_{i,j} (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}) \quad (\text{A.54})$$

Dans le cas particulier du domaine \mathcal{D}_1 , cette équation se résume à :

$$\sum_{j=1}^{32} \omega_{40,j} = \sum_{j=1}^{32} \omega_{39,j} \quad (\text{A.55})$$

Lieu	$\phi_{i,j}$	$\omega_{i,j}$	$\eta_{i,j}$ (Ostwald de Waele)	$\eta_{i,j}$ (Carreau)
Axe : i = 1 1 < j < 33	0	$2 \frac{\phi_{2,j}}{\Delta_r^2}$	$ \omega_{1,j} ^{n-1}$	$(1+\lambda^* \omega_{1,j}^2)^{\frac{n-1}{2}}$
Pales : j = 1 et j = 33				
Bipale 1 < i < IP	0	$\omega_{i,1} = \frac{2}{r_i^2 \Delta_\theta^2}$	$\eta_{i,1} = \omega_{i,1} ^{n-1}$	$\eta_{i,1} = (1+\lambda^* \omega_{i,1}^2)^{\frac{n-1}{2}}$
Ancre IY < i < IP	ϕ_A^*	$(\phi_{i,2} - \phi_{i,1})$		
1ère pale Barrière IYO < i < IPO	ϕ_{B1}^*	$\omega_{i,33} = \frac{2}{r_i^2 \Delta_\theta^2}$ $(\phi_{i,32} - \phi_{i,33})$	$\eta_{i,33} = \omega_{i,33} ^{n-1}$	$\eta_{i,33} = (1+\lambda^* \omega_{i,33}^2)^{\frac{n-1}{2}}$
2ème pale Barrière IY < i < IP	ϕ_{B2}^*			
Extrémités interne et externe des pales : j = 1 et j = 33				$\eta_{i,j} = (1+\lambda^* z_{i,j}^2)^{\frac{n-1}{2}}$
Bipale i = IP	0	$\omega_{i,j} = \frac{2}{\Delta_r^2} (\phi_{i+1,1} - \phi_{i,1})$	$\eta_{i,j} = \left \frac{2}{\Delta_r^2} (\phi_{i+1,1} - \phi_{i,1}) - \frac{1}{r_i^2 \Delta_\theta^2} (\phi_{i,2} - 2\phi_{i,1} + \phi_{i,32}) \right ^{n-1}$	
Ancre i = IP	ϕ_A^*	$+$		
Barrière i = IP	ϕ_{B1}^*			
i = IPO	ϕ_{B2}^*		$= z_{i,j} ^{n-1}$	
Ancre i = IY	ϕ_A^*	$\omega_{i,j} = \frac{2}{\Delta_r^2} (\phi_{i-1,1} - \phi_{i,1})$	$\eta_{i,j} = \left \frac{2}{\Delta_r^2} (\phi_{i-1,1} - \phi_{i,1}) - \frac{1}{r_i^2 \Delta_\theta^2} (\phi_{i,2} - 2\phi_{i,1} + \phi_{i,32}) \right ^{n-1}$	$\eta_{i,j} = (1+\lambda^* x_{i,j}^2)^{\frac{n-1}{2}}$
Barrière i = IYO	ϕ_{B2}^*	$+$		
i = IY	ϕ_{B1}^*		$= x_{i,j} ^{n-1}$	
Paroi : i = 40 1 < j < 33	ϕ_P^*	$\frac{2}{\Delta_r^2} (\phi_{39,j} - \phi_P^* - \Delta_r)$	$ \omega_{40,j+2} ^{n-1}$	$\sqrt{1+\lambda^*} (\omega_{40,j+2})^2 \sqrt{\frac{n-1}{2}}$

TABLEAU A-1 - CONDITIONS DE FRONTIERE DISCRETES

ANNEXE 5 - ANEMOMETRIE THERMIQUE. MISE SOUS FORME ADIMENSIONNELLE

Les dimensions du cylindre sont très petites. Par conséquent, autour de la sonde, il s'agit d'un écoulement rampant. L'équation de mouvement en régime permanent pour un fluide incompressible est donc :

$$\text{grad } \mathcal{P} = \text{div } \tau \quad (\text{A.56})$$

Ecrivons chacun des termes sous forme adimensionnelle :

$$\text{grad} = \frac{\text{grad}^*}{D_S} ;$$

$$\mathcal{P} = \rho_F v_\infty^2 \mathcal{P}^*$$

$$\text{div} = \frac{\text{div}^*}{D_S}$$

$$\tau = \mu \frac{v_\infty}{D_S} \tau^* \quad \text{pour un fluide newtonien}$$

$$\tau = m \left(\frac{v_\infty}{D_S} \right)^n \tau^* \quad \text{pour un fluide pseudoplastique suivant la loi d'Ostwald de Waele}$$

L'équation (A.56) devient :

$$\frac{\rho_F v_\infty D_S}{\mu} \text{grad}^* \mathcal{P}^* = \text{div}^* \tau^* \quad (\text{A.57})$$

pour un fluide newtonien

$$\frac{\rho_F v_\infty^{2-n} D_S^n}{m} \text{grad}^* \mathcal{P}^* = \text{div}^* \tau^* \quad (\text{A.58})$$

pour un fluide suivant la loi d'Ostwald de Waele.

Ainsi, $\frac{\rho_F v_\infty D_S}{\mu_F}$ est le nombre de Reynolds pour le fluide newtonien et $\frac{\rho_F v_\infty^{2-n} D_S^n}{m}$, le nombre de Reynolds pour le fluide pseudoplastique.

Ecrivons l'équation d'énergie sans tenir compte du terme de dissipation visqueuse :

$$\rho_F C_{PF} \text{div} (vT) = k_F \nabla^2 T \quad (\text{A.59})$$

Sous forme adimensionnelle, chacun des termes s'écrit :

$$v = v_{\infty} v^*$$

$$T = (T_1 - T_0) T^* + T_0$$

$$v^2 = \frac{v^{*2}}{D_S^2}$$

Nous obtenons :

$$\frac{\rho_F C_{PF} v_{\infty} D_S}{k_F} \operatorname{div}^* (v^* T^*) = v^{*2} T^* \quad (\text{A.60})$$

Le terme $\frac{\rho_F C_{PF} v_{\infty} D_S}{k_F}$ est le produit $RePr$. Par conséquent, le nombre de Prantdt est :

- pour un fluide newtonien :

$$Pr = \frac{C_{PF} \mu_F}{k_F} \quad (\text{A.61})$$

- pour un fluide pseudoplastique :

$$Pr = C_{PF} \frac{m}{k_F} \left(\frac{v_{\infty}}{D_S} \right)^{n-1} \quad (\text{A.62})$$

Transfert thermique entre un cylindre immergé dans un fluide et ce fluide en mouvement

Ce transfert est souvent représenté par une équation de la forme :

$$Nu = A + B Re^{0,50} Pr^{0,33} \quad (\text{A.63})$$

Pour un fluide newtonien, cette loi pourrait donc s'écrire :

$$Nu = A' + B' v_{\infty}^{0,50} \quad (\text{A.64})$$

Pour un fluide pseudoplastique :

$$Nu = A'' + B'' v_{\infty}^{0,67-0,17n} \quad (\text{A.65})$$

D E C I S I O N

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Toulouse

VU les dispositions de l'article 9 de l'arrêté du 16 avril 1974
sur le Doctorat d'Etat ;

VU les rapports de M. COUDERC

M. ANTONINI

M. GIBERT

AUTORISE M. BERTRAND Joël

à présenter une thèse en soutenance pour l'obtention du grade
de DOCTEUR D'ETAT.

A Toulouse, le 18 Novembre 1983

Le Président de l'I.N.P.T.



Professeur J. NOUGARO



121 046172 6

AGITATION DE FLUIDES VISQUEUX

CAS DE MOBILES A PALES, D'ANCRÉS ET DE BARRIÈRES

- FIGURES -

Joël **BERTRAND**

LISTE DES FIGURES

- Fig. 1-1 : Rhéogrammes de fluides non-newtoniens indépendants du temps
- Fig. 1-2 : Rhéogrammes de fluides non-newtoniens dépendants du temps
- Fig. 1-3 : Lignes de courant et vitesse tangentielle : résultats présentés par PEETERS et SMITH (1967)
- Fig. 2-1 : Domaine étudié
- Fig. 2-2 : Maillage de la cuve
- Fig. 3-1 : Schéma du RHEOMAT 15T
- Fig. 3-2 : Rhéogramme du Fuel Lourde
- Fig. 3-3 : Variation de la viscosité du fuel lourd en fonction de la température
- Fig. 3-4 : Viscosité du fuel lourd : comparaison avec PAPACHRISTODOULOU et TRASS (1981)
- Fig. 3-5 : Rhéogramme du carbopol, $C = 0,05\%$
- Fig. 3-6 : Rhéogramme du carbopol, $C = 0,1\%$
- Fig. 3-7 : Schéma de l'installation d'étalonnage des sondes à film chaud
- Fig. 3-8 : Etalonnage dans le fuel lourd de la sonde 1 ; position à 90°
- Fig. 3-9 : Etalonnage dans le fuel lourd de la sonde 2 ; positions à 0° et 90°
- Fig. 3-10 : Etalonnage dans le carbopol, $C = 0,05\%$, de la sonde 3 ; positions à 0° et 90°
- Fig. 3-11 : Diverses positions du film cylindrique
- Fig. 3-12 : Principe de la mesure de puissance
- Fig. 4-1 : Agitateur bipale étudié
- Fig. 4-2 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $Re = 0,082$ et $n = 1$
- Fig. 4-3 : Fonction courant ϕ^* pour $\theta^* = 0$, $n = 1$
- Fig. 4-4 : Fonction courant ϕ^* pour θ^* , $\frac{\pi}{2}$, $n = 1$
- Fig. 4-5 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $Re = 37,86$ et $n = 1$
- Fig. 4-6 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 4-7 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 4-8 : Variations de ϕ_p^* en fonction de Re pour $\frac{D}{T} = 0,508$ et $n = 1$
- Fig. 4-9 : Valeurs de la fonction courant ϕ^* à $t^* = 0$
- Fig. 4-10 : Variations de ϕ_p^* et ω_p^* ($\theta^* = \frac{\pi}{2}$) en fonction de t^*
- Fig. 4-11 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = 0$ et $n = 1$
- Fig. 4-12 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$ et $n = 1$
- Fig. 4-13 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = 0$, $\frac{D}{T} = 0,508$ et $n = 1$
- Fig. 4-14 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$, $\frac{D}{T} = 0,508$ et $n = 1$
- Fig. 4-15 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = 0$, $\frac{D}{T} = 0,508$ et $Re = 0,1$
- Fig. 4-16 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 21,82$ et $\theta^* = 6^\circ$

- Fig. 4-45 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 0,7$, $Re = 0,1$ et $\theta^* = 90^\circ$
- Fig. 4-46 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 0,7$, $Re = 0,1$ et $\theta^* = 135^\circ$
- Fig. 4-47 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$, $n = 0,7$, $Re = 0,1$ et $\theta^* = 174^\circ$
- Fig. 4-48 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour $\frac{D}{T} = 0,508$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 4-49 : Nombre de puissance pour $\frac{D}{T} = 0,508$
- Fig. 5-1 : Ancre étudiée
- Fig. 5-2 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,730$, $Re = 0,1$ et $n = 1$
- Fig. 5-3 : Fonction courant ϕ^* pour $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-4 : Fonction courant ϕ^* pour $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 5-5 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-6 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 5-7 : Fonction courant ϕ^* pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $Re = 0,257$ et $\theta^* = \frac{\pi}{4}$
- Fig. 5-8 : Fonction rotationnel ω^* pour $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-9 : Fonction rotationnel ω^* pour $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 5-10 : Fonction rotationnel ω^* pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-11 : Fonction rotationnel ω^* pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 5-12 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 0,65$, $Re = 1$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 5-13 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 10$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 5-14 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 10$ et $\theta^* = 45^\circ$
- Fig. 5-15 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 10$ et $\theta^* = 90^\circ$
- Fig. 5-16 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 10$ et $\theta^* = 135^\circ$
- Fig. 5-17 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $n = 1$, $Re = 10$ et $\theta^* = 174^\circ$
- Fig. 5-18 : Vitesse tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,779$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-19 : Vitesse tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,828$, $Re = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 5-20 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,730$, $Re = 1$, $n = 1$ et $r^* = 0,582$ (extrémité intérieure de la pale)
- Fig. 5-21 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,730$, $Re = 1$, $n = 1$ et $r^* = 0,730$ (extrémité extérieure de la pale)
- Fig. 5-22 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,926$, $Re = 0,4$, $n = 0,9$ et $r^* = 0,779$ (extrémité intérieure de la pale)
- Fig. 5-23 : Vitesses radiale et tangentielle pour $\frac{D}{T} = 0,926$, $Re = 0,4$, $n = 0,9$ et $r^* = 0,926$ (extrémité extérieure de la pale)

- Fig. 6-6 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = 0$
- Fig. 6-7 : Fonction rotationnel ω^* pour $\theta^* = \frac{\pi}{2}$
- Fig. 6-8 : Fonction rotationnel ω^* géométrie n°2 et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-9 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-10 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°6, $Re = 1,028$, $n = 0,9$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-11 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-12 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°6, $Re = 1,028$, $n = 0,9$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-13 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 45^\circ$
- Fig. 6-14 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 90^\circ$
- Fig. 6-15 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 135^\circ$
- Fig. 6-16 : Vitesses radiale et tangentielle pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 174^\circ$
- Fig. 6-17 : Vitesses radiale et tangentielle aux extrêmités de pales pour géométrie n°4, $Re = 0,1$ et $n = 1$
- Fig. 6-18 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-19 : Contraintes pour géométrie n°6, $Re = 1,028$, $n = 0,9$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-20 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-21 : Contraintes pour géométrie n°6, $Re = 1,028$, $n = 0,9$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-22 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 45^\circ$
- Fig. 6-23 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 90^\circ$
- Fig. 6-24 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 135^\circ$
- Fig. 6-25 : Contraintes pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 174^\circ$
- Fig. 6-26 : Contrainte de cisaillement en paroi de cuve pour géométrie n°2
- Fig. 6-27 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 0$
- Fig. 6-28 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-29 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour géométrie n°6, $Re = 1,028$, $n = 1$ et $\theta^* = 6^\circ$
- Fig. 6-30 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 45^\circ$
- Fig. 6-31 : Dissipation visqueuse ϕ_v^* pour géométrie n°4, $Re = 0,1$, $n = 1$ et $\theta^* = 90^\circ$

Fig. 1-1

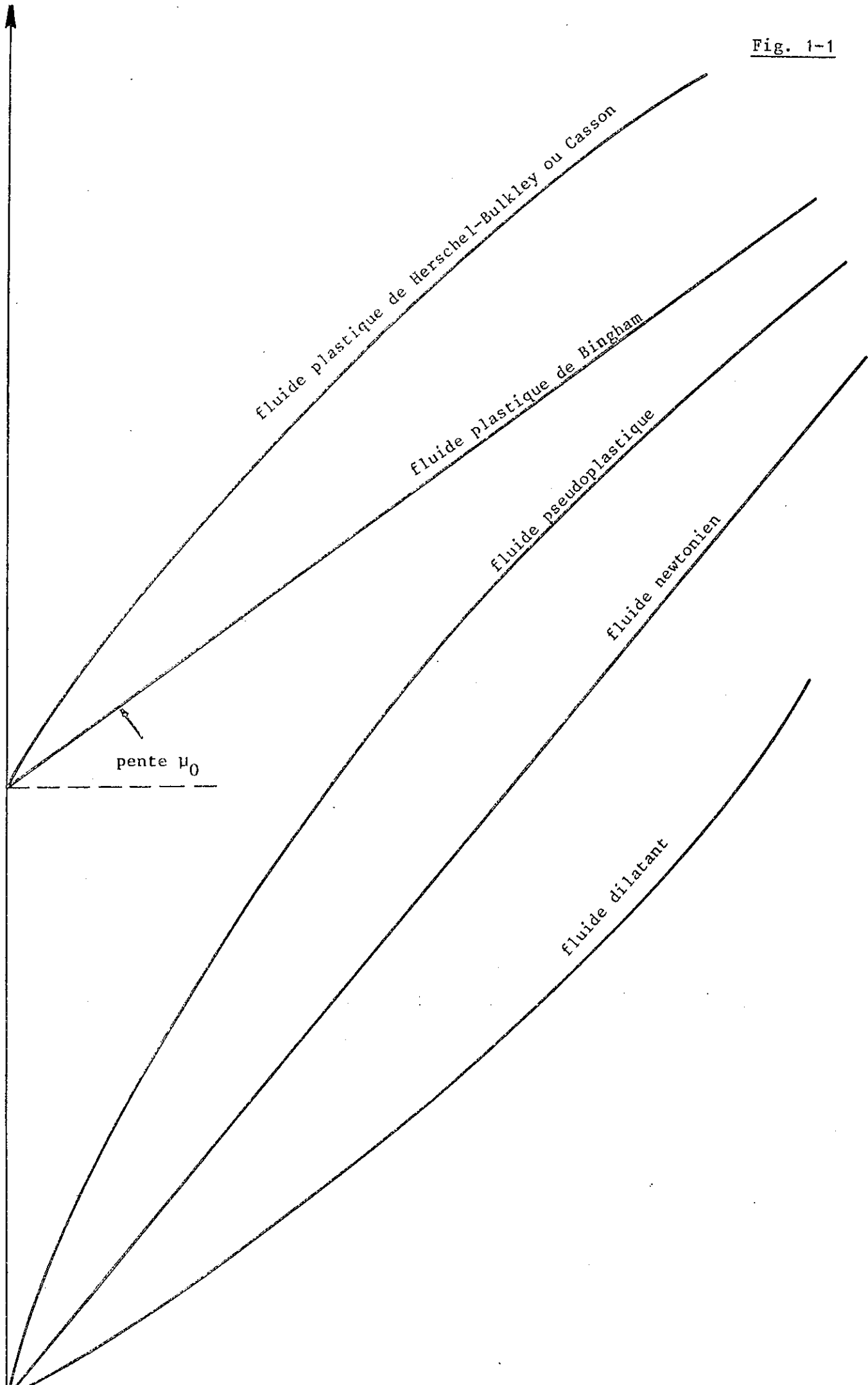


Fig. 1-2

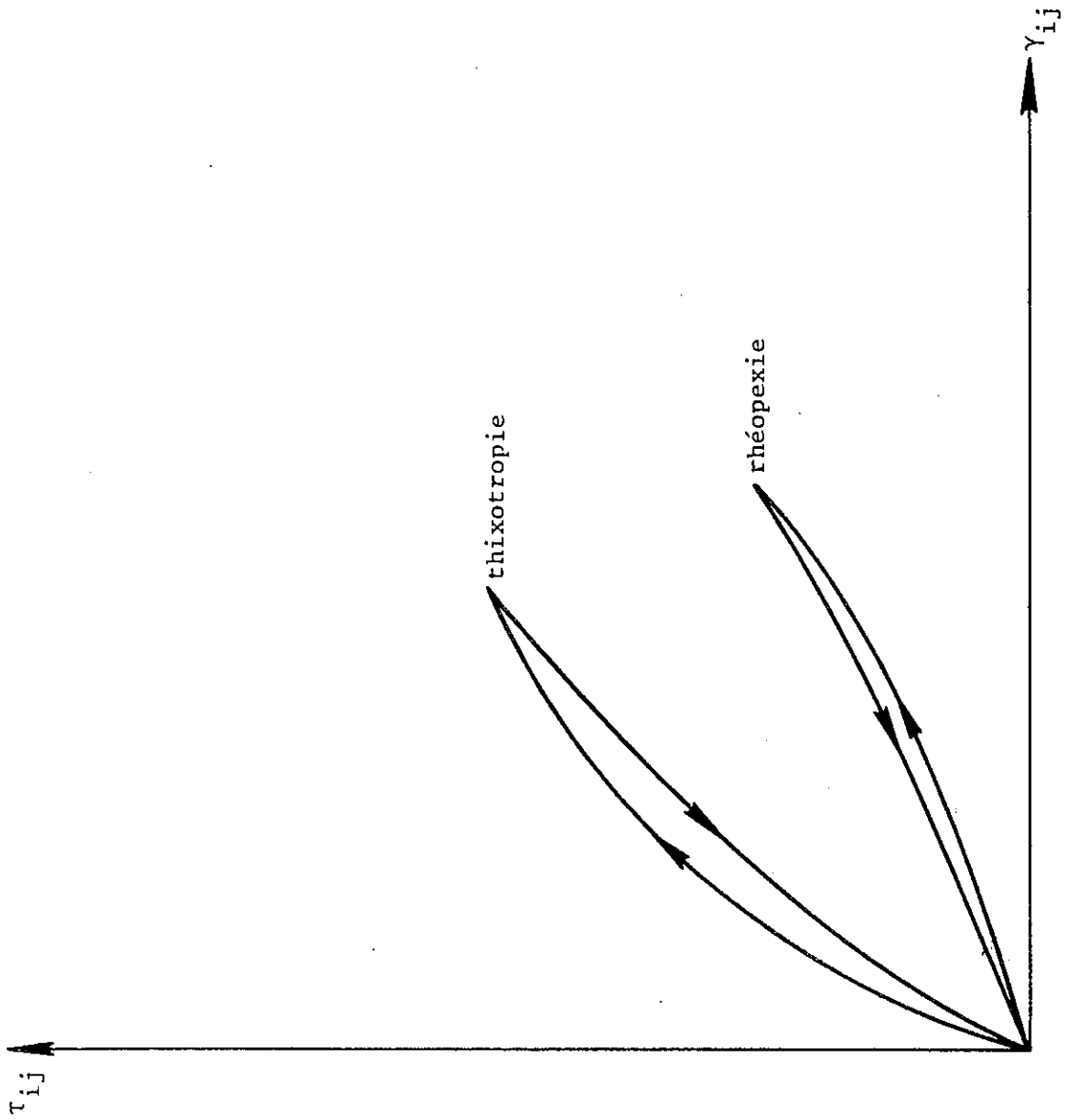


Fig. 1-3

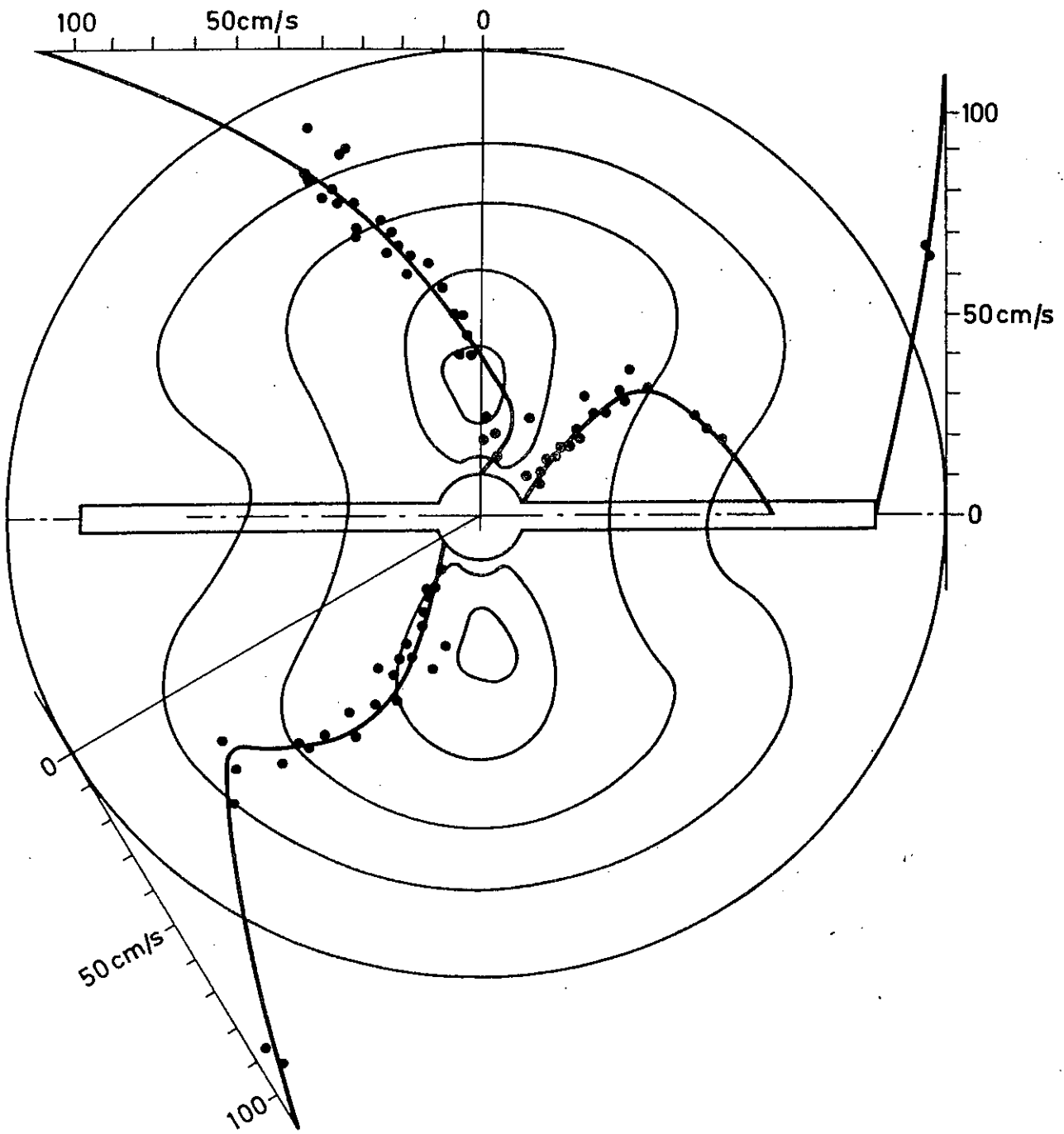


Fig. 2-1

paroi de la cuve : $r = \frac{T}{2}$

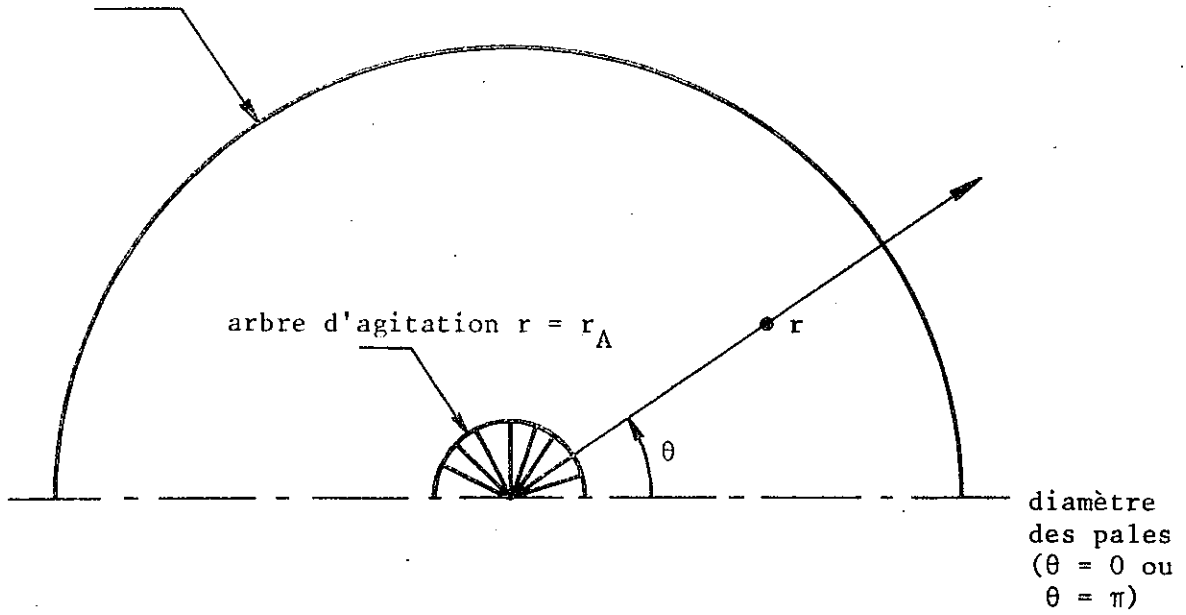


Fig. 2-2

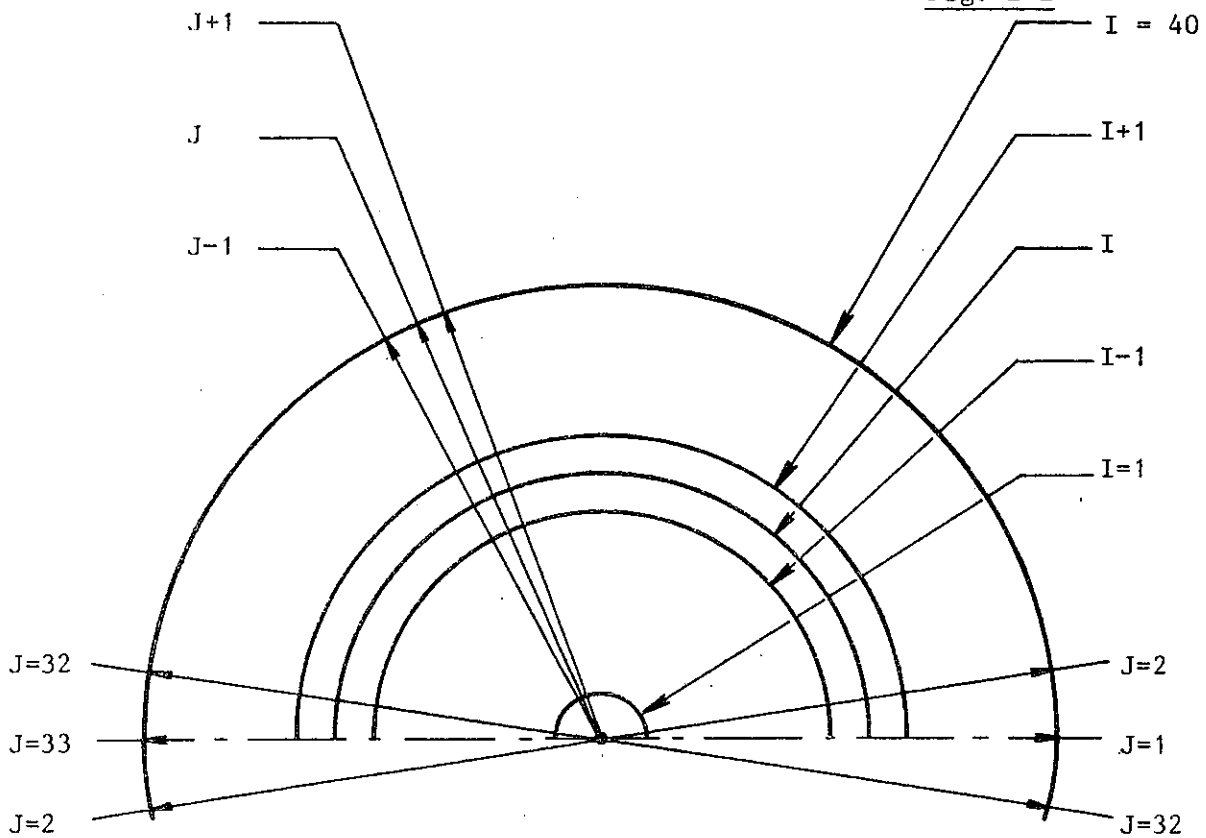


Fig. 3-1

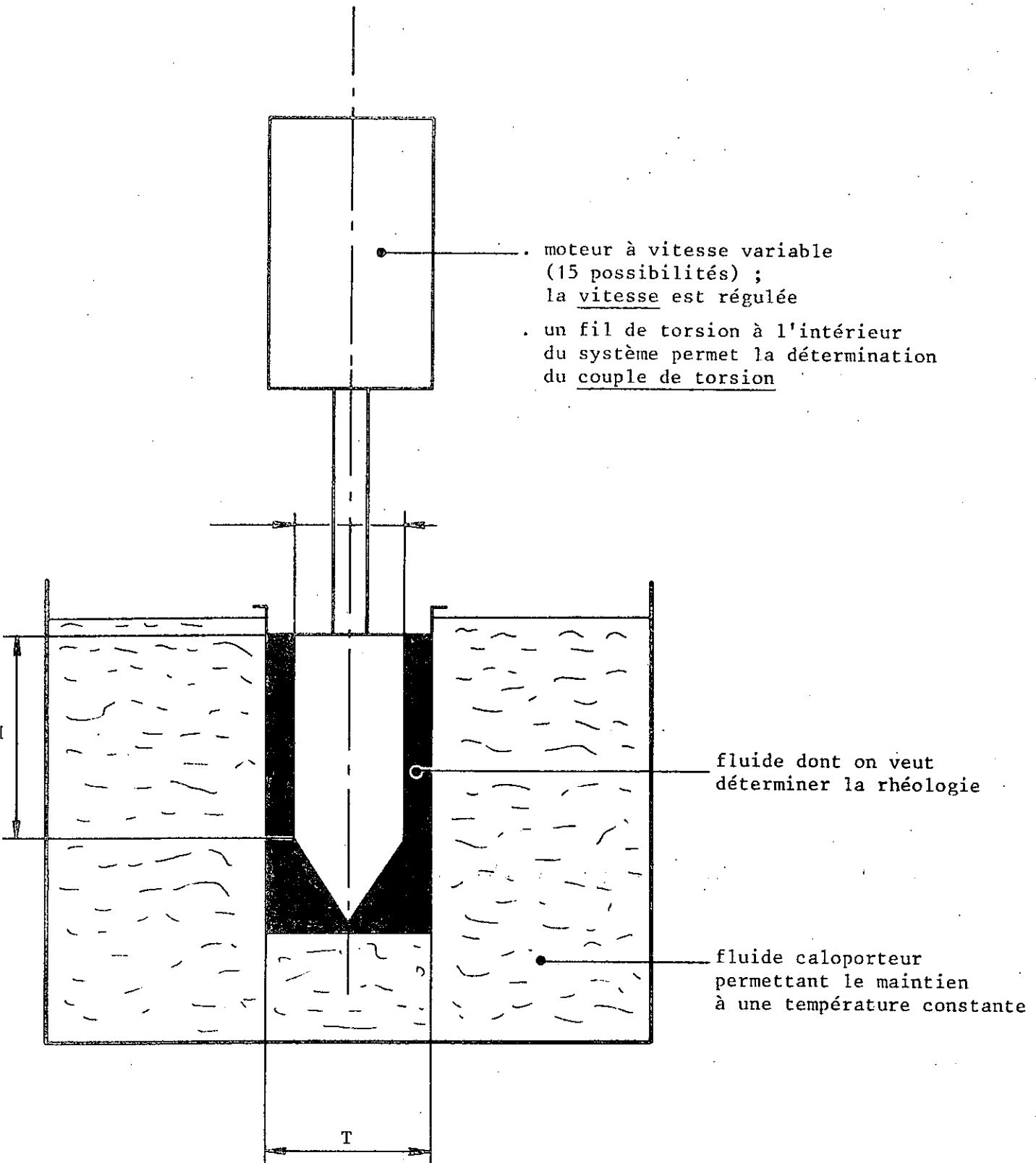


Fig. 3-2

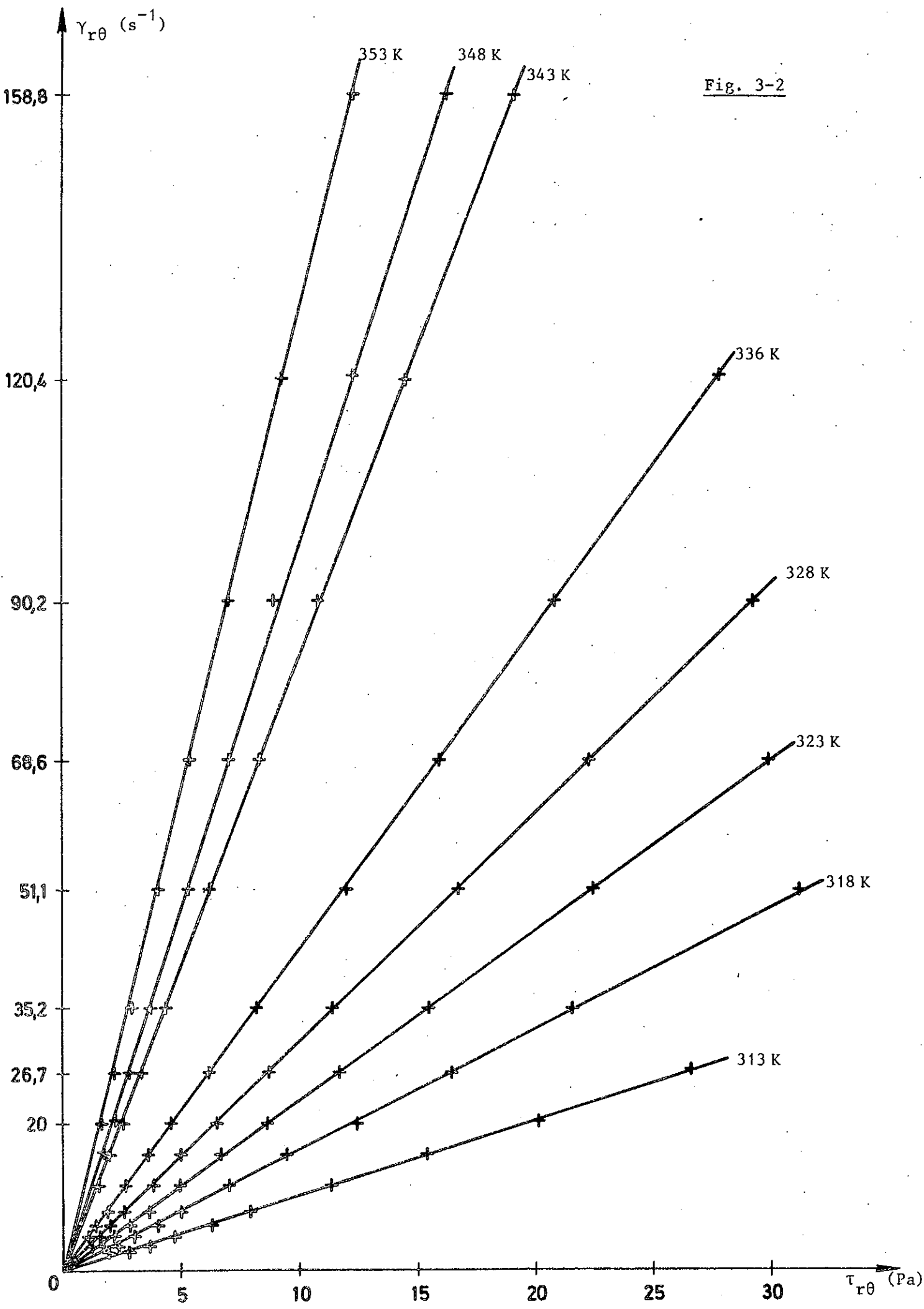
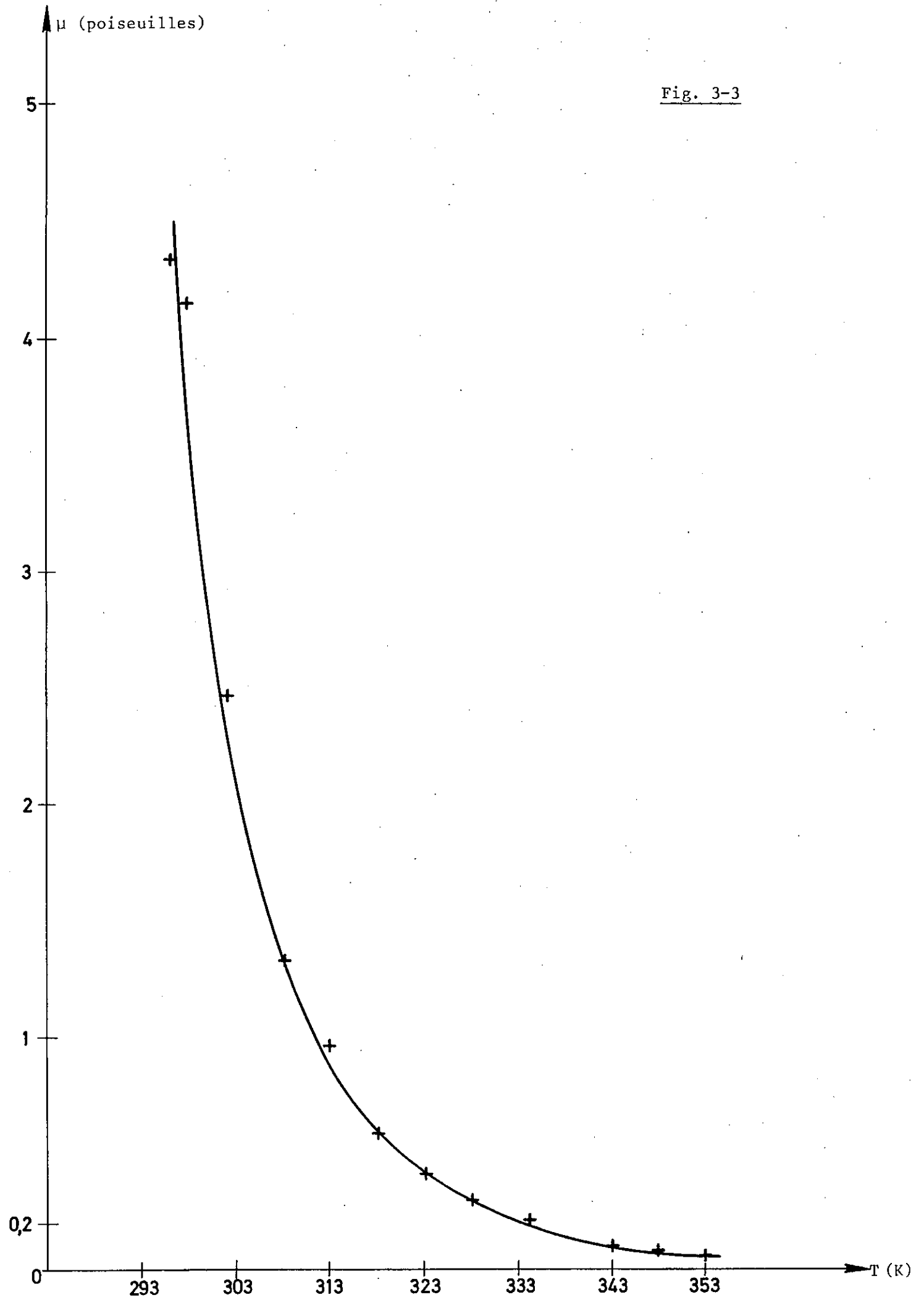


Fig. 3-3



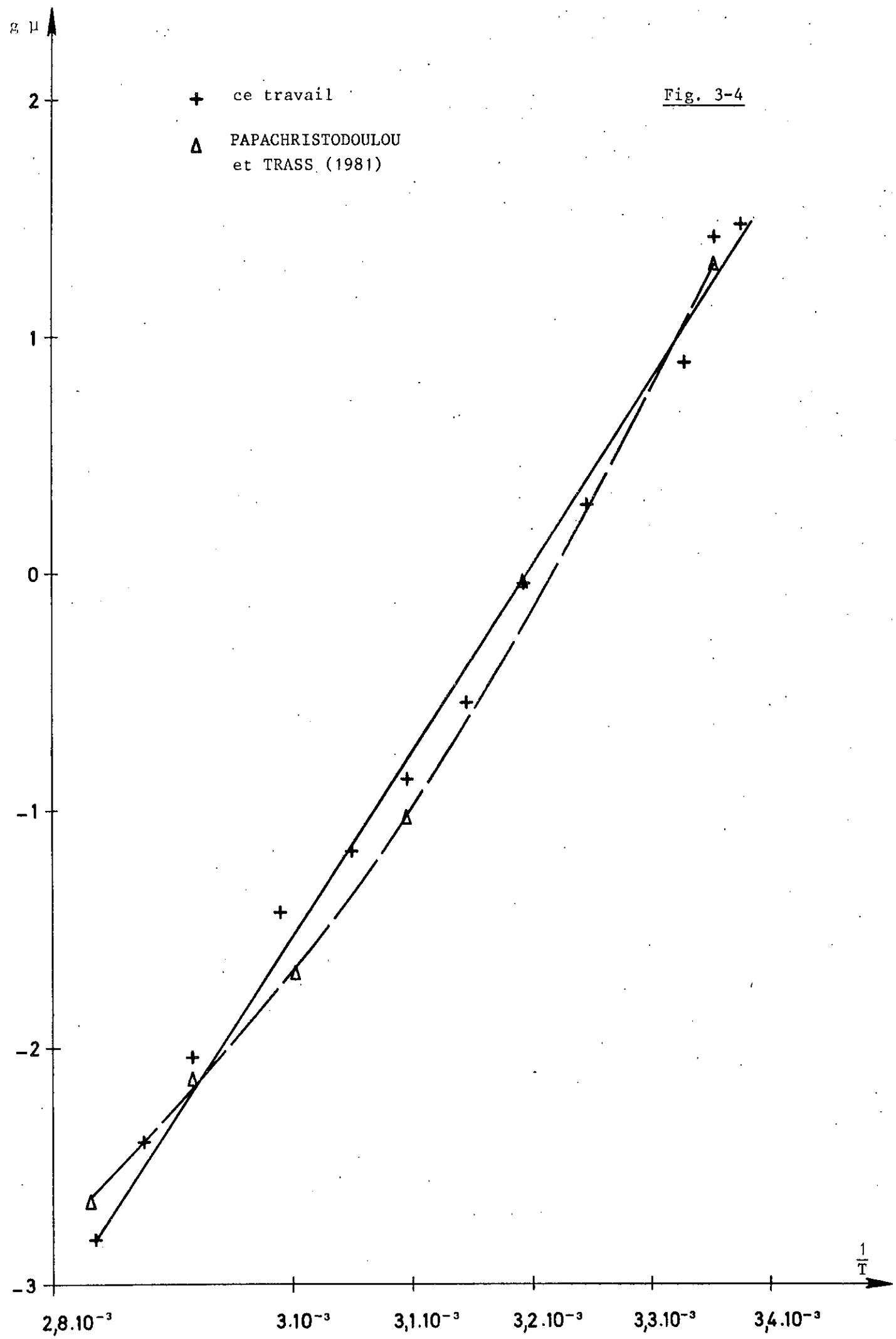


Fig. 3-5

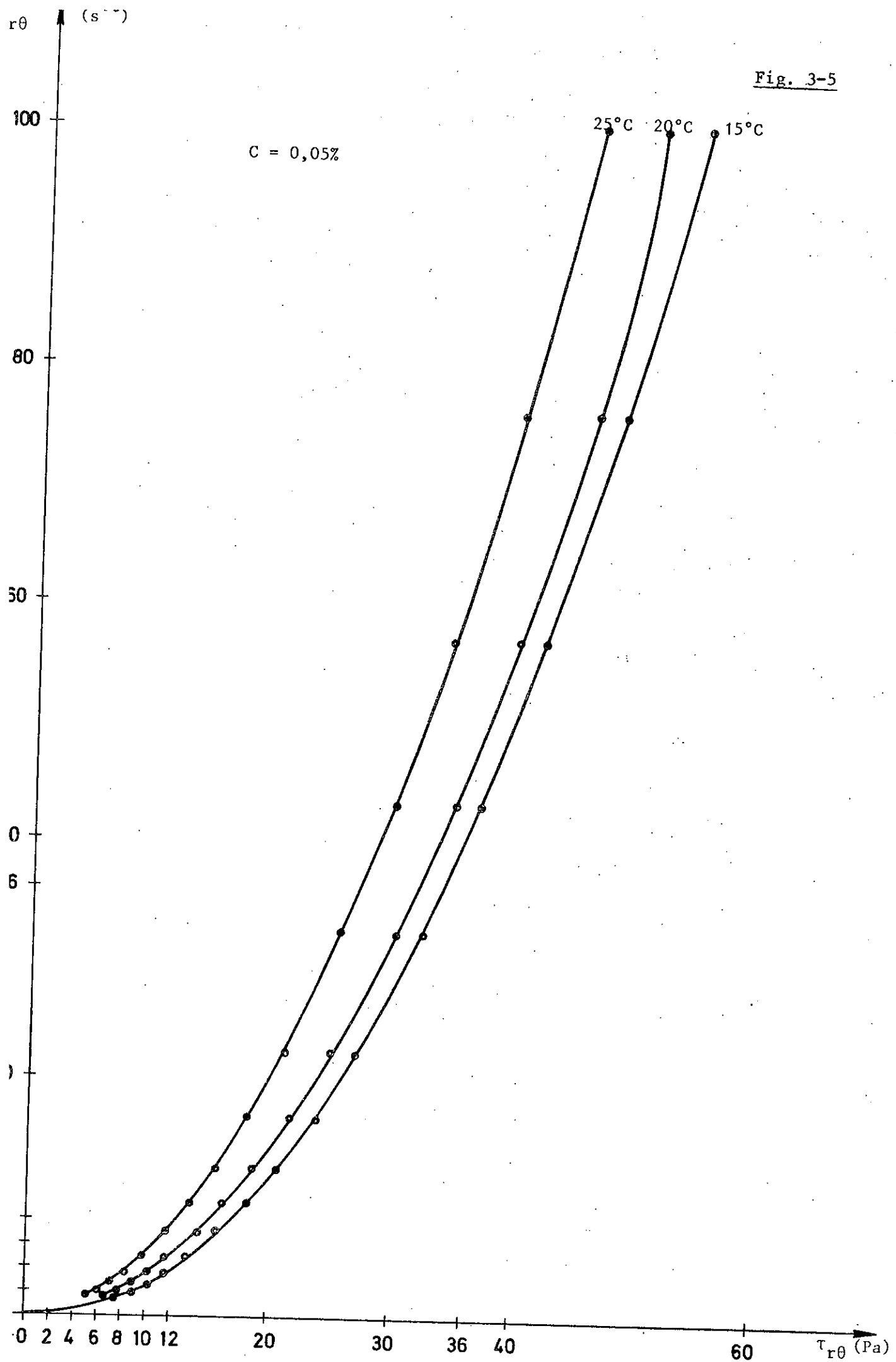
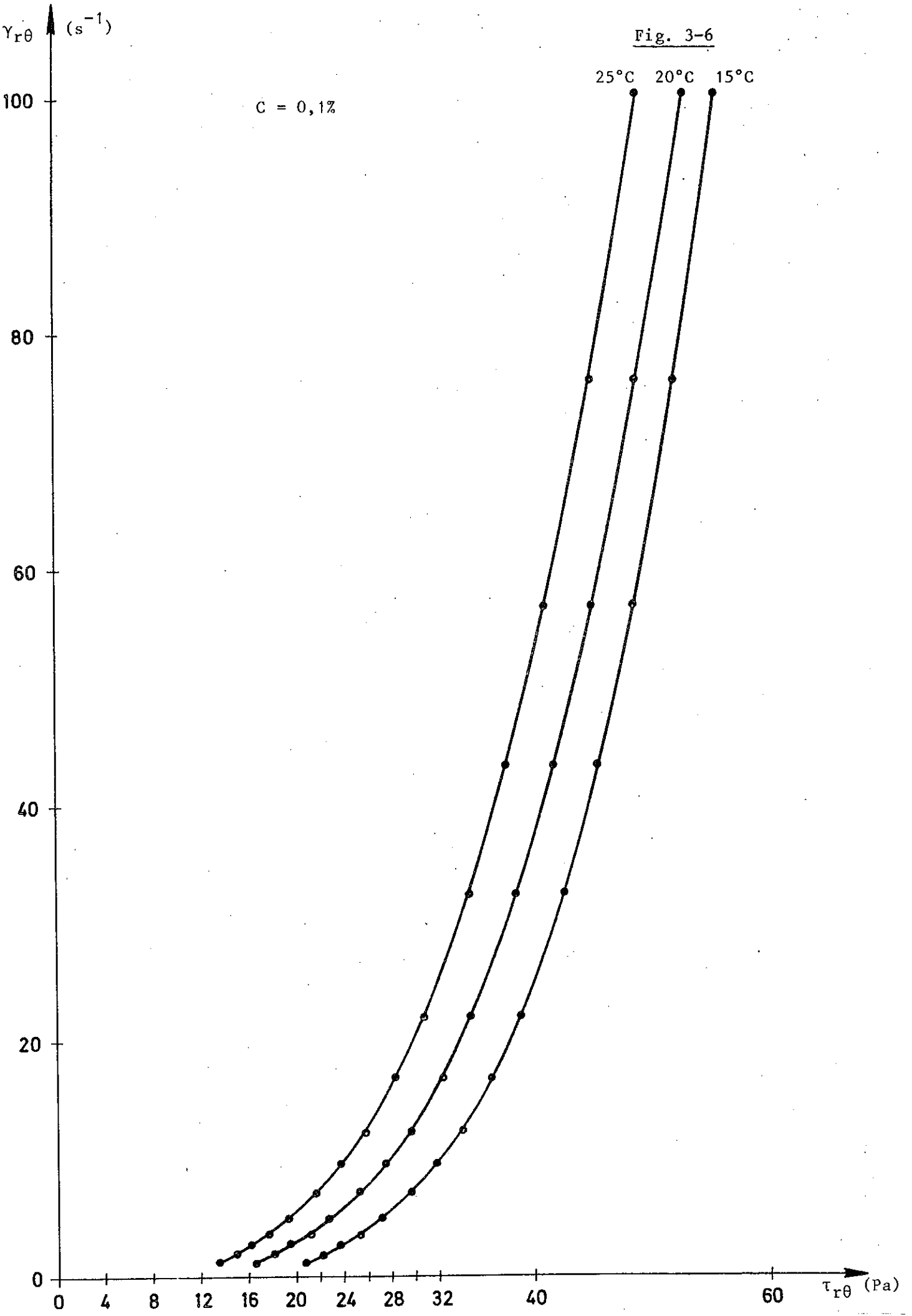


Fig. 3-6

25°C 20°C 15°C

C = 0,1%



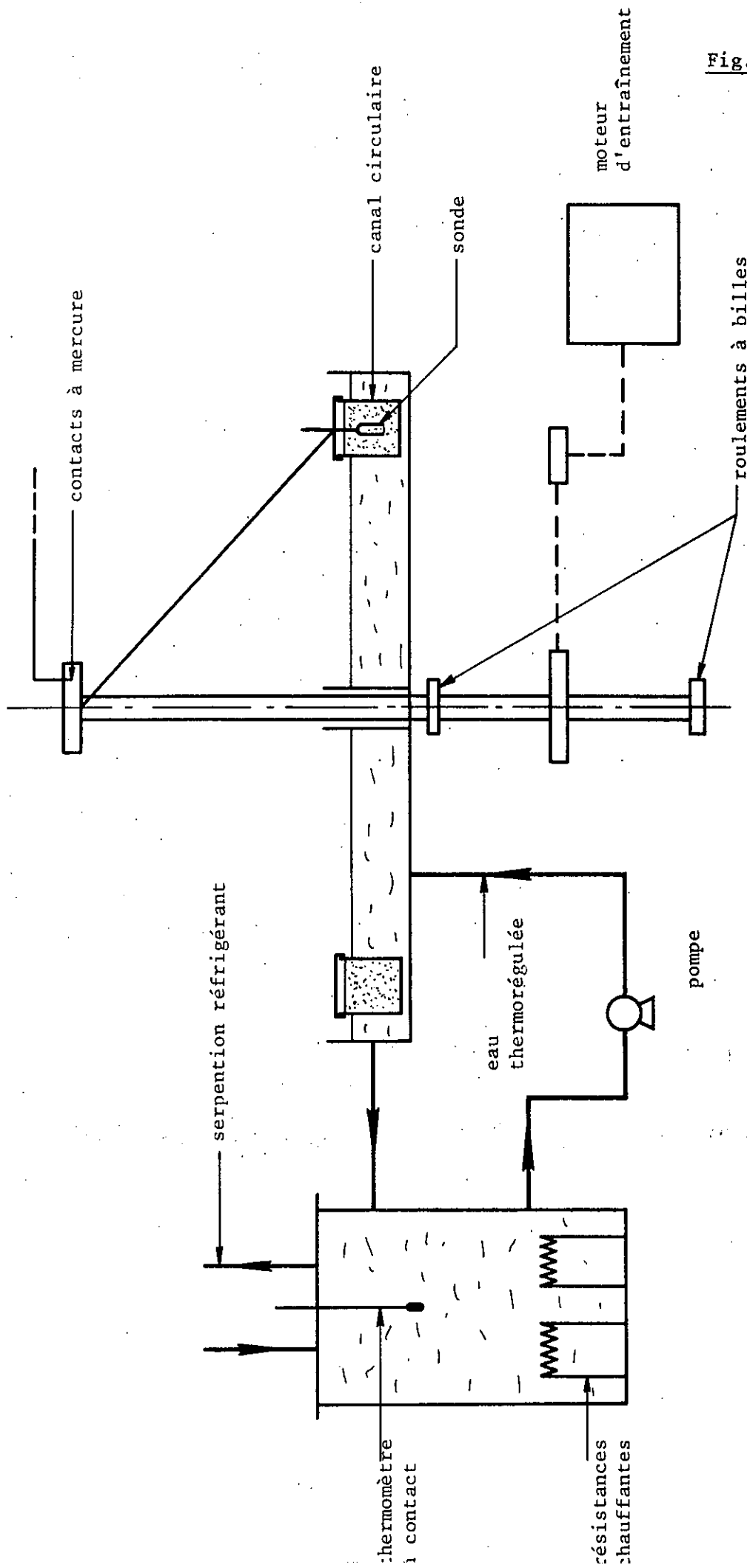


Fig. 3-7

Fig. 3-8

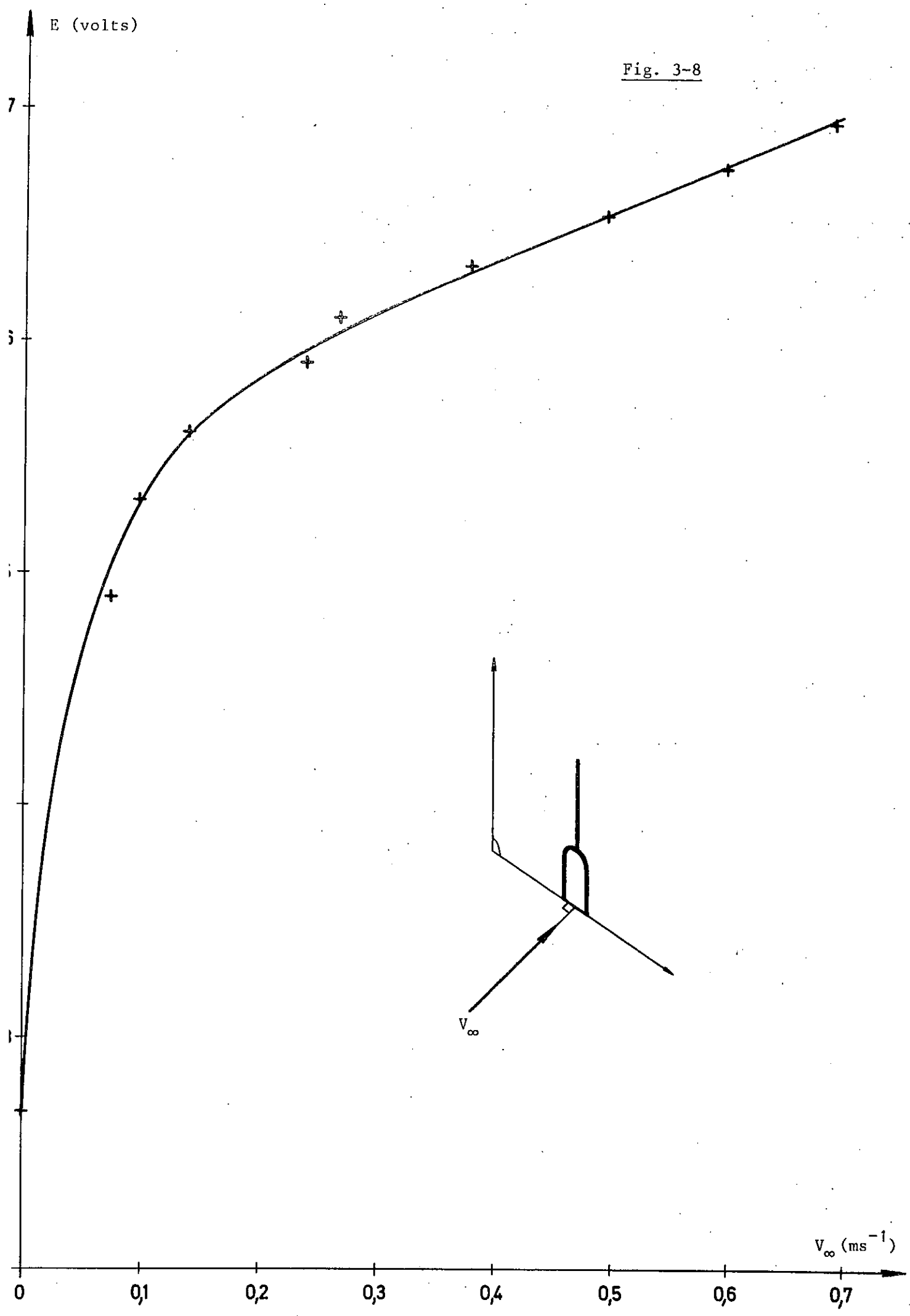


Fig. 3-9

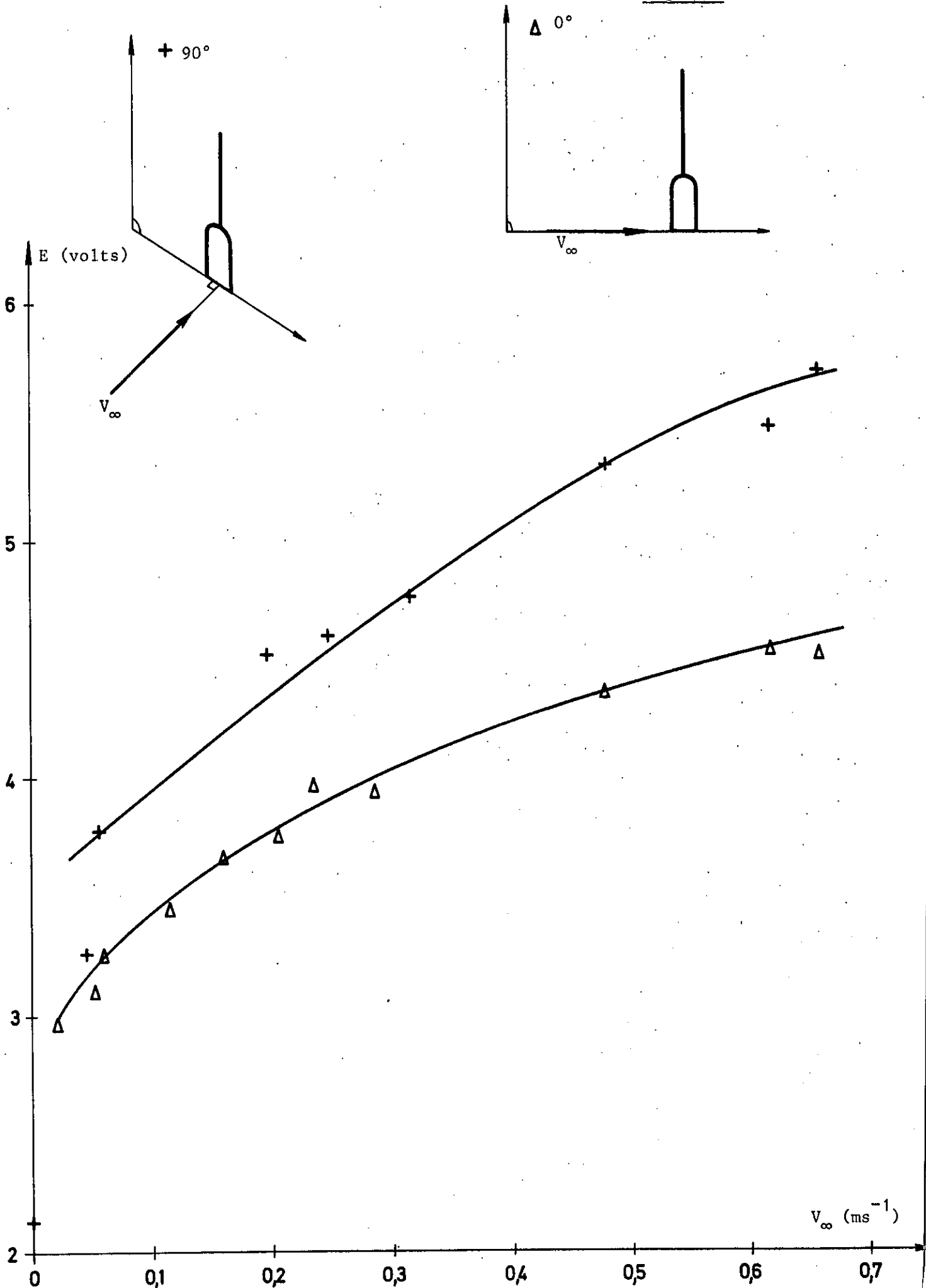


Fig. 3-10

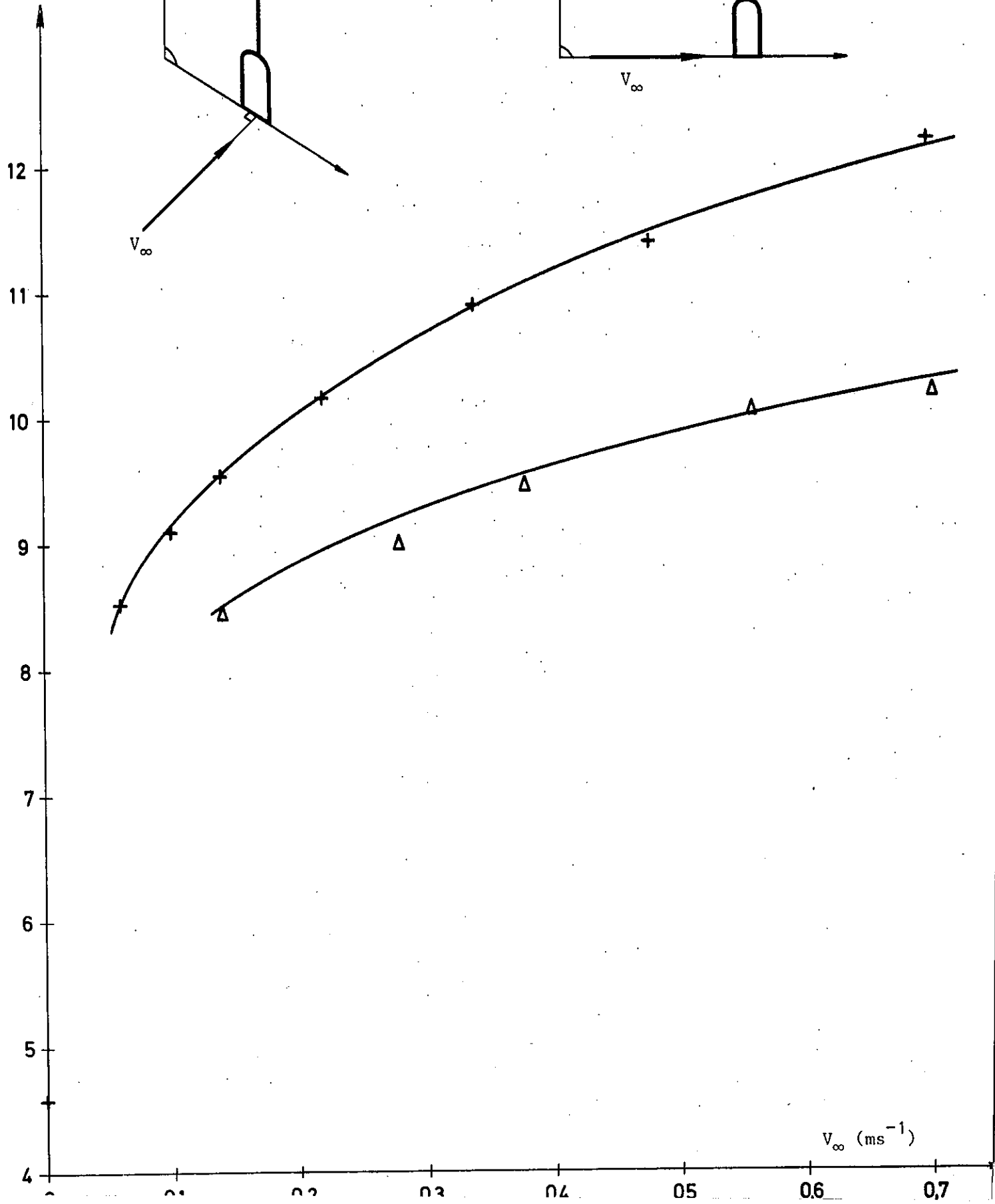
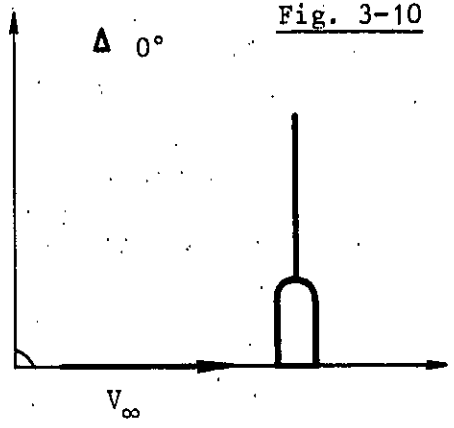
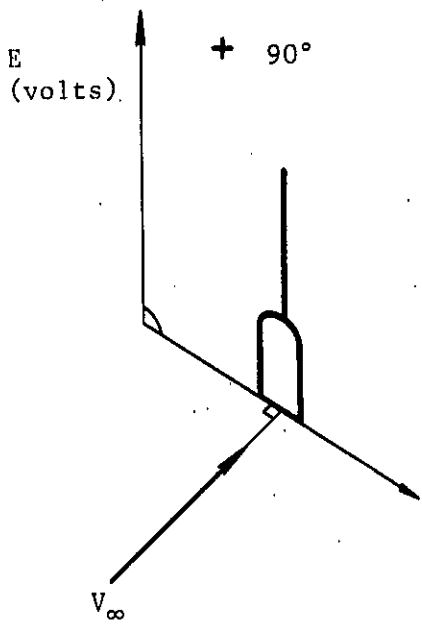
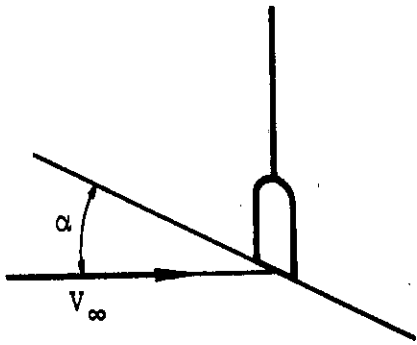
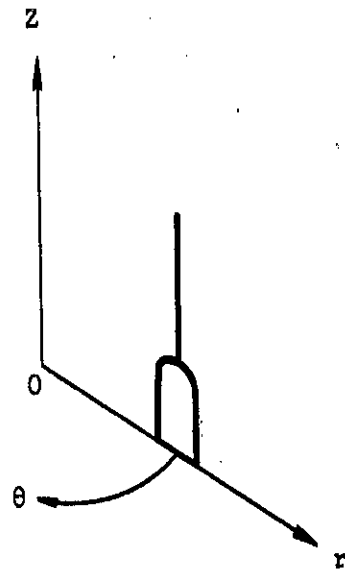


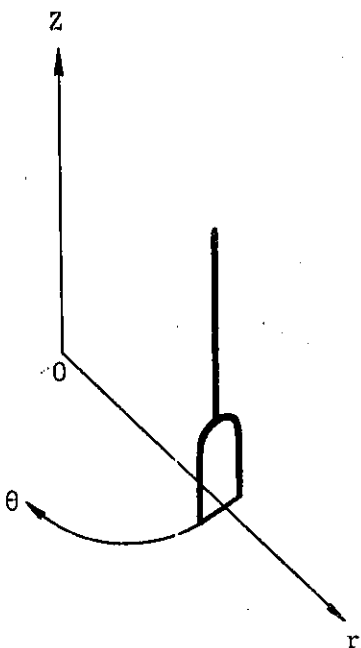
Fig. 3-11.



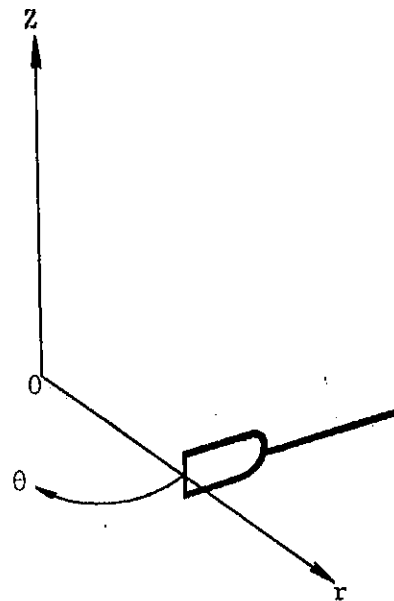
"position quelconque" d'étalonnage



position A en cuve agitée



position B en cuve agitée



position C en cuve agitée

Fig. 3-12

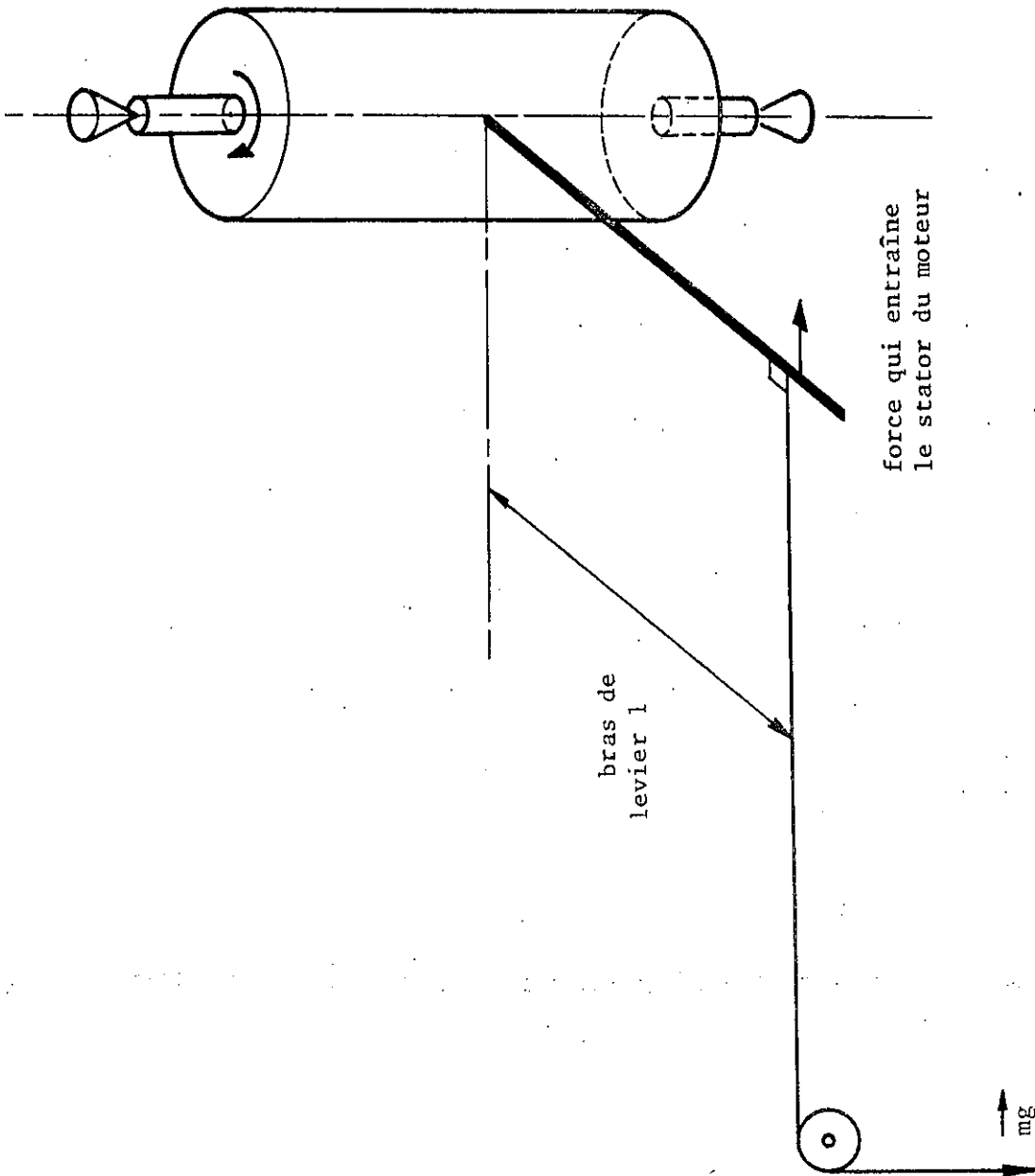
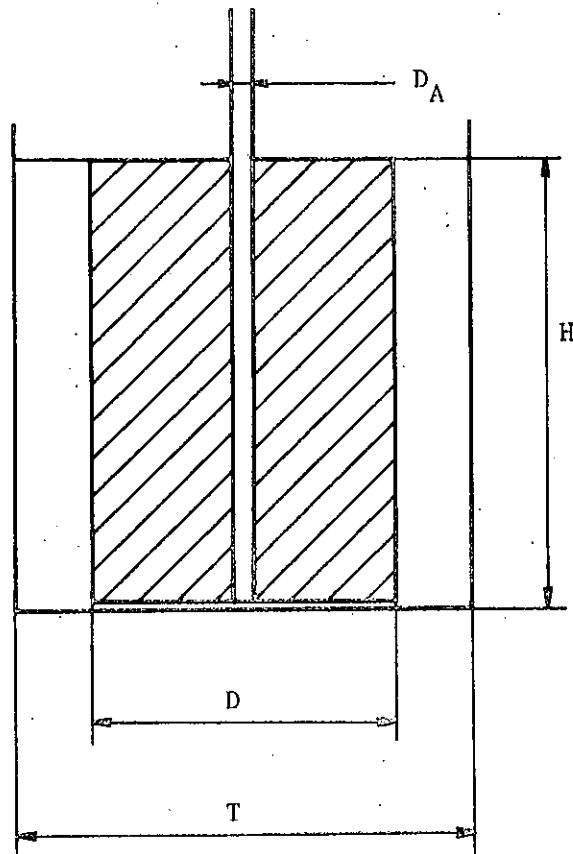


Fig. 4-1



Agitateur bipale étudié

$$\frac{D_A}{T} = 0,0417$$

$$\frac{D}{T} = 0,336 ; 0,508 ; 0,656 ; 0,828$$

Fig. 4-2

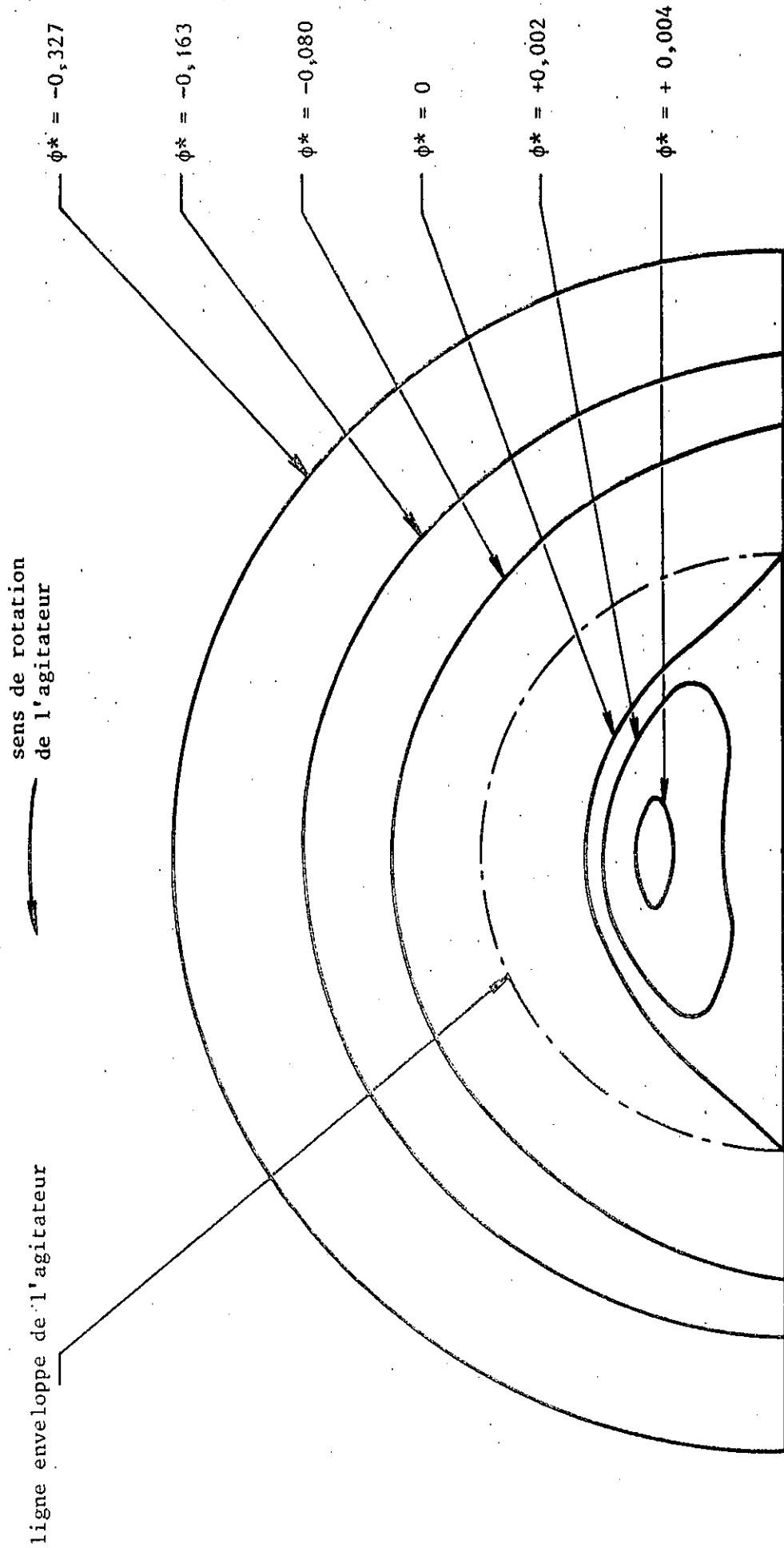


Fig. 4-3

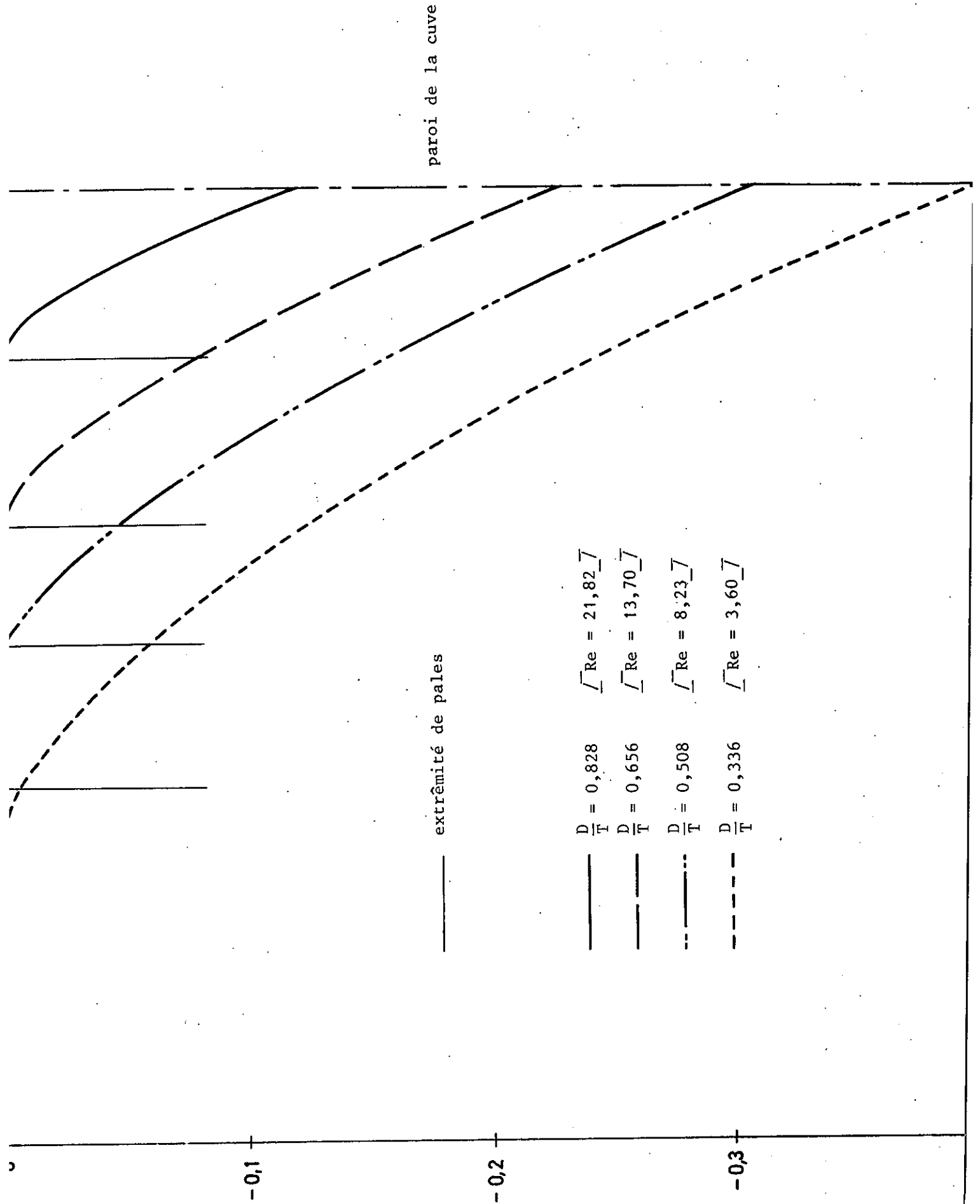
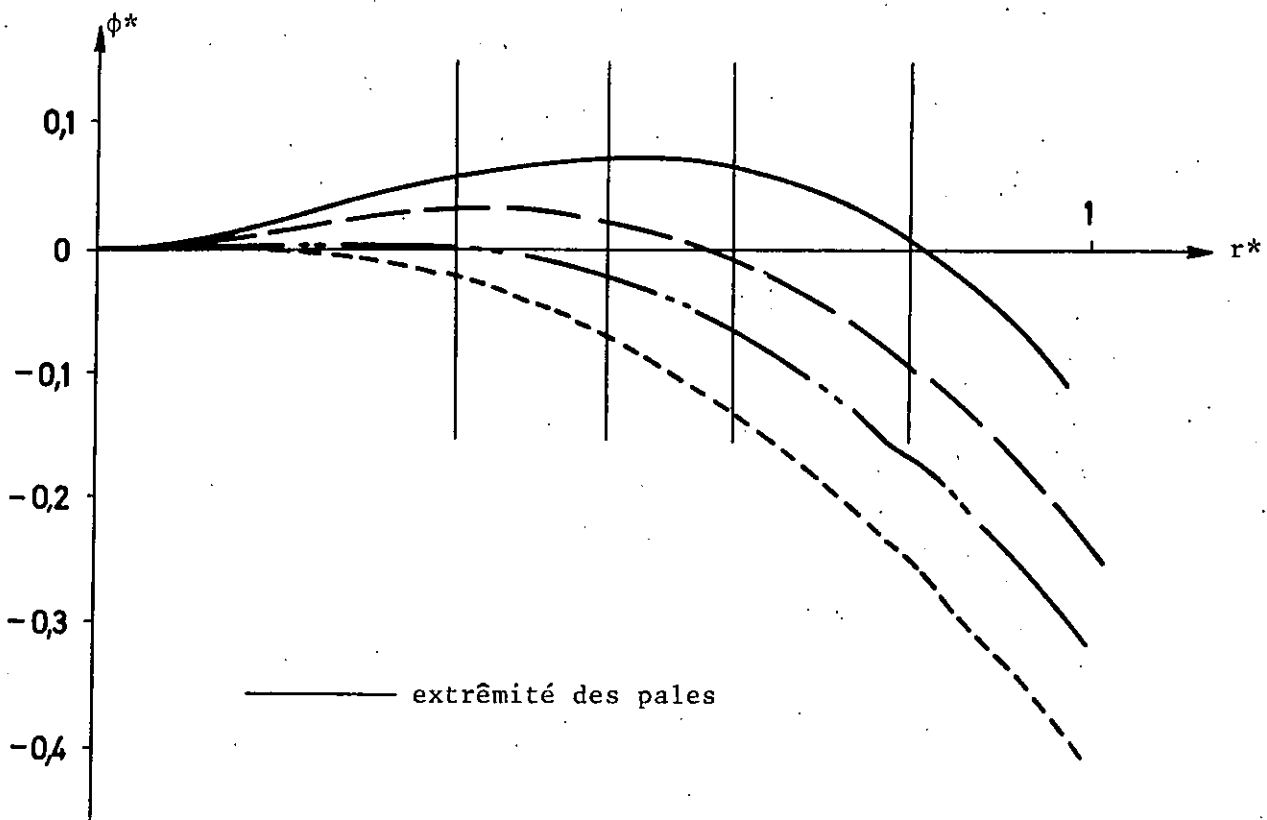


Fig. 4-4



- extrêmité des pales
- $\frac{D}{T} = 0,336$ (Re = 3,60)
- · - · - $\frac{D}{T} = 0,508$ (Re = 8,23)
- $\frac{D}{T} = 0,656$ (Re = 13,70)
- $\frac{D}{T} = 0,828$ (Re = 21,82)

Fig. 4-5

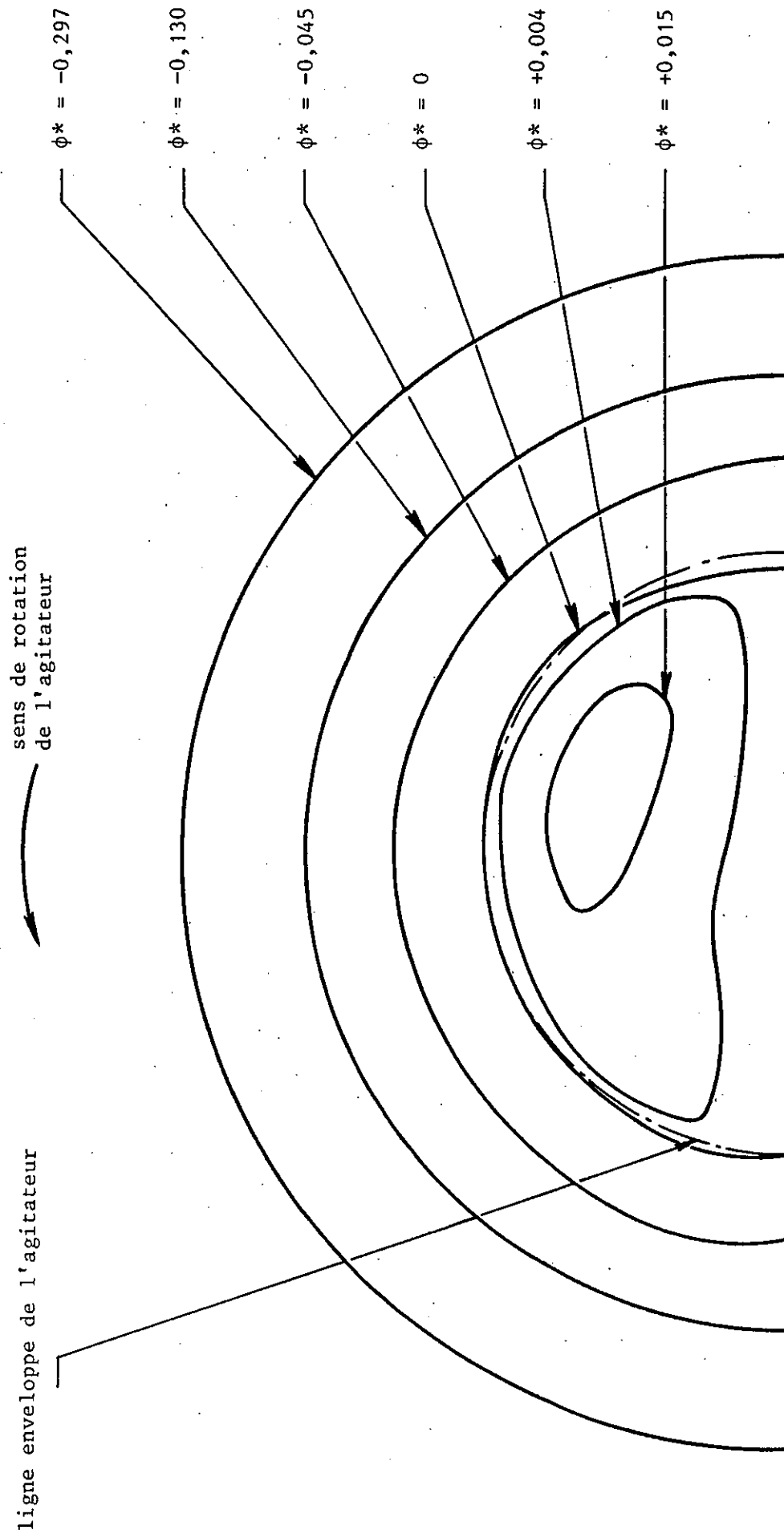


Fig. 4-6

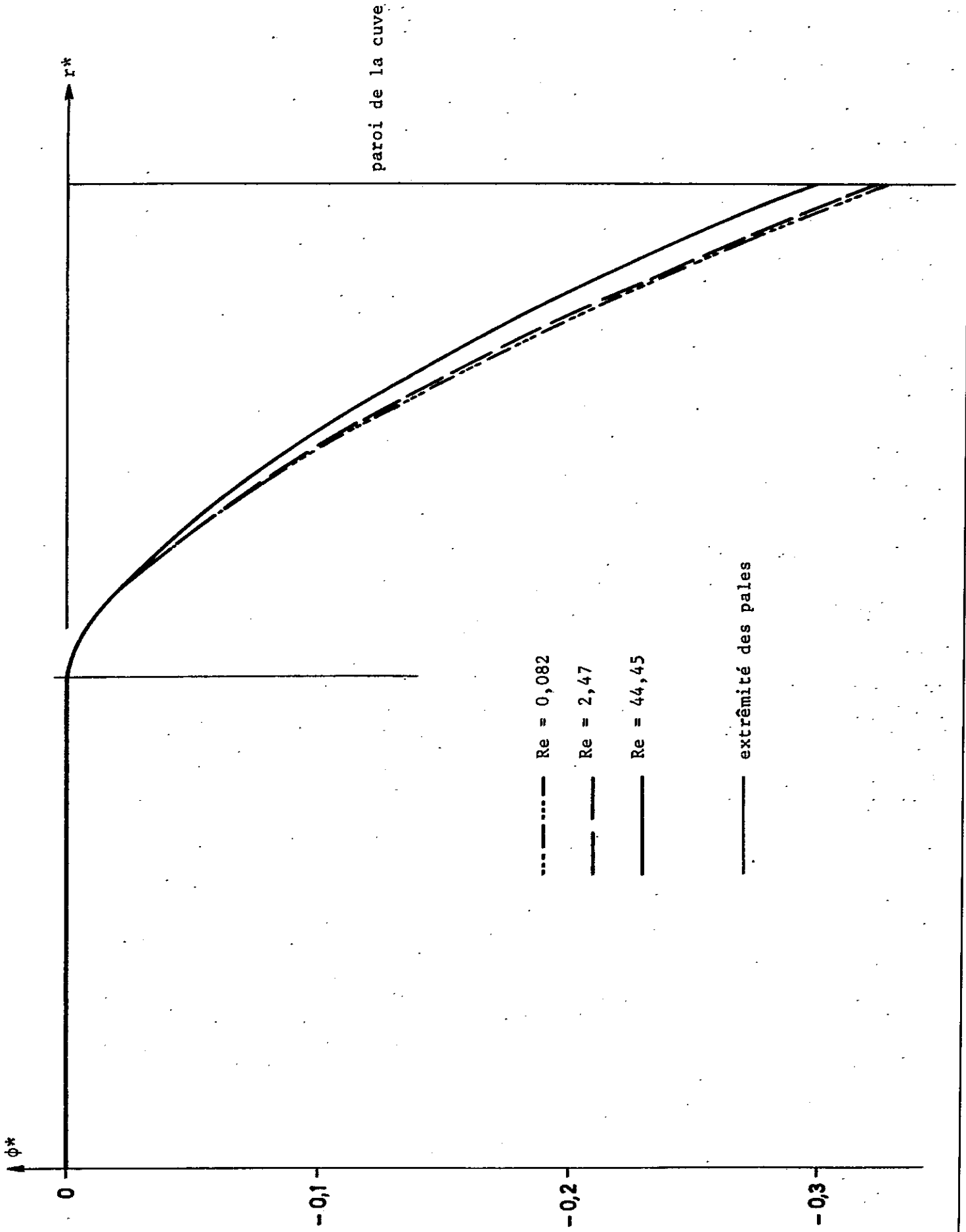


Fig. 4-7

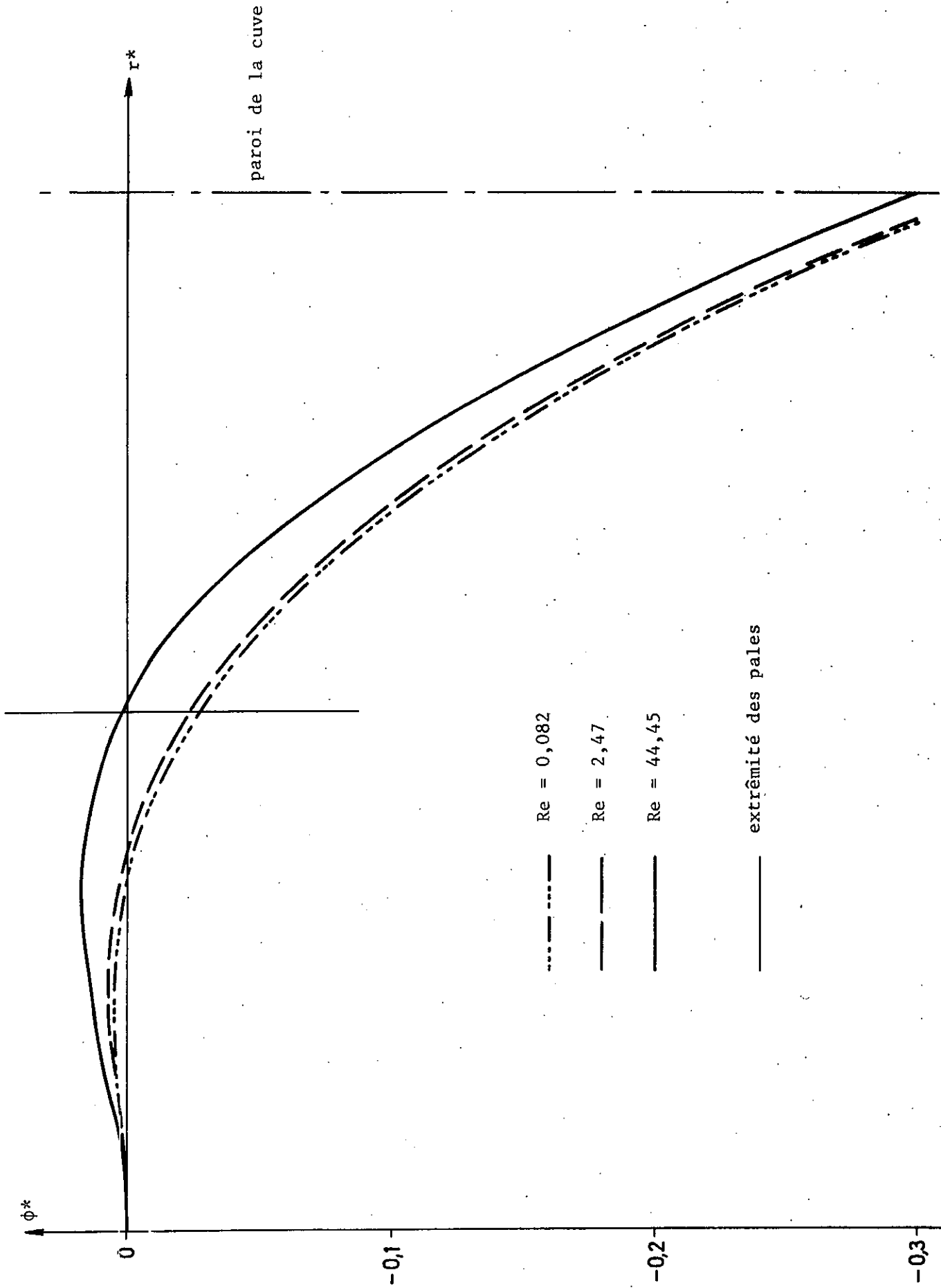


Fig. 4-8

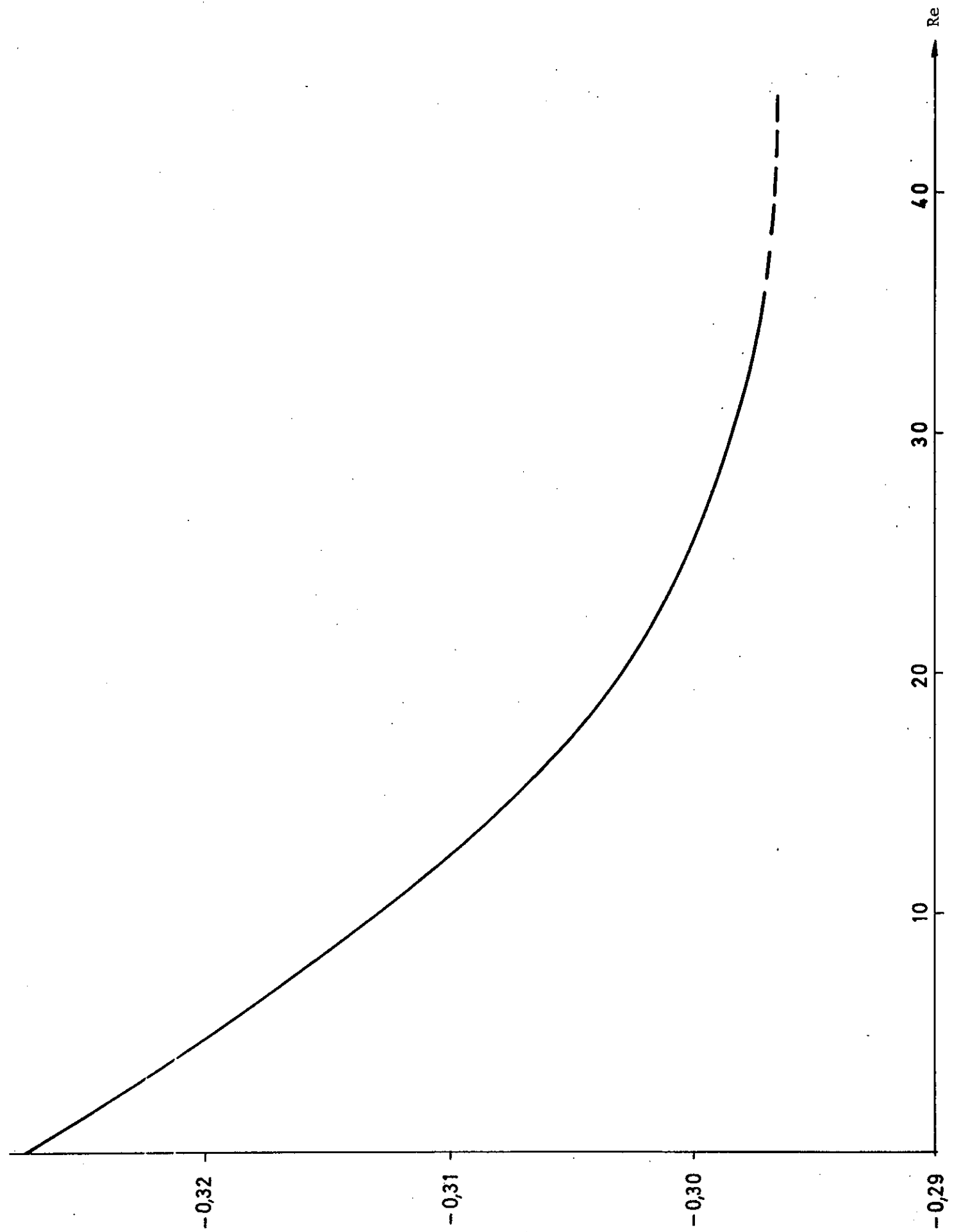


Fig. 4-9

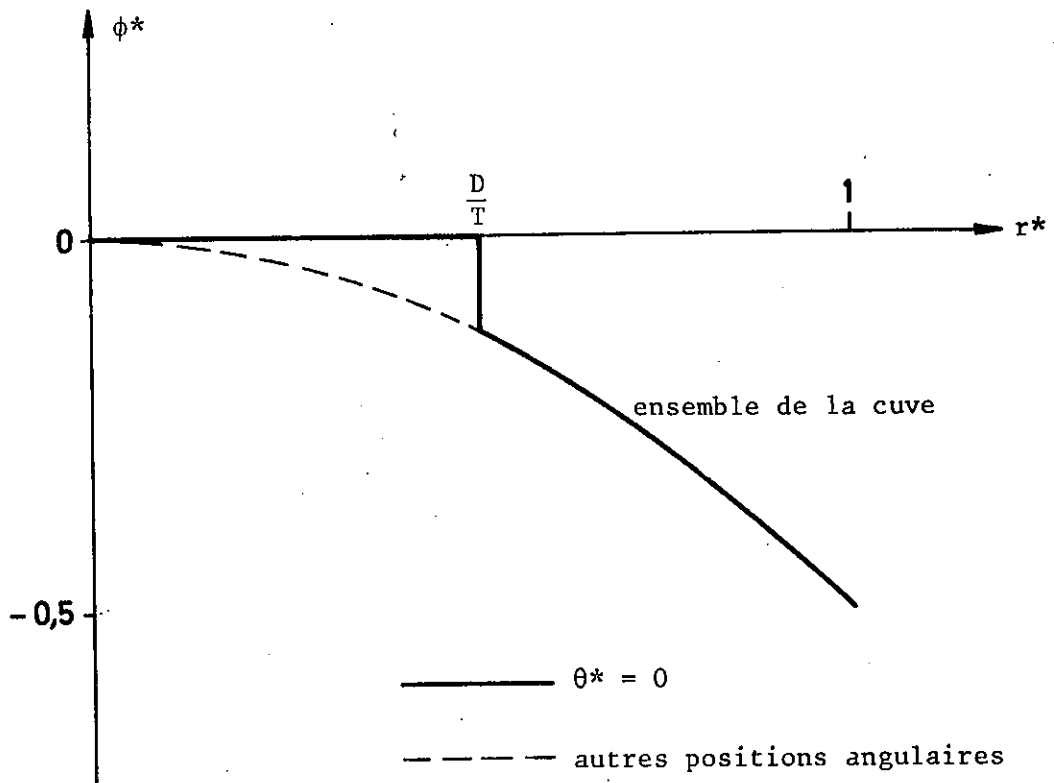
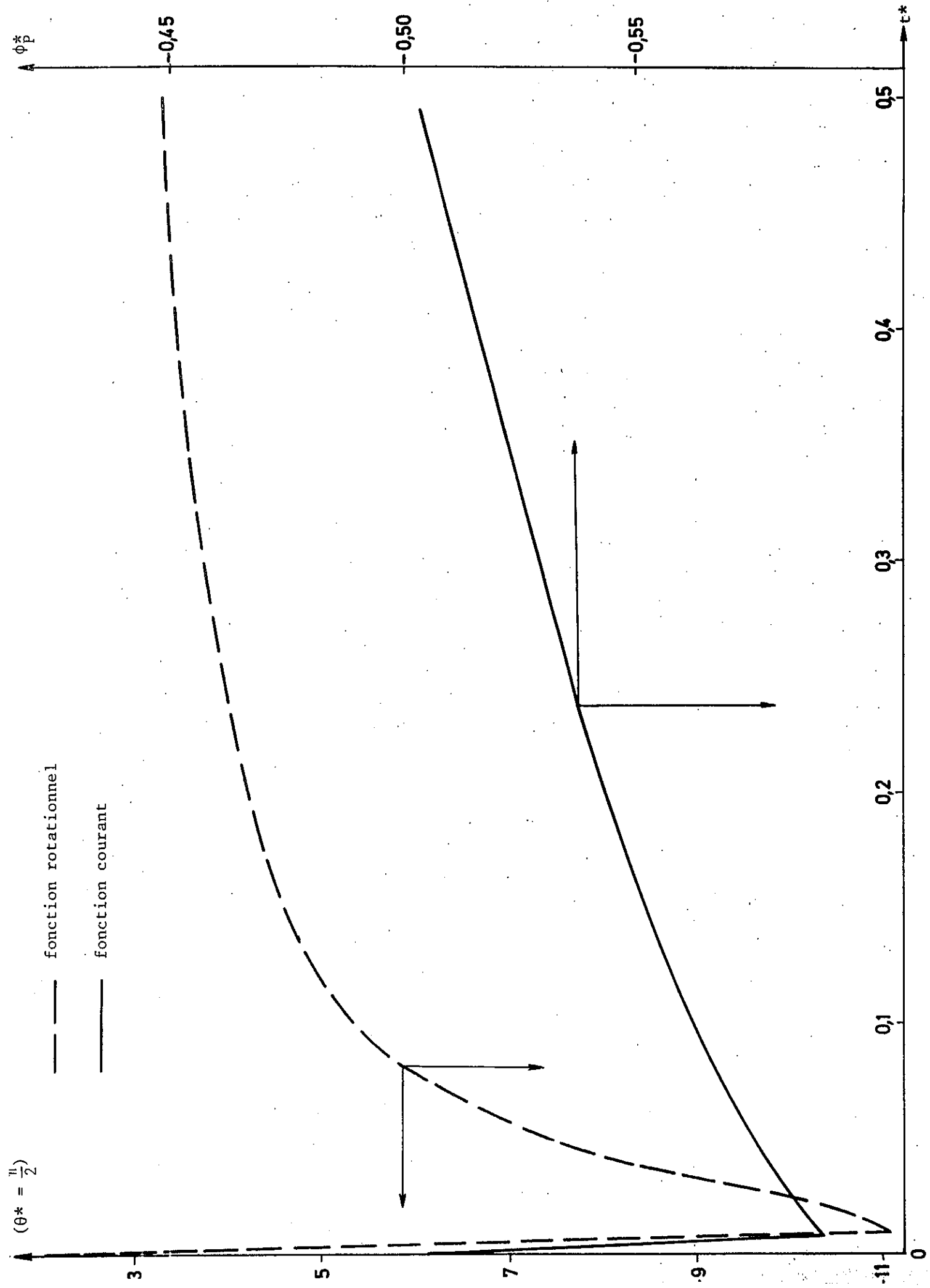


Fig. 4-10



$(\theta^* = \frac{\pi}{2})$

— — — fonction rotationnel
— — — fonction courant

Fig. 4-11

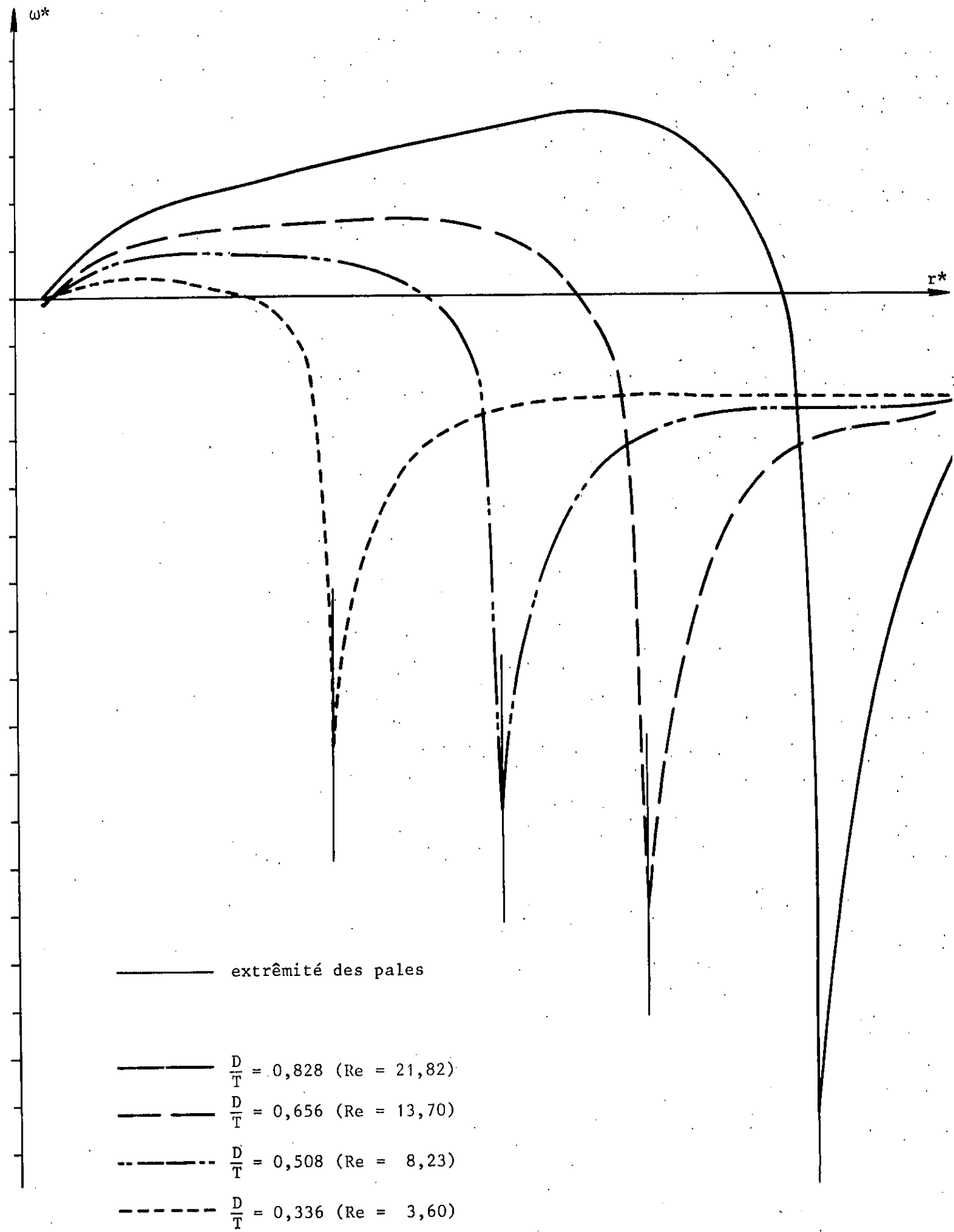


Fig. 4-12

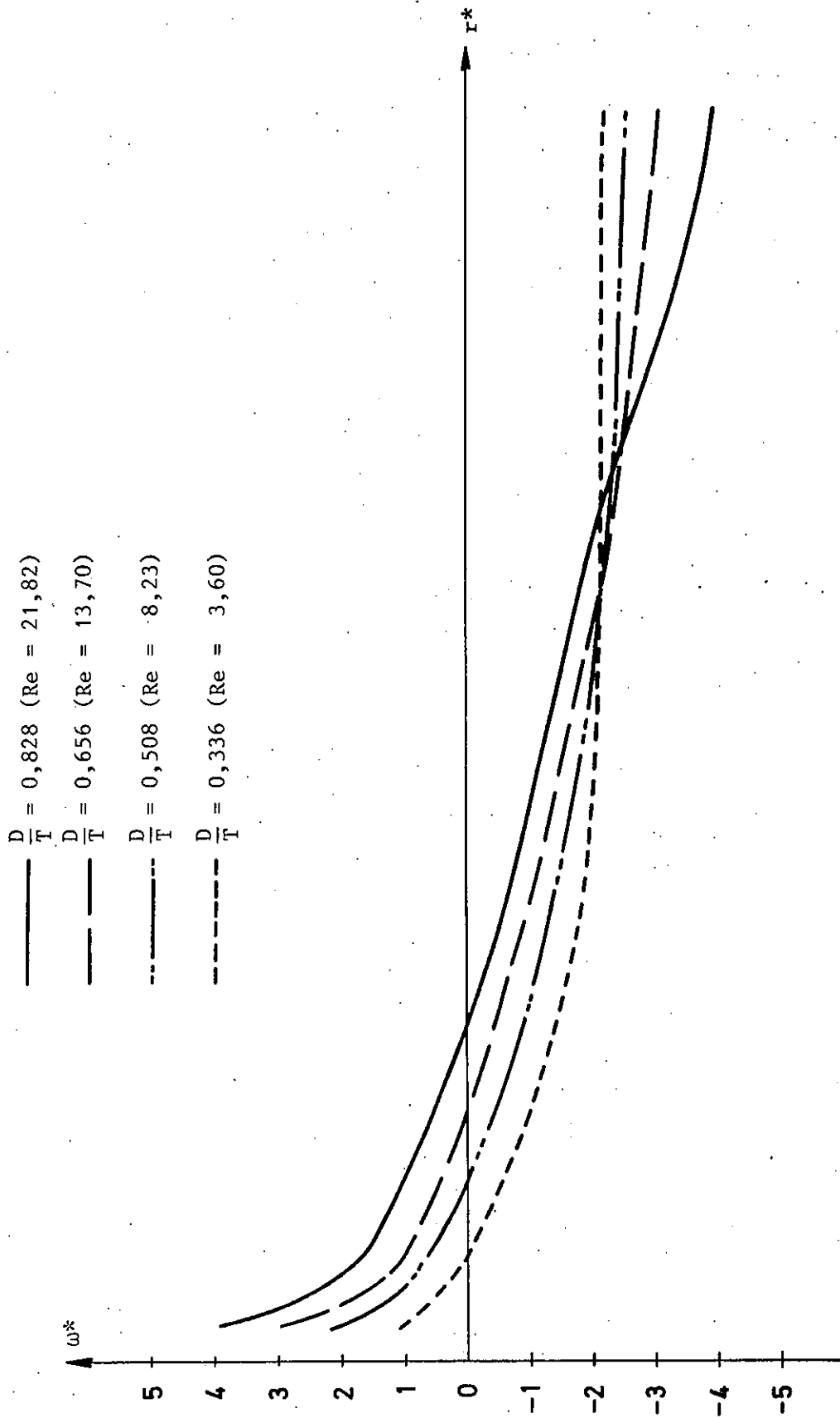
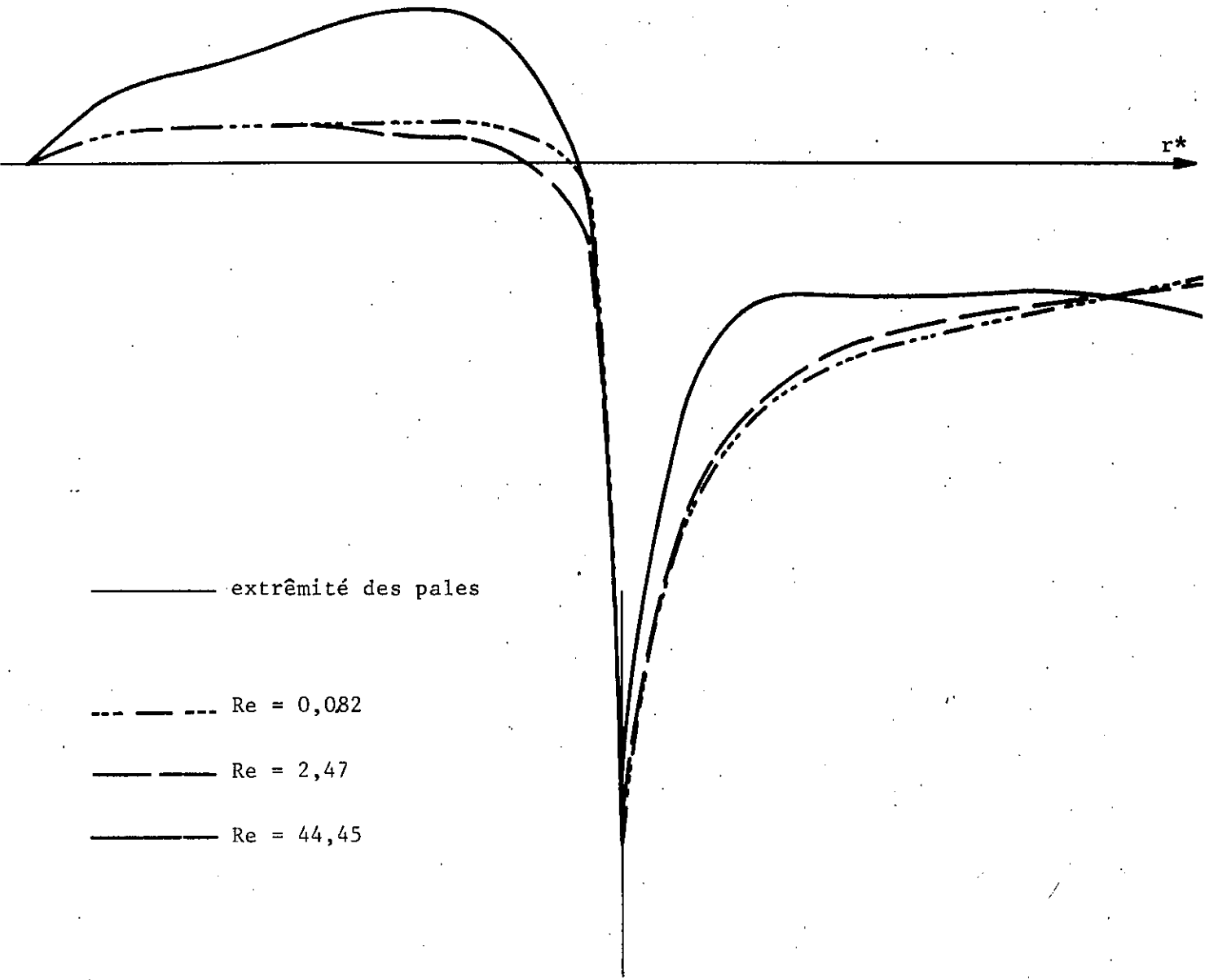


Fig. 4-13

ω^*



— extr\u00e9mit\u00e9 des pales

- - - Re = 0,082

- - - Re = 2,47

— Re = 44,45

Fig. 4-14

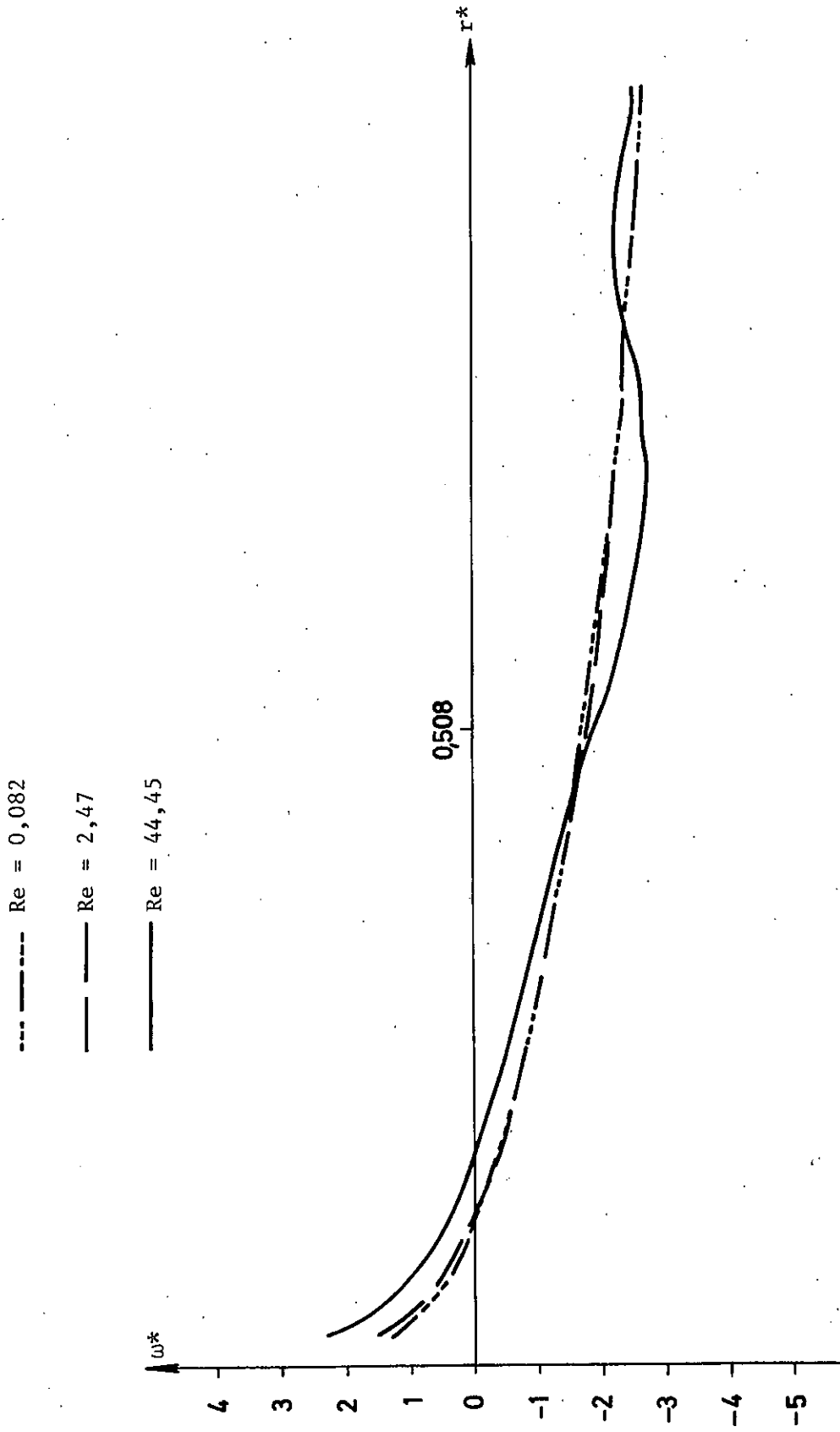


Fig. 4-15

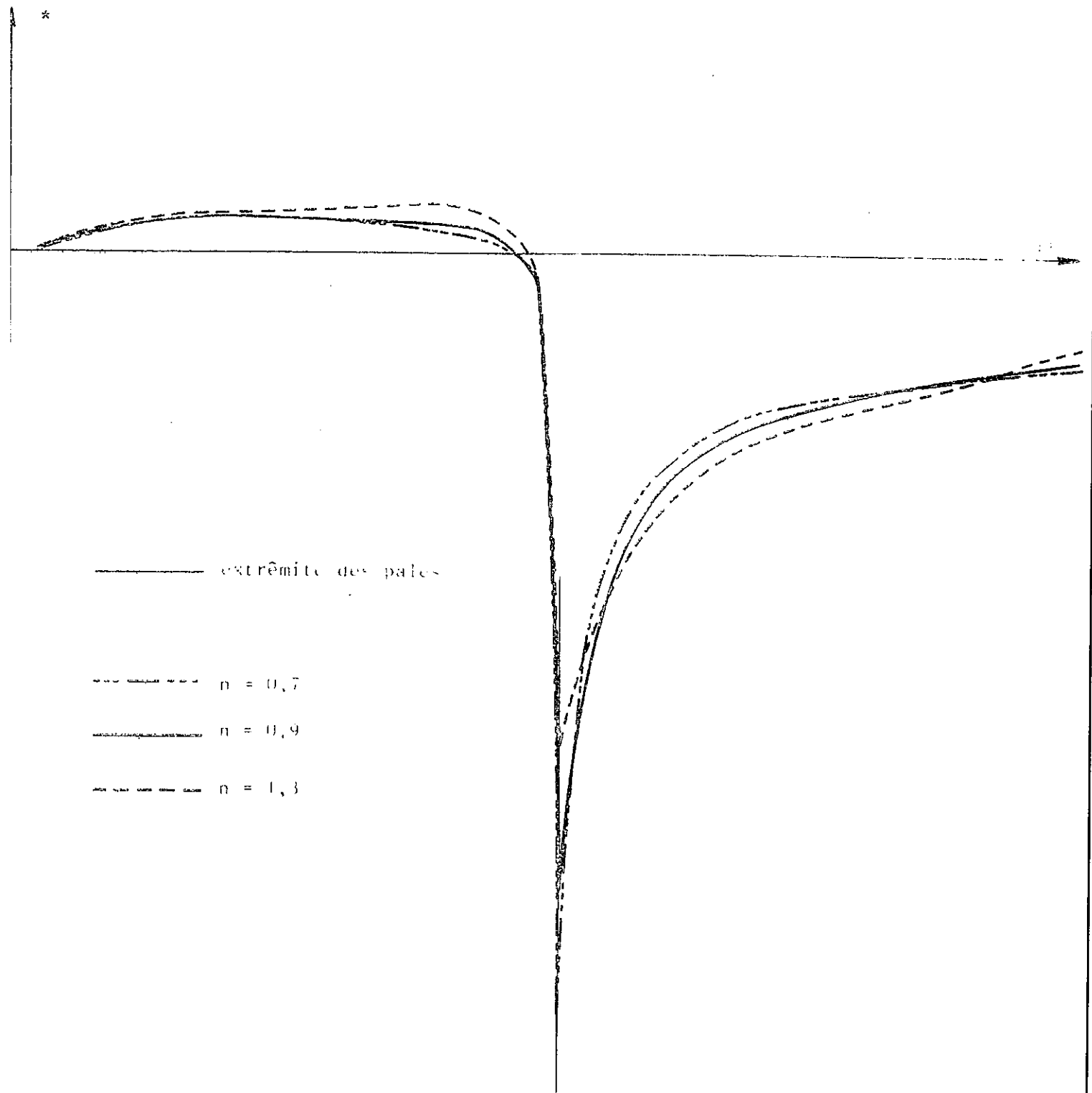


Fig. 4-16

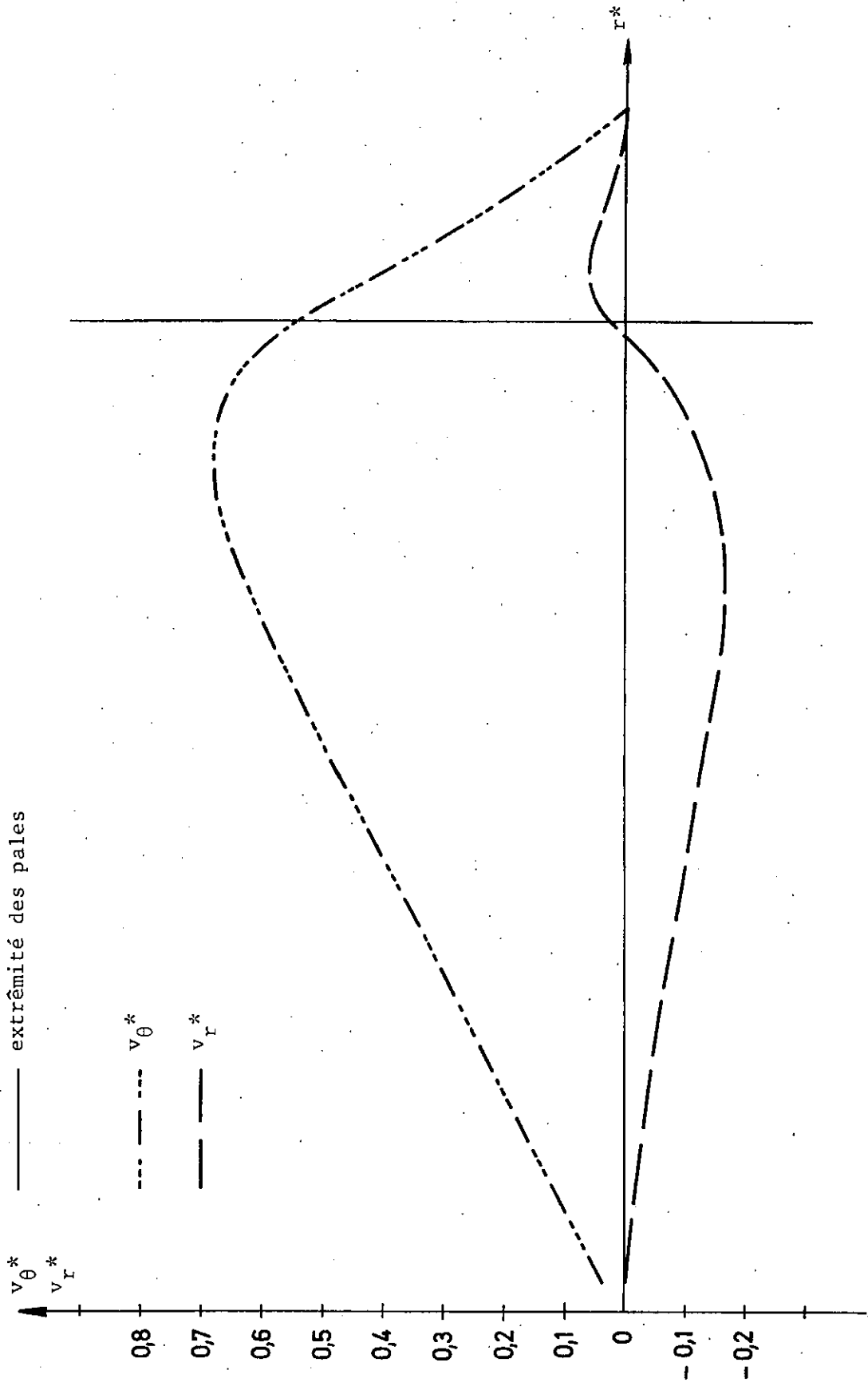


Fig. 4-17

— extrémité des pales

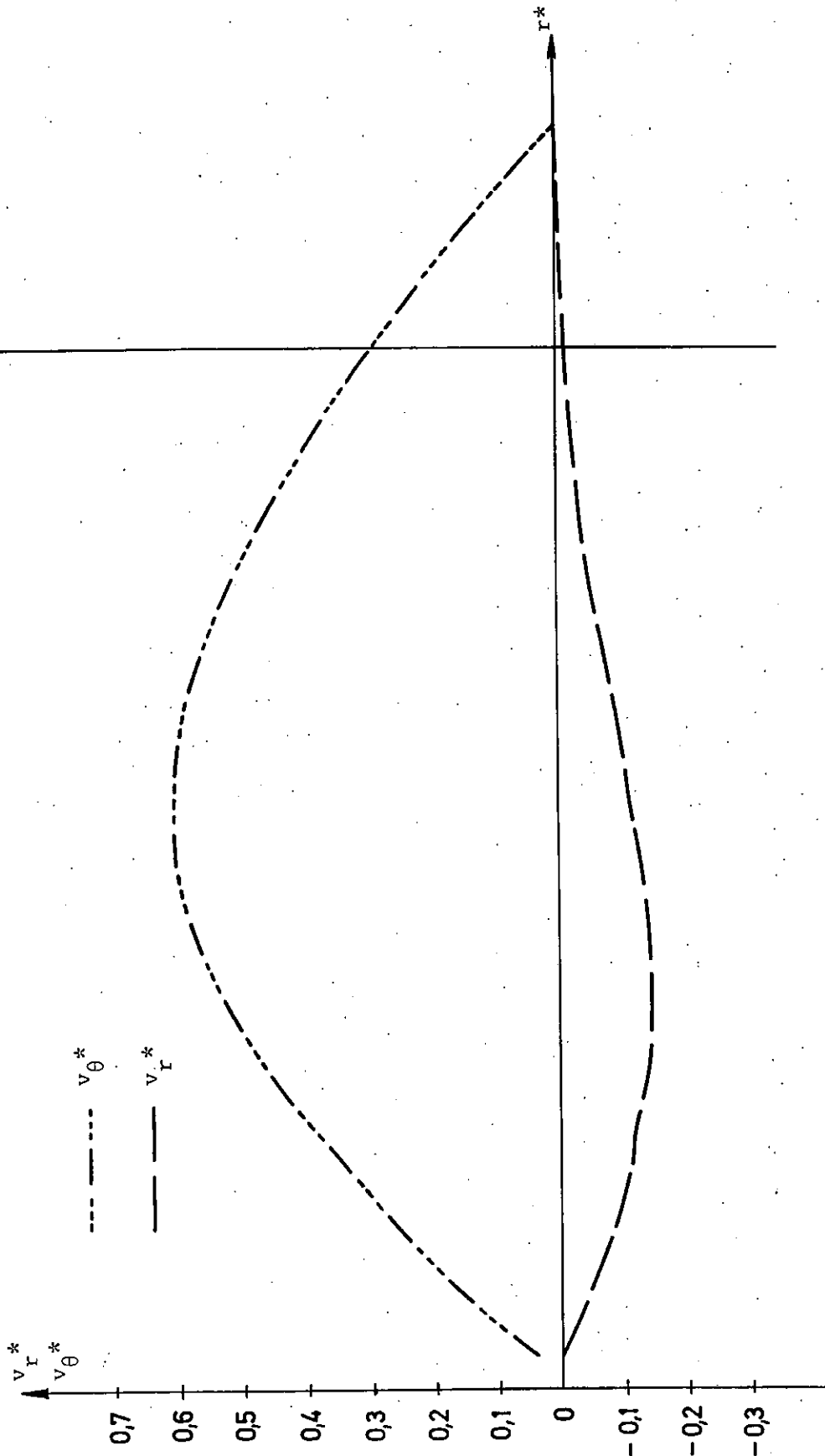


Fig. 4-18

— extrémité des pales

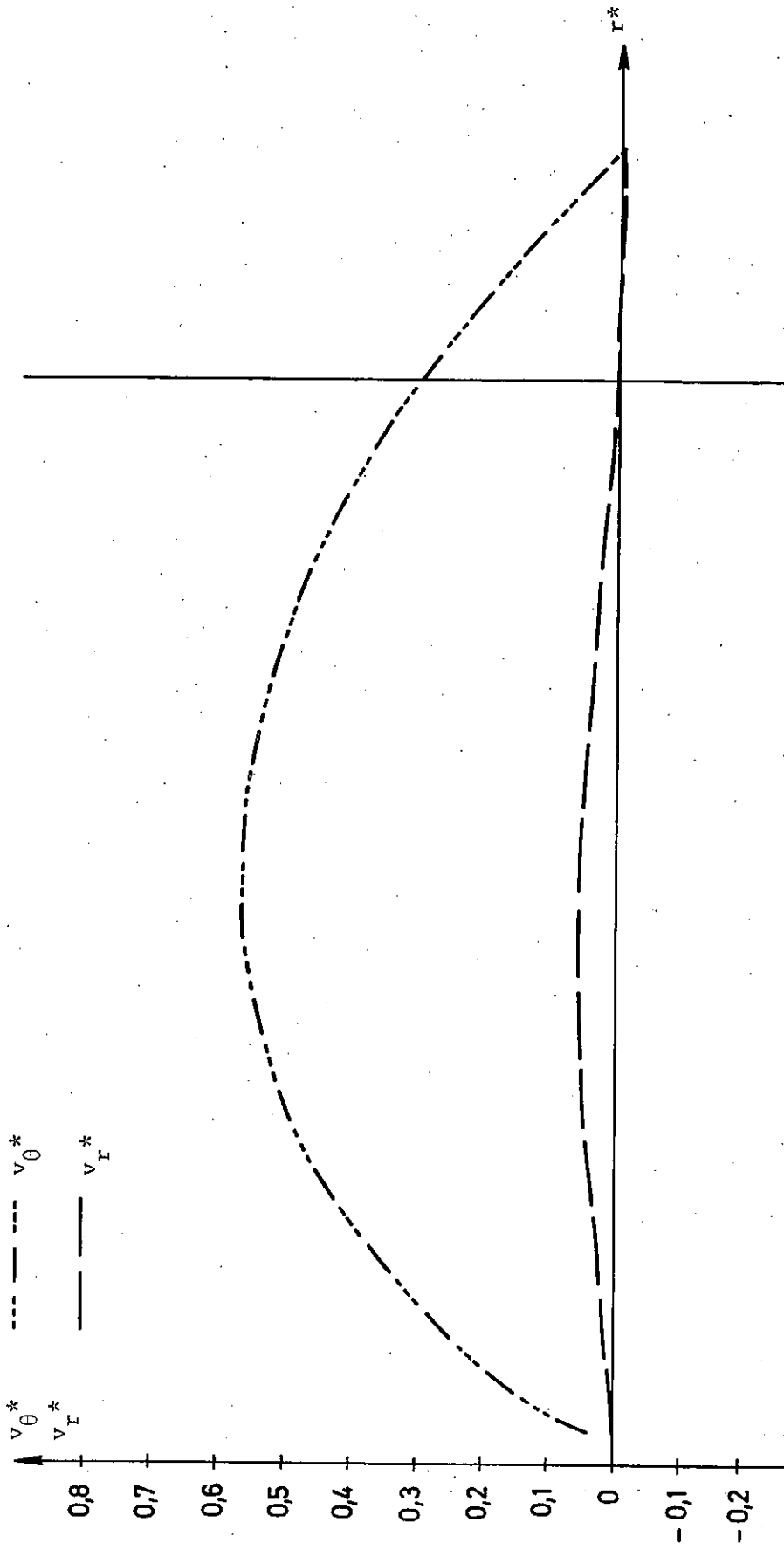


Fig. 4-19

— extrémité des pales

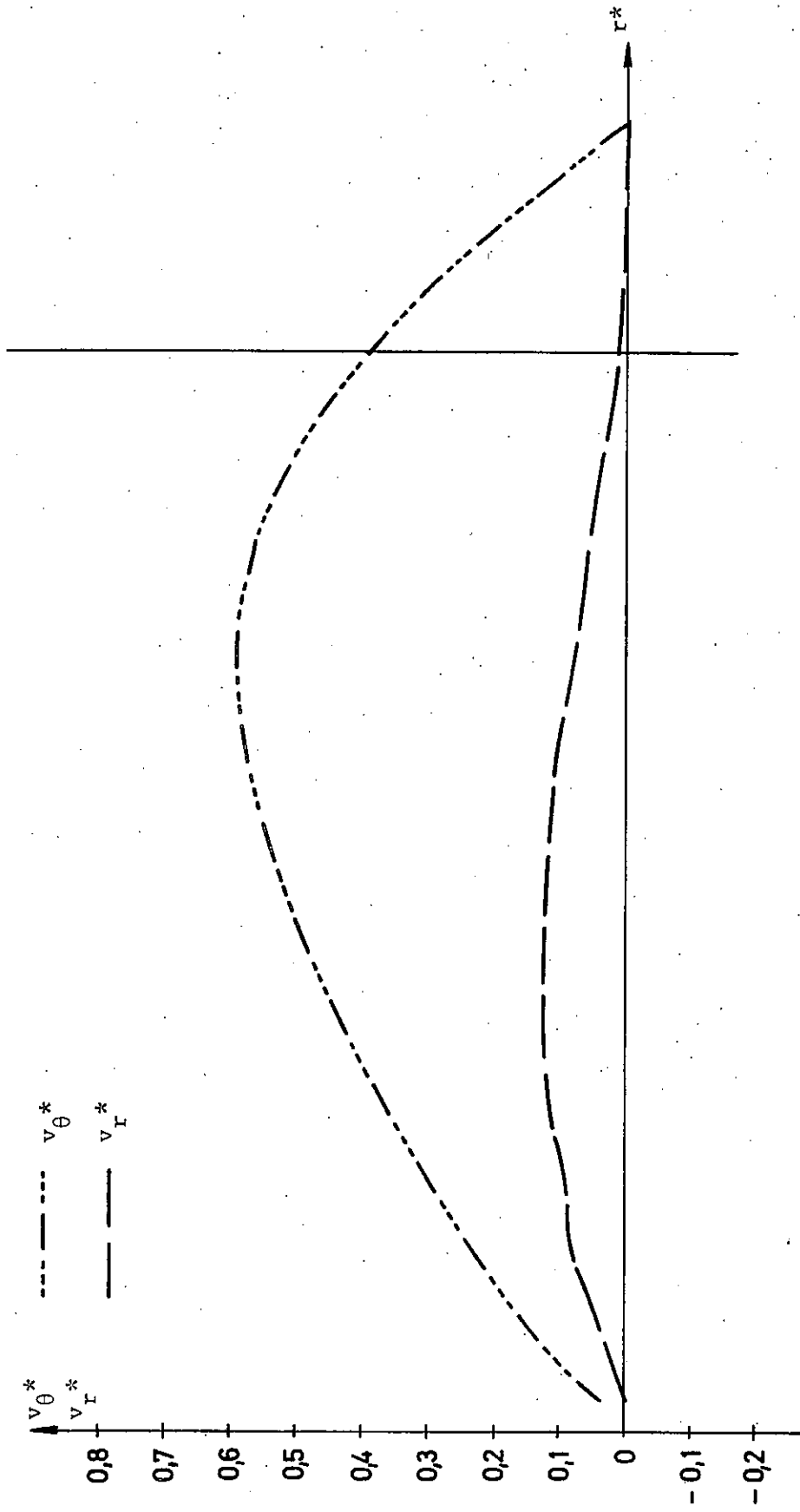
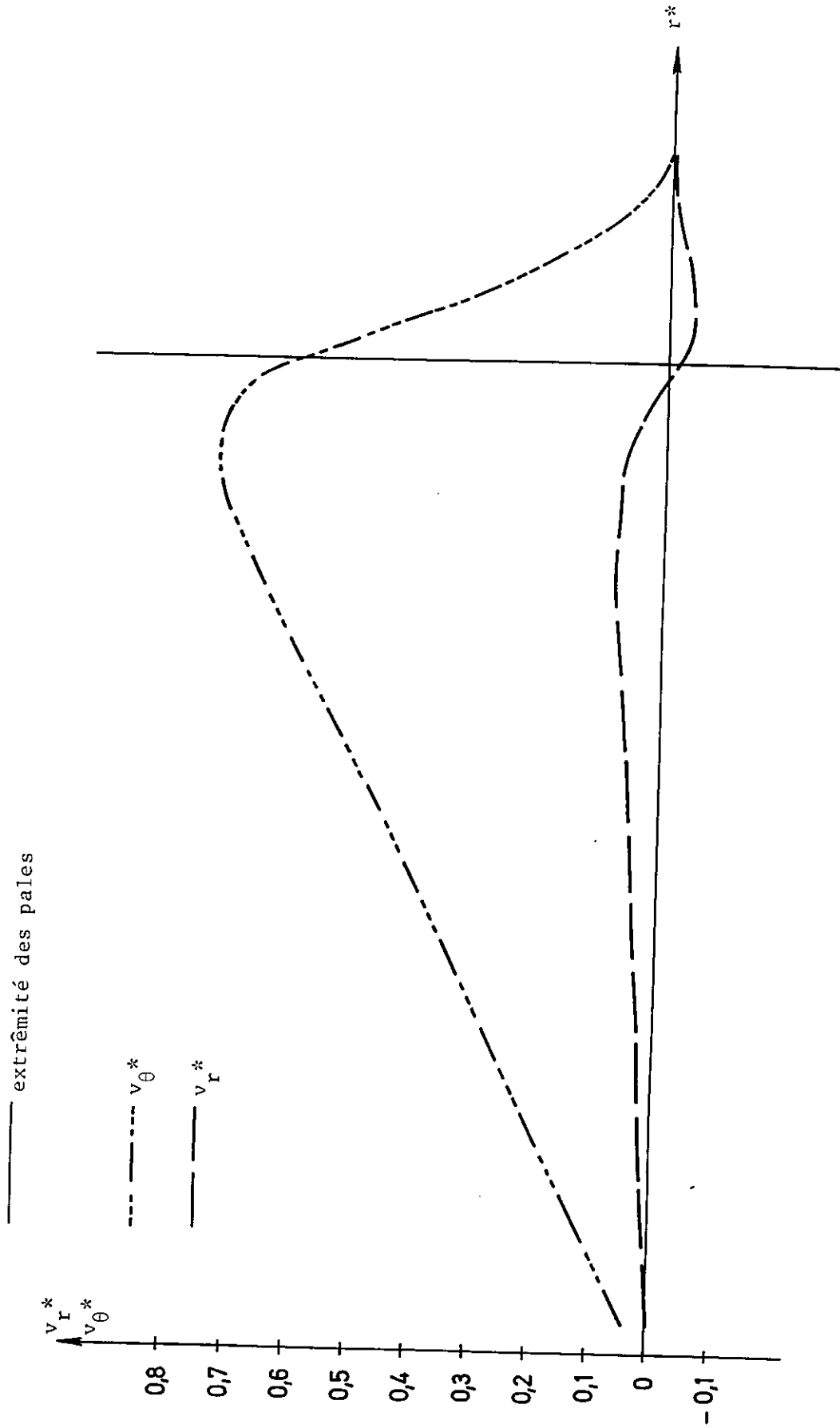
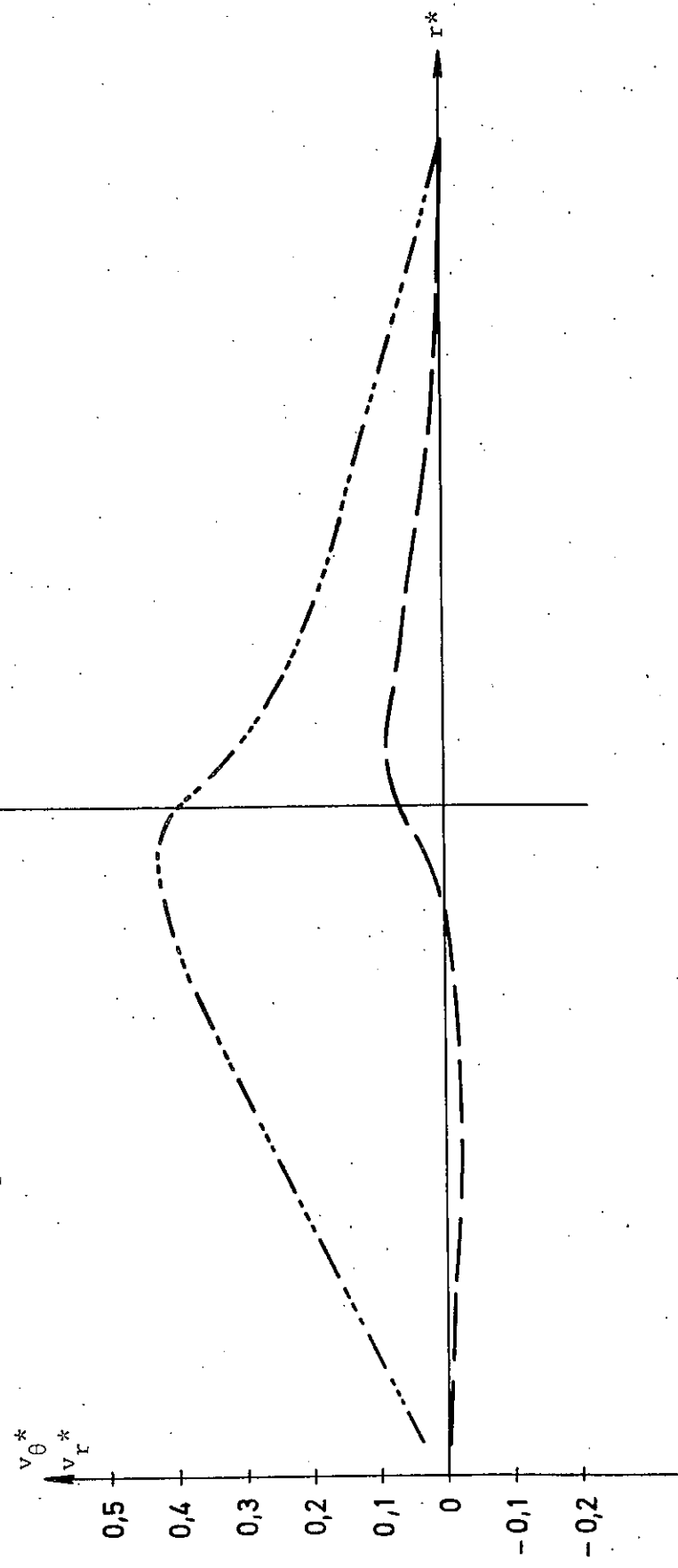


Fig. 4-20



— extrémité des pales

--- v_{θ}^*
- - - v_r^*



— extrémité des pales

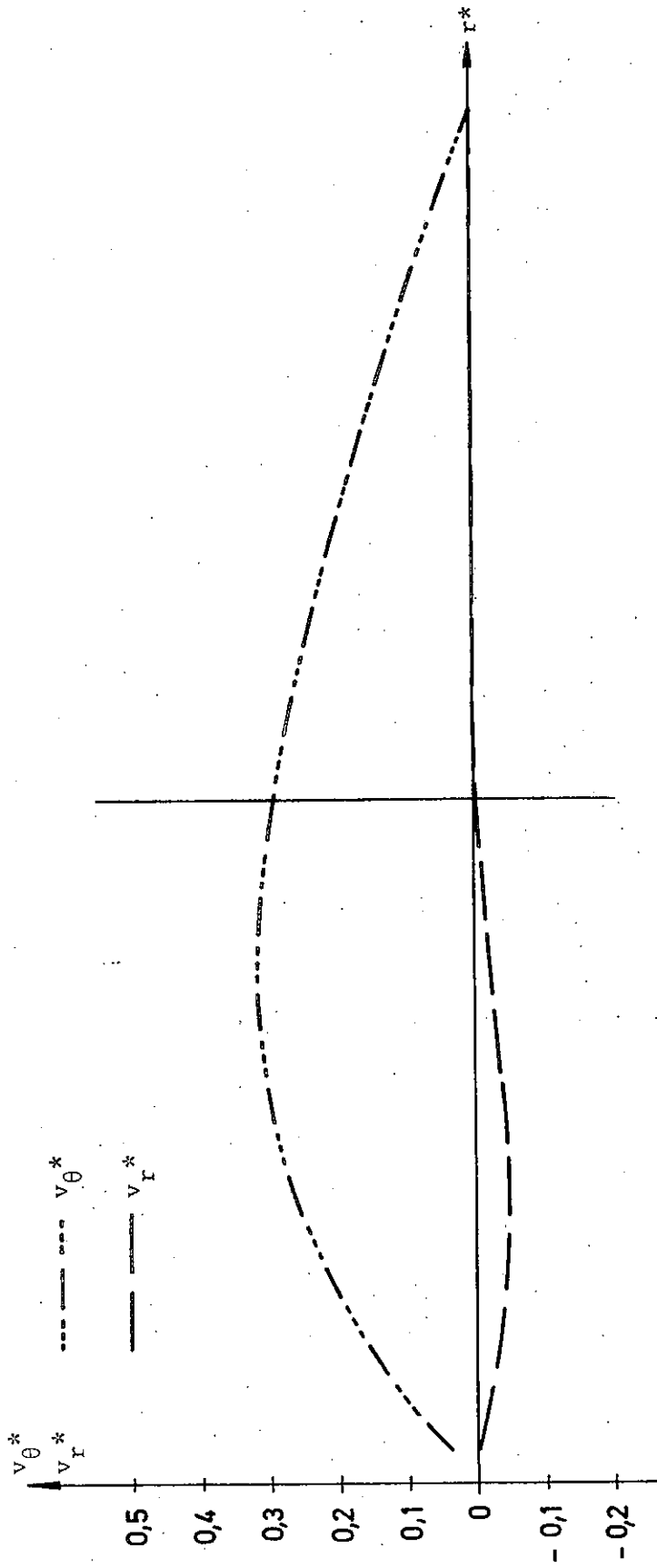


Fig. 4-23

extrémité des pales

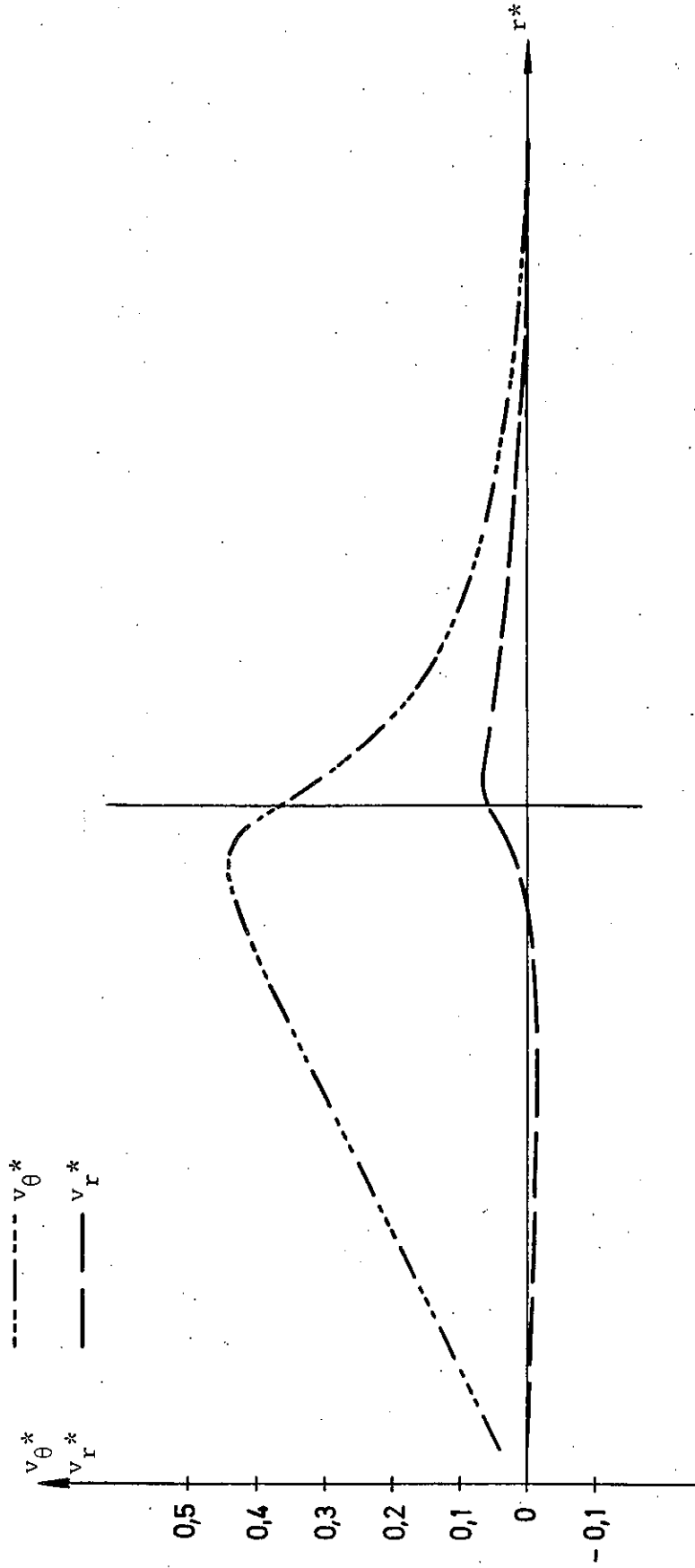


Fig. 4-24

extrémité des pales

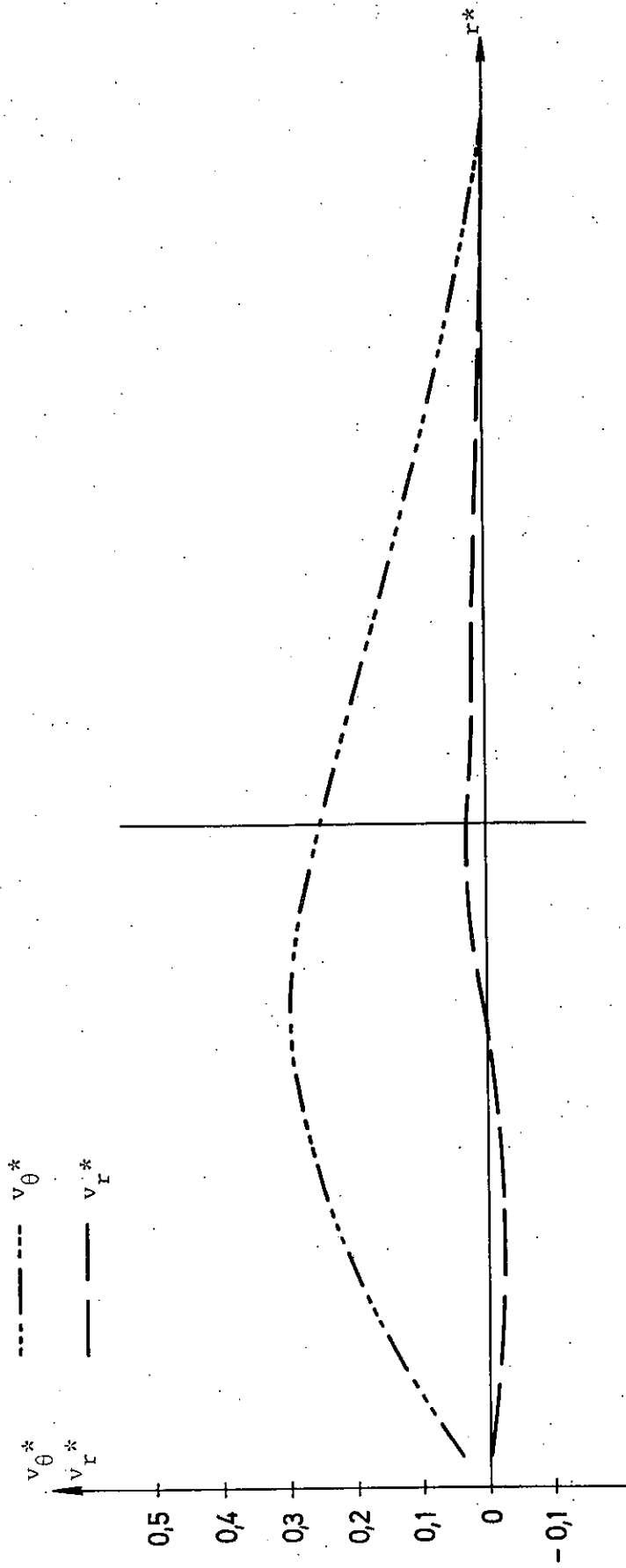


Fig. 4-25

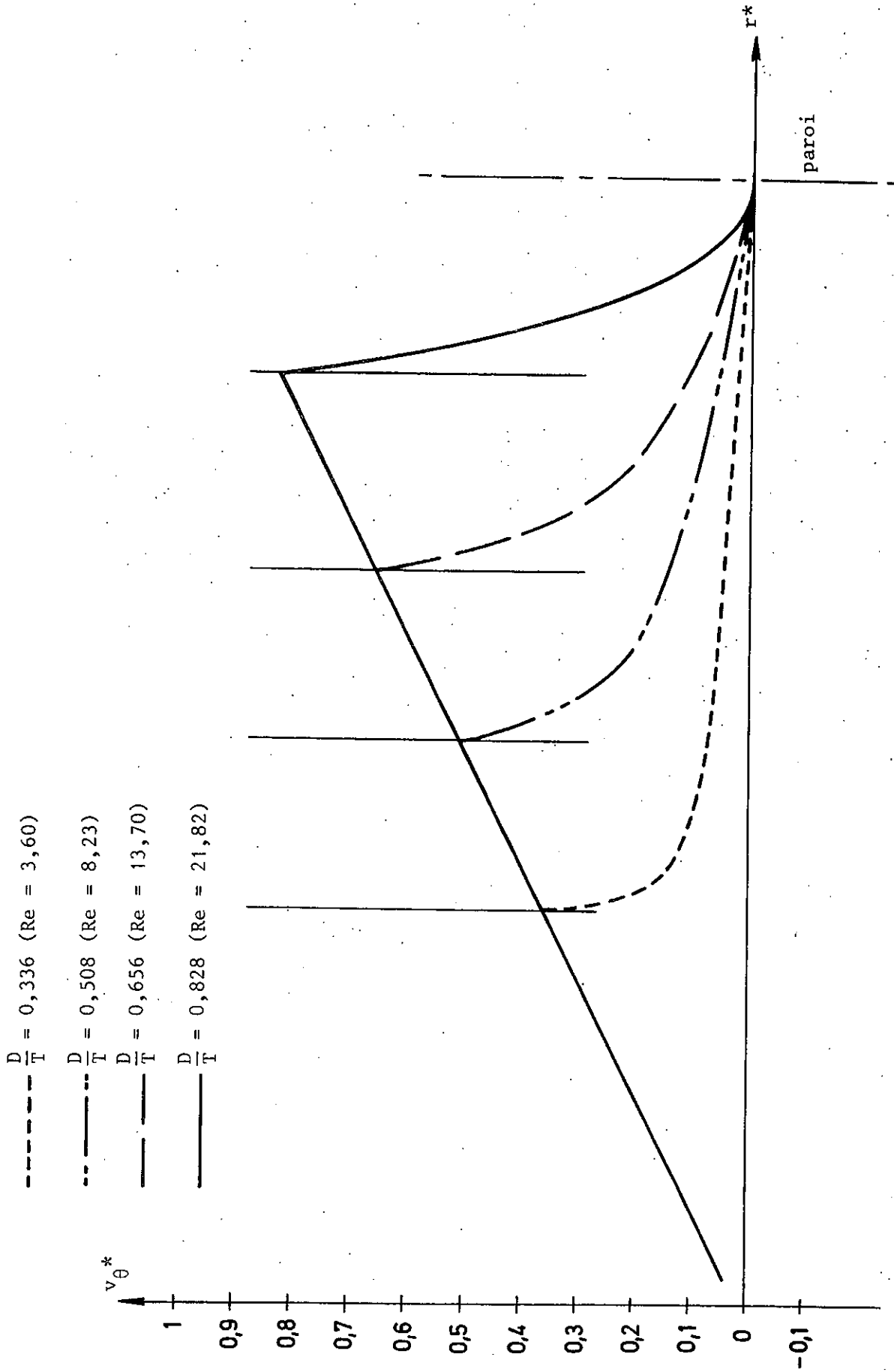


Fig. 4-26

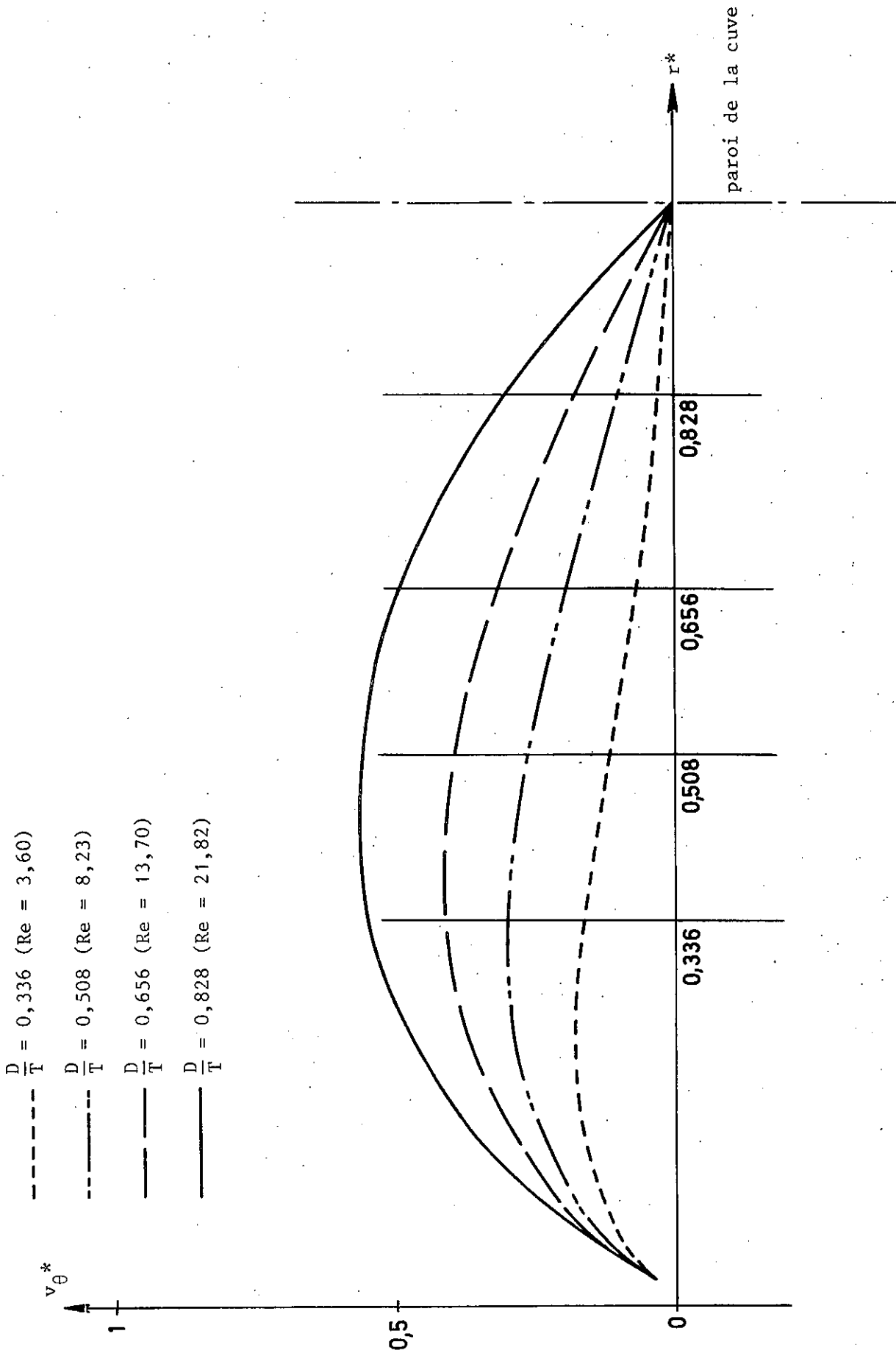


Fig. 4-27

- Re = 0,082
- Re = 2,47
- Re = 44,45

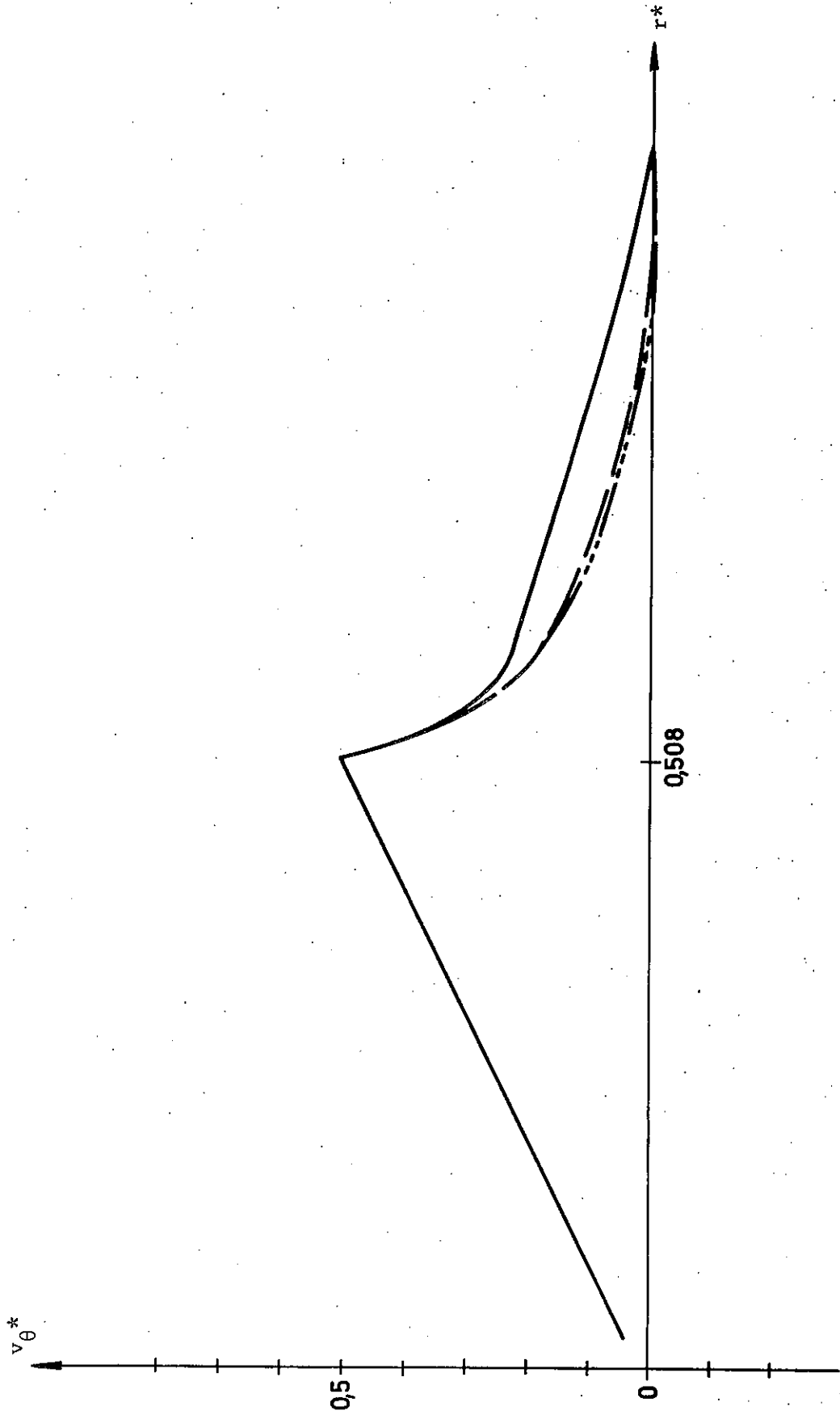


Fig. 4-28

- Re = 0,082
- Re = 2,47
- Re = 44,45

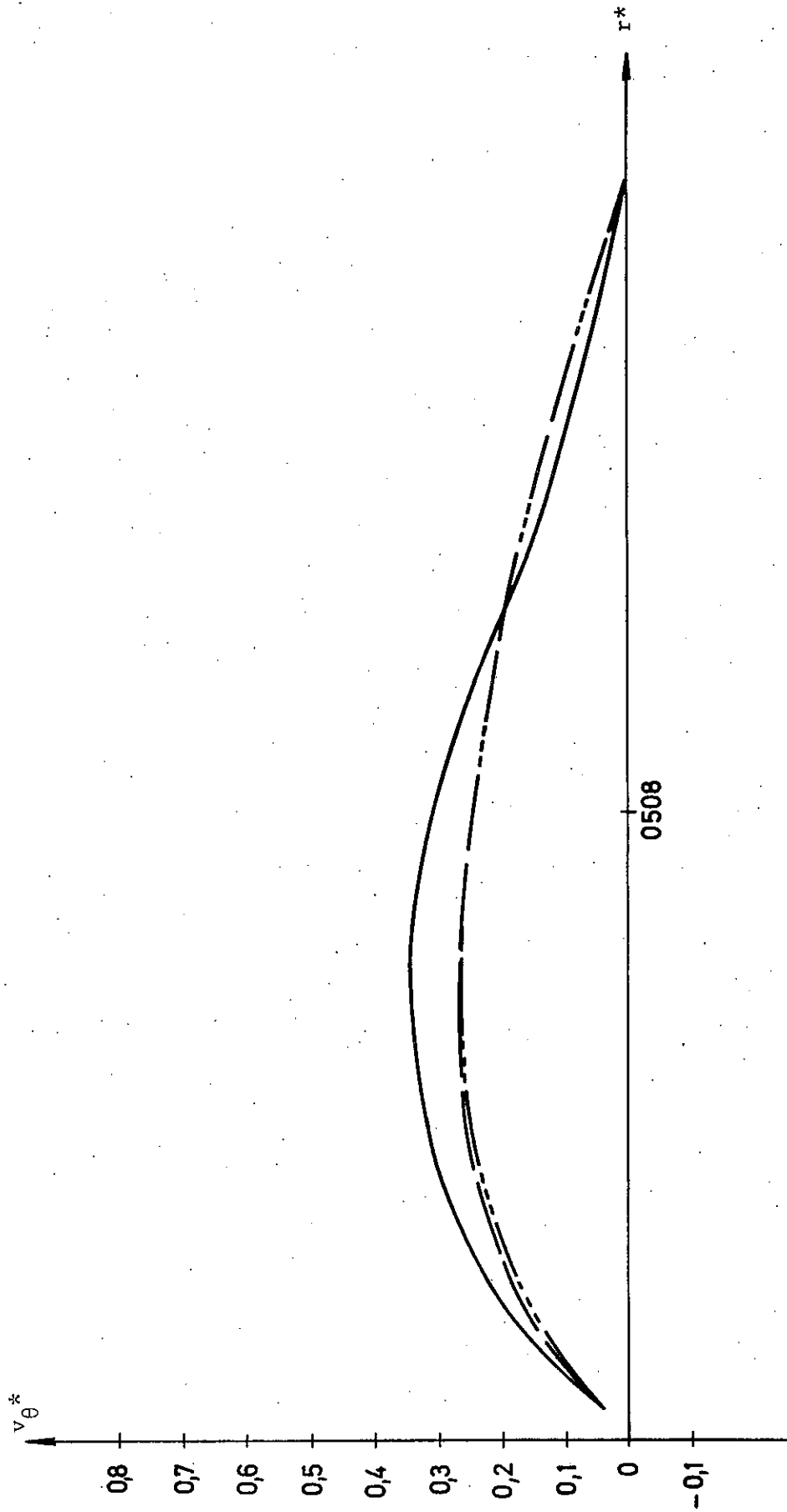


Fig. 4-29

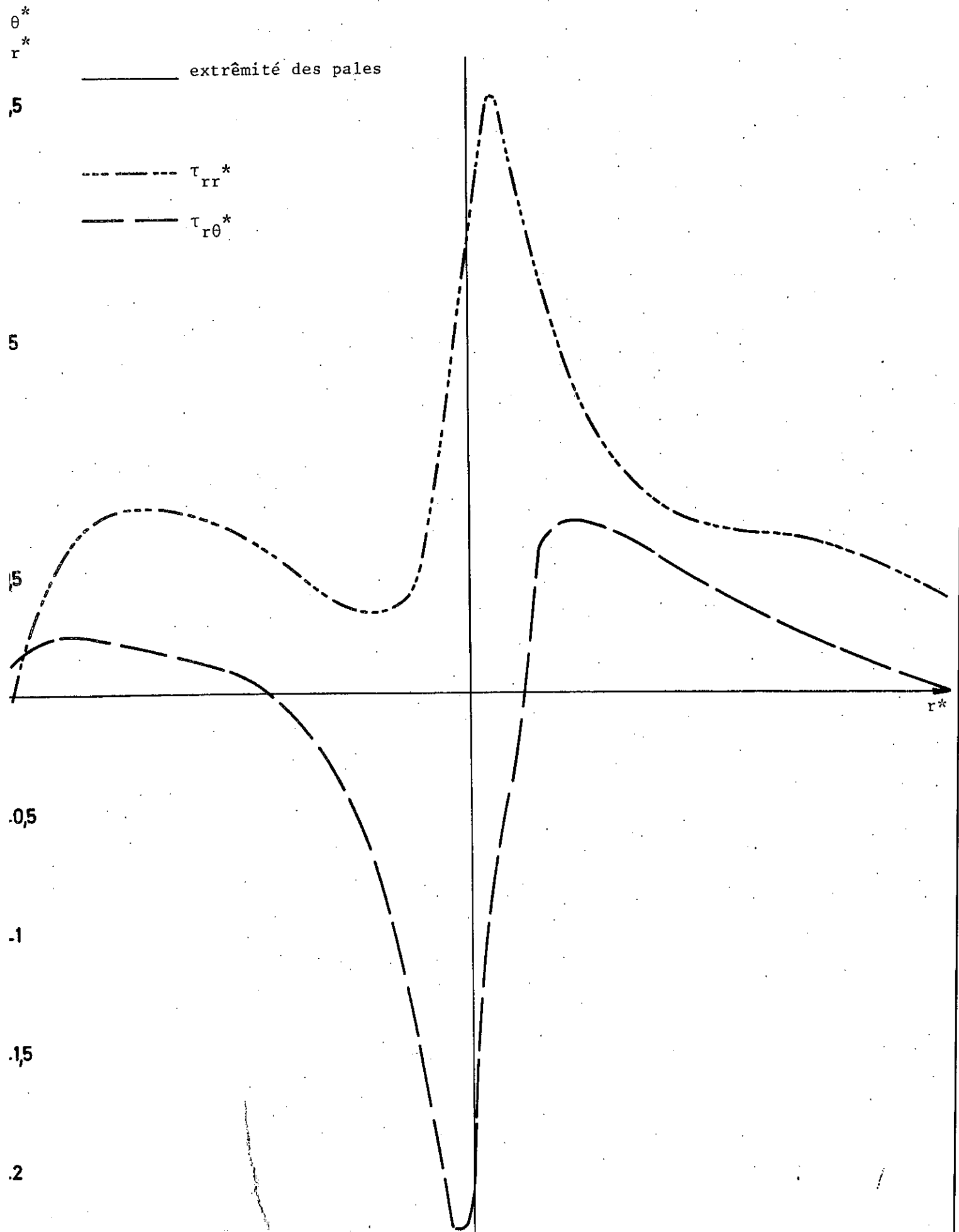


Fig. 4-30

extrémité des pales

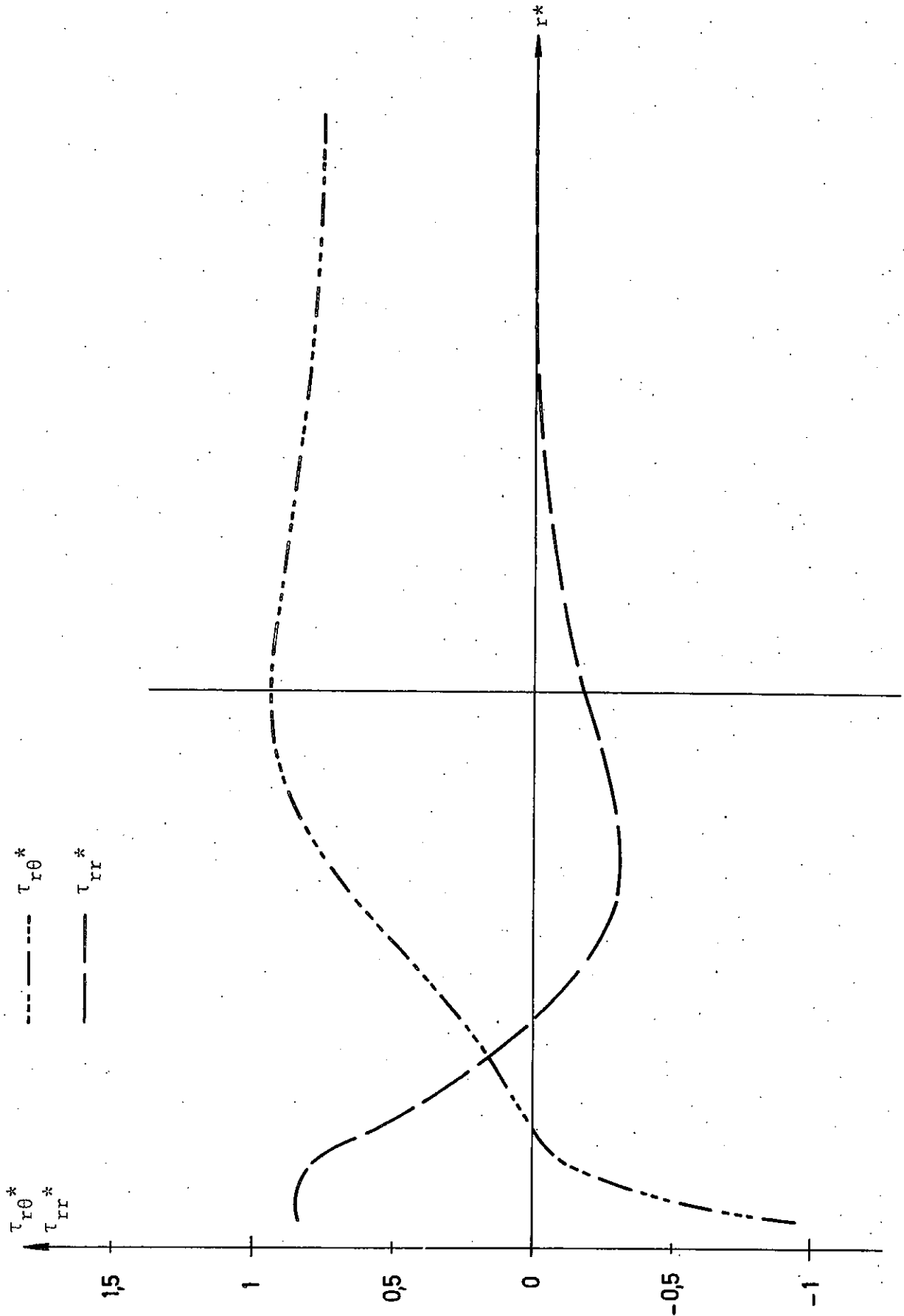


Fig. 4-31

— extrémité des pales

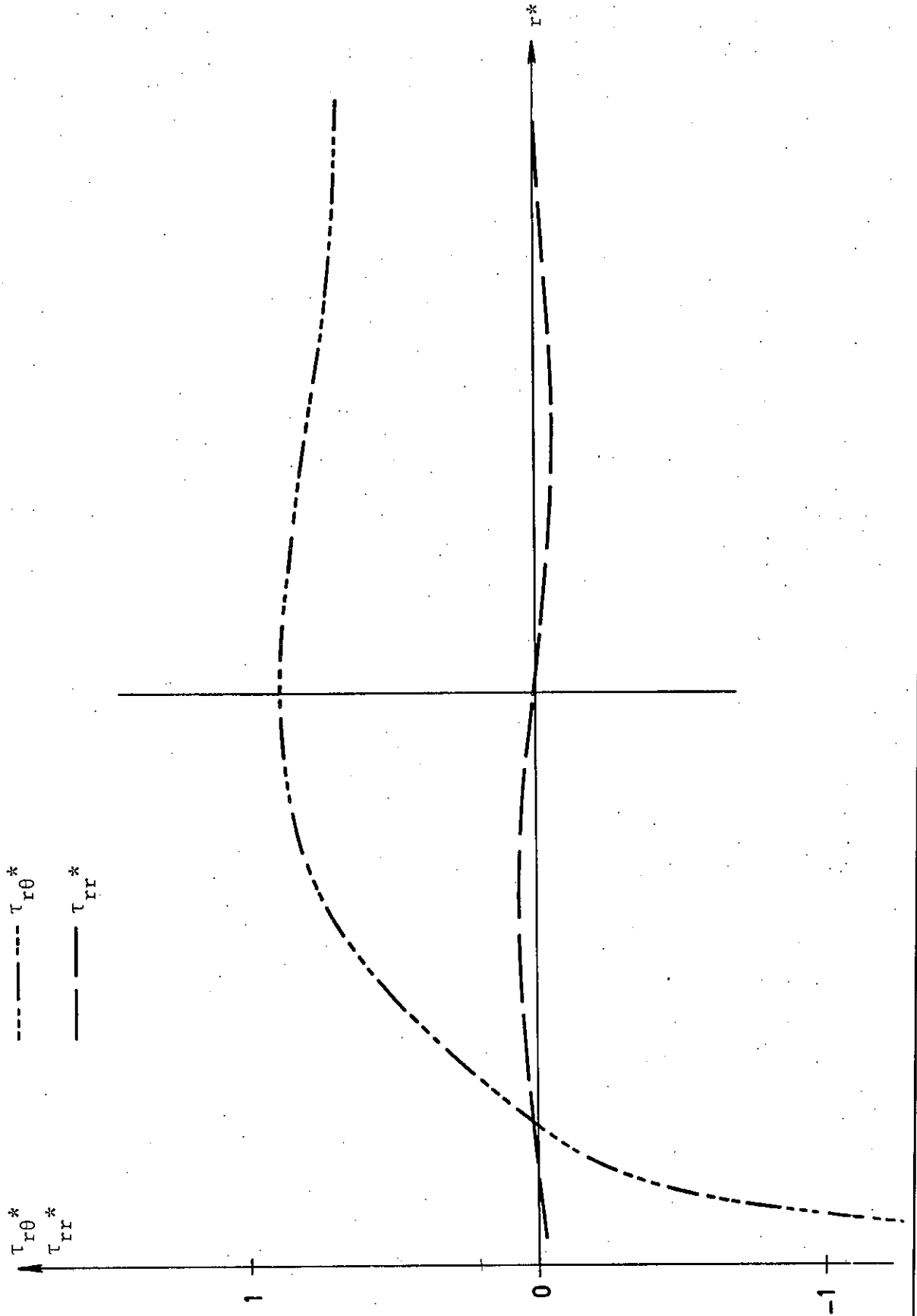


Fig. 4-32

— extrémité des pales

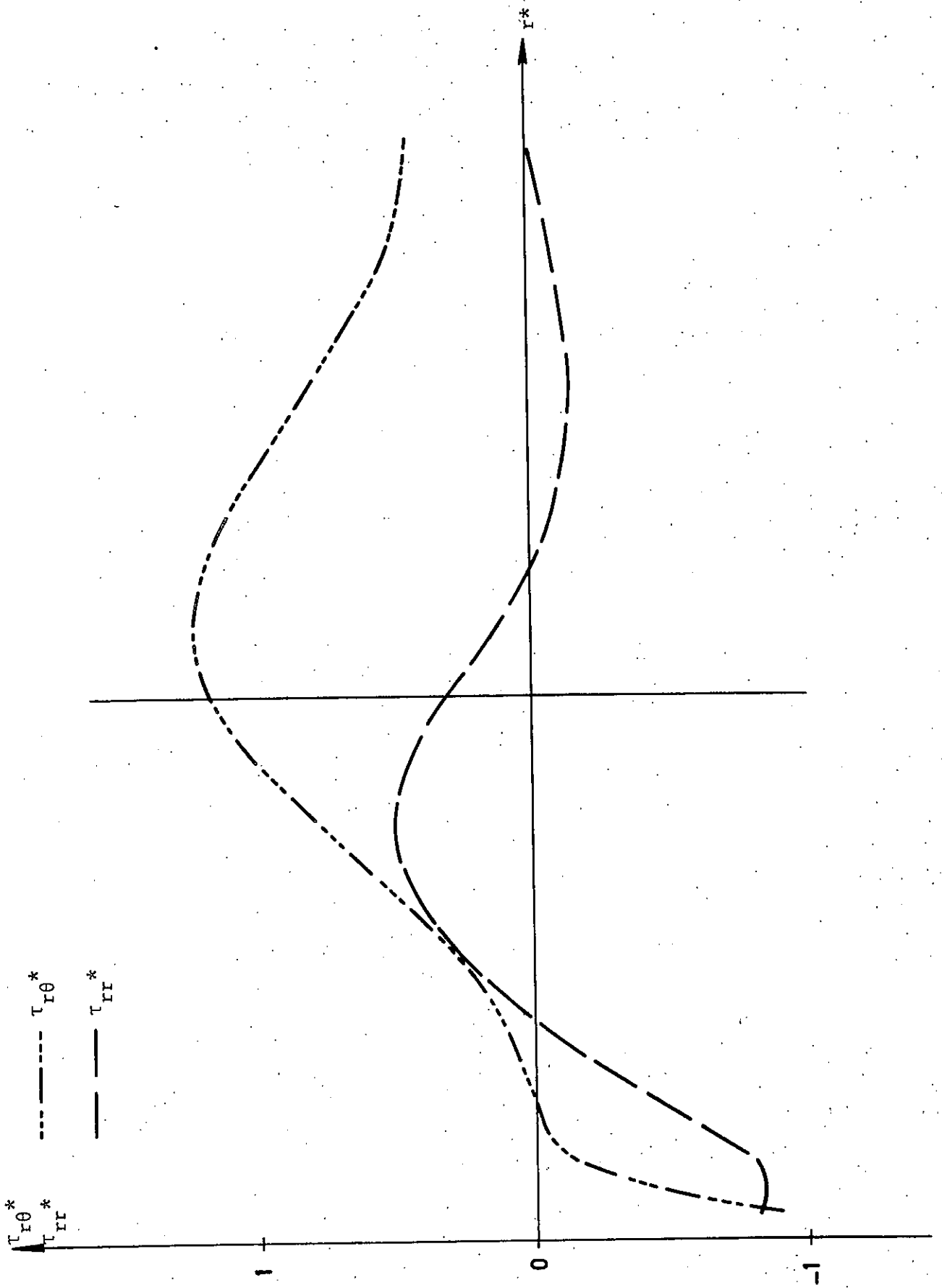


Fig. 4-33

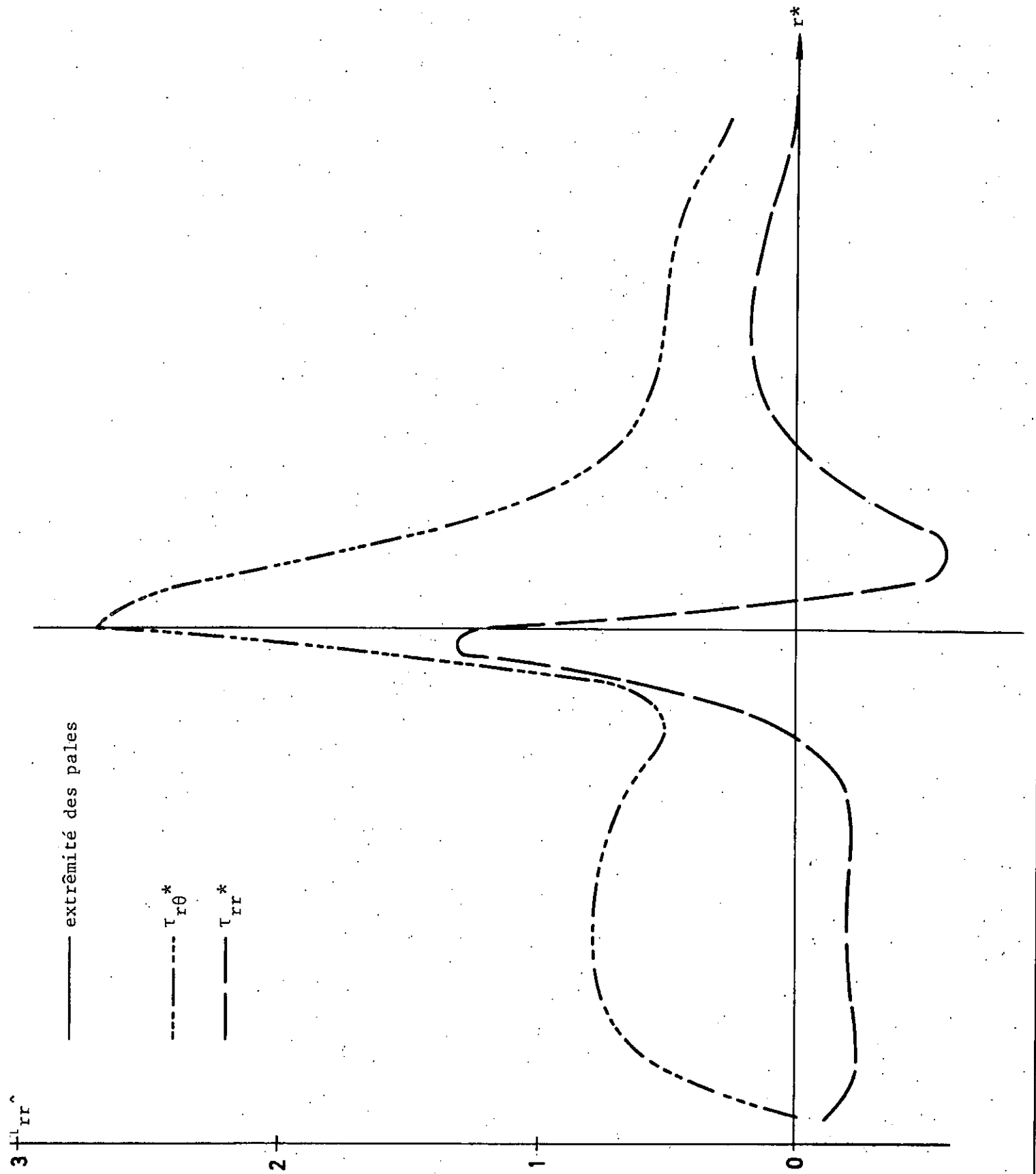


Fig. 4-34

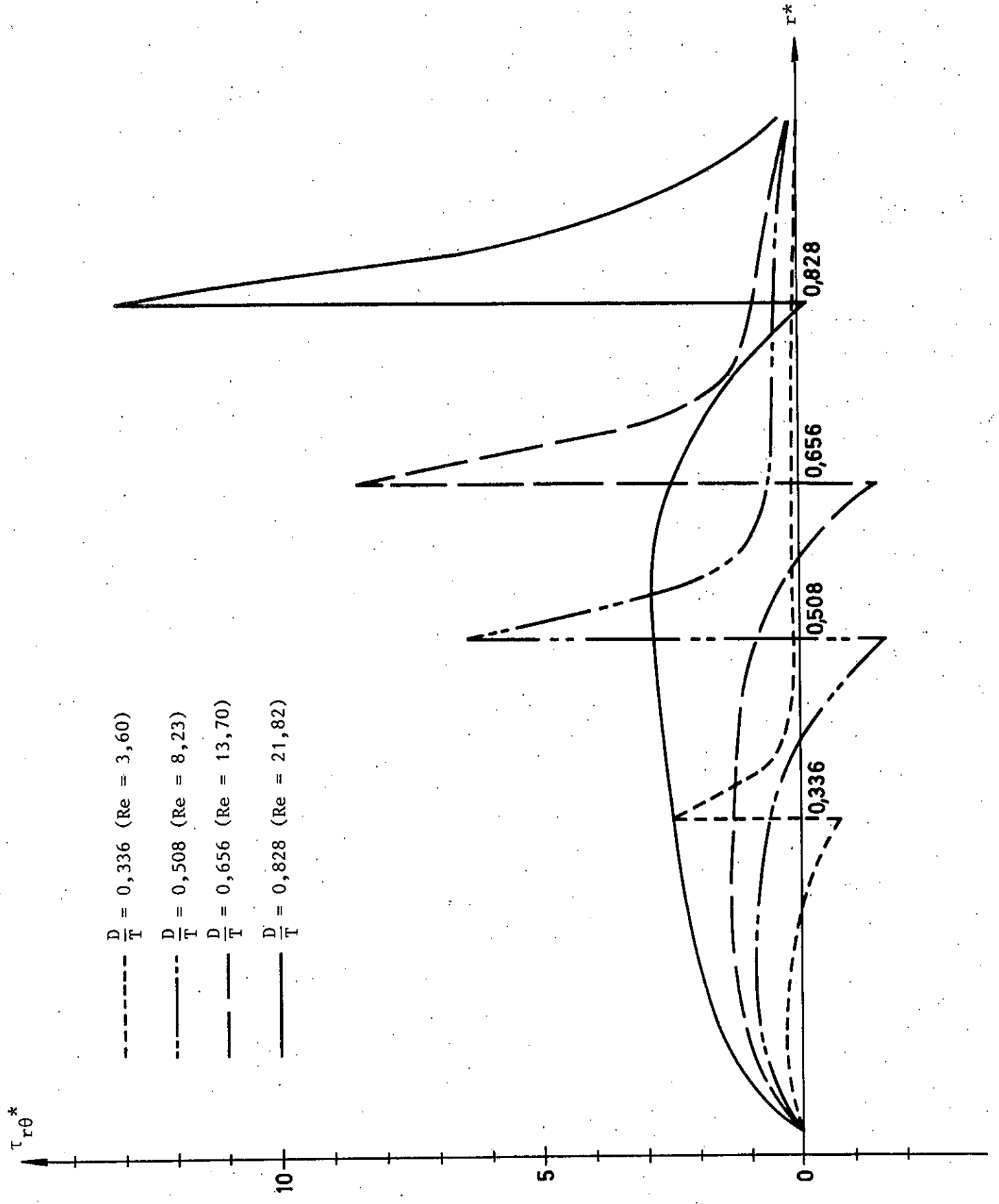


Fig. 4-35

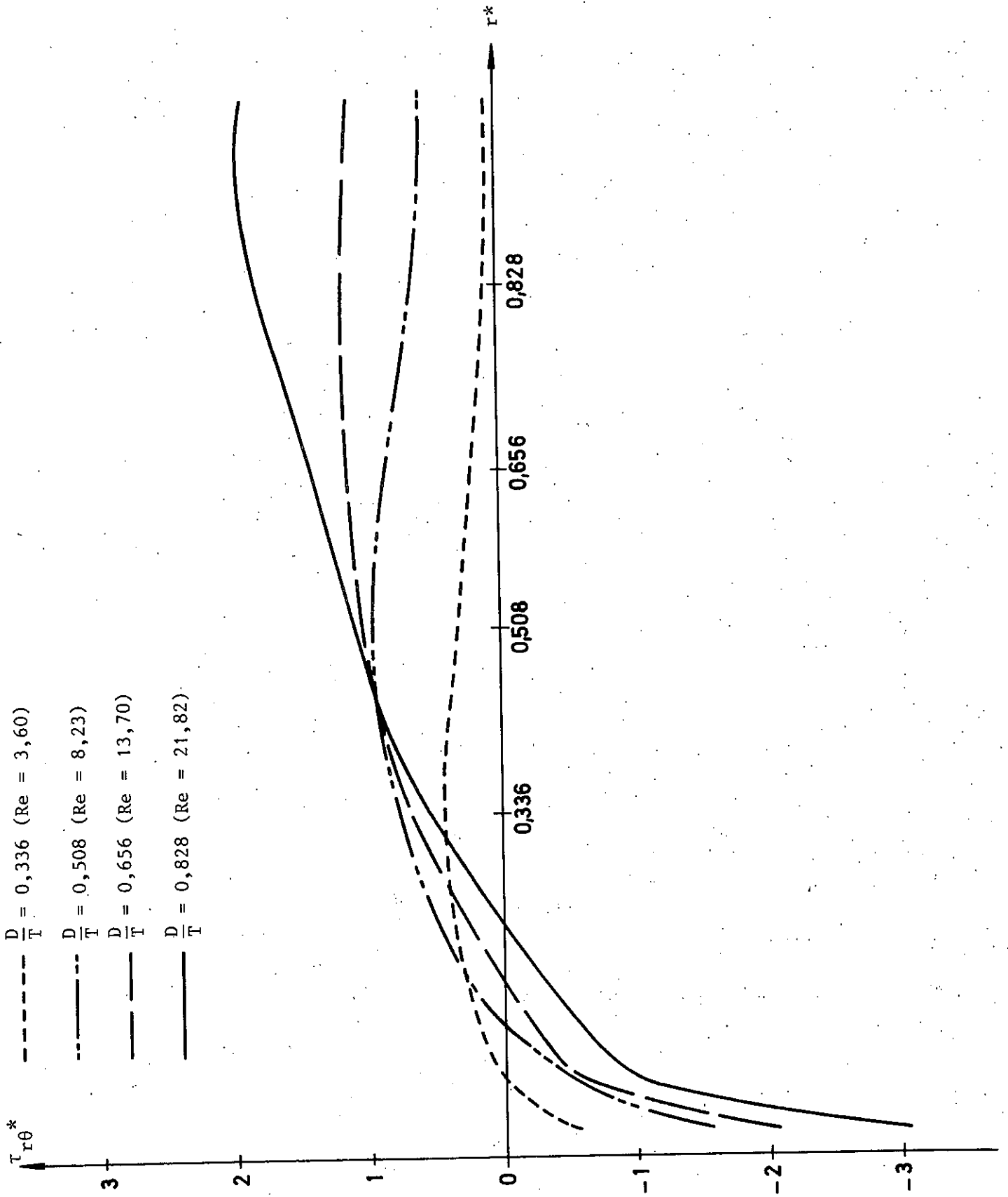


Fig. 4-36

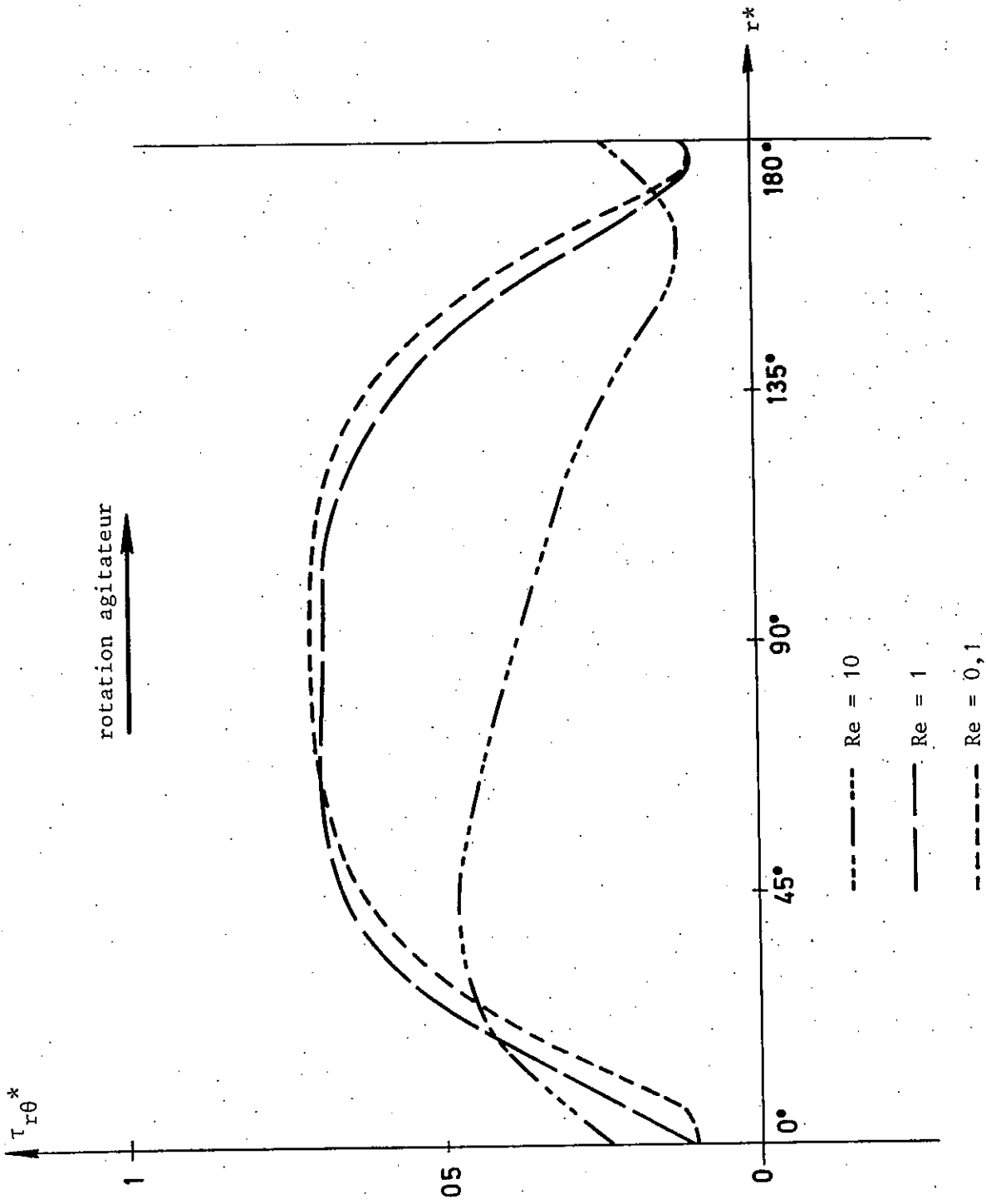


Fig. 4-37

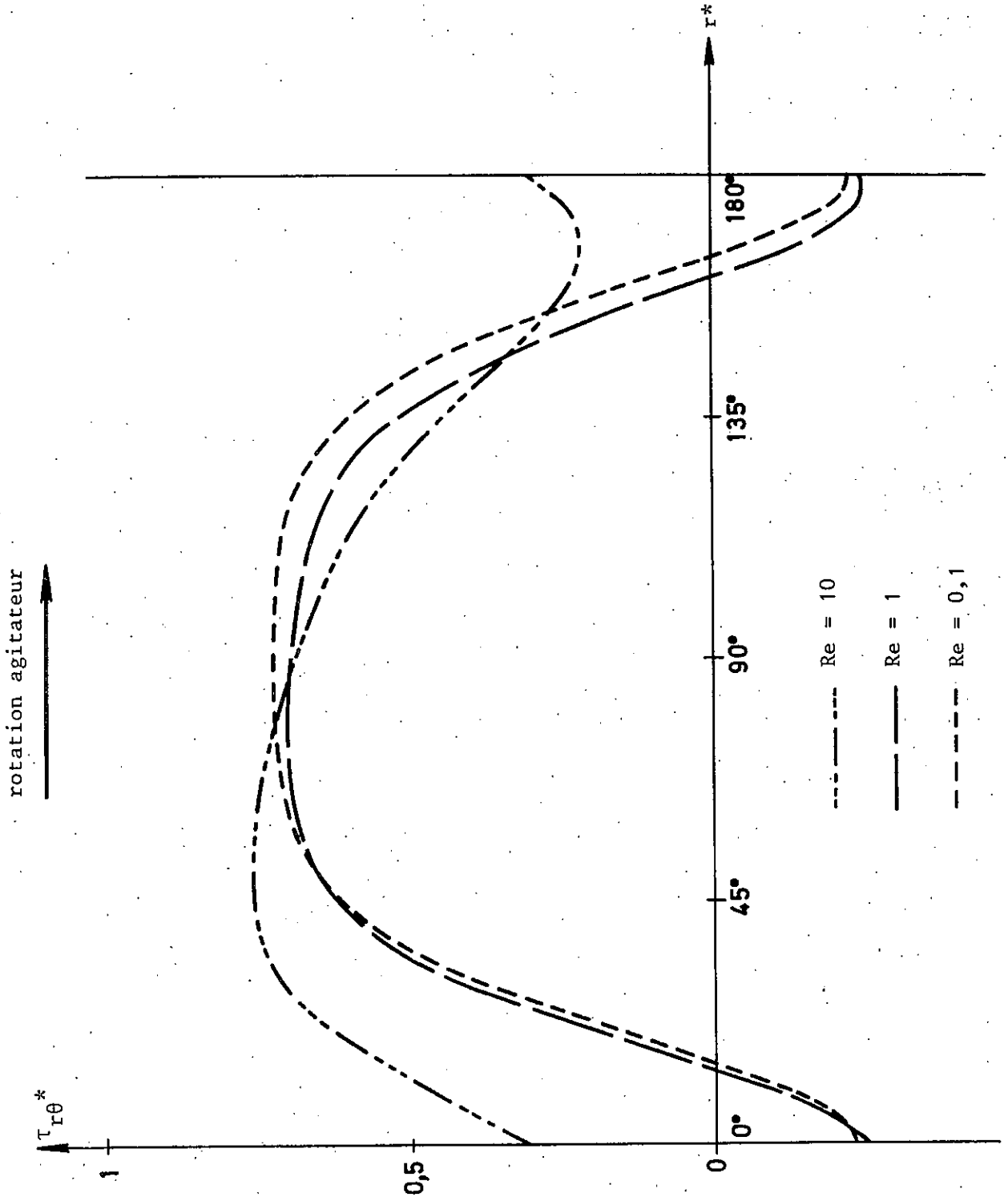


Fig. 4-38

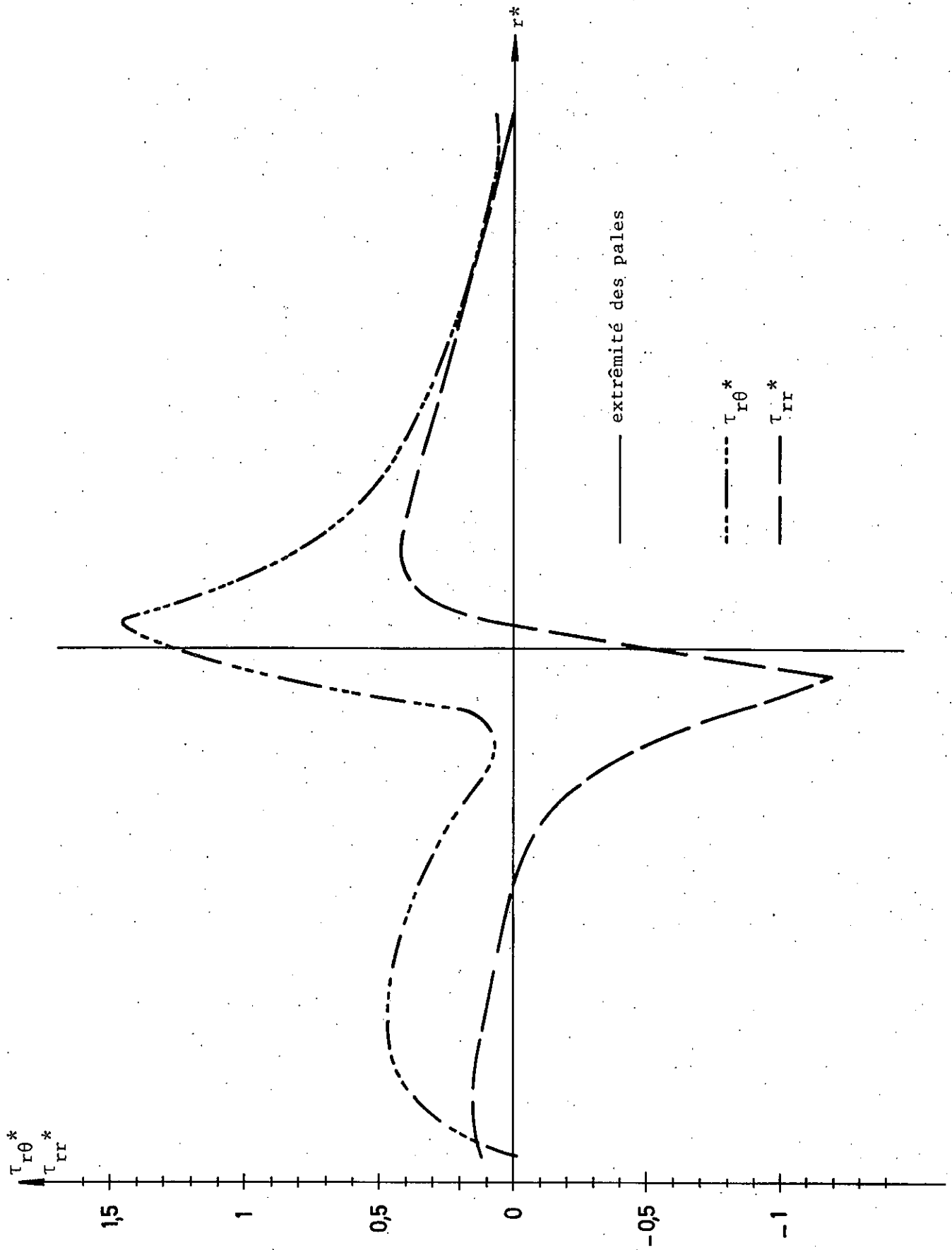


Fig. 4-39

— extrémité des pales

- - - $\tau_{r\theta}^*$

— τ_{rr}^*

$\tau_{r\theta}^*$
 τ_{rr}^*

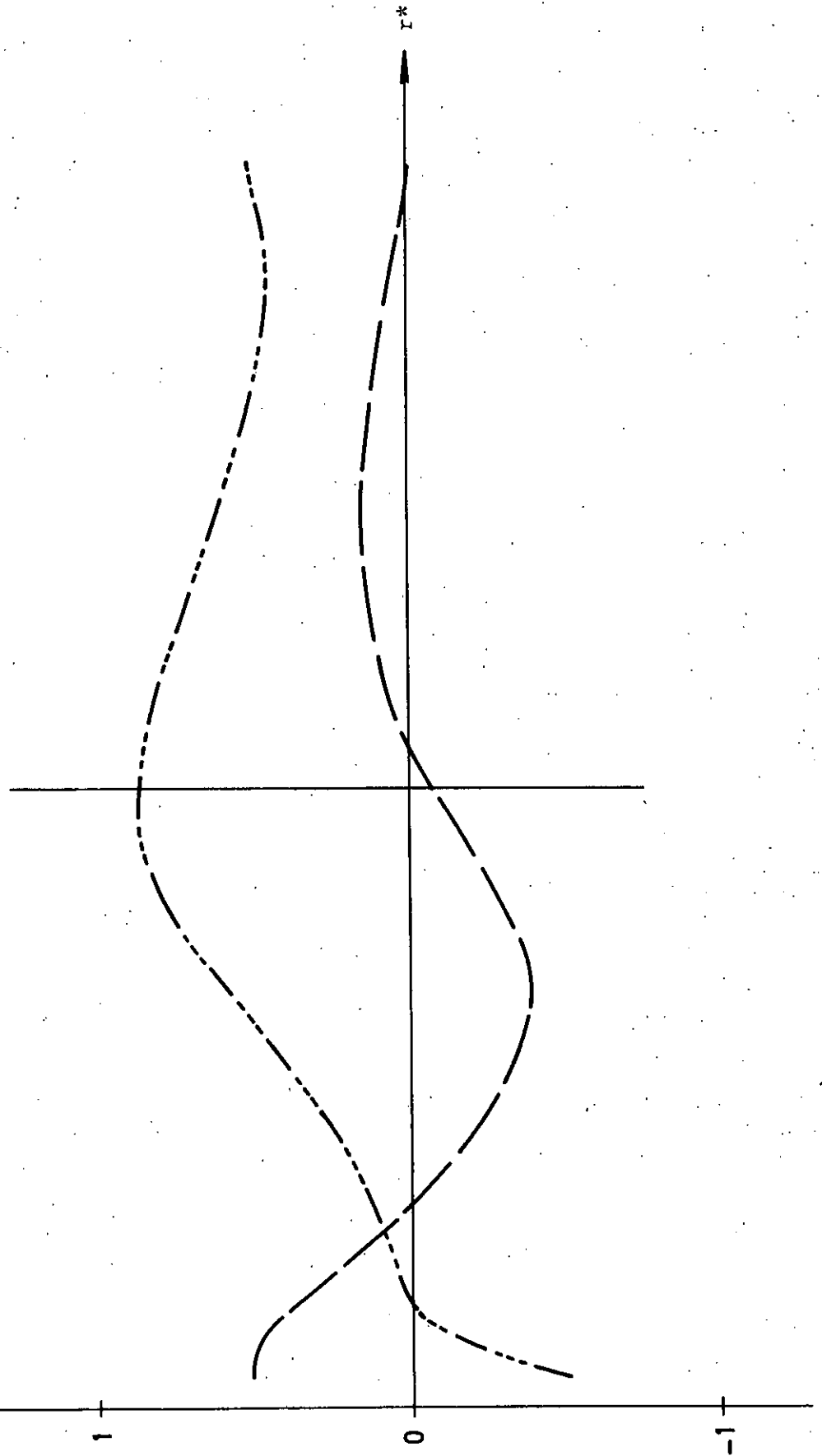


Fig. 4-40

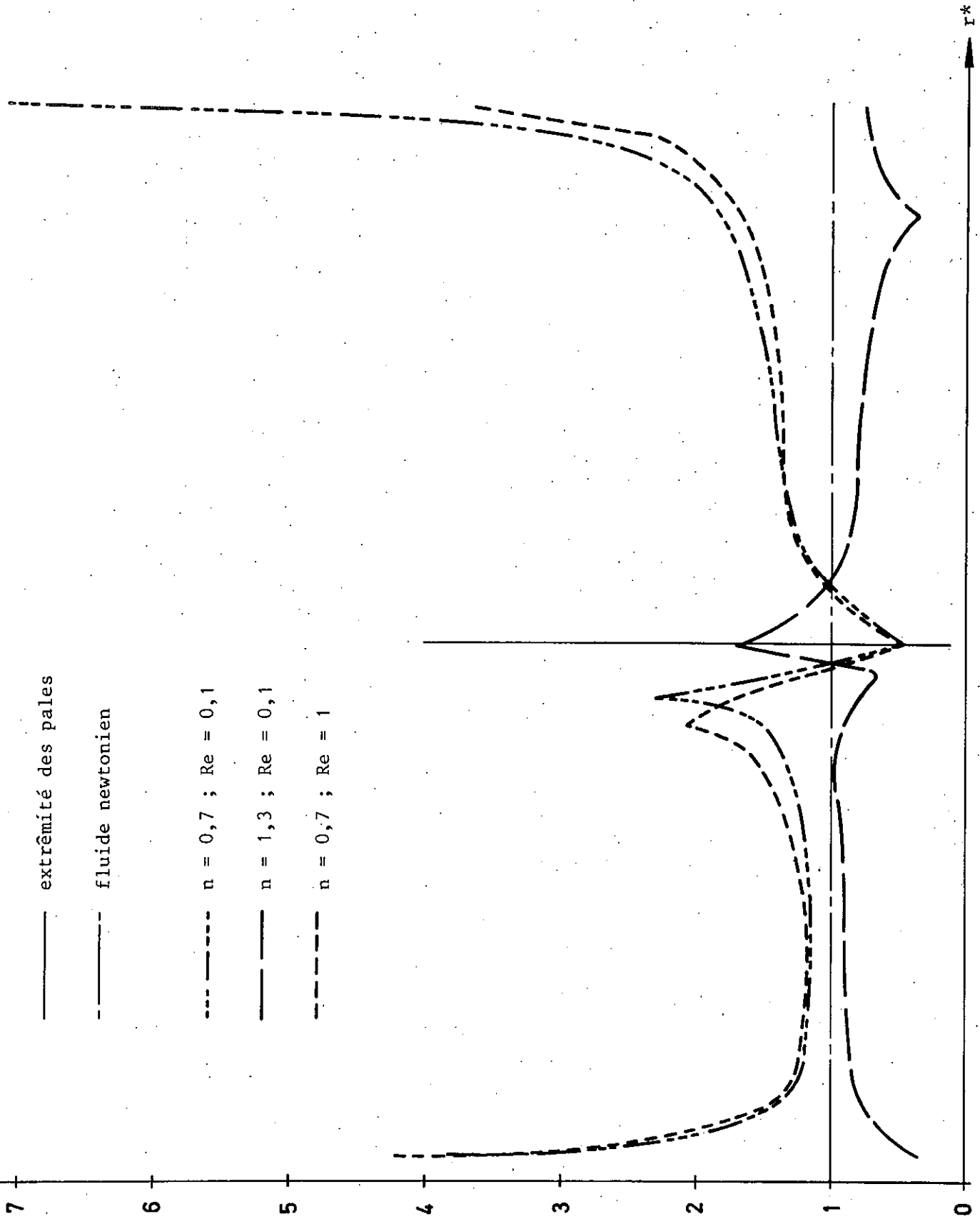


Fig. 4-41

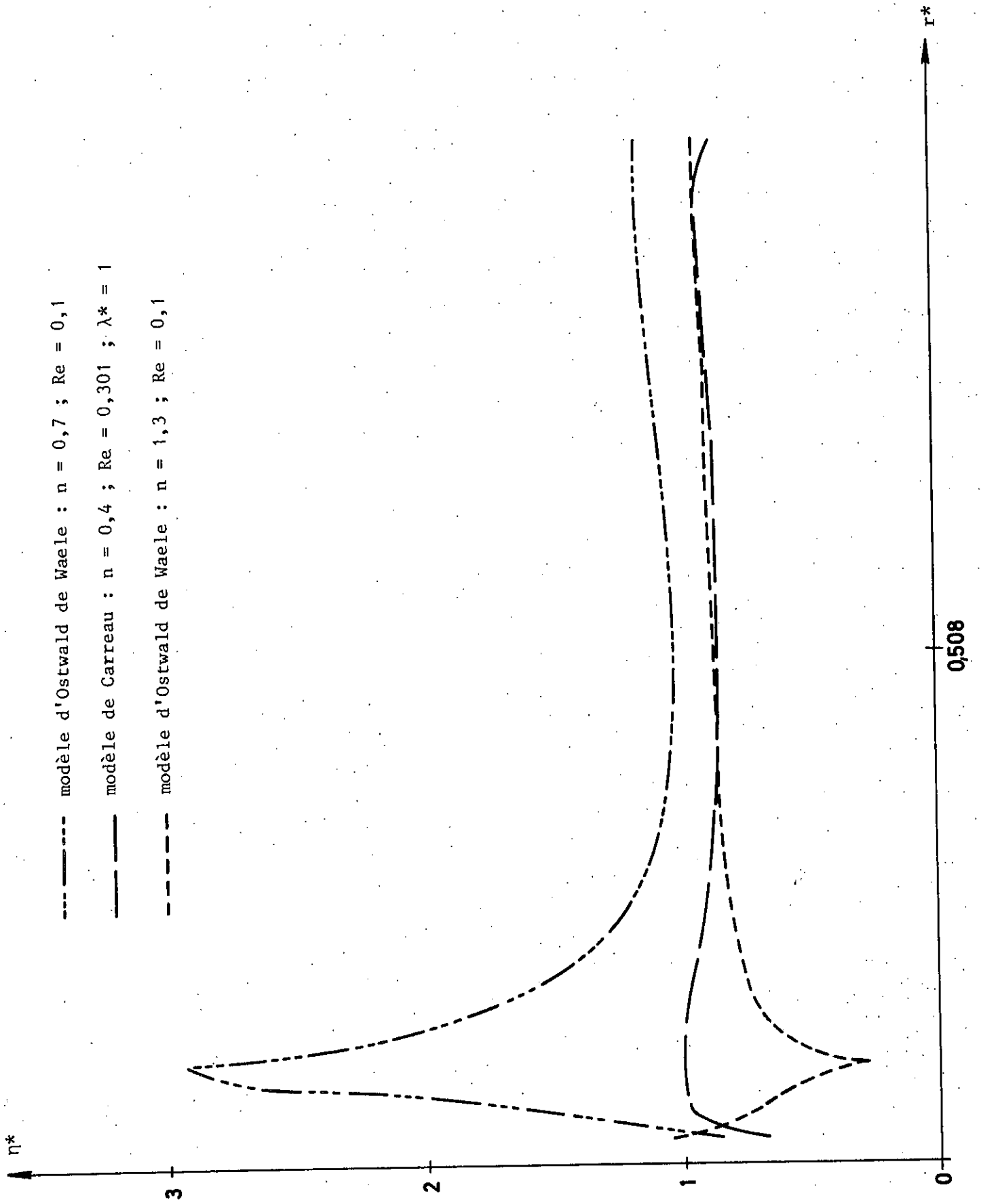


Fig. 4-42

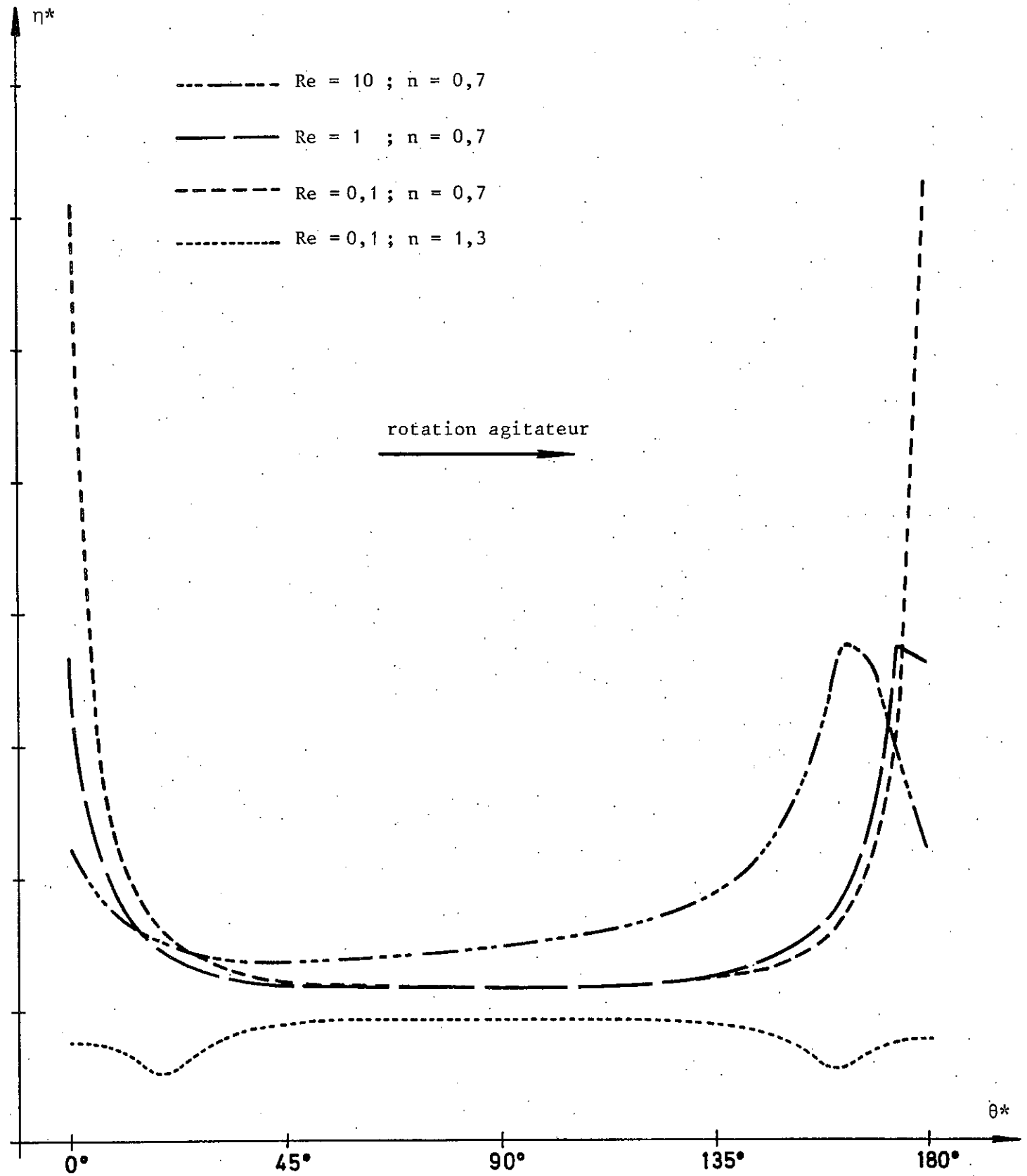


Fig. 4-43

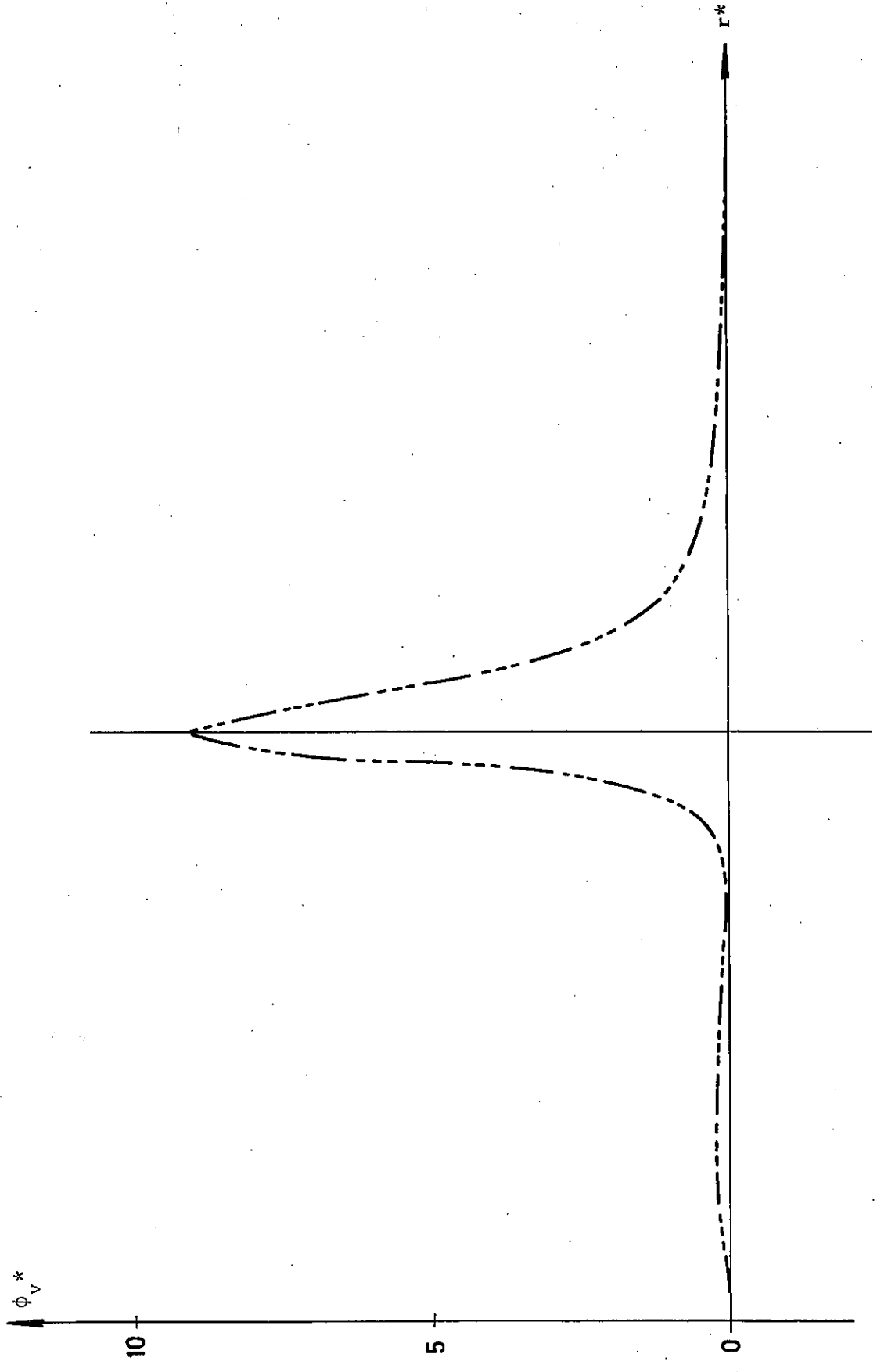


Fig. 4-44

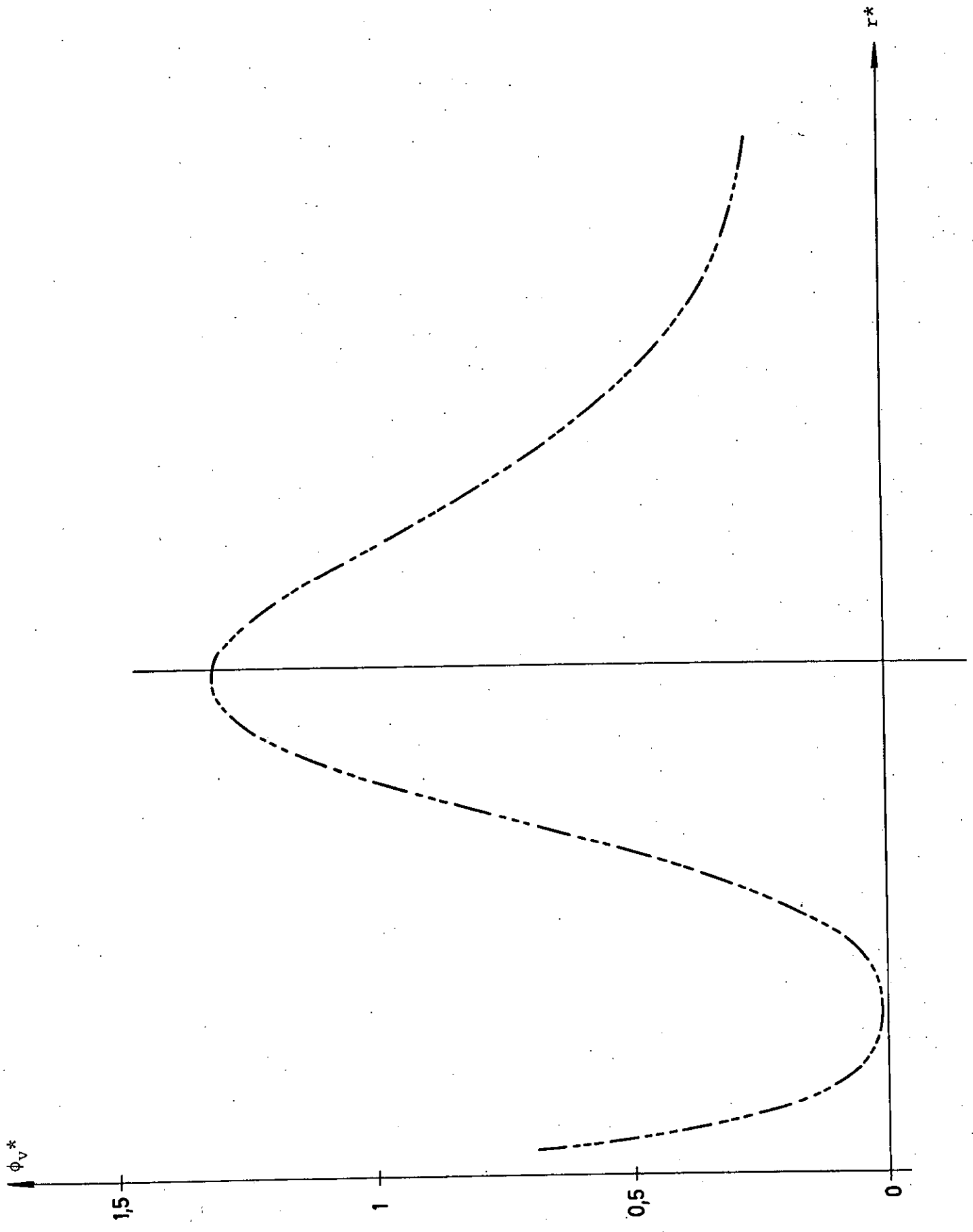


Fig. 4-45

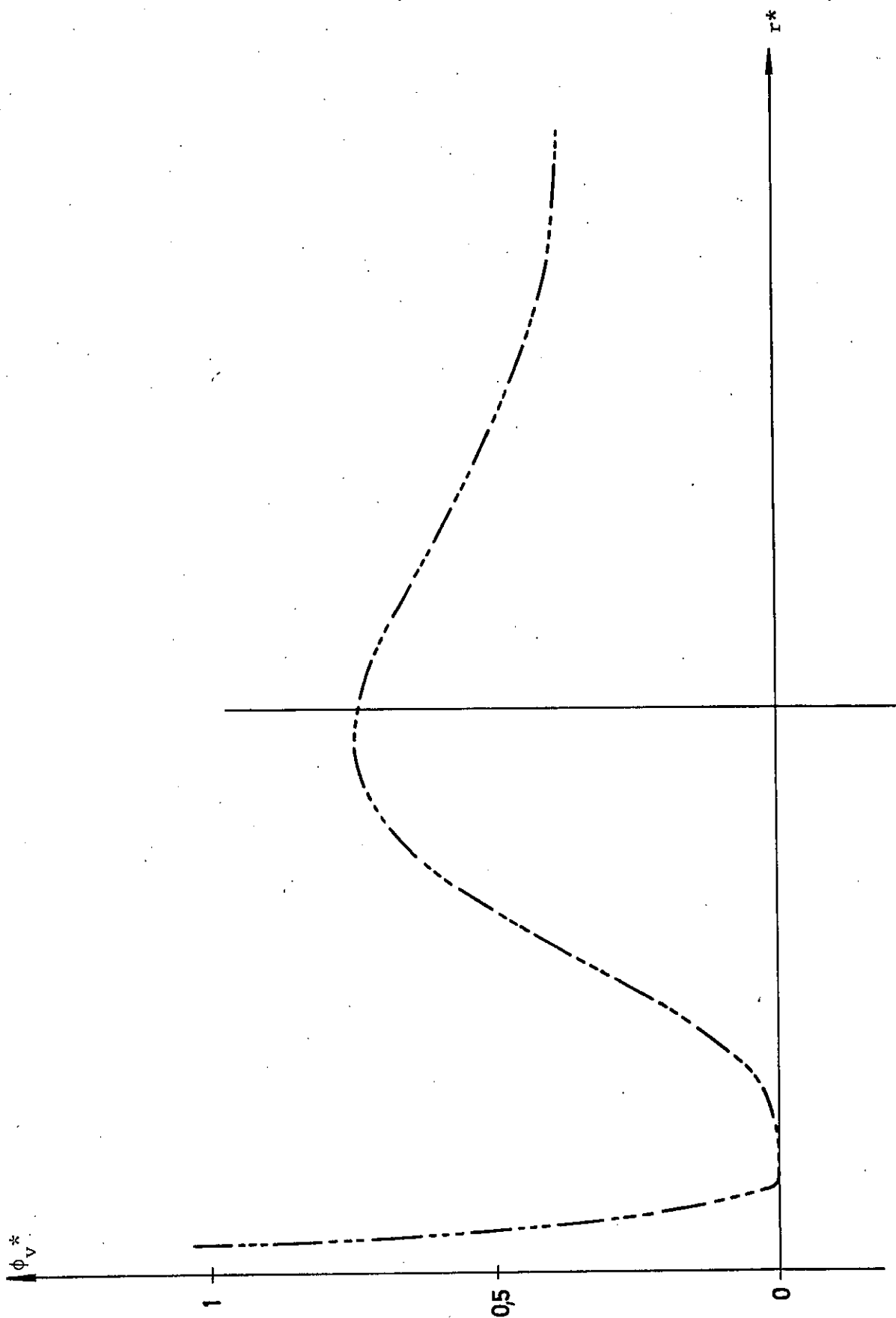


Fig. 4-46

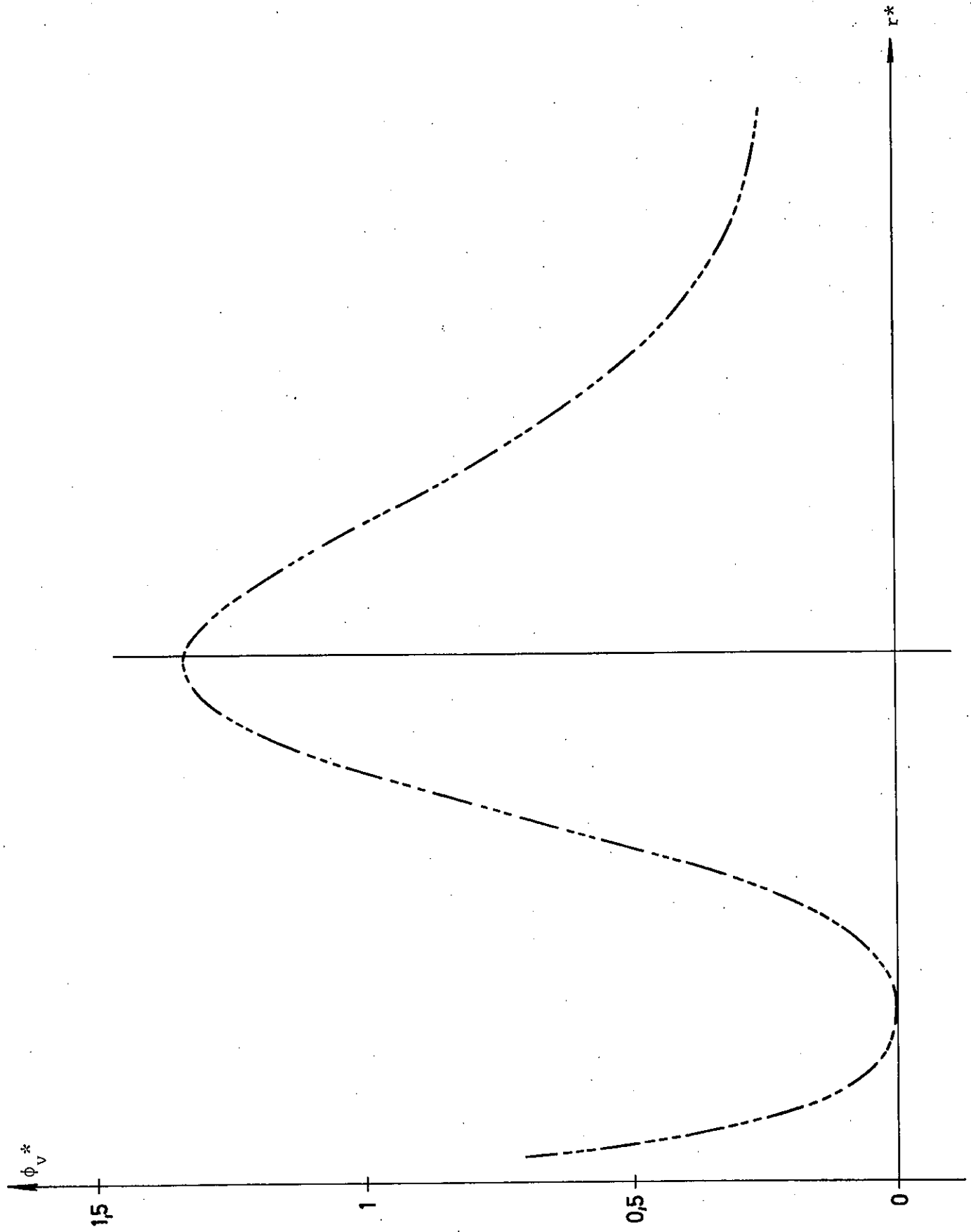


Fig. 4-47

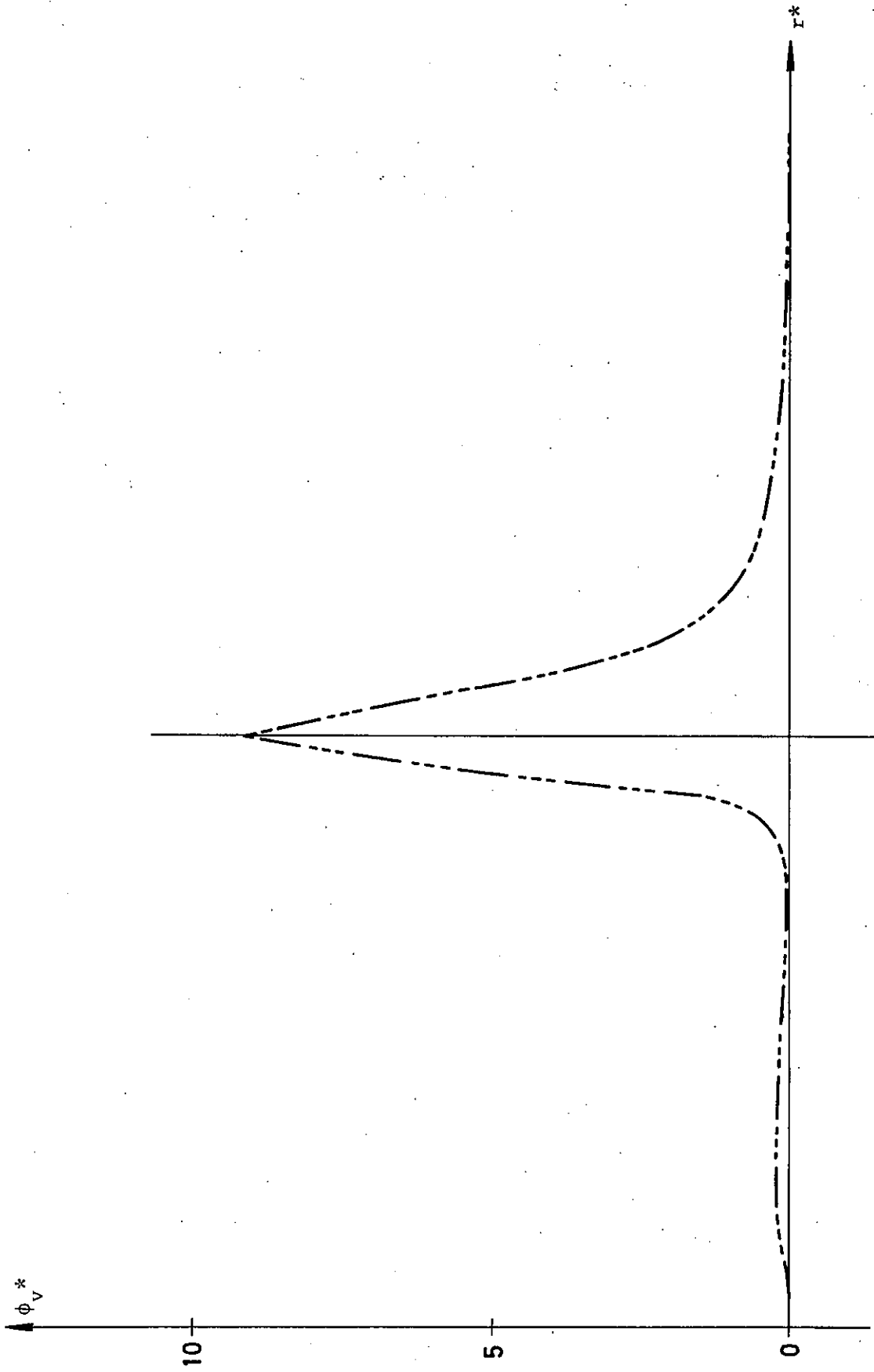


Fig. 4-48

- modèle d'Ostwald de Waele : $n = 0,7$; $Re = 1$
- modèle de Carreau : $n = 0,4$; $\lambda^* = 1$; $Re = 0,301$
- modèle d'Ostwald de Waele : $n = 1,3$; $Re = 0,1$

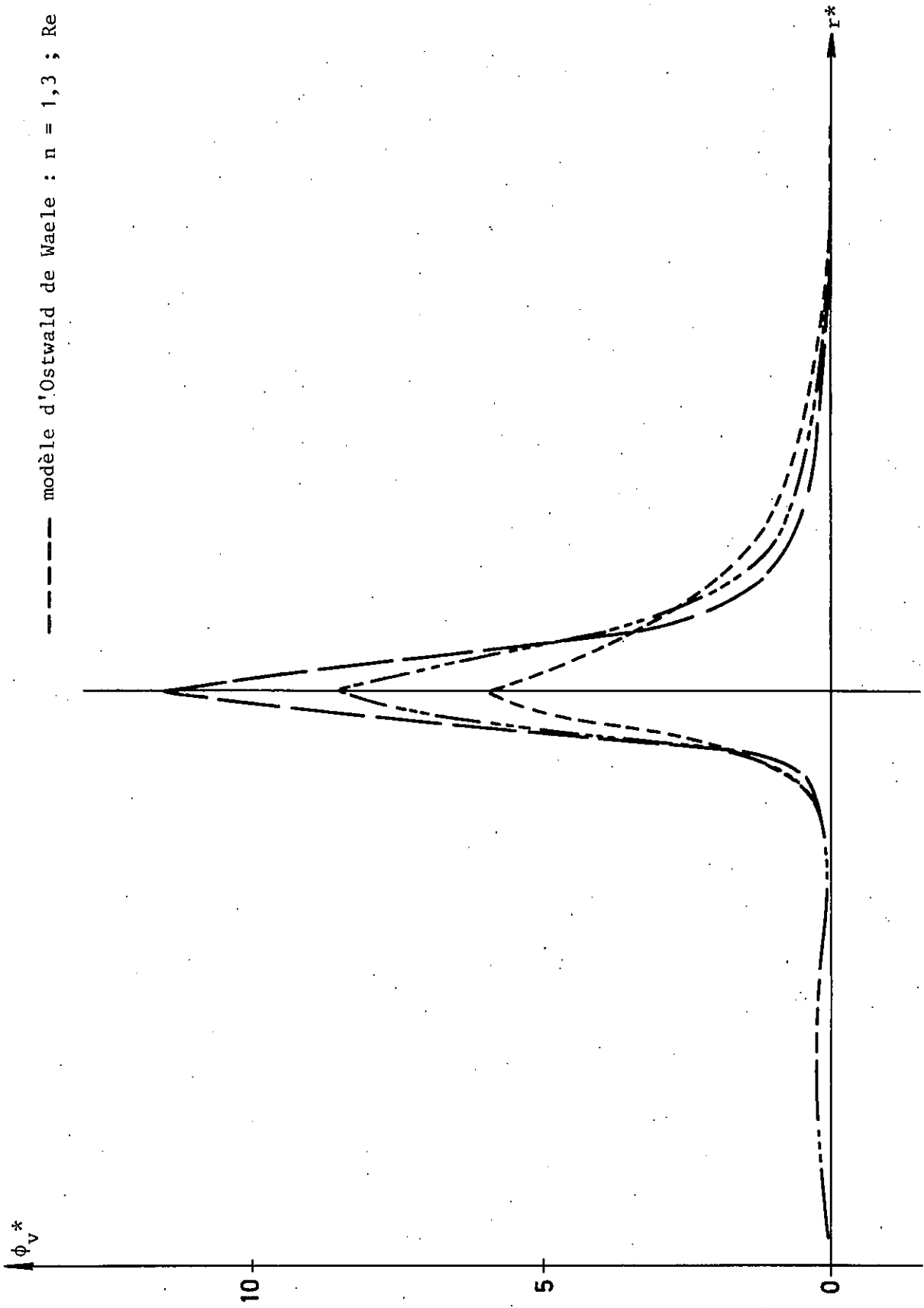


Fig. 4-49

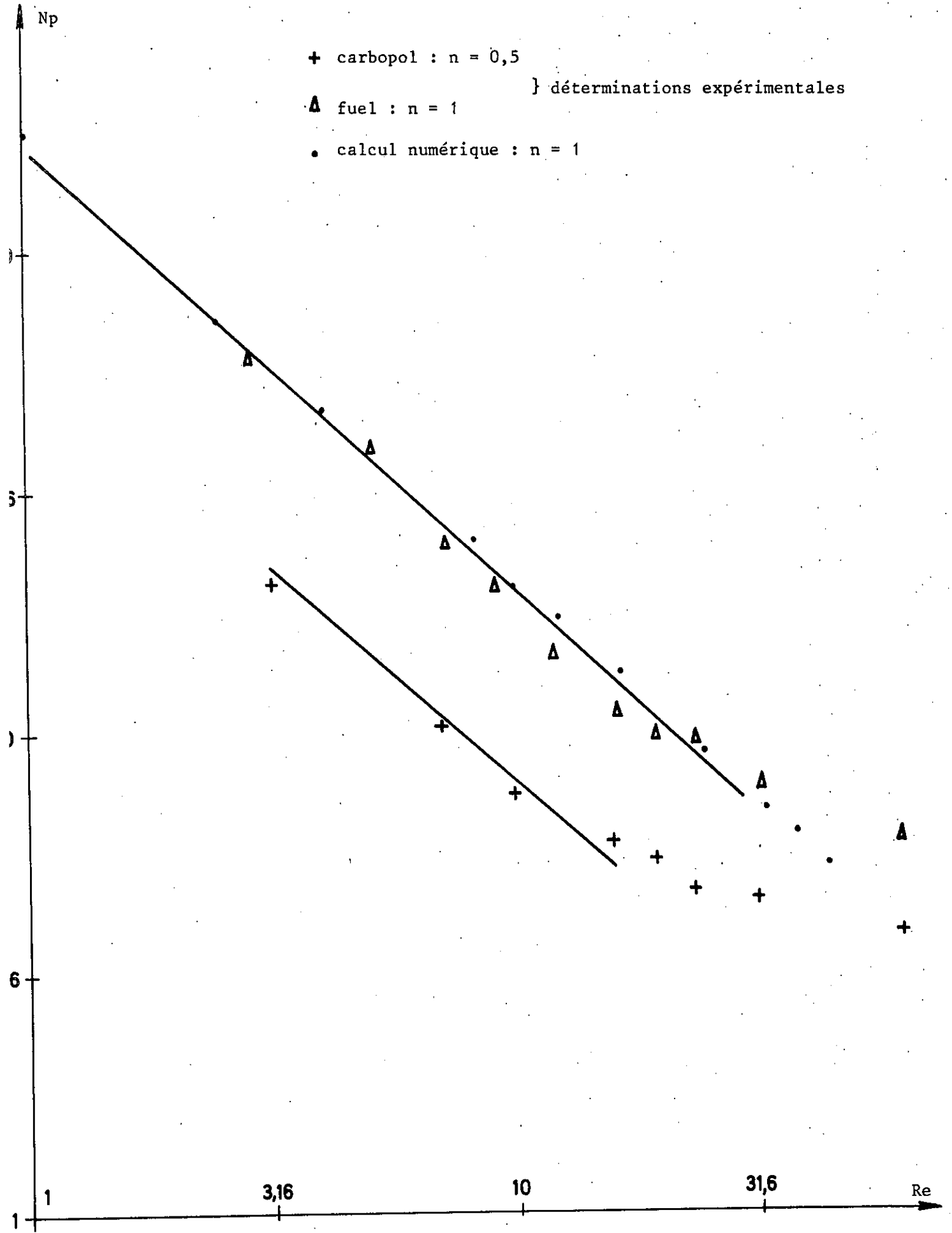
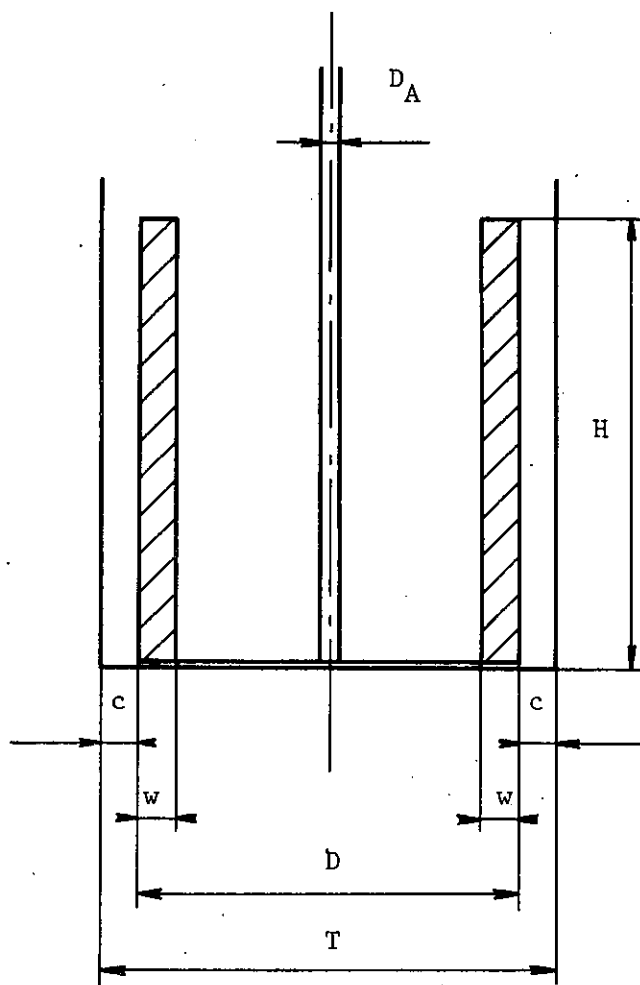


Fig. 5-1



Valeurs de $\frac{D}{T}$: 0,730 ; 0,779 ; 0,828 ; 0,926

Valeurs de $\frac{c}{T}$: 0,135 ; 0,111 ; 0,086 ; 0,037

$$\frac{w}{T} = 0,074$$

$$\frac{D_A}{T} = 0,0417$$

Fig. 5-2

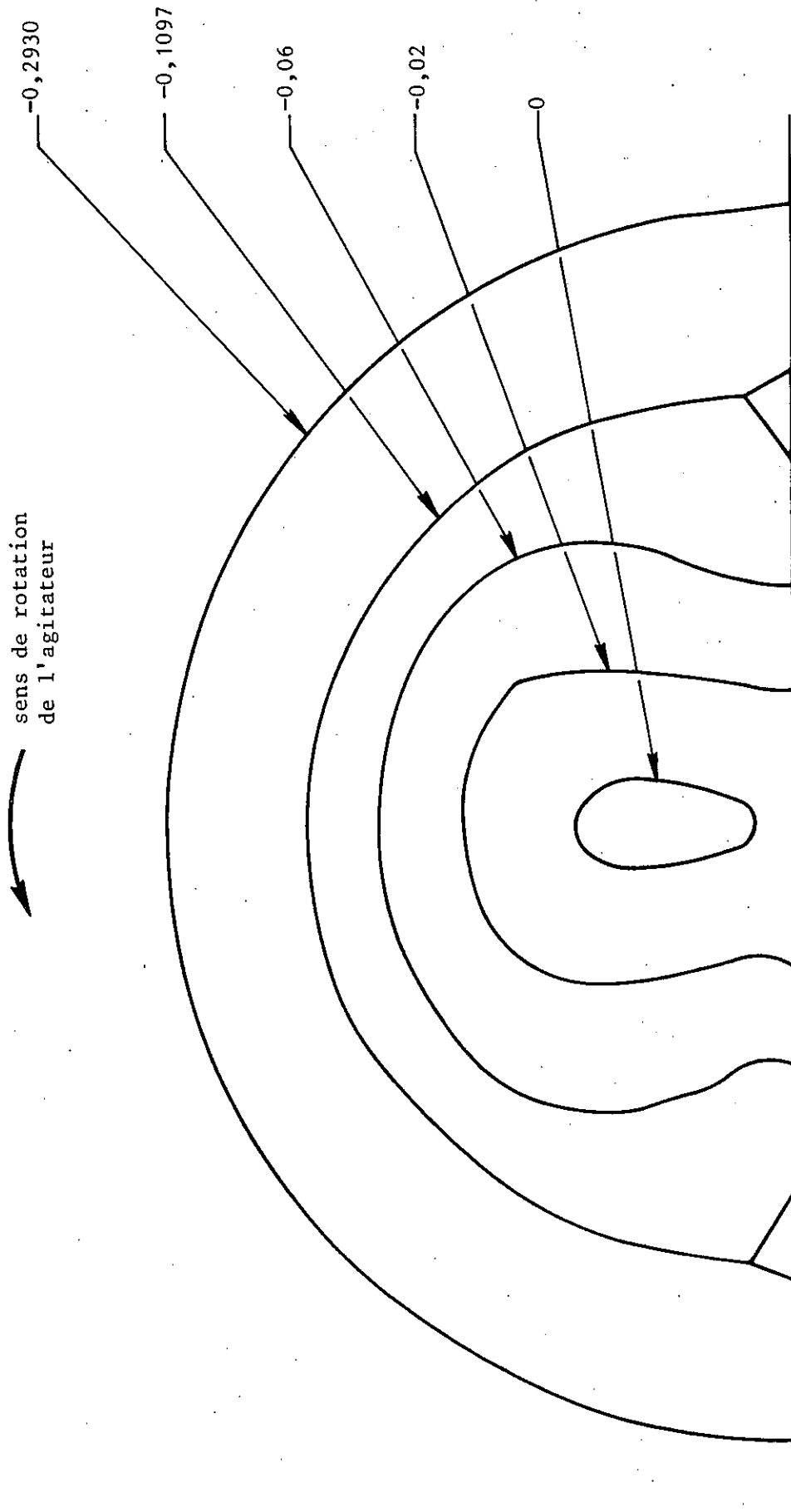


Fig. 5-3

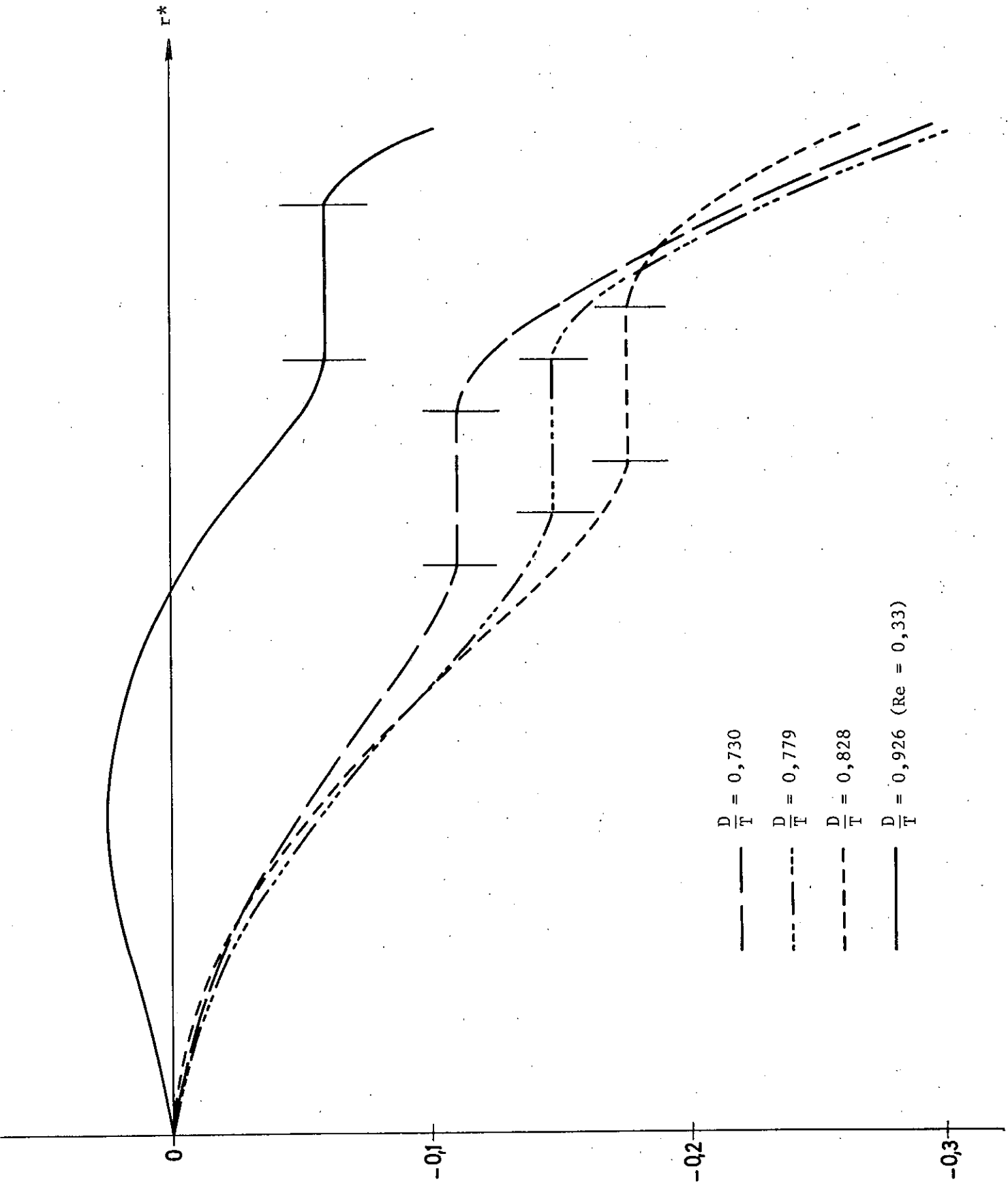


Fig. 5-4

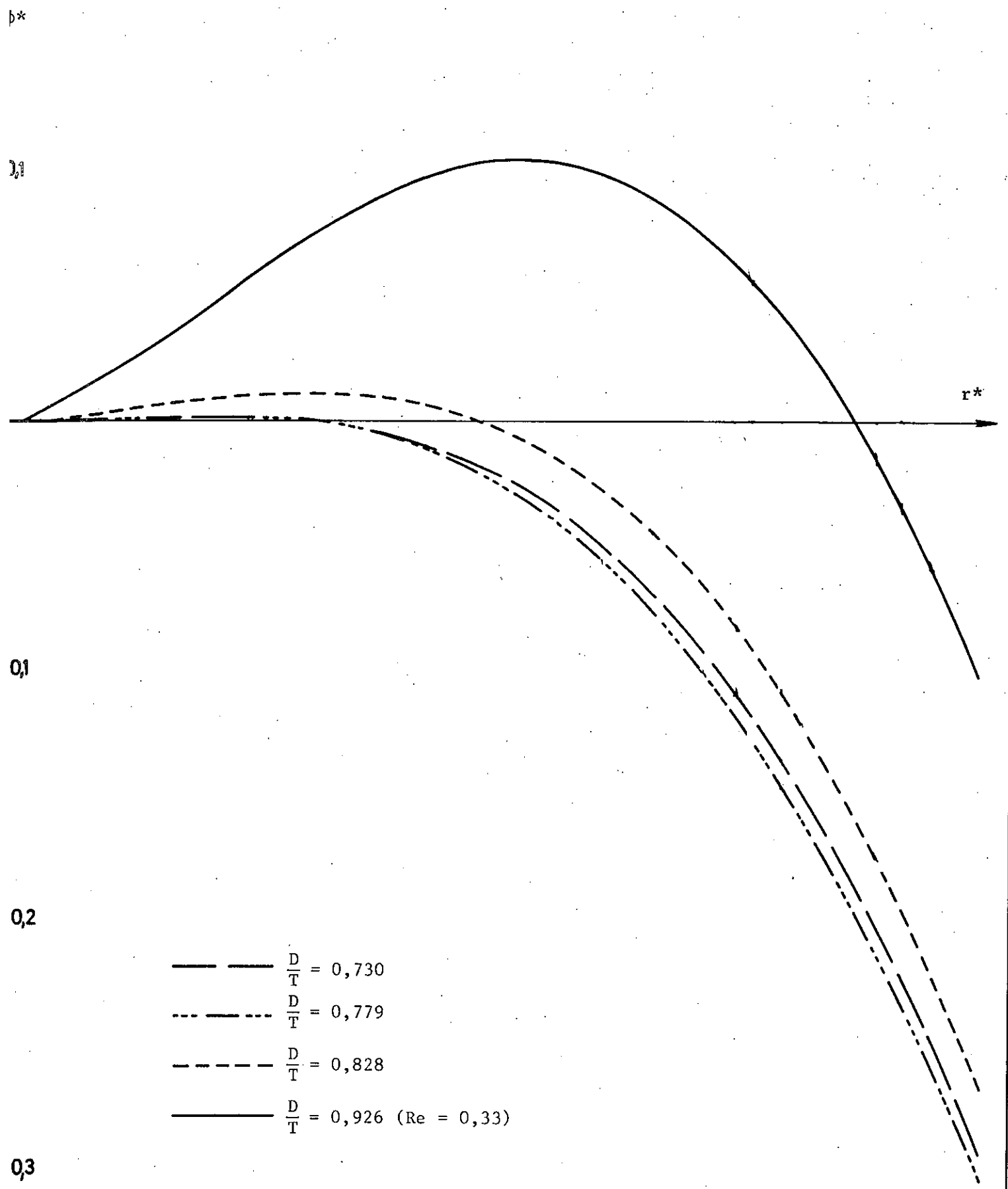


Fig. 5-5

ϕ^*

r^*

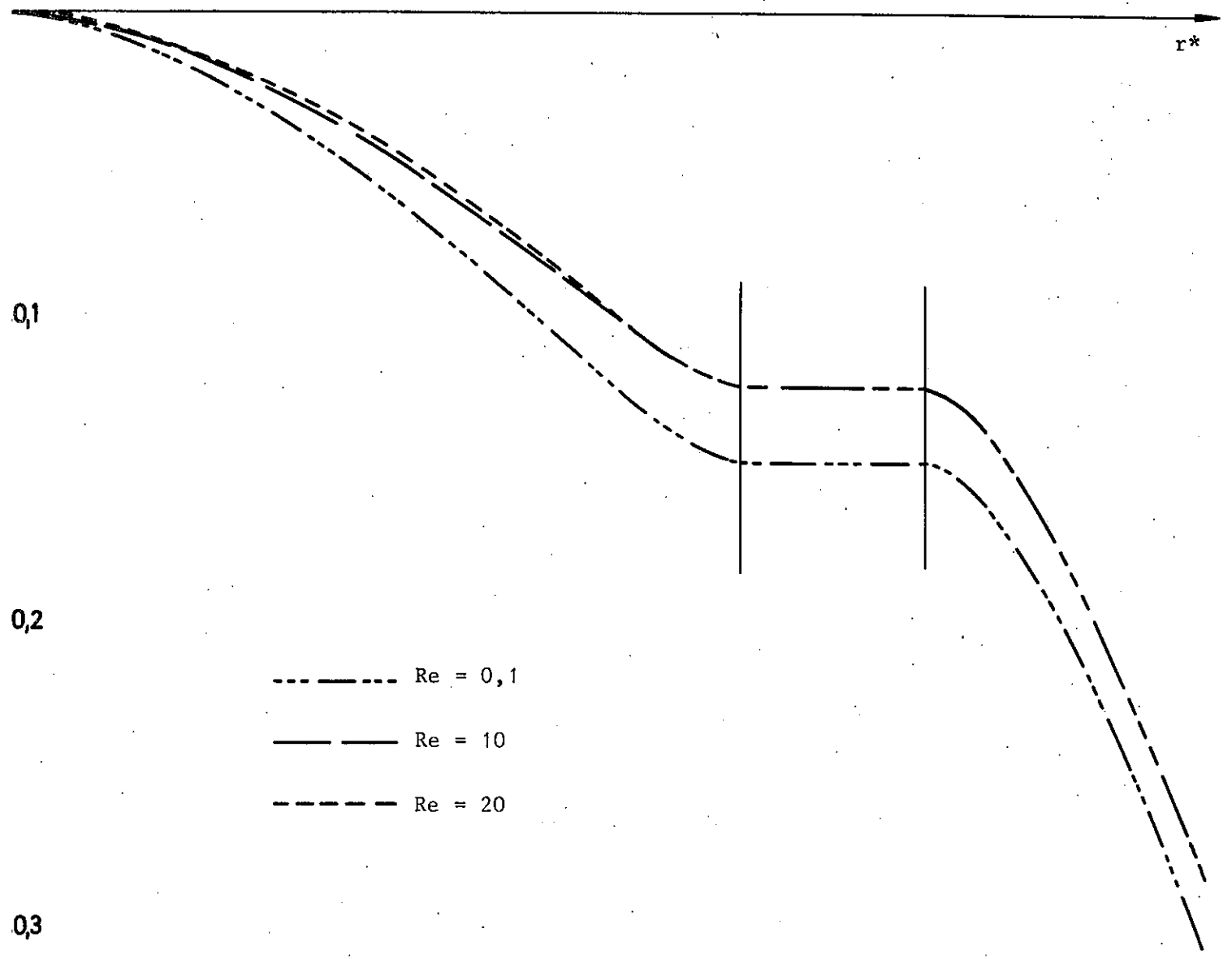


Fig. 5-6

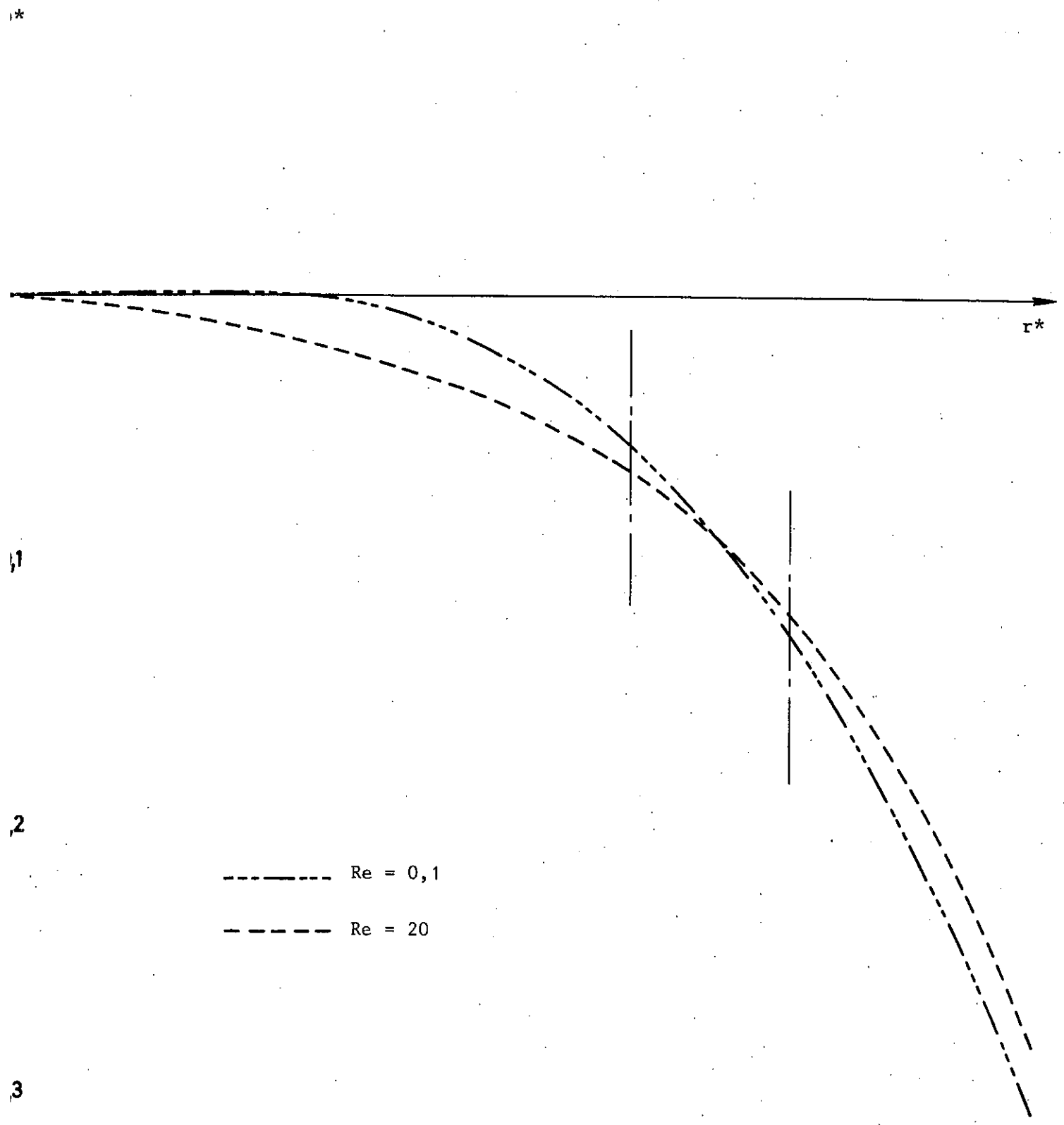


Fig. 5-7

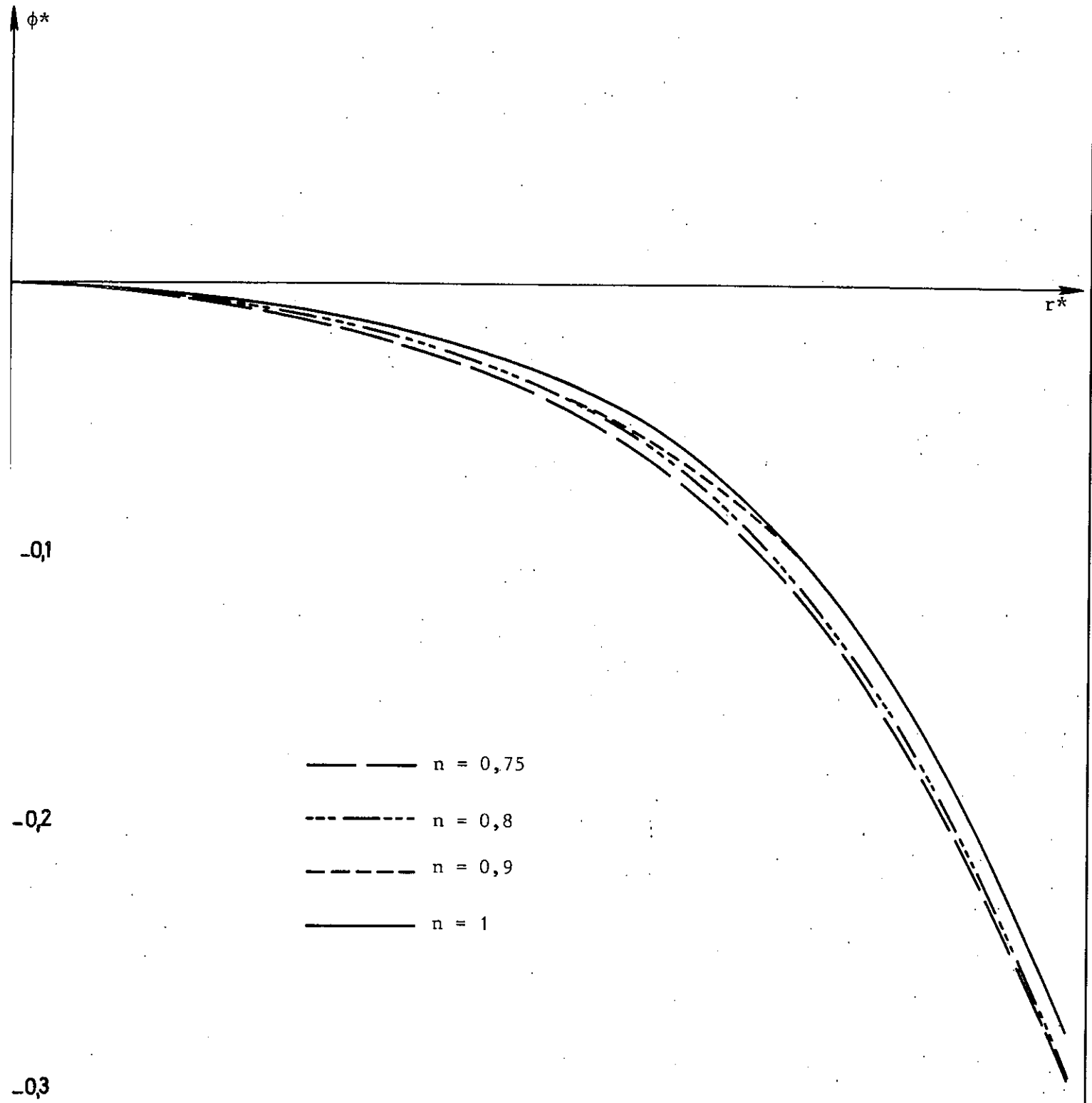


Fig. 5-8

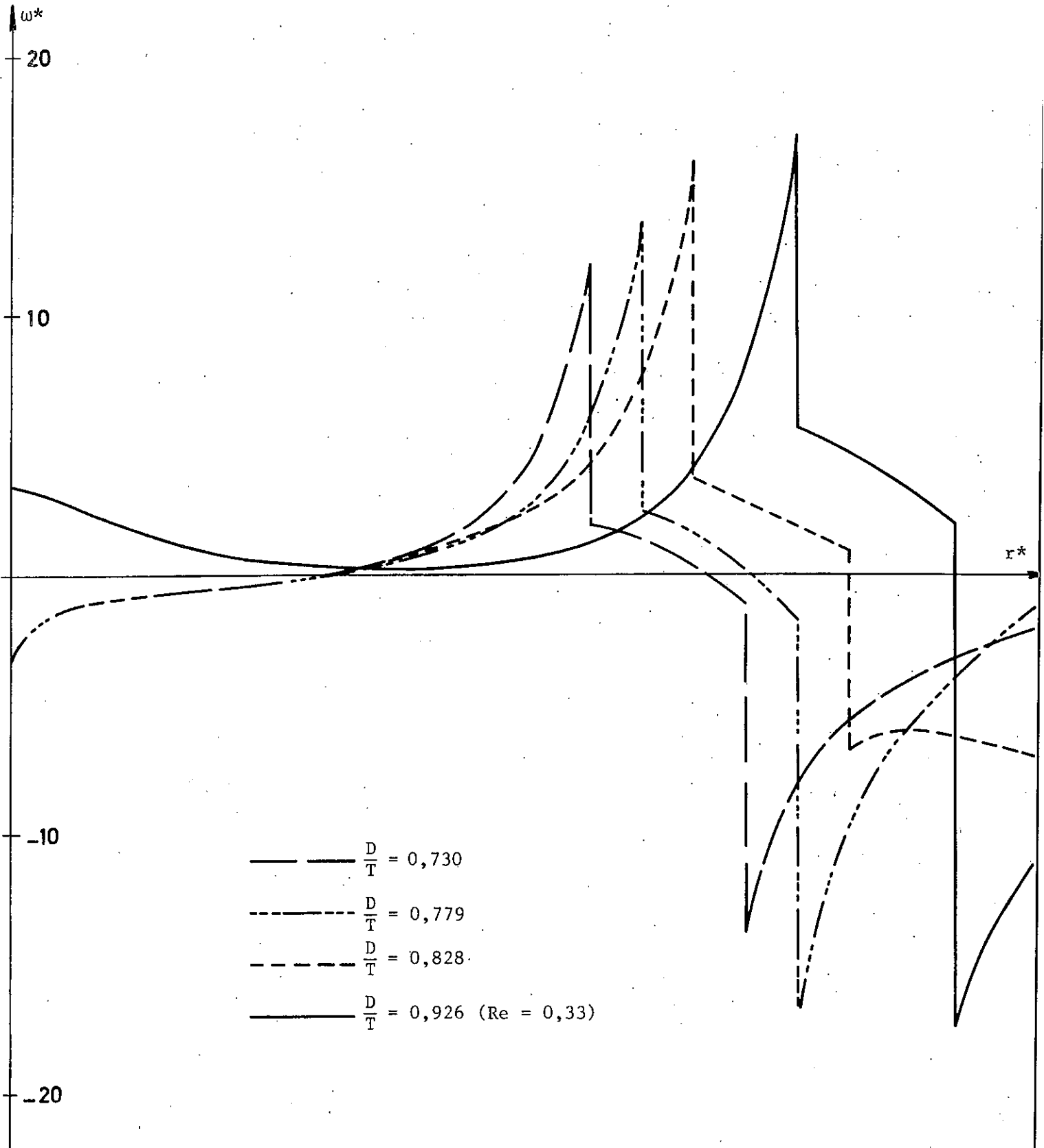


Fig. 5-9

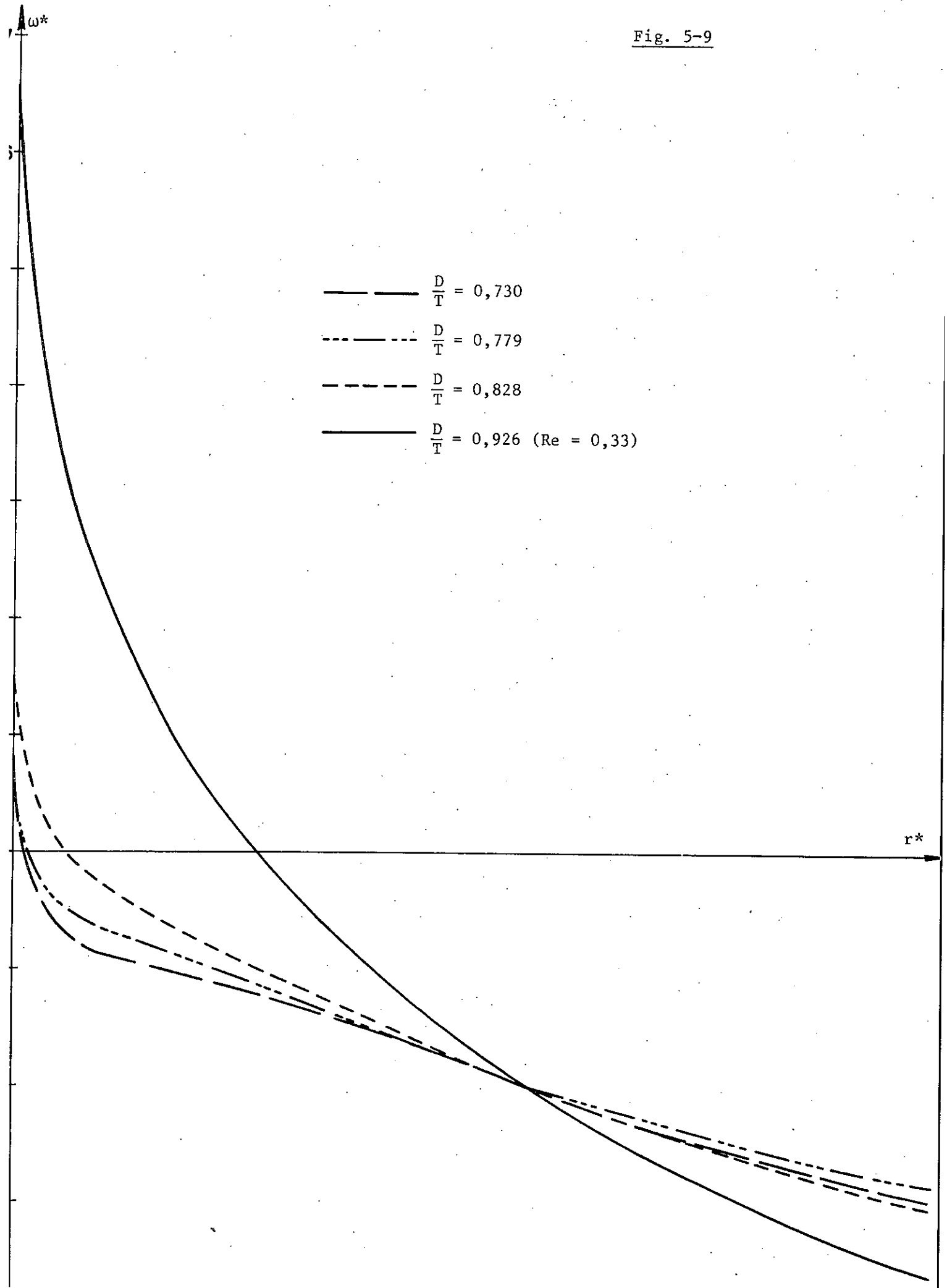


Fig. 5-10

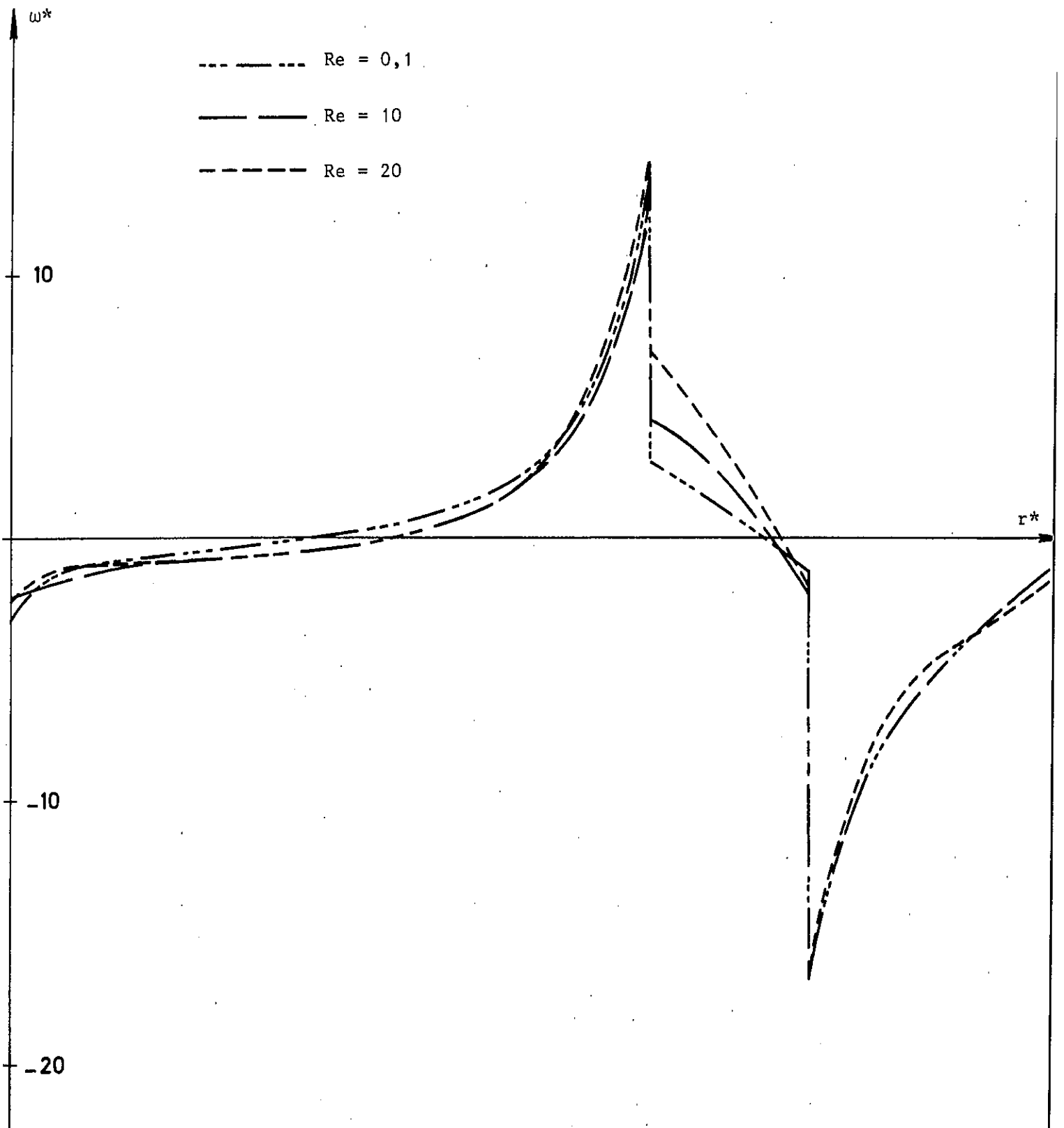


Fig. 5-11

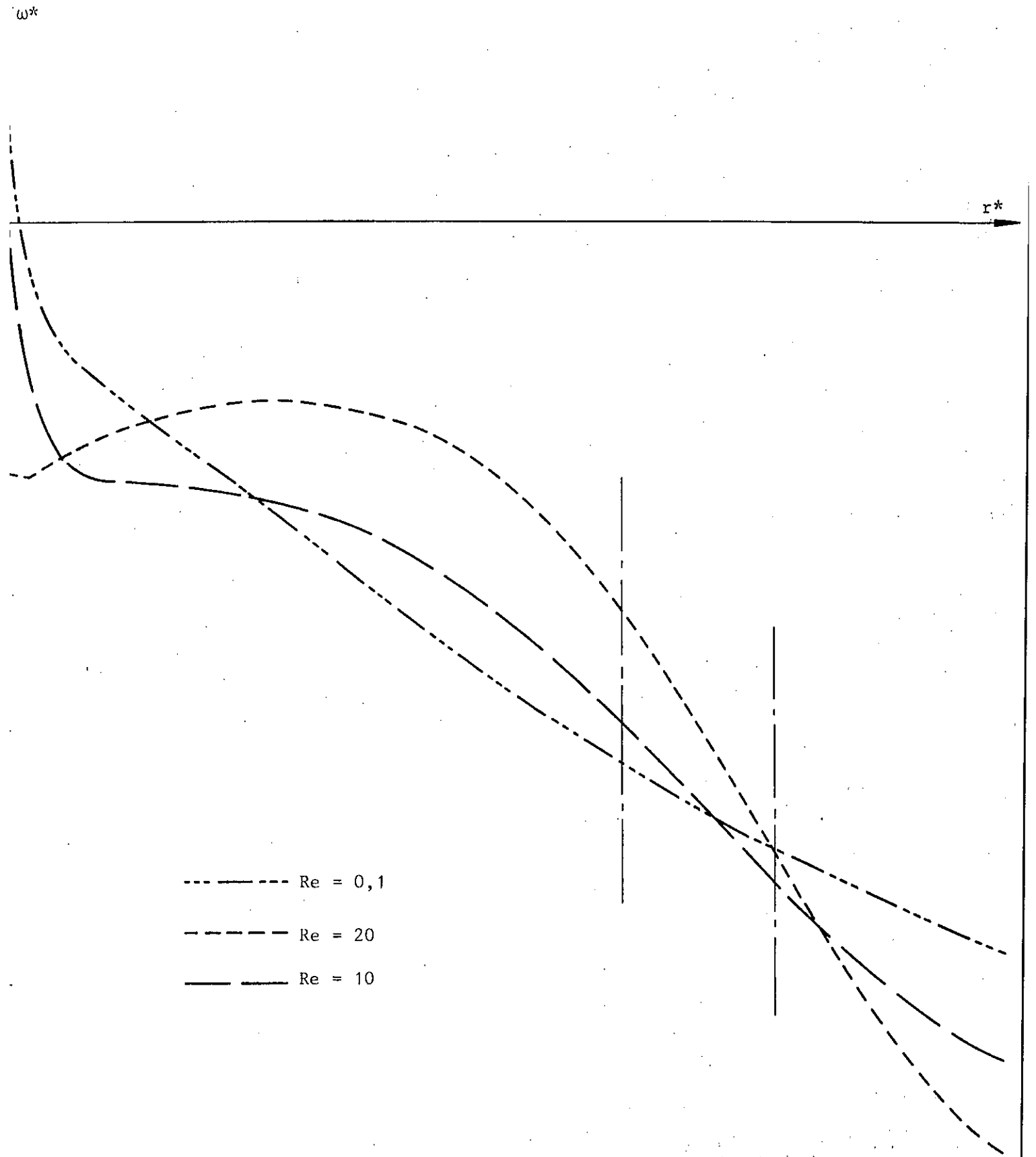


Fig. 5-12

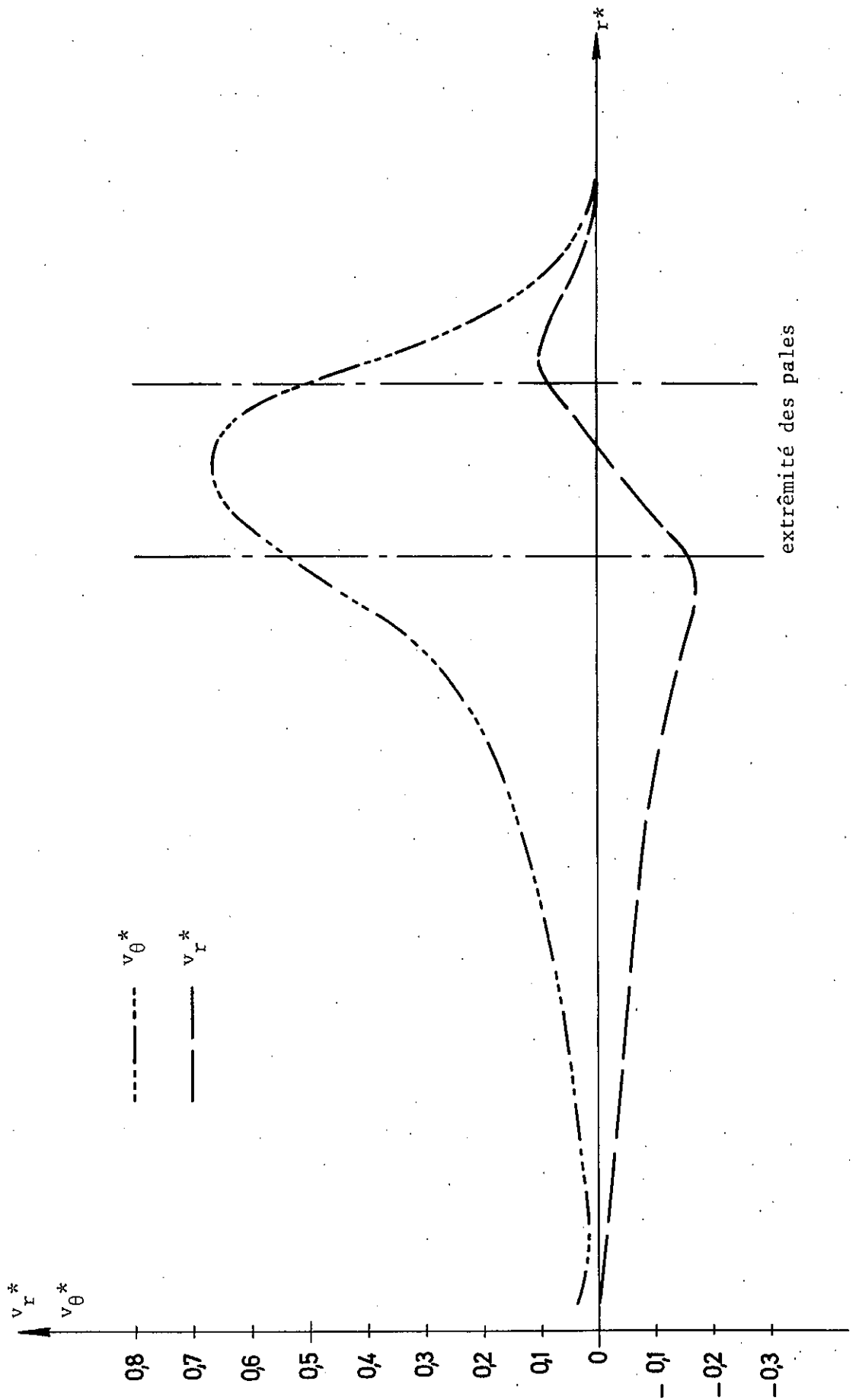


Fig. 5-13

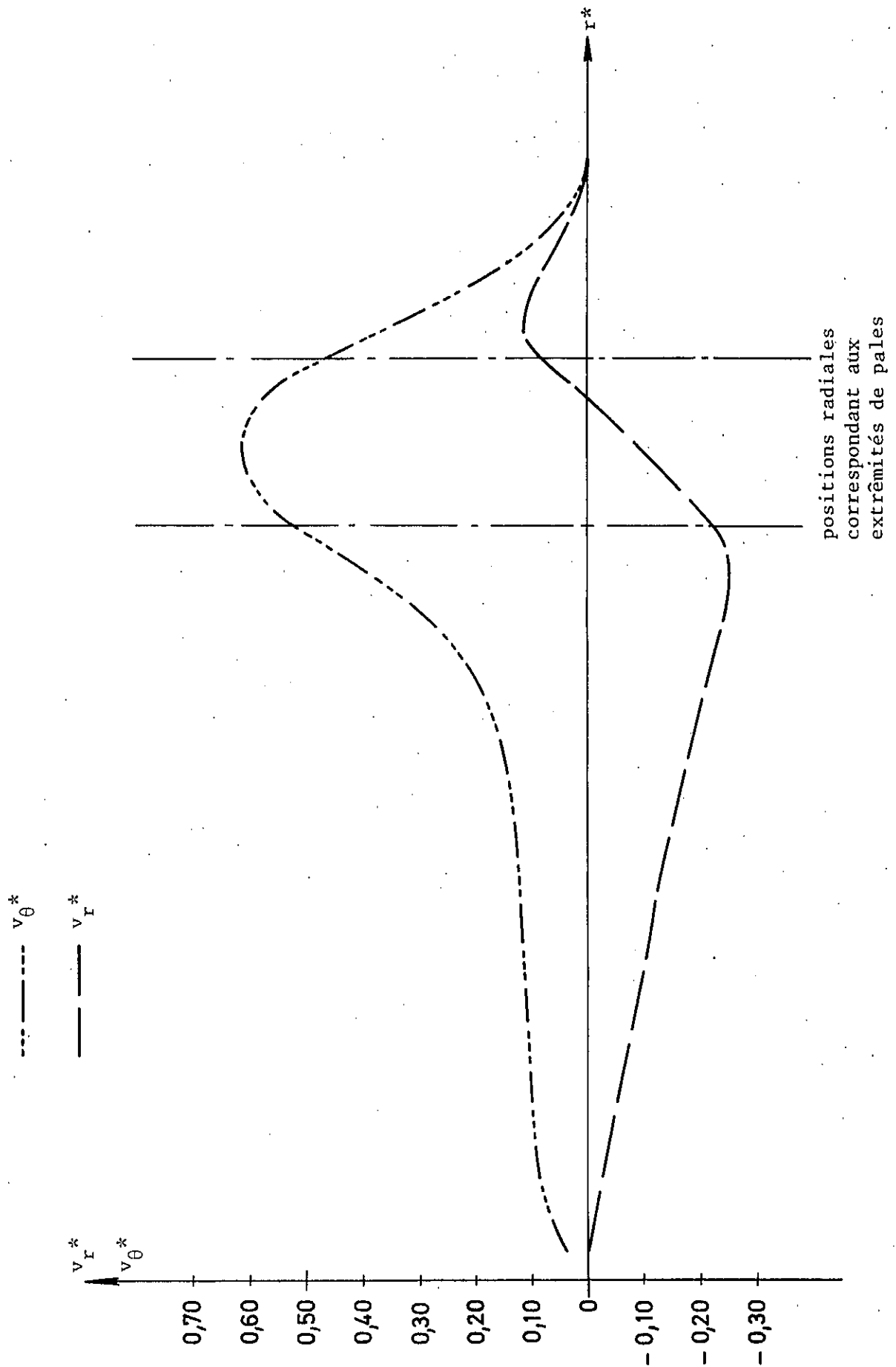


Fig. 5-14

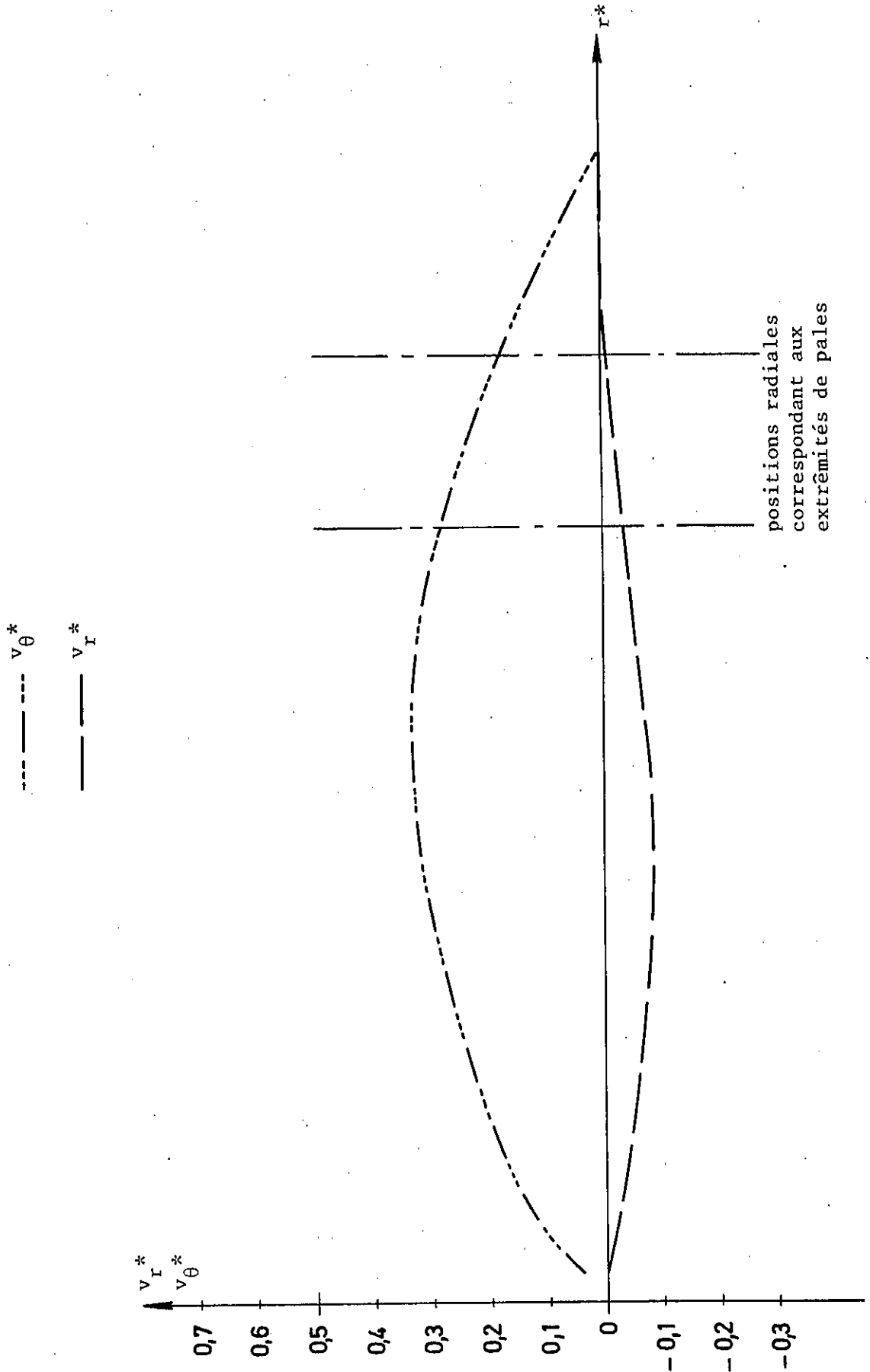


Fig. 5-15

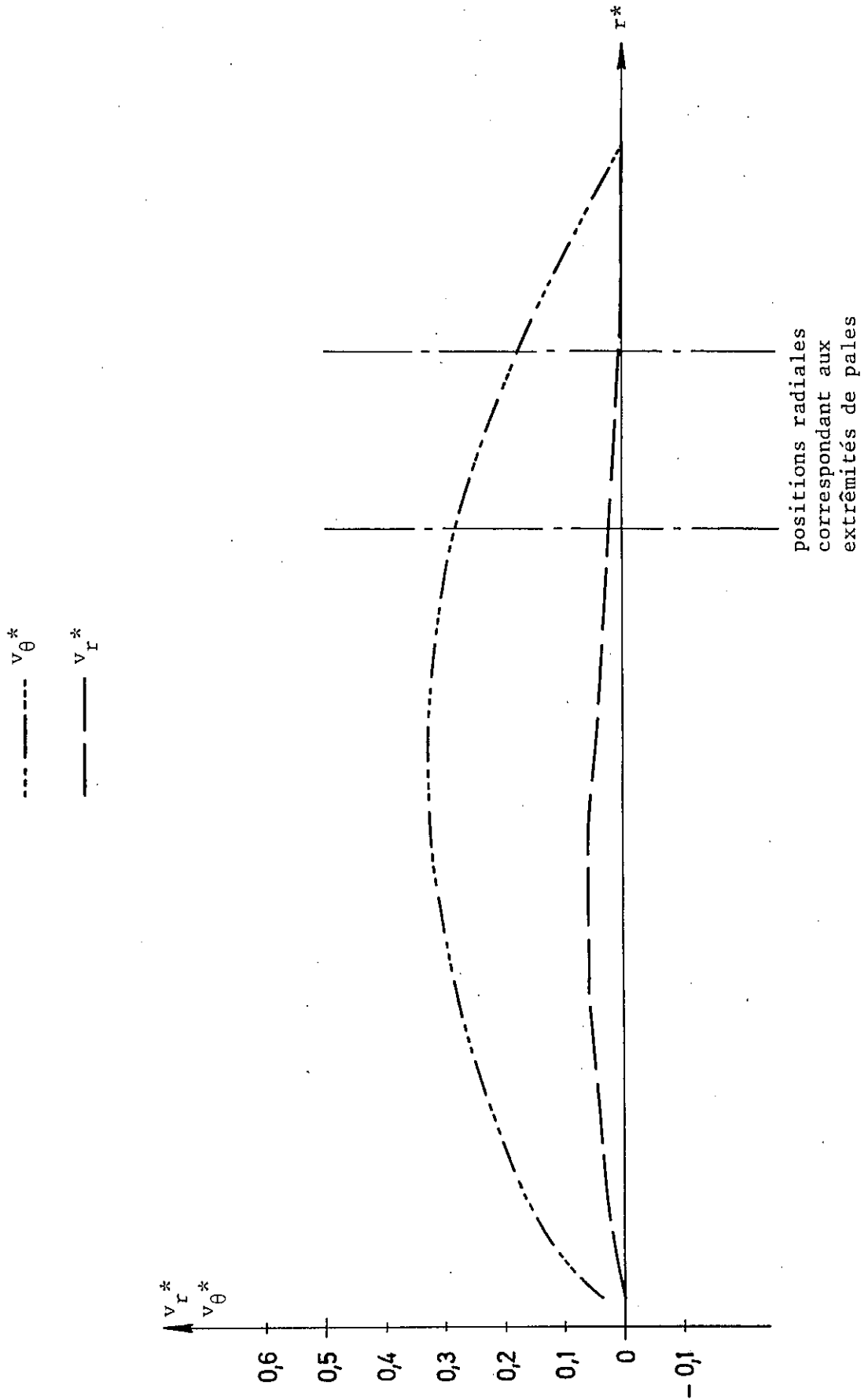


Fig. 5-16

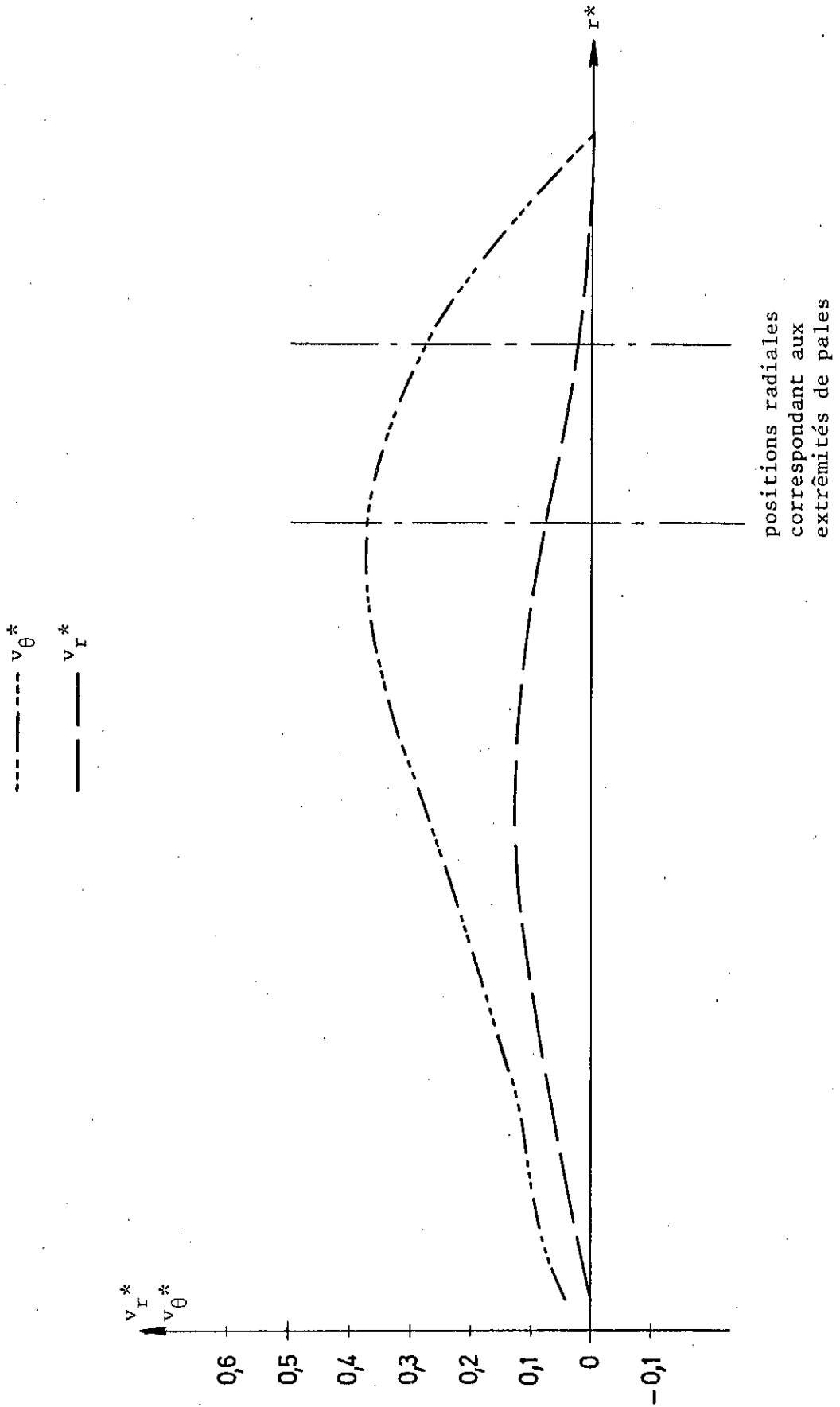


Fig. 5-17

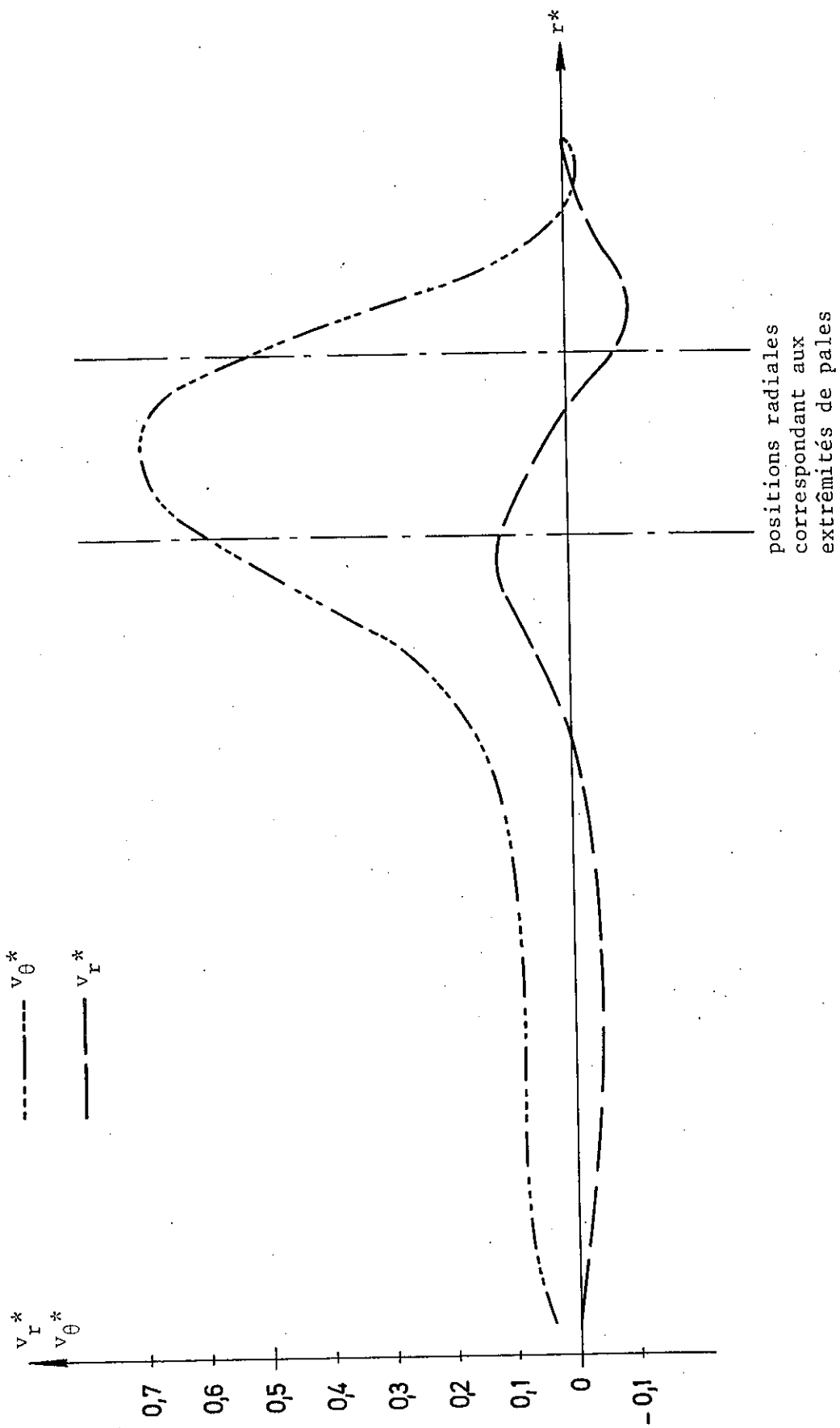


Fig. 5-18

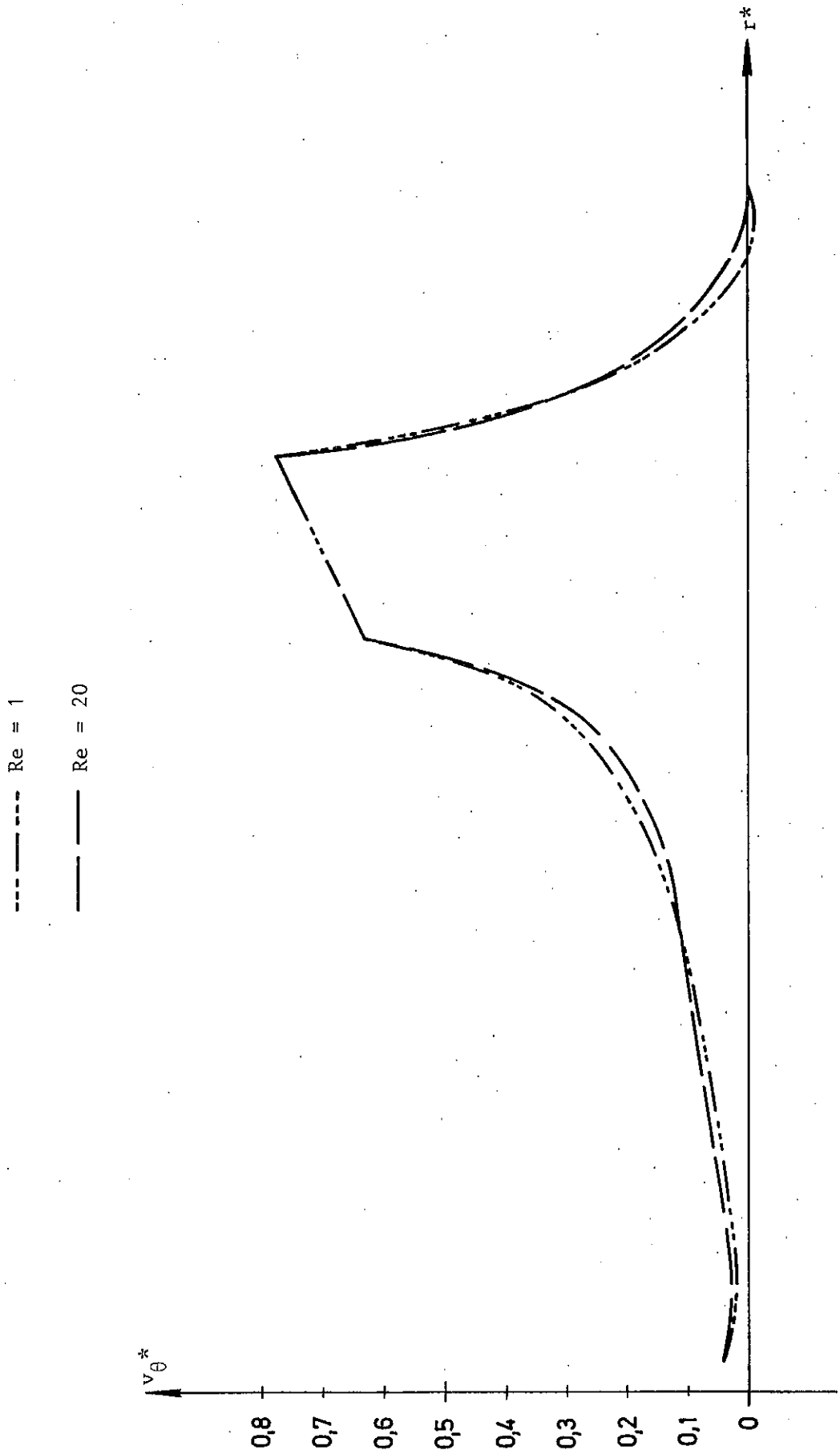


Fig. 5-19

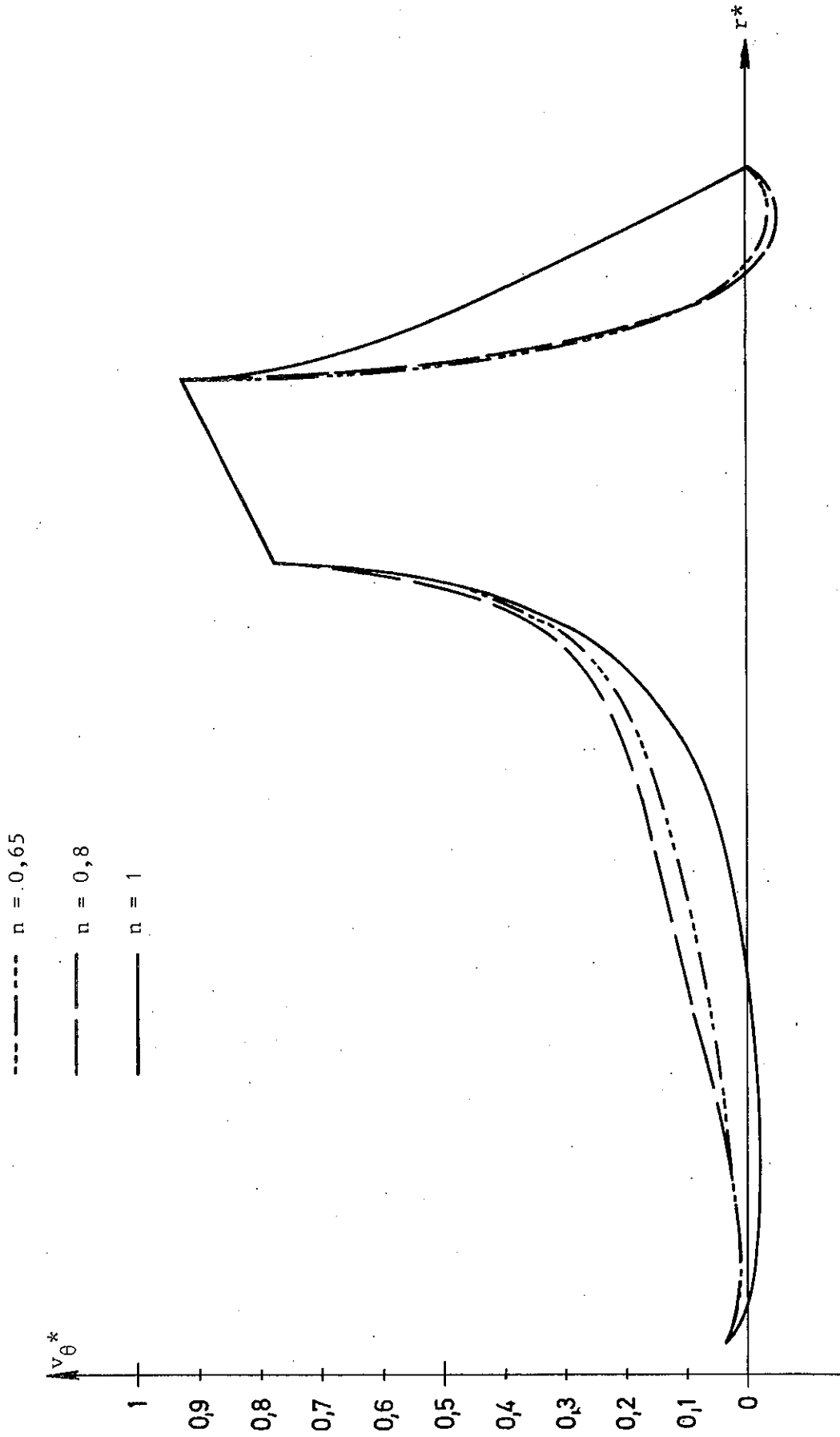


Fig. 5-20

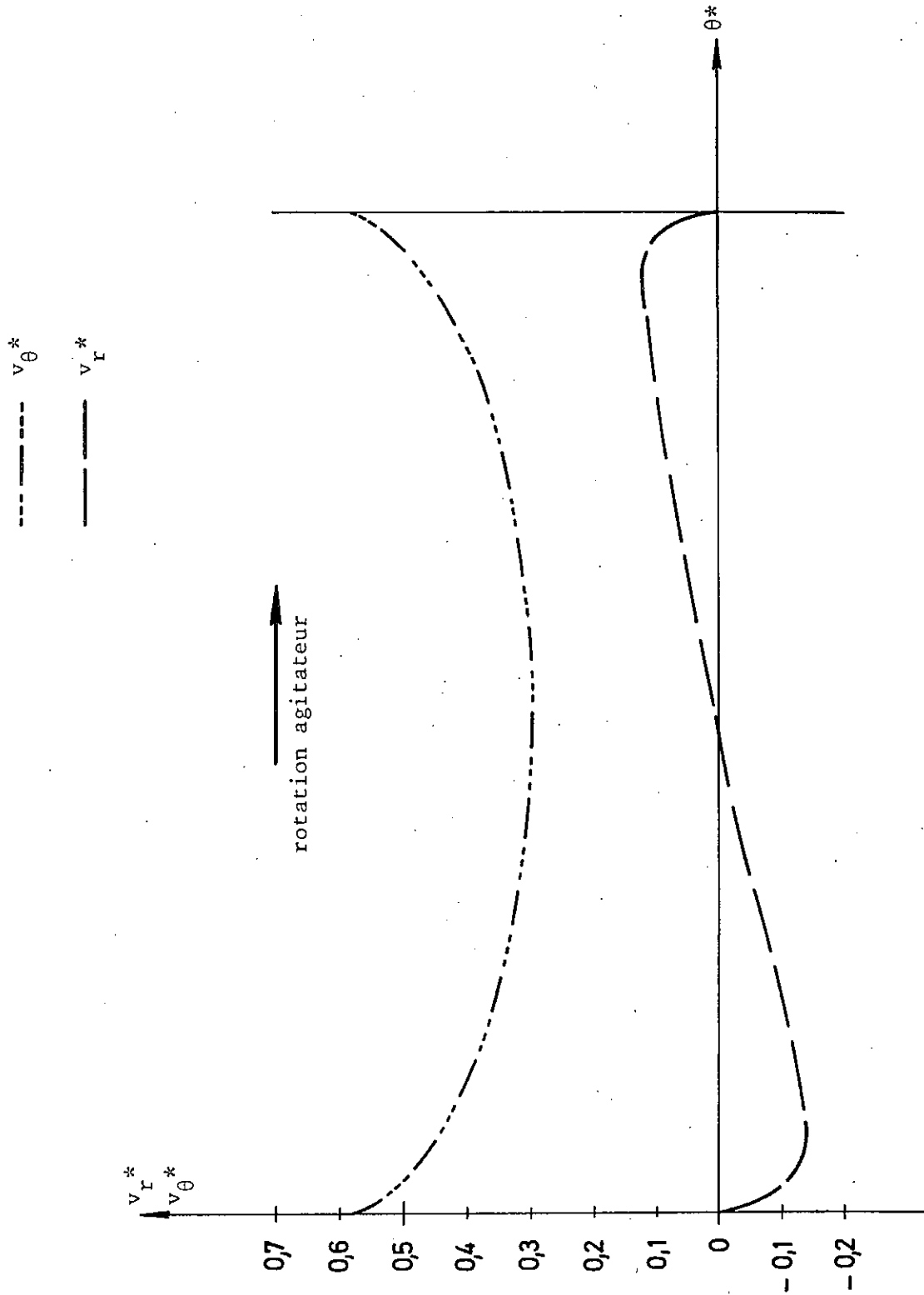


Fig. 5-21

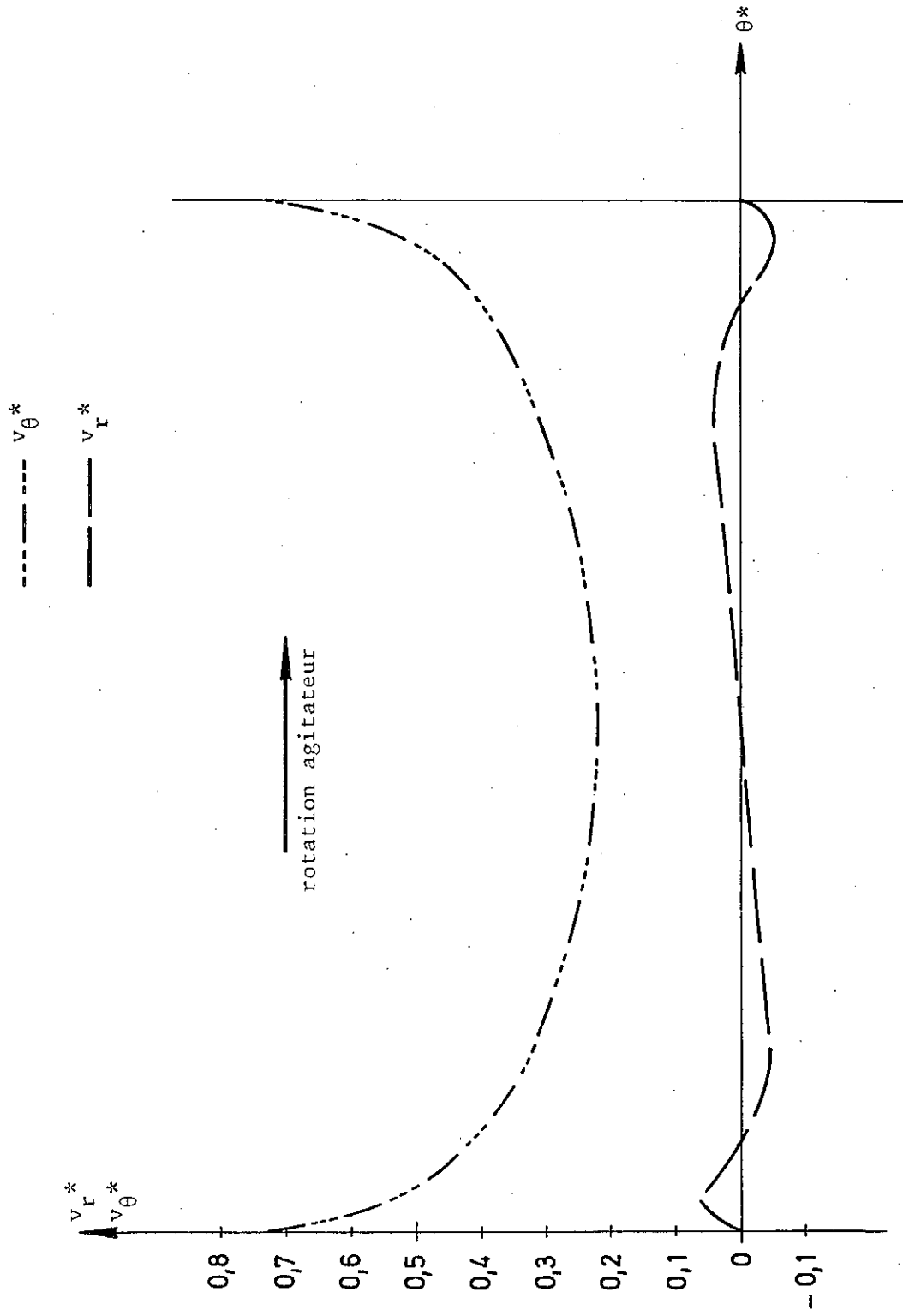


Fig. 5-22

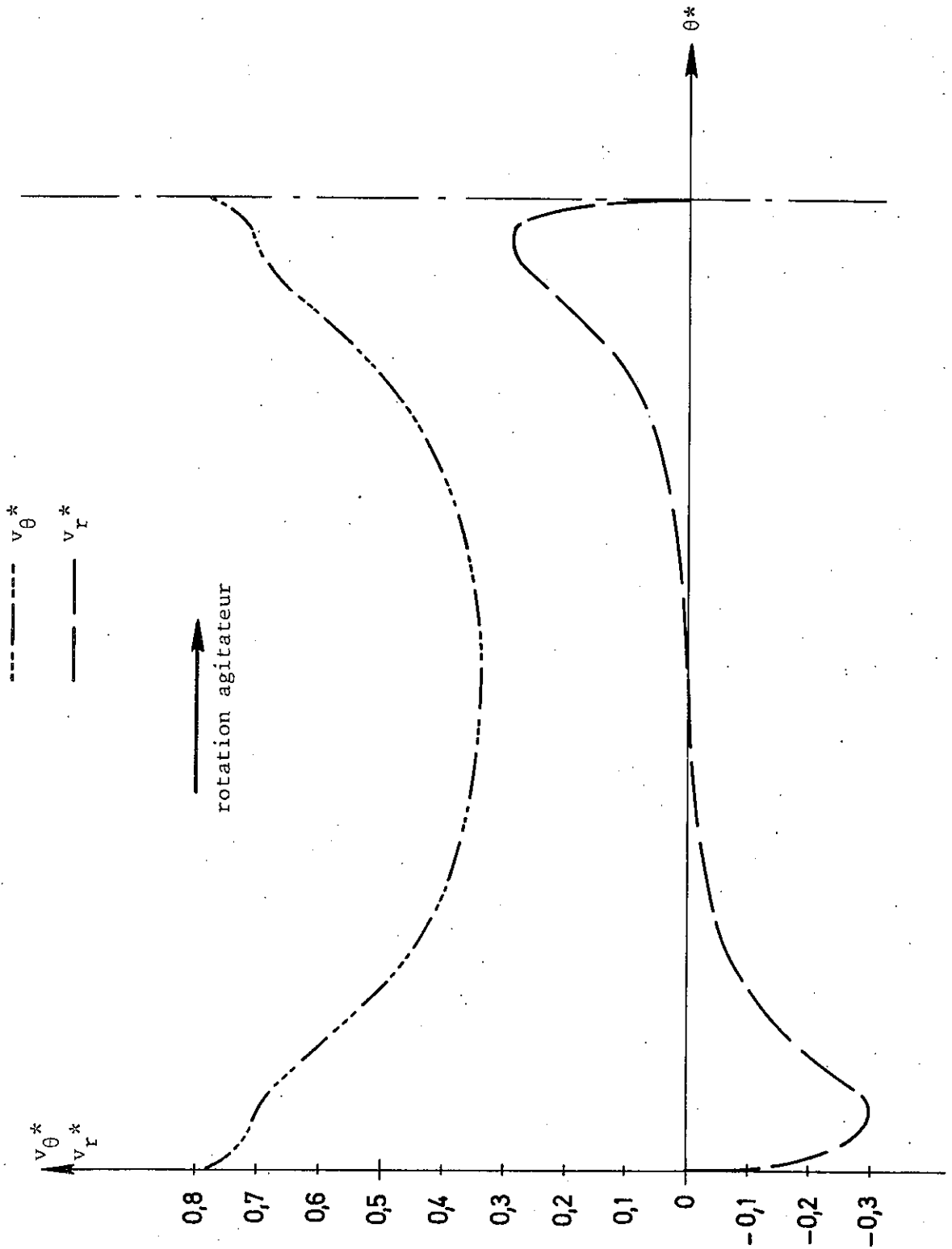


Fig. 5-23

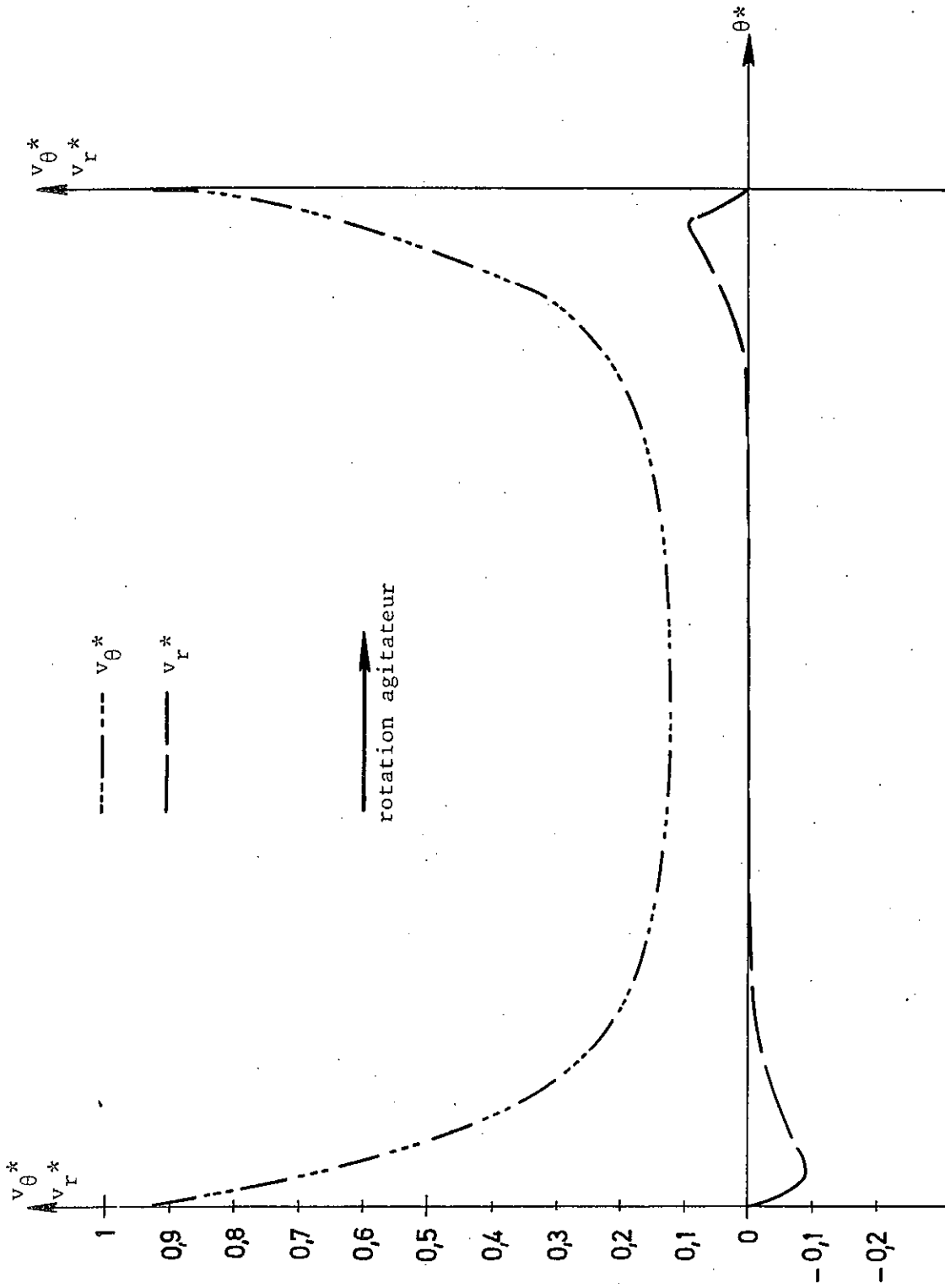


Fig. 5-24

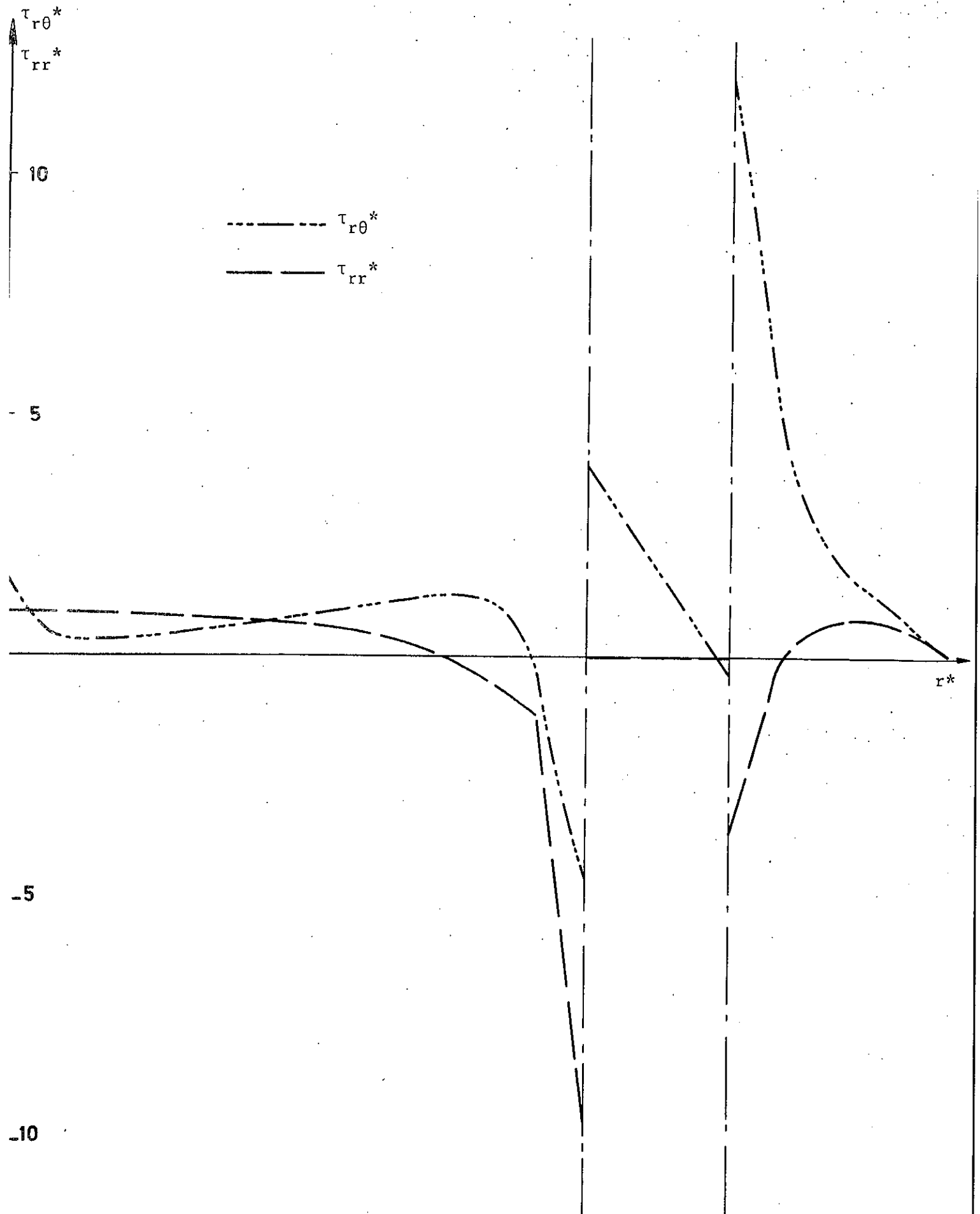


Fig. 5-25

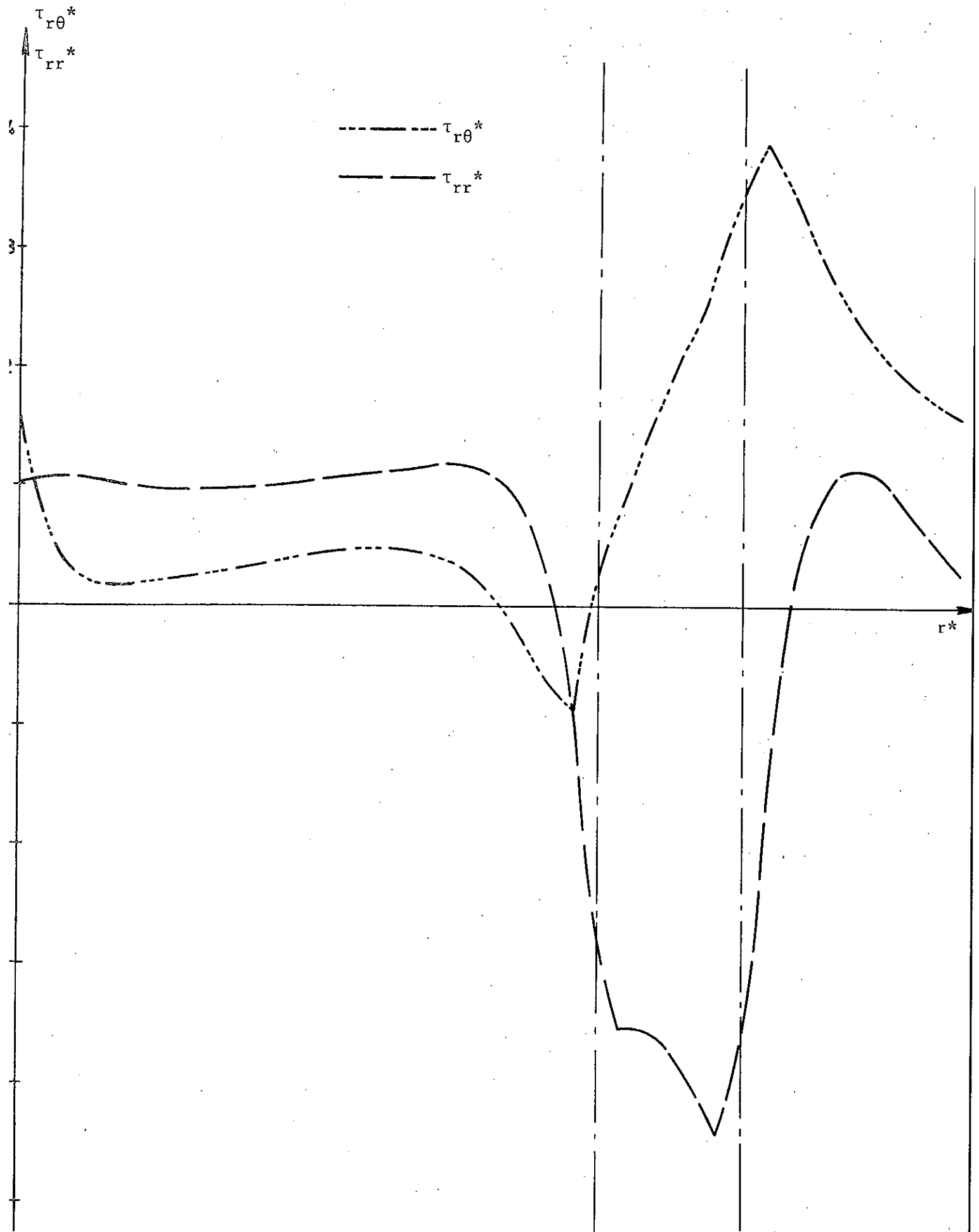


Fig. 5-26

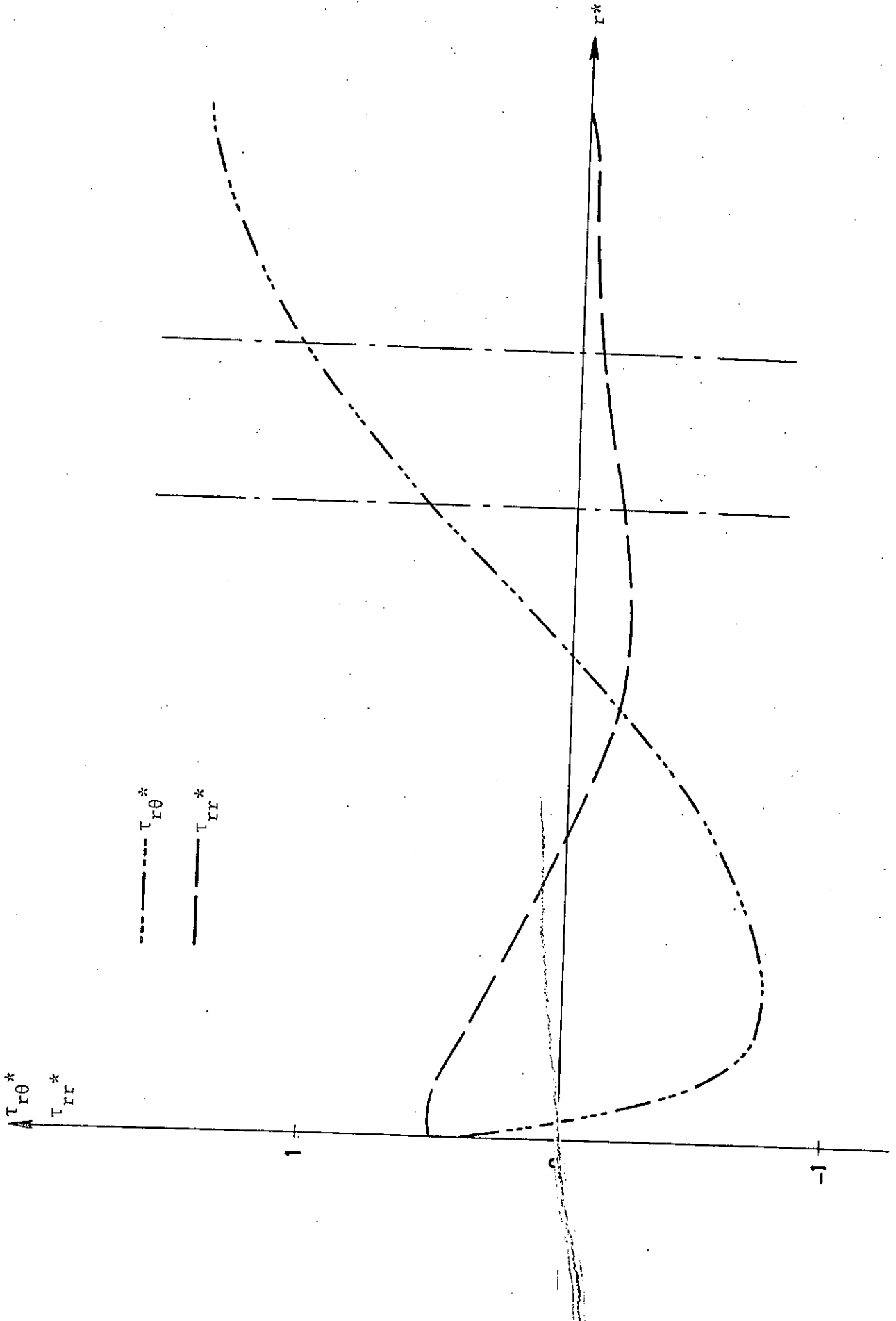


Fig. 5-27

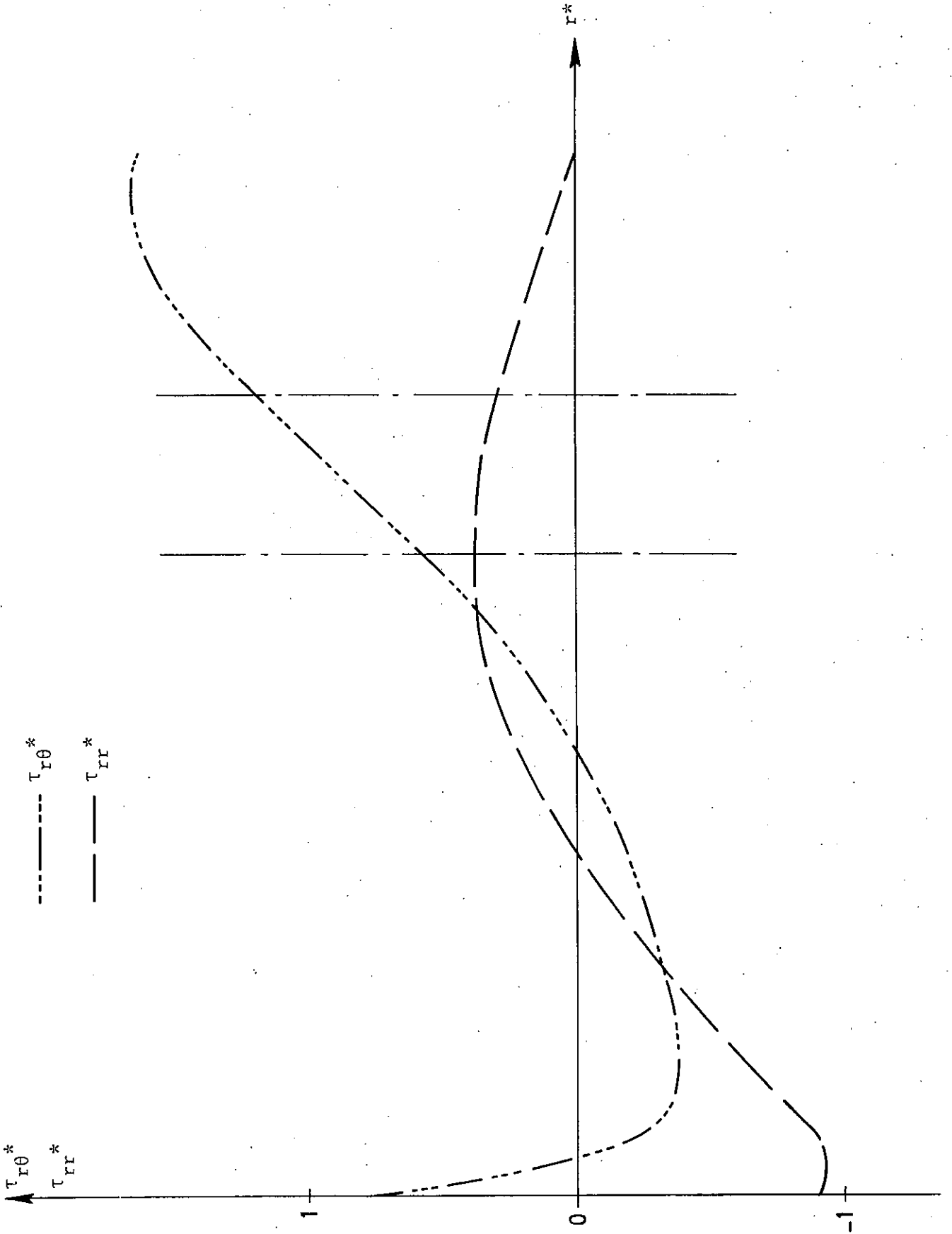


Fig. 5-28

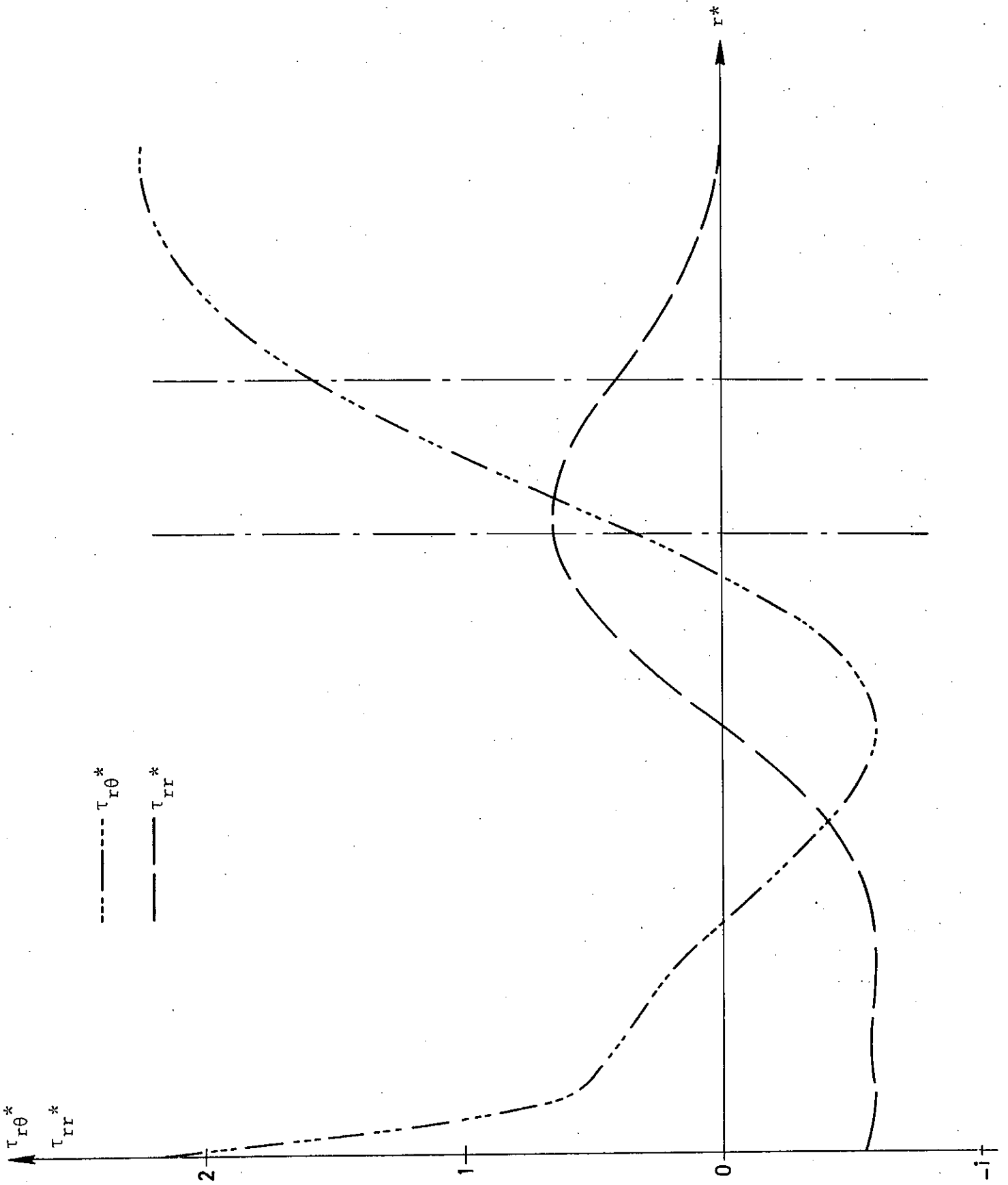


Fig. 5-29

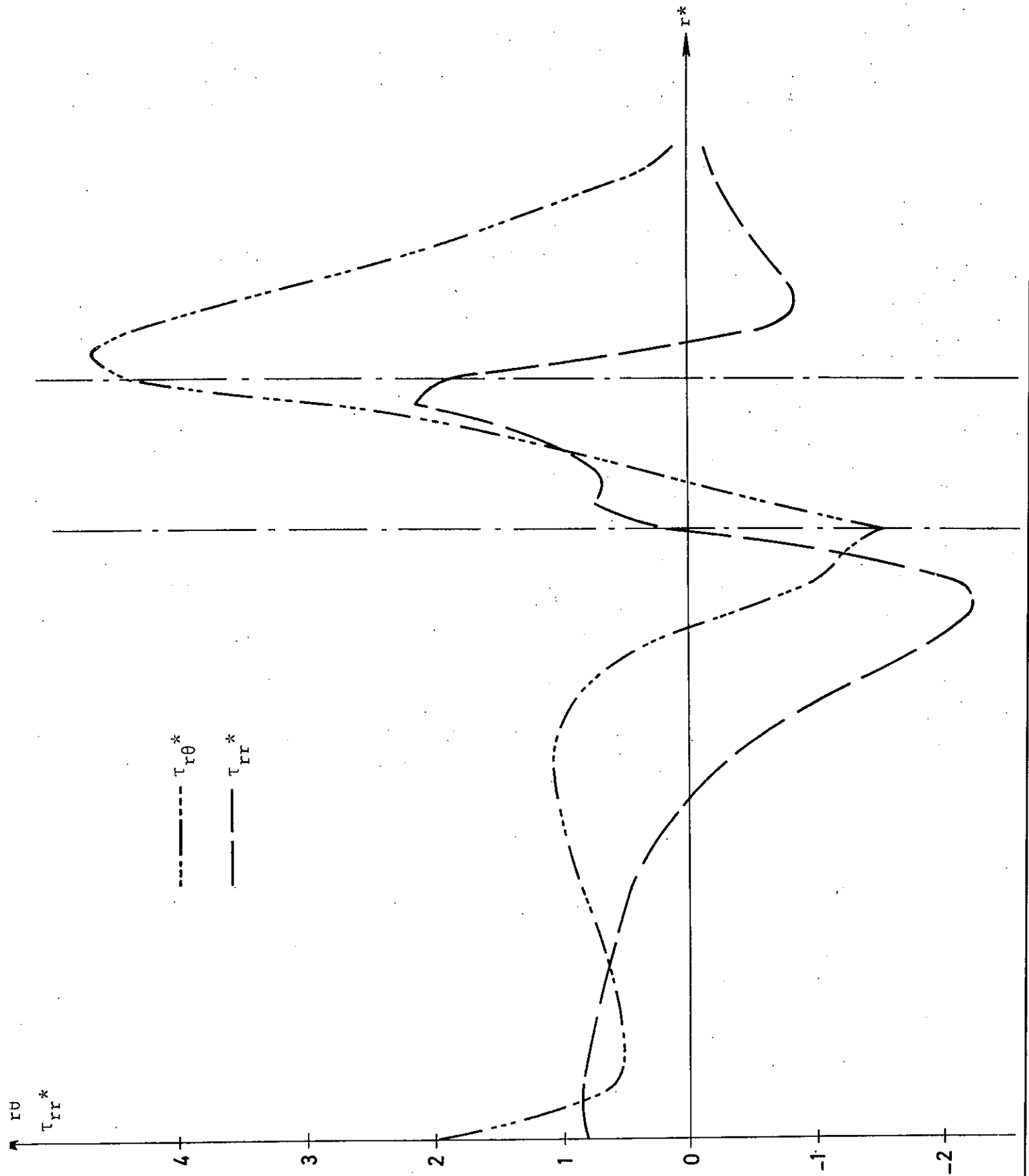


Fig. 5-30

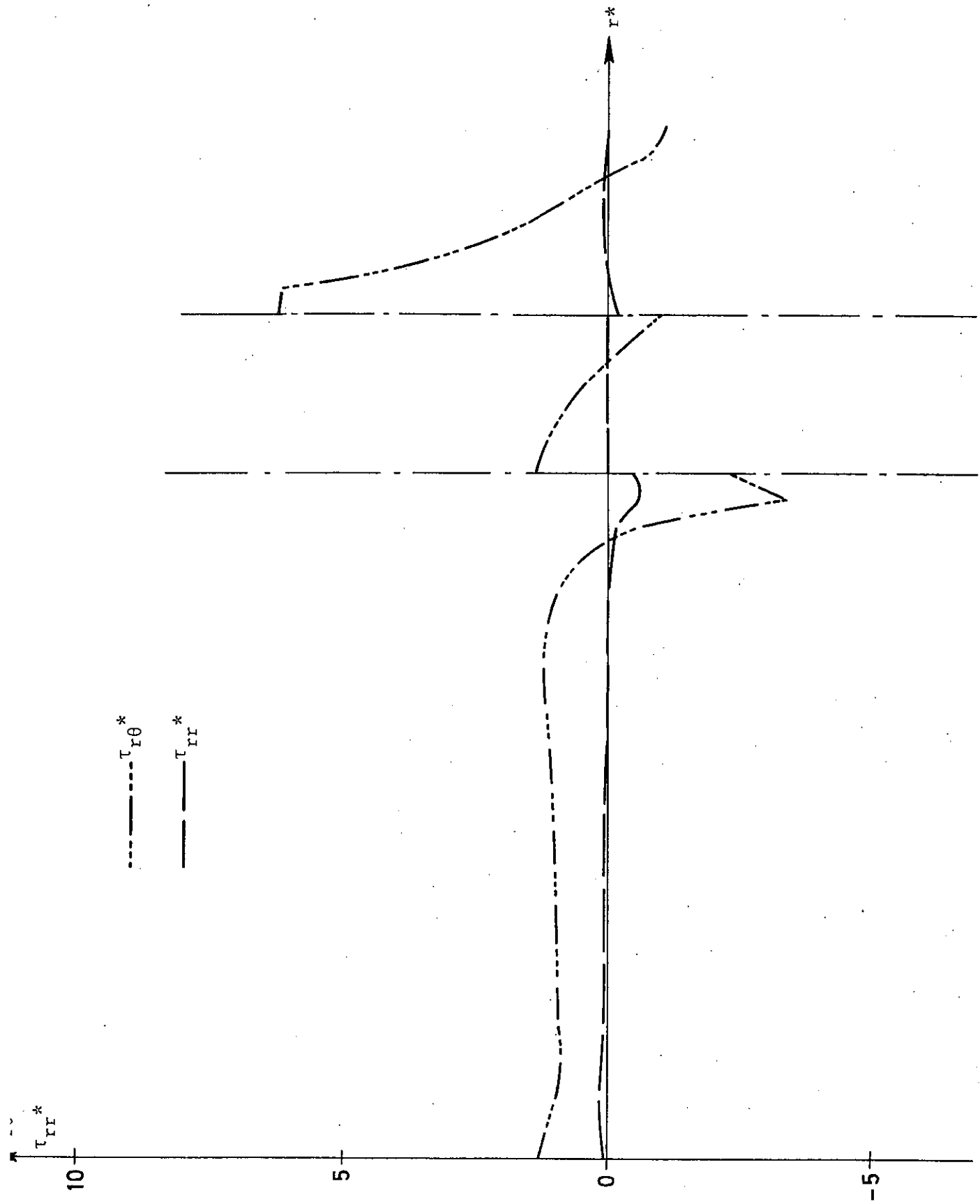


Fig. 5-31

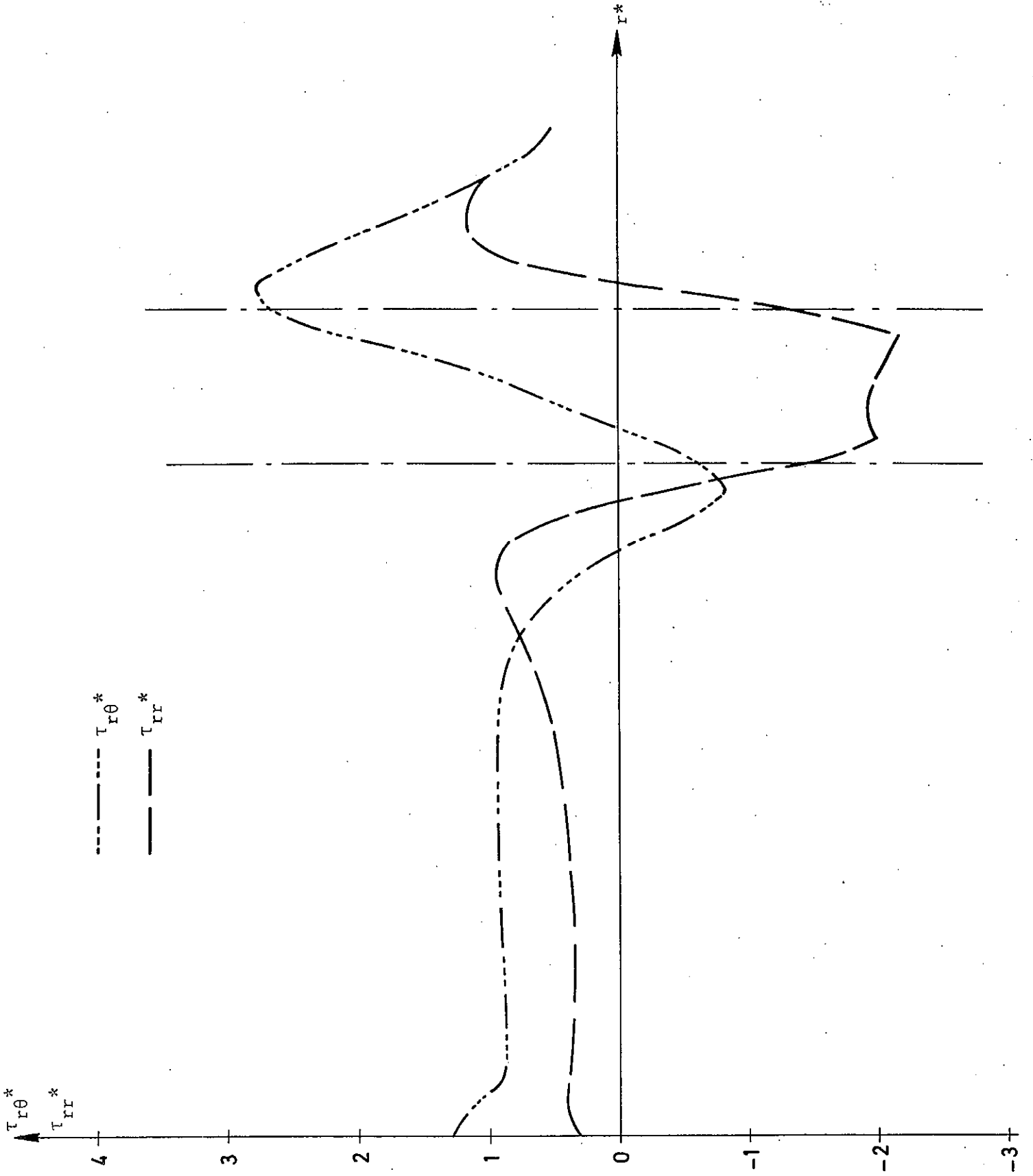


Fig. 5-32

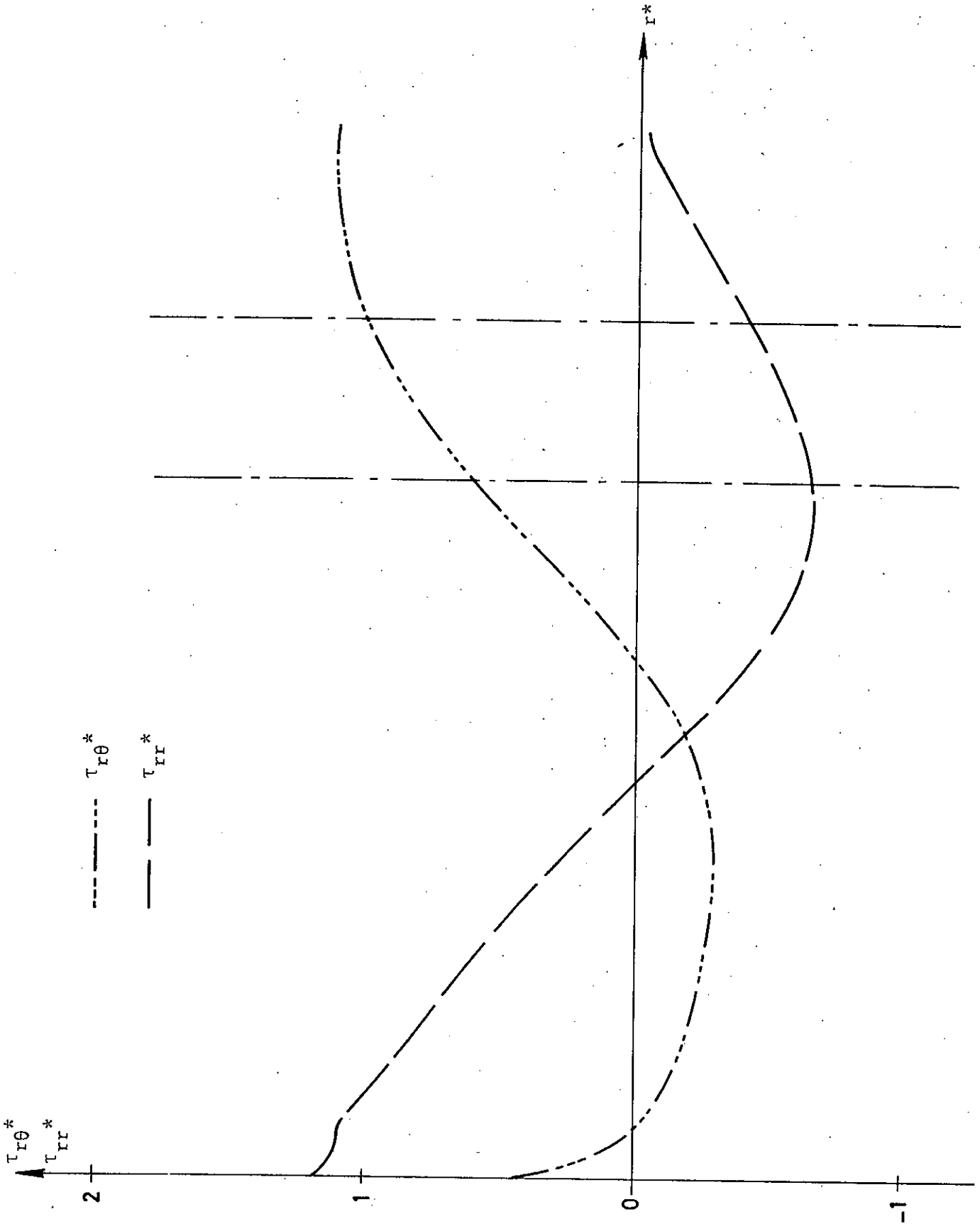


Fig. 5-33

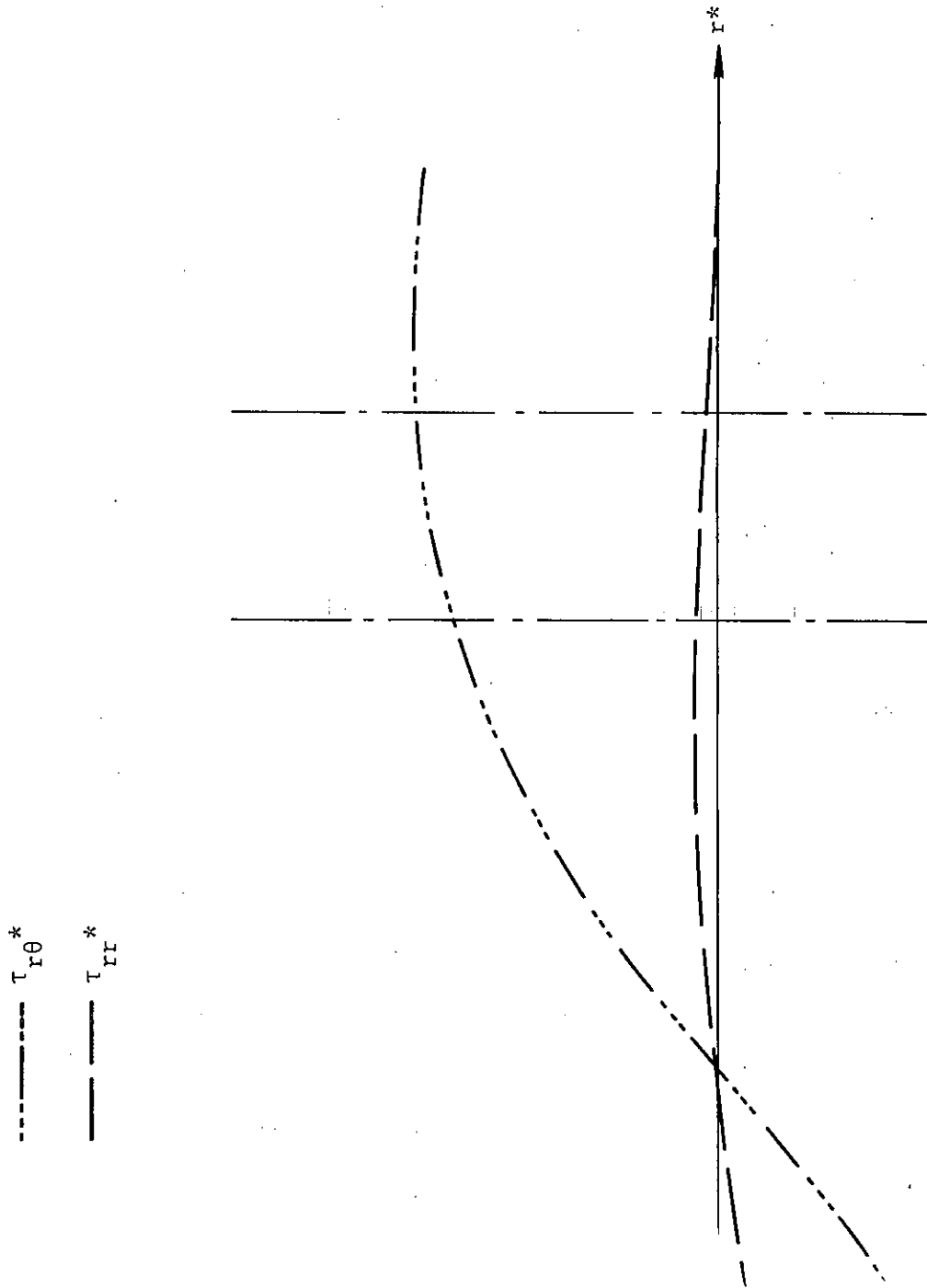


Fig. 5-34

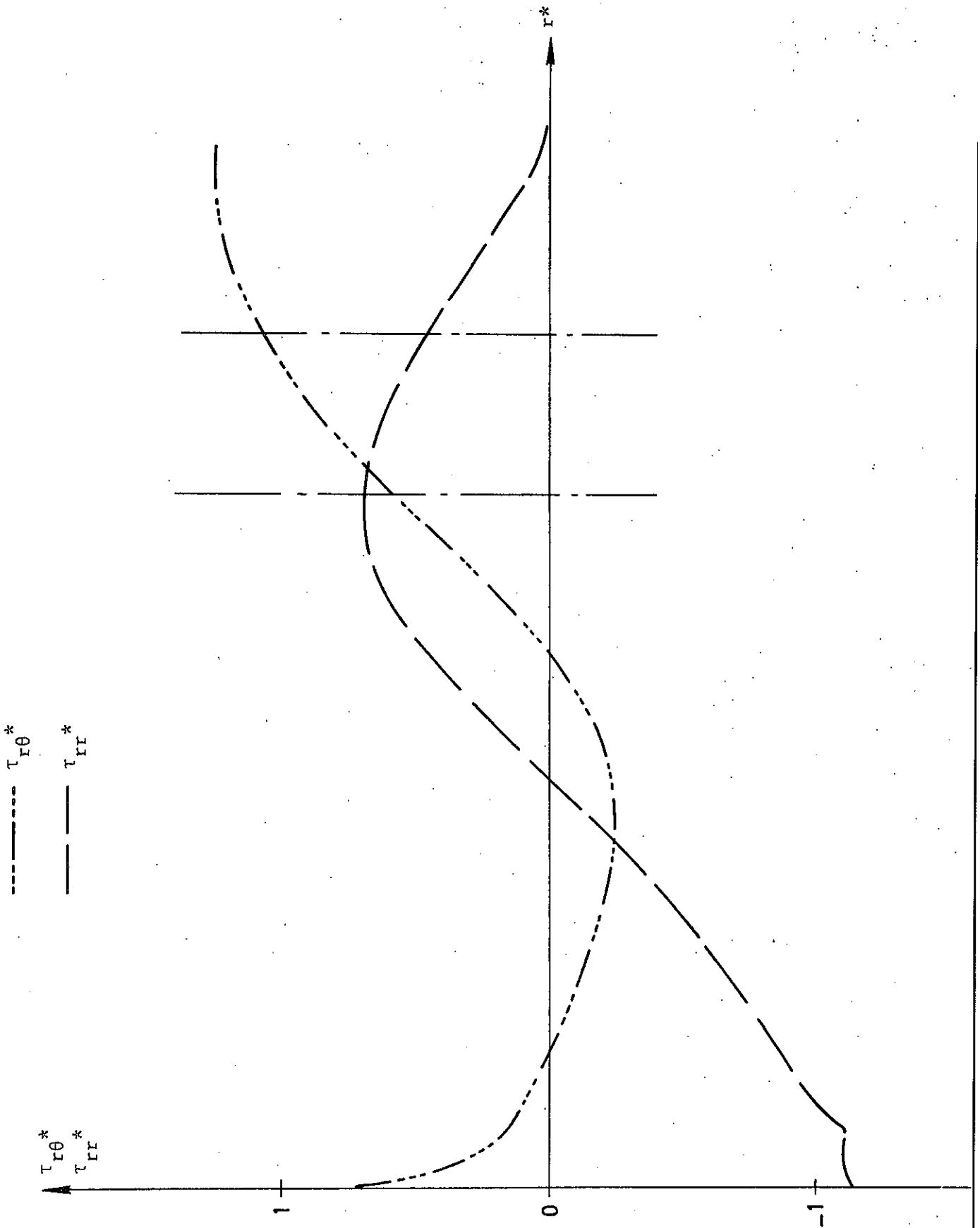


Fig. 5-35

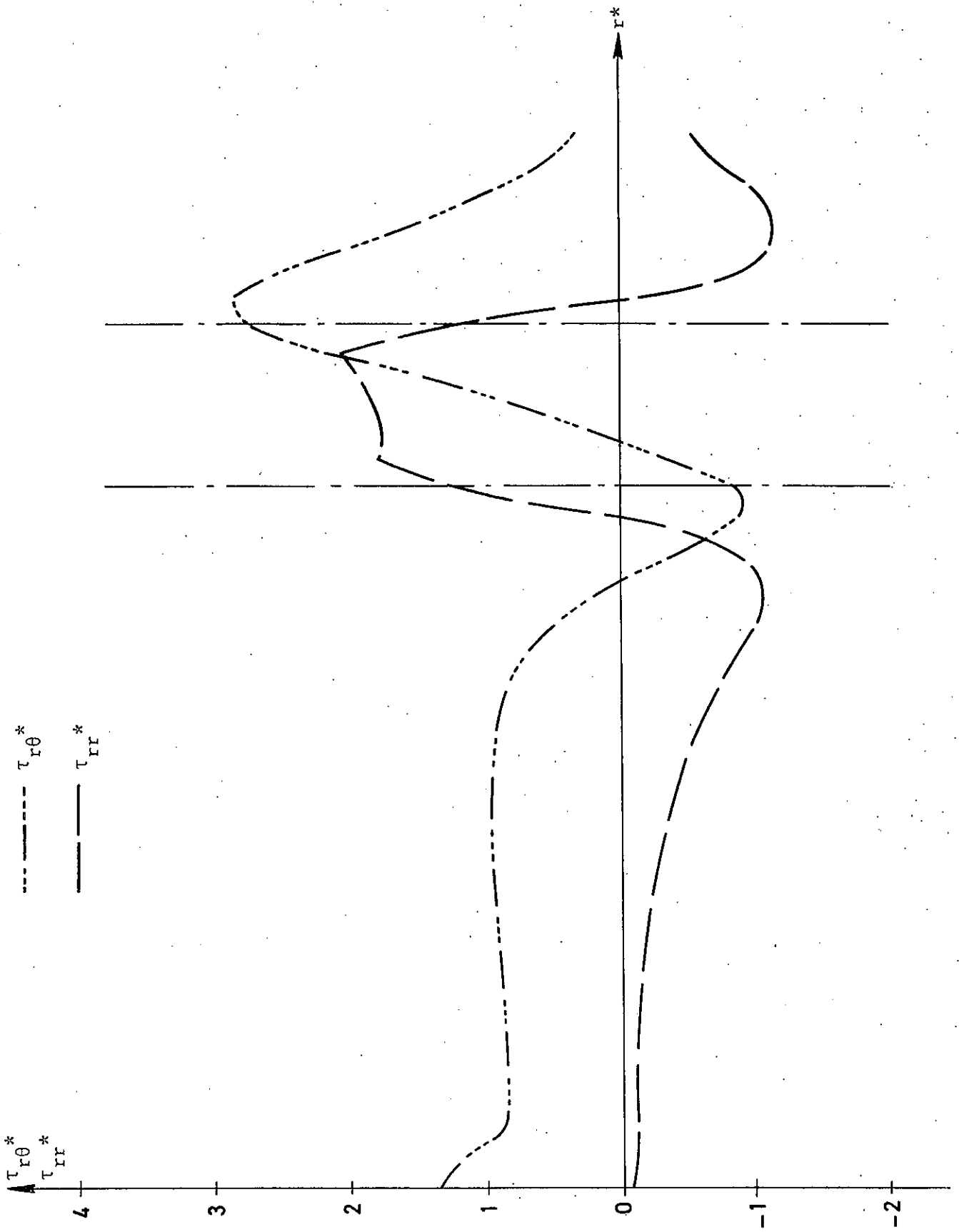


Fig. 5-36

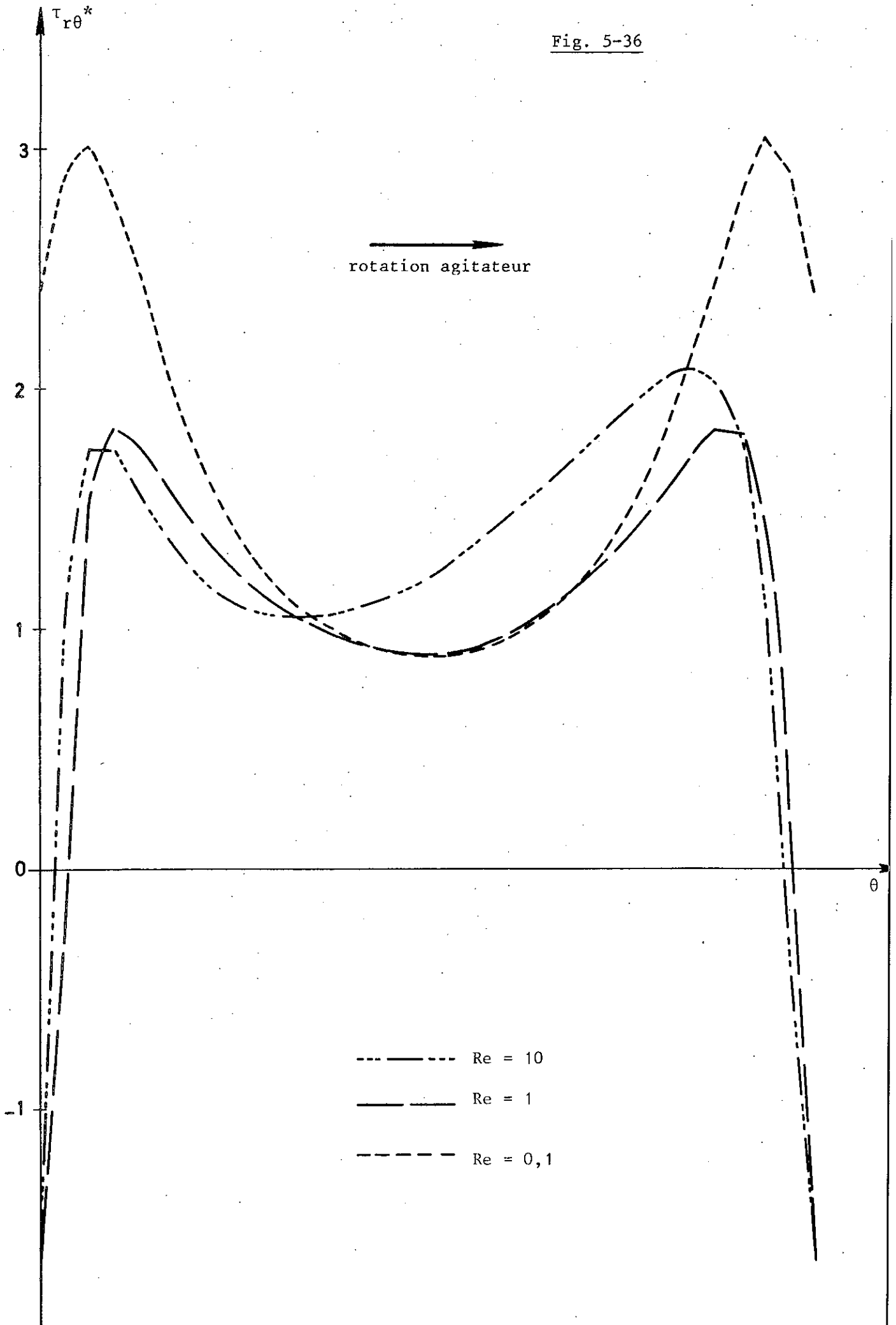


Fig. 5-37

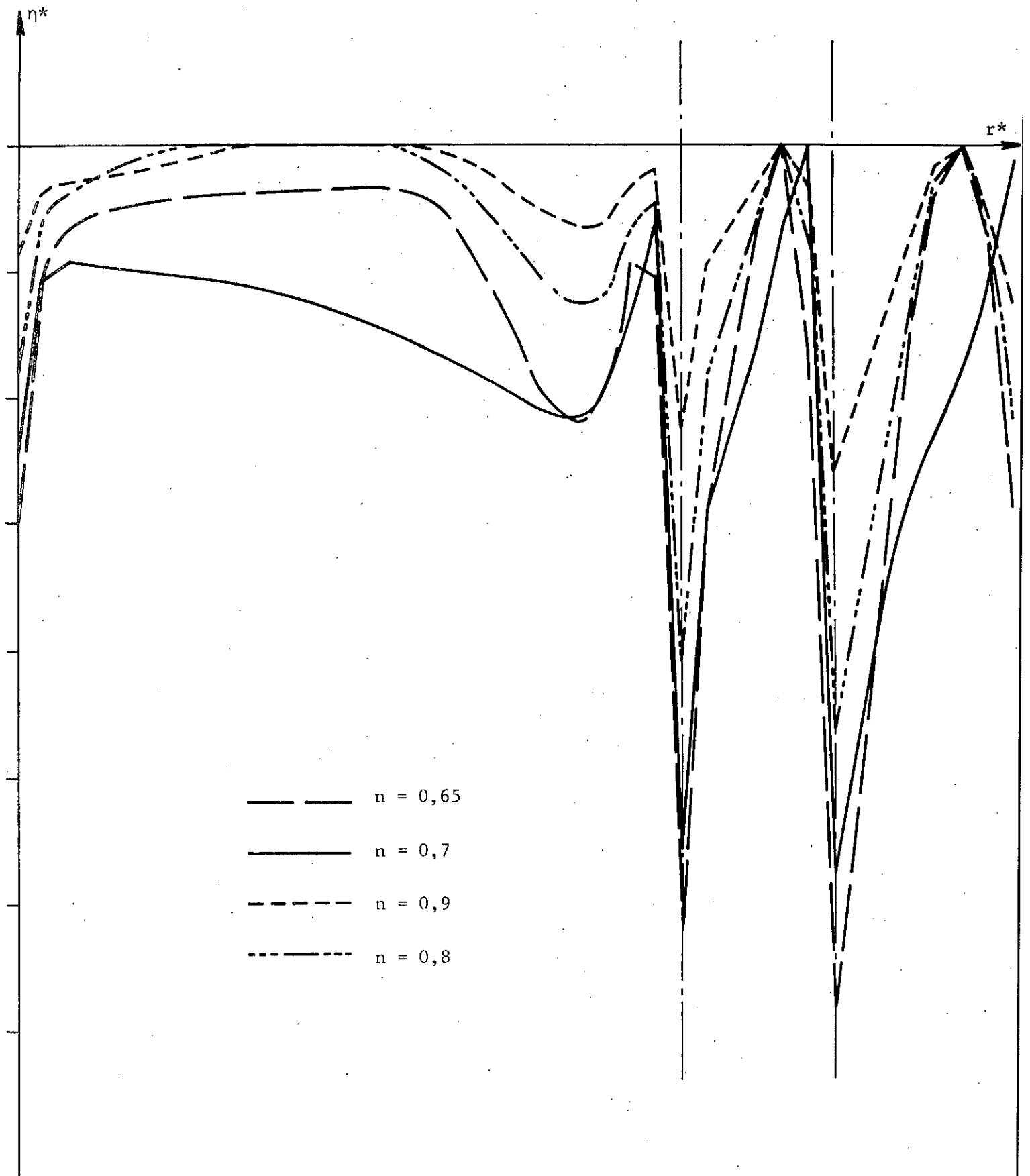


Fig. 5-38

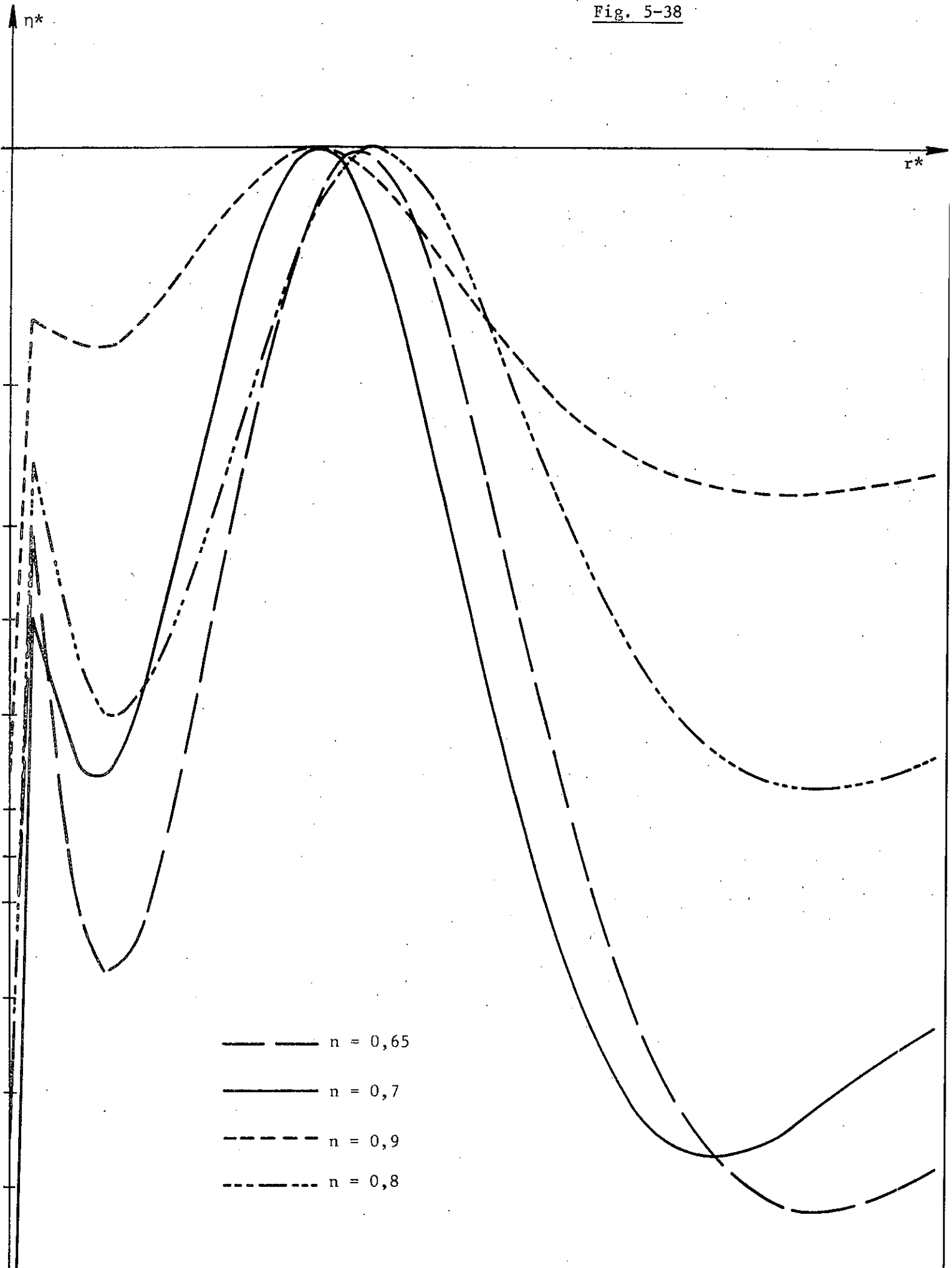


Fig. 5-39.

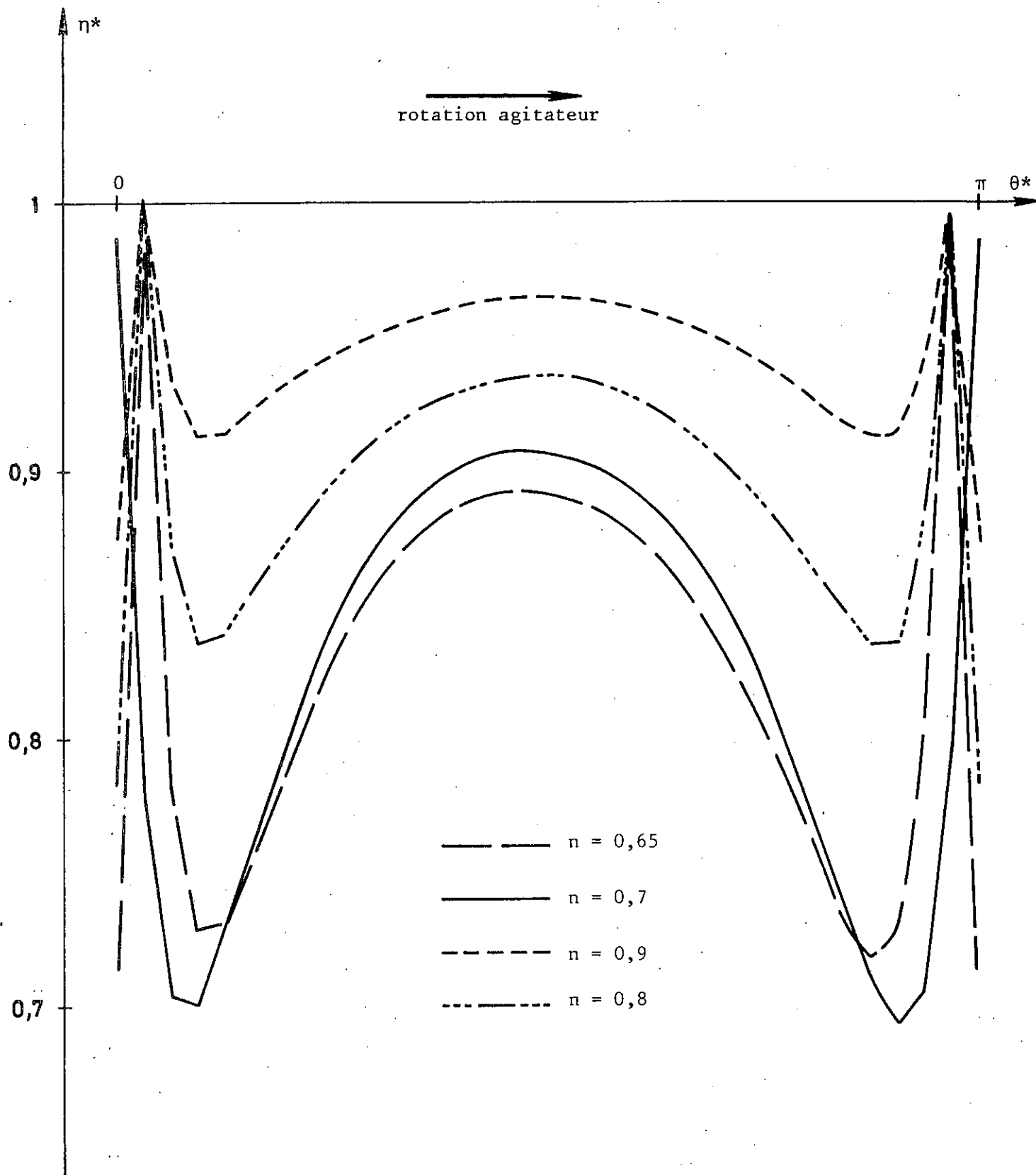


Fig. 5-40

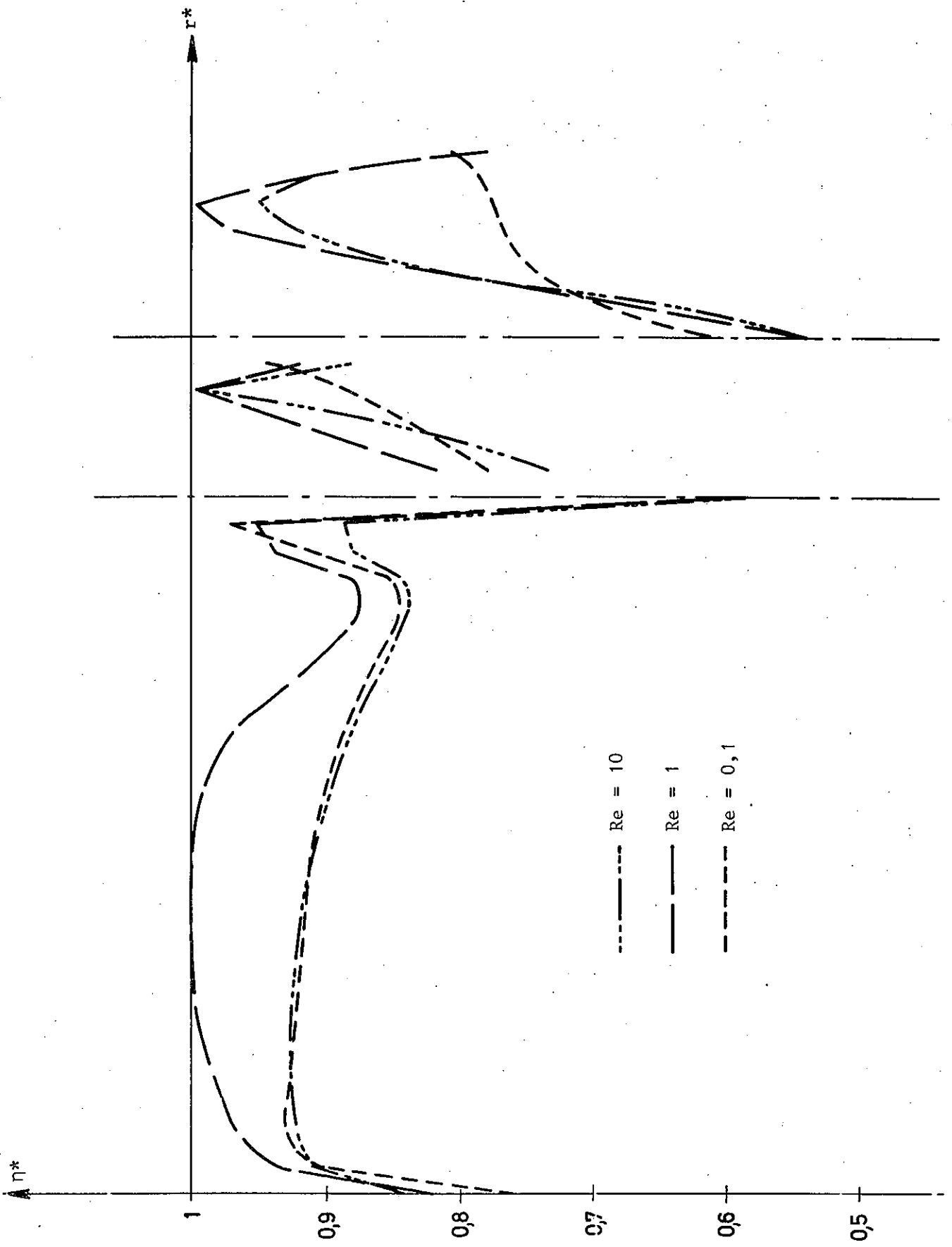


Fig. 5-41

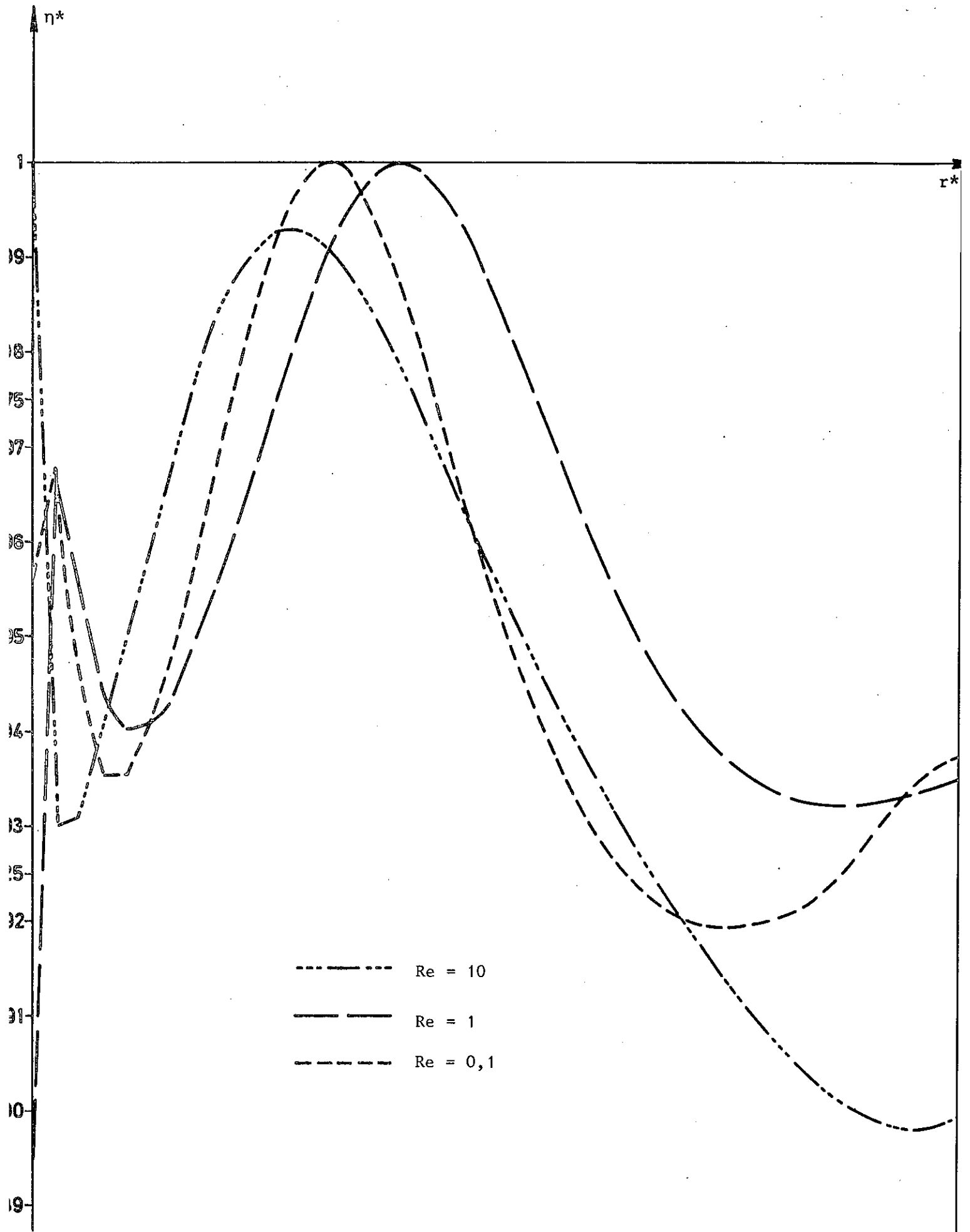


Fig. 5-42

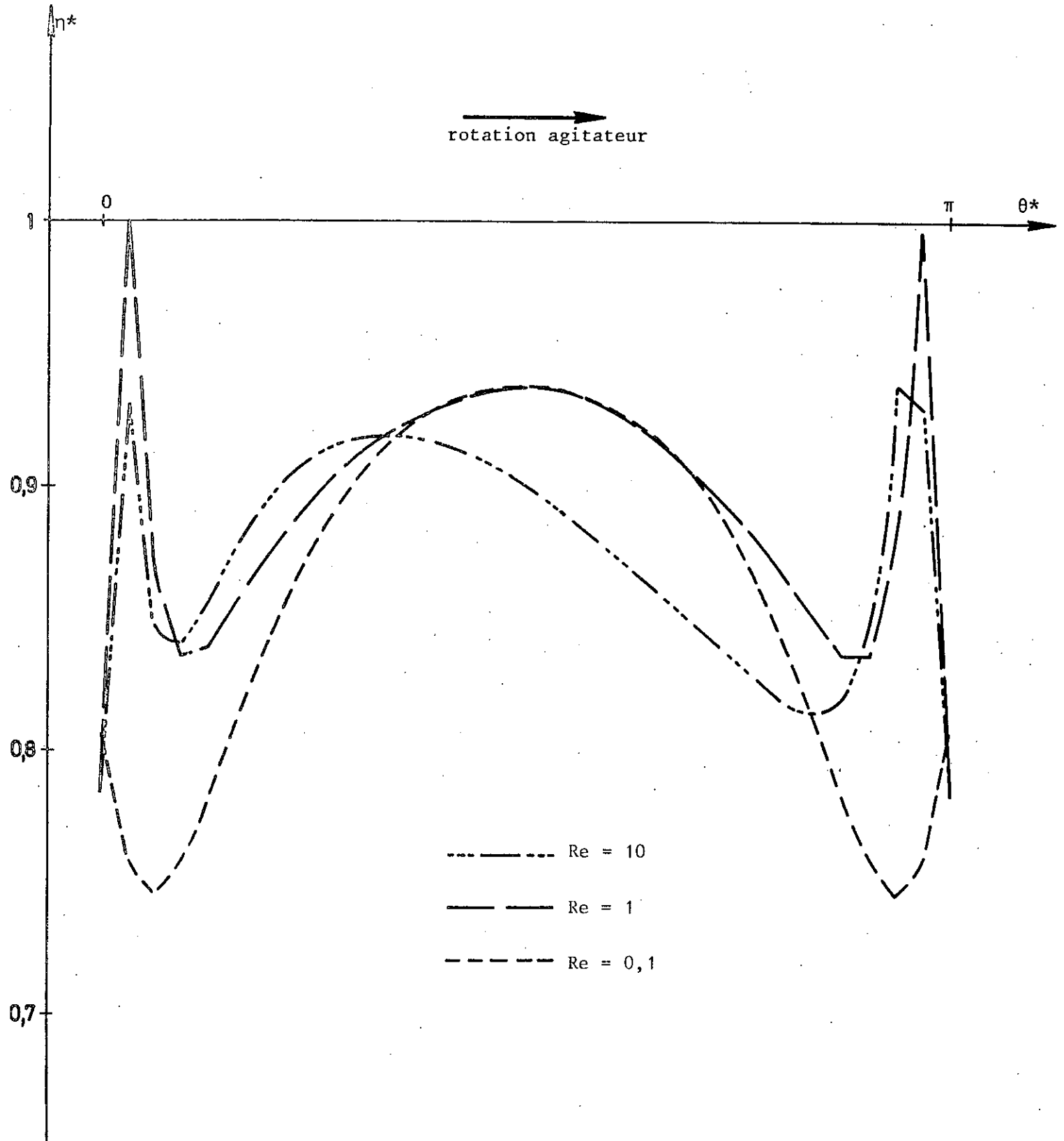


Fig. 5-43

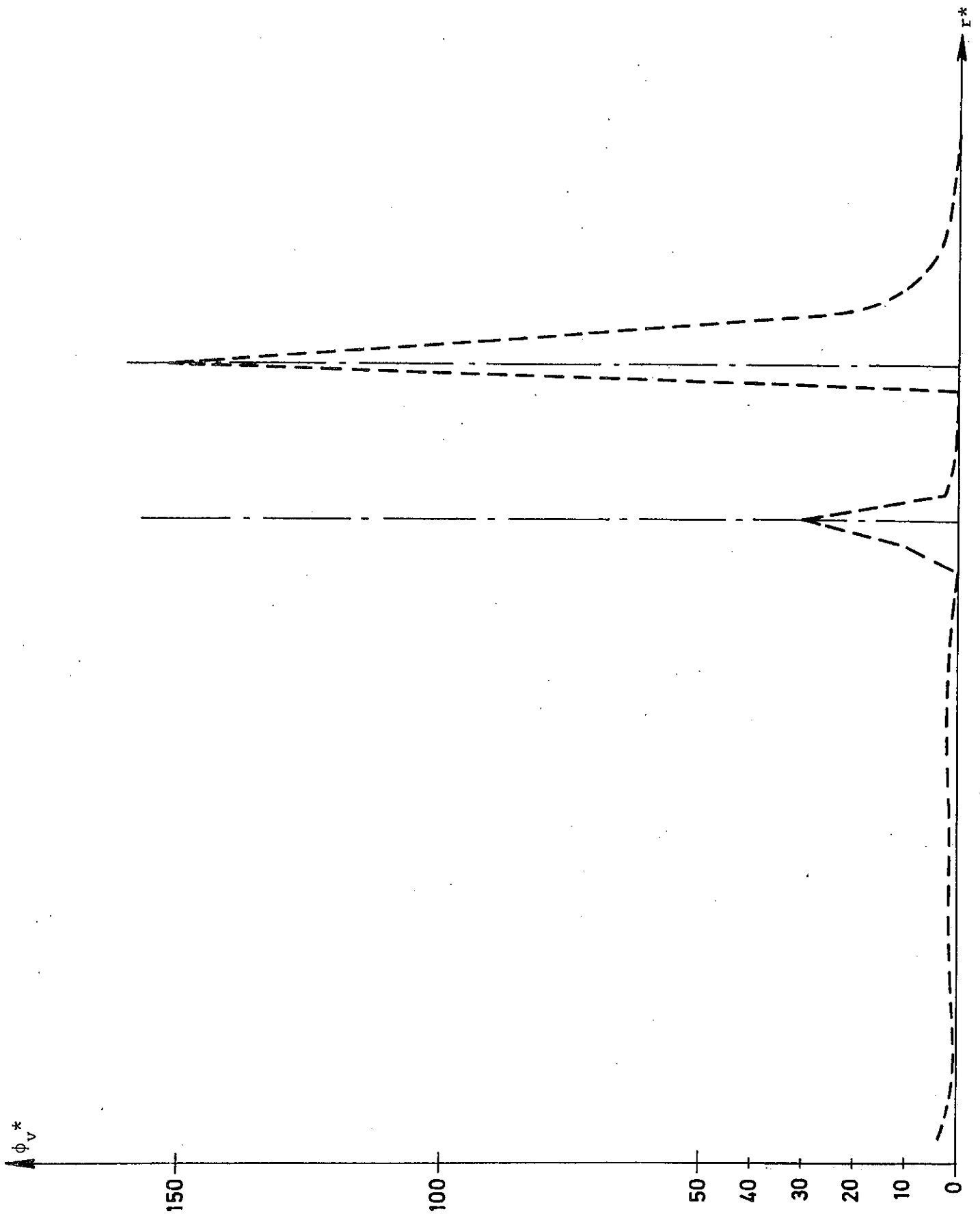


Fig. 5-44

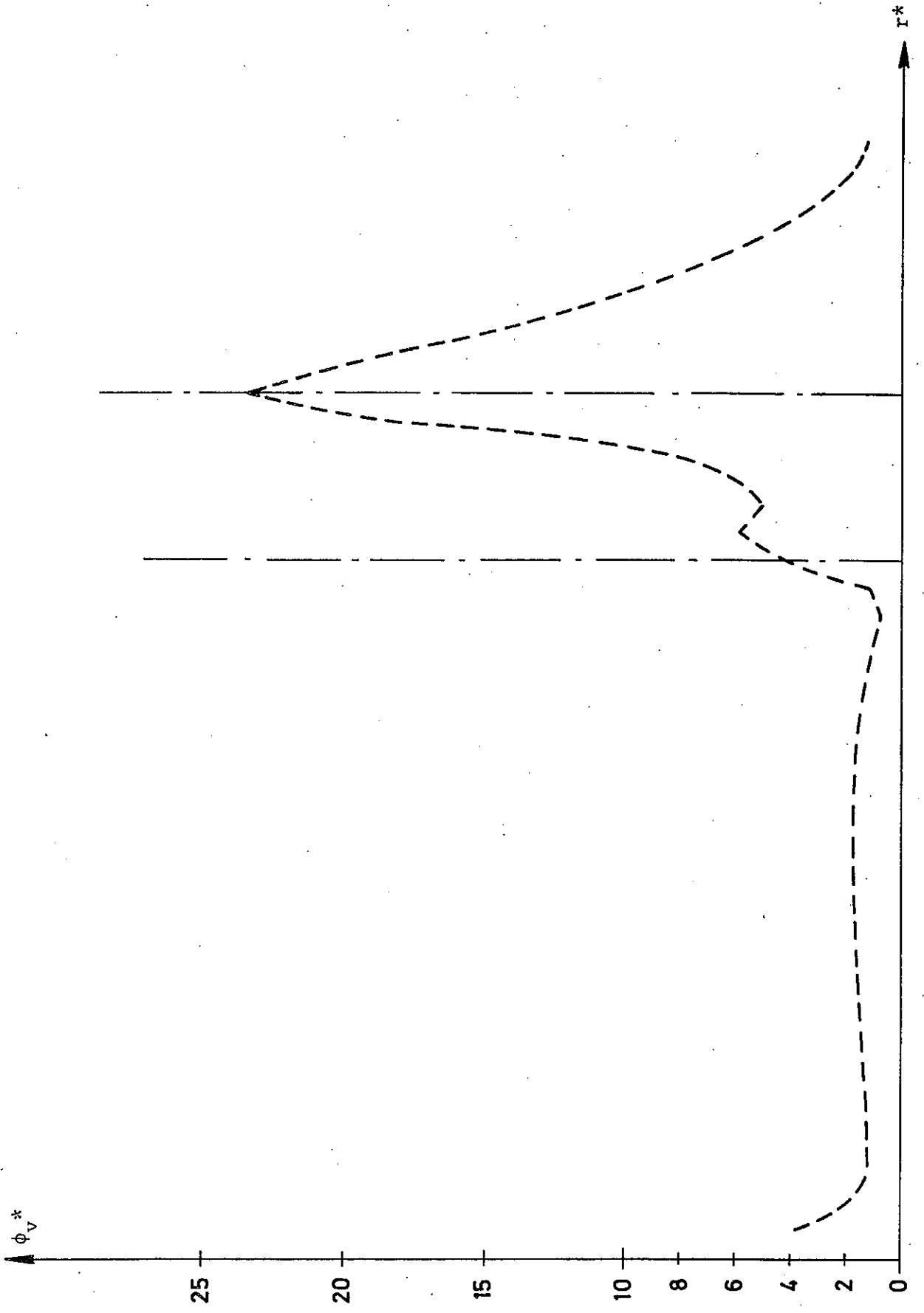


Fig. 5-45

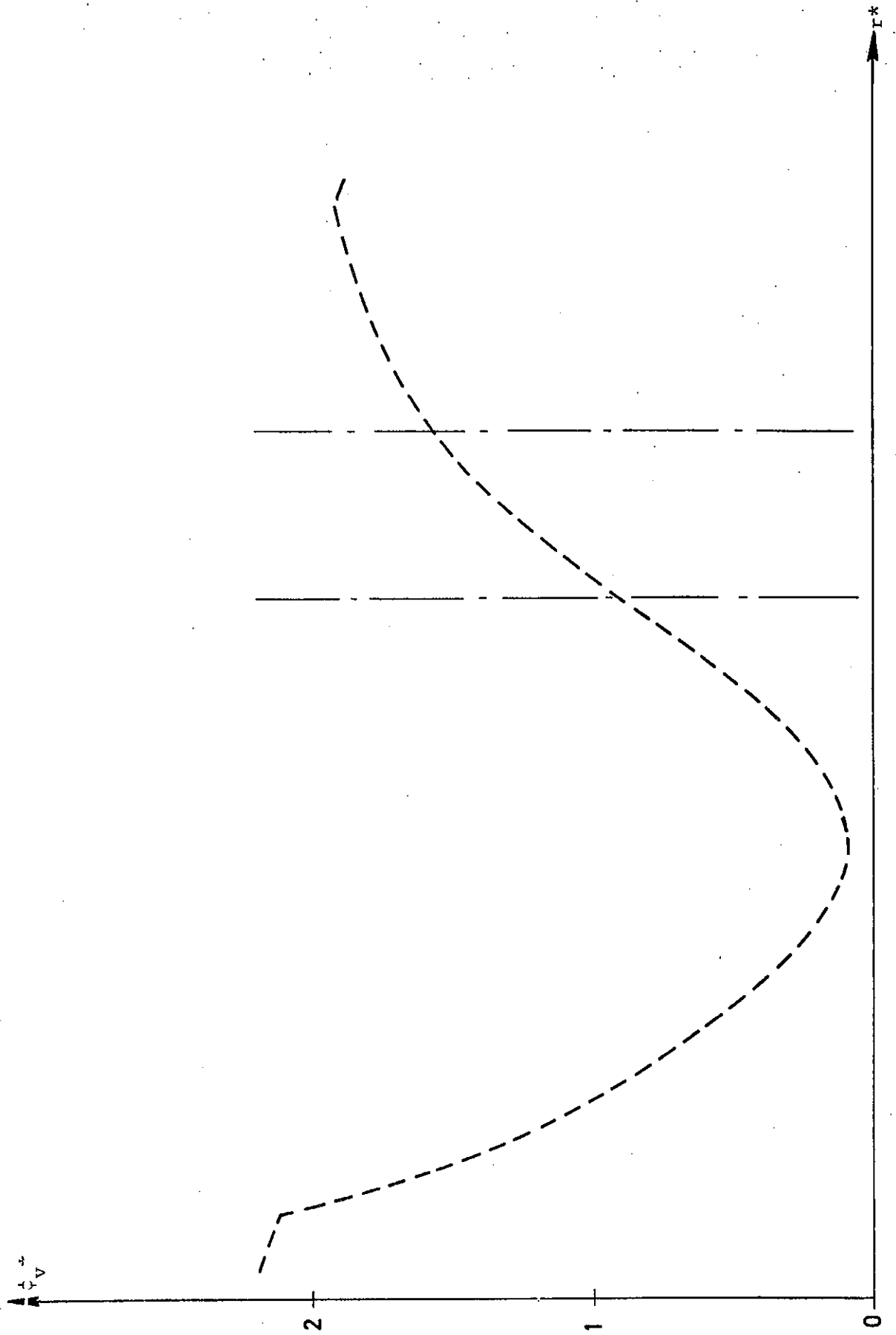


Fig. 5-46

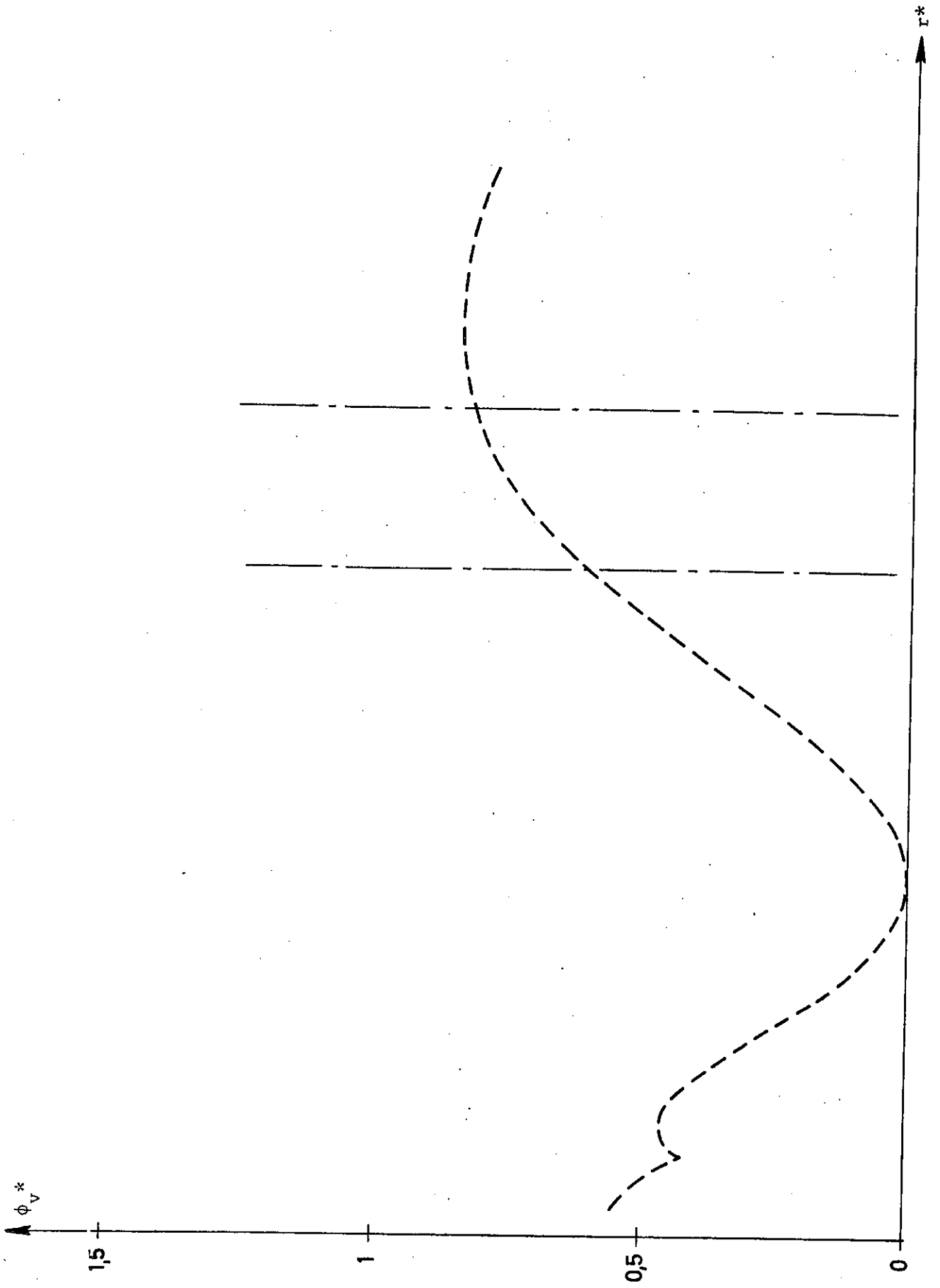


Fig. 5-47

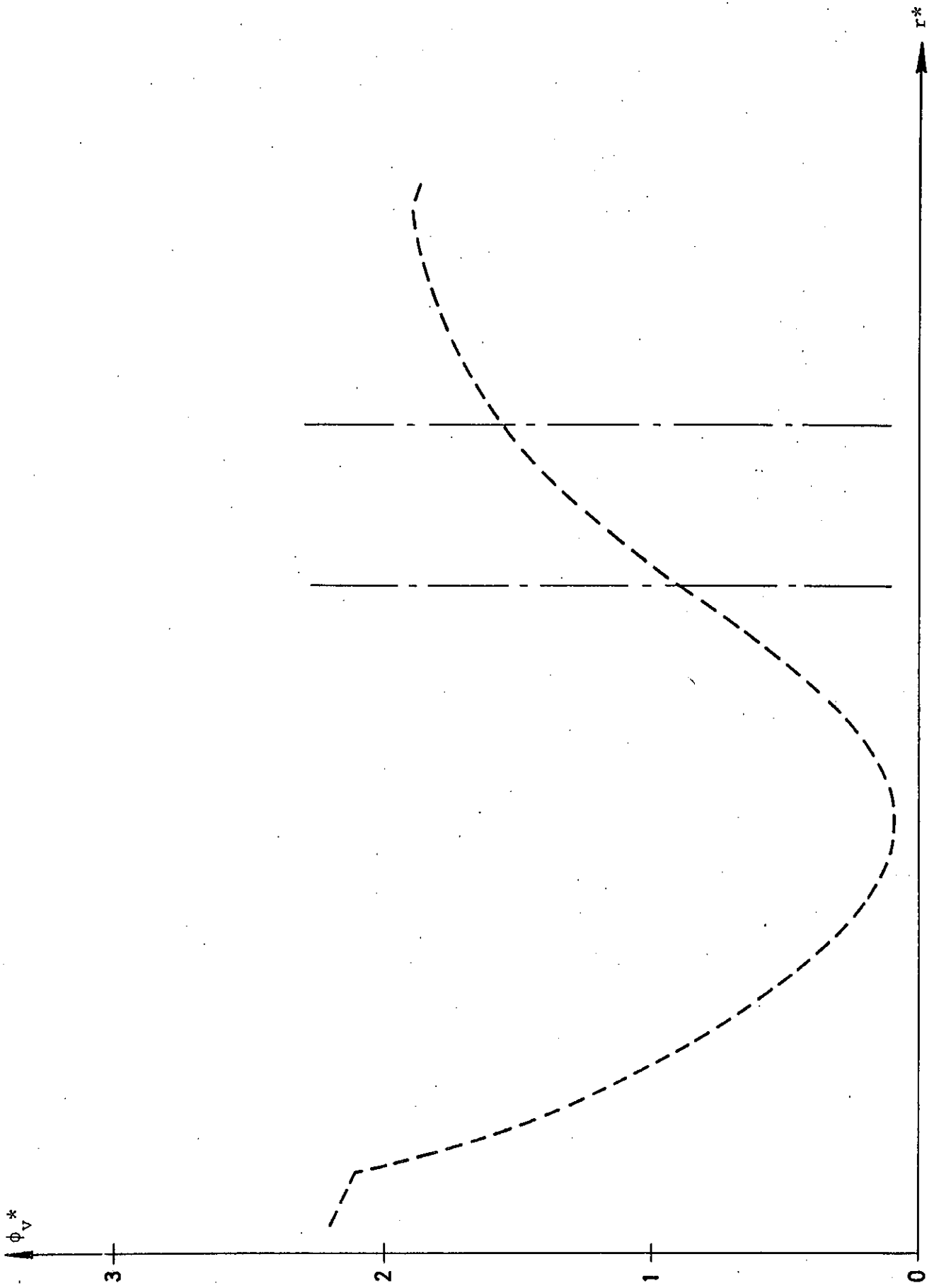


Fig. 5-48

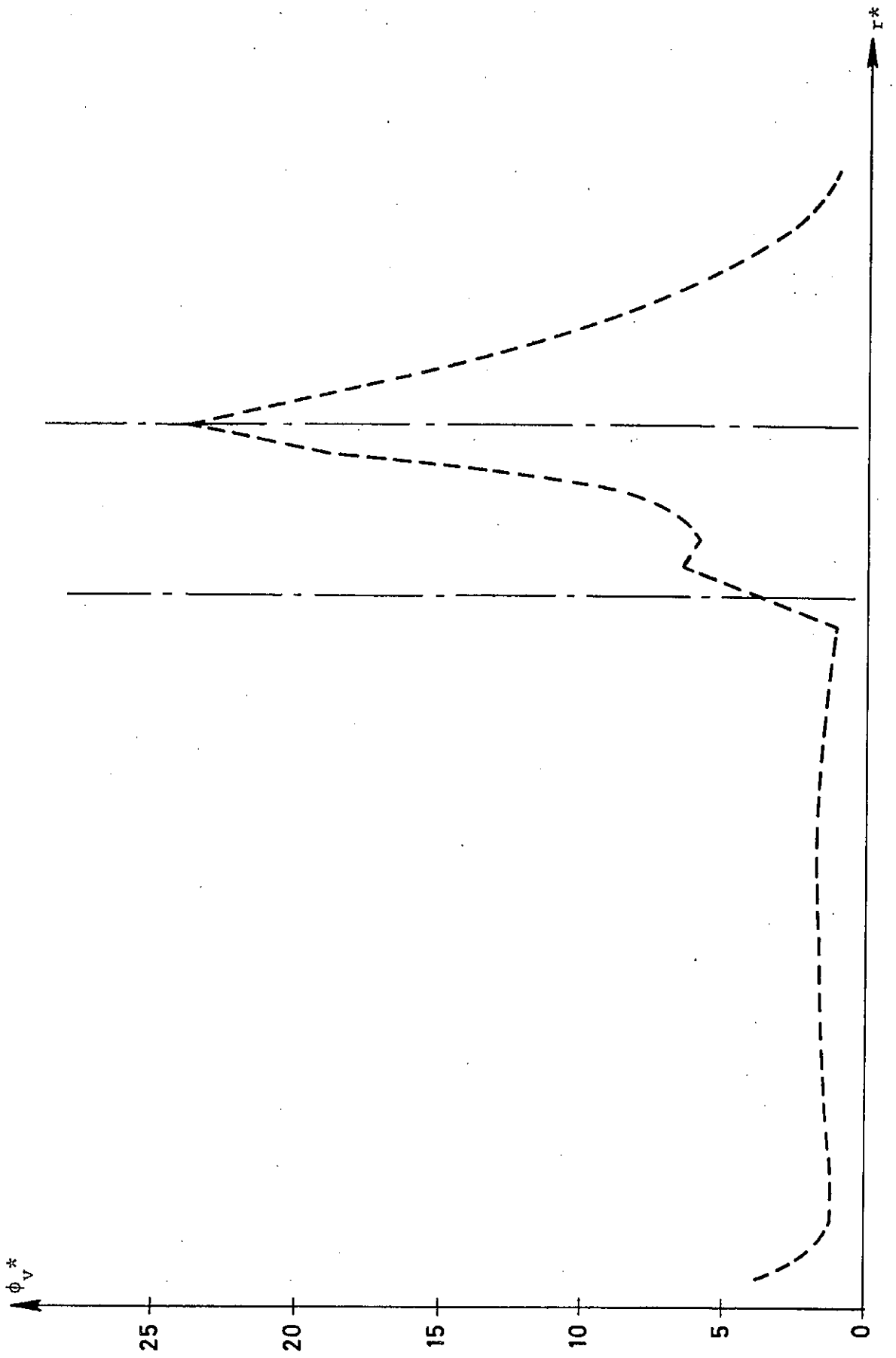


Fig. 5-49

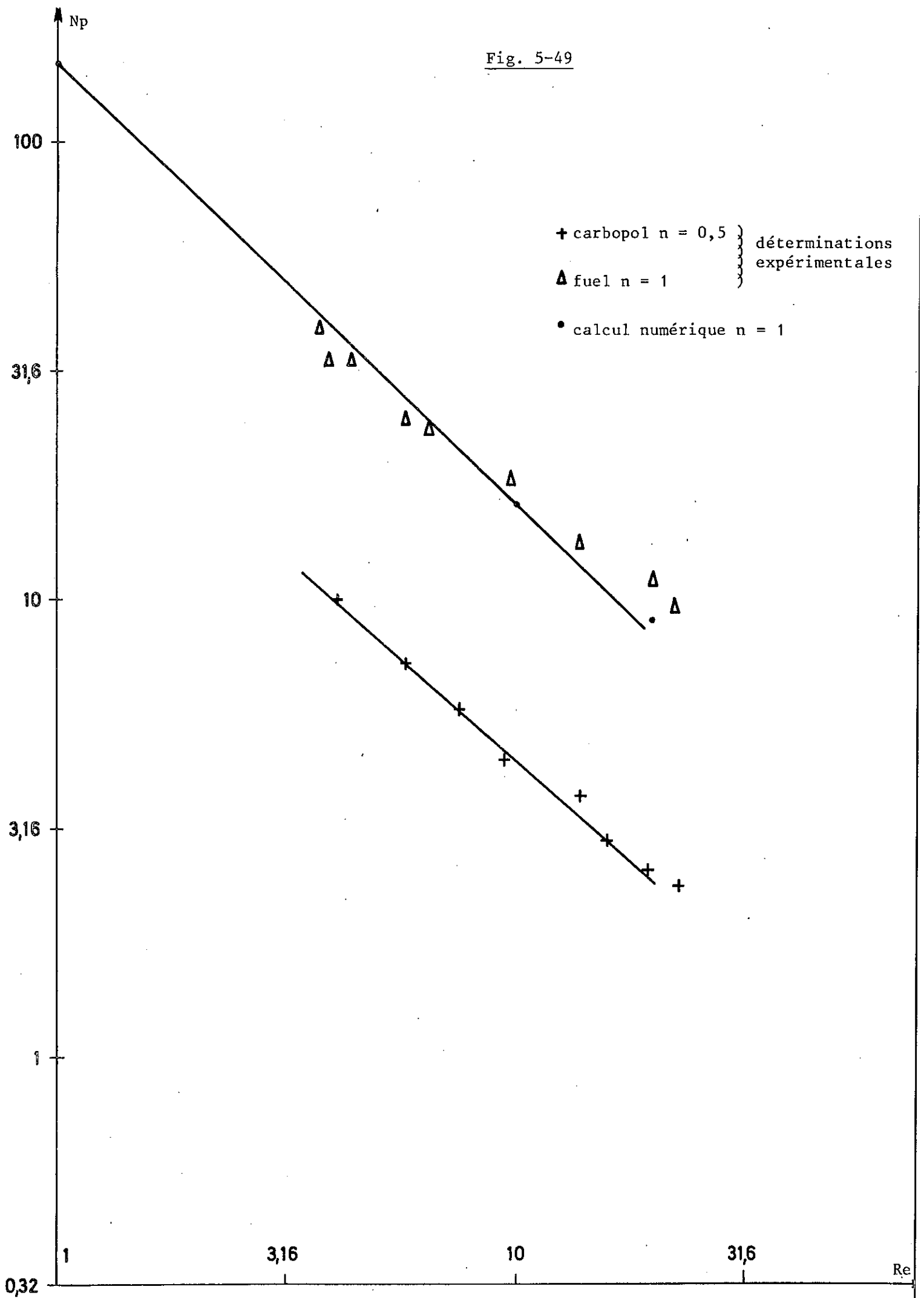


Fig. 6-1

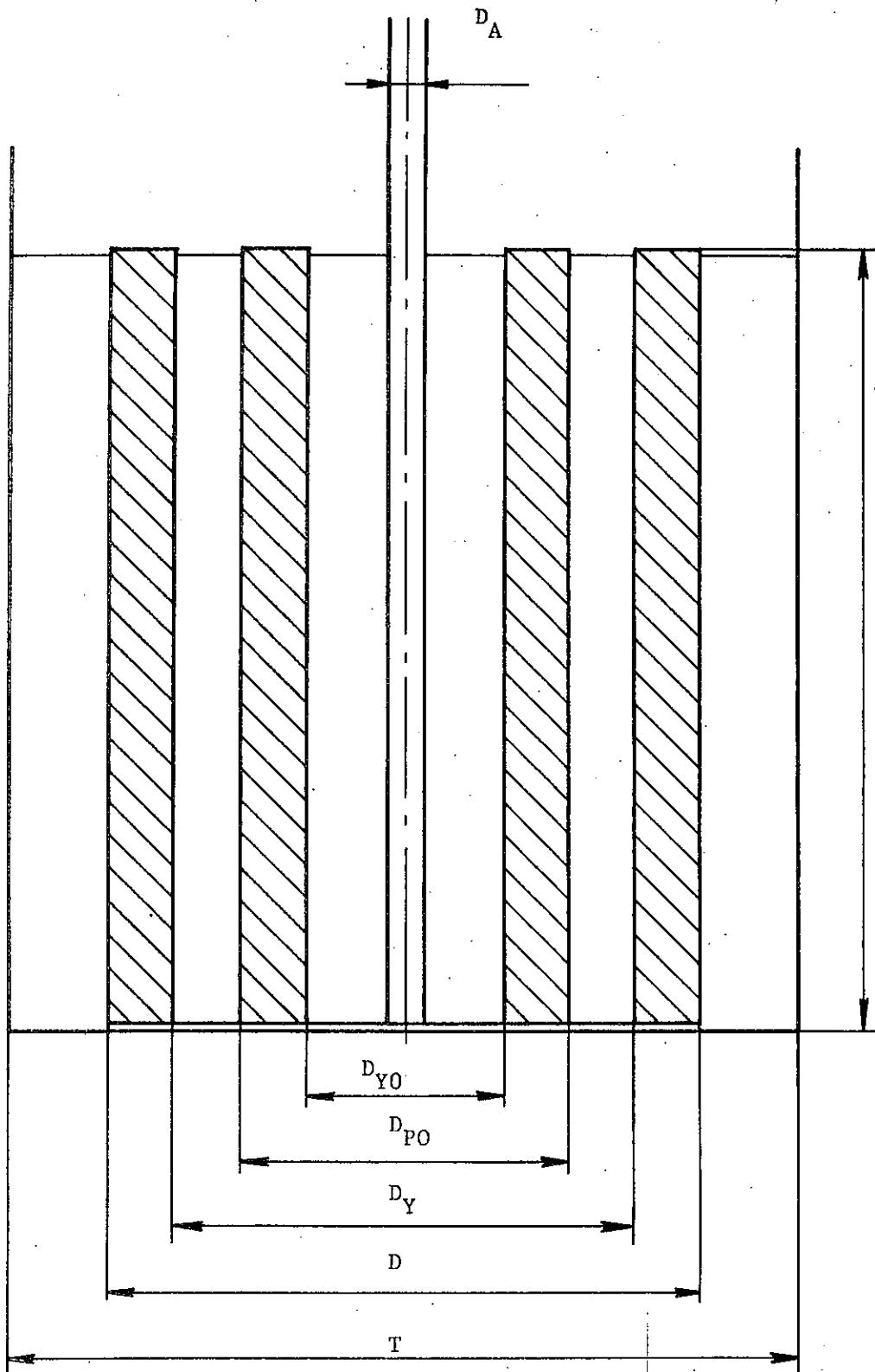


Fig. 6-2

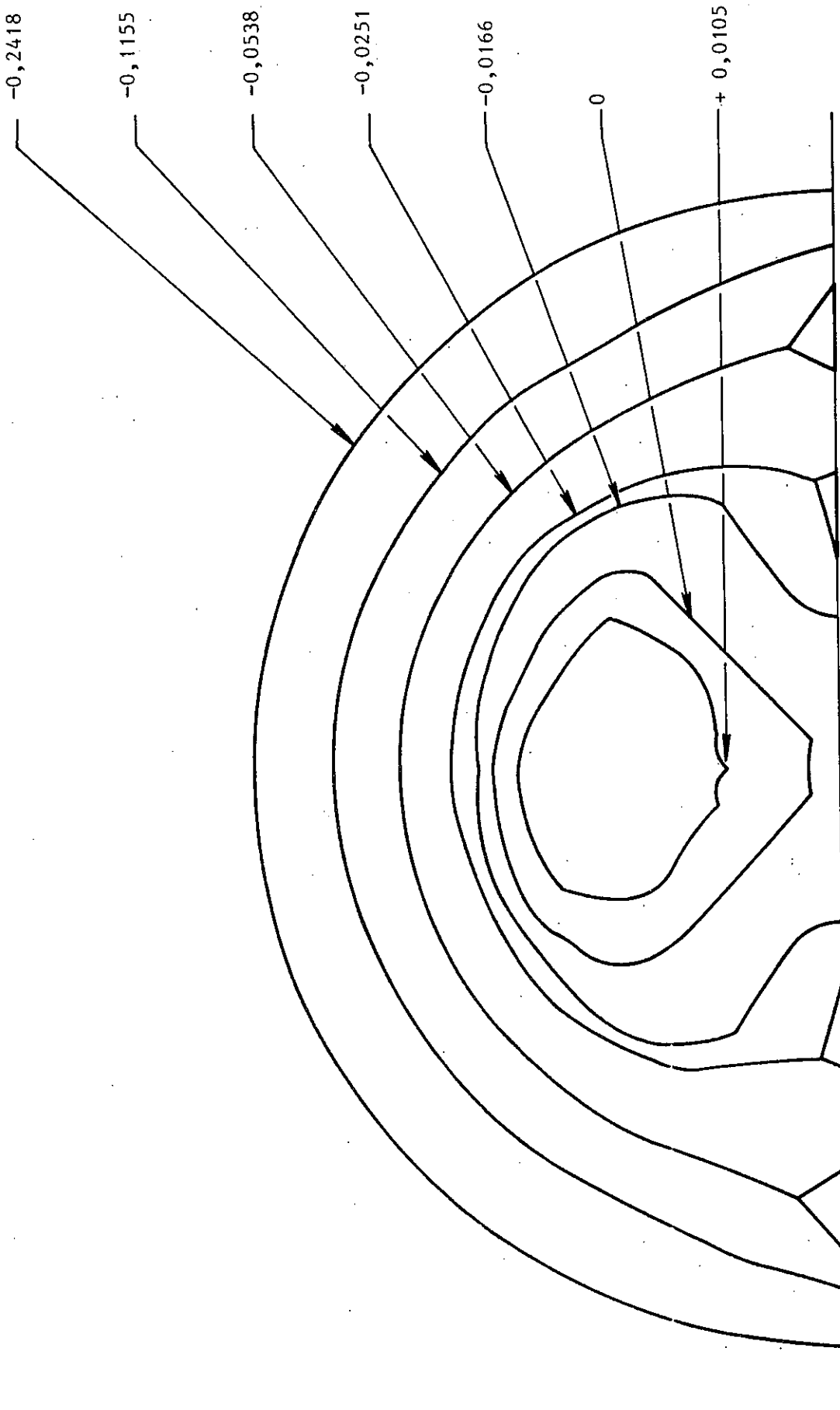


Fig. 6-3

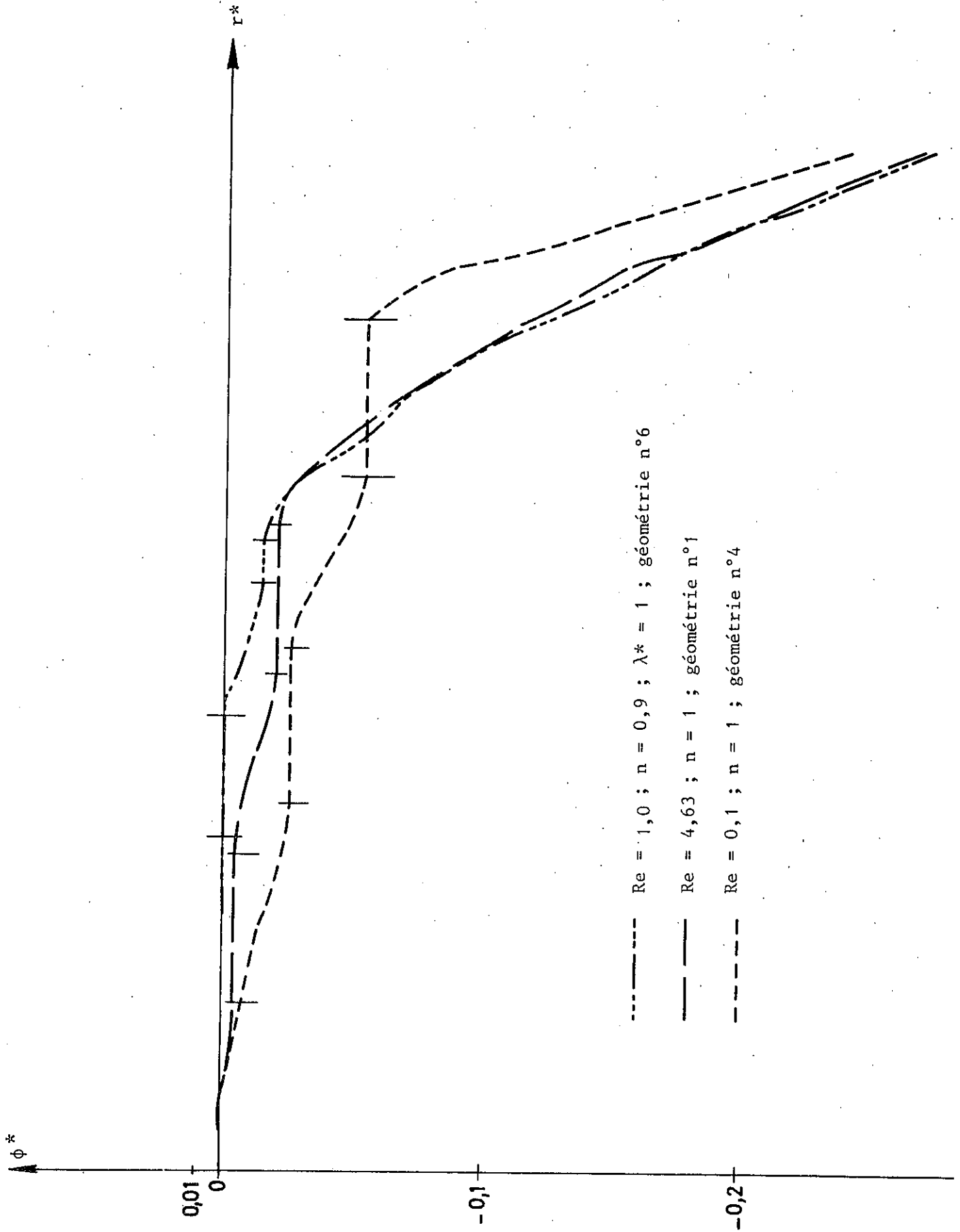


Fig. 6-4

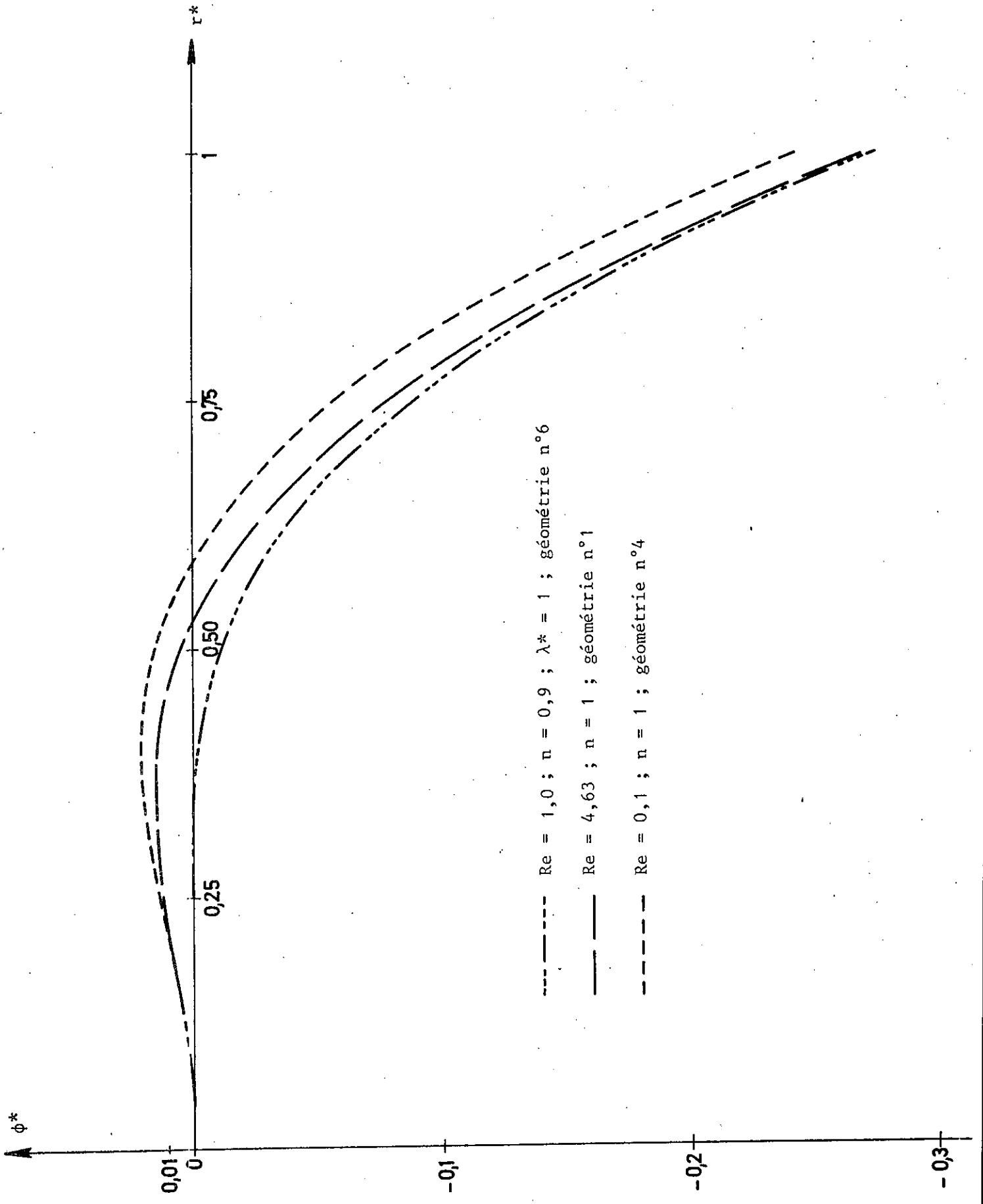


Fig. 6-5

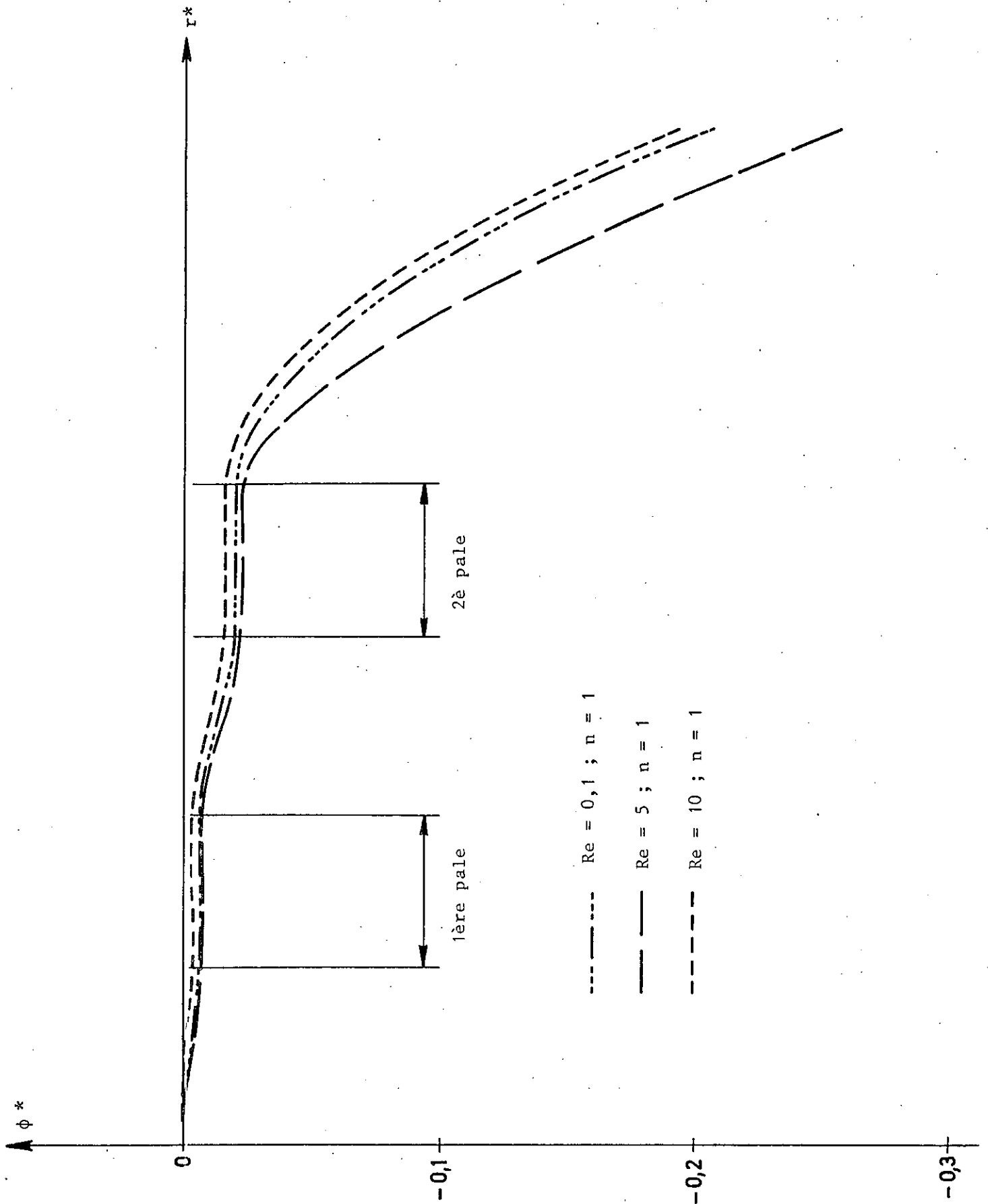


Fig. 6-6

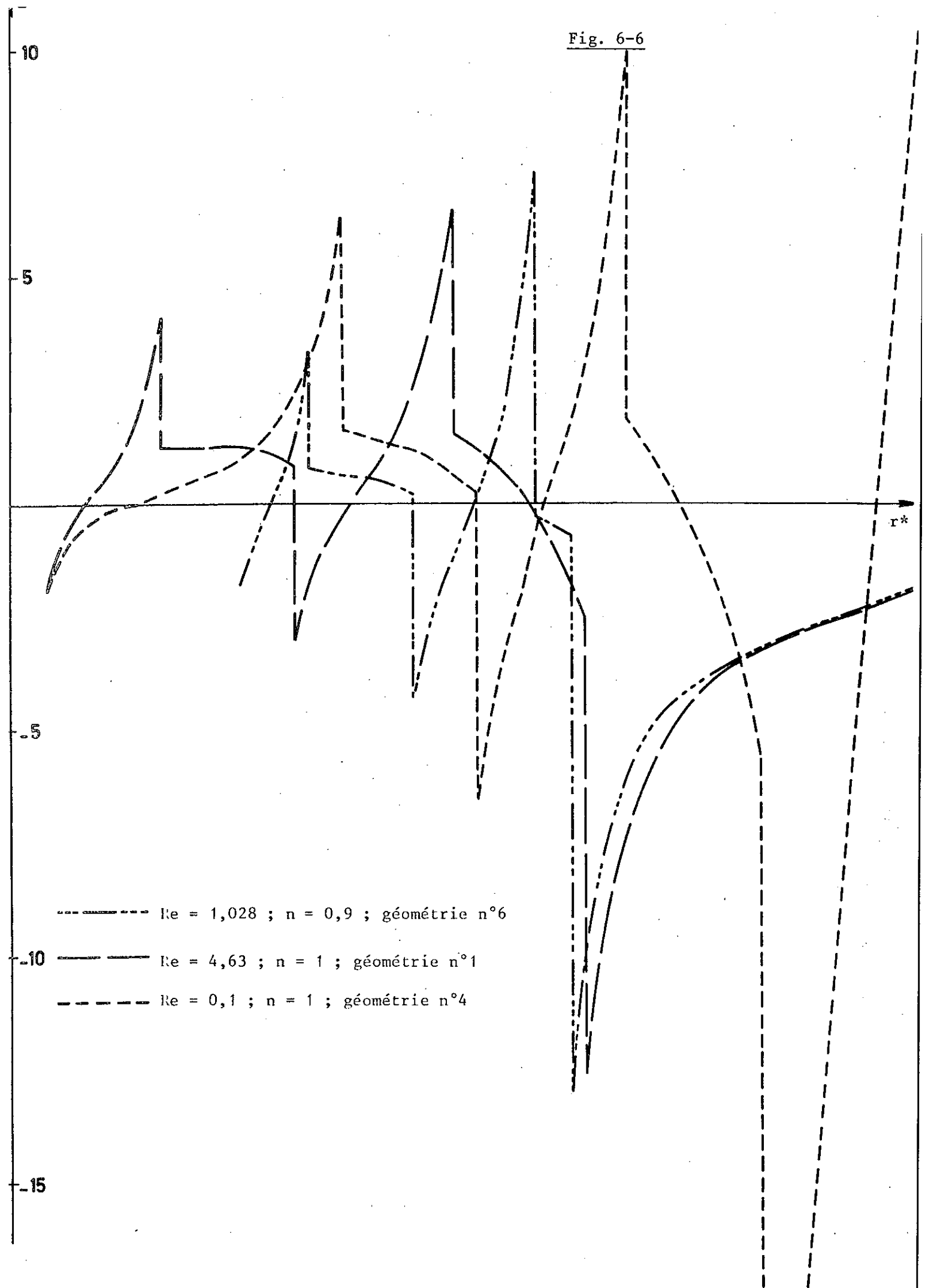


Fig. 6-7

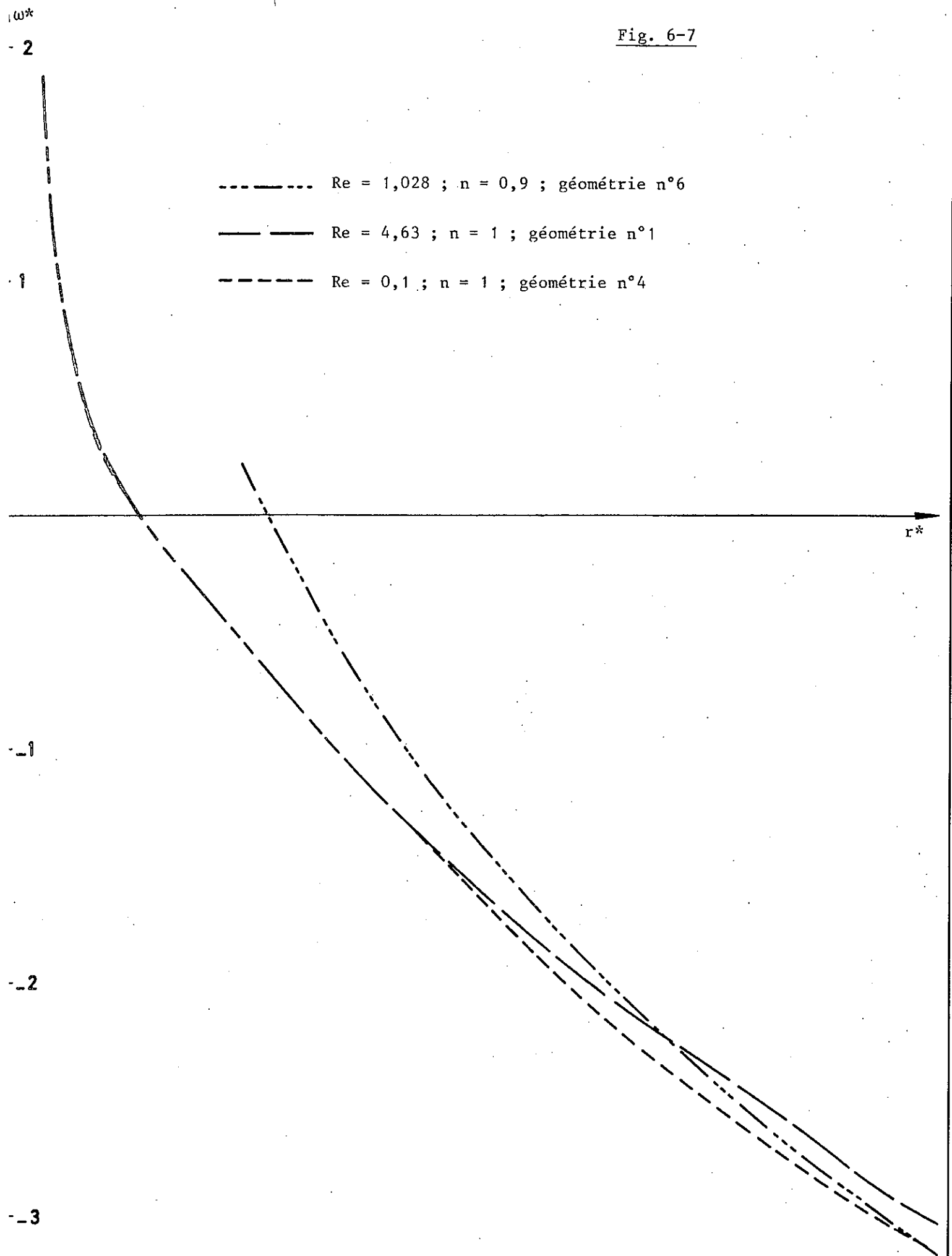


Fig. 6-8

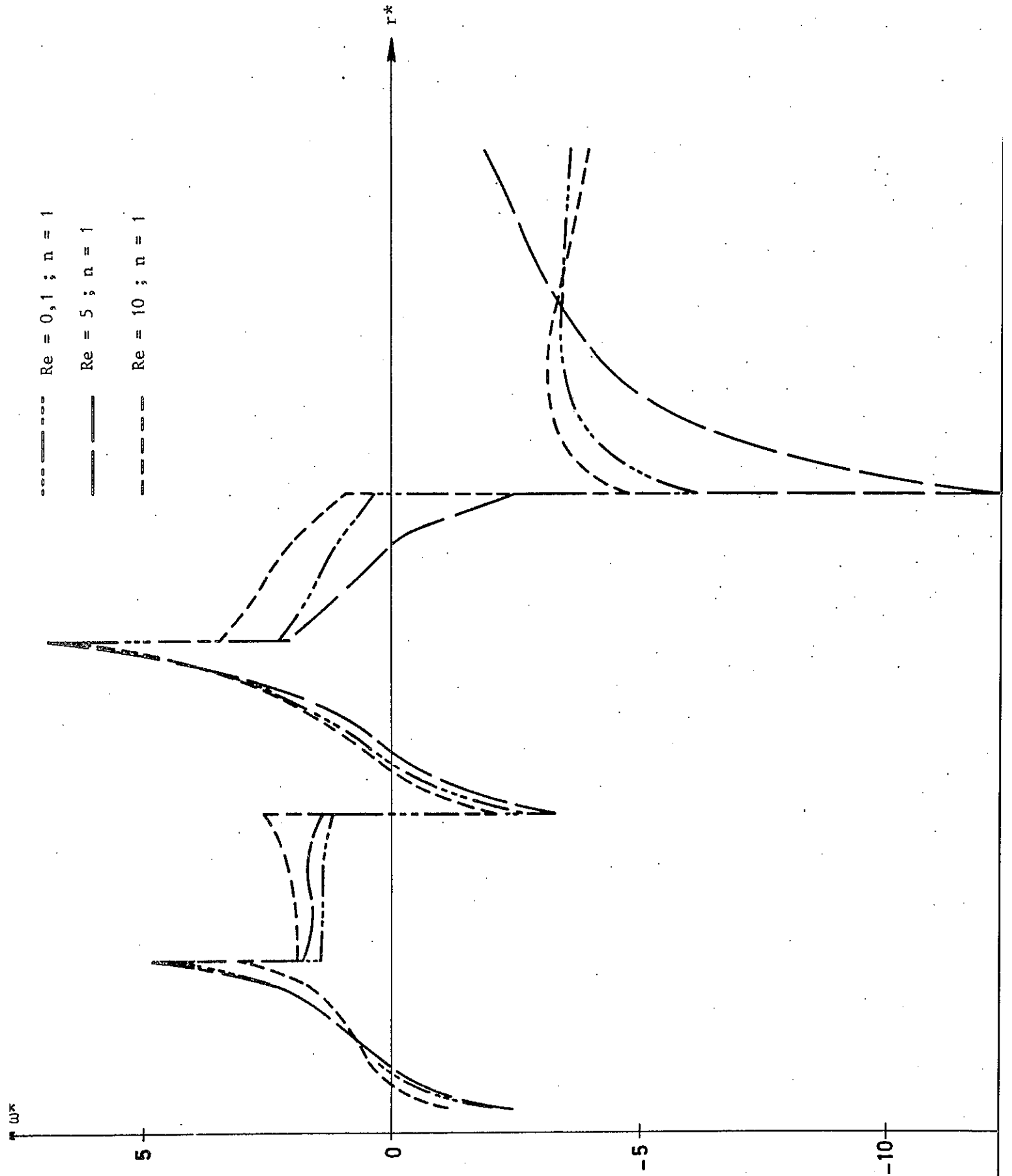


Fig. 6-9

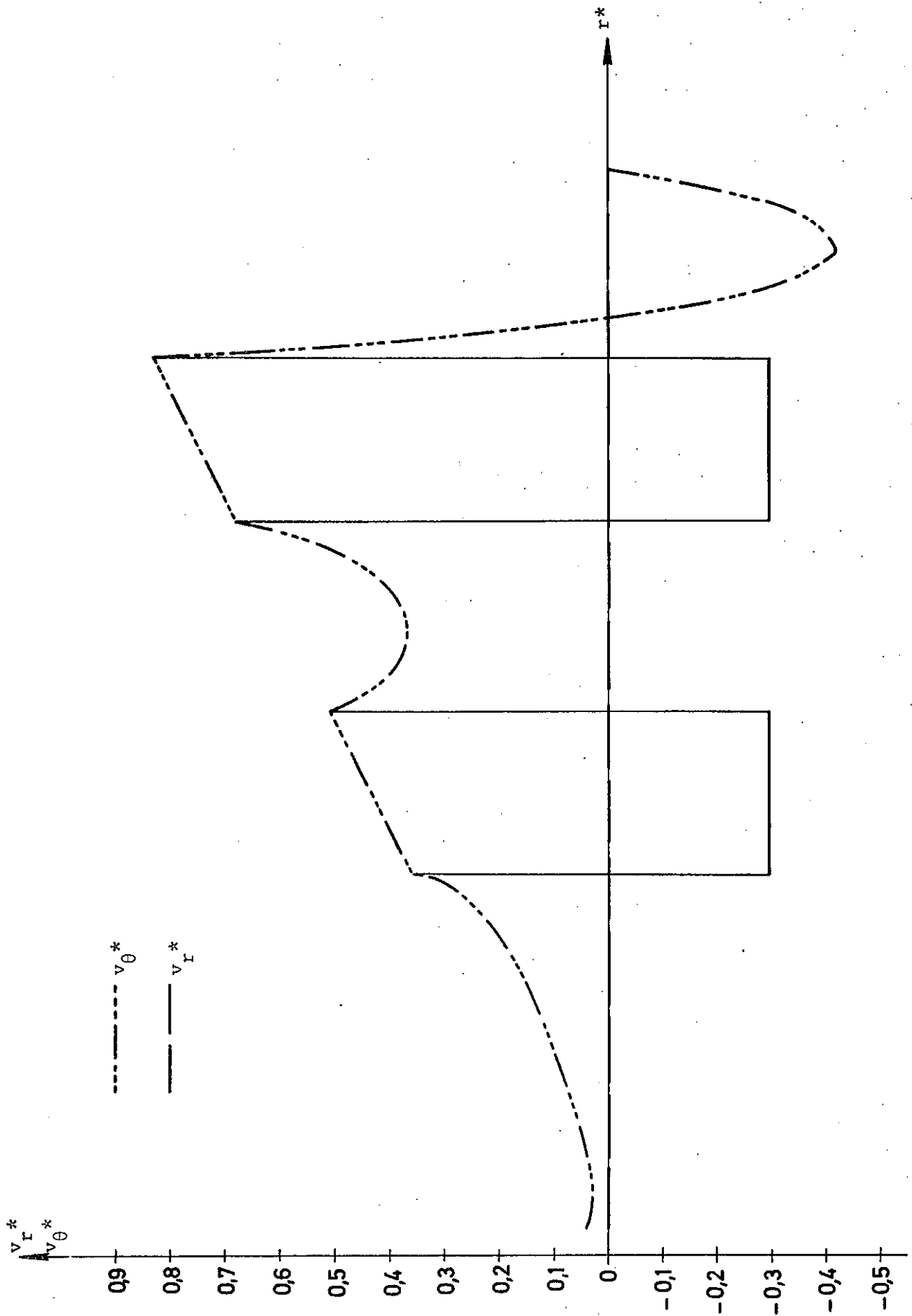


Fig. 6-10

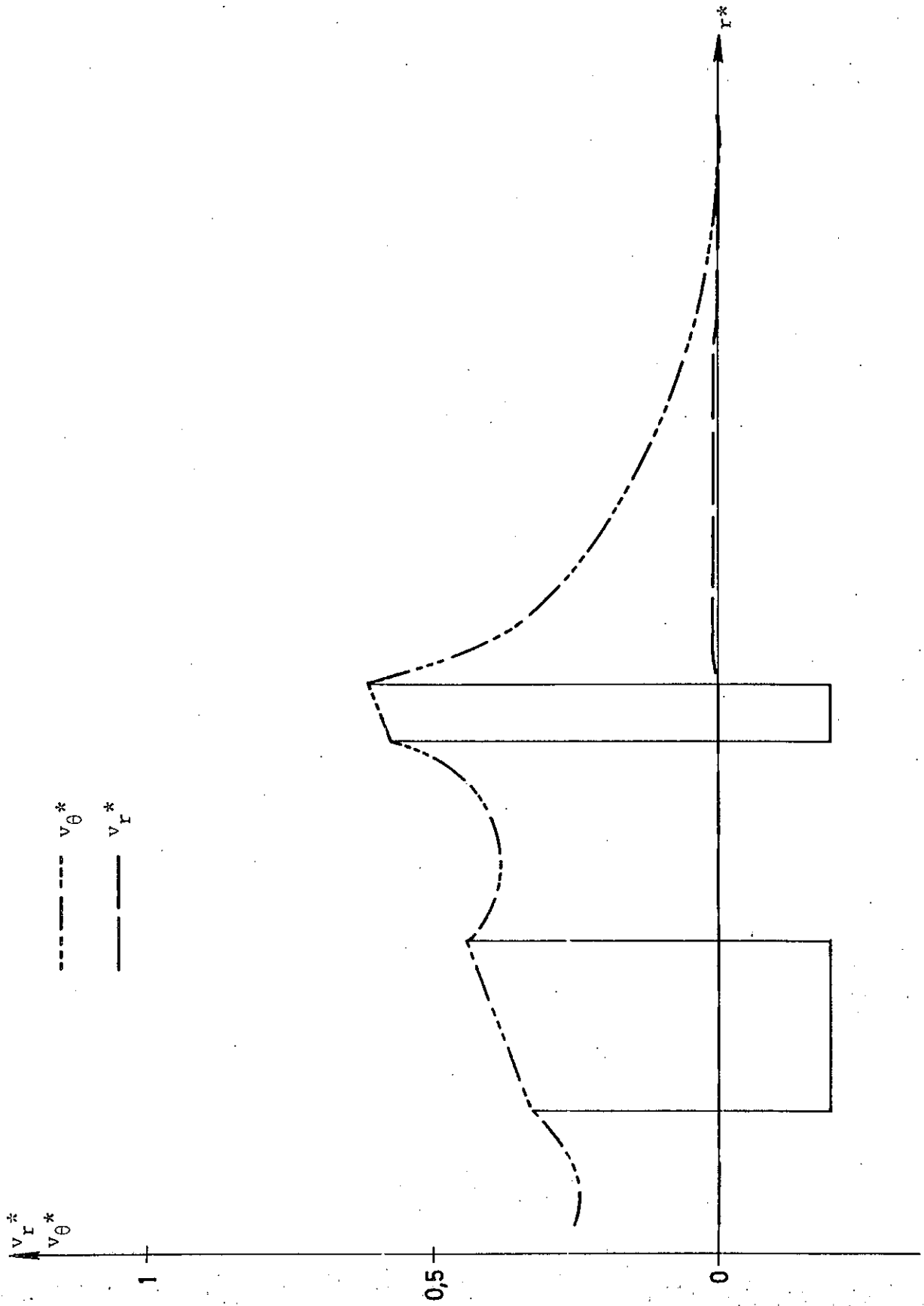


Fig. 6-11

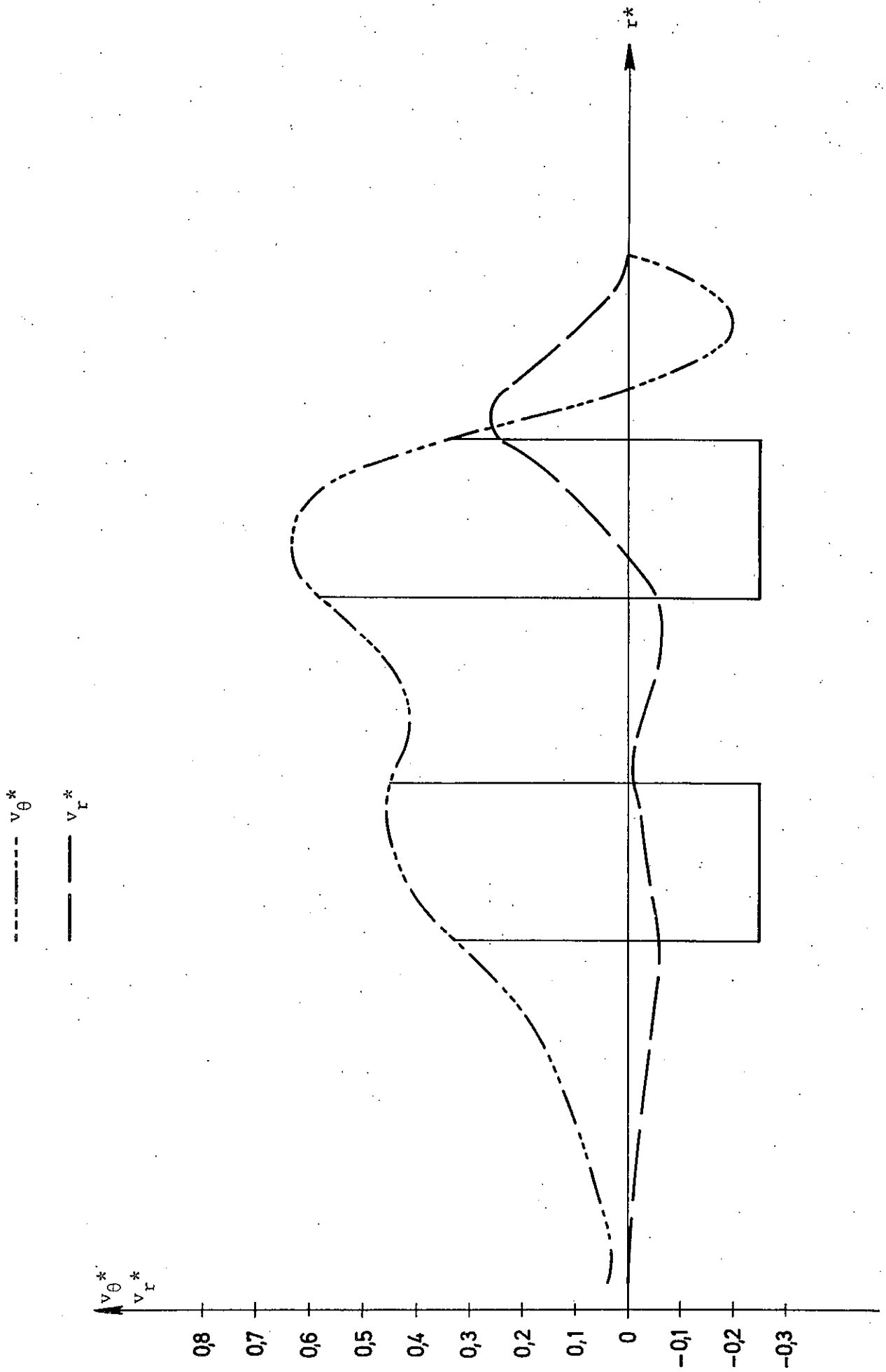


Fig. 6-12

----- v_{θ}^*
----- v_r^*

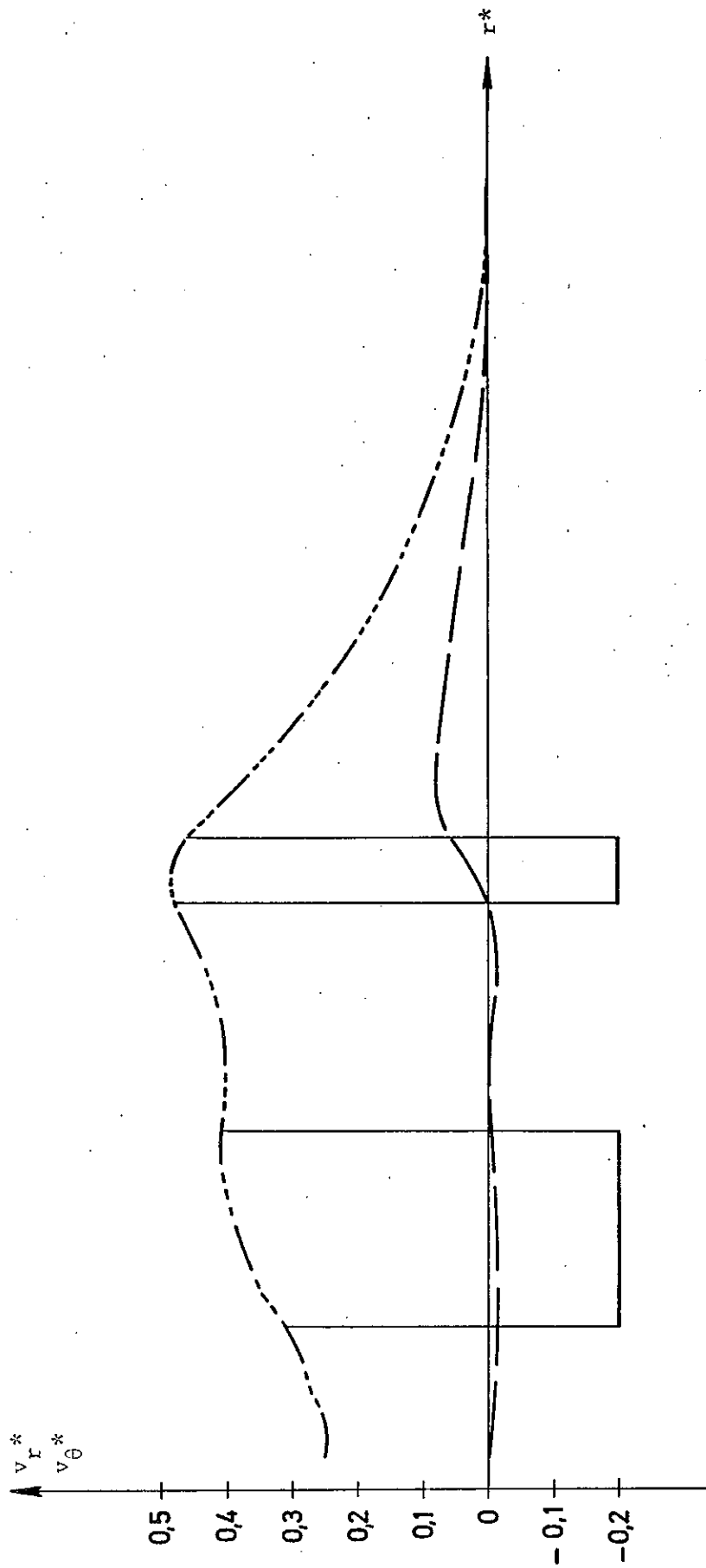


Fig. 6-13

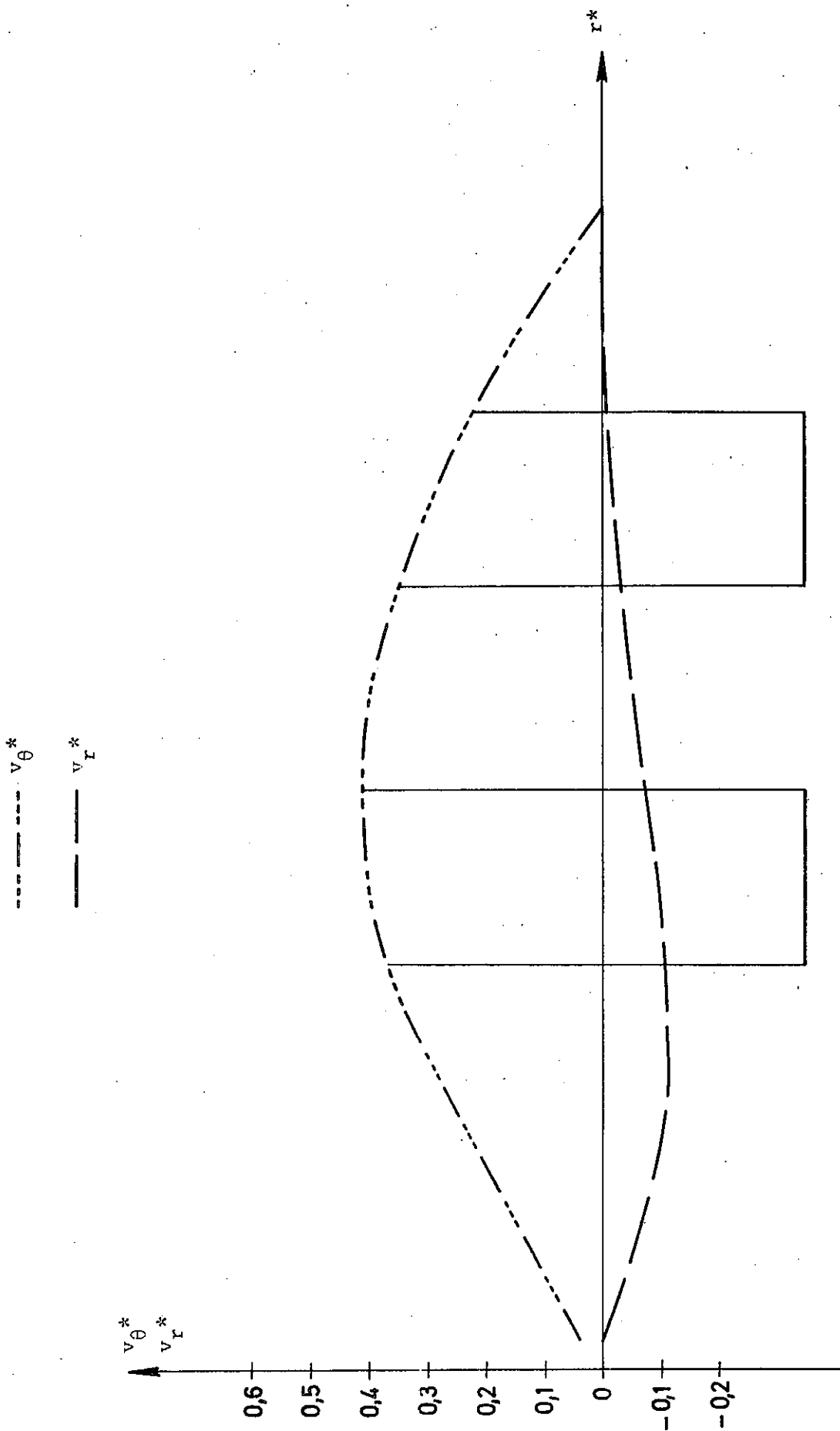


Fig. 6-14

----- v_{θ}^*
——— v_I^*

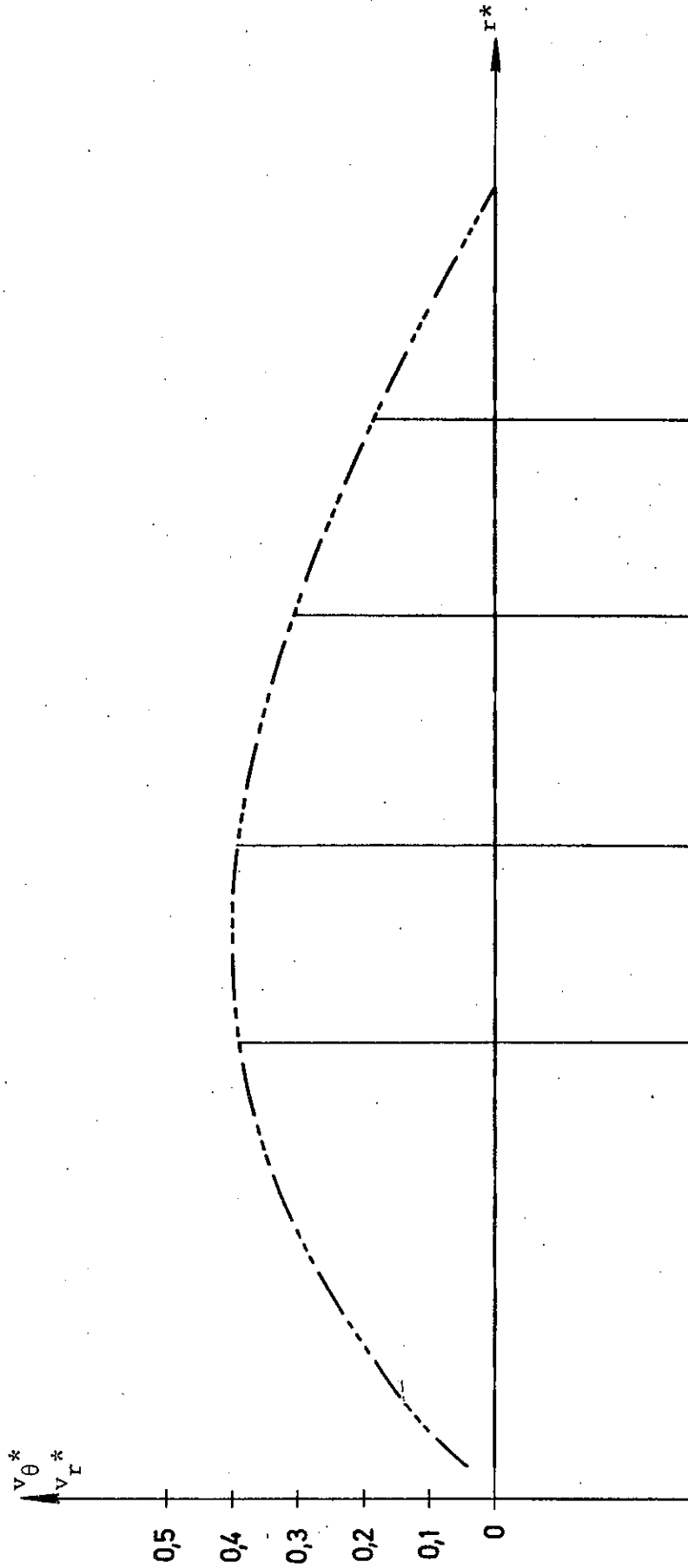


Fig. 6-15

----- v_{θ}^*
----- v_r^*

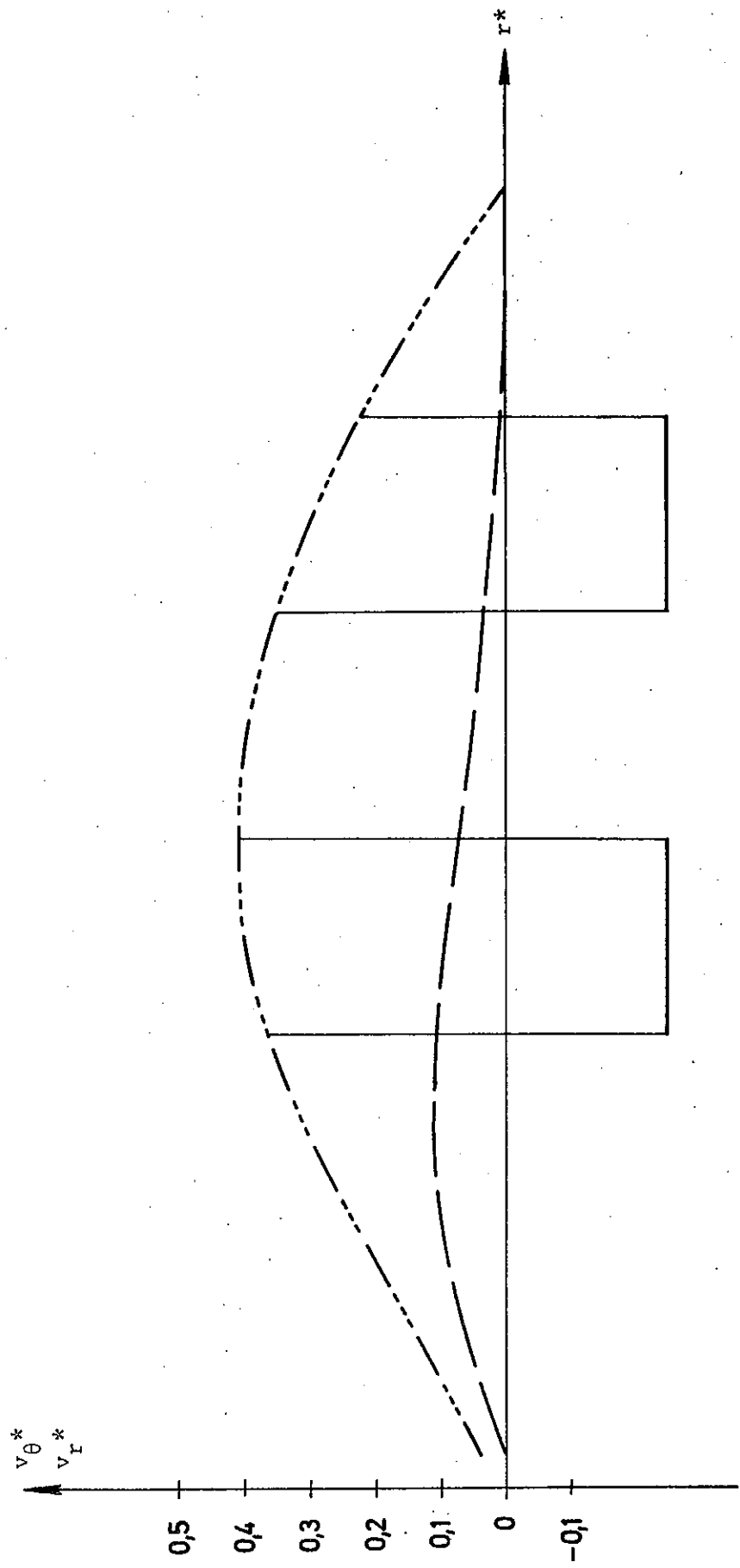


Fig. 6-16

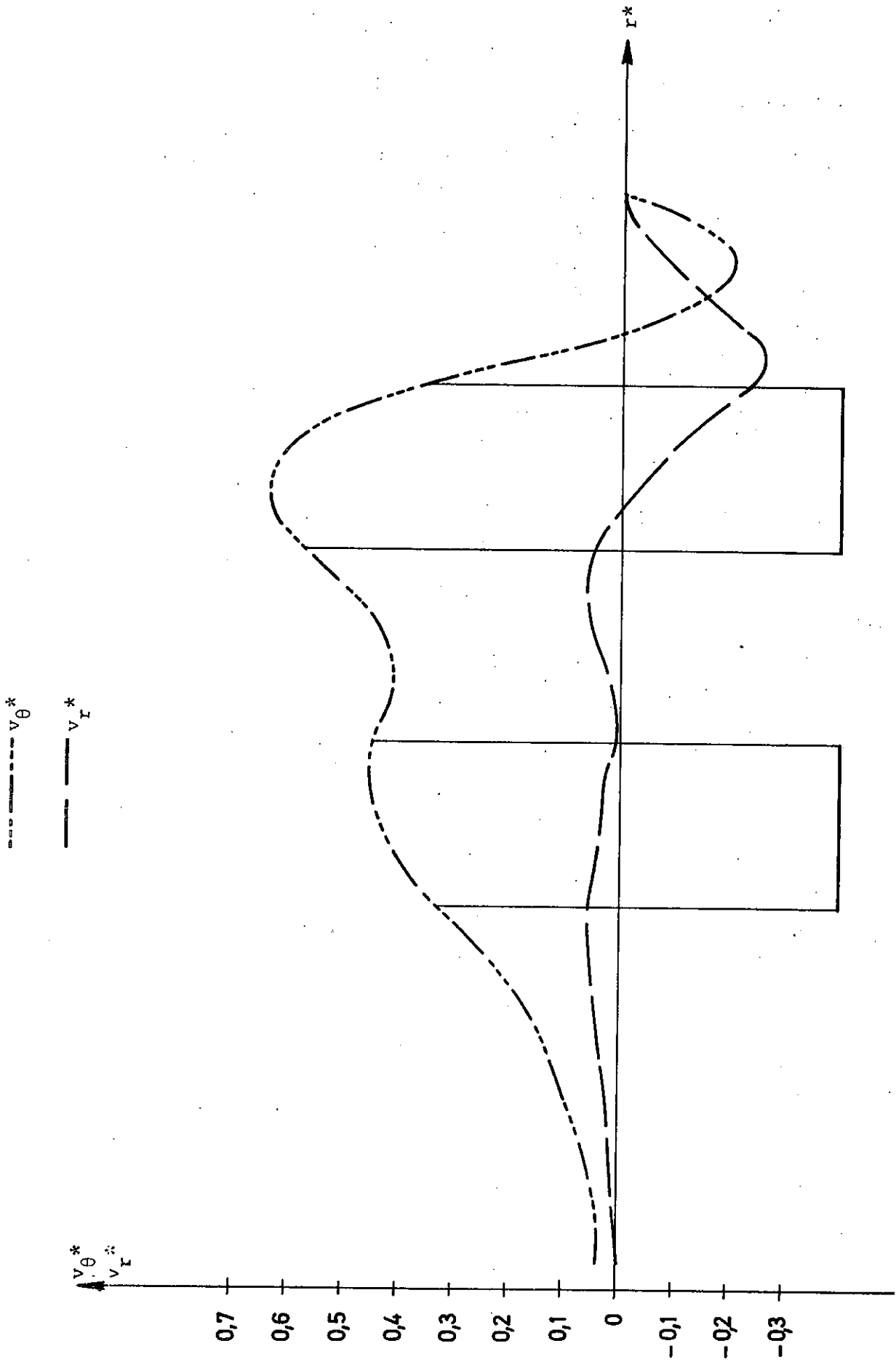


Fig. 6-17

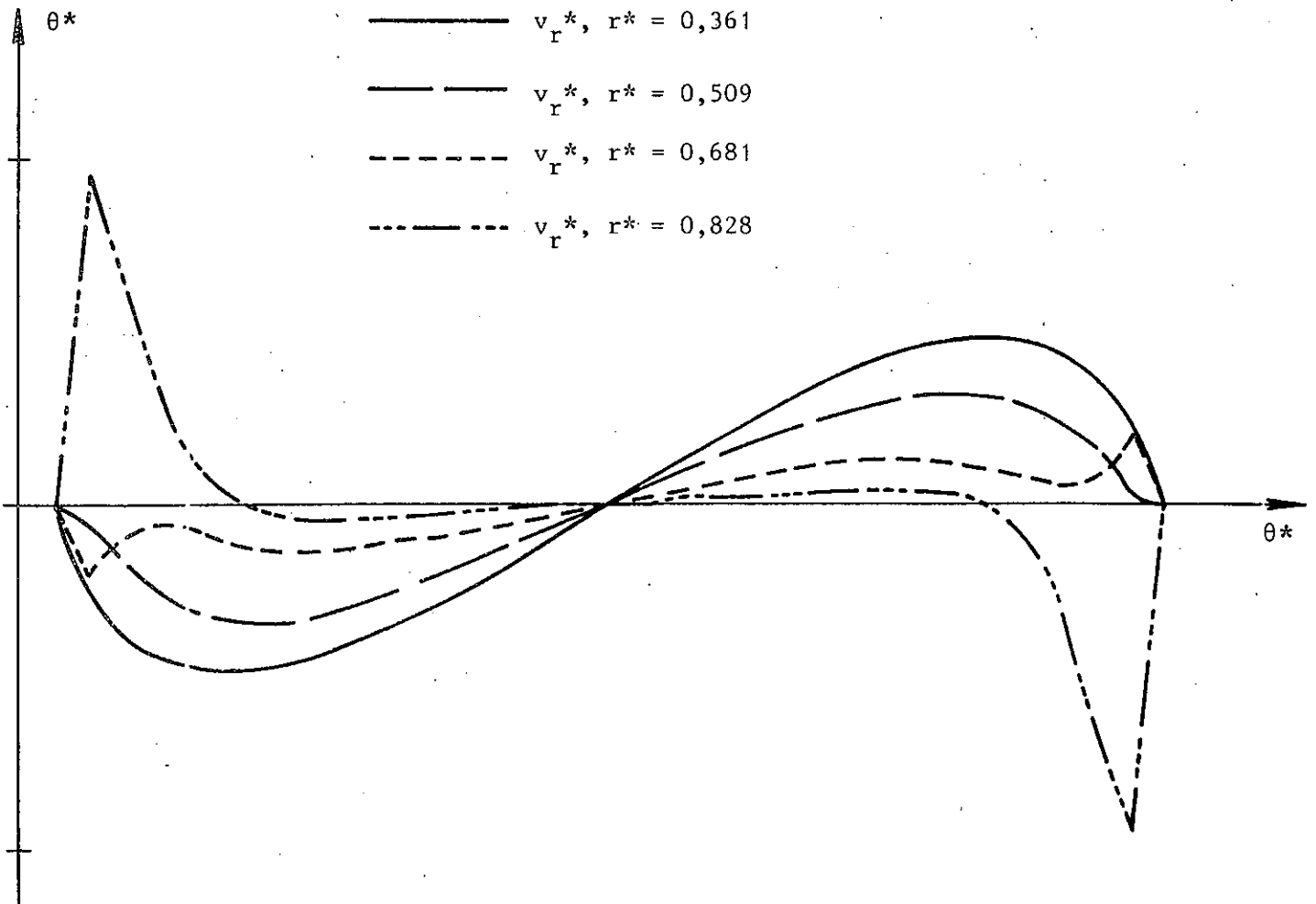
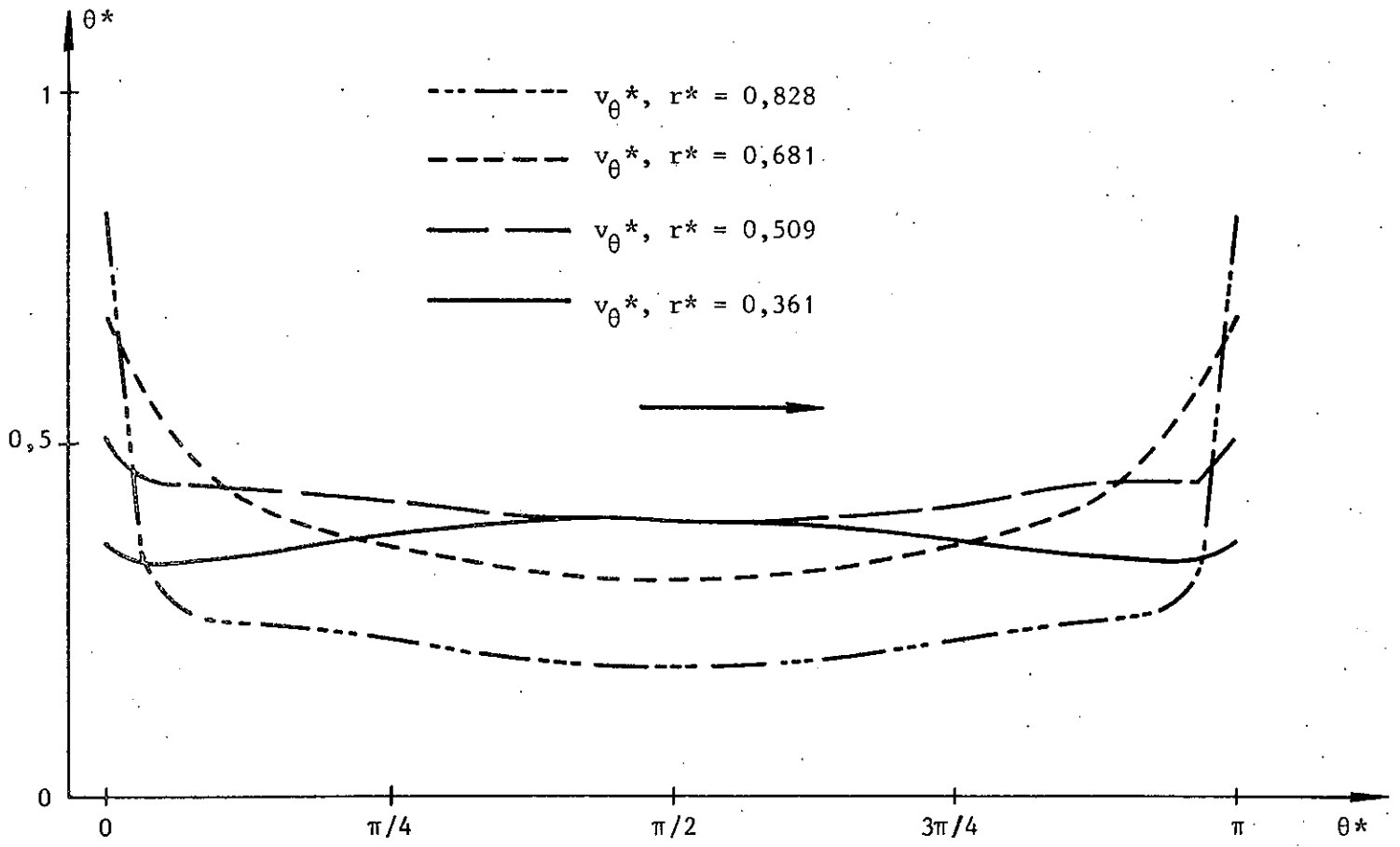


Fig. 6-18

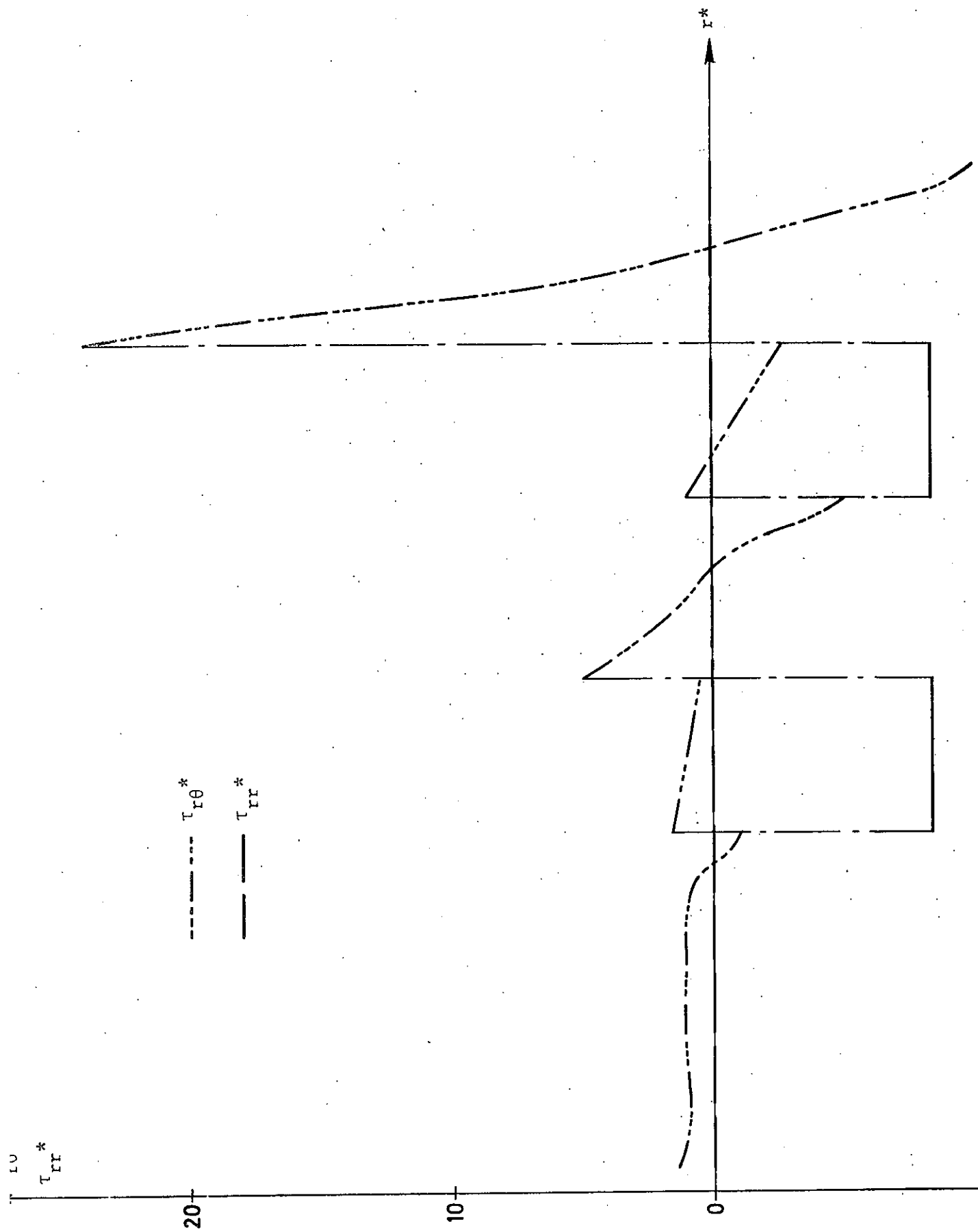


Fig. 6-19

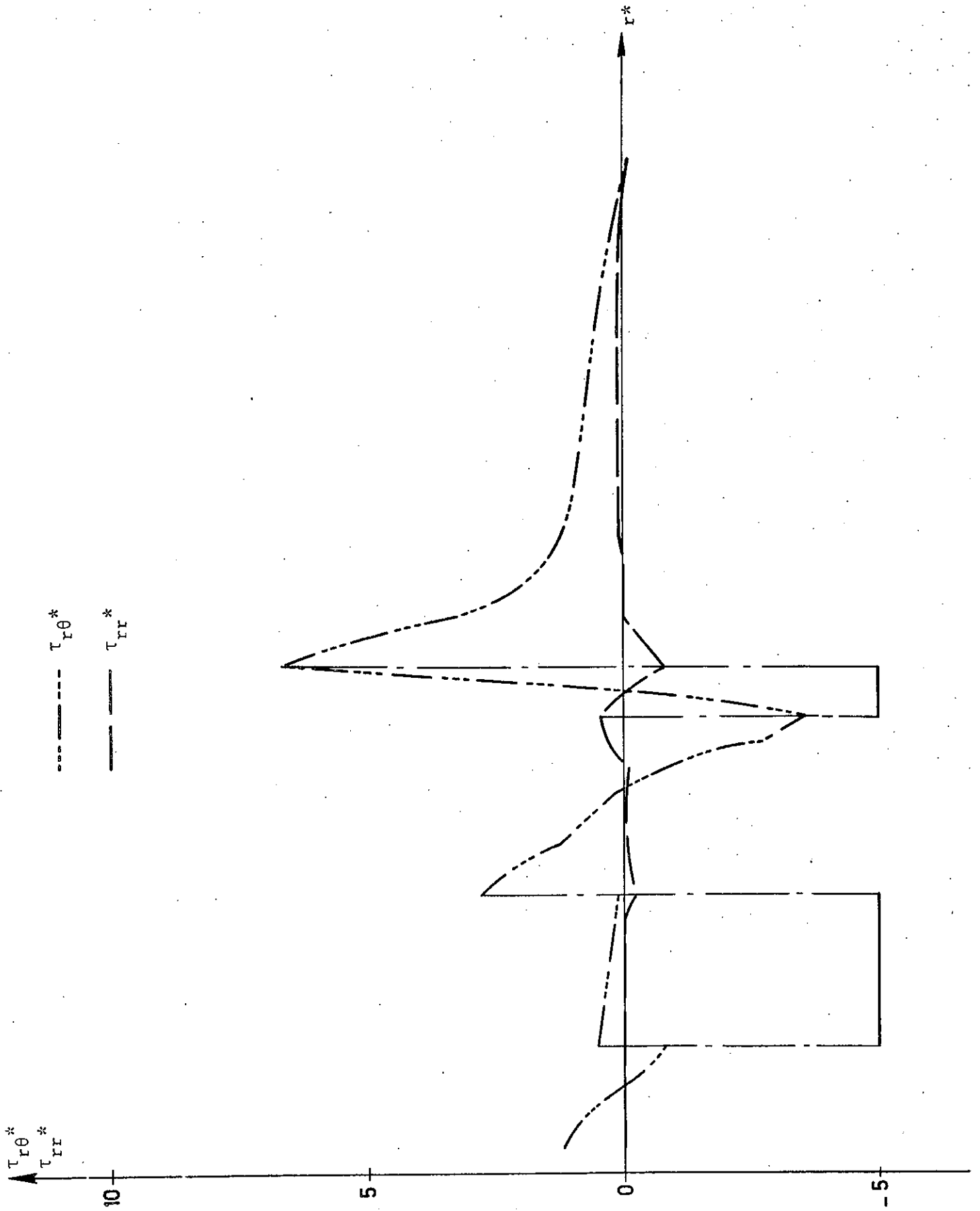
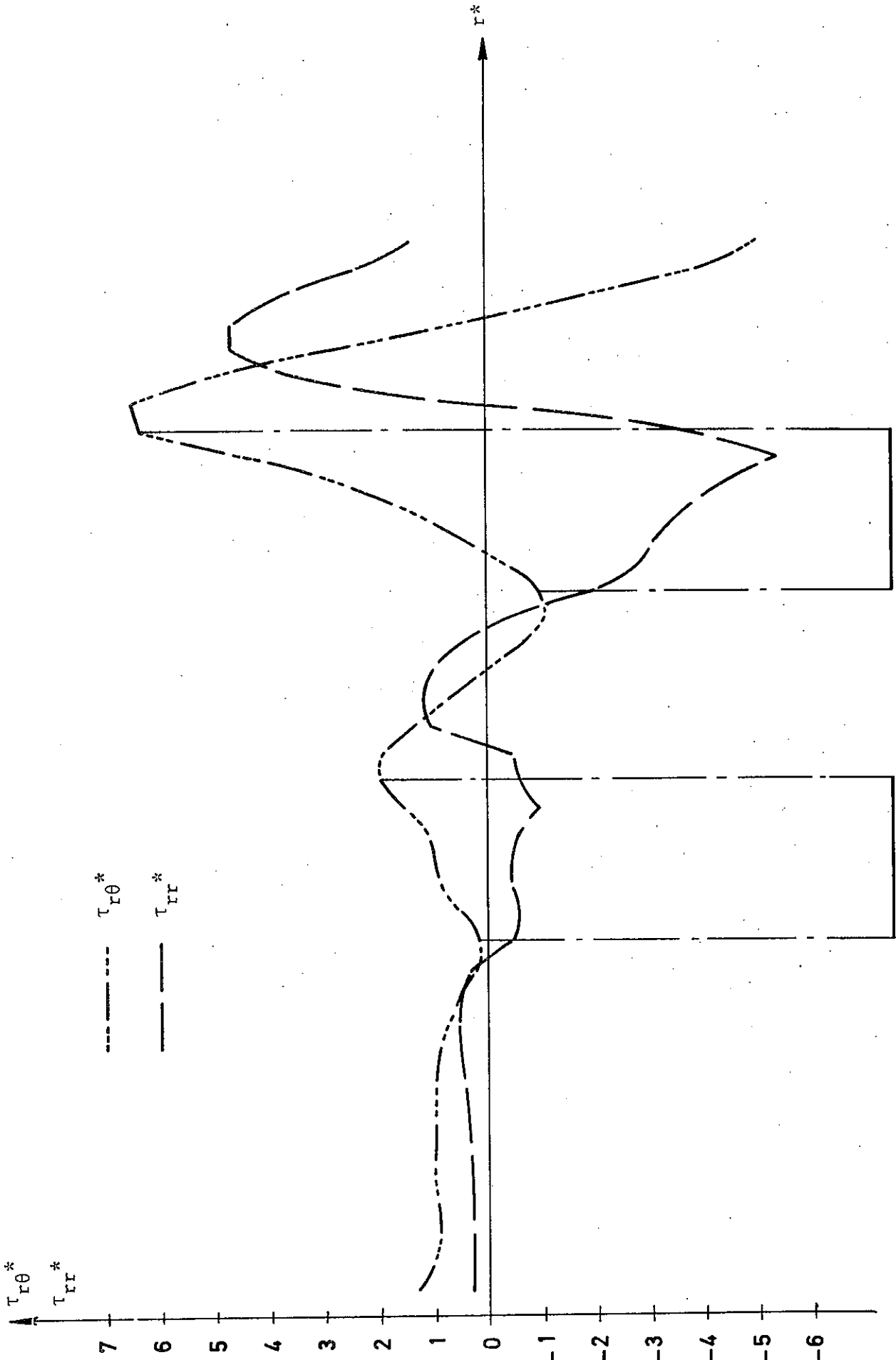


Fig. 6-20



$\tau_{r\theta}^*$ τ_{rr}^*

Fig. 6-21

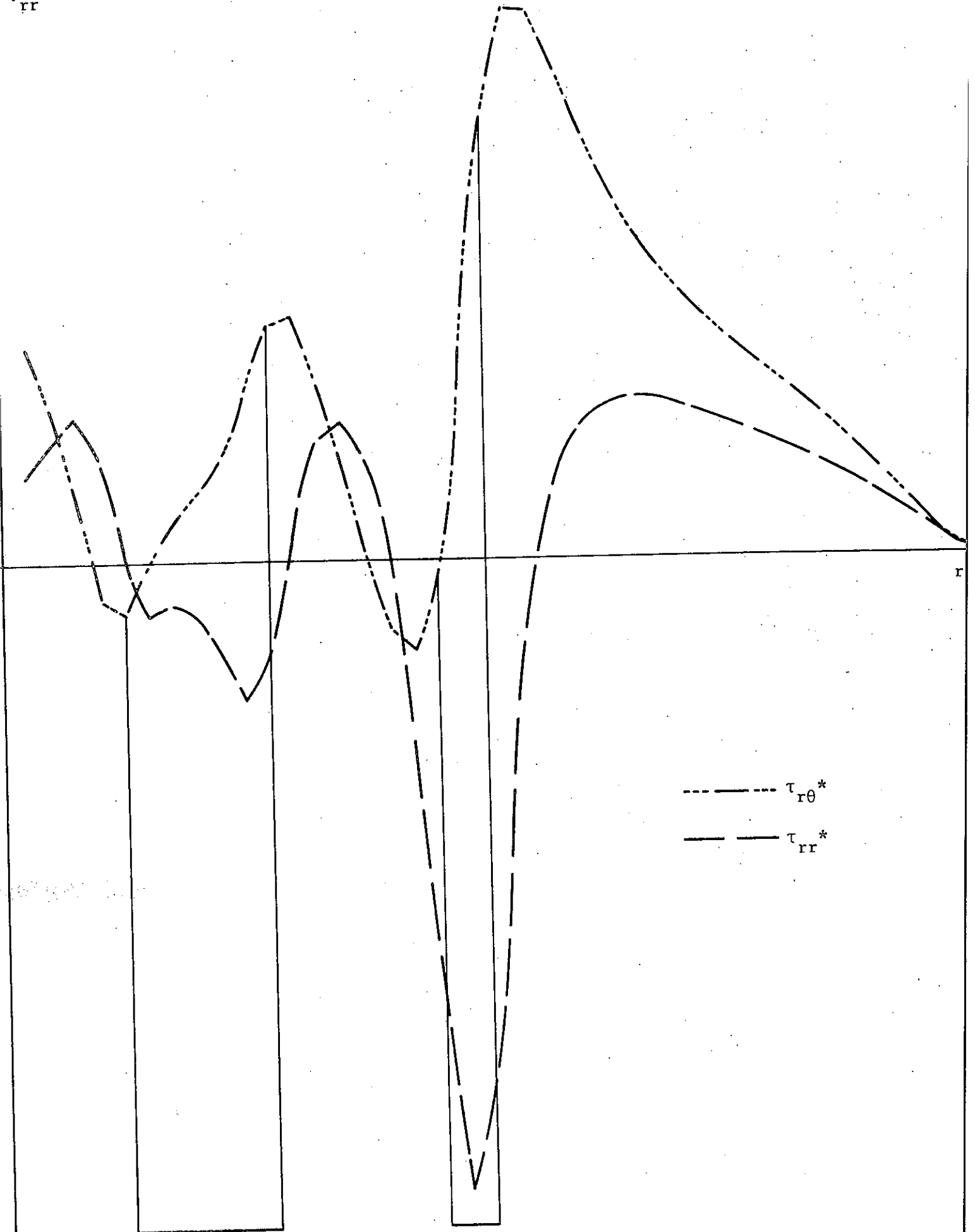


Fig. 6-22

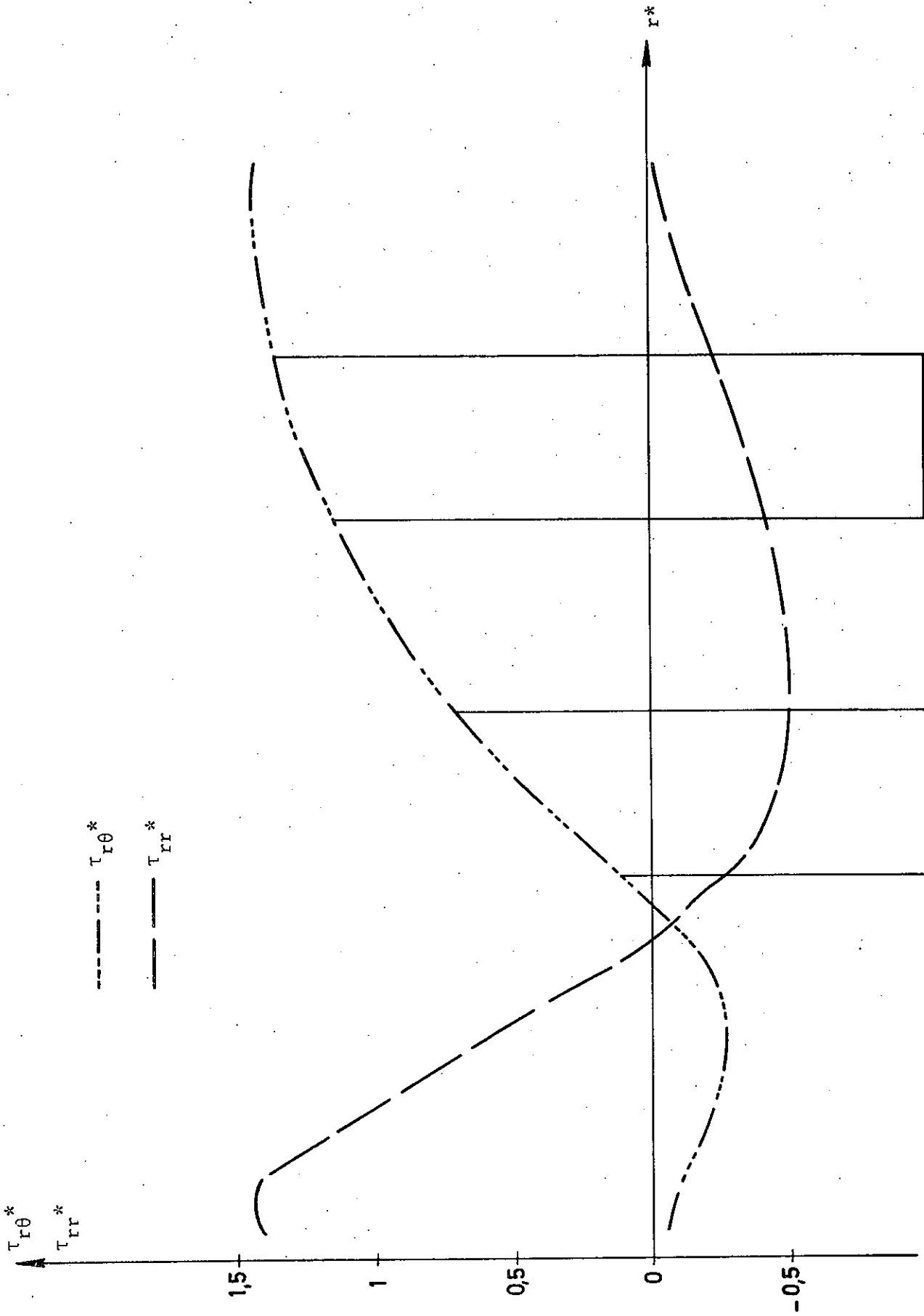


Fig. 6-23

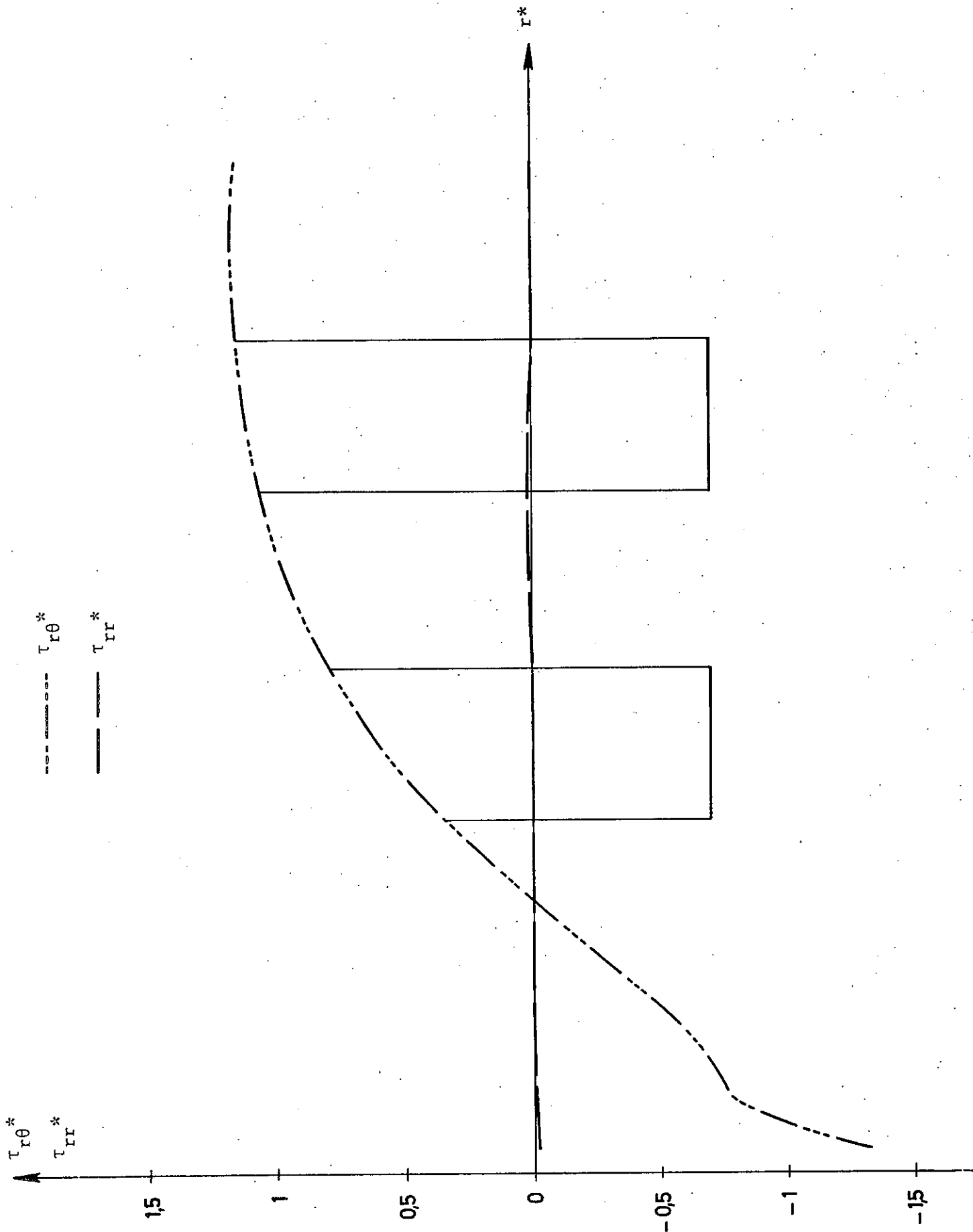


Fig. 6-24

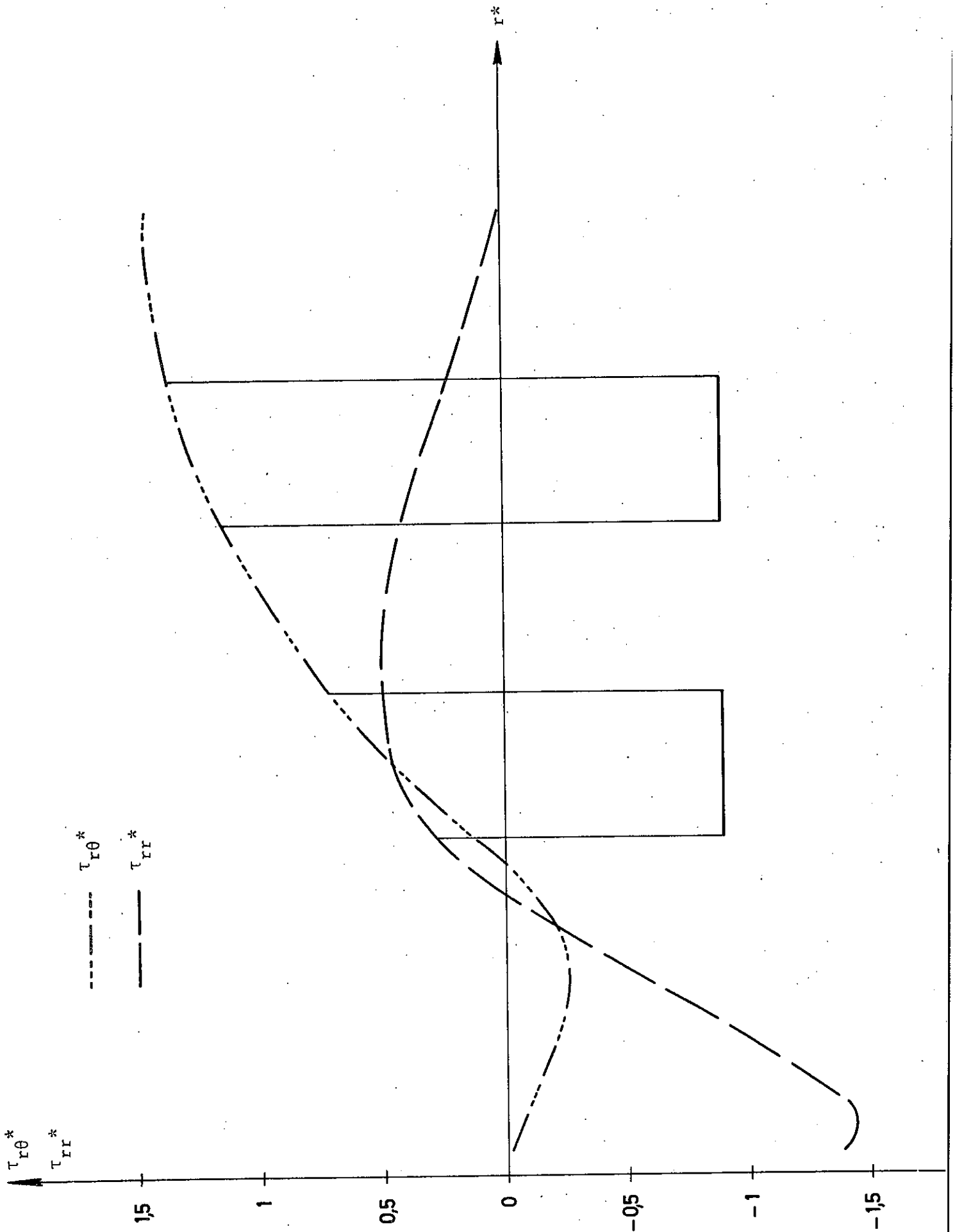


Fig. 6-25

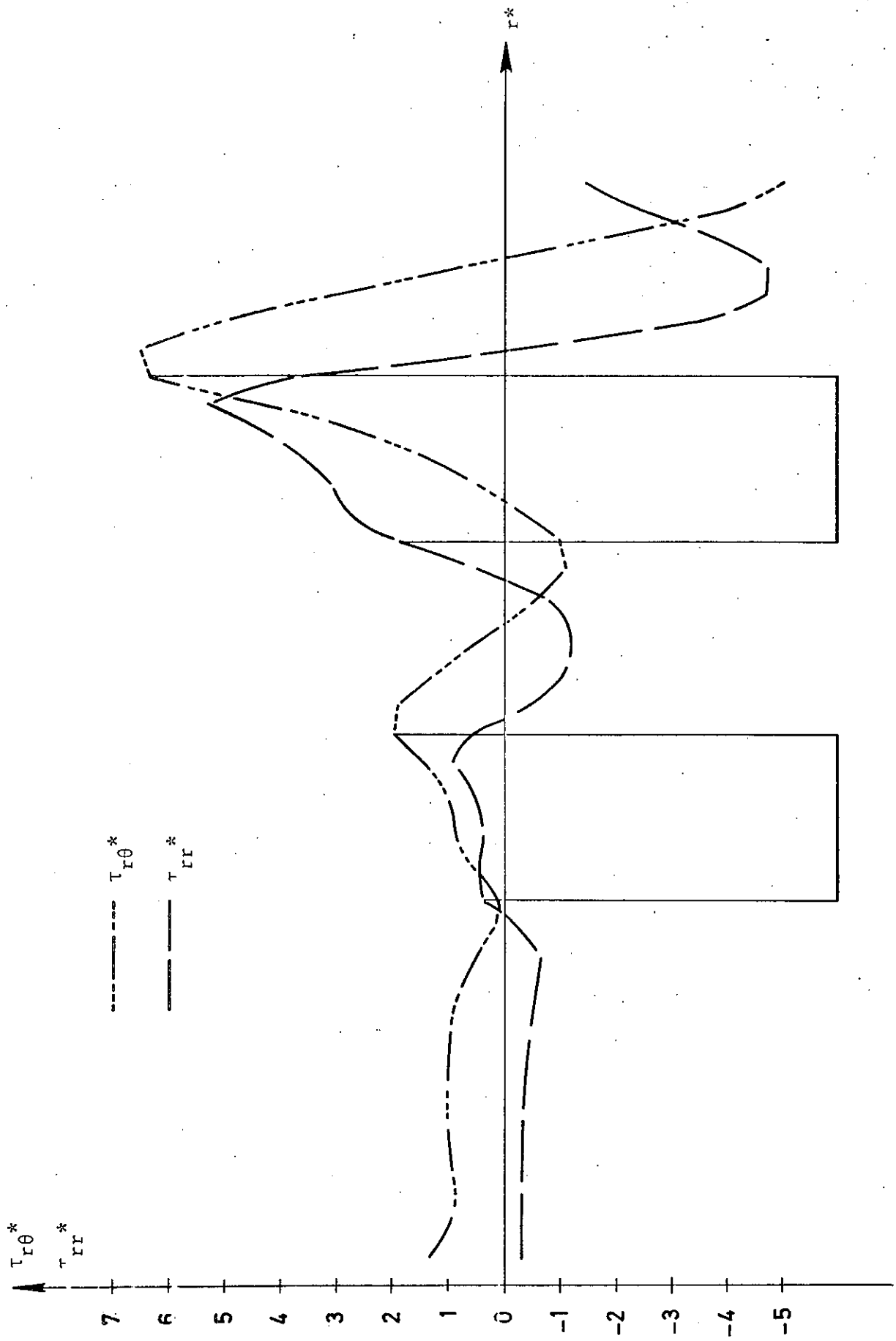


Fig. 6-26

----- $Re = 0,1 ; n = 1$

----- $Re = 10 ; n = 1$

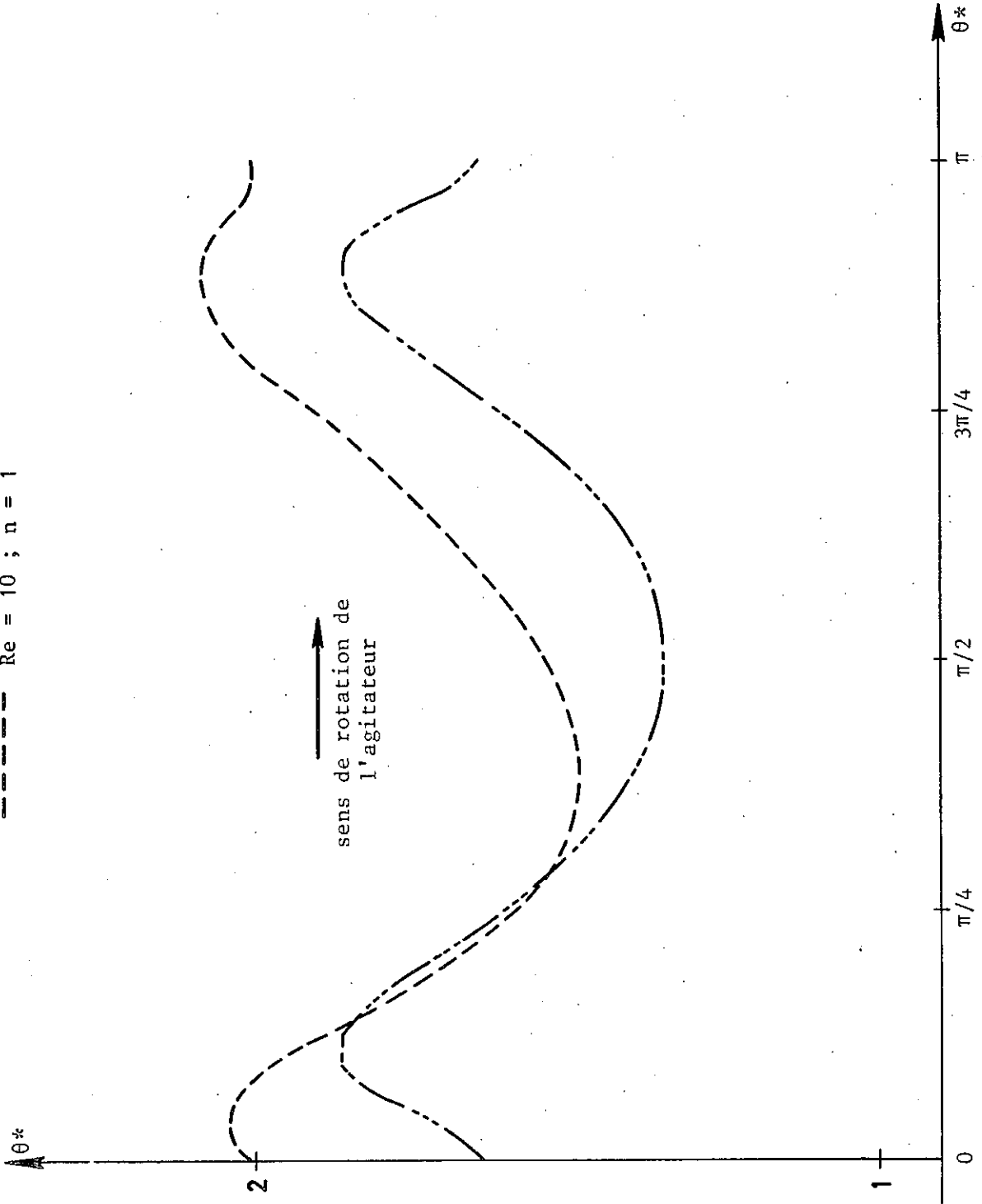


Fig. 6-27

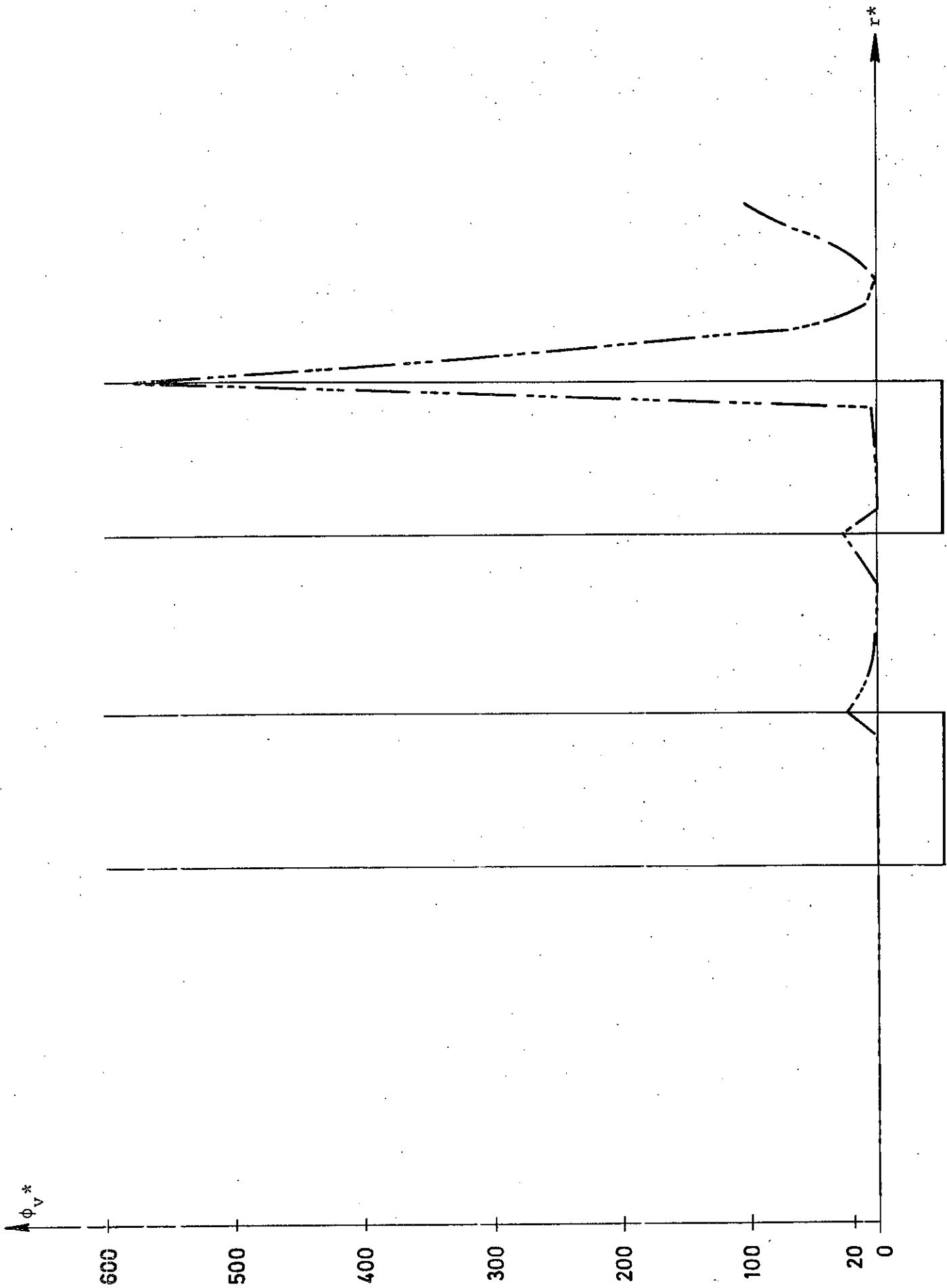


Fig. 5-28

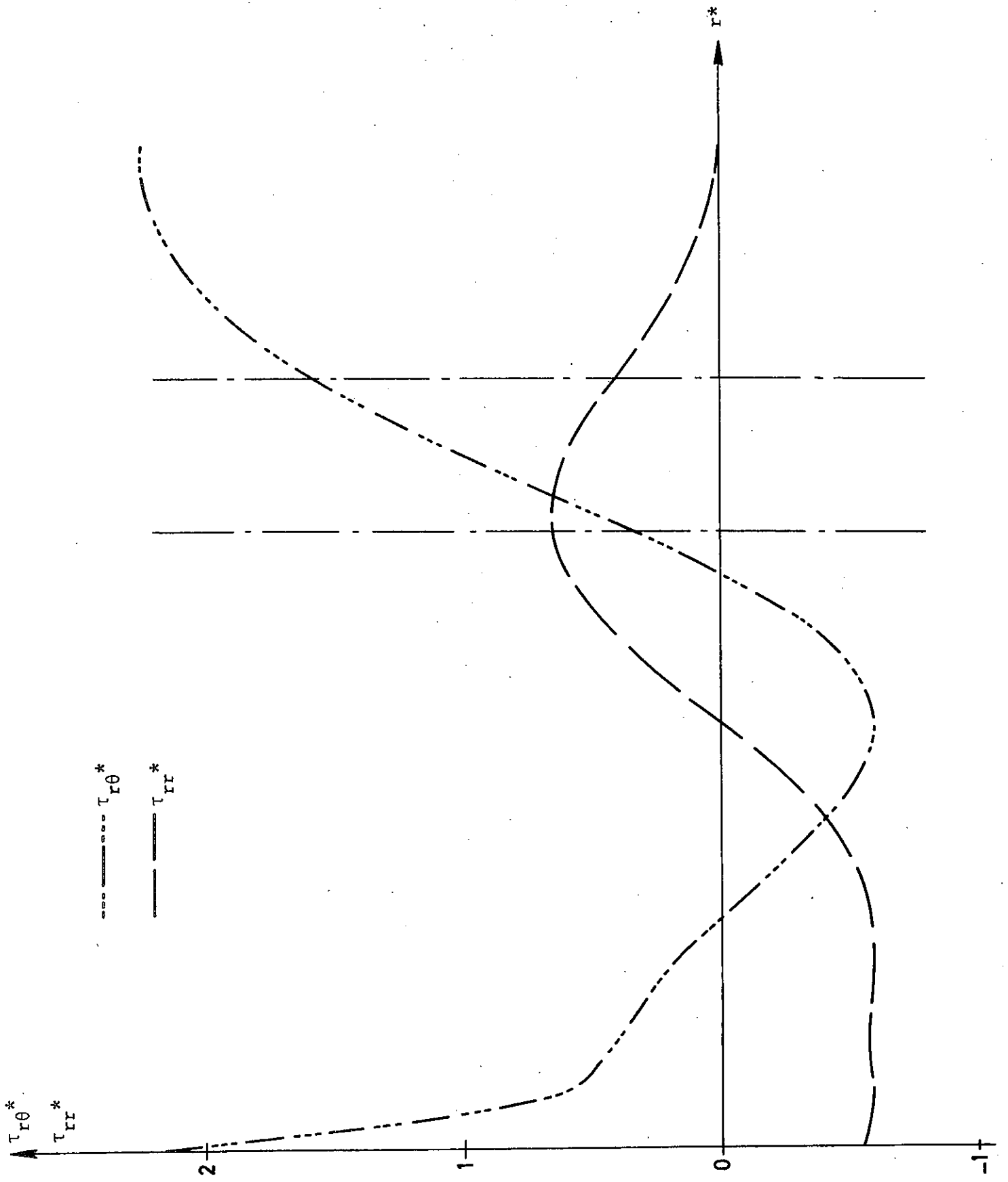


Fig. 6-29

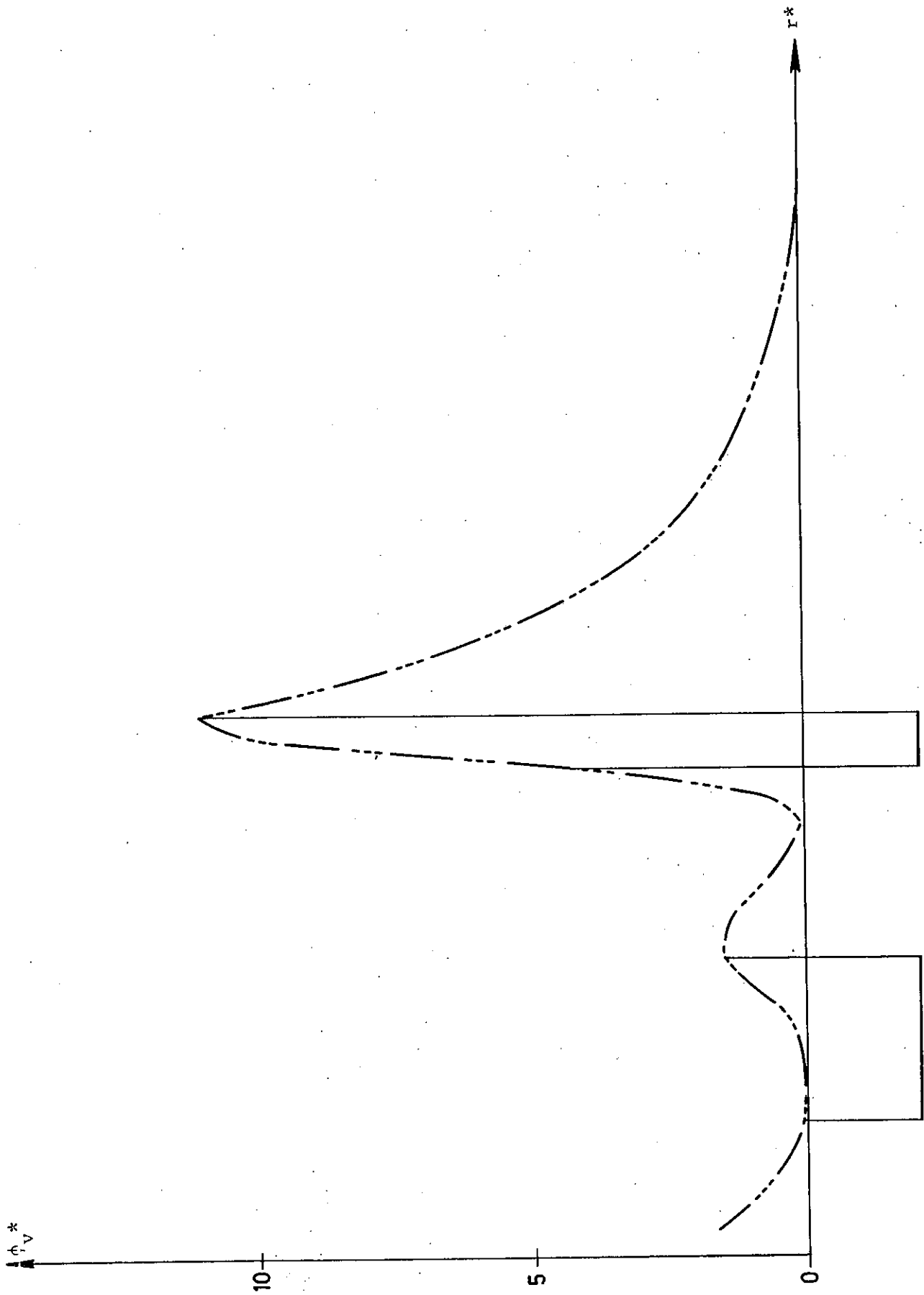


Fig. 6-30

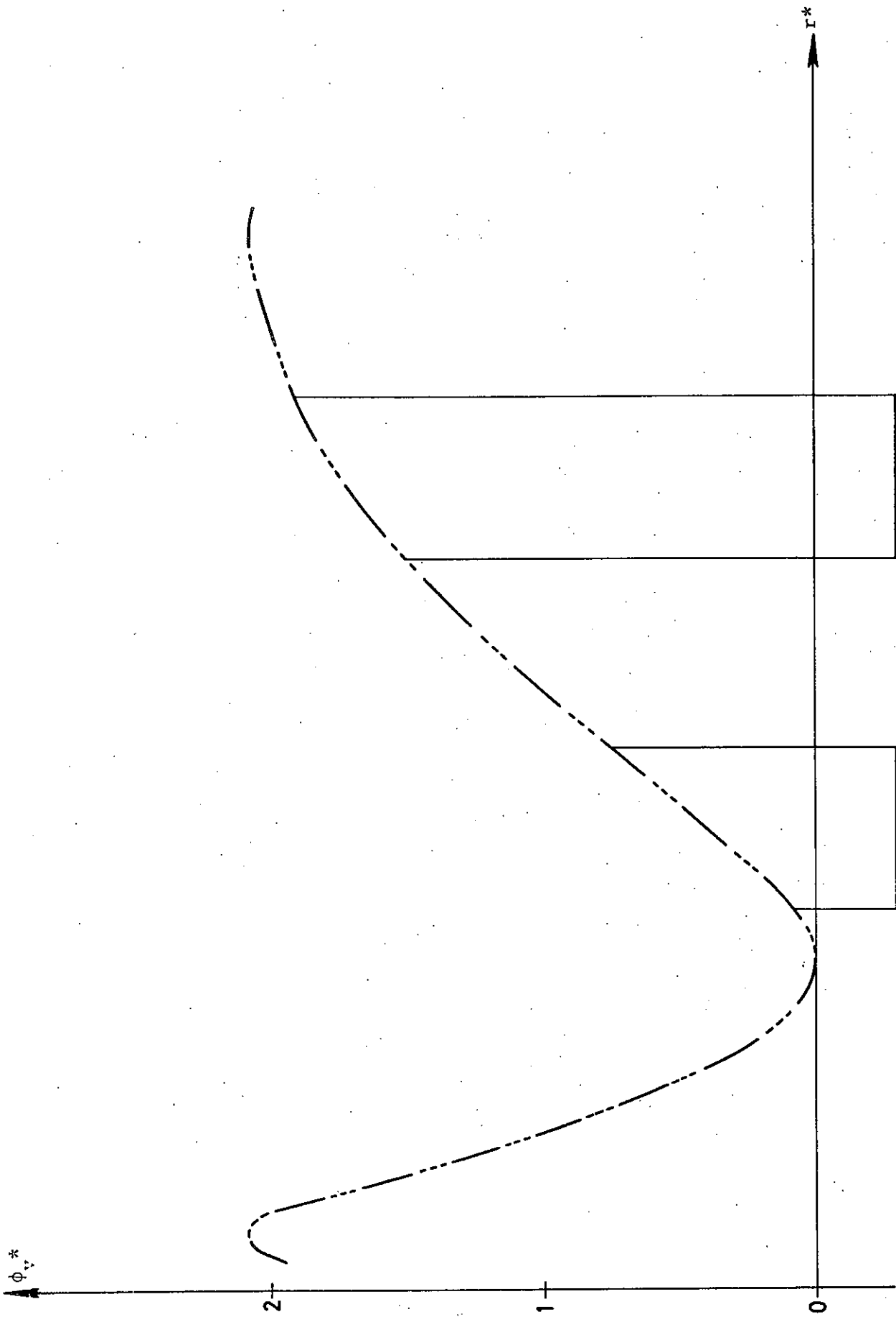


Fig. 6-31

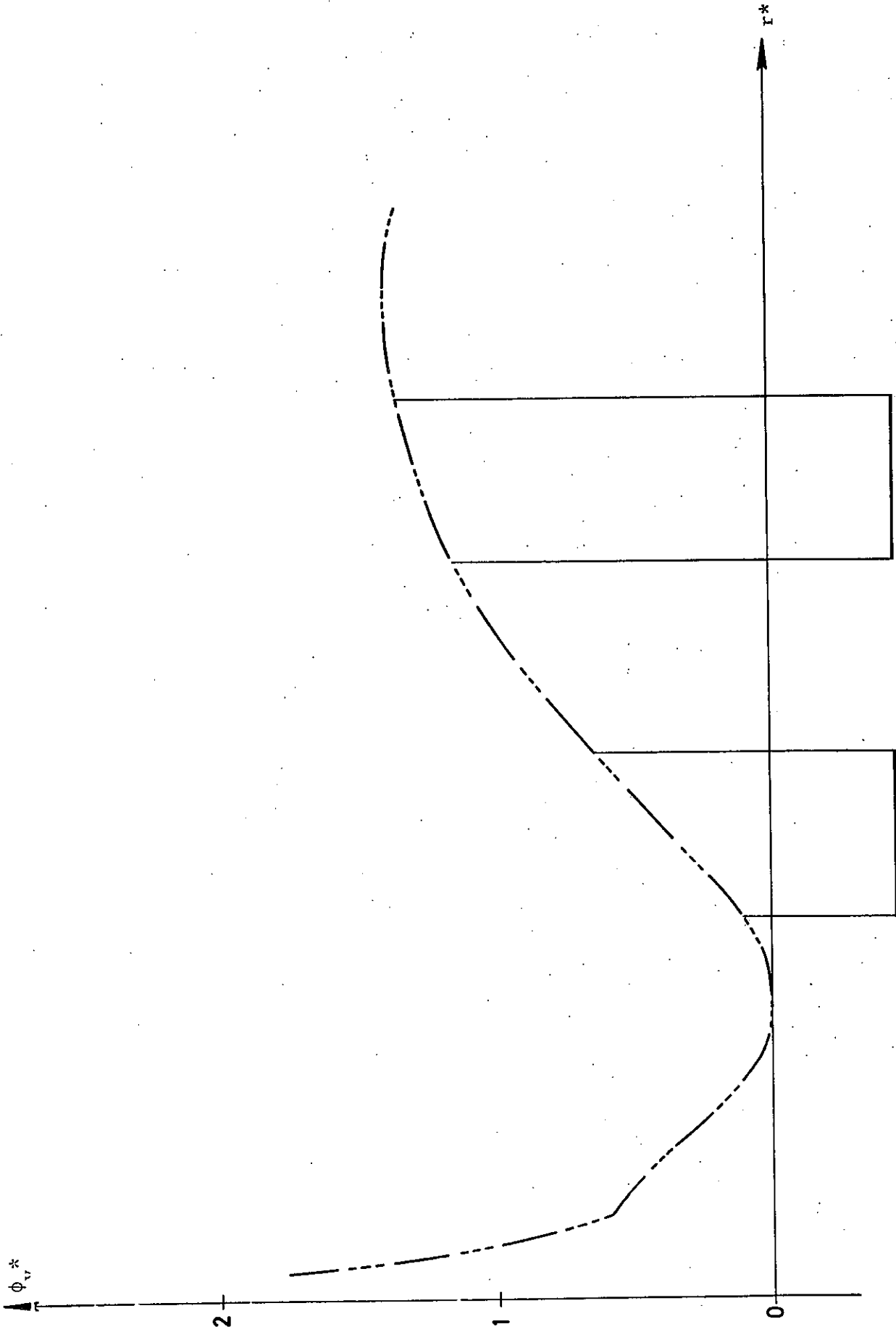


Fig. 6-32

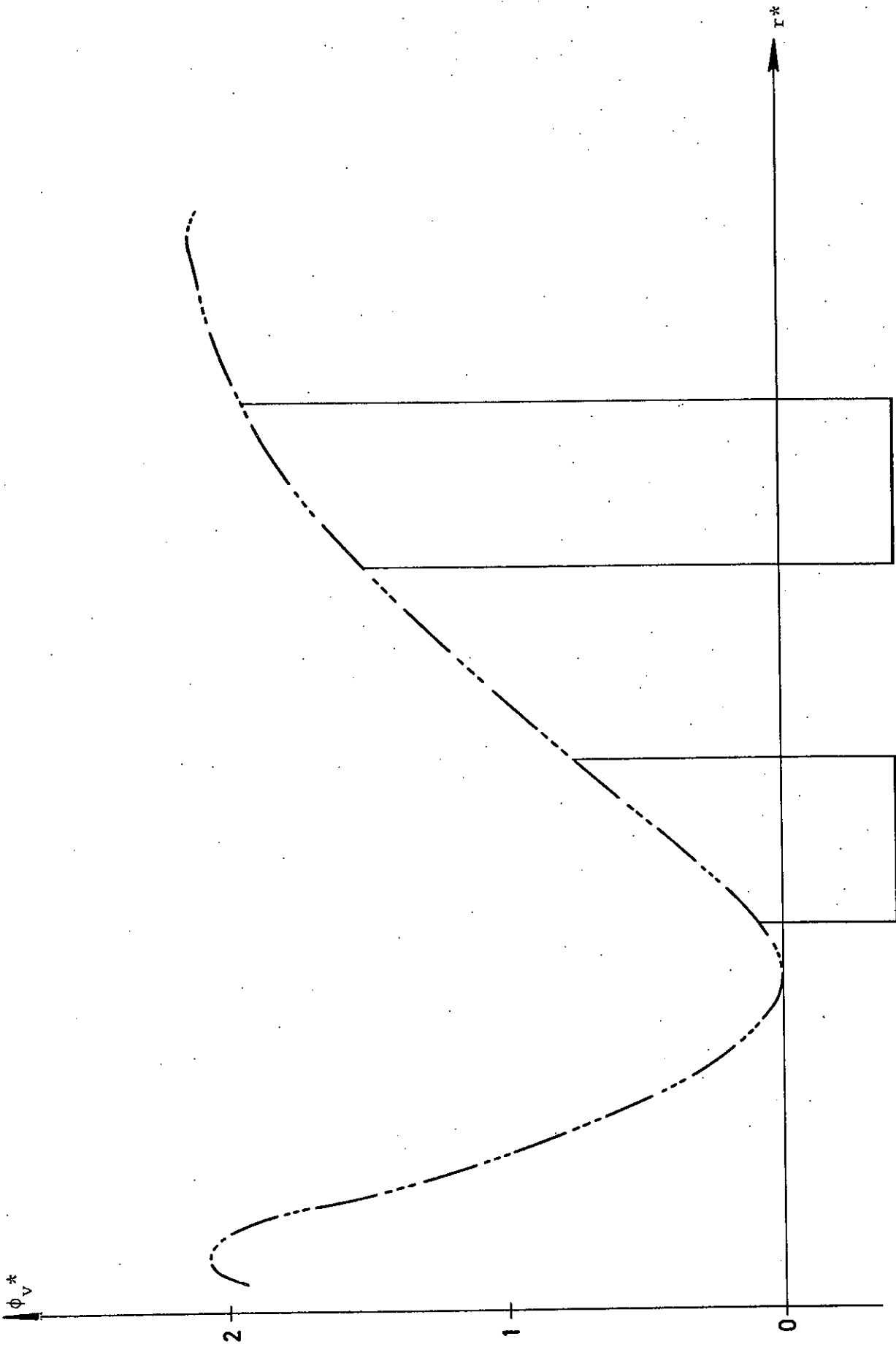


Fig. 6-33

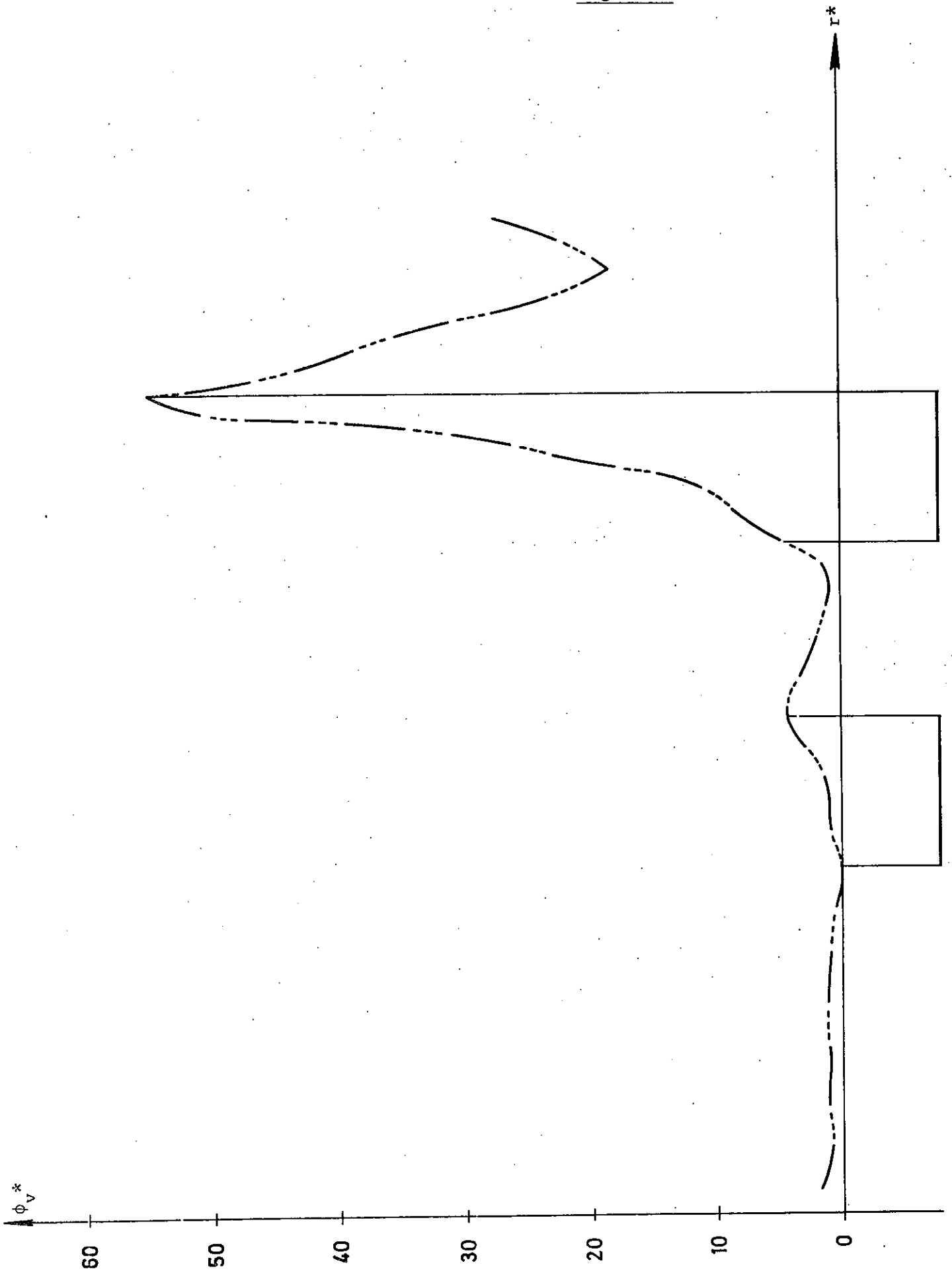


Fig. 6-34

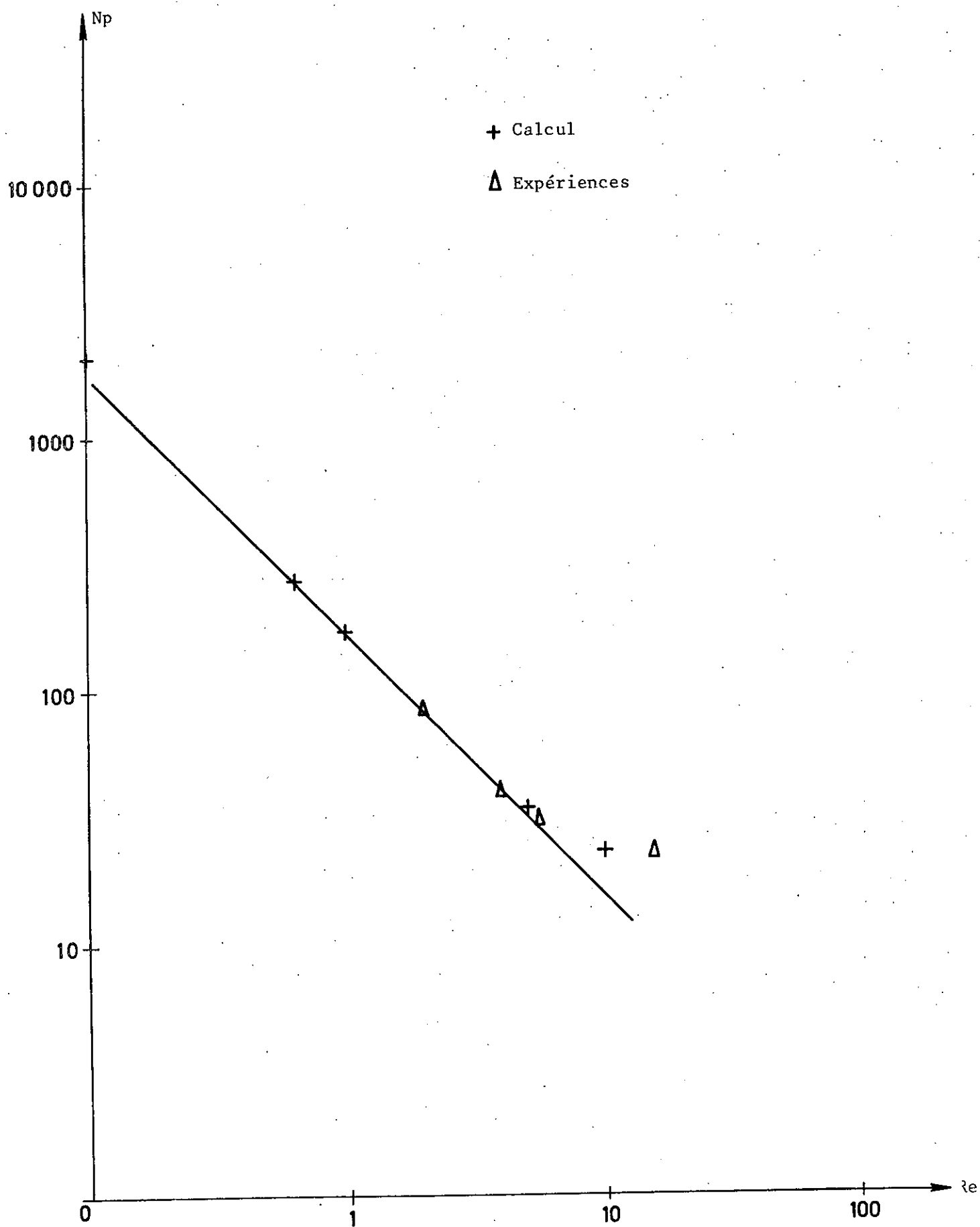


Fig. 7-1

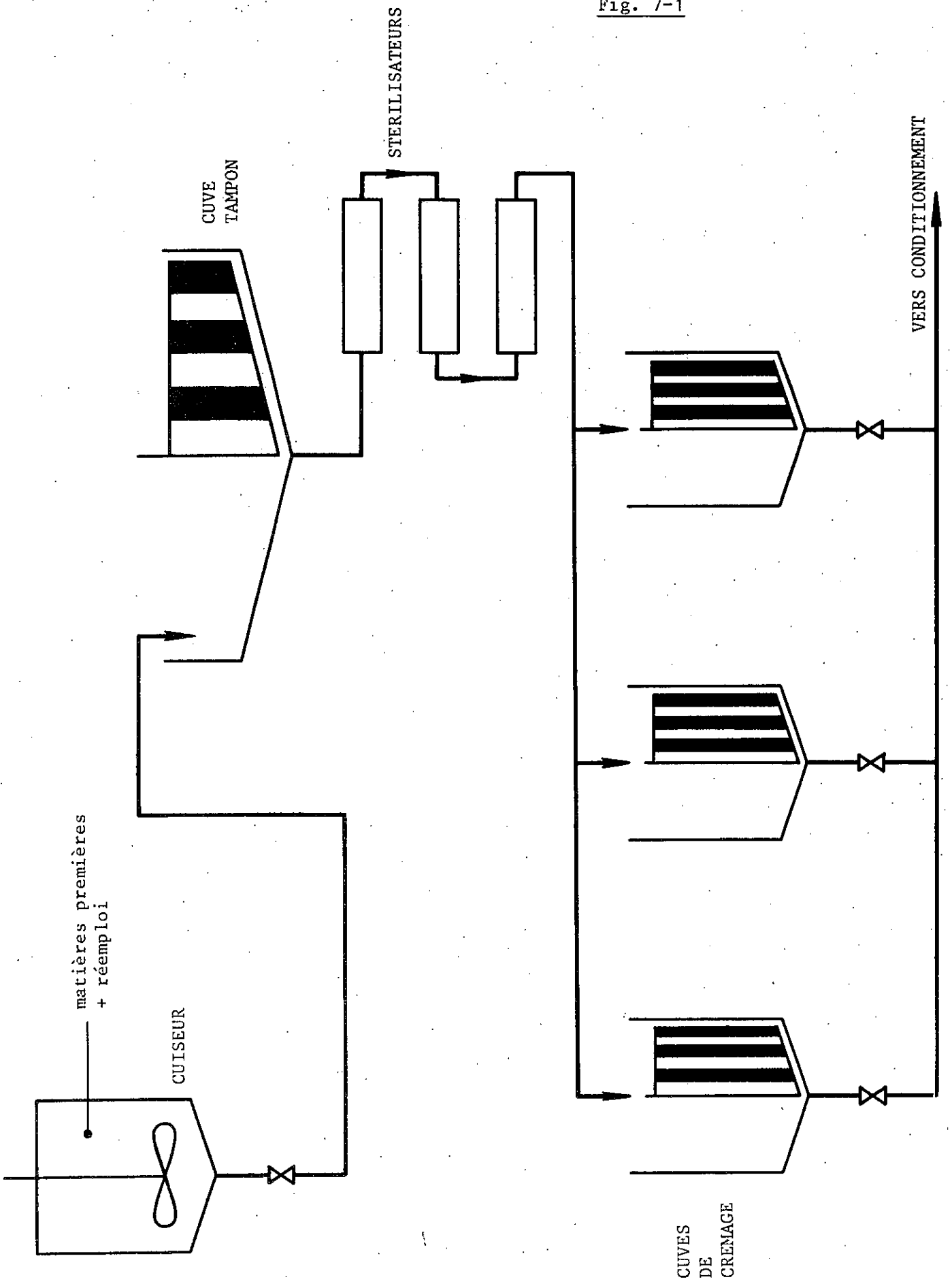


Fig. 7-2

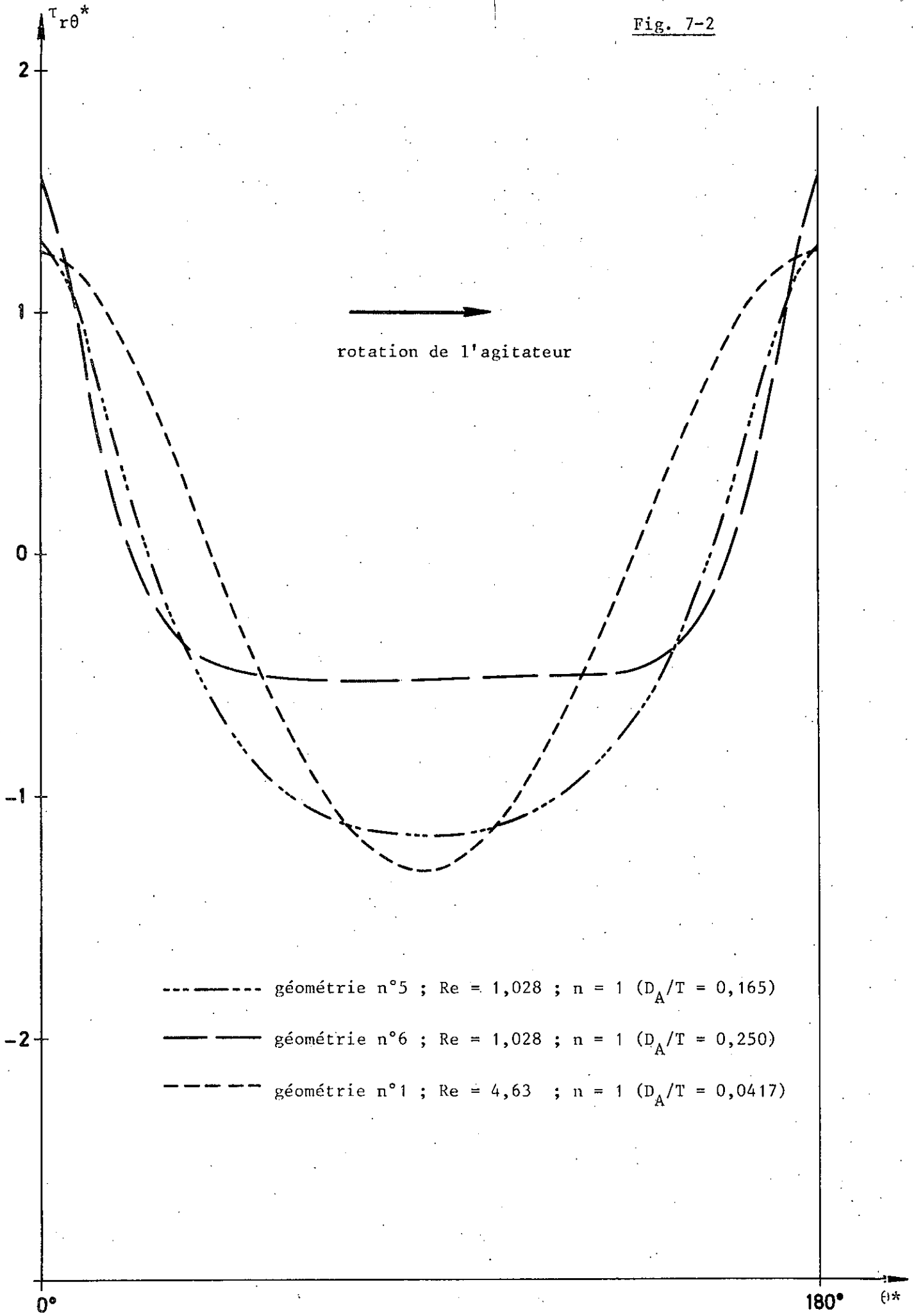


Fig. 7-3

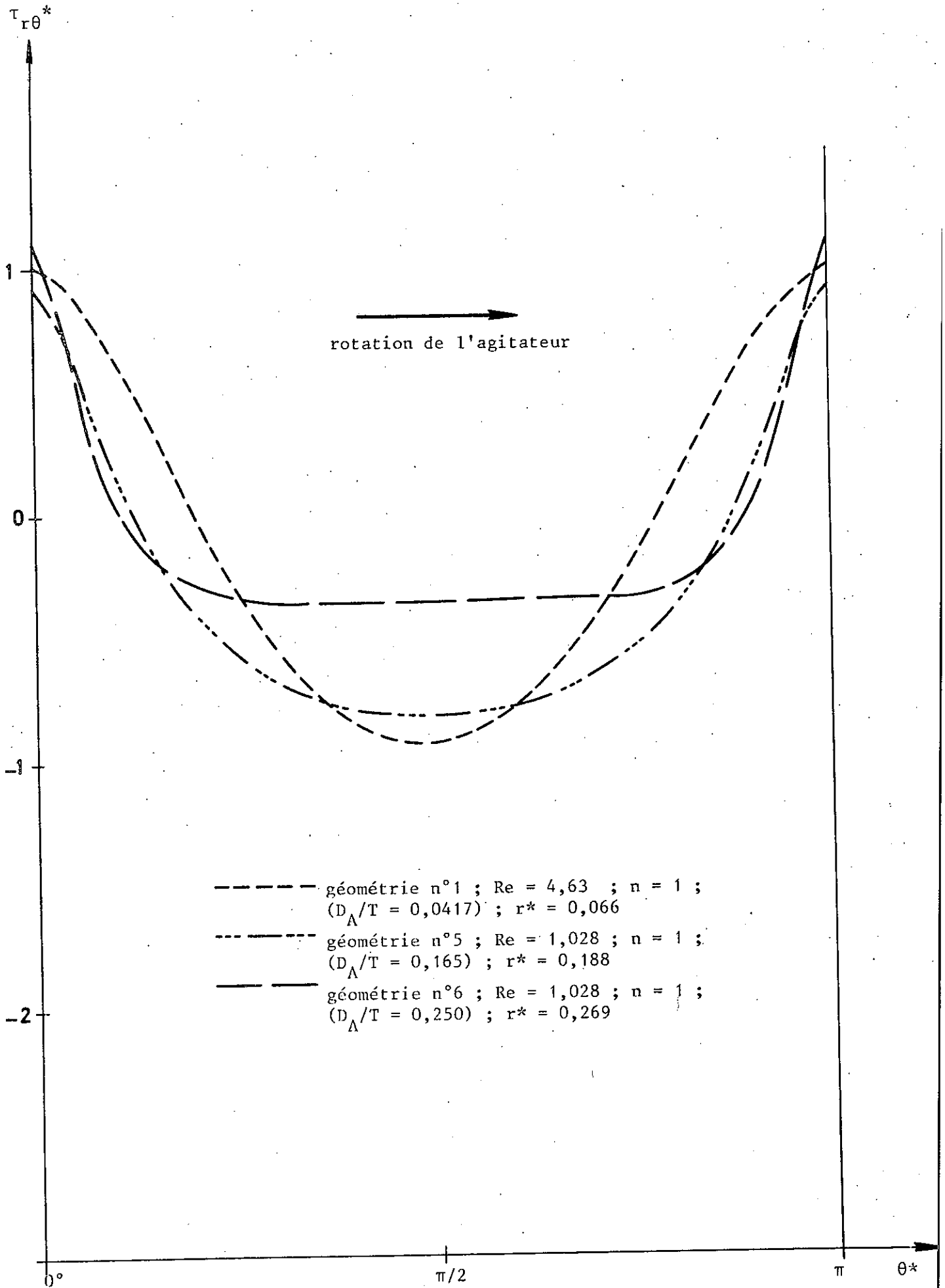
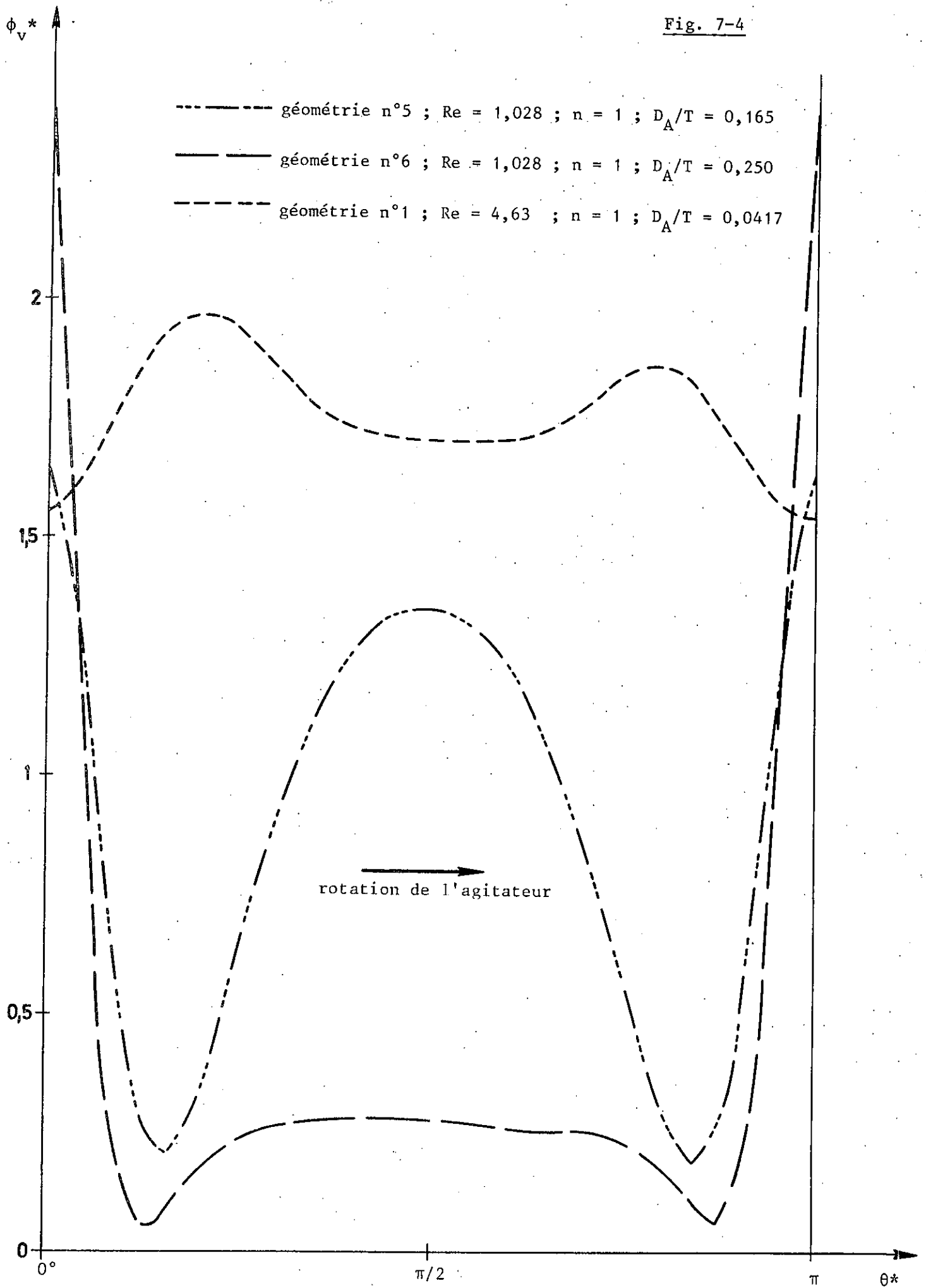


Fig. 7-4



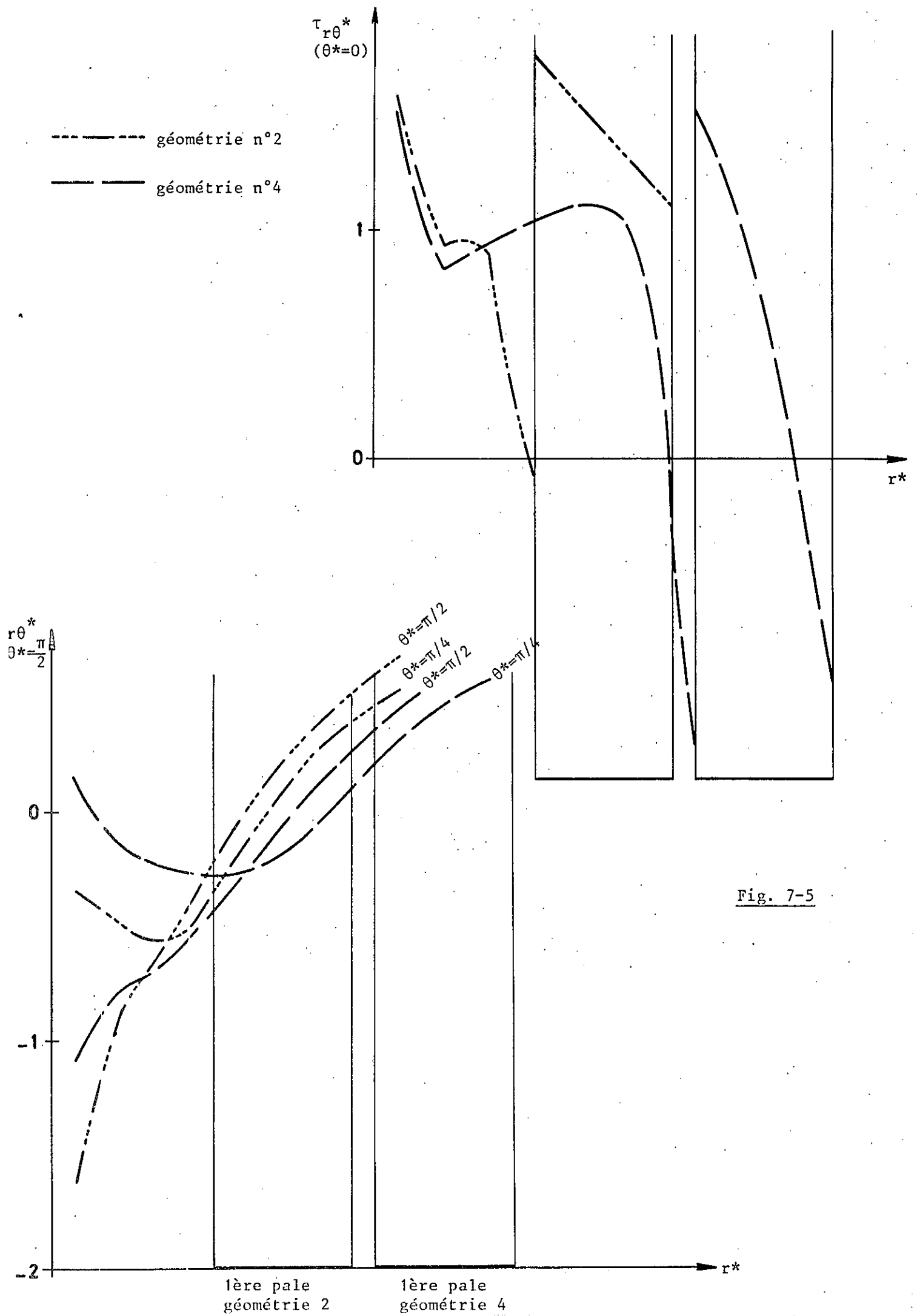


Fig. 7-5

Fig. 7-6

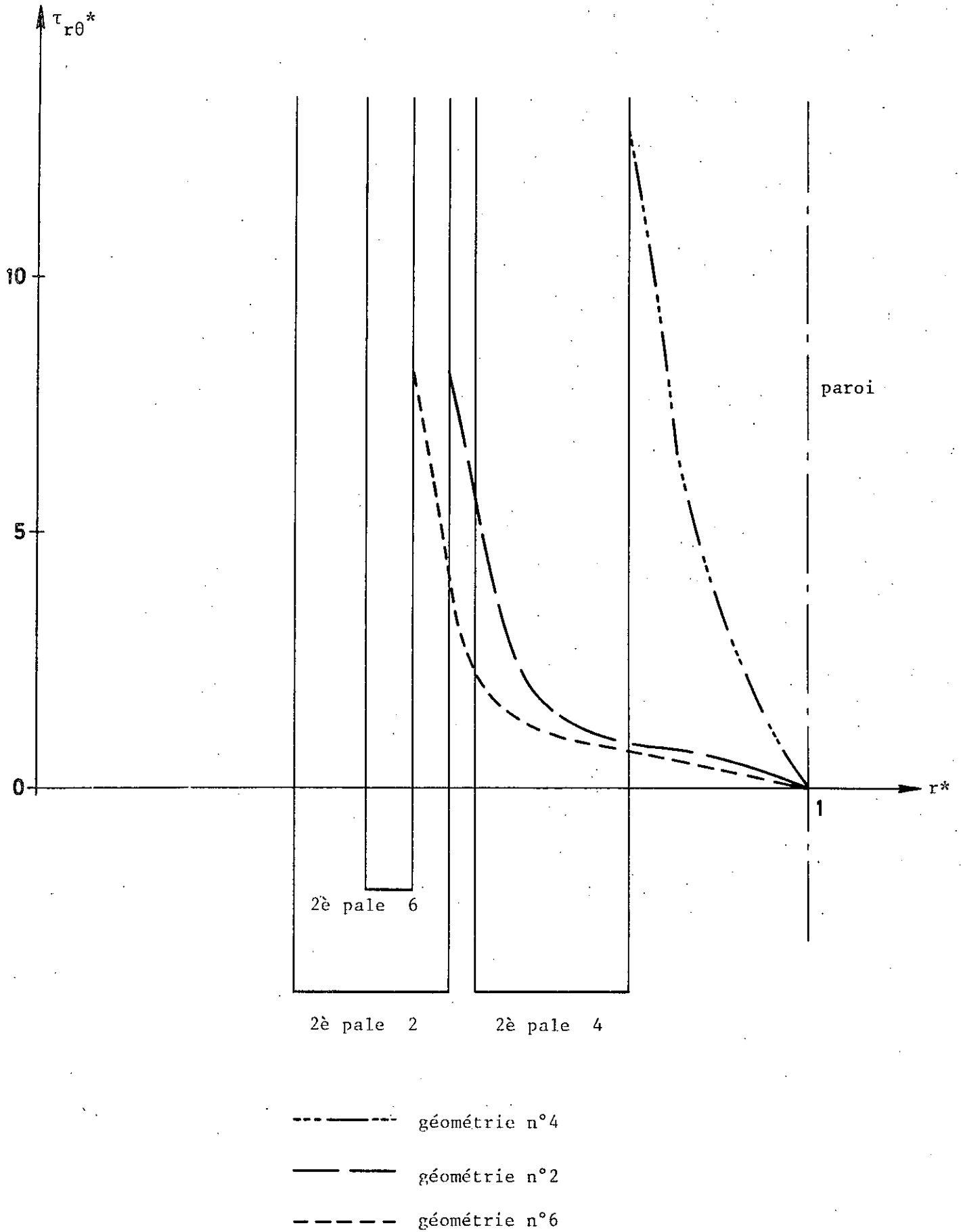


Fig. 7-7

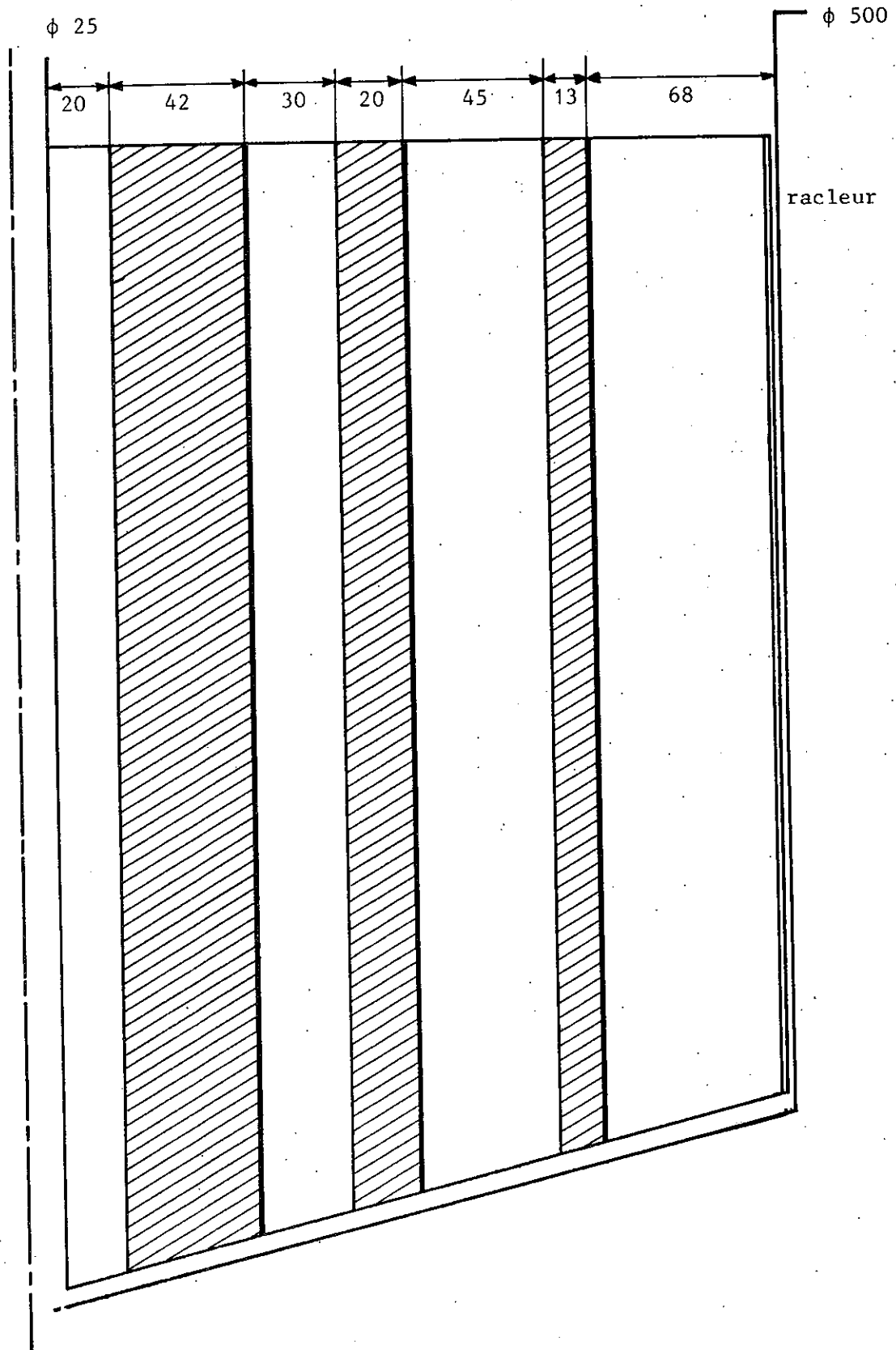


Fig. 7-8

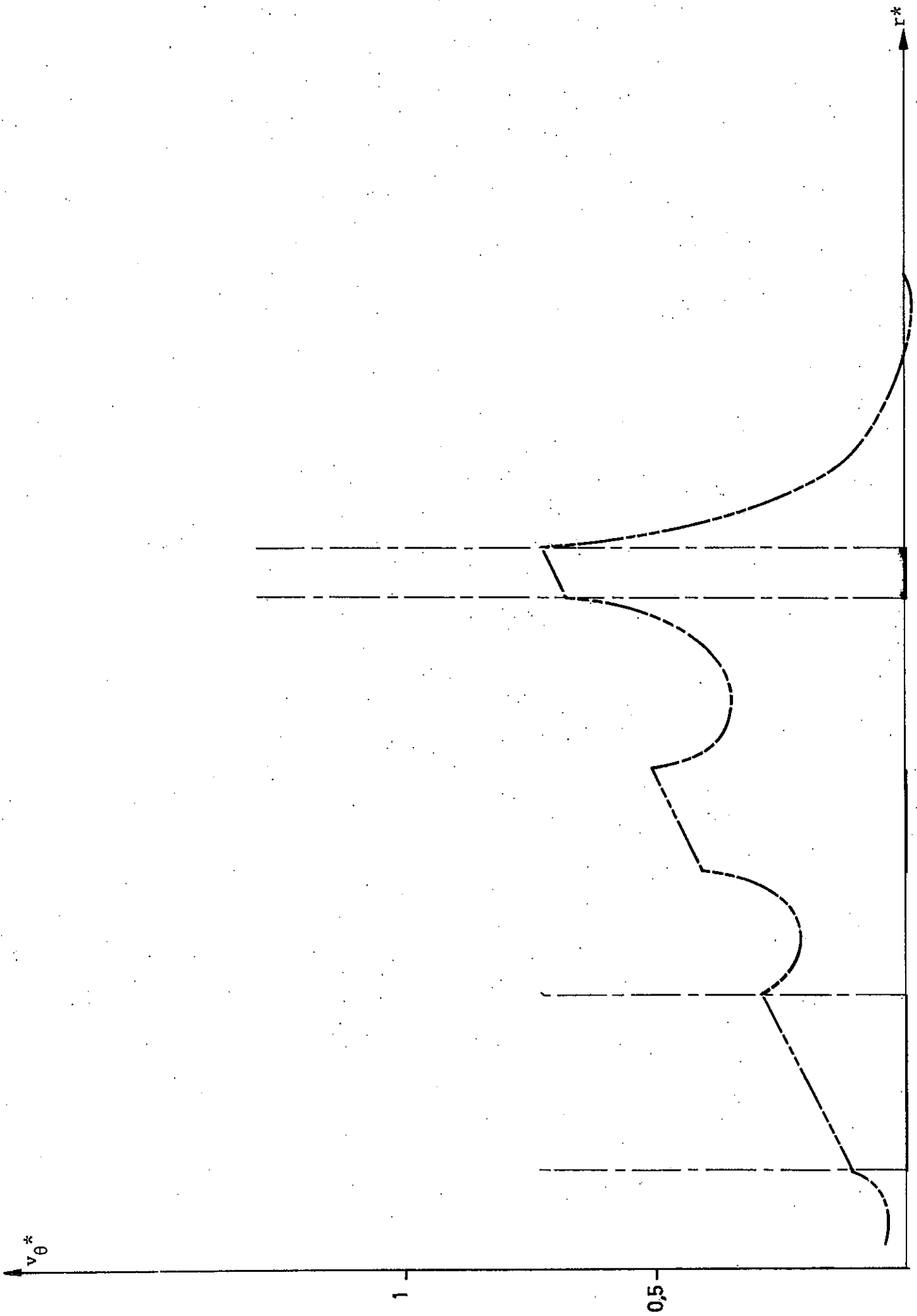


Fig. 7-9

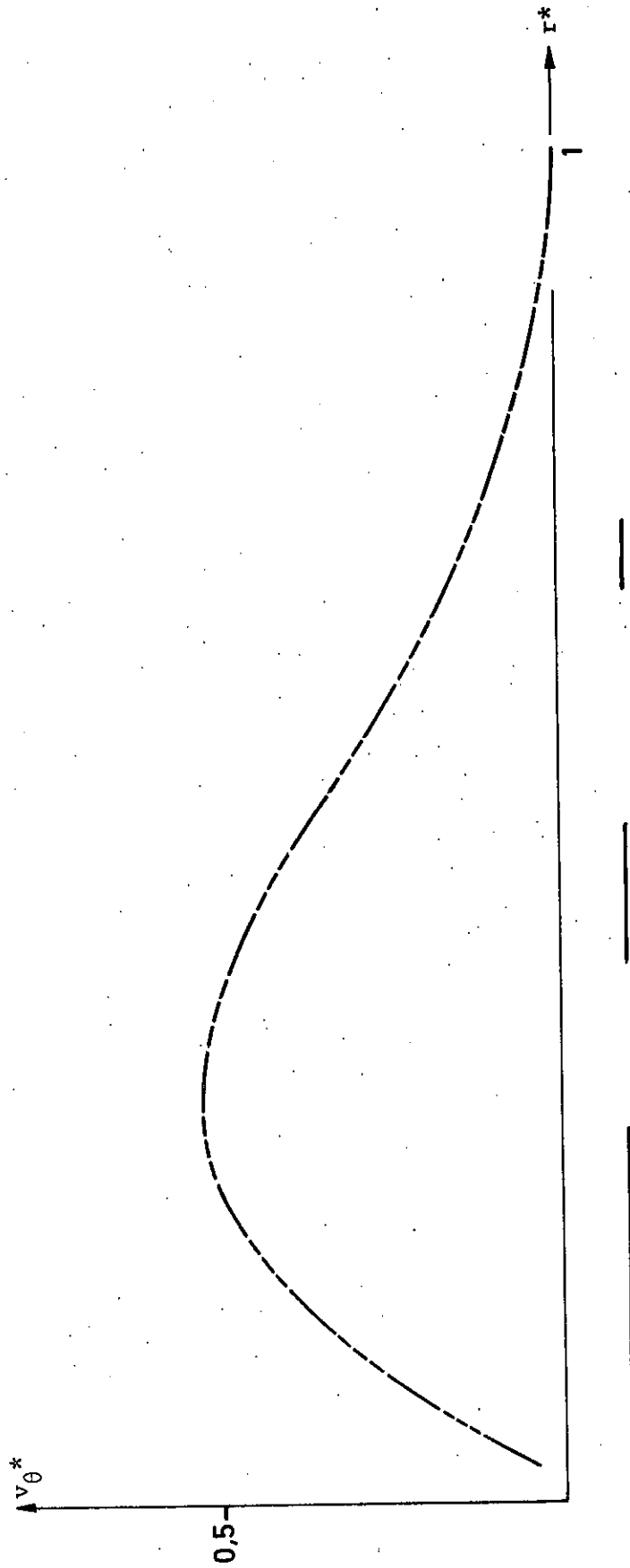


Fig. 7-10

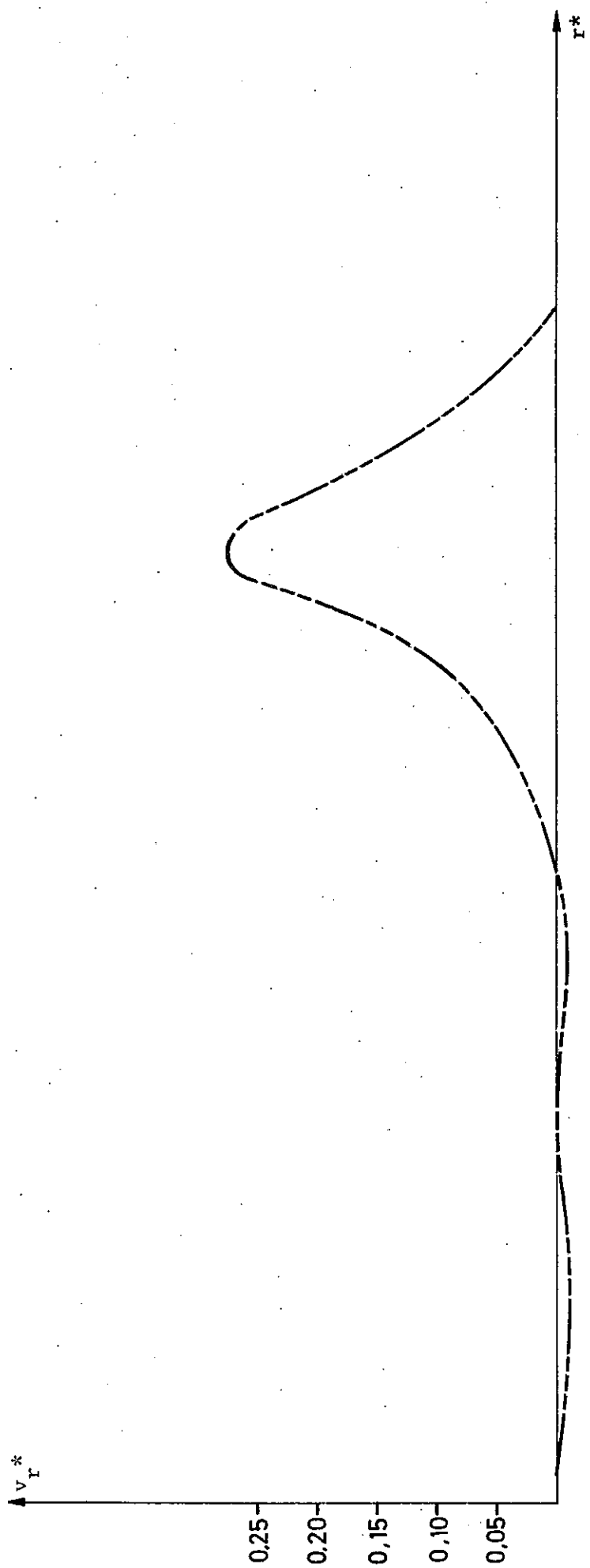


Fig. 7-11

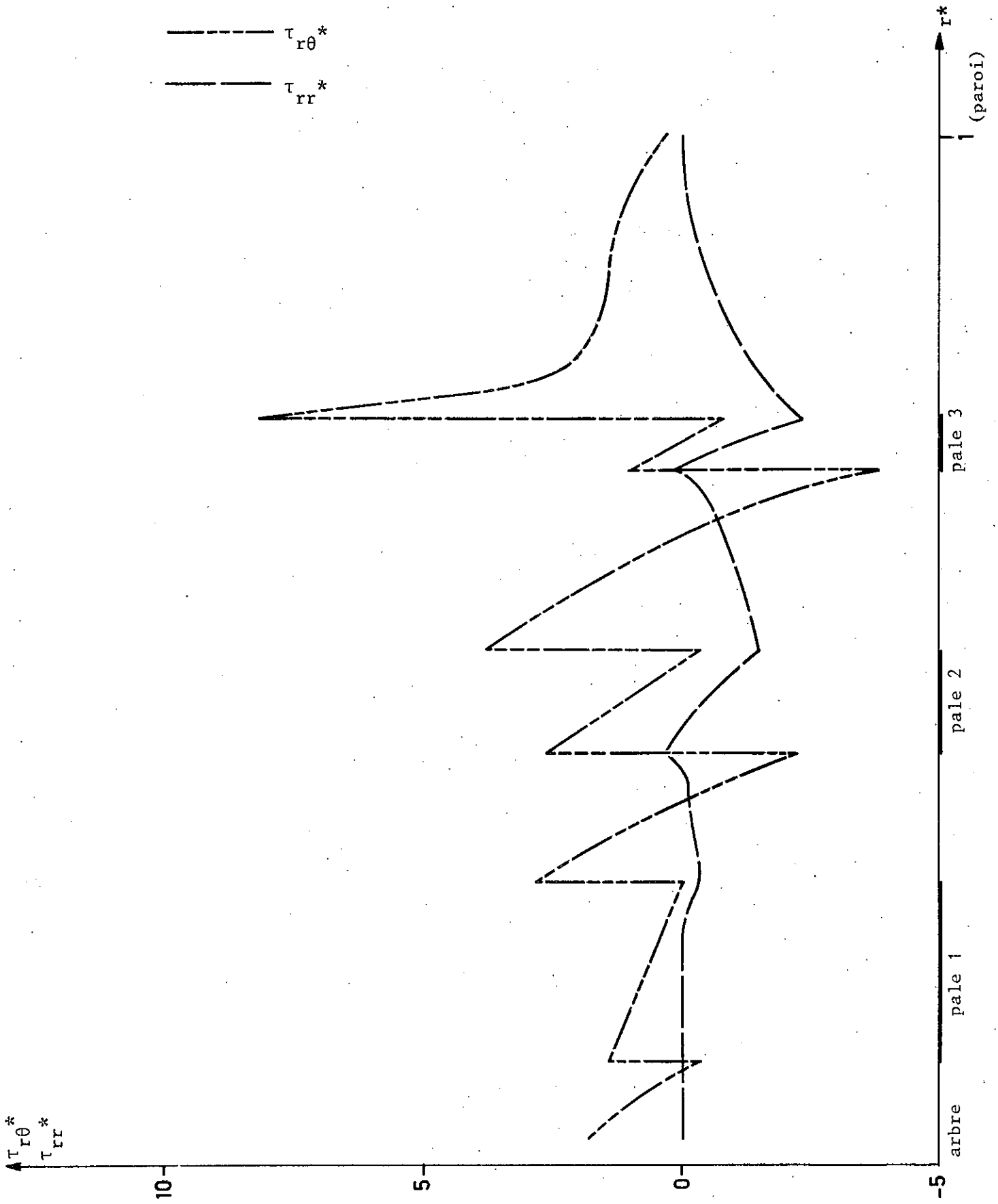


Fig. 7-12

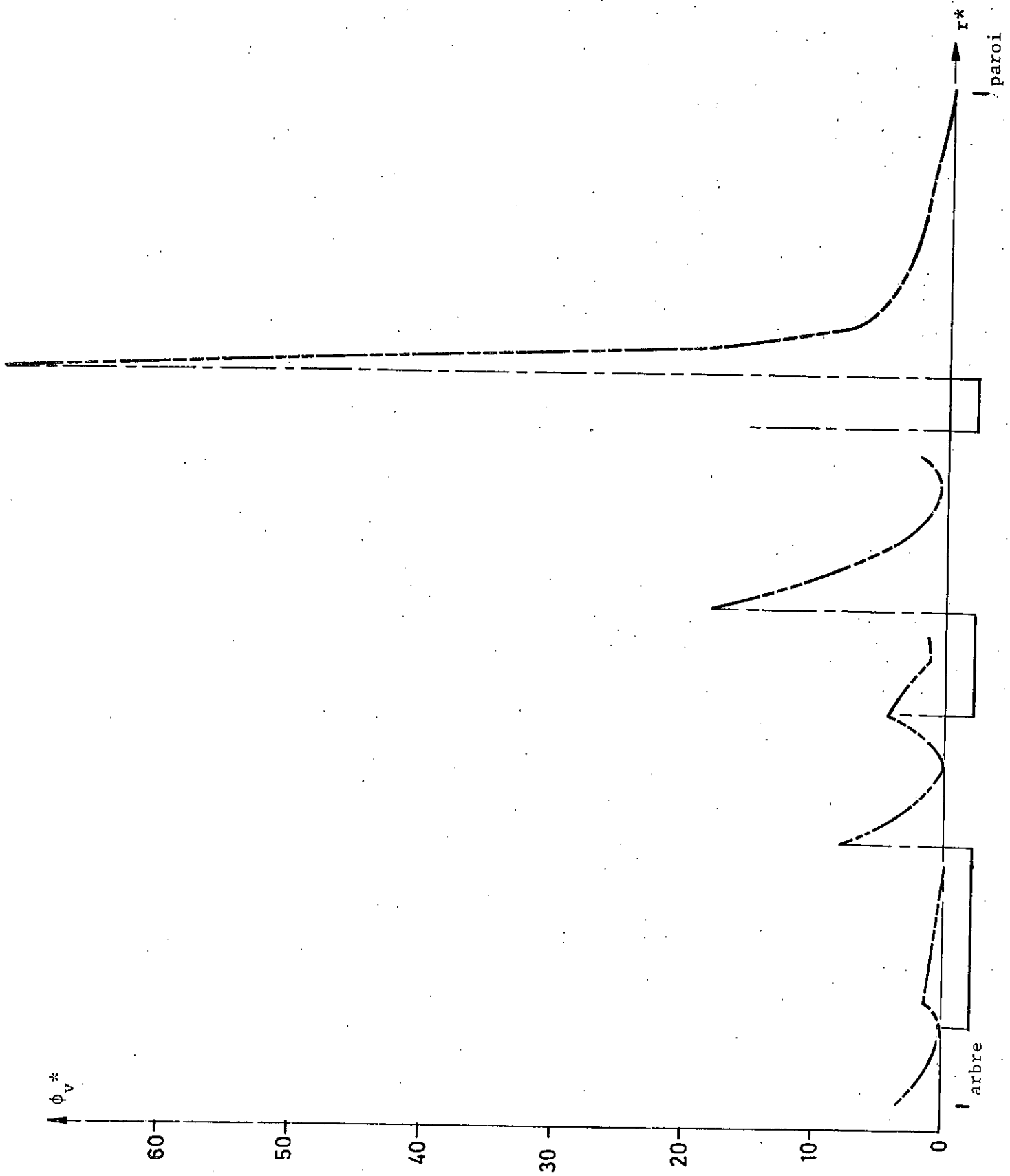


Fig. 8-1

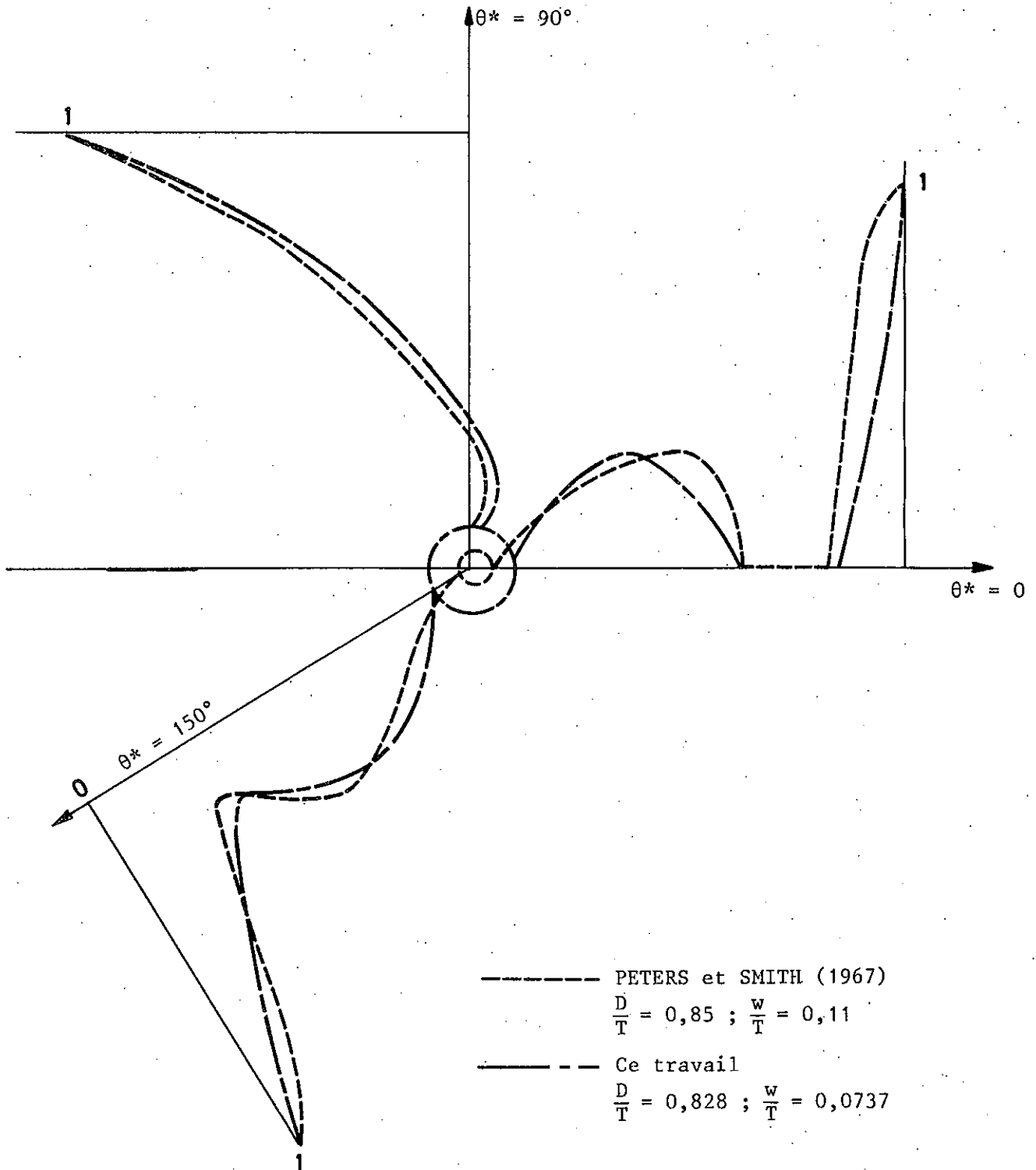


Fig. 8-2

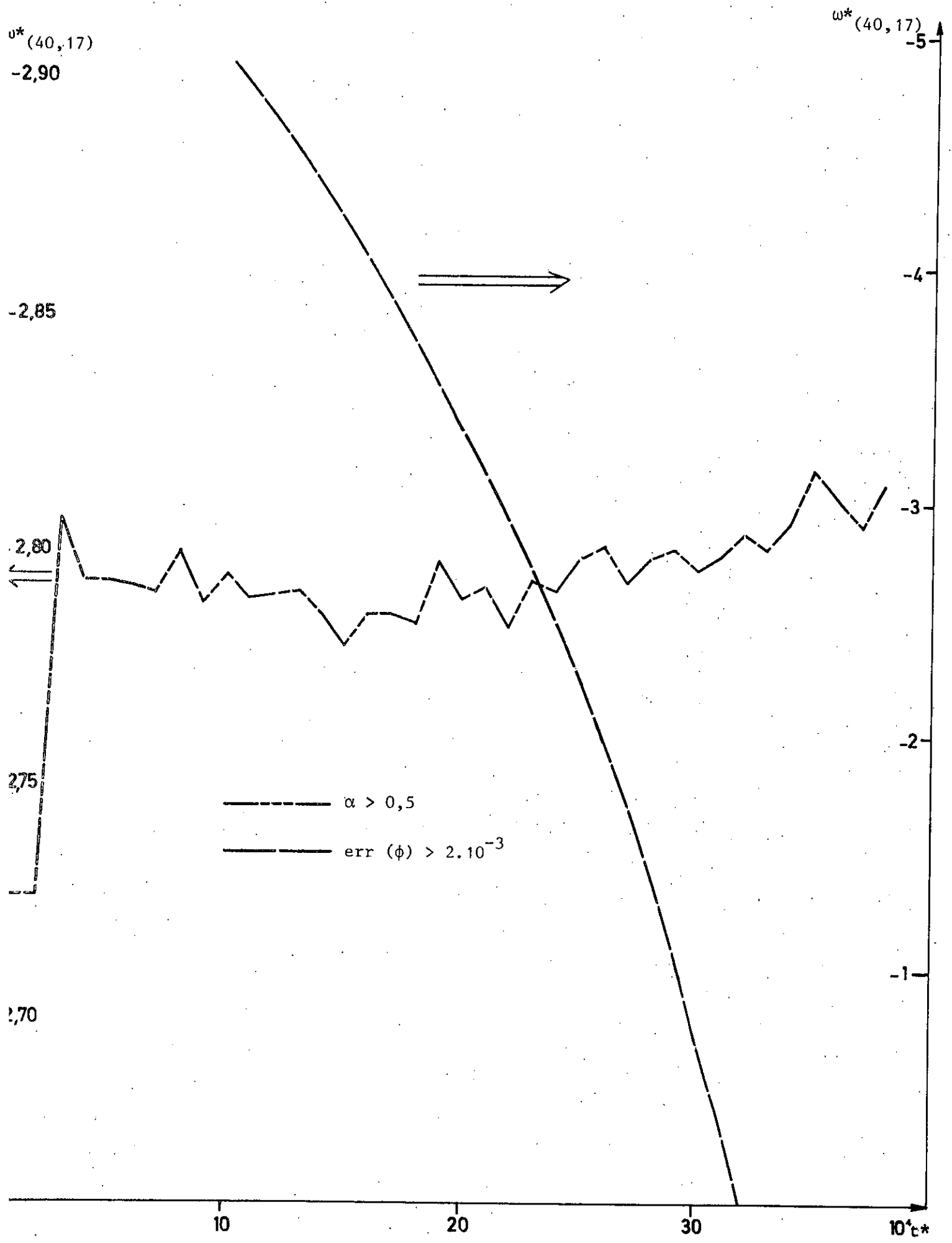


Fig. 8-3

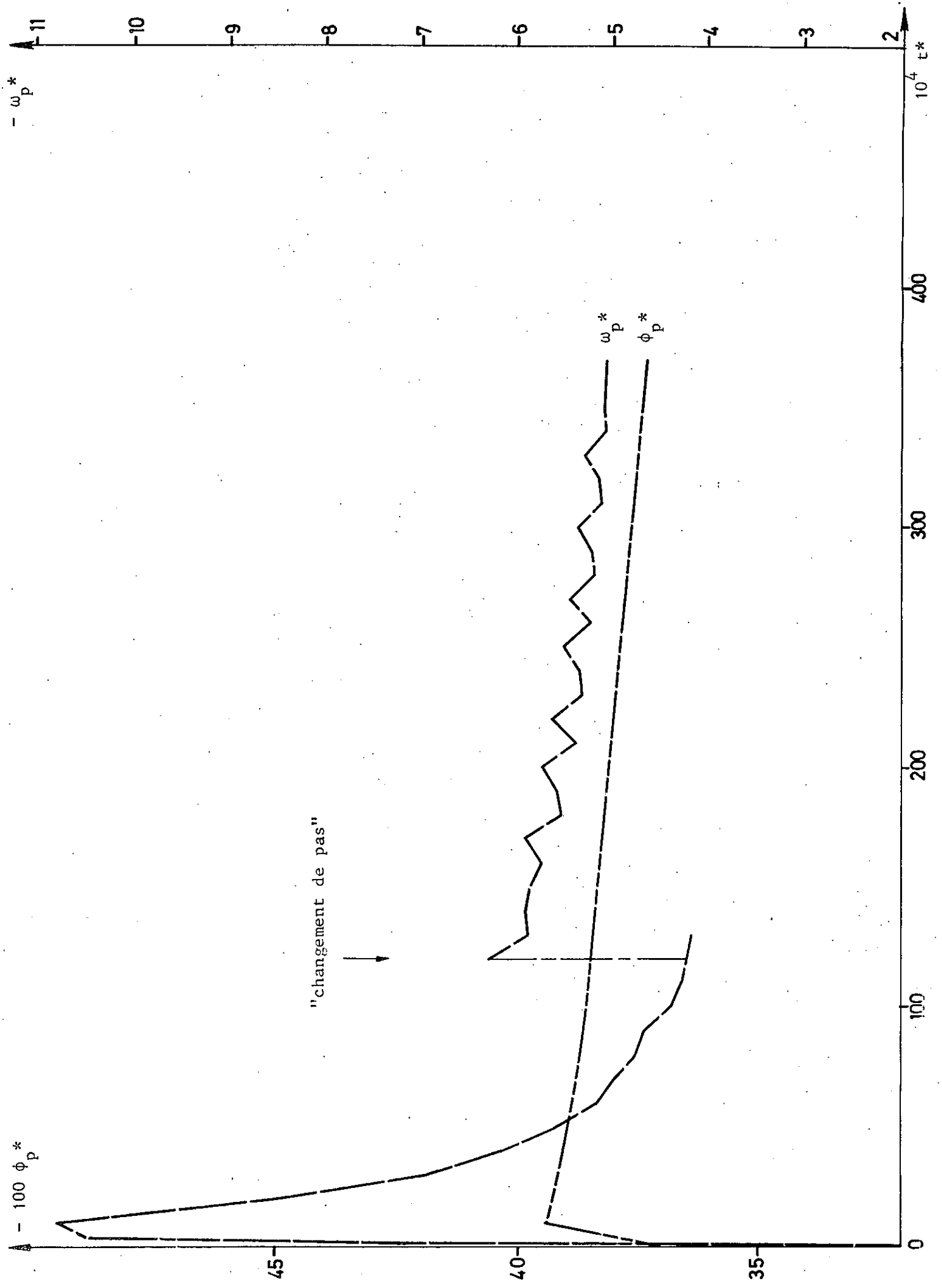


Fig. A-1

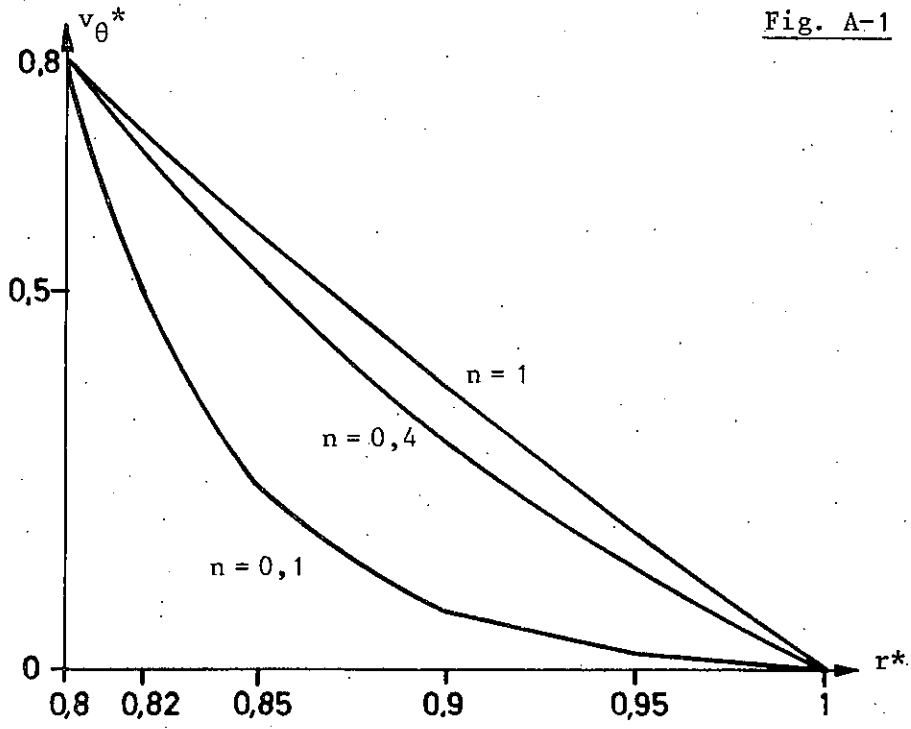


Fig. A-2

