

N° d'ordre : 2573

THÈSE

présentée

pour obtenir

**LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT
NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE**

École doctorale : MEGeP

Spécialité : Dynamique des Fluides

par

Rajaa El Akoury

**ANALYSE PHYSIQUE DES EFFETS DE ROTATION DE PAROI
EN ÉCOULEMENTS TRANSITIONNELS
ET MODÉLISATION D'ÉCOULEMENTS TURBULENTS
AUTOUR DE STRUCTURES PORTANTES**

Soutenue le 17 décembre 2007 devant le jury composé de :

M.	J. Borée	Professeur au LEA - Poitiers	Examineur
Mme	M. Braza	Directrice de Recherche au CNRS	Directrice de thèse
M.	P. Chassaing	Professeur à l'INP-Toulouse	Examineur
M.	A. Dervieux	Directeur de Recherche CNRS	Rapporteur
M.	J. Hunt	Professeur à l' Univ. College- London	Président du jury
M.	M. Provansal	Professeur à l'IRPHE-Marseille	Rapporteur
M.	F. Thiele	Professeur au TU-Berlin	Rapporteur

À Atyab MaMa

À ma petite famille

À tous ceux que j'aime

Résumé

Cette thèse a étudié les effets de rotation pariétale sur la transition laminaire-turbulente en nombre de Reynolds modéré et la modélisation de la turbulence d'écoulements instationnaires fortement détachés. Les étapes successives de la transition de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation sont analysées par simulations numériques 2D et 3D. Les effets de rotation peuvent amplifier, maintenir ou atténuer les modes d'instabilité qui apparaissent d'une façon naturelle dans l'écoulement. L'amplification de l'instabilité 3D est étudiée à partir de la DNS et du modèle d'oscillateur global de Landau pour évaluer le nombre de Reynolds critique d'apparition de l'instabilité secondaire. L'analyse des structures organisées est réalisée par la POD. Les approches de macrosimulation statistique OES, Organised Eddy Simulation et hybride DES, Detached Eddy Simulation sont étudiées quant à leur capacité prédictive d'écoulements turbulents autour d'obstacles à nombre de Reynolds élevé.

Mots clés :

- Rotation
- Turbulence
- P.O.D.
- Macrosimulation OES
- Analyse numérique
- Modélisation
- Aéronautique
- Machines tournantes

Abstact

This thesis studied the effect of wall rotation on the laminar-turbulent transition at moderate Reynolds number, and the turbulence modelling in highly unsteady detached flows. The successive stages of the transition in the flow around a rotating cylinder are analysed by 2D and 3D numerical simulations. The rotation effects can amplify, maintain or attenuate the instability modes that appear inherently in the flow. The amplification of the 3D instability is studied by means of the DNS and the Landau global oscillator model in order to quantify the critical Reynolds number for the appearance of the secondary instability. The analysis of the coherent pattern is carried out by the Proper Orthogonal Decomposition. Statistical and Hybrid macrosimulation approaches, OES, Organised Eddy Simulation and DES, Detached Eddy Simulation are studied at high Reynolds number, according to their ability to predict the strongly detached turbulent flows around obstacles.

Keywords :

- Rotation
- Turbulence
- P.O.D.
- OES macrosimulation
- Numerical analysis
- Turbulence modelling
- Aeronautics
- Rotating machines

Il n'y pas d'obstacle qu'on ne puisse franchir
pas de défi qu'on ne puisse relever
pas de peur qu'on ne puisse vaincre
aussi impossible que cela paraisse au début

Erin Brokovich

C'est enfin le moment où mon travail de thèse arrive à son terme. Je réalise que ces dernières années ont représenté pour moi un long engagement personnel, mais le bon déroulement de ce travail a impliqué de nombreuses personnes que je tiens à remercier de tout cœur.

Je voudrais tout d'abord adresser mes remerciements les plus profonds et les plus sincères à ma directrice de thèse, Marianna Braza. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour la confiance qu'elle m'a accordée dès mon stage de DEA en 2004, et pour son soutien tant scientifique qu'humain durant ces années.

Je dois également témoigner de l'implication sans faille de Gilles Harran et d'Alain sevrain et leur apport scientifique, et de Yannick Hoarau qui a été toujours disponible pour répondre à mes interrogations nombreuses, et pour me faire découvrir le solveur NSMB et son utilisation. Je tiens également à exprimer ma sincère gratitude à Rodolphe Perrin qui a été le premier à m'accueillir et me soutenir à l'IMFT, et à me faire part de son expérience enrichissante en ce qui concerne l'utilisation et l'exploitation du code ICARE.

Je remercie M. Julian Hunt, Professeur à l'University College London, pour l'honneur qu'il m'a accordé pour présider mon jury de thèse.

M. Michel Provansal, Professeur à l'IRPHE Marseille, m'a fait le plaisir de rapporter sur mon travail, et je l'en remercie.

Je suis également très reconnaissante à Mr. Alain Dervieux, Directeur de recherche CNRS à l'INRIA Sophia Antipolis, d'avoir rapporté ma thèse.

Je remercie aussi M. Frank Thiele, Professeur à Technische Universität Berlin, pour avoir accordé de son temps pour rapporter ce manuscrit.

Je tiens également à signifier ma gratitude à M. Patrick Chassaing, Professeur à l'INP Toulouse, et à M. Jacques Borée, Professeur à l'ENSMA Poitiers, pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse, ainsi que pour leurs critiques constructives et stimulantes qu'ils ont soulevées durant la soutenance.

J'adresse aussi mes profonds remerciements à M. Ibrahim Moukarzel, Professeur à l'Université Libanaise, qui n'a pas pu participer à mon jury de thèse, mais qui n'a cessé durant ces années de témoigner de sa générosité, surtout aux moments difficiles, dès le premier jour de mon arrivée à Toulouse. Je le remercie aussi de tout cœur pour l'apport scientifique pendant mes 5 années à la faculté de Génie Roumieh, Liban.

Une partie de cette thèse a été réalisée dans le cadre du programme européen DESIDER, Detached Eddy Simulation for Industrial Aerodynamics; je remercie ma directrice pour cette occasion, et j'adresse mes sentiments les plus respectueux au coordinateur Dr. Werner Haase de l'EADS Munich.

Je tiens particulièrement à remercier messieurs Olivier Simonin, Jacques Magnaudet, Henri Boisson et Azzedine Kourta pour leur accueil au sein du groupe EMT2 de l'IMFT.

J'exprime toute ma reconnaissance à M. Jan Vos du CFS Engineering Lausanne, pour son apport au niveau du code NSMB, ainsi qu'à Dariush Faghani et Arnaud Barthet pour leur contribution en ce qui concerne la POD. Egalement, je remercie les collègues avec qui j'ai partagé de bons moments, Guillaume Martinat et Rémi Bourguet, et particulièrement Guillaume Barbut qui m'a souvent été d'une aide très précieuse. J'adresse mon amitié également à Hamdi Ayed, Bilal Hajjar et Romain Gers.

Je tiens à témoigner ma sincère amitié à Cristian Moldovaneau, avec qui j'ai partagé le bureau durant tout notre séjour à l'IMFT. Nous avons vécu les mêmes expériences et surmonté les mêmes défis. Je lui souhaite une très bonne chance pour une excellente continuation en Roumanie.

J'adresse un grand merci au personnel du service informatique, et à Muriel Sabater du service reprographique pour leur aide très rapide. Je remercie sincèrement Marie-Christine Tristani et France Alquier pour leur disponibilité et leur amitié.

Une grande partie du calcul a été réalisée au Centre Informatique National d'Enseignement Supérieur, Montpellier, et je tiens à remercier le personnel pour leur aide et leur disponibilité.

Cette thèse a été financée par une bourse BDI-PED du CNRS, et j'en suis très reconnaissante.

C'est également une occasion pour exprimer ma reconnaissance à tous mes amis libanais de la rue *Jacques Cartier* à l'avenue de *l'Aéropostale*, passant par la rue des *Noyers*, sans oublier les *Amidonniens*, *Daniel Faucher*, *Pech David*, *Ranguel*, *Bagatelles* ... ou même plus loin

De tout cœur, je remercie ma petite famille ramonvilloise, Elie, Fares, Issam, Jako, Walid, Youss, et MON Zouzou B.I. ; vous avez constamment soutenu *Ekhti*, encouragé *GhoGho*, été à côté de *Rajou2a*, supporté *RoRorz*, épaulé *Rajaa*, gâté *Roro*, et entouré *Roritti* de votre amour même aux moments les plus difficiles où j'étais presque insupportable. Même si j'ai quitté Toulouse, je ne vous oublierai jamais, et votre place sera à jamais préservée dans mon cœur.

Grand Grand Grand Merci au pres Jiji, Loula, Adèle, Flo, Daniel, Nicole, Hikmat, Wissam, Sandy, Layale, Antoine, Toni, Viviane, Micha, Michel, Elias, Assad, Pipo, William, Fadi, Ziad, Kamil, Phélo, Nadine, Rami, Micho, Mario, Rana, Jad, Nancy, Marie, Georges, Alain, Toufic, P. Habib, ... nous avons partagé des moments superbes à Toulouse et ailleurs, fêtes, repas, soirées, camping, voyages, sport, prières.... Je remercie également Christophe, Mathieu et leurs collègues.

Egalement, ma profonde gratitude va vers Abouna Hervé, pour son amitié et sa confiance. J'espère que nous nous reverrons souvent d'ici 2010-2012 et bien plus tard...

J'adresse mes profonds remerciements à ma famille et mes amis au Liban, en particulier Elie et M*A. Je ne trouve pas assez de mots pour exprimer mon amour et ma sincère gratitude à mes parents Moussa et Samia, et ma sœur Amal ; je ne pourrais pas dire tout l'amour et le respect que j'ai pour vous, et combien vous m'avez appris à aimer, à croire, à vivre et à surmonter tous les défis et les peurs par votre soutien, votre amour, et votre prière. Vous m'avez permis d'arriver ici aujourd'hui. Je resterai fidèle aux valeurs sur lesquelles vous m'avez tendrement élevée. J'espère que vous soyez fiers de moi...

Enfin, je dédie ce travail à ma mère, à tous ceux que j'aime, à TOI...

Rajaa, le 3 janvier 2008 - Liban

Table des matières

1	Introduction	13
2	Etude bibliographique; écoulement autour d'un cylindre fixe et en rotation	17
2.1	Différents régimes de l'écoulement autour d'un cylindre fixe	17
2.1.1	Écoulement rampant	18
2.1.2	Écoulement stationnaire symétrique décollé	18
2.1.3	Régime laminaire instationnaire 2D	18
2.1.4	Régime laminaire instationnaire 3D	18
2.1.5	Régime subcritique	21
2.1.6	Régime critique	23
2.1.7	Régime supercritique	26
2.2	Écoulement autour d'un cylindre en rotation	27
2.2.1	Effet Magnus	27
2.2.2	Etude bibliographique de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation	30
2.2.3	Effets de la rotation sur les écoulements turbulents	35
3	Méthodes numériques	37
3.1	Le code ICARE	37
3.1.1	Principes	37
3.1.2	Génération des maillages	39
3.2	Le solveur Navier-Stokes Multi-Block : NSMB	43
4	Modélisation de la turbulence	47
4.1	Approches de modélisation	47

4.2	Large Eddy Simulation, LES	50
4.3	Approches Statistiques	52
4.3.1	Les modèles à une équation de transport	52
4.3.2	Les modèles à deux équations	54
4.3.3	Les modèles non linéaires	59
4.3.4	Les modèles au second ordre	60
4.3.5	Les modèles ARSM	71
4.4	Modélisation des effets de rotation	71
4.4.1	Correction du modèle à une équation de Spalart-Allmaras, Spalart & Shur (1997) [170]	72
4.4.2	Correction du modèle $k - \epsilon$, Cazalbou <i>et al.</i> (2005), [33]	72
4.4.3	Modèle de Elena & Schiestel (1996) [60]	74
4.4.4	Modèle de Dutzler, Pettersson-Reif & Andersson (2000) [59]	77
4.4.5	Modèle de Sjögren & Johansson (2000) [166]	81
4.4.6	Modèle de Belhoucine <i>et al.</i> (2004) [13]	83
4.5	Organised Eddy Simulation, OES	85
4.6	Detached Eddy Simulation, DES	89
5	Transition laminaire turbulente de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation	91
5.1	Transition 2D	91
5.1.1	Ecoulements à des nombres de Reynolds inférieurs au nombre critique de la première bifurcation, $Re < 48$	91
5.1.2	Etapes successives de la transition 2D pour $Re = 200$	93
5.1.3	Influence du nombre de Reynolds	97
5.1.4	Paramètres globaux	99
5.1.5	Champs moyens temporels	103
5.2	Transition 3D	110
5.2.1	Paramètres globaux	111
5.2.2	Évaluation du nombre de Reynolds critique de l'instabilité secondaire	114
5.3	Décomposition en modes propres orthogonaux, P.O.D.	116

5.3.1	Définition	116
5.3.2	Formulation mathématique	117
5.3.3	Analyse des modes bi-dimensionnels principaux sous l'effet de la rotation	119
5.3.4	Analyse de l'instabilité secondaire sous l'effet de rotation par la P.O.D.	129
6	Simulation d'écoulements turbulents autour d'un cylindre et d'une aile NACA0021	135
6.1	Écoulement autour d'un cylindre en milieu con-finé	136
6.1.1	Paramètres numériques	137
6.1.2	Champs instantanés	137
6.1.3	Comparaison des champs moyens	141
6.1.4	Paramètres globaux	141
6.1.5	Évolution spatio-temporelle	141
6.1.6	Décomposition en modes propres orthogonaux	151
6.2	Écoulement autour d'une aile NACA0021 à 60° d'incidence	155
6.2.1	Paramètres numériques	155
6.2.2	Visualisation des champs instantanés	156
6.2.3	Moyens temporels et paramètres globaux	158
7	Conclusion	163
A	Annexe A - Modèles non linéaires	167
A.1	Modèle de Gatski & Speziale (1993) [65]	167
A.2	Modèle de Shih, Zhu & Lumley (1995) [160]	167
A.3	Modèle de Speziale & Xu (1996) [173]	168
A.4	Modèle de Girimaji (1996) [70]	169
A.5	Modèle de Craft, Launder & Suga (1996) [46]	170
A.6	Modèle de Wallin & Johansson (2000)[192]	171
A.7	Modèle de Okamoto & Shima (2000) [128]	172
A.8	Modèle de Abe, Jang & Leschziner (2003) [1]	173

B	Annexe B - Modèles au second ordre	177
B.1	Modèle de Launder, Reece & Rodi (1975) [103] (LRR)	177
B.2	Modèle de Speziale, Sarkar & Gatski (1991) [174] (SSG)	178
B.3	Modèle de Launder & Li (1994) [102]	179
B.4	Modèle de Shima (1998) [163]	182
B.5	Modèle de Craft (1998) [44]	183

Chapitre 1

Introduction

Cette étude s'inscrit dans le contexte de l'analyse physique et de modélisation d'écoulements turbulents autour d'obstacles, fixes ou soumis à une rotation pariétale. Elle vise à améliorer la prédiction d'écoulements turbulents autour de structures portantes. Elle trouve son application dans l'aérodynamique externe (ailes d'avion) et interne (machines tournantes : voilures éoliennes, pales d'hélicoptères, turbomachines). La compréhension physique du comportement de l'écoulement de fluide autour d'obstacles et sa modélisation sont des aspects importants tant sur le plan de la recherche fondamentale que sur le domaine des applications aérodynamiques et énergétiques. Dans ce contexte, l'objectif de cette étude est d'approfondir la connaissance des mécanismes physiques associés à la naissance de la turbulence et aux origines de son développement dans les écoulements autour de structures solides portantes, fixes ou en rotation.

Pour un grand nombre d'applications, on conçoit donc tout l'intérêt de disposer de modèles prédictifs fiables pour représenter la dynamique des charges aérodynamiques, à nombre de Reynolds élevé. C'est pour cette classe d'écoulements que l'évaluation précise des charges aérodynamiques instationnaires est la plus délicate. L'élaboration d'une méthode de prédiction fiable des écoulements instationnaires turbulents autour d'obstacles, gouvernés par la dynamique du détachement instationnaire et de structures cohérentes de la région proche reste un défi dans l'état de l'art.

L'approche CFD nécessite la capture correcte de la physique par les schémas de modélisation. Dans l'état de l'art, en dépit de progrès considérables des approches de modélisation de la turbulence instationnaire, il n'existe pas encore à notre connaissance de méthode universelle et entièrement fiable pour la modélisation satisfaisante de cette classe d'écoulements. En effet, la présence de la paroi solide, région cruciale d'où naît la turbulence et se propage ensuite autour de l'obstacle, et le nombre de Reynolds élevé des applications industrielles représentent les verrous principaux quant à l'efficacité de l'approche CFD. Il est bien connu que l'approche de macrosimulation de grandes échelles (LES) n'est pas encore applicable à cette classe d'écoulements, car la LES 'pure' doit tendre vers une simulation directe vers la région proche, ce qui nécessiterait une finesse du maillage prohibitive pour l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds supérieur à 10^4 (région habituelle de limitation de la LES). Pour appliquer la LES à des nombres de Reynolds plus importants, il faut employer des techniques spécifiques pour la région proche-paroi, relatives à l'approche statistique, RANS (Reynolds Averaged

Navier-Stokes). Dans le contexte des instationnarités qui gouvernent la présente classe d'écoulements, la plupart des modèles RANS sont une extension simple des équations de Reynolds vers le même type d'équations où on a rajouté le terme temporel (URANS - Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes). On applique alors les hypothèses de base de la turbulence en équilibre statistique dans le contexte d'écoulements instationnaires gouvernés par la turbulence hors équilibre. Cette extension a conduit à une perte d'efficacité considérable de l'approche URANS par une surproduction de l'énergie cinétique turbulente et donc bien souvent une surévaluation de la traînée aérodynamique. Depuis une dizaine d'années, on peut constater des efforts d'amélioration de l'approche URANS, grâce à sa robustesse pour modéliser la région proche-paroi. Ces améliorations essaient de tenir compte de certains aspects du non-équilibre associé à l'instationnarité. Néanmoins, ces efforts sont encore insuffisants quant à la capacité prédictive de URANS pour les écoulements instationnaires turbulents, fortement décollés et soumis à des effets de rotation, notamment quant à la prédiction de la région intermédiaire (zone de formation de tourbillons cohérents et du décrochage). Dans cette région, située un peu plus loin de la paroi, des approches de type LES seraient plus efficaces. Ainsi, afin d'associer les avantages de URANS dans la région proche et ceux de la LES ou similaire dans la région plus lointaine, quant à ces écoulements pariétaux à haut Reynolds, des approches de macrosimulation dites hybrides ont vu le jour depuis les années '97. Plus récemment l'approche hybride Detached Eddy Simulation, DES, a permis de s'affranchir de la gestion des interfaces entre les régions précitées.

En résumé, cette thèse a pour principal objectif d'analyser le caractère instationnaire de l'écoulement autour d'un obstacle dès le régime des nombres de Reynolds modérés, notamment sous l'effet de rotation pariétale, et de contribuer à l'évaluation des approches de modélisations avancées (statistiques et hybrides) pour capturer la dynamique des structures cohérentes dans la région proche à grand nombre de Reynolds, en présence de fort décollement et de formation de structures cohérentes 3D.

La présente thèse s'articule comme suit :

Le chapitre bibliographique, chapitre 2, présente les principales études réalisées dans le contexte de l'écoulement autour d'un cylindre fixe et en rotation.

Les principes de l'approche numérique pour la résolution des équations de Navier-Stokes et des équations moyennées par fermeture turbulente sont présentées dans le chapitre 3, ainsi que la méthode de génération des maillages.

Les différentes approches de macrosimulation de la turbulence sont présentées dans le chapitre 4.

La présentation de l'articulation de la thèse nous permet de passer en revue les configurations géométriques que nous avons étudiées :

Dans le chapitre 5, l'analyse des effets de rotation du cylindre est réalisée à partir de l'approche de simulation numérique directe (DNS), à l'aide du code ICARE de l'IMFT. En premier lieu, les effets de la rotation d'un cylindre placé dans un écoule-

ment de fluide à vitesse constante seront analysés à des nombres de Reynolds modérés. En fonction de la vitesse de rotation du cylindre, nous étudierons les modifications de la dynamique du sillage et des étapes successives de transition en bas Reynolds. Nous étudierons notamment les effets de la rotation sur l'amplification ou l'atténuation des modes d'instabilité principaux qui apparaissent d'une manière naturelle dans l'écoulement. Le nombre critique d'apparition de l'instabilité secondaire sera évalué par l'utilisation du modèle d'oscillateur global de Landau. L'analyse des structures organisées sous l'effet de la rotation sera ensuite réalisée par l'approche P.O.D., Proper Orthogonal Decomposition, introduite au paragraphe 5.3. Cette étude permettra de déceler le nombre de degrés de liberté nécessaire pour reconstruire le système dynamique de l'écoulement instationnaire autour du cylindre fixe et en rotation. Cette partie de l'étude s'inscrit dans le contexte de l'analyse de systèmes à dimensions réduites, utile pour la modélisation de la turbulence (Low Order Decomposition) et pour leur contrôle.

La simulation numérique et la modélisation des écoulements turbulents instationnaires à nombres de Reynolds élevés seront présentées dans le chapitre 6. Dans le cadre des écoulements présentant des régions proches fortement décollés, nous présentons les raisons pour lesquelles les approches RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) classique et LES (Large Eddy Simulation) pure ne donnent pas entière satisfaction. A cause de l'interaction non-linéaire entre la turbulence aléatoire et les structures organisées, l'approche URANS (Unsteady-RANS) n'est pas suffisante pour capter la physique de ces écoulements, où la pente du spectre d'énergie est modifiée par rapport à celle de la turbulence en équilibre. En conséquence, les échelles de turbulence sont reconsidérées dans le contexte de l'approche OES (Organised Eddy Simulation) par des schémas de modélisation statistique avancée. La méthode de macro-simulation OES ainsi que l'approche hybride DES (Detached Eddy Simulation) sont présentées au chapitre 4. Ces approches introduites dans le code de calcul NSMB (Navier-Stokes Multi-Block) sont utilisées pour prédire les écoulements 3D autour d'une configuration de cylindre à $Re = 1.4 \times 10^5$ et de profil d'aile NACA0021 à 60° d'incidence et à $Re = 2.7 \times 10^5$. Dans le premier cas, l'instabilité primaire (Von-Kármán) est antisymétrique. Il s'agit d'un écoulement confiné (cylindre placé dans un canal dans la soufflerie S1 de l'IMFT), afin que les simulations puissent respecter exactement la configuration expérimentale. Cet écoulement, correspondant au début du régime critique a été étudié par des expériences physiques très détaillées au sein du groupe EMT2/IMFT, utilisant notamment la PIV - 3 composantes et la PIV résolue en temps, puis l'association des deux. La seconde configuration a été choisie à cause du caractère portant ; les tourbillons lâchés à partir de l'extrados sont plus intenses que ceux de l'intrados et l'instabilité n'est pas purement antisymétrique. Ces deux cas-tests ont fait l'objet du programme européen DESIDER (Detached Eddy Simulation for Industrial Aerodynamics), terminé en Juin 2007.

Chapitre 2

Etude bibliographique ; écoulement autour d'un cylindre fixe et en rotation

L'étude des mécanismes physiques de l'écoulement autour d'un cylindre présente un grand intérêt, tant sur le plan de la recherche fondamentale que dans le domaine des applications industrielles. Cet écoulement a fait l'objet de nombreuses analyses dans la littérature. Après un rappel des différents régimes de l'écoulement derrière un cylindre fixe, l'effet Magnus dû à la rotation est introduit. Ce chapitre présente également les différentes études concernant l'écoulement autour d'un cylindre en rotation, ainsi que les effets de la rotation sur les écoulements turbulents.

2.1 Différents régimes de l'écoulement autour d'un cylindre fixe

Pour les faibles nombres de Mach, le paramètre généralement retenu pour opérer le changement de régimes est le nombre de Reynolds : $Re = \frac{DU_\infty}{\nu}$, qui représente le rapport des forces d'inertie et des forces de viscosité, U_∞ étant la vitesse du fluide à l'infini amont, D le diamètre du cylindre, et ν la viscosité cinématique du fluide considéré. Le sillage derrière un cylindre fixe a fait l'objet de plusieurs études, expérimentales et numériques, fournissant une large gamme de résultats pour différents nombres de Reynolds et permettant de mettre en évidence les différents régimes de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. Citons, entre autres, les études expérimentales de Crausse (1936) [47], Roshko (1954) [153] et (1961) [154], Tritton (1959) [190], Bloor (1964) [15], Gerrard (1966) [68], Coutanceau & Bouard (1977) [41, 42], Kourta *et al.* (1987) [99], Provansal *et al.* (1987) [142], et plus récemment celles de Williamson (1992) [197], et (1996) [198], Prasad & Williamson (1997) [141], Perrin (2005) [130], ainsi que les études numériques de Braza (1981) [20] et 1986 [21], Braza *et al.* (1986) [25], (1990) [26] et (2001) [27], Persillon (1995) [134], Persillon & Braza (1998) [135].

2.1.1 Écoulement rampant

Pour les très faibles nombres de Reynolds ($Re \leq 5$), l'écoulement est dit rampant ; les forces de viscosité sont prépondérantes. Aucune instabilité ne se déclenche. Il n'y a pas de décollement. L'écoulement se referme immédiatement derrière le cylindre. L'écoulement est symétrique entre l'amont et l'aval et également par rapport à l'axe longitudinal du courant, figure 2.1.

2.1.2 Écoulement stationnaire symétrique décollé

Pour $5 < Re < 48$, les forces d'inertie augmentent et l'effet visqueux n'est plus assez grand pour empêcher l'écoulement de se décoller du cylindre. Deux tourbillons contra-rotatifs se forment en aval du cylindre. Le point de rattachement s'éloigne du cylindre quand le nombre de Reynolds augmente. L'écoulement est stable et reste stationnaire et symétrique, figure 2.2.

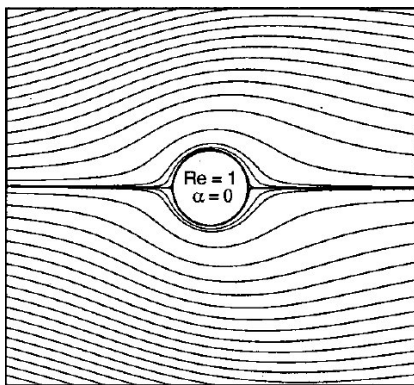


FIGURE 2.1 – Écoulement rampant, $Re = 1$; Stojkovič *et al.* (2002) [175]

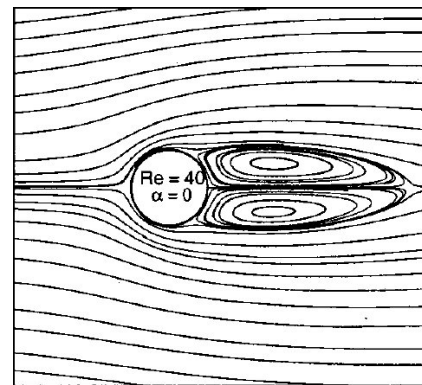


FIGURE 2.2 – Écoulement stationnaire périodique symétrique à $Re = 40$, [175]

2.1.3 Régime laminaire instationnaire 2D

Pour des nombres de Reynolds au-delà de 48, les différentes sources de perturbations ne peuvent plus être amorties. Ceci conduit à une perte de symétrie, et les deux tourbillons se détachent alternativement de part et d'autre du cylindre, formant ainsi l'allée tourbillonnaire de Von-Kármán, figure 2.3. Cette instabilité est bi-dimensionnelle et se caractérise par une périodicité fortement prononcée. Le paramètre adimensionnel relatif à la fréquence du lâcher tourbillonnaire est le nombre de Strouhal : $St = \frac{fD}{U_\infty}$. Dans ce régime, le nombre de Strouhal augmente avec le nombre de Reynolds.

2.1.4 Régime laminaire instationnaire 3D

Au-delà de $Re \simeq 160$, commence la transition vers le régime turbulent qui se manifeste par l'apparition des effets tri-dimensionnels dans le sillage. Une ondulation des rouleaux de Von-Kármán est observée dans le sens de l'envergure du cylindre, ainsi que la naissance de tourbillons longitudinaux, figure 2.4. En fonction de la longueur d'onde de l'ondulation transversale des rouleaux, on distingue deux modes : **A**, pour

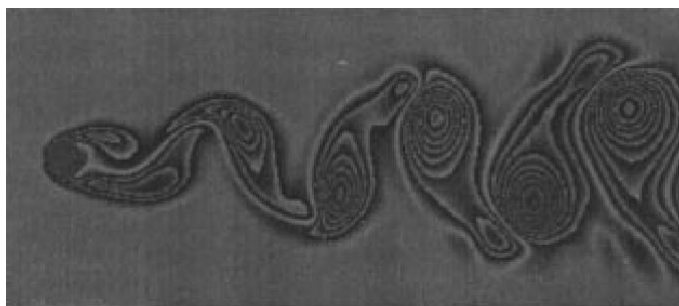


FIGURE 2.3 – Champ de vorticité instantané, écoulement laminaire symétrique à $Re = 100$, montrant l’allée de Von-K rman, Persillon & Braza (1998) [135]

$160 < Re < 190$ et $250 < Re < 260$, et le mode **B** ailleurs. Le mode A est caractérisé par une longueur d’onde de l’ordre de 4 diamètres qui devient plus petite dans le cas du mode B (de l’ordre de $1D$, figure 2.5).

En considérant l’évolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds, figure 2.6, deux discontinuités associées à ces modes sont observées. Pour des nombres de Reynolds proches du mode B, on observe l’apparition du phénomène de dislocations des tourbillons primaires qui marquent le début de la transition vers la turbulence, figure 2.7. Ce phénomène observé expérimentalement par Williamson (1992) [197] et numériquement par Persillon & Braza (1998) [135], Allain (1999) [3] et Braza *et al.* (2001) [27], est caractérisé par la brisure de continuité dans la colonne vertébrale des rouleaux tourbillonnaires alternés, déjà soumis au mode A. Le passage d’une dislocation est associé à de fortes variations de vitesse et à une diminution du nombre de Strouhal. A noter que, pour obtenir le phénomène de dislocations par des simulations numériques directes, il faut une grande envergure, de l’ordre de 12 diamètres. Braza *et al.* (2001) [27], ont prouvé que des envergures de l’ordre de $4D$ ne permettent pas d’obtenir les dislocations.



FIGURE 2.4 – Ondulation des tourbillons de Von K rman pour le mode A, $Re = 220$, Braza *et al.* (2001) [27]

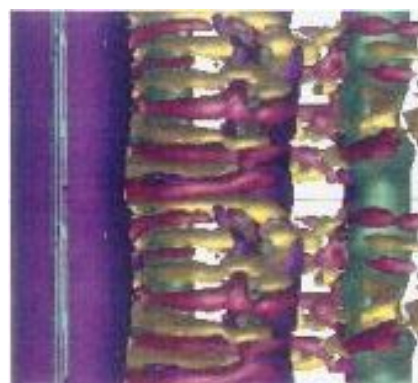


FIGURE 2.5 – Visualisation du mode B, $Re = 270$, Persillon & Braza (1998) [135]

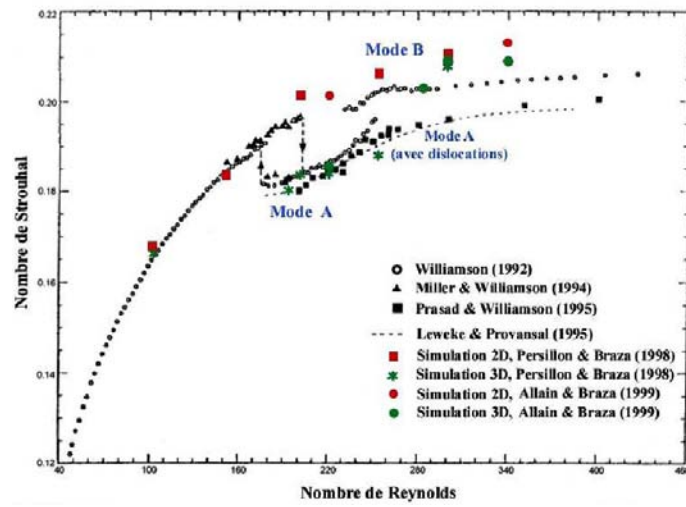


FIGURE 2.6 – Evolution du nombre de Strouhal en fonction du nombre de Reynolds

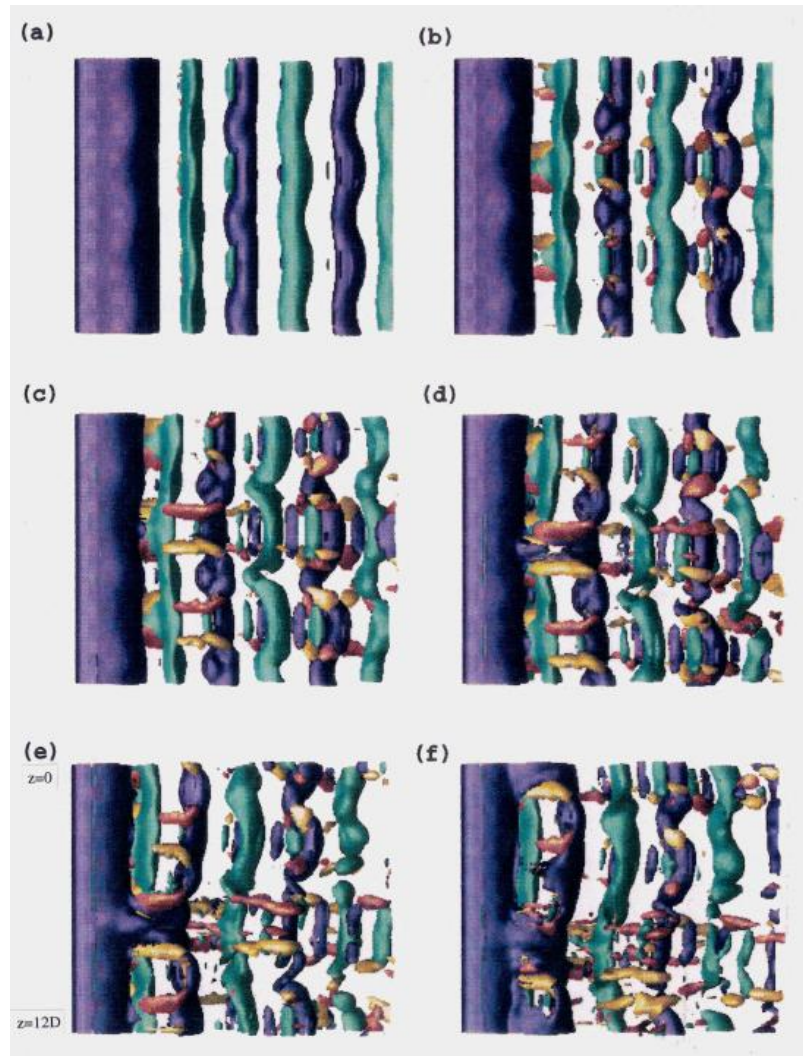


FIGURE 2.7 – Phénomène de dislocations à $Re=220$; Braza *et al.* (2001) [27]

2.1.5 Régime subcritique

Pour $300 < Re < 10^5 - 10^6$, l'allée tourbillonnaire est turbulente; le point de transition dans la couche cisailée se déplace vers l'amont quand le nombre de Reynolds augmente jusqu'à rejoindre le point de décollement à l'entrée dans le régime critique. Le cisaillement important dans la zone décollée entraîne l'amplification d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz, et ainsi la naissance des petits tourbillons de zone de mélange à partir de $Re = 2700$, figures 2.8, 2.9 et 2.10.

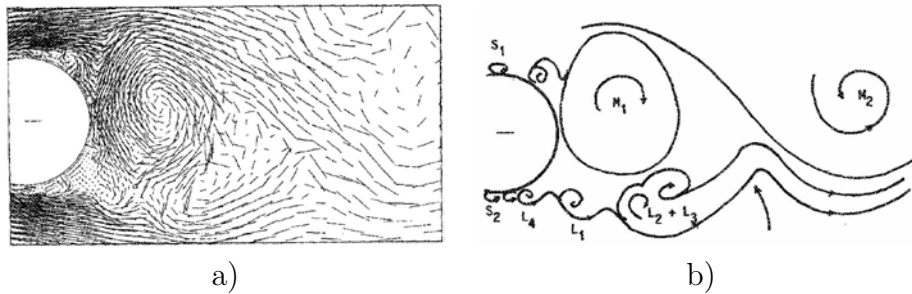


FIGURE 2.8 – Champ instantané de l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 3000$, Braza *et al* (1990) [26]; a) champ de vitesse; b) schéma de l'écoulement; M : tourbillon principal (Main eddy); S : tourbillon secondaire (Secondary eddy); L : tourbillon de zone de mélange (mixing Layer eddy)

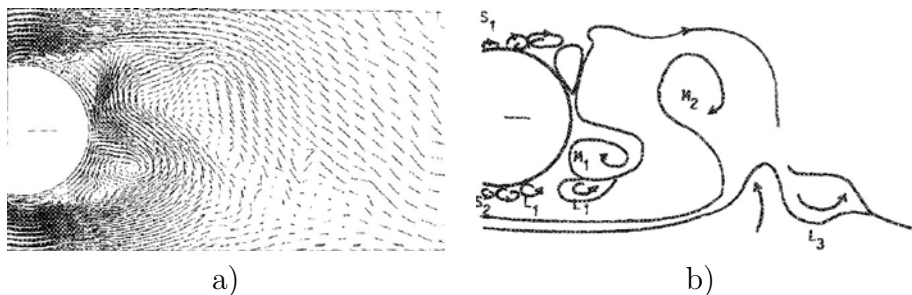


FIGURE 2.9 – Champ instantané, $Re = 5000$ [26], voir figure 2.8

Le rapport entre la fréquence f_{SL} de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz et la fréquence de Strouhal f_{VK} a fait l'objet de plusieurs études. Bloor (1964) [15] introduit la relation :

$$\frac{f_{SL}}{f_{VK}} = 0.095 Re^{0.5} \quad (2.1)$$

Cette relation, vérifiée par Braza *et al* (1990) [26], est remise en question par Wei & Smith (1986) [194] qui retrouvent une loi en $Re^{0.87}$. Kourta *et al* (1987) [99] retrouvent la loi en $Re^{0.5}$ par des mesures au fil chaud. Plus tard, Prasad & Williamson (1997) [141] proposent une loi en $Re^{0.67}$. Récemment, Rajagopalan & Antonia (2005) [143] observent un changement de régime : une loi en $Re^{0.72}$ pour $Re < 5000$, et en $Re^{0.67}$ pour $Re > 5000$. La figure 2.11a tirée de Rajagopalan & Antonia (2005) [143] regroupe différentes valeurs de f_{SL}/f_{VK} obtenues par différents auteurs. Egalement, Thompson & Hourigan (2005) [184] collectent différentes valeurs de ce rapport et trouvent deux régimes différents selon le nombre de Reynolds. En considérant les valeurs mesurées

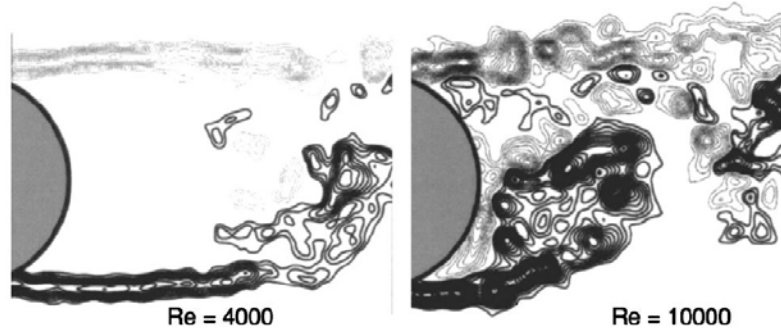


FIGURE 2.10 – Champs instantanés de vorticité montrant le changement du sillage proche du cylindre lorsque Re varie; images obtenues à partir de mesures PIV de Saelim & Rockwell, Thompson & Hourigan (2005) [184]

pour $1500 < Re < 5000$, puis séparément pour $10000 < Re < 50000$, ils trouvent que des lois en $Re^{0.57}$ et $Re^{0.52}$ respectivement approchent bien les valeurs collectées, dans chacun des régimes, alors que la pente est plus élevée et dépend de $Re^{0.69}$ si l'on consi d re l'ensemble des nombres de Reynolds de 10^3 à 10^5 , figure 2.11b. Ils justifient cette séparation d'intervalles par les changements importants des paramètres de l'écoulement entre ces deux intervalles de Re .

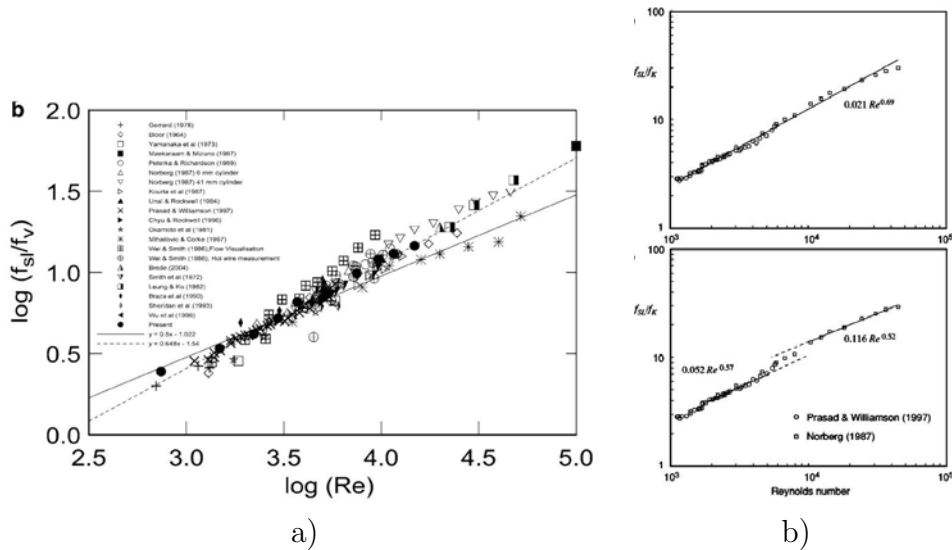


FIGURE 2.11 – Rapport f_{SL}/f_{VK} en fonction de Re ; a) Rajagopalan & Antonia (2005); b) Thompson & Hourigan (2005) [184]

Des simulations numériques par l'approche LES (Large Eddy Simulation) ont été appliquées pour l'écoulement autour d'un cylindre, en nombre de Reynolds modéré, Tomboulides *et al.* (1993) [188], Beaudan & Moin (1994) [12], Breuer (1998) [30], Franke & Frank (2002) [63], Fournier *et al.* (2003) [62]. Des simulations LES ont été menées pour le cylindre à section carrée à $Re = 22000$, Goossens (2005) [71], Salvetti *et al.* (2007) [156]. Cette dernière étude utilise également l'approche Variational Multi-Scale (VMS)/LES, mieux adaptée quant à la capture du transfert de la cascade inverse, et plus efficace pour une utilisation industrielle.

2.1.6 Régime critique

Ce régime est atteint quand le point de transition qui remonte vers l'amont au cours du régime subcritique, rejoint le point de décollement. La valeur du nombre de Reynolds critique varie fortement selon les différentes études expérimentales rapportées par Braza (1981) [20], du fait de la grande sensibilité de l'écoulement aux différents paramètres tels que la rugosité du cylindre, l'intensité turbulente de l'écoulement incident, le rapport d'allongement du cylindre, le coefficient du blocage

Le régime critique est caractérisé par la transition turbulente de la couche limite avant le décollement. Le sillage est irrégulier et l'allée tourbillonnaire de Von-Kármán se dégrade et disparaît à la fin de ce régime. A ce régime correspond une brusque augmentation du nombre de Strouhal et une diminution du coefficient de traînée, comme observé par Roshko (1961) [154], lors d'une étude détaillée de l'écoulement au franchissement du régime critique, figure 2.12. En augmentant le nombre de Reynolds, la distribution de pression sur le cylindre devient assymétrique à cause des rattachements instationnaires et assymétriques des couches limites, apparaissant sans préférence d'un côté ou de l'autre du cylindre, et ainsi, le coefficient de portance n'est plus négligeable.

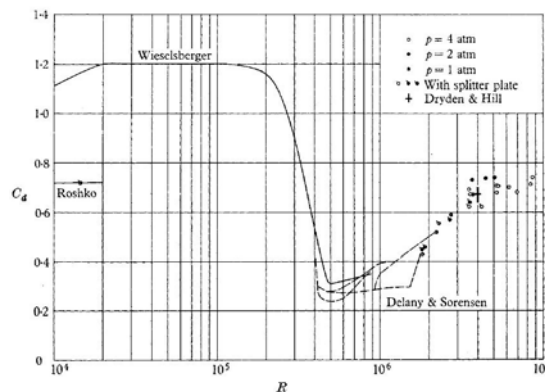


FIGURE 2.12 – Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds, Roshko (1961) [154]

Une analyse physique du passage vers le régime critique a été fournie par Perrin *et al* (2006,2007) [132, 133, 131] à partir de mesures PIV-3C stéréoscopique et haute cadence, effectuées en soufflerie de l'IMFT, figure 2.13. Cette expérience a fait partie du programme européen DESIDER, Detached Eddy Simulation for Industrial Aerodynamics, et a été utilisée par nombres d'instituts et d'industries européennes pour l'étude du passage vers le régime critique et pour la validation de l'approche de modélisation DES, Detached Eddy Simulation. Cette expérience considère l'écoulement confiné d'un cylindre dans un canal, pour que les simulations numériques puissent respecter les mêmes conditions limites que l'expérience. Les mesures par PIV stéréoscopique permettent d'obtenir les trois composantes de l'écoulement, et ainsi d'accéder à toutes les composantes du tenseur des contraintes turbulentes. La figure 2.14 représente le terme de production $P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$ et l'énergie cinétique moyenne du mouvement fluctuant $\overline{k} = \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$ quantifiée à partir des trois composantes.

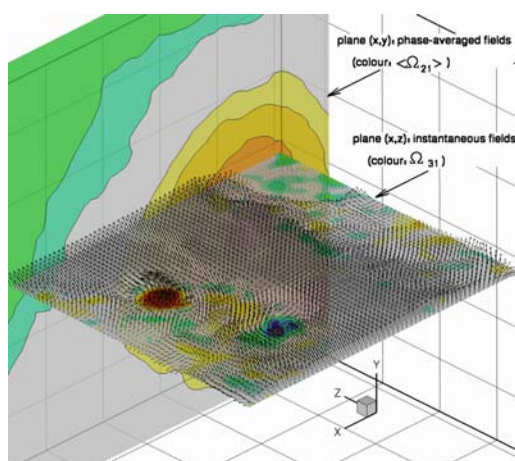


FIGURE 2.13 – PIV-3C et résolue en temps; étude de Perrin *et al* (2007) [131]

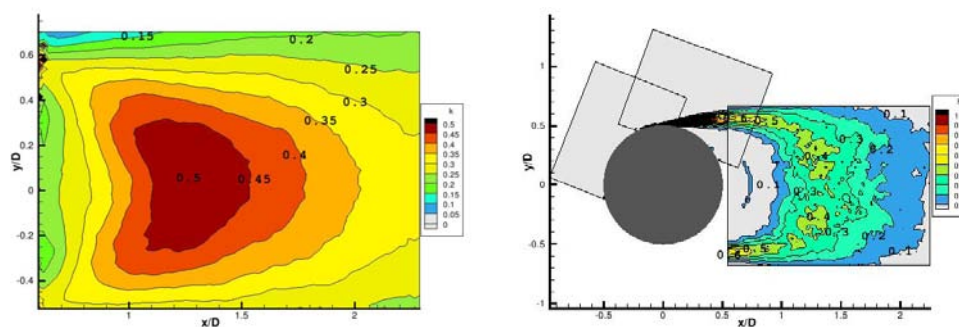


FIGURE 2.14 – Gauche, iso-contours de l'énergie cinétique turbulente moyenne \bar{k} à $Re = 140000$ par PIV stéréoscopique, Perrin *et al* (2006) [133]; droite, iso-contours de la production \bar{P}

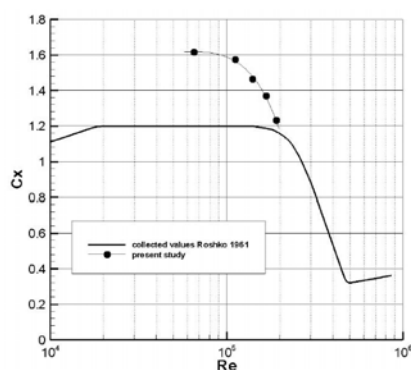


FIGURE 2.15 – Evolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds, Perrin (2005) [130] (points), en comparaison avec Roshko (1961) [154] (ligne continue)

La diminution du coefficient de traînée apparaît pour des nombres de Reynolds inférieurs à ceux indiqués par Roshko (1961) [154], figure 2.15. Ceci est lié aux paramètres de l'expérience notamment l'intensité turbulente de l'écoulement amont (1,5 %) et le blocage important (20,9 %). En effet, Kiya *et al* (1982) [96], ainsi que Bearman & Morel (1983) [11], ou encore Norberg (1987) [126], montrent que le nombre de Reynolds critique diminue avec l'intensité turbulente en amont. Egalement, Richter & Naudascher (1976) [147] montrent que la chute de traînée est observée à des nombres de Reynolds qui diminuent quand le blocage augmente, du fait de l'accélération que ce blocage entraîne.

Perrin *et al* (2006,2007) [133, 131] traitent la décomposition du mouvement en une partie organisée et une partie aléatoire. Comme présenté au chapitre 4, dans le cas d'un écoulement quasi-périodique, en accord avec Reynolds & Hussain (1971) [146], la vitesse U_i peut être décomposée comme suit :

$$U_i = \overline{U}_i + \tilde{u}_i + u'_i$$

où \overline{U}_i est le champ moyen temporel, \tilde{u}_i est la fluctuation quasi-périodique, et u'_i est la fluctuation aléatoire. La moyenne de phase s'écrit alors :

$$\langle U_i \rangle = \overline{U}_i + \tilde{u}_i$$

La partie organisée et le terme aléatoire sont décorrélés, et le tenseur des contraintes turbulentes peut alors s'écrire comme la somme d'une contribution cohérente et une autre aléatoire :

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}$$

Pour Perrin *et al* (2006) [132], l'angle de phase est déterminé à l'aide du signal de pression pariétale à $\theta = 70^\circ$ à partir du point d'arrêt amont. En utilisant la transformation de Hilbert, l'angle de phase est défini par le vecteur complexe $p(t) - jh(t)$, où p est la pression et h sa transformée. $\phi = 0^\circ$ correspond alors au maximum de pression. Perrin *et al* (2007) [131] déterminent ϕ à partir des deux premiers coefficients a_1 et a_2 correspondant aux deux premiers modes de la POD (Proper Orthogonal Decomposition, voir paragraphe 5.3) :

$$\phi_{a_1-a_2} = \arctan \left(\frac{\sqrt{2\lambda_1} a_2}{\sqrt{2\lambda_2} a_1} \right)$$

où $\lambda_1 = \overline{a_1^2}$ et $\lambda_2 = \overline{a_2^2}$ sont les premières valeurs propres obtenues par la POD. La figure 2.16 montre qu'à l'aide de la moyenne de phase avec les coefficients de la POD, la partie cohérente est mieux séparée de la partie aléatoire que dans le cas du signal de pression.

Cette expérience a servi comme une base de données pour le programme européen DESIDER, et sera utilisée pour des comparaisons avec les résultats de cette thèse au chapitre 6.

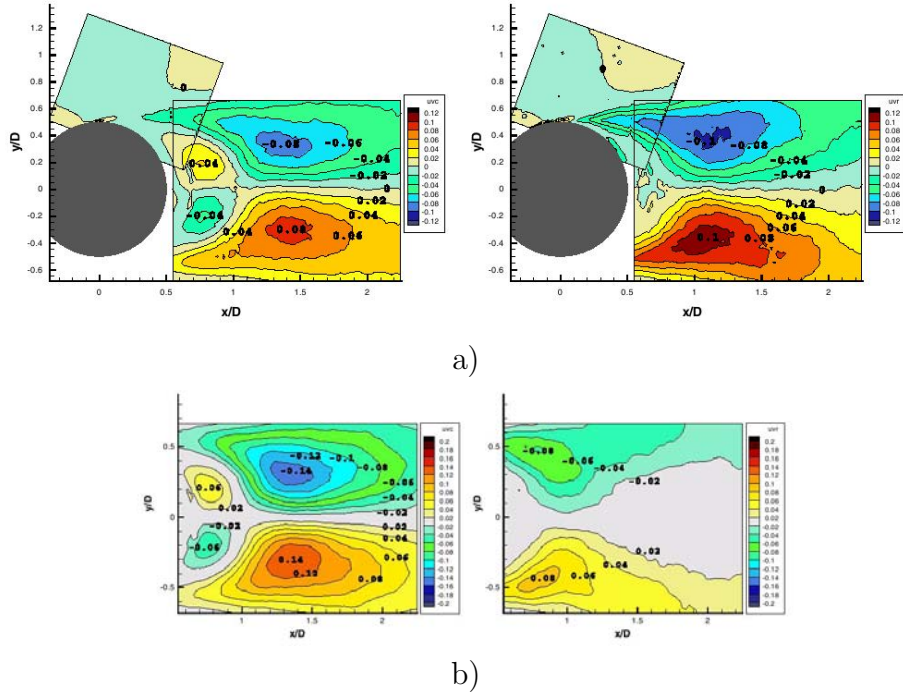


FIGURE 2.16 – Moyennes de phase : décomposition de la contrainte \overline{uv} en une contribution cohérente (uvc) et une contribution aléatoire (uvr); a) à l'aide du signal de pression ; b) à l'aide des coefficients de la POD ; Perrin *et al* (2007) [131]

2.1.7 Régime supercritique

Pour des nombres de Reynolds au-delà de $2 \cdot 10^6$ environ, la couche limite devient entièrement turbulente, et l'allée tourbillonnaire réapparaît dans le sillage à une fréquence de Strouhal constante plus élevée, Une étude détaillée de ces deux derniers régimes est fournie par Roshko (1961) [154].

Par comparaison au cas du bas nombre de Reynolds, peu d'études numériques simulent l'écoulement autour d'un cylindre à nombre de Reynolds élevé à cause de la paroi solide. Les LES précitées sont limitées à des nombres de Reynolds modérés, d'ordre 10^4 . Pour des nombres de Reynolds plus élevés, cette thèse fournit des résultats de simulations obtenus par DES (Detached Eddy Simulation) pour $Re = 1,4 \times 10^5$ dans le cadre du programme européen DESIDER, y compris les résultats de la présente étude, chapitre 6.

En ce qui concerne les effets de rotation, les études analysant l'écoulement autour d'un cylindre en rotation sont moins nombreuses par comparaison à celles du cylindre fixe. La suite de ce chapitre présente les études de la littérature réalisées dans ce contexte. La partie 4.4 de cette thèse fournit une étude bibliographique des modèles de turbulence tenant compte des effets de rotation.

2.2 Ecoulement autour d'un cylindre en rotation

Avant de passer en revue les différentes études de la littérature concernant l'écoulement autour d'un cylindre en rotation, l'effet Magnus est introduit dans le paragraphe suivant.

2.2.1 Effet Magnus

Lorsqu'une balle en rotation se déplace dans l'air, elle va, par frottement, modifier la vitesse du courant d'air autour d'elle. D'un côté la balle entraîne l'air qui sera accéléré; de ce côté la pression diminue. De l'autre côté, la balle freine l'écoulement et la pression augmente. Cette dissymétrie fait que la balle se déplace du côté de la plus faible pression, perpendiculairement à la direction de l'air, à cause de la force de portance dans cette direction (figure 2.17). Ce phénomène, observé par le physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870), est nommé à son nom, **effet Magnus**. On parle aussi d'effet **Robins** quand il s'agit d'une balle ou d'une sphère en rotation.

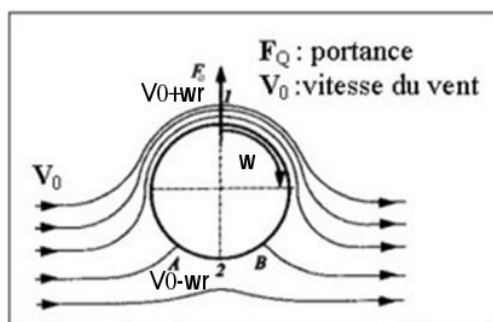


FIGURE 2.17 – Effet Magnus autour d'une balle ou cylindre en rotation

Si on considère le cas d'un fluide parfait, l'équation de Bernoulli donne :

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + P_2$$

La différence de vitesse entre les points (1) et (2) est donc à l'origine d'un gradient de pression entre ces deux points :

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2}\rho (V_1^2 - V_2^2) = 2\rho\omega r V_0$$

où ω est la vitesse de rotation, V_0 la vitesse du fluide à l'infini et r le rayon du cylindre. Ce gradient de pression génère donc une force de Magnus. Tenant compte de la théorie asymptotique de Moore (1957) [124], la circulation dans le cas d'un fluide parfait peut s'écrire :

$$\Gamma = 2\pi V r = 2\pi\omega r^2$$

Le coefficient de portance théorique pour un fluide parfait est alors donné par :

$$C_{L_{pot}} = \frac{2\Gamma}{2V_0 R} = 2\pi \frac{\omega r}{V_0} = 2\pi\alpha$$

$\alpha = \omega r/V_0$ étant le taux de rotation. Au chapitre 5, le coefficient de portance en fonction de α obtenu par les DNS sera comparé à la solution fluide parfait $C_{L_{pot}}$.

L'effet Magnus explique à titre d'exemple la trajectoire du ballon lors d'un tir de coup-franc en football, ou d'une balle de Tennis. En effet, pour une rotation d'arrière en avant (axe horizontal perpendiculaire au mouvement, comme une balle roulant sur le sol), la balle plongera plus vite vers le sol ; dans le cas contraire, elle sera soulevée et volera plus loin avant de toucher le sol.

Le **boomerang** exploite des effets similaires (figure 2.18) : Une fois lancé en le faisant tourner sur lui-même, cet engin possède la propriété de revenir vers son point de départ. Ses pales présentent un profil semblable à celui d'une aile d'avion, de telle sorte qu'en tournant dans le sens approprié, la force de portance développée par les pales détermine sa trajectoire caractéristique.



a) classique en bois



b) modernes

FIGURE 2.18 – Boomerang divers

L'utilisation de l'effet Magnus a été proposée pour mettre au point des systèmes de propulsion composés de gros cylindres verticaux capables de produire une poussée perpendiculaire à la direction du vent. Cet effet est traduit par la figure 2.19.

En 1920, **Anton Flettner**, ingénieur allemand, a mis cet effet en application sur un navire. Sur un voilier démâté de 52 m, le *Buckau*, il fit installer deux cylindres verticaux de 15 m de hauteur et de 2,75 m de diamètre. Les cylindres étaient entraînés en rotation par un petit moteur. L'expérience fut concluante puisque le navire se mut plus rapidement qu'auparavant à la voile, et qu'il remonta mieux au vent (jusqu'à 25° du lit du vent contre 45° avant). Après plusieurs essais par différentes conditions de vent, le *Buckau* (figure 2.20a), rébaptisé *Baden-Baden* traversa l'Atlantique et rallia New-York le 9 mai 1926. L'océanographe Jacques-Yves Cousteau, le professeur Lucien Malavard et Bertrand Charrier commencèrent à développer l'*Alcyone* (figure 2.20b) au début des années 1980. Son principe est sensiblement différent. Ses deux cylindres fournissaient environ 25 à 30 pour cent de l'énergie propulsive qui venait assister la propulsion par hélice. Le navire fit son premier voyage en 1985. Plus récemment, en 2006, la société de construction d'éoliennes Enercon commanda aux chantiers navals Lindenau-Werft de Kiel un cargo de 130m de long, équipé, en plus d'un moteur diesel, de quatre *rotors Flettner*. Sa mise en service est prévue pour septembre 2008.

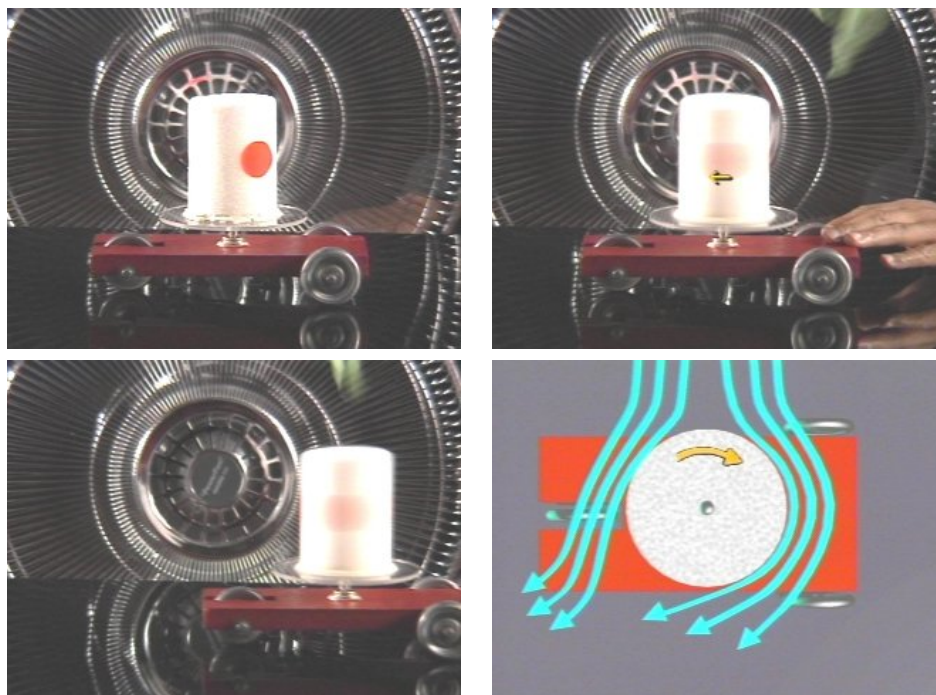


FIGURE 2.19 – Un cylindre en rotation sur un car permet au car de se déplacer dans la direction perpendiculaire au courant d'air- photos sur www.physics.montana.edu

D'autre part, les éoliennes restent une application directe de l'effet Magnus ; citons, entre autres, l'éolienne de Madaras et l'éolienne à rotors de Flettner.



a) Buckau ou Baden-Baden



b) Alcyone

FIGURE 2.20 – Rotors Flettner

Le paragraphe suivant présente les différentes études réalisées dans la littérature concernant l'écoulement autour d'un cylindre en rotation.

2.2.2 Etude bibliographique de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation

Le cylindre, placé dans un écoulement de fluide à vitesse constante, tourne autour de son axe avec une vitesse de rotation ω constante, figure 2.21. Dans ce contexte, la physique de l'écoulement dépend, en plus du nombre de Reynolds, du taux de rotation, $\alpha = \frac{D\omega}{2U_\infty}$, exprimant le rapport de la vitesse de rotation du cylindre et celle du fluide à l'infini amont.

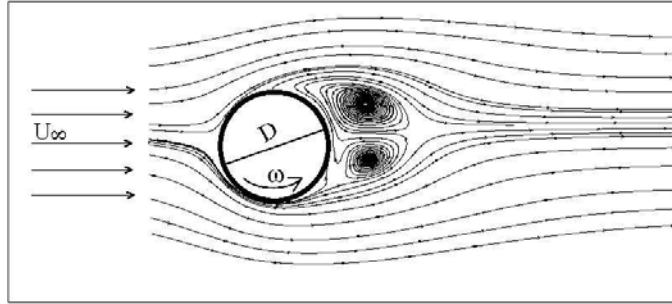


FIGURE 2.21 – Schéma du problème

Les premières expériences autour du cylindre en rotation ont été menées par Reid (1924) [144], Prandtl (1925) [138], Thom (1926) [182] et (1931) [183]. Leurs mesures s'étendent jusqu'à $Re \simeq 1.2 \times 10^5$. Ils affirment que le coefficient de portance moyen augmente en fonction du taux de rotation ; mais Prandtl (1925) [138] trouve que le coefficient de portance maximal qu'on peut atteindre en faisant tourner le cylindre est limité à 4π . Un travail similaire a été ensuite réalisé par Prandtl & Tietjens (1934) [140]. La figure 2.22 représente une sélection de 6 visualisations de l'écoulement derrière un cylindre en rotation, tirées de Prandtl (1961) [139] au nombre de Reynolds 10^4 . En fonction du taux de rotation, différentes topologies sont observées : l'allée tourbillonnaire alternée aux bas taux de rotation ; la suppression de l'allée au-delà de $\alpha = 2$; une structure proche-paroi presque symétrique par rapport à l'axe perpendiculaire à la vitesse à l'infini pour $\alpha > 4$; et un gros tourbillon unique autour du cylindre dans le cas extrême du cylindre tournant dans un fluide en repos, $\alpha = \infty$.

Les difficultés des mesures rencontrées dans les expériences précédentes quant à la distribution de pression autour du cylindre ont été surmontées par Swanson (1961) [178], en mesurant directement les coefficients de traînée et de portance. Ludwig (1964) [110] a mesuré les profils de vitesse pour des faibles taux de rotation ($\alpha \leq 0.3$) dans une étude de la séparation laminaire de parois non fixes.

Plus tard, Jaminet & Atta (1964) [86], ont observé la suppression de l'allée tourbillonnaire de Von-Kármán à faible nombre de Reynolds pour un taux de rotation de l'ordre de 2. Des visualisations de l'écoulement ont été publiées par Taneda (1977) [179] et (1980) [180] pour $Re = 100$, $\alpha = 1.73$ et $Re = 49$, $\alpha = 0.63$, et Koromilas & Telionis (1980) [98] pour $Re = 50$, $\alpha = 0.8$.

Les prémices des effets de rotation (phase de démarrage) autour d'un cylindre à des nombres de Reynolds modérés ($Re \leq 1000$) ont été étudiées expérimentalement

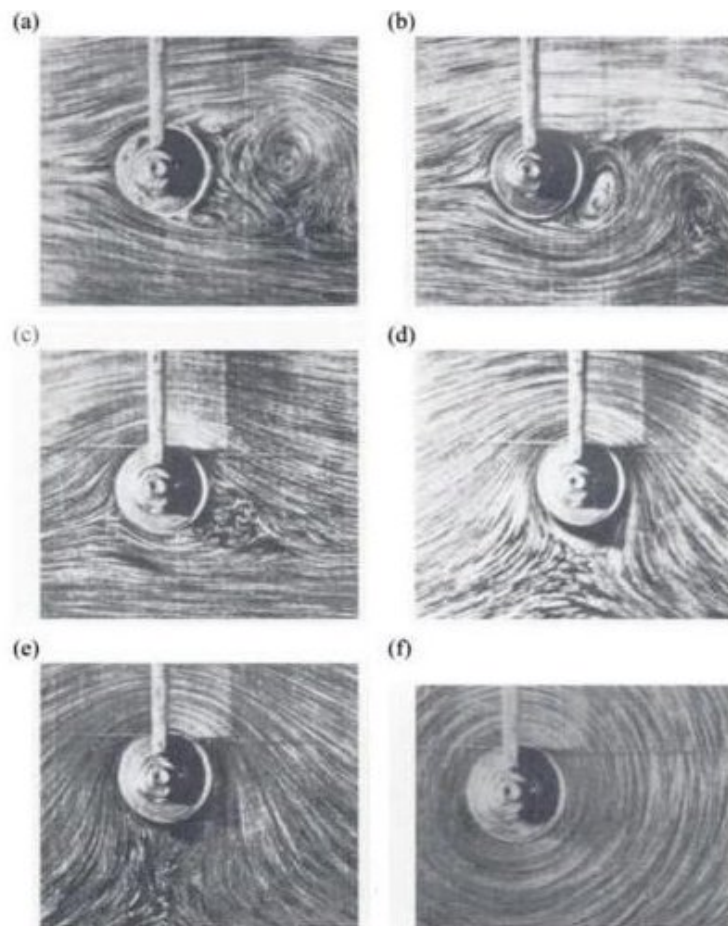


FIGURE 2.22 – Visualisations de l'écoulement d'eau autour d'un cylindre en rotation à $Re = 10^4$, Prandtl (1961)[139]; (a), $\alpha = 0$; (b), $\alpha = 1$; (c), $\alpha = 2$; (d), $\alpha = 4$; (e), $\alpha = 6$; (f), $\alpha = \infty$

par Coutanceau & Ménéard (1985) [43]. Ils montrent la formation d'une couche fluide continue qui tourne avec le cylindre de telle manière que les points d'arrêts et de détachement sont plus éloignés du cylindre. Ils ont également observé la suppression de l'allée tourbillonnaire pour α au-delà de α_L critique de l'ordre de 2. Leurs résultats ont été comparés à ceux des simulations numériques de Badr & Dennis (1985) [7]. Badr *et al.* (1990) [6] ont observé cette même phase de démarrage par une étude expérimentale et théorique pour des nombres de Reynolds $10^3 \leq Re \leq 10^4$ et $0.5 \leq \alpha \leq 3$. Chang & Chern (1991) [34] ont également étudié numériquement la phase de démarrage pour $10^3 \leq Re \leq 10^6$ et pour des faibles taux de rotation ($\alpha \leq 2$). On peut citer également l'étude de Nair *et al.* (1998) [125] concernant la phase de démarrage; ils présentent des résultats détaillés pour $Re = 3800$ et $\alpha = 2$. La figure 2.23 compare des champs instantanés obtenus numériquement par Nair *et al.* (1998) [125] à ceux de Badr *et al.* (1990) [6].

Concernant la phase établie, Ingham & Tang (1990) [84] ont étudié numériquement l'écoulement stationnaire à des bas nombres de Reynolds ($5 \leq Re \leq 20$) et des taux de rotations jusqu'à 3. Leurs simulations montrent l'augmentation du coefficient de

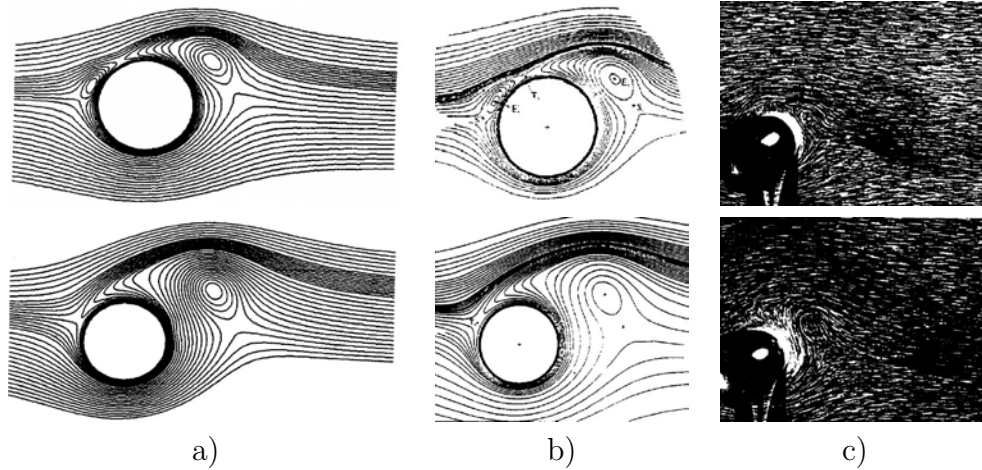


FIGURE 2.23 – Phase de démarrage, $Re = 1000$, $\alpha = 3$, en haut : $t = 2.0$ et en bas $t = 3.0$, comparaisons entre les résultats numériques de Nair *et al.* (1998) [125]a, et les champs obtenus par Badr *et al.* (1990) [6] numériquement b) et expérimentalement c)

portance et la diminution du coefficient de traînée avec la rotation. Kimura *et al.* (1991) [95] ont réalisé des études expérimentales et numériques bi-dimensionnelles leur permettant d'observer la suppression de l'allée tourbillonnaire pour $\alpha > \alpha_{cr}$ où α_{cr} dépend du nombre de Reynolds, figure 2.24.

La dépendance du coefficient de portance de la vitesse de rotation a été explicitée par Tokumaru & Dimotakis (1993) [187] pour $Re = 3800$ et $\alpha \leq 10$. Leurs mesures expérimentales montrent que le coefficient de portance est plus grand lorsque le rapport d'allongement du cylindre est plus grand. Ils trouvent que le maximum du coefficient de portance peut atteindre des valeurs supérieures à la limite obtenue par Prandtl (1925) [138] (4π).

Chew *et al.* (1995) [36] ont étudié numériquement l'effet de la rotation du cylindre pour $Re = 1000$. Ils observent la détérioration de l'allée de Von-Kármán lorsque α augmente jusqu'à sa disparition pour $\alpha > 3$.

Plus récemment, l'écoulement laminaire autour d'un cylindre en rotation a été étudié numériquement par Kang *et al.* (1999) [92] pour $Re = 60, 100$, et 160 et $0 \leq \alpha \leq 2.5$, et par Barnes (2000) [10] pour $Re \leq 65$, montrant les mêmes conséquences de la rotation : l'augmentation du coefficient de portance moyen, et la suppression de l'allée tourbillonnaire pour $\alpha > \alpha_L$, $\alpha_L = 1,4, 1,8$ et $1,9$ pour $Re = 60, 100$ et 160 respectivement, Kang *et al.* (1999) [92]. Également, la suppression de l'allée de Von-Kármán a été obtenue par Homescu *et al.* (2002) [82], en contrôlant la vitesse de rotation du cylindre, qu'elle soit constante ou non. Ils fournissent les valeurs optimales des taux de rotation pour $60 \leq Re \leq 1000$.

Stojković *et al.* (2002) [175] ont été les premiers à observer un second mode d'instabilité pour $4,8 \leq \alpha \leq 5,15$ à $Re = 100$. L'étude bi-dimensionnelle numérique de Stojković *et al.* (2003) [176] confirme l'existence de cet intervalle de second mode d'instabilité, pour $60 \leq Re \leq 200$, ainsi que celle de Mittal & Kumar (2003) [123], pour

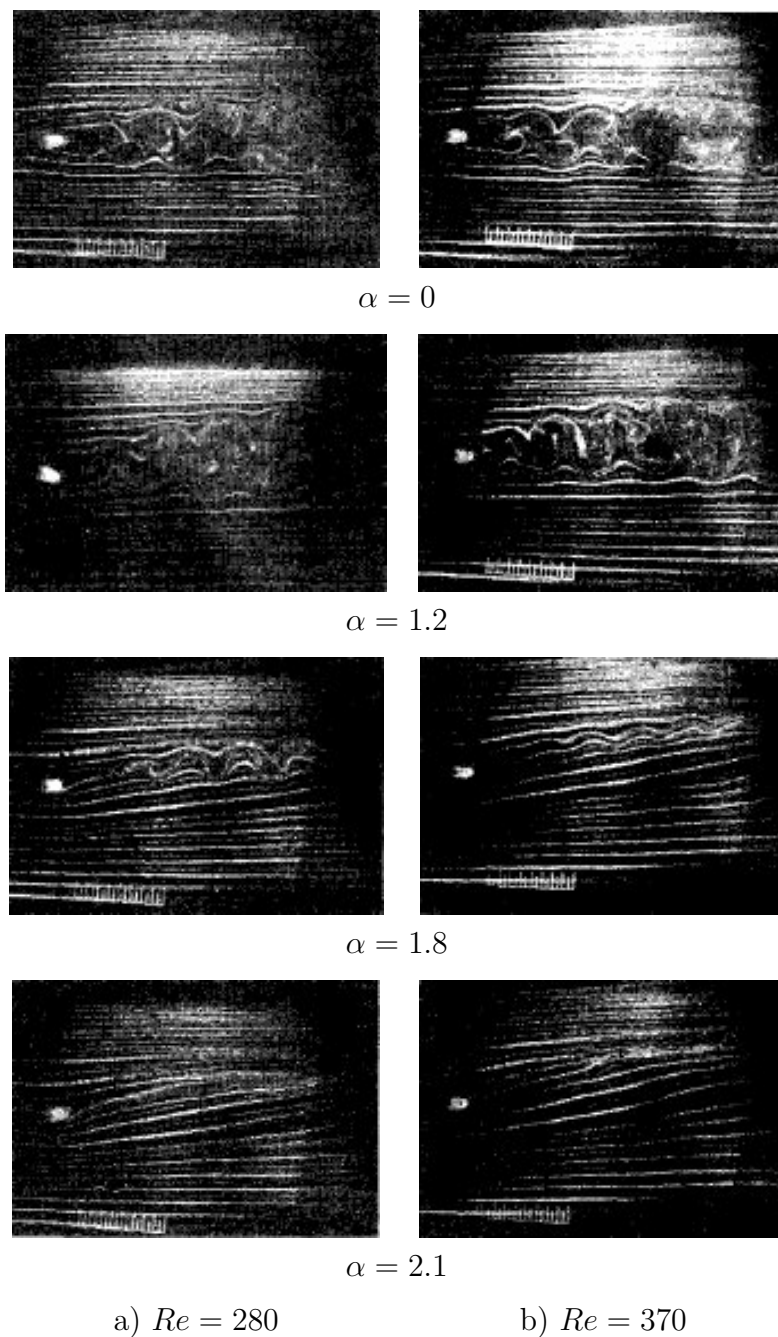


FIGURE 2.24 – Suppression de l'allée tourbillonnaire, Kimura *et al.* (1991) [95]

$Re = 200$, figure 2.25. Cliffe & Tavener (2004) [39] ont étudié l'effet de la rotation d'un cylindre sur les nombres de Reynolds critiques et le nombre de Strouhal au point de bifurcation, ainsi que l'effet du coefficient de blocage sur ces paramètres.

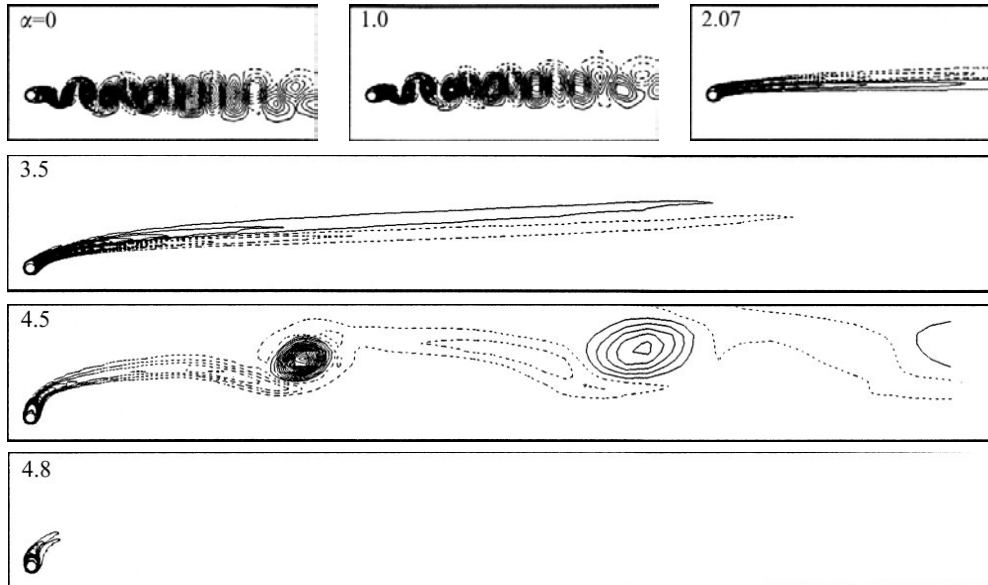


FIGURE 2.25 – Iso-lignes de vorticité, différents régimes à $Re = 200$ en fonction du taux de rotation α , Mittal & Kumar (2003) [123]

Fournier *et al.* (2003) [62] ont proposé d'utiliser la rotation pour le contrôle des écoulements. Ils ont mené des Simulations des Grandes Échelles (LES) au nombre de Reynolds de 2×10^3 . Ils ont observé que la rotation modifie l'écoulement en déviant l'allée de Von-Kármán, et entraîne une création et une croissance de portance ainsi qu'une réduction de la traînée, figure 2.26.

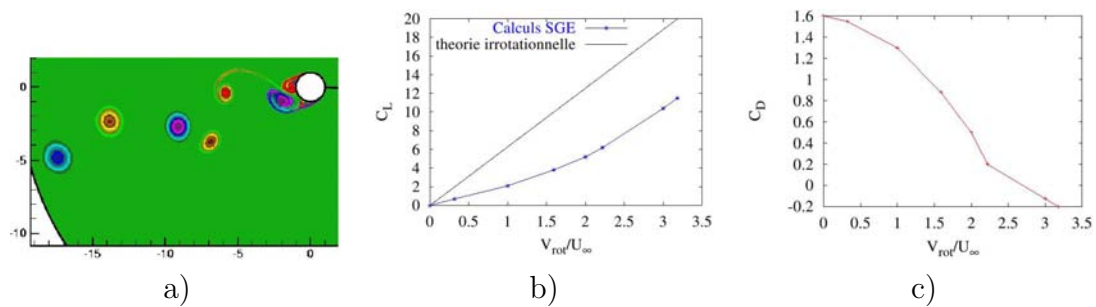


FIGURE 2.26 – a) Champ de vorticité avec rotation obtenu par LES, Fournier *et al.* (2003) [62], $Re = 2 \times 10^3$; Evolution des coefficients de portance b) et de traînée en fonction du taux de rotation V_{rot}/U_∞

A part l'étude précitée de Tokumaru & Dimotakis (1993) [187] quant à l'effet du rapport d'allongement du cylindre sur l'écoulement, les études tri-dimensionnelles de l'effet de la rotation du cylindre sont très rares. On peut citer celle de Mittal (2004) [122], pour $Re = 200$ et $\alpha = 5$. Alors que l'écoulement 2D est stable, l'auteur trouve que l'écoulement 3D est associé à des instabilités centrifuges, figure 2.27. Il montre

que le coefficient de portance peut dépasser la limite de Prandtl (1925) [138] pour des rapports d'allongement élevés.

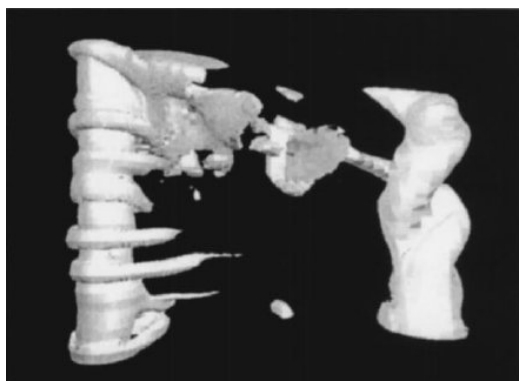


FIGURE 2.27 – Instabilités centrifuges, $Re = 200$, $\alpha = 5$, Mittal (2004) [122]

2.2.3 Effets de la rotation sur les écoulements turbulents

La rotation est un paramètre important sur le plan des applications industrielles, comme les machines tournantes. En effet, dans un contexte turbomachine, les écoulements turbulents sont de type complexe : en plus du cisaillement principal ($\partial U/\partial y$) lié à la présence des couches limites, apparaissent des cisaillements secondaires significatifs liés aux surfaces en rotation, aux sillages des pales, aux courbures de l'écoulement (dues aux parois mais aussi aux écoulements secondaires) et aux accélérations de Coriolis dues à la rotation d'ensemble. Ainsi, pour ce type d'écoulements, la turbulence est affectée par les effets de compressibilité, les gradients de pression, la transition, la courbure et les effets de rotation. Dans ce contexte turbomachine, on peut citer le travail de Dufour (2006) [57] qui a examiné les effets de rotation et de courbure.

Quand un écoulement turbulent est soumis à une rotation d'ensemble, la présence des accélérations de Coriolis entraîne des modifications significatives du champ fluctuant. La rotation de paroi, comme le cas d'un obstacle tournant dans un écoulement uniforme, peut être assimilée à une rotation d'ensemble, c.à.d., par changement de repère, on peut supposer que l'obstacle est fixe, et que le domaine fluide est soumis à une rotation d'ensemble. Les deux mécanismes par lesquels la rotation opère sont l'instabilité de Coriolis en cisaillement, et l'inhibition du transfert spectral.

L'instabilité de Coriolis en cisaillement, Tritton (1992) [191], peut se traduire par des phénomènes d'amplification ou de réduction de la turbulence, cette réduction pouvant mener jusqu'à la relaminarisation de l'écoulement. Cet effet n'apparaît pas explicitement dans une modélisation au premier ordre, et nécessite ainsi une correction pour les effets de rotation.

Le transfert spectral par lequel la rotation affecte la turbulence peut se superposer à l'instabilité de Coriolis en cisaillement. Les expériences de Wigeland & Nagib (1978) [195] et Jacquin *et al.* (1990) [85], ainsi que les simulations de Rogallo (1981) [151],

Bardina *et al.* (1983,1985) [8, 9] et Dang & Roy (1985) [49], ont montré que dans le cas de la turbulence homogène isotrope, la rotation diminue le taux de décroissance énergétique ($\frac{1}{k} \frac{dk}{dt}$), et corrélativement, le taux de décroissance de la dissipation ($\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dt}$). Une turbulence homogène isotrope décroît moins rapidement en présence de la rotation. Par ailleurs, les expériences de Jacquin *et al.* (1990) [85] ont mis en évidence le caractère anisotrope de ce phénomène qui affecte de manière privilégiée les échelles transversales (dans le plan orthogonal à l'axe de la rotation). La rotation, induit un confinement de la taille des tourbillons dans le plan transverse, agissant à une échelle caractéristique $L_\Omega = v/\Omega$, et n'affectant pas les échelles inférieures; Ω étant la vitesse de rotation, et v représente la fluctuation de vitesse dans le plan transverse. Sur le plan spectral, l'anisotropie et la diminution du taux de décroissance énergétique se traduisent par une diminution du transfert énergétique vers les grands nombres d'onde, Rogallo (1981) [151]. En d'autres termes, l'énergie se maintient aux petits nombres d'ondes, et on observe une pente plus importante que la pente en $-5/3$ du spectre de Kolmogorov, de l'ordre de -2 , figure 2.28. Le confinement opérant à une échelle $L_\Omega \propto 1/\Omega$ se transpose sur le plan spectral par un nombre d'onde de coupure $k_\Omega \propto \Omega$. Ce qui signifie que la pente du spectre n'est modifiée que pour des nombres d'onde compris entre k_0 et k_Ω , k_0 étant le nombre d'onde le plus énergétique, figure 2.28b. Lorsque k_Ω est supérieur à la micro échelle de Kolmogorov k_η , tout le spectre subit l'influence de la rotation, de sorte qu'augmenter encore la rotation ne modifie plus significativement la structure de la turbulence. Ainsi, au delà d'un certain seuil, les effets de rotation saturent.

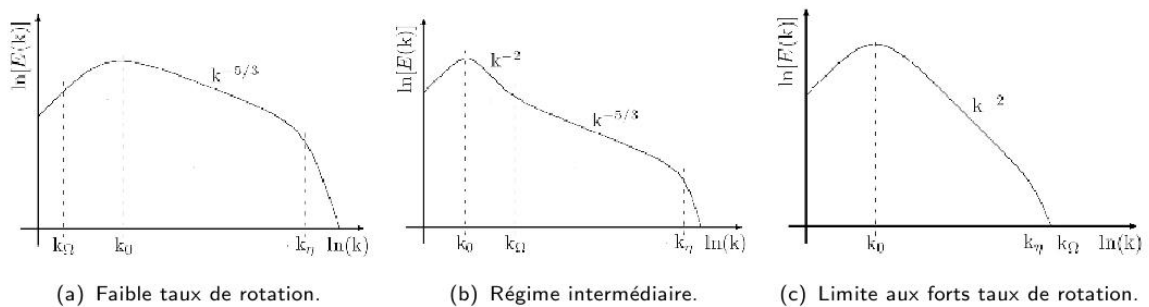


FIGURE 2.28 – Influence de la rotation sur le transfert spectral, Dufour (2006) [57]

Le chapitre 4 présentera des approches de modélisation tenant compte des effets de la rotation, issues surtout de modèles au second ordre, mais également des modèles du premier ordre corrigés, plus facilement applicables dans un contexte industriel.

Chapitre 3

Méthodes numériques

Ce chapitre présente les principes des codes utilisés dans cette étude : le code ICARE pour les DNS autour du cylindre en rotation, et NSMB pour les simulations à nombres de Reynolds élevés.

3.1 Le code ICARE

L'étude de l'écoulement autour du cylindre en rotation est réalisée à l'aide des simulations numériques directes avec le code ICARE de l'IMFT, dans sa version volumes finis. Les principes de ce logiciel ont été définis par Braza (1991) [22, 23], et la version 3D étudiant l'écoulement autour d'un cylindre a été développée par Persillon (1995) [134] et Persillon & Braza (1998) [135]. Les principes de ce code seront présentés dans ce qui suit, ainsi que la méthode de génération des maillages.

3.1.1 Principes

Le code ICARE résout les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. Les équations sont normalisées par le diamètre du cylindre D , et la vitesse du fluide à l'infini amont U_∞ :

$$u_i = \frac{\tilde{u}_i}{U_\infty}, \quad x_i = \frac{\tilde{x}_i}{D}, i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

$$t = \frac{\tilde{t}}{T_0}, \quad P = \frac{\tilde{P}}{P_0} \quad (3.2)$$

où

$$T_0 = \frac{D}{U_\infty}, \quad P_0 = \frac{1}{2}\rho_0 U_\infty^2 \quad (3.3)$$

Tenant compte de ces variables adimensionnées, l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \operatorname{div} (\vec{V} \otimes \vec{V}) - \frac{1}{Re} \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{V}) = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} P \end{cases} \quad (3.4)$$

Ces équations sont écrites en coordonnées curvilignes dans le plan (x, y) , alors que dans la direction transversale, elles sont écrites en coordonnées cartésiennes.

La méthode numérique est basée sur une formulation de pression-vitesse, utilisant un schéma prédictor-correcteur de pression. Le champ de pression au pas de temps $(n+1)$ est approximé à un champ prédit de pression P^* assumé égal à P^n . Les équations de Navier-Stokes sont résolues en fonction d'un champ de vitesse approximatif V^* . Une forme implicite du schéma explicite de Amsdem & Harlow (1970) [4], étendu dans le présent cas aux écoulements instationnaires a été appliquée. Les détails sont explicités dans Braza *et al.* (1986) [25].

Au pas de temps $(n+1)$, l'équation 3.4 peut être écrite comme suit :

$$\frac{\overrightarrow{V^{n+1}} - \overrightarrow{V^n}}{\Delta t} + \text{div}(\overrightarrow{V^n} \overrightarrow{V^{n+1}}) = -\overrightarrow{\text{grad}} P^{n+1} + \frac{1}{Re} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V^{n+1}}) \quad (3.5)$$

L'équation de quantité de mouvement du champ approximé de vitesse V^* est :

$$\frac{\overrightarrow{V^*} - \overrightarrow{V^n}}{\Delta t} + \text{div}(\overrightarrow{V^n} \overrightarrow{V^*}) = -\overrightarrow{\text{grad}} P^n + \frac{1}{Re} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V^*}) \quad (3.6)$$

$\overrightarrow{V^*}$ ne satisfait pas nécessairement l'équation de conservation de masse comme $\overrightarrow{V^{n+1}}$; comme les deux champs portent la même vorticité,

$$\text{rot}(\overrightarrow{V^{n+1}}) = \text{rot}(\overrightarrow{V^*}) \quad (3.7)$$

ils peuvent être reliés par une fonction potentielle auxiliaire ϕ :

$$\overrightarrow{V^{n+1}} - \overrightarrow{V^*} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi \quad (3.8)$$

En prenant la divergence de cette équation, comme $\text{div} \overrightarrow{V^{n+1}} = 0$, une équation de Poisson de la fonction potentielle ϕ peut être obtenue :

$$\text{div} \overrightarrow{V^*} = \Delta \phi \quad (3.9)$$

Le champ de vitesse correct V^{n+1} sera donc évalué à partir de l'équation 3.8. Dans ce cas du schéma semi-implicite, la forme exacte du gradient de pression est dérivée de la soustraction des équations 3.5 et 3.6, et en remplaçant $(\overrightarrow{V^{n+1}} - \overrightarrow{V^*})$ par $\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ selon l'équation 3.8 :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P^{n+1} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(P^n + \frac{\phi}{\Delta t} \right) + \text{div}(\overrightarrow{V^n} \overrightarrow{\text{grad}} \phi) - \nu \nabla^2 (\overrightarrow{\text{grad}} \phi) \quad (3.10)$$

Lorsque l'équation de conservation de mouvement est approchée par un schéma complètement explicite, l'équation de pression se réduit à :

$$P^{n+1} = P^n + \frac{\phi}{\Delta t} \quad (3.11)$$

L'algorithme est résumé, à chaque pas de temps par le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\overrightarrow{V^*} - \overrightarrow{V^n}}{\Delta t} + \text{div}(\overrightarrow{V^n} \overrightarrow{V^*}) = -\overrightarrow{\text{grad}} P^n + \frac{1}{Re} \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \overrightarrow{V^*}) \\ \Delta \phi = \text{div} \overrightarrow{V^*} \\ \overrightarrow{V^{n+1}} = \overrightarrow{V^*} - \overrightarrow{\text{grad}} \phi \\ P^{n+1} = P^n + \frac{\phi}{\Delta t} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

La version volumes finis utilisée est à l'ordre 2 de précision en espace et en temps ; elle utilise des maillages décalés de pression et de vitesse et un algorithme implicite à directions alternées (A.D.I.), Peaceman & Rachford (1955)[129] : chaque pas de temps est découpé autant de pas fractionnaires que le domaine de résolution compte de directions spatiales ; à chaque pas, on calcule un champ intermédiaire ne tenant compte que des termes d'évolution selon la direction spatiale associée au pas fractionnaire ; on est donc ramené à un calcul monodimensionnel à chaque pas fractionnaire. Des versions du code ICARE utilisant des schémas de plus haute précision (ordre 4) sont également disponibles mais pas utilisées dans ce contexte de nombres de Reynolds modérés.

En ce qui concerne les calculs tri-dimensionnels, un schéma à trois étapes basé sur Douglas (1962) [56] pour les équations de diffusion, a été étendu sur la solution instationnaire de convection-diffusion de Navier-Stokes, comme décrit par Persillon & Braza (1998) [135]. L'algorithme numérique a été parallélisé pour des architectures de mémoire distribué par Hoarau *et al.* (2001) [81]. La discrétisation est réalisée en utilisant les différences centrales.

3.1.2 Génération des maillages

Les maillages utilisés, du type H, sont générés avec le code MERCURE développé par Braza (1991) [22, 23], et Jin (1994) [87]. Grâce à une application bijective, le domaine physique complexe est transformé en domaine de calcul simple. Le domaine transformé est cartésien orthonormé. Dans le cas du maillage H, ce domaine est un rectangle et le cylindre est un segment de droite placé à son intérieur. La transformation se fait avec les relations suivantes :

$$(x, y) \longrightarrow (\eta, \xi)$$

$$\begin{aligned} dx &= x_\xi d\xi + x_\eta d\eta \\ dy &= y_\xi d\xi + y_\eta d\eta \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left(y_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - y_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

où J est le déterminant du jacobien :

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = \frac{1}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x} \quad (3.15)$$

les indices η et ξ (x et y) représentent les dérivées partielles par rapport à η et ξ respectivement (x et y respectivement).

Par convention, une maille élémentaire est un carré de côté égal à l'unité, donc $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

En introduisant les relations ci-dessus dans les équations de la quantité de mouvement, on obtient les expressions des équations de la quantité de mouvement en coordonnées généralisées. Les détails du calcul et les résultats des transformations sont donnés par Braza (1991) [22, 23], Jin (1994) [87], et Persillon (1995) [134]. Des maillages décalés pour la vitesse et la pression sont utilisés, ce choix a été prouvé capable de donner une précision équivalente à celle obtenue avec un nombre deux fois plus important de noeuds de maillages non décalés.

La méthode de génération des maillages est développée par Thompson *et al.* (1974) [185]. Elle est capable de générer des maillages adaptés aux formes d'une paroi solide quelconque. Les coordonnées curvilignes sont obtenue par la résolution d'un système elliptique :

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= P(\xi, \eta) \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= Q(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.16)$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet sur les parois.

$P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$ sont deux fonctions de contrôle de la répartition spatiale des points dans le plan physique. Les équations précédentes sont résolues sur le plan transformé de la même manière que les équations de Navier-Stokes, et les détails sont fournis dans les références précitées. La discrétisation des équations a été effectuée de même à l'aide de la méthode A.D.I. pour obtenir un maillage bien lissé.

La géométrie étant simple, les études menées sur l'écoulement autour d'un cylindre ont toujours utilisé les fonctions $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$ nulles pour simplifier le traitement à la paroi. Afin de resserrer le maillage proche du cylindre, des fonctions d'attraction de lignes du système des coordonnées ont été testées. Les fonctions P et Q sont adoptées à partir de Thompson *et al.* (1977) [186] :

$$\begin{aligned} P(\xi, \eta) &= -\sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j) \exp\left(-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} Q(\xi, \eta) &= -\sum_{i=1}^n a_i \operatorname{sgn}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m b_j \operatorname{sgn}(\eta - \eta_j) \exp\left(-d_j \sqrt{(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2}\right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

où les amplitudes a_i et b_j et les paramètres d'amortissement c_i et d_j ne sont pas nécessairement les mêmes dans les deux équations. Le premier terme des équations permet

	N_x	N_y	N_w	X_u	X_d	Y_u	ΔY_{min}
M1	250	100	43	8,95	20,51	7,42	0,0135
M2	250	100	43	8,97	20,55	7,43	0,00225
M3	352	112	43	9,40	42,37	8,50	0,0135
M4	303	120	47	11,50	23,70	10,02	0,0115
M5	360	146	61	11,54	23,41	10,21	0,0099
M6	401	280	71	10,86	25,42	10,92	0,0061

TABLE 3.1 – Caractéristiques de quelques maillages utilisés, N_x et N_y : nombre de points dans les directions x et y respectivement ; $2 \times N_w$: nombre de points sur la surface du cylindre ; X_u et X_d : longueur en amont et en aval du cylindre ; $2Y_u$: hauteur du domaine ; ΔY_{min} : la hauteur de la plus petite maille ; voir figure 3.1

d’attirer les lignes du maillage $\xi = \text{constante}$ vers les lignes $\xi = \xi_i$ dans l’équation 3.17, et les lignes $\eta = \text{constante}$ vers la ligne $\eta = \eta_i$ dans l’équation 3.18. Le second terme attire les lignes $\xi = \text{constante}$ vers les points (ξ_j, η_j) dans 3.17 avec un effet similaire sur les lignes $\eta = \text{constante}$ dans 3.18.

A l’aide des fonctions P et Q précédentes, des maillages plus serrés proche de la paroi du cylindre ont été testés, soit en attirant sur tous les points du cylindre soit sur toute la ligne qui constitue le support du cylindre dans le plan transformé. Les amplitudes et les paramètres d’amortissement ont été convenablement choisis pour que P et Q demeurent faibles de façon à resserrer les lignes du maillage en évitant toutefois le chevauchement de certaines d’entre elles. Différents maillages obtenus par cette méthode ont donné des résultats en bon accord avec ceux du maillage avec P et Q nulles qui s’avère donner des résultats suffisamment bons pour pouvoir l’utiliser par simplicité. Néanmoins, l’utilité des paramètres de contrôle $P(\xi, \eta)$ et $Q(\xi, \eta)$ s’avère plus importante pour des nombres de Reynolds plus élevés.

D’autre part, plusieurs maillages ont été testés, en variant à chaque fois le nombre de points sur le cylindre et/ou la taille du domaine. A titre d’exemples, le tableau 3.1 présente les caractéristiques de quelques maillages utilisés. Le maillage M1 est le plus utilisé pour $Re = 200$; M2 est généré avec $P(\xi, \eta)$ nulle, et $Q(\xi, \eta)$ choisie de manière à attirer les lignes $\eta = \text{constante}$, d’une part vers tous les points de la ligne centrale qui constitue le support du cylindre ($b_j = 300, d_j = 1$), et d’autre part, plus fortement vers tous les points du cylindre ($b_j = 300, d_j = 0, 3$). La figure 3.2 compare les deux maillages M1 et M2 dans la région proche du cylindre. Les fonctions P et Q sont considérées nulles pour les autres maillages du tableau 3.1. Le maillage M3 est caractérisé par une taille importante en aval du cylindre, permettant de mieux capter une seconde instabilité comme il sera montré dans les paragraphes suivants. Les maillages M4, M5 et M6 sont respectivement utilisés pour $Re = 300$, $Re = 500$ et $Re = 1000$, ainsi que pour tester l’indépendance des résultats du maillage utilisé. Quant aux calculs 3D, le maillage utilisé est de $Nx \times Ny \times Nz = 250 \times 100 \times 80$ où le même maillage est répété dans la direction transversale. L’envergure du domaine de calcul est de 12 diamètres.

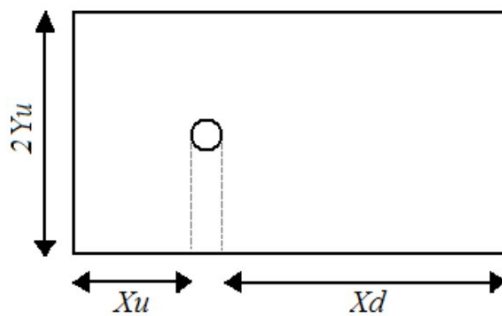
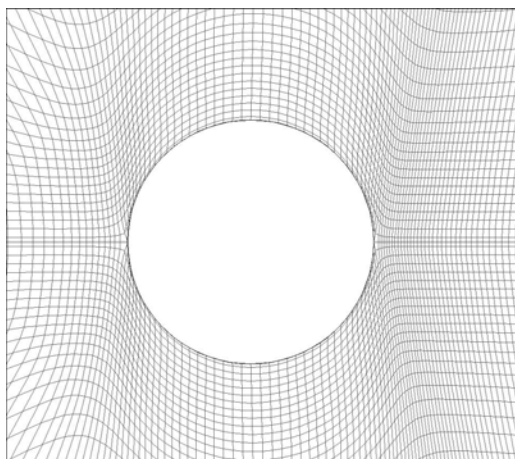
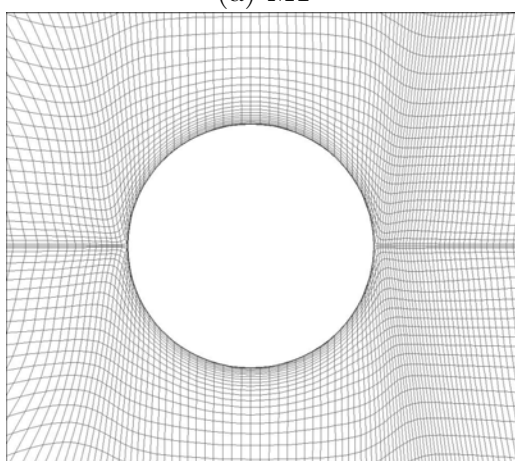


FIGURE 3.1 – Domaine de calcul



(a) M1



(b) M2

FIGURE 3.2 – Agrandissement du maillage dans la région proche du cylindre, (b) modification avec les fonctions d'attractions

3.2 Le solveur Navier-Stokes Multi-Block : NSMB

Le solveur NSMB est développé conjointement par l'EPFL, le KTH, le CERFACS, Aérospatiale, SAAB, CFS Engineering, l'IMFT et l'IMFS de Strasbourg. C'est un code multi-block parallélisé qui résout les équations de Navier-Stokes sous la formulation volume fini. Il propose de nombreuses fonctionnalités : plusieurs schémas numériques (spatiaux et temporels), plusieurs modèles de turbulence (LES, algébriques, non-linéaires, à une ou à deux équations, DES, OES), chimie de l'air en équilibre ou hors équilibre. Le manuel de ce solveur détaille toutes les fonctionnalités du code. Ce qui suit n'est qu'un rappel des relations résolues et une indication des options utilisées.

Les équations instationnaires et compressibles de Navier-Stokes sont résolues dans leurs coordonnées cartésiennes tri-dimensionnelles :

$$\frac{\partial}{\partial t}(W) + \frac{\partial}{\partial x}(f - f_v) + \frac{\partial}{\partial y}(g - g_v) + \frac{\partial}{\partial z}(h - h_v) = 0 \quad (3.19)$$

Le vecteur d'état W est donné par :

$$W = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Les flux convectifs sont définis comme :

$$f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(\rho E + p) \end{pmatrix}, g = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(\rho E + p) \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho wu \\ \rho wv \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

où ρ est la densité du fluide considéré, u , v et w sont les composantes cartésiennes de la vitesse, p la pression et E l'énergie totale du fluide.

Les flux visqueux sont définis par :

$$f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ (\tau U)_x - q_x \end{pmatrix}, g_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ (\tau U)_y - q_y \end{pmatrix}, h_v = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ (\tau U)_z - q_z \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Le tenseur des contraintes τ est donné par :

$$\begin{aligned}
\tau_{xx} &= \frac{2}{3}\mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{yy} &= \frac{2}{3}\mu \left(-\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{zz} &= \frac{2}{3}\mu \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

où μ est la viscosité du fluide.

La dissipation visqueuse de l'équation de l'énergie est calculée comme suit :

$$\begin{aligned}
(\tau\mathbf{U})_x &= \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + \tau_{xz}w \\
(\tau\mathbf{U})_y &= \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + \tau_{yz}w \\
(\tau\mathbf{U})_z &= \tau_{zx}u + \tau_{zy}v + \tau_{zz}w
\end{aligned}$$

Le flux de chaleur dû à la conduction est calculé selon la loi de Fourier :

$$\begin{aligned}
q_x &= -k\frac{\partial T}{\partial x} \\
q_y &= -k\frac{\partial T}{\partial y} \\
q_z &= -k\frac{\partial T}{\partial z}
\end{aligned}$$

où T est la température et k la conductivité thermique.

Pour les gaz parfaits, la viscosité peut être évaluée à l'aide de la loi de Sutherland qui, pour l'air à l'état normal, s'écrit :

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2} \frac{(T_\infty + S_1)}{(T + S_1)}$$

où μ_∞ est la viscosité à la température de référence T_∞ , et S_1 est une constante généralement égale à 110.3 pour l'air.

En imposant un nombre de Prandtl constant, pour l'air $Pr = 0.72$, la conductivité thermique sera :

$$k = \mu c_p / Pr$$

Les capacités calorifiques à volume constant et à pression constante sont des constantes pour les gaz parfaits, et est donc calculée par $c_v = R/(\gamma - 1)$ et $c_p = \gamma c_v$ respectivement, avec $\gamma = 1.4$, and $R = 287 (J/kgK)$ pour l' air.

Pour fermer le système 3.19, il faut relier la pression au vecteur d'état W . Cette relation dépend du modèle utilisé pour décrire les propriétés thermodynamiques du gaz. Pour un gaz parfait, on peut écrire :

$$p = \rho e(\gamma - 1) = \rho c_v T(\gamma - 1) = \rho RT \quad (3.23)$$

où e est l'énergie interne, reliée à l'énergie totale par la relation suivante :

$$e = E - \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2) \quad (3.24)$$

Le solveur NSMB est utilisé pour la simulation des écoulements autour d'un cylindre et d'une aile NACA0021 à haut nombre de Reynolds. Les calculs sont effectués en utilisant le schéma central amont à l'ordre 4 pour la discrétisation spatiale, et une méthode implicite (dual-time stepping). Ces deux configurations étaient des cas-tests du programme européen DESIDER.

Chapitre 4

Modélisation de la turbulence

Ces dernières années, plusieurs études ont été menées dans le but de prédire les écoulements fortement instationnaires autour d'obstacles, en utilisant des approches URANS ou hybrides. Ce chapitre aborde différentes approches de modélisation de la turbulence, et introduit les modèles utilisés dans cette étude pour la simulation d'écoulements fortement décollés. Quelques approches de modélisation des effets de rotation sont également présentées.

4.1 Approches de modélisation

L'étude de tout écoulement turbulent pourrait se faire, en principe, par résolution directe des équations de Navier-Stokes qui décrivent le mouvement instantané du fluide. Pour des nombres de Reynolds élevés, le nombre de points de discrétisation nécessaire pour représenter les plus petites échelles de la turbulence atteint des valeurs prohibitives quant aux capacités des ordinateurs actuels ; par conséquent, les simulations numériques directes (DNS) nécessiteront de très puissants moyens informatiques. Les DNS ne peuvent être conduites actuellement que sur des écoulements en géométrie relativement simple, et pour des nombres de Reynolds peu élevés. On a alors recours à la modélisation. De nombreuses méthodes de macrosimulation de turbulence ont été construites et proposées au fil des années. Cependant, le choix d'un modèle de turbulence parmi les nombreuses formulations disponibles dans la littérature est souvent un problème délicat. Ce choix dépend essentiellement des réponses attendues et de leur qualité : type d'informations que l'on désire obtenir, domaine d'application, précision des prévisions, simplicité de mise en œuvre, économie en temps de calcul. Toutefois, le modèle le plus universel n'est pas forcément le mieux adapté à un problème précis. Un choix doit être fait pour chaque problème traité en fonction des objectifs, et les constantes du modèle doivent être reconsidérées pour des cas d'écoulements qui sont loin de l'équilibre statistique.

Les premières méthodes de simulation ont été basées sur une description statistique de la turbulence. C'est la classe des méthodes RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes). Toute grandeur physique est décomposée en deux parties :

$$U = \bar{U} + u \tag{4.1}$$

\bar{U} est une moyenne statistique, remplaçable par une moyenne temporelle sous l'hypothèse d'ergodicité, et u est la fluctuation aléatoire. Cette classe de modélisation n'est valable que pour des écoulements en équilibre statistique dans le sens de la théorie de Kolmogorov, par exemple, les couches limites à grand nombre de Reynolds, la zone lointaine d'un sillage, d'un jet ou d'une zone de mélange. Le moyennage des équations de Navier-Stokes qui régissent l'écoulement associé à cette décomposition conduit à un système d'équations pour le mouvement moyen dans lequel apparaissent des termes inconnus : les corrélations doubles des vitesses fluctuantes qui sont les composantes du tenseur des contraintes turbulentes ou tenseur de Reynolds. La résolution de ce système nécessite des lois de fermeture modélisant ces termes. Parmi les modèles les plus répandus, on distingue les modèles au premier ordre qui relient algébriquement le tenseur de Reynolds au mouvement moyen, et les modèles au second ordre qui utilisent les équations de transport de ces contraintes dans lesquelles les termes inconnus sont modélisés (cf. Speziale (1991) [172]). Les corrélations doubles des vitesses fluctuantes jouant le rôle de contraintes, les modèles au premier ordre les plus répandus sont les modèles linéaires qui utilisent une hypothèse de fermeture Newtonienne basée sur une analogie avec la loi de comportement de fluide Newtonien. Le tenseur des contraintes turbulentes est dans ce cas relié linéairement au tenseur des taux de déformation moyenne, via une viscosité turbulente qui est déterminée à partir d'une échelle de vitesse et d'une échelle de longueur turbulentes.

Une classe intermédiaire de modèles de turbulence consiste à adopter des lois constitutives non-linéaires reliant le tenseur de Reynolds au tenseur de déformation et de rotation du mouvement moyen. Ces lois constitutives peuvent découler de concepts rhéologiques par analogie à des fluides viscoélastiques, (Speziale (1987)[171], par exemple) ou bien de dégénérescence des équations de transport des tensions de Reynolds vers des équations de transport algébriques, approche Explicit Algebraic Stress Modelling, EARSM, (Jongen & Gatski (1998) [90], Gatski & Jongen (2000) [66], Wallin & Johansson (2000) [192], entre autres). Cette classe intermédiaire vise à restituer le caractère anisotrope du tenseur turbulent notamment dans les régions proches paroi, alors que les modèles linéaires de par la loi Boussinesq rendent le comportement des tensions normales isotrope.

La présence des instationnarités et de structures organisées dans les écoulements turbulents conduit à ne plus considérer l'ensemble du mouvement fluctuant comme aléatoire, et ainsi à adopter des approches instationnaires. La première approche URANS, Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes, et la plus largement utilisée, consiste à ne plus considérer le mouvement moyen stationnaire et à appliquer les mêmes schémas de fermeture qu'en modélisation RANS pour la modélisation des contraintes turbulentes. Les équations du mouvement moyen sont les mêmes que les équations RANS, au terme temporel près. Cette approche conduit bien souvent, notamment dans le cas d'écoulements décollés, à de faibles prédictions, du fait du manque d'adaptation des échelles de vitesse et de longueur du mouvement turbulent utilisées dans ces modèles, quant aux aspects de non-équilibre statistique induit par les instationnarités.

Une autre méthode de macrosimulation est la simulation des grandes échelles : LES, Large Eddy Simulation. Seules les structures de petites tailles sont modélisées ; les struc-

tures de taille plus importante sont calculées à partir des équations de Navier-Stokes filtrées. Cette approche est intrinsèquement et obligatoirement tri-dimensionnelle. Elle diffère des précédentes en ce sens que la solution d'un calcul LES représente une réalisation de l'écoulement. Pour un écoulement aléatoire, cette approche doit ainsi être couplée avec une moyenne d'ensemble à posteriori et donc nécessite soit l'hypothèse d'ergodicité (quand elle est valable) soit le calcul de plusieurs réalisations afin d'accéder aux propriétés statistiques. La partie à modéliser utilise également des concepts analogues à la viscosité turbulente associés à des fonctions de structure spécifiques et concerne la partie du spectre turbulent gouvernée par des propriétés de turbulence homogène et isotrope. De ces faits, en présence de parois solides, l'approche LES pure (c'est à dire non-couplée avec des modèles statistiques) doit tendre vers une simulation numérique directe (DNS) dans la région proche - paroi et ceci rend l'approche LES très onéreuse pour la prédiction des écoulements instationnaires turbulents en grand nombre de Reynolds en présence de parois solides. Ainsi cette approche ne répond pas encore suffisamment aux sollicitations d'aérodynamique industrielle, (voir ouvrage de synthèse issu du programme européen LESFOIL, [50]). Pour ces raisons, l'approche LES est récemment couplée avec des approches RANS près de la paroi solide. Cette association a conduit à des approches de macrosimulation hybrides, DES, Detached Eddy Simulation.

Une différente méthode visant une modélisation statistique avancée s'affranchissant de problèmes de limitation en Reynolds dans les régions proches paroi, est basée sur la décomposition triple introduite par Reynolds & Hussain (1971)[146], qui sépare le mouvement en une composante moyenne, une composante fluctuante organisée et une composante fluctuante aléatoire. Cette décomposition conduisant à des équations extrêmement complexes, on a recours à la décomposition double qui regroupe la composante moyenne et la composante fluctuante organisée comme étant le mouvement organisé, comme il sera présenté au paragraphe 4.5. Pour effectuer cette décomposition, un large recours est fait à la moyenne de phase, qui est alors non seulement un concept mathématique mais une quantité mesurable. En appliquant cet opérateur aux équations de Navier-Stokes, les équations moyennes obtenues sont les mêmes que les équations URANS. Cette approche implique alors le calcul du mouvement organisé (turbulence résolue) et la modélisation des effets du mouvement aléatoire. Le tenseur des contraintes turbulentes doit cependant être modélisé différemment. Dervieux *et al.* (1998) [53], Braza (2000)[24], Hoarau *et al.* (2002) [79], Braza *et al.* (2005) [28] proposent la méthode OES, Organised Eddy Simulation, présentée au paragraphe 4.5 de ce chapitre.

Afin de s'affranchir des insuffisances de la LES pour les écoulements pariétaux à grand nombre de Reynolds, et d'associer la robustesse de RANS dans la région proche, des approches hybrides ont été proposées, telles que l'approche DES, Detached Eddy Simulation, Spalart *et al.* (1997)[168], Travin *et al.* (2000) [189], qui combine la LES et l'approche RANS par une sélection locale soit de l'échelle de longueur LES soit de l'échelle de longueur RANS. Cette approche est utilisée dans des applications industrielles (programme européen DESIDER, auquel participe le groupe EMT2/IMFT). Elle sera présentée au paragraphe 4.6.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons passer en revue les différentes approches

de macrosimulations précitées.

4.2 Large Eddy Simulation, LES

Dans la simulation des grandes échelles SGE ou LES, la décomposition spectrale s'effectue dans la partie des hautes fréquences correspondant aux mouvements aléatoires de la turbulence fine. On prédit la partie du spectre située en amont de cette coupure par l'opérateur instationnaire 3D des équations du mouvement. Ainsi la distinction entre les structures à prédire et celles à modéliser se fait sur la base de leur taille. La partie à modéliser, étant située vers les hautes fréquences, obéit aux hypothèses d'équilibre spectral d'une turbulence homogène et isotrope. Ceci permet l'utilisation de modèles très simples pour cette partie. Seules les grosses structures de longueurs d'ondes supérieures à un ordre de grandeur Δx sont résolues en appliquant au champ turbulent un filtre passe-bas de largeur Δx . Cette décomposition en petites et grosses structures repose sur les mécanismes de cascade énergétique développés par Kolmogorov : ce sont les petites structures de la turbulence qui assurent le transfert d'énergie depuis les grandes structures. Ces petites structures ne sont pas résolues car leur taille est inférieure à celle du filtre. Le rôle de la modélisation va donc être de compenser cette absence dans les équations et d'assurer les transferts énergétiques entre petites et grosses structures et réciproquement. Plus de détails sur la LES peuvent être trouvés dans les travaux de Rogallo & Moin (1984) [152], Germano (1992) [67], ou Lesieur & Metais (1996) [108].

La décomposition spectrale précitée, présentée schématiquement sur la partie (1) de la figure 4.1, correspond à une décomposition des équations de Navier-Stokes en une partie qui représente la moyenne filtrée et une partie fluctuante représentant la turbulence des petites échelles. Pour représenter l'action de la turbulence de sous-maille sur le champ à grande échelle, les tensions turbulentes sont modélisées à travers un concept de viscosité turbulente de sous-maille qui est introduite dans les équations filtrées comme dans les équations de Reynolds pour le champ moyen.

Toutes les variables Φ de l'écoulement sont alors décomposées comme suit :

$$\Phi = \overline{\Phi} + \Phi' \quad (4.2)$$

où :

$$\overline{\Phi(x, t)} = \int_D G(x - x^*, \Delta) \Phi(x^*) d^3 x^* \quad (4.3)$$

représente le champ filtré de Φ , et donc résolu, et qui contient toutes les longueurs d'ondes supérieures à la longueur de coupure k_f , et Φ' le champ de sous maille dont l'influence sur le champ résolu est modélisée par une hypothèse de viscosité. La fonction de filtrage utilisée est définie de telle sorte que l'on ait :

$$\int_D G(x - x^*, \Delta) \Phi(x^*) d^3 x^* = 1 \quad (4.4)$$

Δ , représente ainsi la plus petite échelle de turbulence permise par l'opération de filtrage. En pratique, Δ est la taille de la maille, la fonction G pouvant être un filtre

Gaussien mais dans le cas général le choix du filtre s'effectue en fonction de l'anisotropie ou de l'homogénéité de l'écoulement. Lorsque ce filtrage est appliqué aux équations de Navier-Stokes on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j$ est le tenseur des contraintes de sous-maillages.

En appliquant la décomposition (4.2) au tenseur des contraintes de sous-maillages τ_{ij} on obtient la relation suivante :

$$\tau_{ij} = L_{ij} + C_{ij} + R_{ij} \quad (4.6)$$

avec

$$\begin{cases} L_{ij} = \overline{\overline{U}_i \overline{U}_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j \\ C_{ij} = \overline{U_i u_j} + u_i \overline{U}_j \\ R_{ij} = \overline{u_j u_i} \end{cases} \quad (4.7)$$

L_{ij} est le terme de Léonard qui peut être évalué directement,

C_{ij} est le terme des contraintes croisées de sous-maillages,

R_{ij} est le terme des contraintes de Reynolds de sous-maillages.

Il est à noter que le processus de filtrage utilisé ici diffère des opérateurs habituels de moyenne puisque :

$$\overline{\overline{U}_i} \neq \overline{U}_i \quad (4.8)$$

L'approche LES reste très coûteuse et est limitée à des nombres de Reynolds de l'ordre de 10^4 , puisqu'elle doit tendre vers une simulation directe vers la région proche, ce qui nécessiterait une finesse du maillage prohibitive pour l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds supérieur à 10^4 (région habituelle de limitation de la LES). Pour s'affranchir des limitations de la LES dans la région proche paroi, l'approche OES, Organized Eddy Simulation, peut être utilisée. Elle consiste en une décomposition des structures présentes dans l'écoulement selon leur nature : cohérente ou aléatoire, figure 4.1. Le choix d'une telle décomposition nécessite l'adoption de moyennes adaptées comme il sera présenté par la suite. Pour profiter de la robustesse des méthodes RANS proche paroi et pallier les limitations de la LES, des approches de modélisation hybrides ont été développées, dont la DES, Detached Eddy Simulation, présentée au paragraphe 4.6.

4.3 Approches Statistiques

Nous allons passer en revue quelques fermetures de la littérature, des modèles les plus simples aux plus élaborés. Les approches utilisées dans le cadre de cette thèse seront détaillées.

La nécessité de ces fermetures découle de l'apparition de termes supplémentaires dans les équations de Navier-Stokes lorsqu'on moyenne celles-ci par une moyenne d'ensemble. Bien qu'historiquement écrites en moyenne de Reynolds, ces fermetures sont applicables à toutes les moyennes d'ensemble. Nous utiliserons dans la suite la moyenne de Reynolds pour décrire ces modèles.

Les équations de Navier-Stokes moyennées s'écrivent :

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (4.10)$$

Tout l'enjeu de la modélisation turbulente consiste à déterminer une expression simple et réaliste des tensions de Reynolds $\bar{u}_i \bar{u}_j$ et plusieurs méthodes sont possibles.

4.3.1 Les modèles à une équation de transport

La démarche consiste à résoudre une équation de transport afin de déterminer une échelle caractéristique de la turbulence locale et toutes les autres grandeurs turbulentes nécessaires sont obtenues par des relations algébriques. Dans cette classe de modélisation il faut distinguer deux types de modèles différents : celui de Bradshaw *et al.* (1967)[19], basé sur la résolution d'une équation de transport pour la tension de cisaillement et les modèles basés sur le concept de la viscosité turbulente.

Bradshaw *et al.* (1967) [19] proposent l'équation suivante valable dans les écoulements cisailés minces :

$$\frac{D}{Dt} \left(-\frac{\bar{u}\bar{v}}{a_1} \right) = -\bar{u}\bar{v} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} - \frac{G(-\bar{u}\bar{v}) (-\bar{u}\bar{v})_{\max}^{1/2}}{\partial y} - \frac{(-\bar{u}\bar{v})^{3/2}}{\varepsilon} \quad (4.11)$$

avec $a_1 = 0, 3$ $G = \frac{-(\bar{u}\bar{v})_{\max}^{1/2}}{U_\infty} f_1\left(\frac{y}{\delta}\right)$ $\frac{L}{\delta} = f_2\left(\frac{y}{\delta}\right)$

Ce modèle donne de très bons résultats dans des couches limites avec ou sans gradient de pression.

Prandtl fut le premier auteur à proposer un modèle à une équation basé sur le concept de viscosité turbulente. Ce modèle, écrit aussi pour les couches cisailées minces, résout une équation modélisée pour l'énergie cinétique turbulente et la tension de cisaillement est obtenue par la relation de Boussinesq via la viscosité turbulente de Prandtl-Kolmogorov, $\nu_t = C_\mu l k^{1/2}$. Dans ce qui suit, nous introduisons le modèle à une équation de Spalart-Allmaras (1992) [169]. Ce modèle est largement utilisé dans l'industrie au vue de sa simplicité et de sa stabilité. Les résultats obtenus sont relativement corrects pour une utilisation industrielle.

Modèle à une équation de Spalart-Allmaras

Ce modèle résoud l'équation de transport de la viscosité turbulente :

$$\underbrace{\frac{D\tilde{\nu}}{Dt}}_{convection} = \underbrace{c_{b1}(1-f_{t2})\tilde{S}\tilde{\nu}}_{production} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}[\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu})\nabla\tilde{\nu}) + c_{b2}(\nabla\tilde{\nu})^2]}_{diffusion} - \underbrace{\left(c_{w1}f_w(r) - \frac{C_{b1}}{\kappa^2}f_{t2}\right)\left(\frac{\tilde{\nu}}{d_w}\right)^2}_{destruction} \quad (4.12)$$

d_w étant la distance à la paroi.

La viscosité turbulente est définie alors par :

$$\mu_t = \rho\tilde{\nu}f_{v1} \equiv \rho\nu_t \quad (4.13)$$

La fonction d'amortissement visqueux f_{v1} est définie en fonction de la variable locale $\lambda \equiv \frac{\tilde{\nu}}{\nu}$ comme suit :

$$f_{v1} = \frac{\lambda^3}{\lambda^3 + c_{v1}^3} \quad (4.14)$$

Dans le terme de production, \tilde{S} est :

$$\tilde{S} = S^{1/2} + \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d_w)^2}f_{v2} \quad (4.15)$$

où

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} \quad et \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.16)$$

et

$$f_{v2} = 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda f_{v1}} \quad (4.17)$$

Afin d'autoriser l'existence de zones laminaires dans l'écoulement, la fonction

$$f_{t2} = c_{t3}exp\left(c_{t4}\lambda^2\right)$$

est introduite dans le terme de production, de sorte que la solution $\tilde{\nu} = 0$ soit une solution stable du système. Un terme similaire mais de signe opposé est introduit dans le terme de destruction afin de préserver le comportement du modèle proche paroi.

Le terme de destruction doit s'annuler en dehors de la région de couche limite :

$$f_w(r) = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{1/6} \quad (4.18)$$

où g permet de limiter f_w :

$$g = r + c_{w2}(r^6 - r) \quad et \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{(\kappa d_w)^2 \tilde{S}} \quad (4.19)$$

Les constantes du modèle de Spalart-Allmaras, sont données dans le tableau 4.1.

c_{b1}	c_{b2}	σ	κ	c_{v1}	c_{t3}	c_{t4}	c_{w2}	c_{w3}	c_{w1}
0.1355	0.622	$\frac{2}{3}$	0.4187	7.1	1.1	2	0.3	2	$\frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$

TABLE 4.1 – Constantes du modèle de Spalart-Allmaras

4.3.2 Les modèles à deux équations

Ces modèles reposent sur le concept de viscosité turbulente proposé par Boussinesq en 1877. Ce concept introduit une relation de linéarité entre le cisaillement turbulent et le gradient transverse. Il a ensuite été généralisé à toutes les contraintes turbulentes :

$$-\tau_{ij} = -\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (4.20)$$

où ν_t est la viscosité turbulente. Cette relation comporte plusieurs limitations sur l'évolution des grandeurs turbulentes. En effet, la relation (4.20) suppose que cette viscosité soit un tenseur. La première des simplifications est de considérer que localement la viscosité est une constante. La proposition de Boussinesq implique une colinéarité entre les axes principaux du tenseur de déformation moyenne et le tenseur d'anisotropie défini par $a_{ij} = \overline{u_i u_j} / K - 2/3 \delta_{ij}$ ce qui n'est valable que dans le cas d'une turbulence homogène isotrope. Le tenseur de Reynolds apparaît dans les équations moyennées de Navier-Stokes du fait de la non-linéarité du terme convectif. A l'inverse, la relation de Boussinesq confère à ces tensions un caractère linéaire et diffusif ce qui d'un côté introduit une certaine stabilité numérique mais qui de l'autre va avoir tendance à linéariser des phénomènes advectifs non-linéaires. Malgré ces limitations, les modèles à concept de viscosité turbulente restent satisfaisants pour un grand nombre d'écoulements. Une extension non-linéaire de ce concept permet de s'affranchir de quelques unes de ces contraintes comme il sera décrit au paragraphe 4.3.3.

Une simple étude dimensionnelle nous montre que la viscosité turbulente ν_t est proportionnelle à $(u' * l)$, où u' et l désignent respectivement des échelles de longueur et de vitesse représentatives de l'agitation turbulente. La viscosité turbulente peut donc être obtenue par le produit d'une échelle de longueur et d'une échelle de temps ou toute combinaison multiplicative des deux comme la formule de Prandtl-Kolmogorov :

$$\nu_t = C_\mu l \sqrt{k} \quad (4.21)$$

où l est l'échelle de longueur des tourbillons porteurs d'énergie. Les modèles à deux équations résolvent une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente k et une autre pour une grandeur X qui permet par combinaison multiplicative de remonter à l'échelle de longueur ($X = k^n l^m$).

Nous allons dans ce qui suit présenter le modèle $k - \epsilon$ Chien, et le modèle $k - \omega$ qui est utilisé dans cette étude.

Le modèle $k - \epsilon$ Chien

Ce modèle a été développé par Chien (1982) [37], dans le but d'améliorer la prédiction des écoulements de paroi, et en particulier les coefficients de frottement, les

transferts de chaleur, et la distribution de l'énergie cinétique des fluctuations. Ce modèle est particulièrement adapté aux écoulements à faible nombre de Reynolds. Chien (1982) [37] a utilisé la méthode des développements limités en série de Taylor pour étudier de manière systématique le comportement des contraintes turbulentes, de l'énergie cinétique et du taux de dissipation près de la paroi. Il se base sur les équations du modèle $k - \epsilon$, développé initialement par Jones et Launder (1973) [89] qui introduisent des fonctions d'amortissement f_1 , f_2 et f_μ :

Energie cinétique de la turbulence

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + P - \epsilon + \chi \quad (4.22)$$

Taux de dissipation

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \overline{U}_i \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right] + C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\epsilon}{k} P - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\epsilon^2}{k} + \xi \quad (4.23)$$

Viscosité turbulente

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \epsilon \quad (4.24)$$

Les fonctions χ et ξ sont des corrections qui permettent d'avoir les bons comportements à la paroi. L'apport des différents auteurs de la littérature consiste essentiellement à calibrer les fonctions d'amortissements afin de rendre compte du mieux possible des résultats expérimentaux. Nombre de ces auteurs préfèrent avoir comme condition limite de ϵ à la paroi une valeur nulle et ils remplacent ϵ par $\tilde{\epsilon}$ dans l'équation (4.23) :

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - D \quad (4.25)$$

D prend différentes formes suivant les auteurs, il en est de même pour ξ . La fonction f_1 est prise égale à l'unité pour la plupart des auteurs. Ceux qui choisissent une autre valeur le font pour augmenter la valeur de la dissipation à la paroi.

La fonction f_2 est une fonction d'ajustement permettant de régler le rapport production/destruction de ϵ près de la paroi. La détermination de la fonction f_2 , tout comme celle de la constante $C_{\epsilon 2}$, se fait par référence à la décroissance de la turbulence de grille de telle sorte que le modèle s'accorde à l'expérience à haut et bas Reynolds.

La fonction d'amortissement f_μ joue un rôle privilégié parmi les constantes et fonctions du modèle $k - \epsilon$. En effet, toute modification de cette fonction intervient directement sur la variable ν_t qui est la seule information permettant le couplage avec les équations de quantité de mouvement dans le cadre des modèles à deux équations. Cette fonction agit pour diminuer l'effet de la dissipation turbulente près de la paroi ainsi que pour représenter la diminution du cisaillement par la pression fluctuante via la corrélation pression-cisaillement.

Pour Chien (1982) [37], les fonctions d'amortissement sont :

$$f_\mu = 1 - \exp(-0.0115 y^+)$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = [1 - 0.22 \exp(-\frac{Re_t^2}{36})]$$

où

$$Re_t = \frac{k^2}{\epsilon \nu} \quad \text{et} \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}$$

Les constantes du modèle $k - \epsilon$ Chien sont données par le tableau 4.2.

C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.35	1.8	1.0	1.3

TABLE 4.2 – Constantes du modèle $k - \epsilon$ -Chien

Le modèle à deux équations $k - \omega$

Le modèle à deux équations $k - \omega$ de Wilcox (1988) [196], est formulé comme suit :

Viscosité turbulente :

$$\mu_t = \alpha^* \frac{\bar{\rho} k}{\omega} \quad (4.26)$$

Energie cinétique turbulente :

$$\frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho} k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta^* \bar{\rho} k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.27)$$

Taux de dissipation :

$$\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial x_j} = \gamma \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta \bar{\rho} \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.28)$$

Relations auxiliaires :

$$\epsilon = \beta^* \omega k, \quad \text{et} \quad l = k^{1/2} / \omega \quad (4.29)$$

Pour la version à nombre de Reynolds élevé, les constantes du modèle sont données par le tableau 4.3.

α^*	γ	β	β^*	σ	σ^*
1	5/9	3/40	9/100	1/2	1/2

TABLE 4.3 – Constantes du modèle $k - \omega$, version nombre de Reynolds élevé

Concernant la version à bas nombre de Reynolds, les coefficients du modèle sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{\alpha_0^* + Re_t / R_k}{1 + Re_t / R_k} \\ \gamma &= \frac{5}{9} \frac{\gamma_0 + Re_t / R_\omega}{1 + Re_t / R_\omega} \cdot (\alpha^*)^{-1} \\ \beta^* &= \frac{9}{100} \frac{5/18 + (Re_t / R_\beta)^4}{1 + (Re_t / R_\beta)^4} \end{aligned} \quad (4.30)$$

où Re_t est le nombre de Reynolds de turbulence défini par :

$$Re_t = \frac{k}{\nu\omega} \quad (4.31)$$

et les constantes sont données par le tableau 4.4.

α_0^*	γ_0	β	σ	σ^*	R_k	R_ω	R_β
$\beta/3$	$1/10$	$3/40$	$1/2$	$1/2$	6	$27/10$	8

TABLE 4.4 – Constantes du modèle $k - \omega$, version bas nombre de Reynolds

Les modèles utilisés dans cette thèse sont basés sur le modèle de Wilcox. Deux versions modifiées par Menter (1992 et 1993) [118, 119] sont présentées dans ce qui suit : $k - \omega - BSL$ et $k - \omega - SST$.

La version $k - \omega - BSL$ (Base Line)

En comparaison au modèle d'origine, les différences consistent à la modification des constantes et à l'ajout d'un terme additionnel : cross-diffusion. Cette version du modèle est obtenu en combinant le modèle $k - \omega$ classique multiplié par une fonction F_1 , au modèle $k - \epsilon$ transformé en $k - \omega$ et multiplié par $(1 - F_1)$. La fonction F_1 devra être égale à 1 proche paroi et 0 dans la région lointaine.

Wilcox classique :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta^* \bar{\rho}k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k1}\mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma_1}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta_1 \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 1}\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (4.33)$$

$k - \epsilon$ transformé :

$$\frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho}k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta^* \bar{\rho}k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{k2}\mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \bar{\rho}\omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma_2}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta_1 \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_{\omega 2}\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2\bar{\rho}\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (4.35)$$

En combinant les équations précédentes, le modèle $k - \omega - BSL$ se résume aux équations suivantes :

$$\frac{D\bar{\rho}k}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta^* \bar{\rho}k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k\mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (4.36)$$

$$\frac{D\bar{\rho}\omega}{Dt} + U_j = \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \beta \bar{\rho}\omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega\mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + 2(1 - F_1) \bar{\rho}\sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \quad (4.37)$$

avec $\nu_t = k/\omega$. Les constantes du modèle sont générées en utilisant la relation suivante :

$$\phi = F_1\phi_1 + (1 - F_1)\phi_2 \quad (4.38)$$

où ϕ_1 et ϕ_2 représentent les constantes du modèle de Wilcox classique et du modèle $k - \epsilon$ transformé : Les constantes ϕ_1 de (Wilcox $k - \omega$) sont donc :

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.5, & \sigma_{\omega_1} &= 0.5, & \beta_1 &= 0.0750 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_1 &= \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega_1}\kappa^2/\sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

Les constantes ϕ_2 proviennent du modèle $k - \epsilon$ standard de Launder & Sharma (1974) [101] :

$$\begin{aligned} \sigma_{k2} &= 1, & \sigma_{\omega_2} &= 0.856, & \beta_2 &= 0.0828 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_2 &= \beta_2/\beta^* - \sigma_{\omega_2}\kappa^2/\sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

La fonction F_1 est définie par :

$$F_1 = \tanh\left(\arg_1^4\right) \quad (4.39)$$

avec

$$\arg_1 = \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.009\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right); \frac{4\bar{\rho}\sigma_{\omega_2}k}{CD_{k\omega}y^2} \right] \quad (4.40)$$

où y est la distance à la paroi la plus proche et $CD_{k\omega}$ est la partie positive du terme de "cross-diffusion" dans l'équation de dissipation turbulente :

$$CD_{k\omega} = \max \left(2\bar{\rho}\sigma_{\omega_2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right) \quad (4.41)$$

La version $k - \omega - SST$ (Shear Stress Transport)

Cette version est identique à la version $k - \omega - BSL$ sauf que les constantes ϕ_1 et la viscosité turbulente sont modifiées :

$$\begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85, & \sigma_{\omega_1} &= 0.5, & \beta_1 &= 0.0750 \\ \beta^* &= 0.09, & \kappa &= 0.41, & \gamma_1 &= \beta_1/\beta^* - \sigma_{\omega_1}\kappa^2/\sqrt{\beta^*} \end{aligned}$$

La viscosité turbulente est définie par :

$$\mu_t = a_1^* \frac{\bar{\rho}k}{\max(a_1\omega; |\Omega| F_2)} \quad (4.42)$$

$|\Omega|$ est la norme du tenseur de vortacité moyenne, remplacée de préférence par celle du tenseur de déformation, Menter *et al.* (2003) [120]. La fonction F_2 est donnée par :

$$F_2 = \tanh\left(\arg_2^2\right) \quad (4.43)$$

avec

$$\arg_2 = \max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.009\omega y}; \frac{500\nu}{y^2\omega} \right) \quad (4.44)$$

4.3.3 Les modèles non linéaires

L'hypothèse de fermeture de Boussinesq qui n'est pas anisotrope, n'est valide que si l'écoulement est homogène. Les modèles non linéaires s'appuient principalement sur une relation non linéaire explicite entre les contraintes turbulentes et les gradients de vitesse. Classiquement, un modèle non linéaire consiste en une extension polynomiale de la loi Boussinesq par des termes non linéaires qui peuvent être d'ordre élevé. Les deux paramètres k , énergie cinétique de turbulence, et ϵ , taux de dissipation de turbulence, sont utilisés pour normaliser les contraintes de Reynolds ($\overline{u_i u_j}$) et les tenseurs de taux de déformation (S_{ij}) et de rotation (ω_{ij}) comme suit :

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (4.45)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.46)$$

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \frac{k}{\epsilon} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.47)$$

La détermination de $\overline{u_i u_j}$ est donc équivalente à la détermination de a_{ij} , et comme S_{ij} et ω_{ij} contiennent toutes les informations données par k , ϵ et $\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}$, on peut écrire :

$$a_{ij} = a_{ij}(S; \omega) \quad (4.48)$$

L'expression la plus générale de la relation précédente dans une base de tenseurs indépendants sera :

$$a_{ij} = \prod_{i=1, \infty} \sum_{\alpha_i=0, \infty} \prod_{j=1, \infty} \sum_{\beta_j=0, \infty} G_{\beta_1, \beta_2, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots} S^{\alpha_1} \omega^{\beta_1} S^{\alpha_2} \omega^{\beta_2} \dots \quad (4.49)$$

les coefficients $G_{\beta_j}^{\alpha_i}$ étant fonction des invariants formés avec S et ω .

Pope (1975) [137] montre, par le biais du théorème de Cayley-Hamilton, que cette base compte, en trois dimensions, dix éléments indépendants :

$$\begin{aligned} T^1 &= S & T^2 &= S\omega - \omega S \\ T^3 &= S^2 - \frac{1}{3}I \{S^2\} & T^4 &= \omega^2 - \frac{1}{3}I \{\omega^2\} \\ T^5 &= \omega S^2 - S^2 \omega & T^6 &= \omega^2 S + S \omega^2 - \frac{2}{3}I \{S \omega^2\} \\ T^7 &= \omega S \omega^2 - \omega^2 S \omega & T^8 &= S \omega S^2 - S^2 \omega S \\ T^9 &= \omega^2 S^2 + S^2 \omega^2 - \frac{2}{3}I \{S^2 \omega^2\} & T^{10} &= \omega S^2 \omega^2 - \omega^2 S^2 \omega \end{aligned}$$

et que les invariants indépendants construits à partir de S et ω sont au nombre de cinq :

$$\{S^2\}, \{\omega^2\}, \{S^3\}, \{\omega^2 S\} \text{ et } \{\omega^2 S^2\}$$

où $\{M\}$ représente la trace du tenseur M .

Cette base se réduit à trois tenseurs avec deux invariants indépendants en deux dimensions.

Le tenseur polynômial infini (4.49) s'écrit alors de la forme suivante :

$$\mathbf{a} = \Sigma G^\lambda \mathbf{T}^\lambda \quad (4.50)$$

avec $0 \leq \lambda \leq 2$ en deux dimensions, et $1 \leq \lambda \leq 10$ en trois dimensions. La matrice $\lambda \times \lambda$, dite de *Gram* G^λ est définie comme suit (Jongen & Gatski (1998) [90]) :

$$G_{kl}^\lambda = \{ \mathbf{T}^k, \mathbf{T}^l \}, k, l = 1, 2, \dots, \lambda \quad (4.51)$$

Il existe différentes formulations pour ces coefficients des modèles non-linéaires. Quelques versions sont données en annexe A. Des modèles non-linéaires, descendent les modèles algébriques, qui seront présentés au paragraphe 4.3.5.

4.3.4 Les modèles au second ordre

Les fermetures au second ordre correspondent à un niveau de description qui offre un bon compromis entre potentialités sur le plan de la représentation des phénomènes turbulents de la pratique, et niveau de complexité modéré et donc possibilité d'un traitement numérique efficace. Ces modèles permettent de traiter de façon plus exacte l'anisotropie du tenseur de Reynolds. Ils sont potentiellement génériques mais difficiles à mettre au point car les hypothèses de fermeture et les constantes empiriques à déterminer sont nombreuses.

En introduisant la décomposition de Reynolds pour la vitesse en partie moyenne et partie fluctuante dans les équations de Navier-Stokes, on peut écrire, sous forme tensorielle, l'équation exacte de transport des contraintes de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & - \underbrace{\left[\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right]}_{P_{ij}} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left[\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right]}_{\Pi_{ij}} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (-\overline{u_i u_j u_k})}_{D_{ij}^t} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right)}_{D_{ij}^\nu} - \underbrace{2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \right)}_{\epsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Soit :

$$C_{ij} = D_{ij}^t + D_{ij}^\nu + P_{ij} + \pi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (4.53)$$

où :

C_{ij} est le terme de convection des tensions de Reynolds,

D_{ij}^t est le terme de diffusion turbulente, c'est à dire la diffusion des contraintes de Reynolds par le mouvement fluctuant (corrélations triples),

D_{ij}^ν est le terme de diffusion visqueuse des contraintes de Reynolds,

P_{ij} est le terme exact de production de la contrainte $\overline{u_i u_j}$ par le mouvement moyen,

π_{ij} est la corrélation vitesse-gradient de pression fluctuants,

ϵ_{ij} est la dissipation visqueuse de la contrainte $\overline{u_i u_j}$.

Dans ce qui suit sont décrites les différentes modélisations adoptées par différents auteurs pour chacun des termes de l'équation (4.53) à l'exception des termes P_{ij} et D_{ij}^ν qui sont des termes exacts. Il faudra ajouter à ces équations une équation supplémentaire pour la dissipation nécessaire à la fermeture du système.

Modélisation de $D_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial x_k} (-\overline{u_i u_j u_k})$

Davydov (1959) [51] donne une description complète de l'équation exacte des corrélations triples réalisée par Chou (1945) [38], à partir des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j u_k}}{Dt} = & - \left[\overline{u_i u_j u_l} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k u_l} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_i u_l} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_l} \right] & I \\ & + \left[\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_j u_l}}{\partial x_l} \right] & II \\ & - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u_i u_j u_k u_l} & III \\ & - \frac{1}{\rho} \left[\overline{u_i u_j} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right] & IV \end{aligned} \quad (4.54)$$

Les corrélations quadruples (*III*) sont simplifiées à l'aide de la proposition quasi-normale de Millionshtchikov (1941) [121], et pour des corrélations triples faibles, (*III*) s'exprime en fonction des corrélations doubles :

$$\overline{u_i u_j u_k u_l} = \overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_k u_l} + \overline{u_i u_k} \cdot \overline{u_j u_l} + \overline{u_i u_l} \cdot \overline{u_k u_j} \quad (4.55)$$

donc on peut écrire :

$$II + III = - \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (4.56)$$

Après examen des résultats expérimentaux de Hanjalić & Launder (1972) [73], le terme (*I*) des corrélations triples peut être négligé. Quant au terme (*IV*), la corrélation de pression est approchée par un terme proportionnel à

$$-\frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j u_k}$$

Les hypothèses précédentes conduisent à l'expression algébrique suivante de la corrélation triple :

$$\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\epsilon} \left[\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_k u_j}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right] \quad (4.57)$$

le coefficient C_s est fixé par référence aux données expérimentales sur divers écoulements turbulents ; Launder *et al.* (1975) [103] proposent $C_s = 0,11$.

D'autres schémas ont été proposés par différents auteurs : Daly & Harlow (1970) [48] proposent un modèle pour le transport d'une quantité ϕ en utilisant l'hypothèse du gradient généralisé :

$$\overline{u_k \phi} = \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_l}$$

les corrélations triples sont alors reliées aux corrélations doubles :

$$\overline{u_i u_j u_k} = C'_s \frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \quad (4.58)$$

Cependant, cette hypothèse ne satisfait pas les propriétés de symétrie tensorielle. Toutefois elle a été utilisée par Launder *et al.* (1975) [103], avec $C'_s = 0.25$.

Pour Donaldson (1971) [55],

$$\overline{u_i u_j u_k} = -L\sqrt{k} \left[\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_j} \right] \quad (4.59)$$

où L est une macroéchelle de longueur.

On peut citer également le modèle isotrope de Shir (1973) [164] :

$$-\overline{u_i u_j u_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_\mu f_2 \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \right) \quad (4.60)$$

ou encore la formulation plus complexe de Magnaudet (1993) [116], faisant intervenir des gradients multiples :

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j u_k} &= C_{s1} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \\ &\quad - C_{s2} \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{u_k u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{u_j u_l}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{u_i u_l}}{\partial x_l} \right) \\ &\quad + \frac{1}{k} (\overline{u_i u_j} \cdot \overline{u_k u_l} + \overline{u_i u_k} \cdot \overline{u_j u_l} + \overline{u_j u_k} \cdot \overline{u_i u_l}) \left(C_{s3} \frac{\partial k}{\partial x_l} + C_{s4} \frac{k}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Modélisation de $\epsilon_{ij} = 2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$

Si le nombre de Reynolds est suffisamment élevé pour que la zone de dissipation soit bien séparée de la zone de production, le processus de dissipation visqueuse peut être supposé isotrope :

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij} \quad (4.62)$$

À faibles nombres de Reynolds, Rotta (1951) [155] a donné une formulation plus adaptée, ne traduisant pas la tendance à l'isotropie locale :

$$\epsilon_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (4.63)$$

À partir de ces deux formes asymptotiques, Hanjalić & Launder (1976) [74] ont proposé une approximation plus générale :

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3}\epsilon \left\{ (1 - f_s) \delta_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{\frac{2}{3}k} f_s \right\} \quad (4.64)$$

où f_s est fonction du nombre de Reynolds de turbulence $R_T = \frac{k^2}{\nu\epsilon}$; sa valeur change de l'unité au zéro quand le nombre de Reynolds varie de zéro à l'infini. Après optimisation, la meilleure forme de f_s retenue par Hanjalić & Launder (1976) [74] est :

$$f_s = \left(1 + \frac{1}{10} R_T \right)^{-1} \quad (4.65)$$

Launder & Tselepidakis (1987) [107], et ensuite Lai & So (1990) [100], proposent un modèle amélioré à la paroi :

$$D_{ij}^\nu = \frac{2}{3}\epsilon (1 - f_{\omega,1}) \delta_{ij} + \frac{f_{\omega,1}}{k} \frac{[\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_k n_j + \overline{u_j u_k} n_k n_i + n_i n_j \overline{u_k u_l} n_k n_l]}{1 + \frac{3\overline{u_k u_l} n_k n_l}{2k}} \quad (4.66)$$

où $n_i = (0, 1, 0)$ est le vecteur unitaire normale à la paroi, et

$$f_{\omega,1} = \exp \left[- \left(\frac{R_T}{150} \right)^2 \right] \quad (4.67)$$

Hanjalić & Jakirlić (1993) [72] et Launder & Tselepidakis (1994) [106] ont modifié ce modèle en introduisant les invariants du tenseur d'anisotropie proposé par Lumley (1978) [112], et ceux du tenseur de la dissipation anisotrope. Shima (1993)[162] a proposé une formulation plus simple en enlevant les normales à la paroi. Il décompose ϵ_{ij} en trois parties : une partie isotrope, une partie anisotrope importante à la paroi, et une correction de paroi :

$$\epsilon_{ij} = (1 - f_\epsilon) \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon + f_\epsilon \epsilon_{ij}^* + \epsilon'_{ij} \quad (4.68)$$

avec

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^* &= \epsilon \frac{\overline{u_i u_j}}{k} & \epsilon'_{ij} &= \frac{1}{2} \left(D_{ij} - D_{kk} \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) & D_{ij} &= \nu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \overline{u_i u_j} \\ f_\epsilon &= 1 - A^{0.5} E^2 & A &= 1 - \frac{9(A_2 - A_3)}{8} & E &= 1 - \frac{9(E_2 - E_3)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= a_{ij} a_{ji} & A_3 &= a_{ij} a_{jk} a_{ki} \\ E_2 &= e_{ij} e_{ji} & E_3 &= e_{ij} e_{jk} e_{ki} \\ a_{ij} &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} & e_{ij} &= \frac{u_i u_j}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Craft & Launder (1996) [45] ont proposé une modélisation encore plus compliquée :

$$\epsilon_{ij} = \left(1 - f_h \frac{\epsilon_{kk}^*}{2\epsilon} \right) \left[(1 - f_\epsilon) \frac{(\epsilon'_{ij} + \epsilon''_{ij})}{D} + \frac{2}{3} f_\epsilon \delta_{ij} \right] + f_h \epsilon_{ij}^* \quad (4.70)$$

Les différentes composantes de l'équation (4.70) s'écrivent comme suit :

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon \frac{\overline{u_i u_j}}{k} + 2\nu \frac{\overline{u_l u_n}}{k} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_n} \delta_{ij} + 2\nu \frac{\overline{u_l u_i}}{k} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} + 2\nu \frac{\overline{u_l u_j}}{k} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_l} \quad (4.71)$$

$$\epsilon''_{ij} = \epsilon \left[2 \frac{\overline{u_l u_k}}{k} d_l^A d_k^A \delta_{ij} - \frac{\overline{u_l u_i}}{k} d_l^A d_j^A - \frac{\overline{u_l u_j}}{k} d_l^A d_i^A \right] f_R \quad (4.72)$$

$$\epsilon_{ij}^* = 0.2\nu \left[\frac{\partial \sqrt{kA}}{\partial x_k} \frac{\partial \sqrt{kA}}{\partial x_k} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \sqrt{kA}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{kA}}{\partial x_j} \right] \quad (4.73)$$

$$D = \frac{\epsilon'_{kk} + \epsilon''_{kk}}{2\epsilon}$$

$$f_R = (1 - A) \min \left(\left(\frac{R_T}{80} \right)^2, 1.0 \right) \quad f_h = 1 - \exp \left(-\frac{R_T}{50} \right) \quad f_\epsilon = A^{\frac{1}{2}} \quad (4.74)$$

introduisant ainsi les paramètres d_i^A et N_i^A :

$$N_i^A = \frac{\partial (lA)}{\partial x_i} \quad d_i^A = \frac{N_i^A}{\alpha + (N_k^A N_k^A)^{\frac{1}{2}}}$$

où $l = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$ est l'échelle de longueur de turbulence, et $\alpha = 0.5$.

Modélisation de $\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left[\overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} + \overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} \right]$

Lumley (1975) [111] propose la décomposition de la corrélation de vitesse-gradient de pression en deux parties : ϕ_{ij}^p , transport par la pression fluctuante, et ϕ_{ij} , corrélation pression-déformation :

$$\Pi_{ij} = \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\delta_{ik} \overline{u_j p} + \delta_{jk} \overline{u_i p})}_{\phi_{ij}^p} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} \quad (4.75)$$

Cette décomposition est la plus communément utilisée, mais on peut citer d'autres alternatives, comme celle de Mansour *et al.* (1988) [117], où :

$$\Pi_{ij} = \tilde{\phi}_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} \Pi_{ll} \quad (4.76)$$

dans ce cas, seul Π_{ll} est à modéliser au lieu de la corrélation pression-vitesse.

Lumley (1980) [113] propose de réorganiser la somme $(\Pi_{ij} + D_{ij}^\nu)$, en décomposant la pression p en une partie générée uniquement par les fluctuations ($p_{(1)}$) et une partie générée uniquement par le champ moyen ($p_{(2)}$) :

$$\begin{aligned}
-2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \overline{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = & -\frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \\
& + \left[\frac{1}{\rho} p^{(1)} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon \right] \\
& + \frac{1}{\rho} p^{(2)} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}
\end{aligned} \quad (4.77)$$

On retrouve alors la décomposition en terme lent et terme rapide décrite ci-dessous.

En considérant la divergence de l'équation de Navier-Stokes en décomposition de Reynolds pour déduire l'équation de Poisson, et en intégrant puis multipliant le résultat par $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, Chou (1945) [38], a donné la formulation exacte de Π_{ij} :

$$\begin{aligned}
\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = & \frac{1}{4\pi} \underbrace{\iiint \overline{\left(\frac{\partial^2 u_l u_m}{\partial x_l \partial x_m} \right)' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\Phi_{ij,1}} \frac{dvol}{|x-y|} \\
& + \frac{1}{2\pi} \underbrace{\iiint \overline{\left(\frac{\partial U_l}{\partial x_m} \right)' \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_l} \right)' \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)}_{\Phi_{ij,2}} \frac{dvol}{|x-y|} \\
& + \frac{1}{4\pi\rho} \underbrace{\iint \overline{\left[\frac{1}{x} \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{x} \right) \right]' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\Phi_{ij,\omega}} dS
\end{aligned} \quad (4.78)$$

Les variables x et y correspondent aux positions des points dans l'espace. Les grandeurs représentées avec ($'$) sont évaluées au point courant x alors que les autres sont évaluées au point y , variable intégrée sur tout le volume. Le terme lent $\Phi_{ij,1}$ correspond à l'interaction mutuelle entre les composantes turbulentes ; le terme rapide $\Phi_{ij,2}$ découle du taux moyen de cisaillement et de son interaction avec la turbulence ; Quant au terme de paroi $\Phi_{ij,\omega}$, c'est une intégrale de surface qui n'intervient qu'en présence de paroi.

Modélisation du terme lent $\Phi_{ij,1}$

Ce terme est encore appelé terme de retour à l'isotropie ou terme de Rotta, Rotta (1951) [155] étant le premier à proposer une modélisation de ce terme :

$$\Phi_{ij,1} = \phi_{ij,1} + \phi_{ji,1} = -C_1 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) \quad (4.79)$$

Ce terme est établi par le rapport entre le tenseur d'anisotropie $b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$ et le temps caractéristique de la turbulence $\frac{k}{\epsilon}$, marquant ainsi un simple mécanisme d'évolution de croissance ou de décroissance de l'anisotropie. Rotta (1951) [155] propose $C_1 = 1.4$. Le perfectionnement de l'hypothèse de Rotta peut se baser sur une approche inspirée des travaux de Lumley & Newmann (1977) [114], et de Lumley (1978) [112] qui conduisent à une expression non linéaire :

$$\Phi_{ij,1} = -\epsilon \left[C_1 (A_1, A_2, Re_l) a_{ij} - C_2 (A_1, A_2, Re_l) \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{2}{3} \delta_{ij} A_2 \right) \right] \quad (4.80)$$

avec

$$C_1(A_1, A_2, Re_l) = 2 + \frac{F}{9} \exp\left(\frac{-7.77}{\sqrt{Re_l}}\right) \times \left(\frac{72}{\sqrt{Re_l}} + 80.1 \ln\left[1 + 62.4\left(\frac{A_2}{2} - 2.3\frac{A_3}{3}\right)\right]\right)$$

$$C_2(A_1, A_2, Re_l) = 0 \quad Re_l = \frac{k^4}{9\nu\epsilon} \quad F = 1 + \frac{9}{2}A_2 + 9A_3$$

A_2 et A_3 définis dans (4.69).

Launder (1989) [105] propose aussi une forme non linéaire mais avec des coefficients relativement simples :

$$\Phi_{ij,1} = C_1^* \epsilon \left[a_{ij} + C_2^* \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.81)$$

où

$$C_1^* = 3.1 (A_1 A_2)^{\frac{1}{2}} \quad C_2^* = 1.2$$

Sarkar & Speziale (1990) [157] utilisent également une formulation non linéaire très simple du type :

$$\Phi_{ij,1} = -\epsilon \left[c_1 a_{ij} - c_2 \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right) \right] \quad (4.82)$$

avec

$$c_1 = 3.4 \quad c_2 = 4.2$$

Craft & Launder (1996) [45] modélisent le terme $\Phi_{ij}^* = \Pi_{ij} - \frac{d_{kk}^p \overline{u_i u_j}}{2k}$ au lieu de Π_{ij} car ils se sont aperçus que ce terme avait la même évolution pour les écoulements de surfaces et ceux de paroi. Ils proposent une formulation plus complexe en introduisant des termes de correction d'inhomogénéité (voir annexe B.5).

Modélisation du terme rapide $\Phi_{ij,2}$

Rotta (1951), [155] a introduit l'approximation suivante :

$$\phi_{ij,2} = a_{lj}^{mi} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} \quad (4.83)$$

avec

$$a_{lj}^{mi} = -\frac{1}{2\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\partial^2 \overline{u'_m u'_i}}{\partial \xi_l \partial \xi_j} \frac{dvol}{|x - y|} \quad (4.84)$$

les ξ_i étant les coordonnées cartésiennes du vecteur $|x - y|$. Cette relation est vraie en turbulence homogène. En turbulence non homogène, Launder *et al.* (1975) [103] la supposent valable si les dérivées secondes de vitesse moyenne sont négligeables. Le

tenseur du quatrième ordre a_{lj}^{mi} doit satisfaire des conditions de symétrie : $a_{lj}^{mi} = a_{lj}^{im} = a_{jl}^{im}$, et de continuité : $a_{li}^{mi} = 0$, et que $a_{jj}^{mi} = 2\overline{u_m u_i}$. Le tenseur le plus général vérifiant ces contraintes peut s'écrire :

$$a_{lj}^{mi} = \alpha \overline{u_m u_i} \delta_{lj} + \beta (\overline{u_i u_j} \delta_{ml} + \overline{u_i u_l} \delta_{mj} + \overline{u_m u_j} \delta_{il} + \overline{u_m u_l} \delta_{ij}) + C_2 \overline{u_l u_j} \delta_{mi} + [\eta \delta_{mi} \delta_{lj} + \lambda (\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{il})] k \quad (4.85)$$

Les contraintes permettent d'écrire toutes les constantes en fonctions de C_2 :

$$\alpha = \frac{4C_2 + 10}{11} \quad \beta = -\frac{3C_2 + 2}{11} \\ \eta = -\frac{50C_2 + 4}{55} \quad \lambda = \frac{20C_2 + 6}{55} \quad (4.86)$$

En combinant (4.85) et (4.86), on pourra écrire :

$$\Phi_{ij,2} = -\frac{C_2 + 8}{11} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{8C_2 - 2}{11} \left(D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{3C_2 - 2}{55} k S'_{ij} \quad (4.87)$$

avec

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) \\ D_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_i} \right) \\ S'_{ij} = \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \quad (4.88)$$

et P est le terme de production d'énergie cinétique turbulente, soit :

$$P = \frac{2}{3} P_{ii} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \quad (4.89)$$

Dans le cas d'une turbulence isotrope soumise à une distorsion brusque, $\Phi_{ij,2}$ ne dépend plus de C_2 , et se réduit à :

$$\Phi_{ij,2} = 0.4k S'_{ij} \quad (4.90)$$

Dans l'équation (4.87), le premier groupe est apparu dominant, et à cause de sa signification physique claire, il peut être intéressant de découvrir jusqu'à quel point ce terme conservé seul peut rendre compte de l'effet de la déformation sur la corrélation de pression. Launder *et al.* (1975) [103] introduisent dans ce sens la formulation simplifiée suivante :

$$\Phi_{ij,2} = -\gamma \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (4.91)$$

Dans ce cas, γ doit compenser les termes négligés. En turbulence isotrope, on retrouve (4.90) pour $\gamma = 0.6$.

D'autres schémas plus élaborés peuvent être cités également, comme celui de Shih & Lumley (1985) [159], Fu *et al.* (1987) [64], Launder & Li (1994) [102], (Annexe B.3), Craft (1998) [44] (Annexe B.5).

Modélisation du terme de paroi $\phi_{ij,\omega}$

En ce qui concerne le terme de paroi associé au terme lent, Shima (1988) [161] propose de regrouper les deux termes, et fait varier la constante :

$$\Phi_{ij,1} = C_1^* \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (4.92)$$

$$C_1^* = C_1 \left[1 - \left(1 - \frac{1}{C_1} \right) f_\omega \right] \quad (4.93)$$

$$f_\omega = \exp \left[- \left(0.015 \frac{\sqrt{ky}}{\nu} \right)^4 \right] \quad (4.94)$$

Dans cette dernière formulation, le terme $\frac{\sqrt{ky}}{\nu}$ peut être remplacé par $R_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$ ou par $\frac{U_{Ty}}{\nu}$.

Launder & Shima (1989) [104] reprennent le modèle de Gibson & Launder (1978) [69], qui s'appuie sur les travaux de Shir (1973)[164], et l'étendent jusqu'à la vraie paroi :

$$\Phi_{ij,1,\omega} = C_1^\omega \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i} n_k n_j - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j} n_k n_i \right) \frac{0.4k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon y} \quad (4.95)$$

$$C_1^\omega = -\frac{2}{3} C_1 + 1.67 \quad (4.96)$$

$$C_1 = 1 + 2.58 A A_2^{\frac{1}{4}} \left(1 - \exp \left[- (0.0067 R_T)^2 \right] \right) \quad (4.97)$$

n_k étant le vecteur unitaire perpendiculaire à la surface. Cette modélisation de $\Phi_{ij,1,\omega}$ ainsi que le terme de Rotta sont les plus utilisés dans la littérature (avec changement des valeurs des constantes).

Quant à l'influence de la paroi sur le terme rapide, Launder *et al.* (1975) [103] proposent :

$$\Phi_{ij,2,\omega} = \left[\frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_m} \left(b_{lj}^{mi} + b_{li}^{mj} \right) \right] f \left(\frac{l}{y} \right) \quad (4.98)$$

où l représente l'échelle des tourbillons porteurs d'énergie. $\Phi_{ij,2,\omega}$ est nécessaire pour traduire l'anisotropie des tensions normales et la diminution de la tension de cisaillement. la nouvelle quantité b_{lj}^{mi} est, par analogie à a_{lj}^{mi} , un tenseur symétrique exprimé sous forme d'une combinaison linéaire des composantes du tenseur de Reynolds :

$$b_{lj}^{mi} = \alpha' \overline{u_m u_i} \delta_{lj} + \beta' (\overline{u_i u_j} \delta_{ml} + \overline{u_i u_l} \delta_{mj} + \overline{u_m u_j} \delta_{il} + \overline{u_m u_l} \delta_{ij}) + C_2' \overline{u_l u_j} \delta_{mi} + [\eta' \delta_{mi} \delta_{lj} + \lambda' (\delta_{ml} \delta_{ij} + \delta_{mj} \delta_{il})] k \quad (4.99)$$

Ce tenseur doit vérifier $b_{li}^{mi} = 0$, car $\Phi_{ij,2,\omega}$ est redistributif; ce qui implique :

$$\alpha' + 5\beta' + C_2' = 0 \quad 2\beta' + 4\lambda' + \eta' = 0 \quad (4.100)$$

L'expérience montre que $\overline{\omega^2}$ reste non affectée par la présence de la paroi, donc $b_{13}^{23} = 0$, ce qui implique $\beta' = 0$ et $\alpha' = C_2'$.

L'expression retenue par Launder *et al.* (1975) [103] est :

$$\Phi_{ij,\omega} = \left[0.125 \frac{\epsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + 0.015 (P_{ij} - D_{ij}) \right] \frac{k^{3/2}}{\epsilon y} \quad (4.101)$$

Launder & Shima (1989) [104] proposent, suite à l'équation (4.95) :

$$\phi_{ij,2,\omega} = C_2^\omega \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik,2} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{jk,2} n_k n_i \right) \frac{0.4 k^{3/2}}{\epsilon y} \quad (4.102)$$

avec $C_2^\omega = \max \left[\left(\frac{2}{3} C_2 - \frac{1}{6} \right), 0 \right]$ et $C_2 = 0.75 A^{1/2}$.

De très nombreuses autres expressions pour ϕ_{ij} ont été employées dans la littérature ; quelques formulations particulières seront détaillées dans l'annexe B.

Modélisation de l'équation de transport de la dissipation

L'équation de transport des tensions de Reynolds fait intervenir le tenseur de dissipation ϵ_{ij} . Un système d'équations de transport peut être écrit pour chacun des termes de ce tenseur faisant alors apparaître six équations supplémentaires qui devront ensuite être modélisées. L'alternative du paragraphe 4.3.4 consiste à définir une relation algébrique reliant le tenseur de dissipation ϵ_{ij} aux tenseurs de Reynolds et à une échelle de temps. Dans le cas de turbulence isotrope, le rapport entre l'énergie cinétique et la dissipation turbulente $\frac{k}{\epsilon}$ fournit un temps caractéristique de décroissance de la turbulence. L'approche proposée par Davydov (1961) [52] et utilisée par Daly & Harlow (1970) [48] et Hanjalić & Launder (1972) [73], est d'introduire la trace scalaire ou la dissipation totale $\epsilon = \frac{1}{2} \epsilon_{ii}$, et de modéliser ϵ_{ij} en fonction de $\overline{u_i u_j}$ et ϵ . Dans ce cas, une équation supplémentaire décrivant l'évolution de ϵ est nécessaire. Cette équation est déduite de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 + T_\epsilon + \Pi_\epsilon + D_\epsilon - Y \quad (4.103)$$

les différents termes de cette relation pouvant être identifiés comme suit :

$$P_\epsilon^1 = -2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} S_{ik}} \text{ production mixte,}$$

$$P_\epsilon^2 = -2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} S_{km}} \text{ production par les gradients de vitesses moyennes,}$$

$$P_\epsilon^3 = -2 \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_k \partial x_m}} \text{ production par gradient,}$$

$$P_\epsilon^4 = -2 \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m}} \text{ production par la turbulence,}$$

$$T_\epsilon = - \overline{\frac{\partial \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_i}{\partial x_m} \right)}{\partial x_k}} \text{ transport par la turbulence,}$$

$$\Pi_\epsilon = - \frac{2}{\rho} \overline{\frac{\partial \left(\frac{\partial p}{\partial x_m} \frac{\partial u_k}{\partial x_m} \right)}{\partial x_k}} \text{ transport par la pression fluctuante,}$$

$D_\epsilon = \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_k \partial x_k}$ diffusion visqueuse,

$Y = 2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_m}$ destruction par la viscosité,

où $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right)$ est le taux moyen de déformation. Les termes de l'équation (4.103) ont été modélisés par différents auteurs comme Davydov (1961) [52], Daly & Harlow (1970) [48], Hanjalić & Launder (1972, 1976) [73, 74]. La majorité des modèles proposent d'écrire l'équation de ϵ comme une somme d'un terme de production, d'un terme de dissipation, d'un terme de transport turbulent, et d'un terme visqueux :

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon^2}{k} + C_\epsilon \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right)_{,i} + \epsilon_{,jj} \quad (4.104)$$

$C_{\epsilon 1}$, $C_{\epsilon 2}$ et C_ϵ sont des constantes ou fonctions du nombre de Reynolds de turbulence.

Davydov (1961) [52], et Hanjalić & Launder (1972) [73] combinent les termes P_ϵ^1 et P_ϵ^2 et les modélisent comme suit :

$$P_\epsilon = P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 = -C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} S_{ij} = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k \quad (4.105)$$

Hanjalić & Launder (1976) [74] recommandent $C_{\epsilon 1} = 1.275$. Ils combinent aussi P_ϵ^4 et Y :

$$D_\epsilon = -P_\epsilon^4 + Y = C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (4.106)$$

Pour les écoulements de proche paroi, cette relation tend vers l'infini quand on s'approche de la paroi. Les auteurs introduisent donc la dissipation modifiée :

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k_{\frac{1}{2}}}{\partial x_l} \right)^2 \quad (4.107)$$

et une fonction d'amortissement f_ϵ fonction de R_T . Ils écrivent alors :

$$-P_\epsilon^4 + Y = C_{\epsilon 2} f_\epsilon \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{k} \quad (4.108)$$

avec

$$f_\epsilon = 1 - \frac{0.4}{1.8} \exp \left[- \left(\frac{1}{6} R_T \right)^2 \right] \quad (4.109)$$

et $C_{\epsilon 2} = 1.8$

Les mêmes auteurs modélisent le transport par la turbulence comme suit :

$$T_\epsilon = C_\epsilon \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right)_{,i} \quad (4.110)$$

avec $C_\epsilon = 0.15$. Ils proposent de modéliser P_ϵ^3 par :

$$P_\epsilon^3 = C_{\epsilon 3} \frac{k \overline{u_j u_k}}{\epsilon} \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_j \partial x_m} \right) \left(\frac{\partial^2 \overline{U}_i}{\partial x_k \partial x_m} \right) \quad (4.111)$$

avec $C_\epsilon^3 = 2.0$.

Plusieurs autres formulations, plus ou moins complexes, sont proposées par différents auteurs, comme Shima (1988) [161], Launder & Shima (1989) [104], Craft & Launder (1996) [45] (voir Annexe B). La modélisation de l'équation de ϵ reste toujours un problème relativement ouvert. En effet, cette grandeur, tout comme le terme de pression-déformation dans les modèles au second ordre, reste inaccessible à l'expérience, et est aussi très délicate à évaluer par simulation numérique directe puisque l'étude à grands nombres de Reynolds nécessite une finesse de maillage considérable afin d'évaluer correctement les gradients des quantités fluctuantes. Mais de tentatives récentes (PIV) permettent d'avoir l'évolution d'une partie des termes du tenseur ϵ_{ij} .

4.3.5 Les modèles ARSM

Les modèles algébriques des tensions de Reynolds (Algebraic Reynolds Stress Model) sont une étape intermédiaire entre les modèles à deux équations et les modèles au second ordre. L'un des objectifs de ces modèles, tout comme les modèles au second ordre, est de pallier l'incapacité des modèles linéaires d'ordre inférieur à développer des contraintes turbulentes anisotropes.

L'hypothèse sur laquelle repose ces modèles a été proposée par Rodi (1972) [150] : les termes de convection et de diffusion sont simulés à partir de la convection-diffusion de l'équation de l'énergie cinétique turbulente :

$$\overline{u_i u_j} (C_k - D_k) = C_{ij} - D_{ij} \quad (4.112)$$

où :

- C_k et C_{ij} sont respectivement les termes de convection de k et de $\overline{u_i u_j}$
- D_k et D_{ij} sont les termes de diffusion turbulente et moléculaire de k et $\overline{u_i u_j}$

On obtient ainsi la relation :

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \epsilon) = P_{ij} + \Pi_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (4.113)$$

La modélisation des différents termes du second membre s'effectue de manière analogue à celle des modèles au second ordre. Plusieurs développements ont été proposés, entre autres, par Taulbee (1992)[181], Gatski & Speziale [65], Wallin & Johansson (2000) [192], et Knoell & Taulbee (2001) [97].

Après cette revue des différents modèles, nous allons par la suite présenter des approches tenant compte des effets de rotation.

4.4 Modélisation des effets de rotation

La rotation modifie largement la structure des champs de la turbulence. Les modèles à deux équations standards, utilisant l'hypothèse de viscosité turbulente, sont incapables de prédire les instabilités secondaires, et les écoulements soumis aux effets de rotation. L'accélération de Coriolis engendre un terme inertiel additionnel dans les contraintes de Reynolds. Dans les équations pour les tensions de Reynolds, les termes impliquant la rotation sont redistributifs, c'est à dire qu'ils apparaissent avec des signes

opposés dans les équations des tensions normales ; ils sont donc à trace nulle, et disparaissent du bilan d'énergie cinétique de turbulence. La rotation influence directement l'écoulement et affecte simultanément l'intensité et les échelles de la turbulence. Le spectre de l'énergie est modifié à cause des interactions non-linéaires, ainsi que le taux de dissipation qui sera réduit. La turbulence tend à devenir bi-dimensionnelle, voire même que la rotation pourrait stabiliser les écoulements comme il est montré dans cette présente étude, chapitre 5. D'où la nécessité d'inclure des corrections pour les effets de rotation dans les modèles de turbulence.

Dans ce qui suit, seront présentées certaines modifications proposées dans ce contexte. Même si les cas étudiés correspondent souvent à une rotation d'ensemble comme un canal en rotation, ces approches pourront également être appliquées dans le contexte d'un obstacle en rotation placé dans un écoulement uniforme. Ce cas peut être assimilé à un obstacle fixe placé dans un domaine de fluide qui tourne.

4.4.1 Correction du modèle à une équation de Spalart-Allmaras, Spalart & Shur (1997) [170]

Spalart & Shur (1997) [170] apportent une correction quant aux effets de la rotation sur le modèle de Spalart & Allmaras (1992) [169] présenté au paragraphe 4.3.1. Cette correction se résume par l'ajout d'un terme multiplicatif au terme de production du modèle Spalart-Allmaras : $P_{SA} = c_{b1} (1 - f_{t2}) \tilde{S} \tilde{\nu}$ devient $f_{r1} P_{SA}$, où :

$$f_{r1}(r^*, \tilde{r}) = (1 + c_{r1}) \frac{2r^*}{1 + r^*} [1 - c_{r3} \text{Arctan}(c_{r2} \tilde{r})] - c_{r1} \quad (4.114)$$

Les termes sans dimension r^* et \tilde{r} sont donnés par les relations suivantes :

$$r^* = \frac{\tilde{S}}{\tilde{W}} \quad (4.115)$$

$$\tilde{r} = \frac{2}{d^4} W_{ik} S_{jk} \left[\frac{DS_{ij}}{Dt} + (e_{imn} S_{jn} + e_{jmn} S_{in}) \Omega_m \right] \quad (4.116)$$

Ω_m étant la vitesse de rotation et

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + e_{mji} \Omega_m$$

Les coefficients de la correction sont : $c_{r1} = 1.0$, $c_{r2} = 12.0$ et $c_{r3} = 1.0$.

4.4.2 Correction du modèle $k - \epsilon$, Cazalbou *et al.* (2005), [33]

Les auteurs proposent une correction du modèle $k - \epsilon$ pour inclure les effets de rotation. Les équations générales du modèle utilisé dans une repère absolu sont :

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu k T \quad (4.117)$$

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \rho \epsilon \quad (4.118)$$

$$\rho \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = C_{\epsilon 1} \frac{1}{T} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] C_{\epsilon 2} \frac{1}{T} \rho \epsilon + E \quad (4.119)$$

avec $\tau_{ij} = 2\mu_t S_{ij} - \frac{2}{3}\rho k \delta_{ij}$, et

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.99, \sigma_k = 1.0 \quad \text{et} \quad \sigma_\epsilon = 1.3$$

L'échelle de temps turbulente est

$$T = \frac{k}{\epsilon} + \left(\frac{\nu}{\epsilon} \right)^{0.5}$$

et l'équation pour la dissipation est complétée par le terme

$$E = \nu \mu_t \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right)^2$$

La formulation bas-Reynolds est assurée par la fonction de paroi

$$f_\mu = \left[1 + \exp \left(- \left(1.5 \cdot 10^{-4} Re_t + 5 \cdot 10^{-7} Re_t^3 + 10^{-10} Re_t^5 \right) \right) \right]^{0.5} \quad \text{avec} \quad Re_t = \frac{k^{1/2} l}{\nu}$$

La correction généralisée consiste à remplacer la constante $C_{\epsilon 2}$ par l'expression suivante :

$$C_{\epsilon 2} = C_{\epsilon 2}^0 + \frac{C_{\epsilon 2}^0 - 1}{1 + a_1 \tilde{R}o^{3/2}} + C_{\epsilon 2}^0 C_{SC} \frac{\tilde{S}k}{\epsilon} \left[\tanh \left(a_2 \tilde{B}_R + a_3 \right) - a_4 \right] \quad (4.120)$$

où $\tilde{R}o$ et \tilde{B}_R sont des nombres de Rossby et Bradshaw-Richardson objectifs, issus de Bardina *et al.* (1985) [9] et Spalart & Shur (1997) [170] :

$$\tilde{R}o = \frac{\epsilon}{\tilde{\Omega} k} \quad (4.121)$$

$$\tilde{B}_R = - \frac{2k}{\tilde{S}^3 \epsilon} W_{ik} S_{jk} \left[\frac{D S_{ij}}{Dt} + \Omega_m (e_{imn} S_{jn} + e_{jmn} S_{in}) \right] \quad (4.122)$$

où

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) + e_{mji} \Omega_m$$

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{0.5 * (W_{ij} W_{ij})}$$

Les coefficients de la correction sont données dans le tableau 4.5.

Les approches suivantes sont issues de modèles au second ordre.

$C_{\epsilon_2}^0$	C_{sc}	a_1	a_2	a_3	a_4
1.83	0.119	4.3	5.13	0.453	0.682

TABLE 4.5 – Coefficients de la correction du C_{ϵ_2} , Cazalbou *et al.* (2005), [33]

4.4.3 Modèle de Elena & Schiestel (1996) [60]

Les auteurs proposent un modèle qui tient compte des effets de la rotation et du confinement ; ce modèle pour le tenseur spectral $\Phi_{ij}(\kappa)$ est développé en fonction du vecteur d'onde κ_i , du tenseur d'anisotropie classique (du tenseur de Reynolds), et du tenseur d'anisotropie directionnel basé sur le tenseur de dimensionnement C_{ij} :

$$\lambda_{ij}(\kappa) = \oint_{S(\kappa)} \left[\frac{\kappa_i \kappa_j}{\kappa^2} \Phi_{pp}(\kappa) \right] dS \quad (4.123)$$

où $S(\kappa)$ est la sphère de diamètre κ , Schiestel (1994) [158].

La partie linéaire de la corrélation de vitesse-pression $\phi_{ij}^{(2)}$ est ensuite dérivée du tenseur spectral. Le forme finale, présentée ci-dessous, dépend alors du tenseur de dimensionnement dans l'espace physique :

$$C_{ij} = \int_0^\infty \lambda_{ij}(\kappa) d\kappa$$

L'équation de transport des tensions de Reynolds s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)} + \phi_{ij}^{(2\omega)} + \phi_{ij}^{(2C)} + \phi_{ij}^{(2C\omega)} + D_{ij}^T + D_{ij}^\nu + \mathcal{D}_{ij} + \mathcal{B}_{ij} + J_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (4.124)$$

P_{ij} est le terme de production de la contrainte $\overline{u_i u_j}$ par le mouvement moyen :

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}$$

$\phi_{ij}^{(1)}$ correspond au terme lent de la corrélation vitesse-gradient de pression :

$$\phi_{ij}^{(1)} = - \left[\tilde{c}_1 a_{ij}^R + c'_1 \left(a_{ik}^R a_{kj}^R - \frac{1}{3} A_2^R \delta_{ij} \right) \right] \epsilon$$

Avec

$$\tilde{c}_1 = \left(3.1 \sqrt{AA_2^R} + 1 \right) [1 - \exp(-Re_t^2/40)]$$

$$c'_1 = 3.72 \sqrt{AA_2^R} [1 - \exp(-Re_t^2/40)]$$

$$a_{ij}^R = \text{tenseur d'anisotropie adimensionné} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$$

$$A_2^R = \text{second invariant du tenseur d'anisotropie} = a_{ij}^R a_{ji}^R$$

$$A_3^R = \text{troisième invariant du tenseur d'anisotropie} = a_{ij}^R a_{jk}^R a_{ki}^R$$

$$A = \text{paramètre d'anisotropie de Lumley, "flatness parameter"} = 1 - \frac{9}{8} (A_2^R - A_3^R)$$

$$\text{et } Re_t = \text{nombre de Reynolds de turbulence} = \frac{k^2}{\nu \epsilon}$$

$\phi_{ij}^{(2)}$ = est le terme rapide de la corrélation vitesse-gradient de pression :

$$\begin{aligned} & -0.6 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) + 0.3 a_{ij}^R P_{ll} \\ \phi_{ij}^{(2)} = & -0.2 \left[\frac{\overline{u_k u_j} \overline{u_l u_l}}{k} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} \right) - \frac{\overline{u_l u_k}}{k} \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_l} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_l} \right) \right] \\ & - \min(0.6; A) \left[A_2^R \left(P_{ij} - D_{ij}^R \right) + 3 a_{mi}^R a_{nj}^R \left(P_{mn} - D_{mn}^R \right) \right] \end{aligned}$$

Avec

$$P = \frac{1}{2} P_{ii}$$

$$D_{ij}^R = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

$\phi_{ij}^{(2\omega)}$ représente le terme de paroi de la corrélation vitesse-gradient de pression :

$$\phi_{ij}^{(2\omega)} = 0.2 \left(\phi_{km}^{(2)} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik}^{(2)} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj}^{(2)} n_i n_k \right) \times \frac{k (\overline{u_p u_q} n_p n_q)^{1/2}}{\epsilon y}$$

où n_i est le vecteur normal unitaire et y est la distance de la paroi.

Les termes qui correspondent au tenseur de dimensionnement $\phi_{ij}^{(2C)}$ et $\phi_{ij}^{(2C\omega)}$ s'écrivent comme suit :

$$\phi_{ij}^{(2C)} = -0.6 \left(D_{ij}^C - \frac{1}{3} D_{ll}^C \delta_{ij} \right) - 0.4 k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\phi_{ij}^{(2C\omega)} = 0.2 \left(\phi_{km}^{(2C)} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ik}^{(2C)} n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{kj}^{(2C)} n_i n_k \right) \times \frac{k (\overline{u_p u_q} n_p n_q)^{1/2}}{\epsilon y}$$

Avec

$$D_{ij}^C = -C_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - C_{jk} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}$$

$$C_{ij} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{f_c}{2} \right) k \delta_{ij} - f_c k \frac{\Omega_i^* \Omega_j^*}{\Omega^{*2}}$$

$$f_c = \frac{Ro_t^{-1}}{5 + Ro_t^{-1}}$$

où Ro_t est le nombre de Rossby de turbulence, $Ro_t = \frac{\epsilon}{k \Omega^*}$ et Ω_i^* est le vecteur intrinsèque de la rotation.

D_{ij}^T et D_{ij}^ν sont respectivement les termes de diffusion turbulente et visqueuse :

$$D_{ij}^T = 0.22 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right)$$

$$D_{ij}^\nu = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_l \partial x_l}$$

Le terme d'inhomogénéité \mathcal{D}_{ij} traduit l'augmentation de la diffusion turbulente dans le cas de forte vitesse de rotation à cause de la corrélation triple des fluctuations de vitesse et de la fluctuation de pression ; \mathcal{D}_{ij} est proposé sous la forme suivante :

$$\mathcal{D}_{ij} = 0.22 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{2Ro_t^{-1/2}}{1 + 15Ro_t^{-1/2}} \frac{\Omega_l^* \Omega_m^*}{\omega^{*2}} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right)$$

Un extra-terme source est ajouté pour mieux tenir compte des effets de forte vitesse de rotation :

$$\mathcal{B}_{ij} = -\frac{1}{2} \Omega^* \frac{C_{pq}}{2k} \frac{\Omega_p^* \Omega_q^*}{\Omega^{*2}} \left(\overline{u_i u_j} - k \delta_{ij} + \frac{1}{2} C_{ij} \right)$$

La rotation réduit le transfert d'énergie des grandes aux plus petites structures turbulentes. Ce phénomène est modélisé par un flux inverse J :

$$J = \frac{f_j}{1 + f_j} \epsilon$$

où f_j est déduite de la fonction d'Aupoix (1987) [5] et étendue dans le cadre des écoulements à bas nombres de Reynolds pour qu'elle s'annule quand Re_t tend vers zéro :

$$f_j = \left[1 - \exp(-Re_t^2) \right] \frac{0.12Ro_t^{-2} + 0.015Ro_t^{-1}}{0.254Ro_t^{-2} + 0.157Ro_t^{-1} + 1}$$

Le terme correspondant J_{ij} dans l'équation des tensions de Reynolds 4.124 est isotrope à nombre de Reynolds élevé, et tend progressivement vers $\overline{u_i u_j} J/k$ lorsque le nombre de Reynolds diminue :

$$J_{ij} = \left(f_T \frac{\overline{u_i u_j}}{k} + \frac{2}{3} (1 - f_T) \delta_{ij} \right) J$$

où $f_T = \frac{1}{1 + Re_t/10}$.

Enfin, le terme de dissipation est le suivant :

$$\epsilon_{ij} = f_A \epsilon_{ij}^* + (1 - f_A) \left(f_s \frac{\overline{u_i u_j}}{k} + \frac{2}{3} (1 - f_s) \delta_{ij} \right) \epsilon$$

avec

$$\epsilon_{ij}^* = \frac{\overline{u_i u_j} + \overline{u_i u_k} n_j n_k + \overline{u_k u_j} n_i n_k + \overline{u_k u_l} n_k n_l n_i n_j}{1 + \frac{3}{2} \frac{\overline{u_p u_q}}{k} n_p n_q} \frac{\epsilon}{k}$$

$$f_A = \exp(-20A^2) \exp(-Re_t^2/20)$$

$$f_s = \exp(-Re_t^2/20)$$

D'autre part, l'équation de transport du taux de dissipation se présente de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{D\epsilon}{Dt} = & -c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon \tilde{\epsilon}}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(C_{\epsilon} \frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) \\ & + c_{\epsilon 3} \nu \frac{k}{\epsilon} \overline{u_j u_k} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c_{\epsilon 4} \nu \frac{\tilde{\epsilon}}{k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (4.125)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon} &= \epsilon - 2\nu \frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_i} \frac{\partial k^{1/2}}{\partial x_i} \\ c_{\epsilon} &= 0.18 \quad c_{\epsilon 1} = 1.0 \\ c_{\epsilon 2} &= \frac{1.92}{1 + 0.63(A.A_2^R)^{1/2}} \\ c_{\epsilon 3} &= 2.0 \quad c_{\epsilon 4} = 0.92 \end{aligned}$$

Le flux inverse apparait dans l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence :

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + J - \epsilon + 0.22 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\epsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \\ & + 0.22 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{k^2}{\epsilon} \frac{2Ro_t^{-1/2}}{1+15Ro_t^{-1/2}} \frac{\Omega_i^* \Omega_j^*}{\Omega^{*2}} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (4.126)$$

4.4.4 Modèle de Dutzler, Pettersson-Reif & Andersson (2000) [59]

Dutzler *et al.* [59] proposent un modèle au second ordre pour l'appliquer dans le cas d'un canal plan soumis à une rotation transversale rapide de vitesse angulaire constante Ω . Les équations de continuité et de quantité de mouvement sont écrites en utilisant les moyennes de Reynolds :

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.127)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = -\frac{\partial P^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u_i u_j} \right) - 2\rho \Omega_j U_k e_{ijk} \quad (4.128)$$

où U_i et u_j représentent respectivement la vitesse moyenne et la fluctuation dans la direction x_i . $P^* = P - (1/2)\rho\Omega^2(x^2 + y^2)$ correspond à la pression statique moyenne réduite et P est la pression moyenne.

L'équation de transport des contraintes de Reynolds est proposée comme suit :

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = P_{ij} + R_{ij} + d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^t + d_{ij}^p + \wp_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon \quad (4.129)$$

où

$$\begin{aligned}
P_{ij} &= - \left(\overline{u_m u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_m} + \overline{u_m u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_m} \right) \\
R_{ij} &= -2\Omega_k (\overline{u_m u_i} e_{jkm} + \overline{u_m u_j} e_{ikm}) \\
d_{ij}^\nu &= \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} \\
d_{ij}^t + d_{ij}^p &= - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_j u_k}) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p u_i} \delta_{jk} + \overline{p u_j} \delta_{ik}) \\
\wp_{ij} &= \underbrace{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\phi_{ij}} - \epsilon_{ij} + \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \epsilon
\end{aligned}$$

sont la production par le cisaillement moyen P_{ij} et par la rotation R_{ij} , la diffusion visqueuse d_{ij}^ν , turbulente d_{ij}^t et de pression d_{ij}^p , et le tenseur de pression-déformation *relaxé* \wp_{ij} . Le dernier terme de l'équation 4.129 correspond à la modélisation anisotrope de Rotta du tenseur du taux de dissipation ϵ_{ij} . Les termes P_{ij} et R_{ij} ne sont pas à modéliser. Les effets de la rotation sont alors inclus d'une manière naturelle dans les équations de $u_i u_j$. Le terme de diffusion visqueuses d_{ij}^ν est également retenu dans sa formulation exacte, alors que d_{ij}^p et d_{ij}^t sont modélisés par :

$$d_{ij}^t + d_{ij}^p = \frac{\partial}{\partial x_n} \left(C_K \overline{u_n u_m} T \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_m} \right) \quad (4.130)$$

où T est l'échelle de temps de turbulence, équation 4.138.

Le tenseur de redistribution \wp_{ij} est obtenu de la solution f_{ij} de l'équation de relaxation elliptique de Durbin (1993) [58] qui peut être écrite sous la forme suivante :

$$\wp_{ij} = k f_{ij} \quad (4.131)$$

$$L^2 \nabla^2 f_{ij} - f_{ij} = - \frac{\wp_{ij}^h}{k} \quad (4.132)$$

\wp_{ij}^h représente la forme quasi-homogène de \wp_{ij} ; f_{ij} est une variable intermédiaire et L est l'échelle de longueur de turbulence :

$$f_{ij} = \begin{cases} - \frac{20\nu^2}{\epsilon_w y_1^4} (\overline{u_i u_j})_1 & i \text{ et/ou } j \text{ dans la direction normale à la paroi} \\ 0 & i \text{ et } j \text{ dans la direction tangentielle} \end{cases} \quad (4.133)$$

où $\epsilon_w = 2\nu k_1 / y_1^2$; l'indice 1 indique le nœud de calcul adjacent à la paroi.

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}; C_\eta \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \right) \quad (4.134)$$

avec l'échelle de longueur de Kolmogorov comme limite inférieure.

L'équation de relaxation elliptique provient de la modification de l'équation de Helmholtz et tient compte indirectement des effets non-locaux dans l'écoulement, causés par la proximité d'une paroi solide. Ces effets sont le blocage cinématique de la fluctuation de la vitesse normale à la paroi et la réflexion de pression de la surface. Cette approche est avantageuse quant à la facilité de son application dans le cas de géométrie complexe, puisqu'elle n'utilise pas les distances aux parois ni les vecteurs unitaires. Les effets non homogènes d'une paroi sont représentés en imposant des conditions aux limites sur l'équation 4.132. Loin de la paroi, l'opérateur elliptique de cette équation s'annule, et \wp_{ij} prend sa forme quasi-homogène $\wp_{ij}^h = kf_{ij}$. De plus, loin de la paroi, la dissipation est supposée localement isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\epsilon\delta_{ij} \quad (4.135)$$

et

$$\wp_{ij}^h = \phi_{ij}^h + a_{ij}\epsilon \quad (4.136)$$

où

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$$

est le tenseur d'anisotropie des contraintes de Reynolds.

Concernant le terme quasi-homogène, les auteurs ont adopté le modèle non-linéaire de Ristorcelli *et al.* (1995) [148] :

$$\frac{\wp_{ij}^h}{k} = \frac{\phi_{ij}^{hr}}{k} + \frac{(1 - C_1)}{T} a_{ij} \quad (4.137)$$

$$T = \max\left(\frac{k}{\epsilon}; 6.0\left(\frac{\nu}{\epsilon}\right)^{1/2}\right) \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} \frac{\phi_{ij}^{hr}}{4k} = & \left(C_3 - 2IIC_3'' + 3IIIC_3'''\right) S_{ij} + C_4 \left(b_{ik}S_{kj} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{kl}S_{kl}\delta_{ij}\right) \\ & + C_4''' b_{kl}S_{kl} \left(b_{ij}^2 + \frac{2}{3}\delta_{ij}II\right) + C_5 \left(b_{ik}W_{kj} + b_{jk}W_{ki}\right) \\ & + b_{ij} \left(C_6 b_{kl}S_{kl} + C_4''' b_{lk}b_{km}S_{lm}\right) \\ & + C_7 \left(b_{ik}^2 S_{kj} + b_{jk}^2 S_{ki} - \frac{2}{3}\delta_{ij}b_{lk}b_{km}S_{lm}\right) \\ & + C_8 \left(b_{ik}^2 W_{kj} + b_{jk}^2 W_{ki}\right) + C_9 \left(b_{ik}W_{lk}b_{ij}^2 + b_{jk}W_{lk}b_{ji}^2\right) \end{aligned} \quad (4.139)$$

avec S_{ij} définie par l'équation 4.147 et

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + e_{jik}\Omega_k \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= a_{ij}/2 & b_{ij}^2 &= b_{ik}b_{kj} \\
II = -b_{ij}b_{ij} &= -A_2/8 & III = b_{ik}b_{kj}b_{ji}/3 &= A_3/24
\end{aligned} \tag{4.141}$$

A_2 et A_3 sont donnés par l'équation 4.145, et les coefficients du modèle sont donnés par Ristorcelli *et al.* (1995) [148].

Pour fermer le système d'équations, le taux de dissipation ϵ est obtenu de son équation modélisée :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_j \epsilon) = \frac{C_{\epsilon 1}^* P_k - C_{\epsilon 2} \epsilon}{T} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} + C_\epsilon T \overline{u_i u_j} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) \tag{4.142}$$

où $C_{\epsilon 1}^* = C_{\epsilon 1} (1 + 0.1 (P_k/\epsilon))$ et $P_k = P_{ii}/2$.

L'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence est :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (U_j k) = P_k - \epsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} + C_K T \overline{u_i u_j} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) \tag{4.143}$$

Les auteurs utilisent une échelle de longueur de turbulence modifiée par Pettersson & Andersson (1997) [136] pour prendre en considération le fait que la relaxation elliptique de Durbin (1993) [58] tend à amplifier la redistribution de l'énergie sur les composantes du tenseur de Reynolds. Les coefficients C_L et C_η de l'équation 4.134 sont alors remplacés par :

$$\tilde{C}_L = C_L A_2^{1/2}; \quad \tilde{C}_\eta = C_\eta A_2^{-1/2} \exp \left(- \left(\frac{1+A_3}{0.1+A_2} \right)^2 \right) \tag{4.144}$$

où

$$A_2 = a_{ij}a_{ji} \quad A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji} \tag{4.145}$$

D'autre part, puisque la rotation pourrait relaminariser l'écoulement à cause de la force de Coriolis, et pour éviter une singularité de l'équation 4.134 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ϵ est remplacé par $\hat{\epsilon}$ dans l'échelle de longueur de Kolmogorov :

$$\hat{\epsilon} = \sqrt{\epsilon^2 + \Phi^2} \tag{4.146}$$

où Φ est la fonction de dissipation de viscosité moyenne :

$$\Phi = 2\nu S_{kl} S_{kl}$$

et

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \tag{4.147}$$

L'équation 4.134 s'écrit alors de la forme suivante :

$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	C_K	C_ϵ	C_L	C_η
1.44	1.85	0.19	0.14	0.18	647

TABLE 4.6 – Constantes du modèle de Dutzler *et al.* (2000) [59]

$$L = \tilde{C}_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\epsilon}; \tilde{C}_\eta \left(\frac{\nu^3}{\hat{\epsilon}} \right)^{1/4} \right) \quad (4.148)$$

Les constantes du modèles sont donnèes par le tableau 4.6.

Ce modèle a été plus récemment utilisé pour la même application, canal soumis à une rotation transversale, par Oberlack *el al.* (2006) [127].

4.4.5 Modèle de Sjögren & Johansson (2000) [166]

Les auteurs utilisent les tenseurs de déformation et de rotation comme suit :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \omega_{ij}^s \quad (4.149)$$

où $\omega_{ij}^s = \epsilon_{ijk} \omega_k^s$ traduit la rotation (system rotation dyad). Dans ce qui suit, les développements à l'ordre 5 sont présentés. Les équations de transport du modèle sont :

$$\frac{Da_{ij}}{Dt} = P_{ij}^{(a)} + \frac{1}{K} \Pi_{ij} - \frac{\epsilon}{K} (e_{ij} - a_{ij}) + Diff_{ij}^{(a)} + C_{ij}^{(a)} \quad (4.150)$$

$$\frac{DK}{Dt} = -I_{aS}K - \epsilon - \frac{\partial J_k^K}{\partial x_k} \quad (4.151)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{-C_{\epsilon 1} I_{aS}K - C_{\epsilon 2} \epsilon}{T_\epsilon} - \frac{\partial J_k^\epsilon}{\partial x_k} \quad (4.152)$$

où

$$a_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij}$$

$$T_\epsilon = \frac{K}{\epsilon} + C_T \sqrt{\frac{\nu}{\epsilon}} = \frac{K}{\epsilon} \left(1 + C_T \frac{2}{\sqrt{Re_T}} \right) \quad Re_T = \frac{4K^2}{\nu \epsilon}$$

$$P_{ij}^{(a)} = I_{aS} G_{ij}^{(1)} - \frac{4}{3} G_{ij}^{(2)} - G_{ij}^{(3)} + G_{ij}^{(4)}$$

$$J_{ijk} = - \left(\nu \delta_{kl} + C_S \frac{K}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l}$$

$$J_i^K = \frac{1}{2} J_{kki}$$

$$Diff_{ij}^{(a)} = \frac{1}{K} \left(- \frac{\partial J_{ijk}}{\partial x_k} + \frac{\overline{u_i u_j}}{K} \frac{\partial J_k^K}{\partial x_k} \right)$$

$$J_k^\epsilon = - \left(\nu \delta_{kl} + C_\epsilon \frac{K}{\epsilon} \overline{u_k u_l} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_l}$$

la redistribution d'anisotropie due aux forces de Coriolis :

$$C_{ij}^{(a)} = (a_{ik}\omega_{kj}^s - \omega_{ik}^s a_{kj})$$

$$e_{ij} = \frac{\epsilon_{ij}}{\epsilon} - \frac{2}{3}\delta_{ij}$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{(s)} + \Pi_{ij}^{(r)} = \text{terme rapide} + \text{terme lent}$$

$$\frac{\Pi_{ij}^{(s)}}{\epsilon} = f(Re_T) (\beta_1 G_{ij}^{(1)} + \beta_2 G_{ij}^{(2)})$$

$$\frac{\Pi_{ij}^{(r)}}{K} = (q_1 I_{aS} + q_9 I_{aaS}) G_{ij}^{(1)} + q_2 G_{ij}^{(2)} + q_3 G_{ij}^{(3)} +$$

$$q_4 G_{ij}^{(4)} + (q_5 I_{aS} + q_{10} I_{aaS}) G_{ij}^{(5)} + q_6 G_{ij}^{(6)} + q_7 G_{ij}^{(7)} + q_8 G_{ij}^{(8)}$$

$$\beta_1 = c_1 F + \left(\frac{9}{8}c_1 + c_3\right) \left[\frac{8}{9}(F-1) + 2II_a - III_a^2\right]$$

$$\beta_2 = c_2 F + \left(\frac{9}{8}c_1 + c_3\right) \left(\frac{1}{2}II_a + \frac{2}{3}III_a\right)$$

$$f(Re_T) = C_{1\infty} \left[\sqrt{2\frac{Re_T}{R_b} + \left(\frac{Re_T}{R_b}\right)^2} - \frac{Re_T}{R_b} \right]$$

$$II_a = a_{ik}a_{ki} \quad III_a = a_{ij}a_{jk}a_{ki} \quad F = 1 - \frac{9}{8}(II_a - III_a)$$

$$I_{aS} = a_{ik}S_{ki} \quad I_{aaS} = a_{ik}a_{kl}S_{li}$$

Tout modèle linéaire en S_{ij} et ω_{ij} peut être exprimé à l'aide des 8 tenseurs $G_{ij}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(1)} &= a_{ij} \\ G_{ij}^{(2)} &= S_{ij} \\ G_{ij}^{(3)} &= a_{ik}S_{kj} + S_{ik}a_{kj} - \frac{2}{3}I_{aS}\delta_{ij} \\ G_{ij}^{(4)} &= a_{ik}\omega_{kj} - \omega_{ik}a_{kj} \\ G_{ij}^{(5)} &= a_{ik}a_{kj} - \frac{1}{3}II_a\delta_{ij} \\ G_{ij}^{(6)} &= a_{ik}S_{kl}a_{lj} - \frac{1}{3}I_{aaS}\delta_{ij} \\ G_{ij}^{(7)} &= a_{ik}a_{kl}\omega_{lj} - \omega_{ik}a_{kl}a_{lj} \\ G_{ij}^{(8)} &= a_{ik}a_{kl}\omega_{lm}a_{mj} - a_{ik}\omega_{kl}a_{lm}a_{mj} \end{aligned} \tag{4.153}$$

Les paramètres q_n sont proposés comme suit :

$$\begin{aligned}
q_1 &= \eta_2 + \eta_8 II_a + \eta_{12} III_a \\
q_2 &= \frac{4}{5} - \frac{1}{10} (4q_1 - 3q_7) II_a - \frac{2}{5} q_9 III_a \\
q_3 &= \frac{12}{7} + \frac{9}{7} q_4 - \frac{1}{7} (3q_8 + 2q_9) II_a - \frac{2}{7} q_{10} III_a \\
q_4 &= \eta_1 + \eta_4 II_a + \eta_7 III_a + \eta_{11} II_a^2 \\
q_5 &= q_9 \\
q_6 &= 6q_1 - 9q_7 - q_{10} II_a \\
q_7 &= \eta_3 + \eta_9 II_a + \eta_{13} III_a \\
q_8 &= \eta_5 + \eta_{14} II_a \\
q_9 &= \eta_6 + \eta_{15} II_a \\
q_{10} &= \eta_{10}
\end{aligned} \tag{4.154}$$

avec

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\frac{28}{3} \gamma_1 - \frac{4}{3} \\
\eta_2 &= -8\gamma_2 + 36\gamma_3 \\
\eta_3 &= -16\gamma_2 + 28\gamma_3 \\
\eta_4 &= -\frac{9}{40} + \frac{21}{2} \gamma_1 - \frac{228}{5} \gamma_2 - 17\gamma_3 + \frac{2}{9} \gamma_4 \\
\eta_5 &= -\frac{3}{2} - 132\gamma_2 + \frac{2}{3} \gamma_4 \\
\eta_6 &= \frac{3}{2} + 60(\gamma_2 + \gamma_3) \\
\eta_7 &= \frac{39}{40} + \frac{9}{8} \eta_1 + \frac{7}{20} \eta_6 - \frac{1}{6} \eta_{10} \\
\eta_8 &= -\frac{495}{112} - \frac{513}{112} \eta_1 - \frac{9}{8} \eta_2 - \frac{57}{14} \eta_4 + \frac{19}{14} \eta_5 - \frac{19}{28} \eta_6 + \frac{1}{3} \eta_{10} \\
\eta_9 &= -\frac{423}{112} - \frac{459}{112} \eta_1 - \frac{9}{8} \eta_3 - \frac{51}{14} \eta_4 + \frac{17}{14} \eta_5 - \frac{17}{28} \eta_6 + \frac{1}{6} \eta_{10} \\
\eta_{10} &= \gamma_4 \\
\eta_{11} &= -\frac{351}{224} - \frac{405}{224} \eta_1 - \frac{45}{28} \eta_4 + \frac{39}{112} \eta_5 - \frac{51}{112} \eta_6 + \frac{1}{8} \eta_{10} \\
\eta_{12} &= \frac{9}{20} + \frac{9}{8} \eta_2 - \frac{3}{8} \eta_5 - \frac{27}{40} \eta_6 + \frac{1}{4} \eta_{10} \\
\eta_{13} &= \frac{9}{40} + \frac{9}{8} \eta_3 - \frac{3}{8} \eta_5 - \frac{21}{40} \eta_6 + \frac{1}{4} \eta_{10} \\
\eta_{14} &= -\frac{351}{56} - \frac{405}{56} \eta_1 - \frac{45}{7} \eta_4 + \frac{39}{28} \eta_5 - \frac{51}{28} \eta_6 + \frac{1}{2} \eta_{10} \\
\eta_{15} &= -\frac{351}{112} - \frac{405}{112} \eta_1 - \frac{45}{14} \eta_4 + \frac{39}{56} \eta_5 - \frac{51}{56} \eta_6 + \frac{1}{4} \eta_{10}
\end{aligned} \tag{4.155}$$

Les auteurs appliquent le modèle dans le cas d'un écoulement en canal plan, en utilisant les constantes suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{terme lent} \quad c_1 &= -2.4 & c_2 &= 2.2 & c_3 &= 1.2 \\
R_b &= 1300 & C_{1\infty} &= 2.58 \\
\text{terme rapide} \quad \gamma_1 &= -0.075 & \gamma_2 &= -0.0115 \\
\gamma_3 &= -0.05 & \gamma_4 &= -2.1 \\
\text{dissipation} \quad C_{\epsilon 1} &= 1.44 & C_{\epsilon 2} &= 1.92 & C_T &= 6.4 \\
\text{diffusion de } K \text{ et } \epsilon \quad C_S &= 0.22 & C_\epsilon &= 0.18
\end{aligned}$$

4.4.6 Modèle de Belhoucine *et al.* (2004) [13]

Belhoucine *et al.* (2004) [13] proposent un modèle EARSM, Explicit Algebraic Reynolds Stress Model, pour la simulation tri-dimensionnelle de l'écoulement dans un conduit de section carrée en rotation. Leur formulation est basée sur le modèle de Jongen, Mompean & Gatski (1998) [91]. Les équations de l'approche RANS tenant compte des effets de rotation prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 U_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - 2e_{ijk} \Omega_j U_k \tag{4.156}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.157)$$

où Ω indique la vitesse de rotation. Le tenseur de Reynolds τ_{ij} est alors solution de l'équation de transport suivante :

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} = -\tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \phi_{ij} - \epsilon_{ij} - \frac{\partial D_{ijk}}{\partial x_k} + \nu \nabla^2 \tau_{ij} - 2\Omega_m (e_{mkj} \tau_{ik} + e_{mki} \tau_{jk}) \quad (4.158)$$

où

$$\phi_{ij} = \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}$$

$$\epsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k}}$$

$$D_{ijk} = \overline{u'_i u'_j u'_k} + \overline{p' u'_i} \delta_{jk} + \overline{p' u'_j} \delta_{ik}$$

sont respectivement les tenseurs de la corrélation de pression-déformation, du taux de dissipation et de la diffusion turbulente. Le terme ϕ_{ij} s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & -C_1 \epsilon b_{ij} + C_2 k S_{ij} + C_3 k \left(b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) - C_4 k (b_{ik} \omega_{kj} + b_{jk} \omega_{ki}) \\ & + C_4 k \Omega_m (b_{ik} e_{mkj} + b_{jk} e_{mki}) + C_5 \epsilon \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{kl} b_{kl} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (4.159)$$

Le modèle linéaire de Speziale *et al.* (1991) [174] donne les valeurs suivantes des coefficients C_i :

$$C_1 = 3.4 + 1.8 \frac{P-r}{\epsilon}; \quad C_2 = 0.36; \quad C_3 = 1.25; \quad C_4 = 0.4; \quad C_5 = 0.$$

Le terme de production P_r est défini par :

$$P_r = -\tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

avec

$$b_{ij} = \frac{\tau_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}}{2k} \quad (4.160)$$

$$d_{ij} = \frac{\epsilon_{ij} - \frac{2}{3} \epsilon \delta_{ij}}{2\epsilon} \quad (4.161)$$

La force de Coriolis est introduite dans l'équation de transport des contraintes de Reynolds et dans celle de ϕ_{ij} , équations 4.158 et 4.159, en remplaçant le tenseur de rotation ω_{ij} par W_{ij} :

$$W_{ij} = \omega_{ij} - c_\omega e_{ijk} \Omega_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - c_\omega e_{ijk} \Omega_k \quad (4.162)$$

c_ω définie par Jongen *et al.* (1998) [91] :

$$c_\omega = \frac{C_4 - 4}{C_4 - 2}$$

L'équation 4.158 prend alors la forme généralisée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{b}_{ij} = & \frac{\epsilon}{k} \left(1 - \frac{P_r}{\epsilon}\right) b_{ij} - \frac{2}{3} S_{ij} - \left(b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}\right) + \frac{1}{2k} \left(D_{ij} - \frac{\tau_{ij}}{k} D_{nn}\right) \\ & + (b_{ik} W_{kj} + b_{jk} W_{ki}) + \frac{1}{2k} \phi_{ij} - \frac{\epsilon}{k} d_{ij} \end{aligned} \quad (4.163)$$

où $D_{ij} = -(\partial D_{ijk} / \partial x_k) + \nu \nabla^2 \tau_{ij}$ est la diffusion et \dot{b}_{ij} est la dérivée temporelle de b_{ij} .

Le modèle est rendu explicite en se basant sur les travaux de Pope (1975) [137] et Gatski & Speziale (1993) [65]; ce qui permettra d'écrire :

$$b_{ij} = \sum_{\lambda=1}^3 T_{ij}^\lambda G_{ij}^\lambda \quad (4.164)$$

où

$$T_{ij}^1 = S_{ij}; T_{ij}^2 = S_{ik} W_{kj}; T_{ij}^3 = S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{mn} \delta_{ij}.$$

Le schéma explicite est fermé par deux équations du modèle $k - \epsilon$.

Dans la présente thèse, nous considérons les effets de rotation en tant que condition limite pariétale sans faire intervenir les forces de Coriolis. Ainsi, on peut examiner l'efficacité des approches DES et OES dans un premier temps, sans tenir compte de modification quant à la rotation. Ainsi, nous étudierons en première étape, la capacité prédictive de l'approche hybride DES, améliorée par la OES, pour des écoulements fortement détachés instationnaires, sans prendre en compte la rotation pariétale.

4.5 Organised Eddy Simulation, OES

L'approche OES consiste en une séparation du spectre turbulent en deux parties ("dual spectrum splitting") : la première partie, (à résoudre directement) regroupe les processus physiques organisés, et la deuxième partie (à modéliser) regroupe les processus chaotiques (turbulence aléatoire), figure 4.1. Le fait que la partie à modéliser s'étend dans tout le rang des nombres d'ondes permet d'utiliser des concepts de modélisation statistique pour la partie continue du spectre. Or, à cause de la présence des structures cohérentes, la cascade énergétique ne se fait plus de la même manière que dans le cas du spectre en équilibre (théorie statistique de Kolmogorov). En effet, dans le cas d'une représentation spectrale de l'écoulement, la présence de structures cohérentes conduit à la présence de pics qui traduisent l'apparition de fréquences ou de longueurs d'onde prédominantes, relatives à ces structures. L'interaction non-linéaire

entre les structures organisées et la turbulence aléatoire modifie la forme et la pente du spectre qui sera différente de celle prédite par la loi de Kolmogorov ($-5/3$). Cette interaction et modification de la forme et de la pente du spectre a été quantifiée à partir de mesures LDV par Djeridi *et al.* (2003) [54], et des mesures PIV résolues en temps, Braza *et al* (2006) [29], figure 4.2.

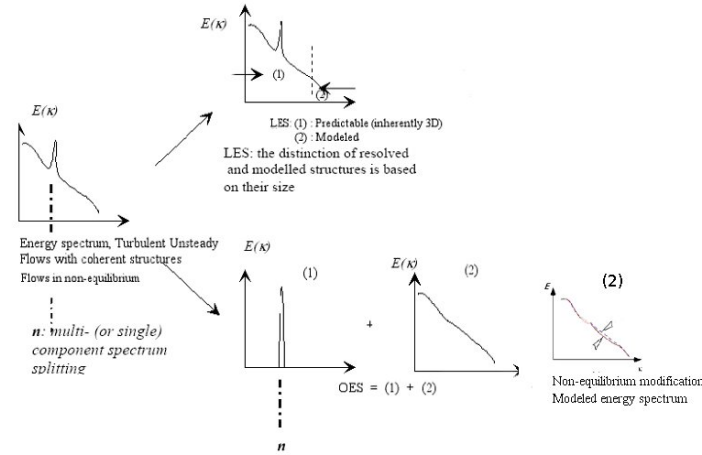


FIGURE 4.1 – Représentation schématique de la décomposition spectrale pour les approches LES et OES

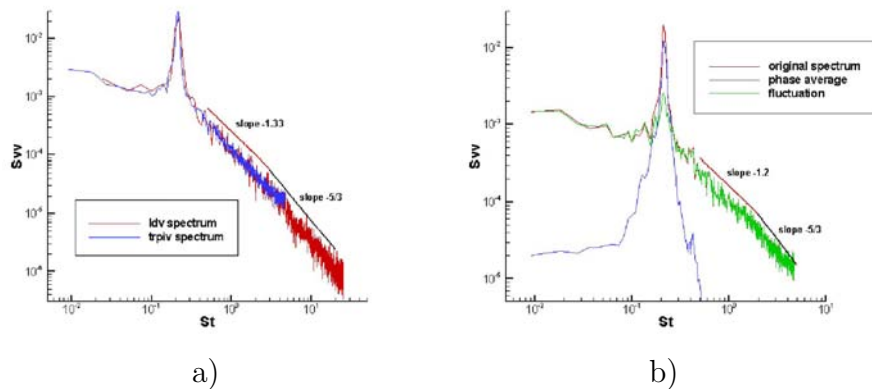


FIGURE 4.2 – Spectre de turbulence pour l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 140000$, $x/D = 1$, $y/D = 0,375$; modification de la pente dans la région inertielle à cause de l'interaction entre les structures cohérentes et la turbulence aléatoire; a) LDV, Djeridi *et al.* (2003) [54] et Time-Resolved PIV Braza *et al* (2006) [29]; b) décomposition en moyenne de phase du spectre de la T-R-PIV [29]

De ces faits, il est nécessaire de reconsidérer les échelles de la turbulence dans cette situation hors équilibre, par rapport à la modélisation statistique classique. Ces aspects sont les principes de base de l'approche OES. Il convient de préciser que si l'on utilise pour la partie du spectre à modéliser les modèles RANS sans reconsidération, on effectue une approche URANS.

Sur le plan physique, la décomposition spectrale de la OES correspond aux équations de Navier-Stokes en moyenne de phase. Dans les années '75-80, les premières études expérimentales utilisant la moyenne de phase faisaient intervenir une décomposition en trois termes, Reynolds & Hussain (1971) [146], peu pratique pour les équations à modéliser, et regroupée plus tard par Cantwell & Coles (1983) [32] en deux termes, comme suit.

La présence de structures cohérentes au sein de l'écoulement autour d'un corps se traduit par un caractère périodique ou quasi-périodique bien prononcé. Reynolds & Hussain (1971) [146] proposent une première décomposition entre les composantes cohérentes et aléatoires :

$$U_i(x_k, t) = \underbrace{\bar{U}_i(x_k)}_{(a)} + \underbrace{\tilde{U}_i(x_k, t)}_{(b)} + \underbrace{u_i(x_k, t)}_{(c)} \quad (4.165)$$

la partie (a) représente la moyenne temporelle indépendante du temps; (b) est la partie relative aux évolutions périodiques du processus, et (c) représente les fluctuations aléatoires correspondant au mouvement chaotique.

Cette décomposition en trois termes appliquée aux équations de Navier-Stokes conduit à des expressions trop complexes, difficiles à modéliser. Pour ces raisons, Cantwell (1975, 1981) [31, 193], puis Cantwell & Coles (1983) [32] proposent de regrouper les termes (a) et (b) de l'équation 4.165 comme suit :

$$U_i(x_k, t) = \langle U_i(x_k, t) \rangle + u_i(x_k, t) \quad (4.166)$$

le terme $\langle U_i(x_k, t) \rangle$, dit *moyenne de phase*, possède les propriétés suivantes :

$$\langle u_i(x_k, t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \langle U_i(x_k, t) \rangle \rangle = \langle U_i(x_k, t) \rangle$$

En appliquant cette décomposition dans le système des équations de Navier-Stokes, on obtient un système d'équations de même forme que les équations de Reynolds issues de la décomposition temporelle classique et faisant apparaître en plus le terme temporel. Néanmoins, à cause du fait que de la forme du spectre turbulent à modéliser (partie (2) figure 4.1) est différente de la forme du spectre en équilibre, la modélisation des tensions turbulentes en moyenne de phase doit être reconsidérée par rapport aux schémas de la modélisation statistique. Pour un écoulement incompressible, les équations de Navier-Stokes en moyenne de phase sont les suivantes :

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_i} = 0 \quad (4.167)$$

$$\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial t} + \langle U_i \rangle \frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\langle \rho \rangle} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle U_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} \quad (4.168)$$

où

$$\langle \tau_{ij} \rangle = \langle u_i u_j \rangle \quad (4.169)$$

$\langle u_i u_j \rangle$ étant les tensions de Reynolds en moyenne de phase.

S'il existe plusieurs pics de fréquences dus à différents événements périodiques, il s'agit d'un "multiple spectrum splitting", correspondant sur le plan physique à une moyenne d'ensemble, Braza *et al.* (2006) [29].

Les mesures expérimentales décrites précédemment indiquent une réduction de l'énergie cinétique turbulente par rapport au cas d'une turbulence en équilibre, et de ce fait, de l'échelle de longueur de turbulence, que l'on peut quantifier à l'aide de la modélisation au second ordre, Bouhadji *et al.*, (2002) [16], Bourdet *et al.* (2007) [17]. La modélisation au second ordre permet de quantifier l'énergie cinétique turbulente (somme des trois tensions normales) et de sa dissipation. D'autre part, en adoptant en première approximation l'hypothèse de Boussinesq,

$$-\langle u_i u_j \rangle = \nu_t \left(\frac{\partial \langle U_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle k \rangle \delta_{ij}$$

avec $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$, C_μ le coefficient de diffusivité fonction de l'échelle de longueur de la turbulence, $l = \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$ et de l'échelle de temps, $\frac{k}{\epsilon}$, nous pouvons évaluer le coefficient C_μ dans les régions du fort détachement des structures cohérentes. Cette étude a été réalisée par les thèses de P. Rodes (1998) [149] et de Y. Hoarau (2002) [76] au sein du groupe EMT2.

Le modèle au second ordre de Launder, Reece, Rodi (1975) [103], incluant la fonction d'amortissement de Shima (1988) [161] dans la région proche paroi a été utilisé. Le cas-test d'une aile NACA0012 à 20° d'incidence au nombre de Reynolds de 10^5 a été considéré, Berton *et al.* (2002) [14]. Le modèle au second ordre a donc fourni les variations du coefficient C_μ , tableau 4.7, indiquant des valeurs proches de 0.02, alors que dans le cas de turbulence en équilibre, $C_\mu = 0.09$.

X/C	Y/C	C_μ
0.3610^{-1}	0.3210^{-1}	0.0158
0.45	0.5710^{-1}	0.01859
0.9064	0.1510^{-1}	0.01938
1.41	-0.678	0.0178
1.23	0.11	0.0172
0.73	0.19	0.024

TABLE 4.7 – Détermination du coefficient C_μ par l'approche DRSM, Bouhadji *et al.* (2002) [16]; NACA0012, $\alpha = 20^\circ$, $Re = 10^5$

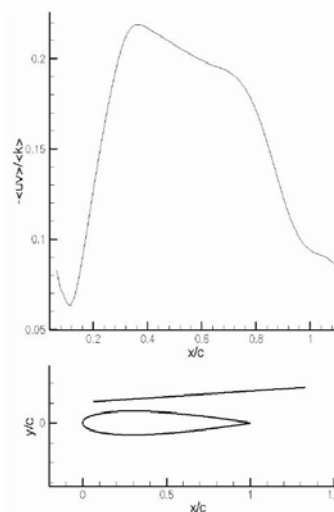


FIGURE 4.3 – Evolution longitudinale de $-\langle uv \rangle / k$ dans la zone décollée et dans le sillage, Berton *et al.* (2002) [14]

Cette réduction du coefficient de diffusivité est par ailleurs indiquée par la réduction du terme croisé du tenseur d'anisotropie, Bradshaw (1967) [19], pour une couche limite en non-équilibre à cause des effets de gradient de pression adverse. De plus, le tenseur d'anisotropie a été évalué dans la couche limite instationnaire et dans la région détachée à partir des DNS de Hoarau *et al.* (2003) [78]. La figure 4.3 montre que le terme diagonal du tenseur d'anisotropie turbulente, $b_{12} = -uv/k$, n'est pas constant et est beaucoup plus petit que dans les couches limites en équilibre, où $b_{12} \approx 0.30$ et est pratiquement constant. D'autre part, les lois d'amortissement de la turbulence adaptées à l'approche OES avaient fait l'objet d'un nombre de thèses de doctorat au sein du groupe EMT2/IMFT, Jin (1994) [87], Smaguina-Laval (1998) [167], Rodes (1998) [149] et Hoarau (2002) [76] pour des écoulements décollés autour d'ailes d'avion. Dans la présente thèse, nous utilisons la loi d'amortissement préconisée par Jin & Braza (1994) [88] au sein de l'OES, lors de l'utilisation du modèle $k - \epsilon$ de Chien :

$$f_\mu = 1 - \exp\left(-0.0002y^+ - 0.000065y^{+2}\right) \quad (4.170)$$

La décomposition spectrale proposée précédemment ainsi que la reconsidération des échelles de la turbulence, du coefficient C_μ et de la fonction d'amortissement f_μ constituent la base de l'approche OES, Organised Eddy Simulation, Dervieux *et al.* (1998) [53]. L'évaluation du coefficient C_μ à l'aide du modèle au second ordre est effectuée en version OES isotrope, en adoptant l'hypothèse de Boussinesq. Afin de renforcer le caractère anisotrope des tenseurs de la turbulence dans la région proche, une version OES *anisotrope* a été créée à l'aide du concept de viscosité turbulente tensorielle, induite par le modèle second ordre, à travers d'un critère de désalignement entre le tenseur d'anisotropie et le tenseur de déformation, Bourguet *et al.* (2007) [18]. Dans la présente thèse, la version de OES isotrope a été utilisée.

4.6 Detached Eddy Simulation, DES

Dans le contexte de l'approche hybride Detached Eddy Simulation, Spalart *et al.* (1997)[168], Travin *et al.* (2000) [189], on résoud les équations de URANS dans la région proche et dans la région lointaine, s'affranchissant ainsi d'interfaces. l'échelle de longueur de la turbulence dans l'équation de transport de l'énergie est choisie comme le minimum entre une échelle RANS et une autre LES. Autour de l'obstacle, l'échelle RANS est prise en compte alors que l'échelle LES est choisie dans les régions lointaines détachées :

$$l_{DES} = \min(l_{RANS}, C_{DES} \times \Delta) \quad (4.171)$$

où C_{DES} est une constante calibrée par la turbulence homogène isotrope (expérience de Comte-Bellot & Corrsin (1966) [40]), et Δ est la plus grande dimension d'une maille, $\Delta = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$.

Donc pour le modèle de Spalart-Allmaras, [169],

$$l_{DES} = \min(d_w, C_{DES} \times \Delta) \quad (4.172)$$

avec $C_{DES} = 0.65$. La modification de l'échelle de longueur entraîne l'augmentation du terme de dissipation dans l'équation de transport de la viscosité turbulente 4.12 :

$$D^\nu = \left(C_{\omega 1} f \omega - \frac{C_{b1}}{\kappa^2} f_{t2} \right) \left(\frac{\tilde{v}}{l_{DES}} \right)^2 \quad (4.173)$$

Dans le cadre du modèle $k - \omega$:

$$l_{DES} = \min \left(k^{1/2} / \beta^* \omega, C_{DES} \times \Delta \right) \quad (4.174)$$

Par conséquent, le terme de dissipation dans l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente augmente :

$$D^k = \frac{\rho k^{3/2}}{l_{DES}} \quad (4.175)$$

Dans le cas de formation de structures cohérentes proche de l'obstacle, comme présenté dans la première partie de ce chapitre, la région autour de l'obstacle est fortement soumise à des effets de non-équilibre, ce qui implique une modification de l'échelle de longueur URANS. Une réduction supplémentaire de l'énergie cinétique est donc nécessaire. Ceci est atteint en utilisant l'échelle l_{OES} dans le contexte des modèles DES/OES :

$$l_{OES} = \frac{k^{1/2}}{C_\mu \omega} \quad (4.176)$$

avec le coefficient C_μ réduit à 0.02.

Afin de valider les approches OES et DES, elles sont utilisées dans cette thèse pour simuler des écoulements fortement détachés et dont l'instabilité de Von-Kármán n'est pas purement antisymétrique. Le chapitre 6 présente l'étude de l'écoulement autour d'un cylindre en milieu confiné et d'une aile NACA0021 à 60 degrés d'incidence, deux cas-tests du programme européen DESIDER.

Chapitre 5

Transition laminaire turbulente de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation

Les effets de la rotation sur l'écoulement autour d'un cylindre sont exploités dans ce chapitre à partir de simulations numériques directes pour des nombres de Reynolds modérés. Le comportement du sillage et les différentes instabilités seront présentés en fonction du taux de rotation et du nombre de Reynolds. L'analyse des structures organisées est ensuite réalisée par la décomposition orthogonale propre, POD, ainsi que la reconstruction des champs instantanés à partir des modes POD les plus énergétiques

5.1 Transition 2D

La transition bi-dimensionnelle de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation est étudié pour des nombres de Reynolds entre 40 et 500, et des taux de rotation allant jusqu'à $\alpha = 6$. Les différents régimes observés sont discutés dans ce qui suit.

5.1.1 Ecoulements à des nombres de Reynolds inférieurs au nombre critique de la première bifurcation, $Re < 48$

Le but de ce paragraphe est d'observer l'effet de la rotation sur le sillage stationnaire dans le cas où le nombre de Reynolds est inférieur à 48, valeur critique à partir de laquelle l'écoulement derrière le cylindre devient instationnaire.

Lorsque le cylindre est fixe, le sillage est formé de deux tourbillons contrarotatifs symétriquement attachés au cylindre. Sous l'effet de la rotation, la symétrie est détruite mais le sillage reste stationnaire. Comme le montre la figure 5.1, lorsque la vitesse de rotation augmente, un seul tourbillon persiste, mais séparé du cylindre par une couche de fluide en rotation, puis disparaît même pour des taux de rotation très élevés. Le point de stagnation tourne dans la direction opposée à la rotation du cylindre. Le coefficient de traînée diminue en fonction du taux de rotation, et le coefficient de portance augmente à cause de l'effet Magnus de la rotation (figure 5.2).

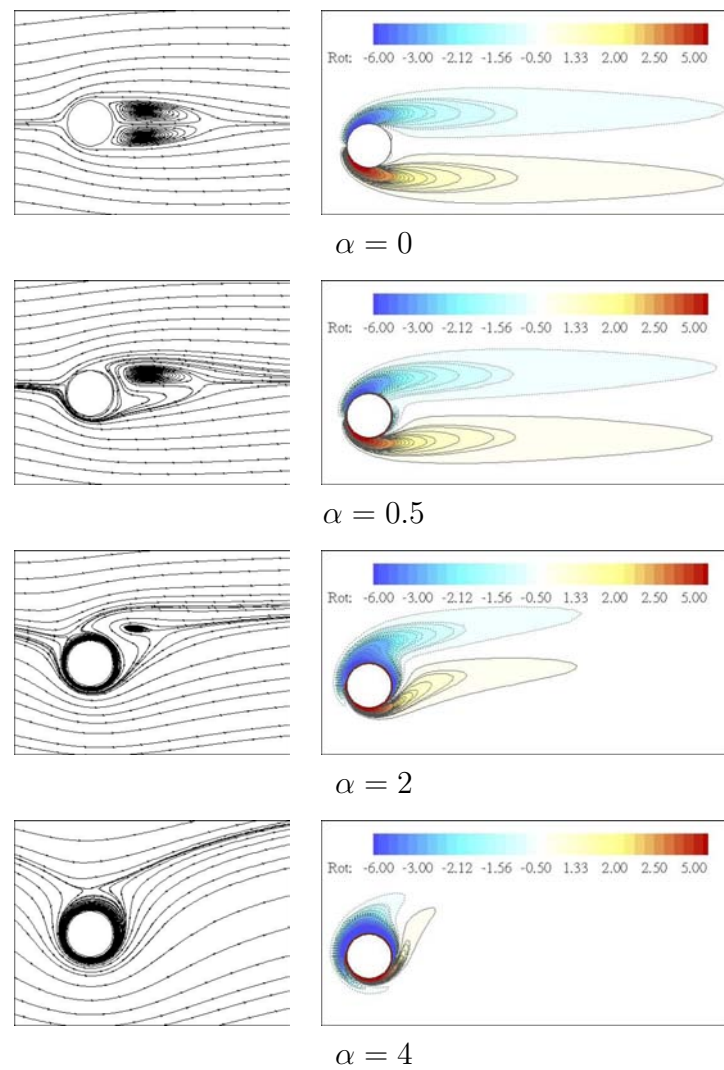


FIGURE 5.1 – Écoulement stationnaire à $Re = 40$ pour différents taux de rotation, à gauche, lignes de courant ; à droite, iso-contours de vorticité

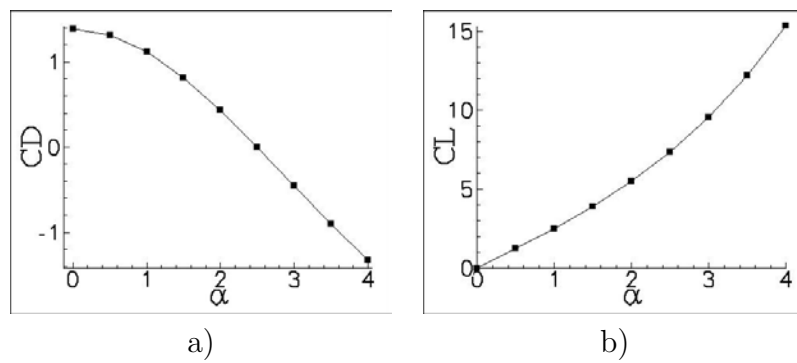


FIGURE 5.2 – Paramètres globaux en fonction de α , $Re = 40$; a) coefficient de traînée ; b) coefficient de portance

Par la suite, l'écoulement autour du cylindre est traité pour des nombres de Reynolds modérés, allant jusqu'à 500. Les mêmes différents régimes de transition sont observés en fonction du taux de rotation pour tous les nombres de Reynolds traités. Les différentes étapes pour le cas de $Re = 200$ seront présentées dans ce qui suit, ainsi que l'influence du nombre de Reynolds.

5.1.2 Etapes successives de la transition 2D pour $Re = 200$

A cause de la rotation, le problème dépend non seulement du nombre de Reynolds basé sur la vitesse à l'infini amont, $Re = \frac{U_\infty D}{\nu}$, mais également d'un nombre de Reynolds de rotation, $R_r = \frac{U_t D}{\nu}$ où U_t est la vitesse tangentielle, $U_t = \frac{D}{2}\omega$, ω étant la vitesse de rotation ($\alpha = \frac{U_t}{U_\infty}$). Donc quand α augmente, les deux échelles de vitesse U_∞ et U_t deviennent antagonistes à l'extrados du cylindre où l'écoulement est décéléré, et en synergie à l'intrados où le fluide est accéléré. Ceci augmente le nombre de Reynolds de rotation R_r et le cisaillement autour de l'obstacle dans la zone accélérée (intrados) et les diminue à l'extrados. On peut alors définir des nombres de Reynolds locaux dans les deux régions : $R_{lu} = \frac{(U_\infty - U_t)D}{\nu}$ à l'extrados, et $R_{li} = \frac{(U_\infty + U_t)D}{\nu}$ à l'intrados ; donc c'est le nombre de Reynolds local qui diminue du côté supérieur du cylindre sous l'effet de la rotation et non de la viscosité. Avec le changement du taux de rotation, le nombre de Reynolds "local" est modifié, ce qui est responsable de l'apparition et la suppression des différents modes d'instabilité comme il sera présenté dans ce qui suit.

Taux de rotation modérés $\alpha < 2,1$

Lorsque le cylindre est fixe, l'écoulement est instationnaire périodique. En une période, un tourbillon est lâché de chaque côté du cylindre, provoquant une allée tourbillonnaire de Von-Kármán. Les tourbillons sont de même taille et de même intensité. Lorsque le cylindre est en rotation, l'écoulement est décéléré à l'extrados et est facilement détaché, mais à l'intrados, il est accéléré et le détachement est retardé ou même supprimé. Le tourbillon qui se forme à l'intrados est plus petit et plus faible que celui de l'extrados. Pour des taux de rotation modérés, $\alpha < 2,1$, l'écoulement reste instationnaire périodique ; les effets de rotation sont confinés à l'écoulement au voisinage du cylindre. Le sillage ressemble à celui du cas du cylindre fixe, mais l'allée tourbillonnaire de Von-Kármán est de plus en plus décalée dans le sens de la rotation lorsque α augmente. L'évolution temporelle au cours d'une période de l'écoulement est montrée sur la figure 5.3. Dans ce qui suit, on appelle cette instabilité mode I.

Écoulement stationnaire $2,1 < \alpha < 4,35$

Lorsque le taux de rotation augmente, la vorticité negative du côté supérieur du cylindre devient plus dominante que celle du côté inférieur jusqu'à la suppression de l'allée tourbillonnaire pour $\alpha > \alpha_{L1}$ où $\alpha_{L1} \simeq 2,1$ pour $Re = 200$. La couche de fluide en rotation avec le cylindre devient de plus en plus épaisse et empêche le détachement tourbillonnaire, figure 5.4.

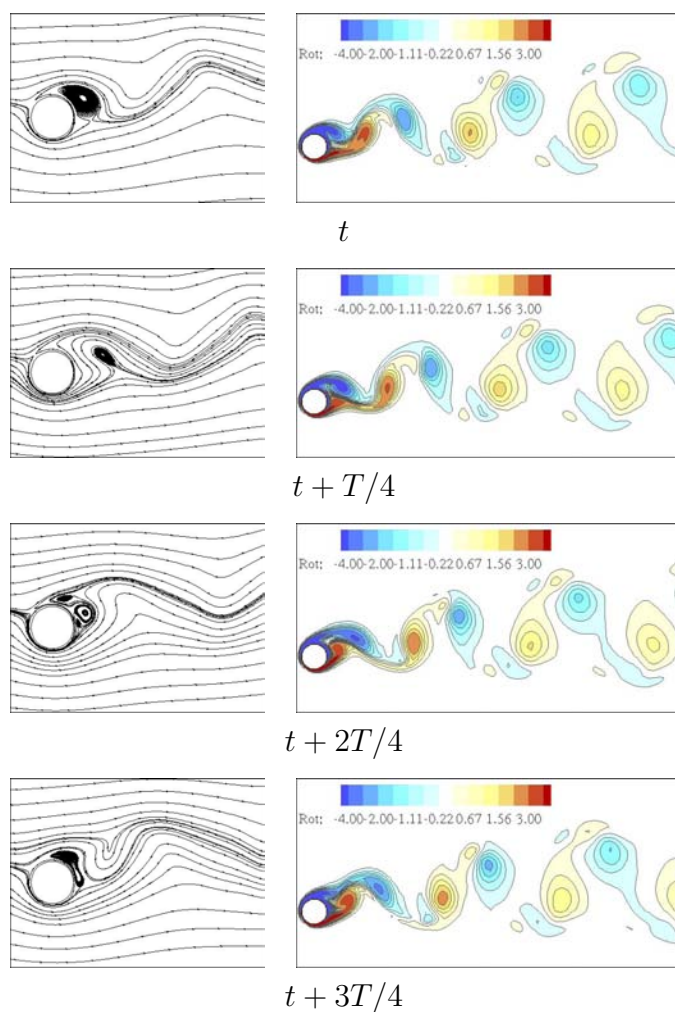


FIGURE 5.3 – Evolution temporelle au cours d'une période de la première instabilité, $Re = 200$, $\alpha = 1,5$; à gauche, lignes de courant ; à droite, iso-contours de vorticité

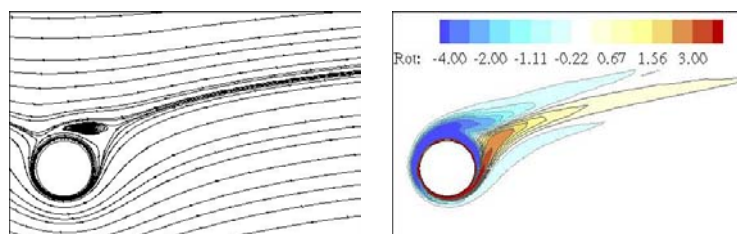


FIGURE 5.4 – Ecoulement stationnaire, $Re = 200$, $\alpha = 3$

Second mode d'instabilité, $4,35 < \alpha < 4,85$

Stojković *et al.* (2002) [175] furent les premiers à observer un second mode d'instabilité pour un intervalle de taux de rotation relativement élevé. Pour $\alpha > 4,35$, les effets visqueux induits par les gradients de vitesse dus à la rotation sont assez forts; les lignes de courant entourant le cylindre prennent une forme ovale; cette structure devient de plus en plus grande. L'écoulement force cette structure à s'allonger jusqu'au détachement, donnant lieu à une allée tourbillonnaire avec uniquement des tourbillons positifs (dans le sens de la rotation). La fréquence de cette instabilité, nommée mode II, est beaucoup plus petite que celle du mode I. L'évolution temporelle de l'écoulement est montrée sur la figure 5.6.

Écoulement stationnaire pour $\alpha > 4,85$

Au delà de $\alpha = 4,85$, l'écoulement est à nouveau stationnaire avec des lignes de courant fermées s'allongeant à l'extrados du cylindre, figure 5.5.

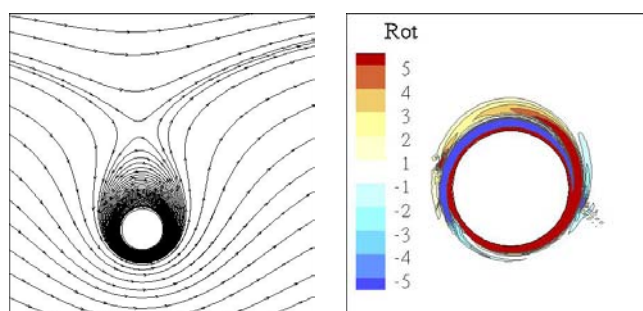
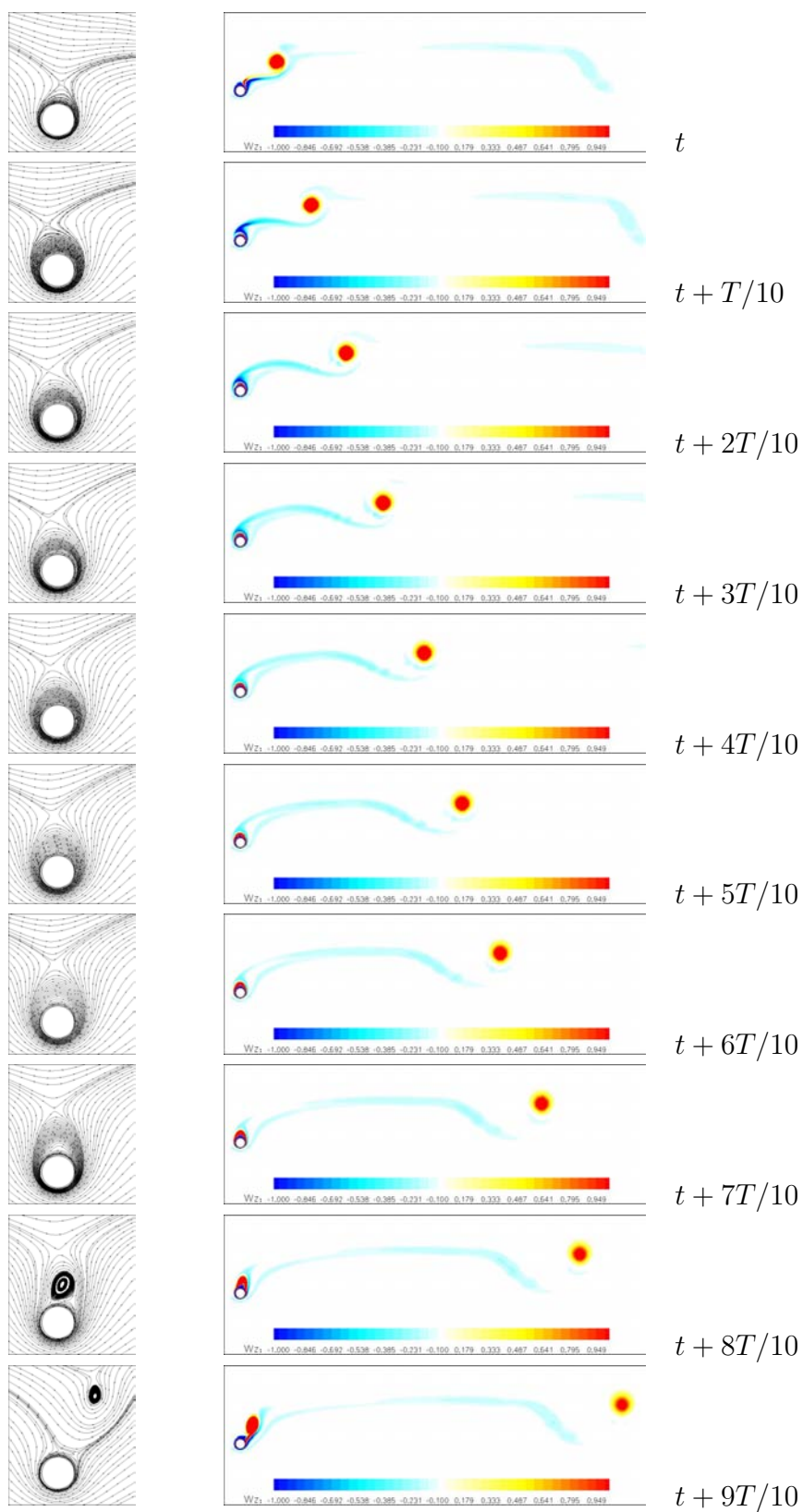


FIGURE 5.5 – Écoulement stationnaire, $Re = 200$, $\alpha = 6$

FIGURE 5.6 – Evolution temporelle de la seconde instabilité, $Re = 200$, $\alpha = 4,75$

5.1.3 Influence du nombre de Reynolds

Pour tous les nombres de Reynolds traités, les mêmes régimes apparaissent : l'allée tourbillonnaire de Von-Kármán est observée pour des taux de rotation $\alpha < \alpha_{L1}$, α_{L1} augmente en fonction du nombre de Reynolds. L'écoulement est stable pour $\alpha_{L1} < \alpha < \alpha_{L2}$. Le mode II apparaît dans l'intervalle $\alpha_{L2} < \alpha < \alpha_{L3}$. α_{L2} et α_{L3} diminuent lorsque le nombre de Reynolds augmente, puisque les effets visqueux sont réduits. La variation des taux de rotation critiques est montrée sur la figure 5.7 pour différents nombres de Reynolds, en comparaison avec les valeurs de Kang *et al.* (1999) [92], de Stojković *et al.* (2002,2003) [175, 176] et de Mittal & Kumar (2003) [123]. Cette figure montre que le nombre de Reynolds critique d'apparition de la première instabilité augmente au-delà de 48 lorsque le cylindre est en rotation.

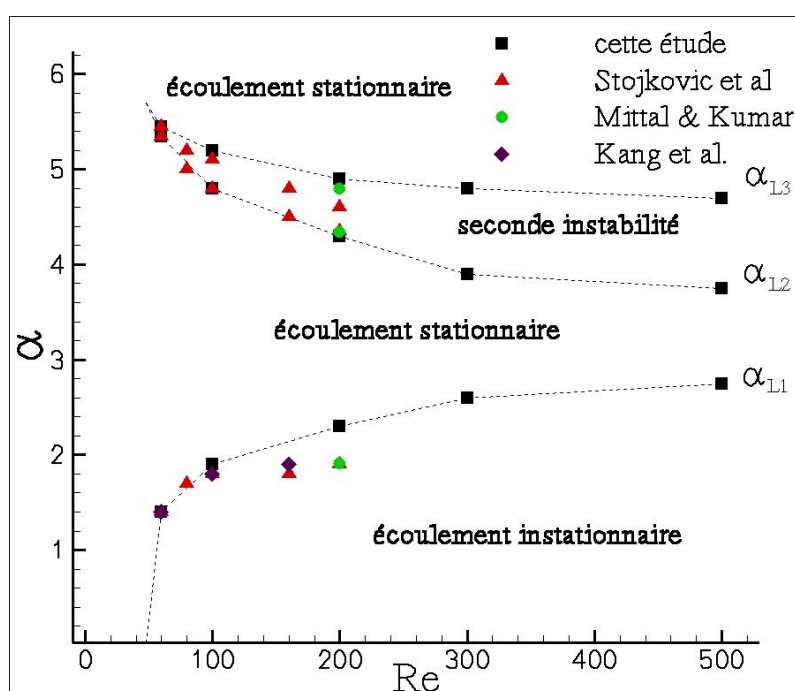
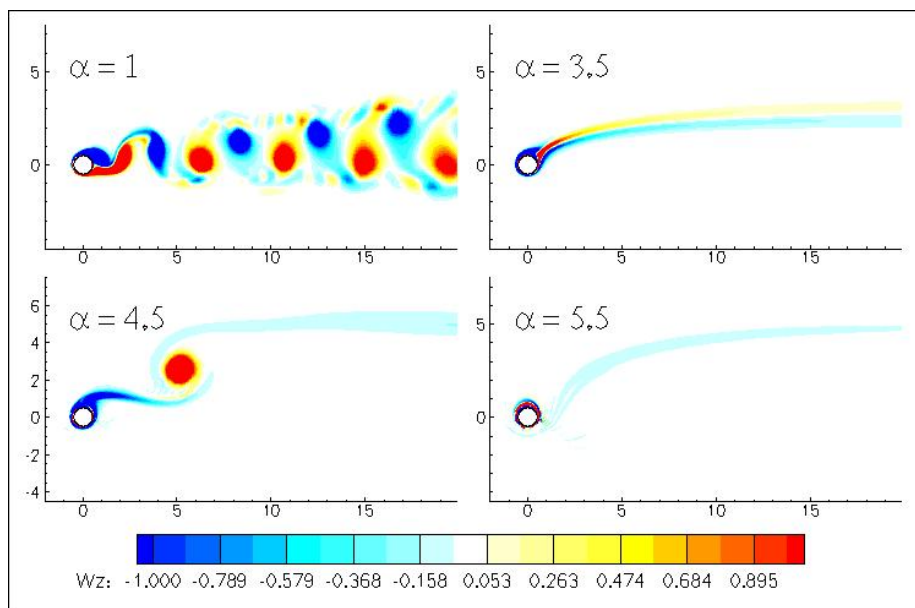
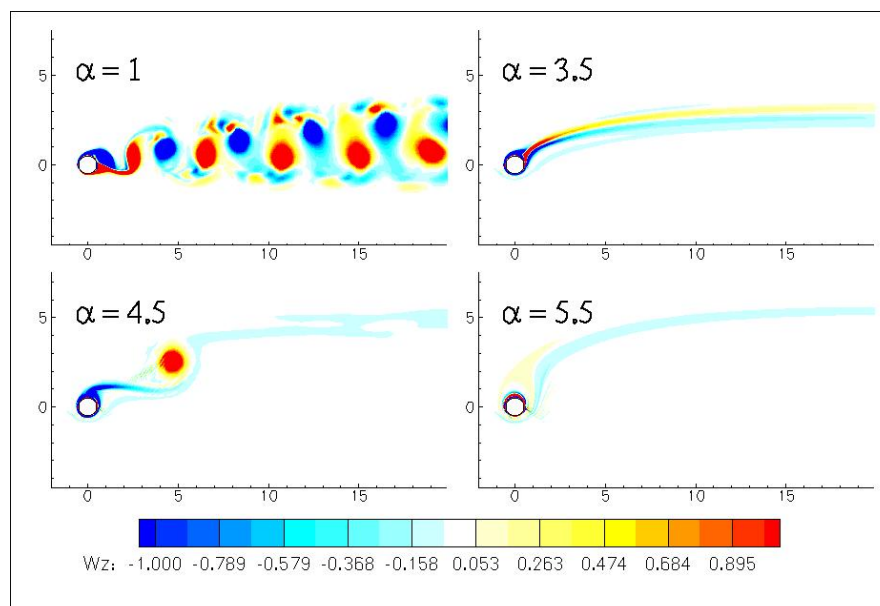


FIGURE 5.7 – Diagramme de stabilité pour différents nombres de Reynolds $Re \leq 500$ et taux de rotation $\alpha \leq 6$

Les figures 5.8 et 5.9 montrent les mêmes régimes de l'écoulement pour $Re = 300$ et $Re = 500$ respectivement.

FIGURE 5.8 – Différents régimes de l'écoulement pour $Re = 300$ FIGURE 5.9 – Différents régimes de l'écoulement pour $Re = 500$

5.1.4 Paramètres globaux

Lorsque le cylindre est fixe, la fréquence de fluctuation du coefficient de portance est égale à la moitié de celle du coefficient de traînée, ce qui se traduit par la forme 8 dans le diagramme de phase (C_D, C_L), figure 5.15. Les évolutions temporelles des coefficients sont montrées sur quelques périodes par la figure 5.10 pour $Re = 200$.

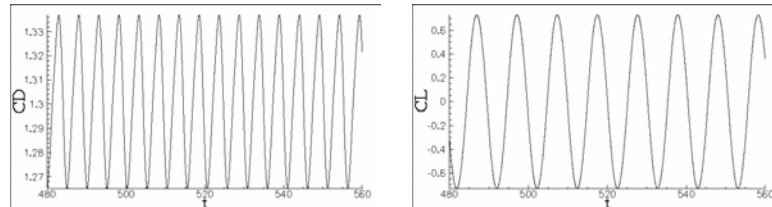


FIGURE 5.10 – Evolutions temporelles des coefficients de traînée et de portance, $Re = 200$, $\alpha = 0$

Dans le cas du mode I d'instabilité, la fréquence du lâcher tourbillonnaire est du même ordre que celle dans le cas du cylindre fixe. Le nombre de Strouhal est presque constant, figure 5.13, et diminue légèrement à la fin de cette première instabilité. Le coefficient de portance moyen croît proportionnellement à la vitesse de rotation, ce qui traduit bien l'effet Magnus. Quant au coefficient de traînée moyen, il diminue lorsque α augmente. Sous l'effet de la rotation, la fréquence de fluctuation de la traînée ne correspond plus au double de celle de la portance. Les évolutions temporelles des coefficients, figure 5.11, montrent que les deux coefficients évoluent avec la même fréquence. Le diagramme de phase (C_D, C_L) est formé par des courbes fermées montrant que l'écoulement est périodique. La position du diagramme de phase montre les valeurs moyennes des coefficients C_D et C_L , alors que sa taille indique les amplitudes de fluctuations correspondantes.

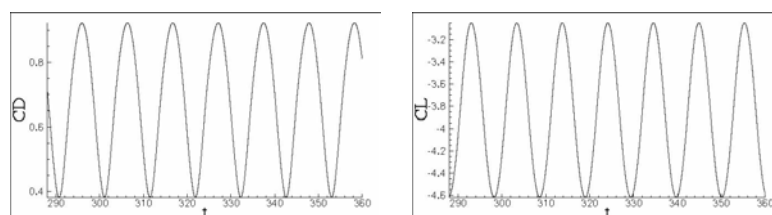


FIGURE 5.11 – Evolutions temporelles des paramètres globaux, $Re = 200$, $\alpha = 1.5$

Dans l'intervalle $\alpha_{L1} < \alpha < \alpha_{L2}$ où l'écoulement est stationnaire, le diagramme de phase se réduit à un point. Dans ce cas, la courbe représentant C_L en fonction de α montre une variation presque quadratique (figure 5.14). Egalement, le coefficient de traînée décroît et devient négatif pour des taux de rotation élevés.

Dans le cadre du mode II d'instabilité, l'écoulement est encore périodique avec une fréquence beaucoup plus faible que celle du mode I. Les évolutions temporelles des paramètres globaux, plus compliquées dans ce cas, sont montrées dans la figure 5.12. De fortes oscillations des coefficients de portance et de traînée sont observées comme le

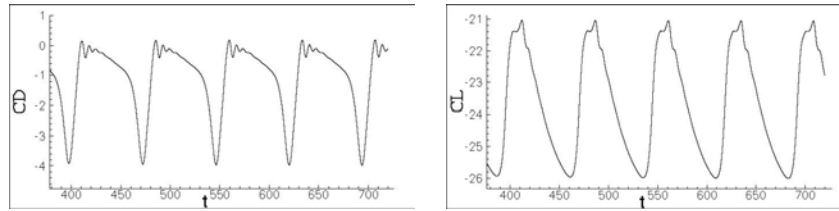


FIGURE 5.12 – Mode II, évolutions temporelles des coefficients de traînée et de portance, $Re = 200$, $\alpha = 4.75$

montre la figure 5.15. Pour des taux de rotation les plus élevés, la solution s'approche de celle de l'écoulement potentiel, et le coefficient de portance converge asymptotiquement vers $C_{Lpot} = 2\pi\alpha$. Les paramètres globaux moyens pour les différents nombres de Reynolds et taux de rotation étudiés sont présentés dans les tableaux 5.1 à 5.4 et dans les figures 5.14.

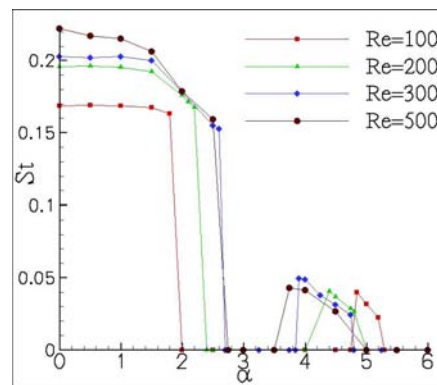


FIGURE 5.13 – Nombre de Strouhal $St = \frac{fD}{U_\infty}$ en fonction de α pour $Re = 100, 200, 300$ and 500

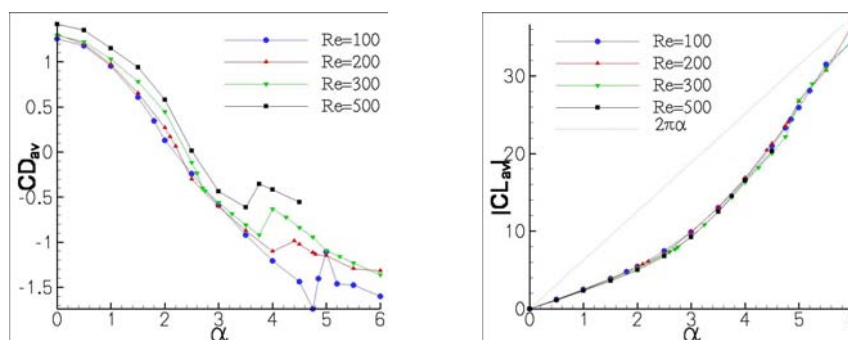


FIGURE 5.14 – Coefficients moyens de traînée C_{Dav} et de portance C_{Lav} en fonction de α pour différents nombres de Reynolds; En pointillés, $C_{Lpot} = 2\pi\alpha$

α	St	C_{Dmoy}	$\ C_{Lmoy}\ $	$\frac{C_{Dmax}-C_{Dmin}}{2}$	$\frac{C_{Lmax}-C_{Lmin}}{2}$
0	0.1689	1.253	0.000	0.016	0.355
0.5	0.1693	1.177	1.207	0.064	0.376
1	0.1688	0.954	2.492	0.121	0.398
1.5	0.1676	0.608	3.899	0.140	0.401
1.8	0.1632	0.346	4.813	0.132	0.339
2	—	0.129	5.440	—	—
2.5	—	-0.241	7.440	—	—
3	—	-0.591	9.924	—	—
3.5	—	-0.920	12.997	—	—
4	—	-1.209	16.667	—	—
4.5	—	-1.440	20.950	—	—
4.75	—	-1.740	23.323	—	—
4.85	0.0398	-1.406	24.414	1.370	1.395
5	0.0318	-1.105	25.902	1.657	1.770
5.2	0.0223	-1.462	28.101	1.407	1.725
5.5	—	-1.475	31.503	—	—
6	—	-1.601	34.520	—	—

TABLE 5.1 – Paramètres globaux en fonction du taux de rotation, $Re = 100$

α	St	C_{Dmoy}	$\ C_{Lmoy}\ $	$\frac{C_{Dmax}-C_{Dmin}}{2}$	$\frac{C_{Lmax}-C_{Lmin}}{2}$
0	0.1960	1.301	0.000	0.035	0.731
0.5	0.1963	1.197	1.194	0.110	0.741
1	0.1954	0.975	2.465	0.206	0.746
1.5	0.1923	0.653	3.882	0.270	0.784
2	0.1762	0.266	5.474	0.311	0.799
2.1	0.1715	0.169	5.748	0.290	0.779
2.2	0.1675	0.062	6.086	0.270	0.734
2.5	—	-0.304	7.145	—	—
3	—	-0.602	9.824	—	—
3.5	—	-0.874	13.057	—	—
4	—	-1.101	16.852	—	—
4.4	0.0407	-0.988	20.410	2.053	2.186
4.5	0.0369	-1.026	21.259	2.064	2.239
4.75	0.0284	-1.119	23.539	2.064	2.469
4.8	0.0398	-1.134	24.027	1.970	2.614
5	—	-1.152	27.730	—	—
5.5	—	-1.295	30.735	—	—
6	—	-1.320	36.672	—	—

TABLE 5.2 – *idem*, $Re = 200$

α	St	C_{Dmoy}	$\ C_{Lmoy}\ $	$\frac{C_{Dmax}-C_{Dmin}}{2}$	$\frac{C_{Lmax}-C_{Lmin}}{2}$
0	0.2027	1.292	0.000	0.060	0.819
0.5	0.2020	1.224	1.118	0.129	0.864
1	0.2030	1.031	2.368	0.239	0.934
1.5	0.2000	0.781	3.773	0.330	1.028
2	0.1784	0.446	5.245	0.370	1.080
2.5	0.1553	-0.116	6.941	0.316	0.812
2.7	—	-0.404	7.687	—	—
2.75	—	-0.431	7.940	—	—
3	—	-0.560	9.314	—	—
3.25	—	-0.687	10.841	—	—
3.5	—	-0.808	12.526	—	—
3.75	—	-0.921	14.373	—	—
4	0.0487	-0.633	16.327	1.976	2.543
4.25	0.0378	-0.724	18.198	2.114	3.059
4.5	0.0311	-0.838	20.014	2.296	3.189
4.75	0.0243	-0.945	22.138	2.482	3.525
5	—	-1.092	26.890	—	—
5.25	—	-1.159	28.980	—	—
5.5	—	-1.230	30.955	—	—
6	—	-1.360	34.756	—	—

TABLE 5.3 – *idem*, $Re = 300$

α	St	C_{Dmoy}	$\ C_{Lmoy}\ $	$\frac{C_{Dmax}-C_{Dmin}}{2}$	$\frac{C_{Lmax}-C_{Lmin}}{2}$
0	0.2224	1.419	0.000	0.131	1.197
0.5	0.2174	1.350	1.098	0.236	1.249
1	0.2152	1.150	2.337	0.343	1.242
1.5	0.2065	0.941	3.618	0.393	1.250
2	0.1788	0.580	4.982	0.509	1.317
2.5	0.1593	0.013	6.803	0.421	0.934
3	—	-0.434	9.237	—	—
3.5	—	-0.615	12.528	—	—
4	0.0414	-0.418	16.530	1.850	2.703
4.5	0.0265	-0.555	20.318	2.348	3.340

TABLE 5.4 – *idem*, $Re = 500$

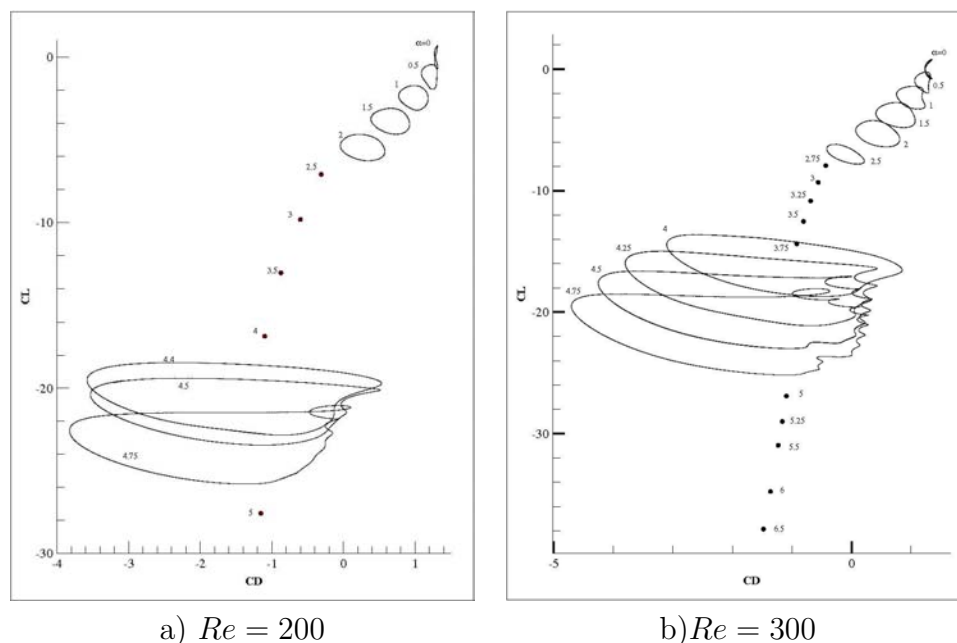


FIGURE 5.15 – diagrammes de phase (C_D , C_L) pour différents taux de rotation α

5.1.5 Champs moyens temporels

Ce paragraphe discute de l'évolution du champ moyen temporel de l'écoulement, en fonction du taux de rotation. La figure 5.16 montre les lignes de courant définissant le champ moyen pour $Re = 100, 300$ et 500 en fonction de la variation de α . On remarque l'apparition des tourbillons secondaires qui sont les prémices des tourbillons de zone de mélange lorsque le nombre de Reynolds augmente. Ces tourbillons ont été observés pour $Re = 1000$ par Braza *et al.* (1986) [25]. La dissymétrie due à la rotation est observée. Ces champs moyens permettent l'évaluation de la longueur de recirculation et des coordonnées des points d'arrêt et de stagnation. Le point de stagnation (X_0, Y_0) indique la longueur de recirculation du champ moyen, qui diminue en fonction de α et de Re , figure 5.17. Le point de stagnation derrière le cylindre se déplace dans le sens contraire à la rotation lorsque α augmente (θ diminue, figure 5.17), et il s'éloigne du cylindre à cause de la couche de fluide qui le sépare du cylindre et s'épaissit en fonction du taux de rotation. Pour un taux de rotation donné, la distance d entre le point de stagnation et le cylindre diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente puisque l'effet relatif de la rotation diminue.

La figure 5.18 montre les champs moyens pour $Re = 300$ et des taux de rotation allant jusqu'à 6. Pour les α les plus élevés, le point de stagnation devient pratiquement sur l'axe vertical du cylindre (à $\theta \simeq 90$), et il s'éloigne selon cet axe quand la vitesse de rotation augmente comme le montre la figure 5.19.

La figure 5.20 montre les profils de vitesse des champs moyens pour différents nombres de Reynolds et taux de rotation. Ces profils permettent d'illustrer l'épaisseur de la couche limite. La figure 5.21a montre que la vitesse maximale U_{max} diminue en fonction de α et augmente en fonction de Re . L'épaisseur de la couche limite Y_{max} au point où la vitesse est maximale est montrée sur la figure 5.21b. Y_{max} diminue en fonction du nombre de Reynolds mais augmente en fonction du taux de rotation.

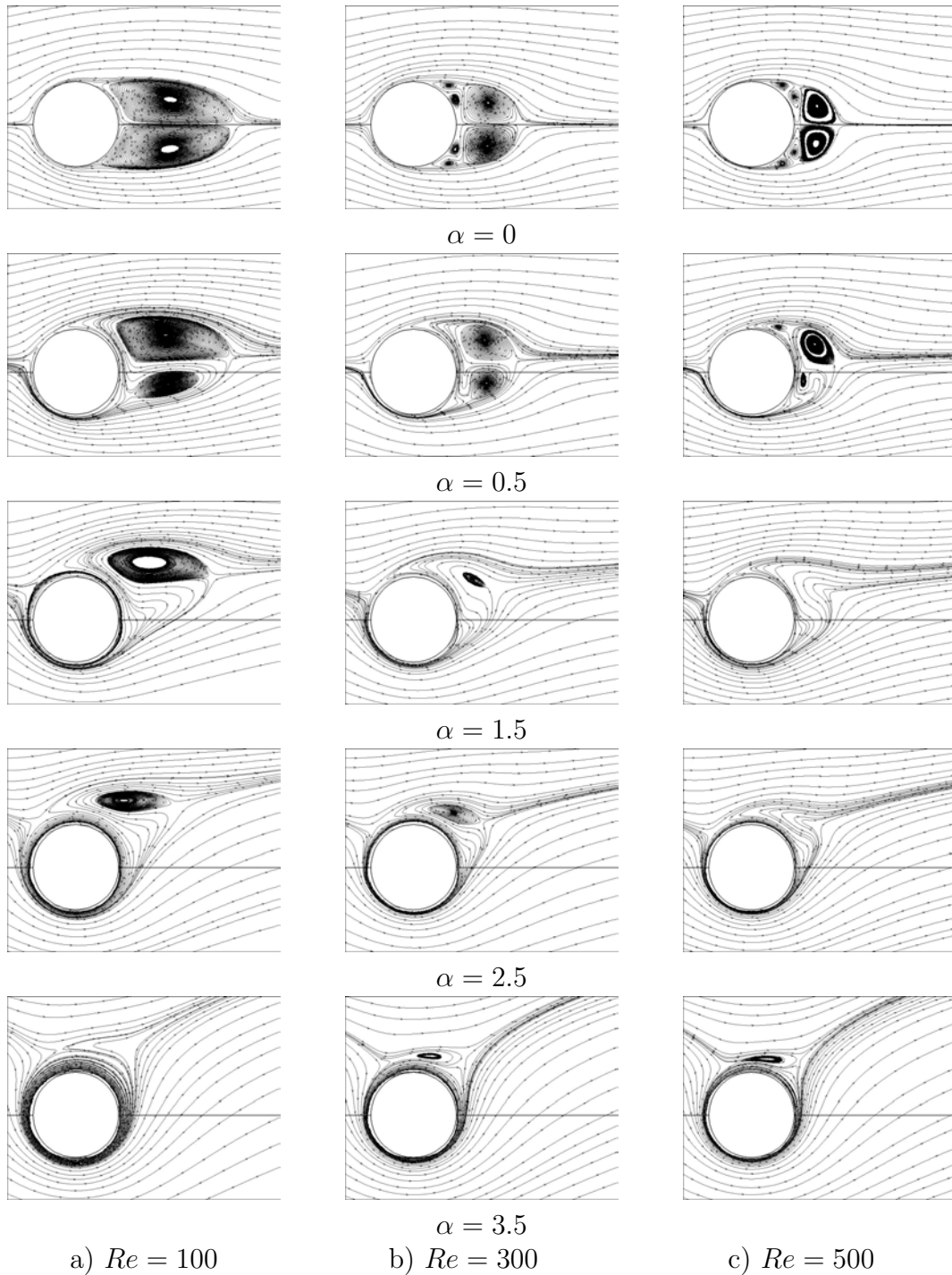


FIGURE 5.16 – Lignes de courant des champs moyens

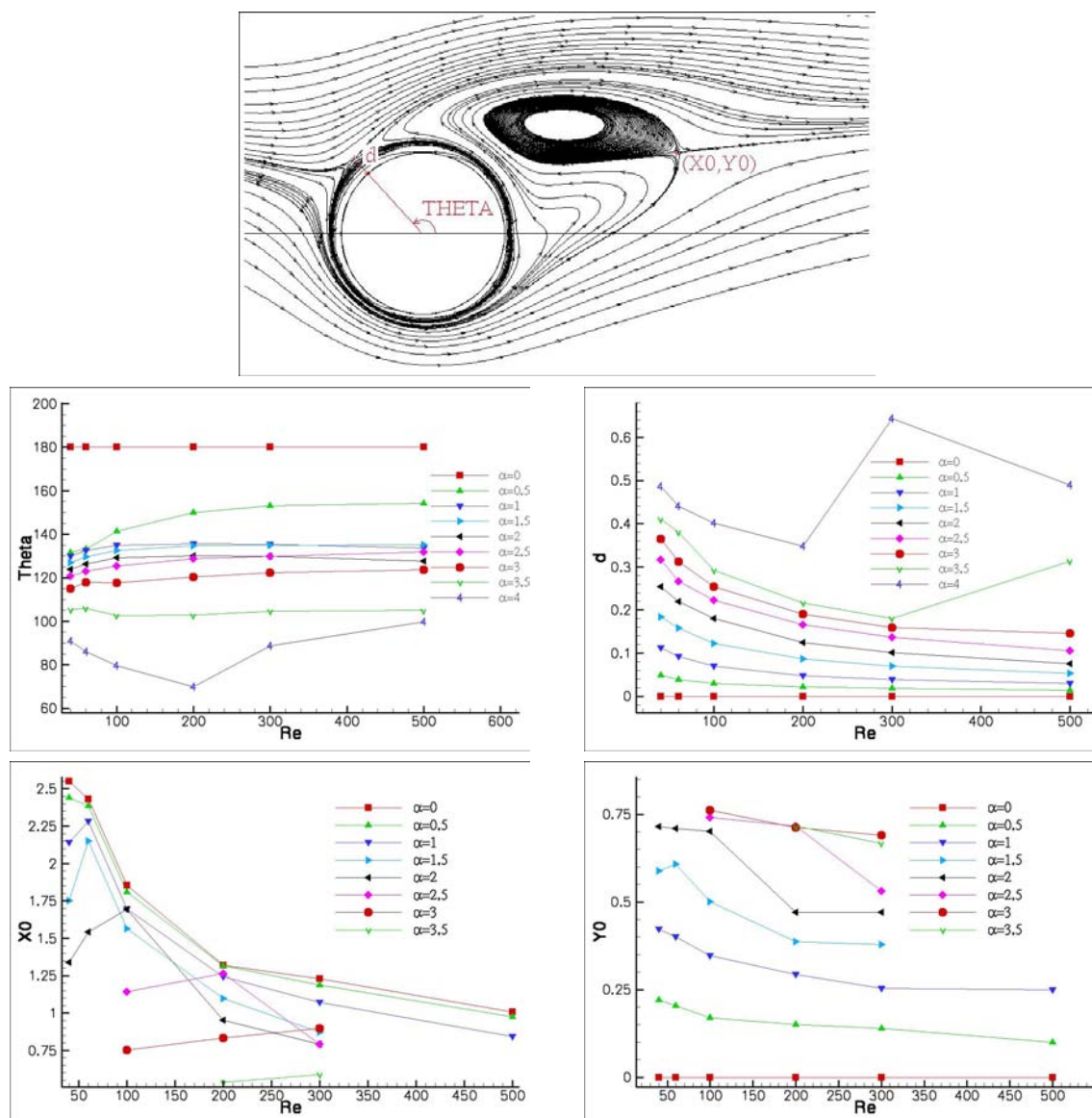
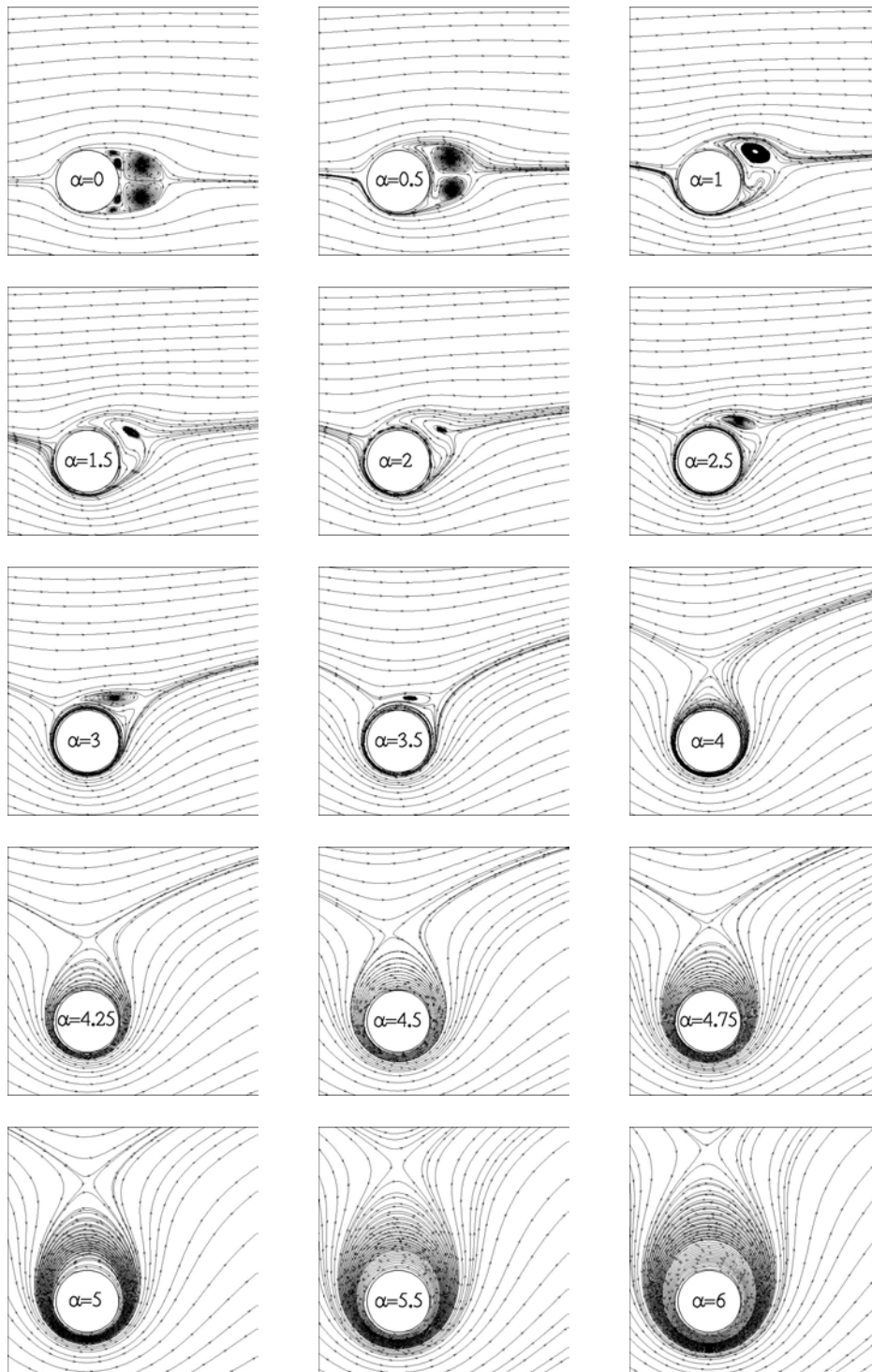


FIGURE 5.17 – Déplacement des points d'arrêt et de stagnation des champs moyens en fonction de α et Re

FIGURE 5.18 – Champs moyens en fonction de la vitesse de rotation, $Re = 300$

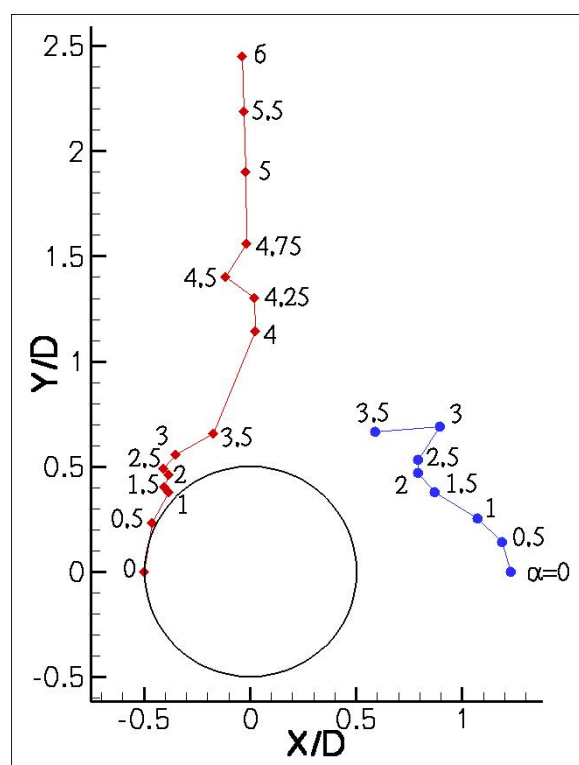


FIGURE 5.19 – Déplacement des points de stagnation en fonction de α , $Re = 300$

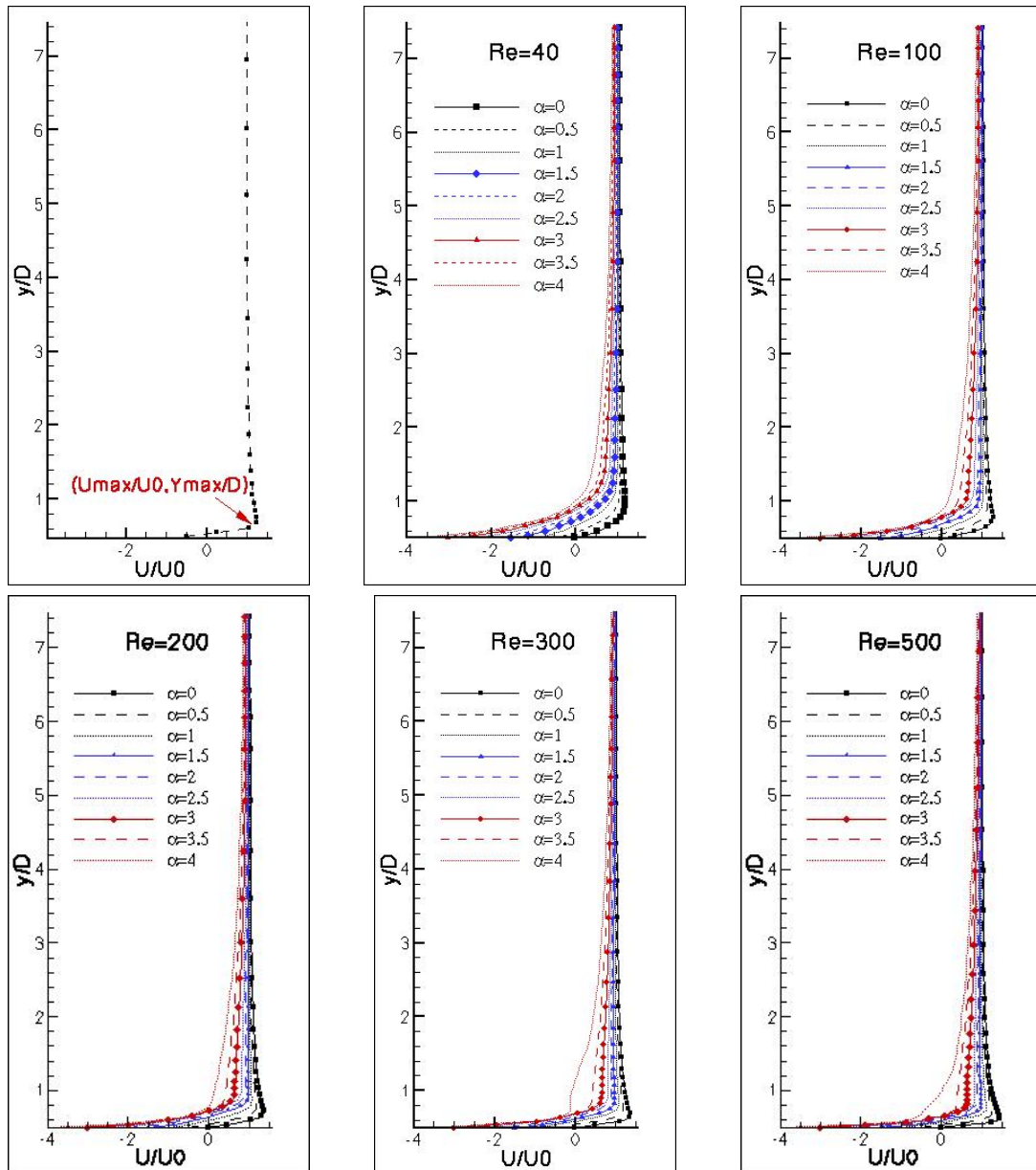
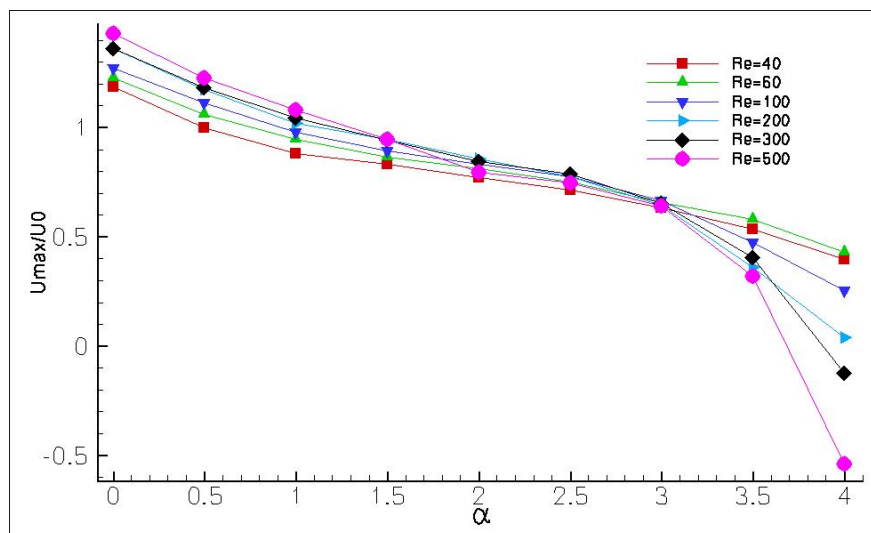
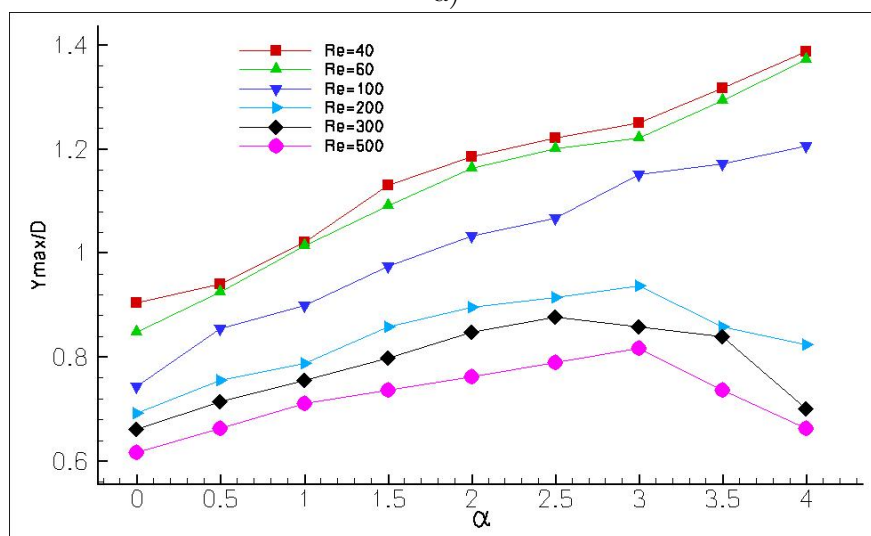


FIGURE 5.20 – Profils de vitesse des champs moyens à $X/D = 0$, pour différents Re et α



a)



b)

FIGURE 5.21 – U_{max} et l'épaisseur de couche limite maximale Y_{max} des champs moyens en fonction de Re et α

5.2 Transition 3D

Lorsque le cylindre est fixe, on observe des effets 3D à partir du nombre de Reynolds de l'ordre de 150. L'évolution de la composante transversale de la vitesse w en fonction du temps est formée par une amplification linéaire suivie d'une évolution non-linéaire qui mène vers une saturation comme reporté par Persillon & Braza (1998) [135], figure 5.27a. L'amplification de w annonce le développement de l'instabilité secondaire qui se manifeste par l'ondulation transversale des rouleaux de Von Kármán comme observé pour $Re = 200$, $\alpha = 0$, figure 5.23a. La longueur d'onde λ_z/D montrée sur la figure 5.22a est égale à 4.

A $Re = 200$ et $\alpha = 1,5$, ces effets ne sont plus observés; l'évolution de w , figure 5.27b montre une atténuation drastique. La rotation atténue donc l'instabilité secondaire et l'écoulement devient bi-dimensionnel comme montré sur la figure 5.23b. La rotation augmente les nombres de Reynolds critiques d'apparition de l'instabilité 3D. En effet, à un nombre de Reynolds plus élevé et un taux de rotation plus bas, par exemple, $Re = 300$ et $\alpha = 0,5$, les effets tri-dimensionnels sont observés, figure 5.23c. Dans l'intervalle où l'écoulement est stable, $2 < \alpha < 4,35$ pour $Re = 200$, l'écoulement reste stationnaire à partir des simulations 3D, figure 5.23d.

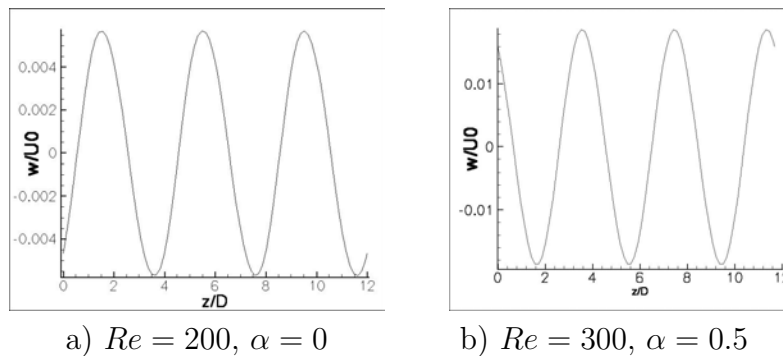


FIGURE 5.22 – Ondulation transversale de la composante de vitesse w , montrant une longueur d'onde de $\lambda_z/D = 4$

Concernant l'intervalle du mode II d'instabilité, $4,35 < \alpha < 4,85$ pour $Re = 200$, une simulation 3D a été menée au taux de rotation $\alpha = 4,75$ dans le but de déceler les effets de rotation. La figure 5.24 montre la phase de démarrage. De fortes perturbations sont observées dans la région proche du cylindre. Ceci est également observé par la forte ondulation transversale de la composante de vitesse w , figure 5.25.

Le plan médian du champ tri-dimensionnel est comparé à l'écoulement 2D sur la figure 5.26, dans le but d'extraire les effets purement 3D de ceux qui sont 2D. On peut remarquer les structures secondaires qui apparaissent plus fortement dans les résultats 3D; également les structures de Von-Kármán sont plus allongées. Cette différence n'est pas remarquable dans le cas où la rotation empêche le développement de l'instabilité secondaire $Re = 200$, $\alpha = 1.5$.

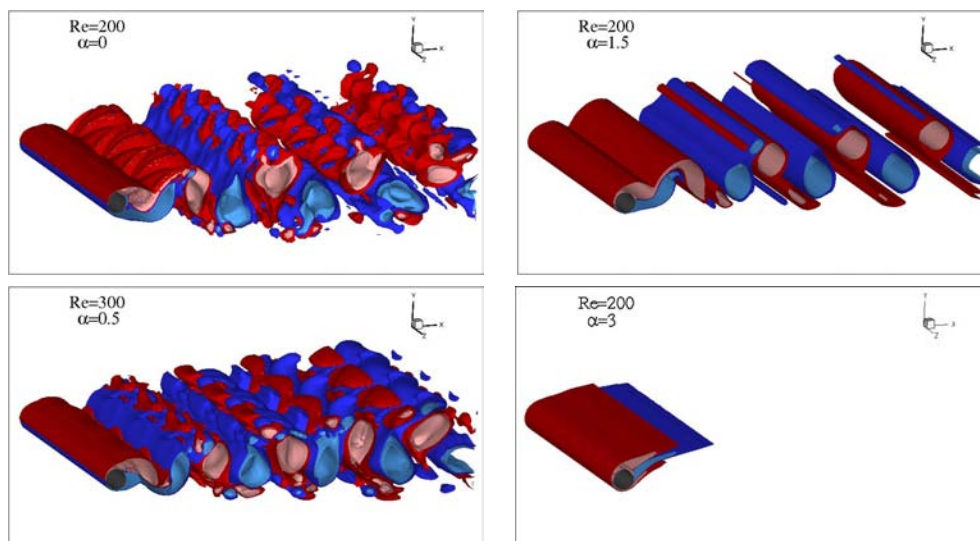


FIGURE 5.23 – Champs 3D ; atténuation de l’instabilité secondaire sous l’effet de la rotation pour $\alpha = 1, 5$ et 3 à $Re = 200$

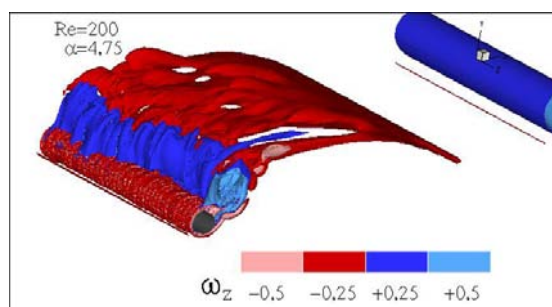


FIGURE 5.24 – Prémices des perturbations dues à la rotation, $\alpha = 4, 75$, $Re = 200$, iso-surfaces de vorticités

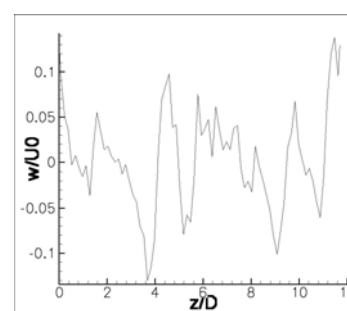


FIGURE 5.25 – Ondulation transversale de w , $\alpha = 4, 75$, $Re = 200$

5.2.1 Paramètres globaux

Les coefficients moyens de portance et de traînée et le nombre de Strouhal sont présentés sur le tableau 5.5. Les paramètres obtenus par les simulations 3D sont comparés à ceux obtenus par les simulations 2D. Les simulations bi-dimensionnelles génèrent un coefficient de traînée supérieur à celui obtenu par le calcul tri-dimensionnel. Cette observation va dans le même sens que celle de Beaudan & Moin (1994) [12] et Persillon (1995) [134]. La comparaison du nombre de Strouhal fait apparaître un déficit dans le cas tri-dimensionnel lorsque le cylindre est fixe. Lorsque le cylindre est en rotation, le nombre de Strouhal croît légèrement par les simulations tri-dimensionnelles. Les différentes valeurs du nombre de Strouhal sont montrées sur la courbe (Re, St) , figure 5.28, pour différents nombre de Reynolds. Cette courbe montre la modification du mode d’instabilité sous l’effet de la rotation.

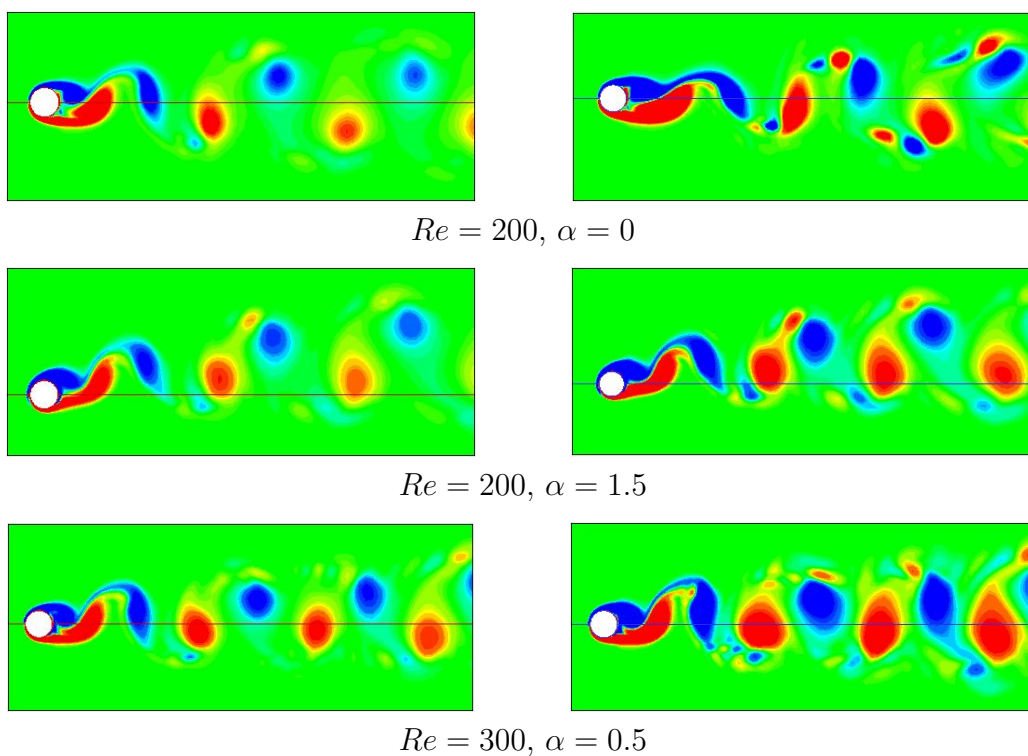


FIGURE 5.26 – Comparaison des champs obtenus par des simulations 2D, gauche, et 3D, droite

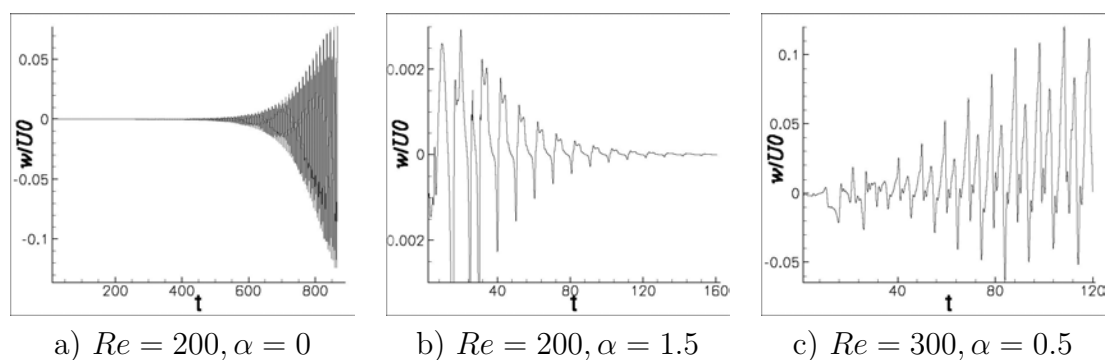


FIGURE 5.27 – Evolutions temporelles de la composante w , amplification et atténuation en fonction du nombre de Reynolds et de la vitesse de rotation

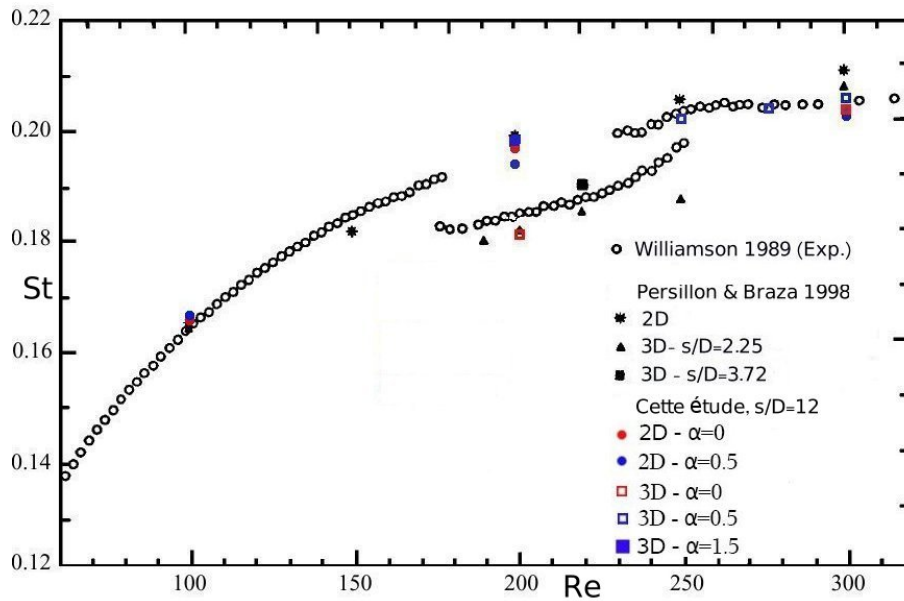


FIGURE 5.28 – Courbe $St = f(Re)$; comparaison avec la courbe expérimentale de Williamson (1989) [199], et les résultats des DNS de Persillon & Braza (1998) [135]

		C_l	C_d	St
$Re = 200, \alpha = 0$	2D	0	1.301	0.1960
	3D	0	1.206	0.1810
$Re = 200, \alpha = 1.5$	2D	3.882	0.653	0.1923
	3D	3.880	0.628	0.1965
$Re = 300, \alpha = 0.5$	2D	1.118	1.224	0.2020
	3D	1.133	1.152	0.2041

TABLE 5.5 – Comparaison des paramètres globaux obtenus par simulations 2D et 3D

5.2.2 Évaluation du nombre de Reynolds critique de l'instabilité secondaire

Modèle de Landau

L'amplification de l'instabilité secondaire sous l'effet de la rotation du cylindre peut être étudiée par le modèle global de Landau, Provansal *et al.* (1987) [142] :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \underbrace{\sigma_r A}_{\text{croissance linéaire}} - \underbrace{l_r |A^3|}_{\text{non linéaire}} \quad (5.1)$$

Les parties réelles des coefficients σ_r et l_r sont évaluées à partir des DNS qui donnent l'amplitude de variation d'une quantité - ici w - en fonction d'une période (enveloppe), figure 5.29, gauche. σ_r est calculé par la variation de $\log(A)$ en fonction du temps, figure 5.29, droite. Pour $Re = 200$, $\alpha = 0$, $\sigma_r = 0.013$ et pour $Re = 300$, $\alpha = 0.5$, $\sigma_r = 0.041$. L'évaluation de σ_r permet alors le calcul du coefficient d'amplification non-linéaire l_r proche du seuil de saturation :

$$l_r = \sigma_r \times \frac{A}{|A^3|} \quad (5.2)$$

Le signe de l_r indique la nature sous-critique ou supercritique de l'instabilité étudiée. Les valeurs 3.055 et 2.314 sont obtenues pour $Re = 200$ et 300 respectivement, donc l'instabilité est sous-critique comme mentionné également par Henderson & Barkley (1996) ([75]). Ce résultat montre que la rotation change la nature de l'instabilité dans le cas où $Re = 300$ où pour $\alpha = 0$, l'instabilité est supercritique.

Nombre de Reynolds critique pour $\alpha = 0,5$

A l'aide du terme σ_r de l'équation de Landau 5.1, le nombre de Reynolds critique pour l'apparition de l'instabilité secondaire a été évalué pour $\alpha = 0.5$, en menant des simulations tri-dimensionnelles proche de la valeur seuil, de telle manière que $\frac{Re - Re_{cr}}{Re_{cr}}$ soit un petit paramètre. σ_r s'écrit alors en fonction du nombre de Reynolds critique :

$$\sigma_r = k (Re - Re_{cr}) \quad (5.3)$$

Selon Provansal *et al.* (1987) [142], k représente une fréquence réduite et σ_r s'écrit aussi comme suit :

$$\sigma_r = (1/5) \left(\nu / D^2 \right) (Re - Re_{cr}) \quad (5.4)$$

où ν est la viscosité cinématique et D le diamètre du cylindre.

Le modèle de Landau est vérifié pour la présente bifurcation, σ_r varie donc *linéairement* en fonction du nombre de Reynolds ; ceci a été examiné pour $\alpha = 0.5$ en menant des simulations numériques pour $Re = 250, 265, 275, 285$ et 300. La figure 5.30 montre la variation de σ_r en fonction du nombre de Reynolds. Le coefficient correspondant à $Re = 300$ montre qu'on est encore un peu loin du seuil critique, donc il n'est pas pris en compte dans l'évaluation du Reynolds critique. La variation des autres quatre points correspond à une ligne droite, coupant l'axe du Re à la valeur 219,8. Ainsi, le nombre de Reynolds critique sous l'effet de la rotation est plus élevé que dans le cas de $\alpha = 0$,

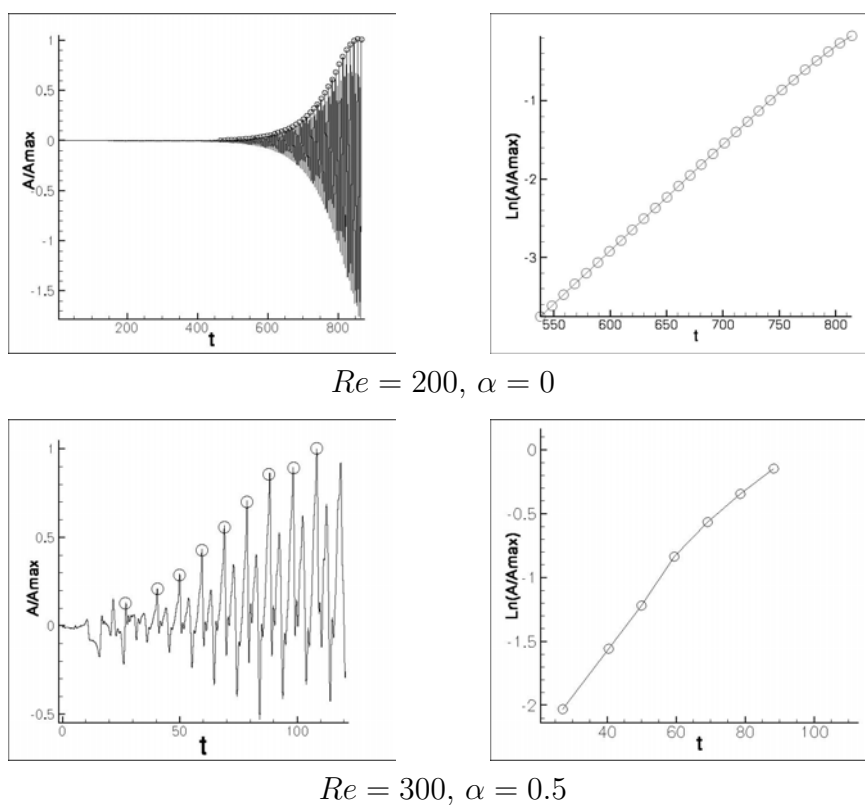


FIGURE 5.29 – Gauche, enveloppe de l'évolution temporelle de w ; droite, détermination de σ_r

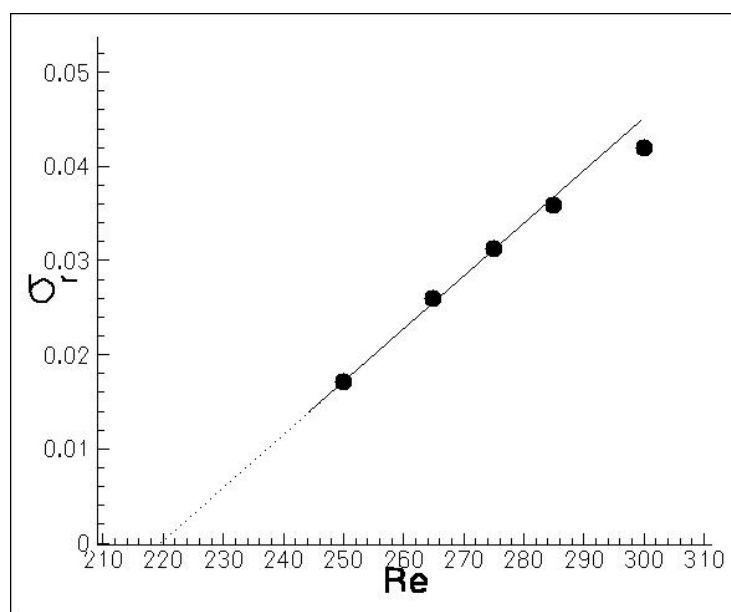


FIGURE 5.30 – Evaluation du nombre de Reynolds critique associé à l'instabilité secondaire à $\alpha = 0.5$

évalué par Persillon & Braza (1998) [135].

L'analyse des effets de rotation par des simulations bi- et tri-dimensionnelles a mis en évidence le caractère stabilisant de la rotation, qui modifie les nombres de Reynolds critiques d'apparition et de suppression des différents modes d'instabilité. Le paragraphe suivant analyse l'effet de la rotation sur l'énergie des modes organisés par la décomposition en modes propres orthogonaux (P.O.D.) ainsi que la reconstruction des champs à partir des modes les plus énergétiques en deux et trois dimensions.

5.3 Décomposition en modes propres orthogonaux, P.O.D.

Après une introduction sur la formulation mathématique de la P.O.D, Proper Orthogonal Decomposition, ce paragraphe analyse les modes les plus énergétiques de la P.O.D. dans le cadre de l'écoulement autour du cylindre fixe ou en rotation, à partir des simulations bi- et tri-dimensionnelles. Les champs instantanés sont ensuite reconstruits à l'aide des modes les plus énergétiques de la P.O.D.

5.3.1 Définition

La décomposition en modes propres a été introduite en premier lieu séparément par Karhunen (1946) [93], et Loève (1955) [109], qui cherchaient à déterminer les vecteurs propres maximisant la quantité suivante :

$$\max \frac{\langle |\vec{u} \cdot \vec{\psi}|^2 \rangle}{\langle \vec{\psi} \cdot \vec{\psi} \rangle} = \frac{\langle |\vec{u} \cdot \vec{\phi}|^2 \rangle}{\langle \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} \rangle} \quad (5.5)$$

l'opérateur $\langle \dots \rangle$ désignant une moyenne (moyenne de phase, d'ensemble...).

La décomposition de Karhunen-Loève, connue sous le nom de décomposition orthogonale en modes propres (Proper Orthogonal Decomposition, P.O.D.), a été proposée par Lumley (1967) [115], dans le but d'étudier les écoulements turbulents, et plus particulièrement, extraire les structures cohérentes évoluant en leur sein. Alors la P.O.D. est devenue un outil permettant de décomposer un champ de vitesse fluctuant sur une base définie de vecteurs propres. La vitesse instantanée peut alors s'exprimer comme une combinaison linéaire des fonctions de cette base, également appelées vecteurs propres ou modes propres :

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_n(\vec{x}, t) \quad (5.6)$$

les $\vec{\phi}_n(\vec{x}, t)$ sont des variables déterministes du temps et de l'espace.

De là, Lumley introduit le terme de structures cohérentes, pour montrer que dans la majorité des cas, un certain ordre de structures existe dans les écoulements turbulents. Les structures cohérentes semblent correspondre à une combinaison linéaire des premiers modes propres.

5.3.2 Formulation mathématique

La P.O.D. cherche les fluctuations les plus énergétiques d'un vecteur aléatoire (le champ de vitesse instantané $\vec{u}_i(\vec{x}, t)$). Pour résoudre le problème de Karhunen-Loève, on utilise les principes du calcul variationnel, et on est amené à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} \int R_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t') \phi_n(\vec{x}', t') d\vec{x}' dt' = \lambda \phi_n(\vec{x}, t) \quad (5.7)$$

$R_{ij}(\vec{x}, \vec{x}', t, t')$ est le tenseur des corrélations spatiales : $\langle u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}', t') \rangle$, avec \vec{x} pouvant représenter les trois coordonnées de l'espace.

Les solutions de ces équations forment une base orthonormale $\{\phi_n\}$, où $n \in \mathbb{N}$ est à dimension infinie. Le vecteur aléatoire peut alors être exprimé comme une combinaison linéaire des éléments de cette base :

$$\vec{u}_i(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \vec{\phi}_{i,n}(\vec{x}, t) \quad (5.8)$$

où les coefficients a_n sont des variables aléatoires définies par :

$$a_n = \int_{\Omega} \int \vec{u}_i(\vec{x}, t) \vec{\phi}_{i,n}(\vec{x}, t) d\vec{x} dt \quad (5.9)$$

Ces coefficients sont décorrélés entre eux :

$$\langle a_n a_m \rangle = \lambda_n \delta_{n,m} \quad (5.10)$$

La valeur propre λ_n de l'équation précédente correspond à l'énergie cinétique totale du n^{eme} mode. L'énergie cinétique totale du champ de vitesse peut être donc exprimée en fonction des coefficients a_n uniquement :

$$\int_{\Omega} \int \langle \vec{u}_i \vec{u}_i \rangle d\vec{x} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n a_n \rangle \quad (5.11)$$

La base construite par la P.O.D. est optimale pour toute autre décomposition du champ $\vec{u}_i(\vec{x}, t)$ sur une base orthonormale arbitraire $\{\psi_n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$ de telle manière que :

$$\vec{u}_i(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \vec{\psi}_{i,n}(\vec{x}, t) \quad (5.12)$$

Donc, $\forall N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^N \langle a_n a_n \rangle \geq \sum_{n=1}^N \langle b_n b_n \rangle \quad (5.13)$$

De cette manière, la décomposition construite à partir de la base P.O.D. converge plus rapidement que toute autre décomposition du champ aléatoire, en terme d'énergie. La formulation précédente est la plus générale et la plus complète concernant la décomposition en modes propres orthogonaux. Néanmoins, cette formulation est un peu compliquée, et il existe des méthodes plus simples, consistant à séparer l'espace et le temps. Les principales méthodes ont été explicités par Faghani (1996) [61].

P.O.D. séparable

Dans le cadre de nos simulations, au lieu de s'intéresser aux propriétés statistiques de la vitesse, on préfère regarder l'écoulement dans un cadre déterministe ou quasi-déterministe. De ce fait, on regarde la dynamique du système physique qui génère $U(\vec{x}, t)$. $U(\vec{x}, t)$ est ensuite décomposé en une partie spatiale que nous appelons topos ($\phi(\vec{x})$) et une partie temporelle appelée chronos ($\psi(t)$) :

$$\vec{u}_i(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(t) \vec{\phi}_{i,n}(\vec{x}) \quad (5.14)$$

On parle alors de la P.O.D. séparable. Les vecteurs propres correspondants sont alors calculés avec les noyaux suivants :

$$l_{ij}(\vec{x}, \vec{x}') = \int u_i(\vec{x}, t) u_j(\vec{x}', t) dt \quad (5.15)$$

$$s(t, t') = \int u_i(\vec{x}, t) u_i(\vec{x}, t') d\vec{x} \quad (5.16)$$

Les équations aux valeurs propres associées à ces deux noyaux s'expriment sous la forme suivante :

$$\int l_{ij}(\vec{x}, \vec{x}') \phi_{i,n}(\vec{x}') d\vec{x}' = a_n^2 \phi_{i,n}(\vec{x}) \quad (5.17)$$

$$\int s(t, t') \psi_n(t') dt' = a_n^2 \psi_n(t) \quad (5.18)$$

Dans ce cas, $\lambda_n = a_n^2$, et les vecteurs propres vérifient les propriétés d'orthonormalité suivantes :

$$\int \psi_n(t) \psi_m(t) dt = \delta_{n,m} \quad (5.19)$$

$$\int \phi_n(\vec{x}) \phi_m(\vec{x}) d\vec{x} = \delta_{n,m} \quad (5.20)$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Méthode des snapshots

L'approche utilisée pour résoudre le problème aux valeurs propres est la méthode des snapshots, introduite par Sirovish (1987) [165]. Cette méthode est basée sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice M des snapshots ou champs instantanés utilisés. En effet, les N champs de u , v et w sur un domaine discrétisé avec $NP = n_x \times n_y \times n_z$ points du maillage, peuvent s'écrire dans la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} u_1(X_1) & u_2(X_1) & \cdots & u_N(X_1) \\ u_1(X_2) & u_2(X_2) & \cdots & u_N(X_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(X_{NP}) & u_2(X_{NP}) & \cdots & u_N(X_{NP}) \\ v_1(X_1) & v_2(X_1) & \cdots & v_N(X_1) \\ v_1(X_2) & v_2(X_2) & \cdots & v_N(X_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1(X_{NP}) & v_2(X_{NP}) & \cdots & v_N(X_{NP}) \\ w_1(X_1) & w_2(X_1) & \cdots & w_N(X_1) \\ w_1(X_2) & w_2(X_2) & \cdots & w_N(X_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_1(X_{NP}) & w_2(X_{NP}) & \cdots & w_N(X_{NP}) \end{bmatrix}$$

Le tenseur des corrélations, de dimension $3 \times NP$ dans le cas 3D s'écrit ainsi :

$$R = \frac{dx \, dy \, dz}{N} M.M^T$$

et l'équation aux valeurs propres s'écrit :

$$\frac{dx \, dy \, dz}{N} M.M^T \phi = \lambda \phi$$

En multipliant à gauche l'équation précédente par M^T , on obtient :

$$\frac{dx \, dy \, dz}{N} M^T.M.M^T \phi = \lambda M^T.\phi$$

$$\frac{dx \, dy \, dz}{N} M^T.M\phi' = \lambda \phi'$$

On voit que $M.M^T$ de dimension $(3NP)^2$ a les mêmes valeurs propres que $M^T.M$ de dimension N^2 . On a donc intérêt à choisir pour le calcul des valeurs propres la matrice de plus petite dimension. Les valeurs propres des deux matrices considérés sont liées par les relations suivantes :

$$\phi' = M^T \phi$$

$$\phi = M \phi'$$

Ainsi, l'utilisation d'une matrice de plus petite taille réduit la taille mémoire à allouer et le temps de calcul.

Dans ce qui suit, l'analyse des structures organisées sous l'effet de la rotation est réalisée par la P.O.D. à partir des simulations bi- et tri-dimensionnelles.

5.3.3 Analyse des modes bi-dimensionnels principaux sous l'effet de la rotation

Dans le but d'étudier les effets de la rotation sur les structures organisées, la P.O.D. est appliquée sur les résultats des simulations dans le cadre du mode I pour $Re = 200$,

$\alpha = 0$ et $\alpha = 1,5$, ainsi que le second mode d'instabilité, le mode II pour $\alpha = 4,75$. L'influence du nombre de Reynolds a été également étudiée à partir de la P.O.D. pour $Re = 300$, $\alpha = 1,5$. Concernant le mode I, 500 champs instantanés ont été stockés dans le but de les exploiter par la P.O.D. Quant au mode II, 1000 champs instantanés ont été utilisés puisque la fréquence du lâcher tourbillonnaire est plus basse dans le cadre du mode II.

Le tableau 5.6 montre la contribution en énergie des 20 premiers modes fournis par la P.O.D. Pour tous les cas traités, le premier mode est le plus énergétique et sa contribution en énergie augmente en fonction du taux de rotation, de 95,79% pour $\alpha = 0$ à plus de 99% pour $\alpha = 4,75$ au même nombre de Reynolds. Pour le même taux de rotation, $\alpha = 1,5$, la contribution en énergie du premier mode diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. Le processus chaotique, qui caractérise les premières étapes vers la turbulence, est donc plus fort et plus complexe, et il est certain que lorsque le nombre de Reynolds augmentera davantage, cette différence sera plus claire.

La figure 5.31 montre la cascade énergétique en échelle *Log* pour $Re = 200$ pour les trois taux de rotation traités. On peut remarquer, qu'à l'exception du premier mode, les modes vont par paires ; par exemple, les modes 2 et 3 ont des contributions énergétiques du même ordre, de même pour les modes 4 et 5, et ainsi de suite. Dans le cadre de la seconde instabilité, la décroissance des derniers modes n'est pas aussi rapide que celle observée pour des taux de rotation plus bas. Pour cette seconde instabilité qui est donc plus complexe, on aura besoin d'un nombre supérieur pour reconstruire l'écoulement comme il sera expliqué ci-dessous.

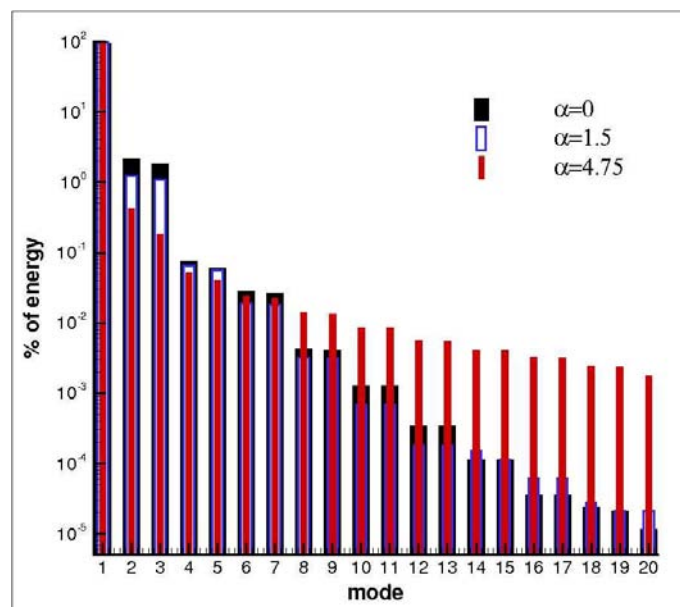


FIGURE 5.31 – Evolution de l'énergie des 20 premiers modes, $Re = 200$, différents α

Mode	energie (%)			
	$Re = 200$		$Re = 300$	
	$\alpha = 0$	$\alpha = 1.5$	$\alpha = 4.75$	$\alpha = 1.5$
1	95.786199	97.502739	99.162083	97.103789
2	2.180571	1.234796	0.424853	1.394955
3	1.829157	1.096263	0.183662	1.259867
4	0.076683	0.064915	0.052209	0.096638
5	0.059989	0.055774	0.040679	0.084412
6	0.028322	0.018844	0.024023	0.024242
7	0.027039	0.017986	0.022420	0.021642
8	0.004258	0.003190	0.014061	0.005686
9	0.004136	0.003137	0.013553	0.005246
10	0.001287	0.000693	0.008614	0.001145
11	0.001269	0.000686	0.008497	0.001079
12	0.000349	0.000179	0.005638	0.000384
13	0.000346	0.000179	0.005532	0.000372
14	0.000114	0.000151	0.004131	0.000151
15	0.000113	0.000112	0.004052	0.000150
16	0.000036	0.000061	0.003255	0.000068
17	0.000035	0.000061	0.003183	0.000067
18	0.000024	0.000028	0.002447	0.000030
19	0.000021	0.000021	0.002361	0.000030
20	0.000012	0.000021	0.001786	0.000012

TABLE 5.6 – Contributions énergétiques des 20 premiers modes de la P.O.D., résultats 2D

Topologie des modes les plus énergétiques

La figure 5.32 montre les cinq premiers topes pour $Re = 200$, $\alpha = 0$ et $\alpha = 1,5$ respectivement. On remarque que le premier mode correspond au champ moyen (voir paragraphe 5.1.5). Les modes 2 et 3, constituant une paire, sont formés de structures possédant un axe d'antisymétrie passant par le centre du cylindre, horizontal pour $\alpha = 0$, et incliné dans le sens de la rotation pour $\alpha = 1,5$. Ces modes incluent la partie antisymétrique de l'écoulement, et ressemblent aux champs de la composante V de la vitesse. Le tourbillon attaché au cylindre peut tourner dans les deux sens, selon le signe du chronos correspondant. Ce sens peut être interprété selon la prépondérance de la vorticité négative ou positive. Les structures de ces modes représentent des lobes alternés, séparés par une distance λ_x qui correspond à la longueur d'onde séparant deux tourbillons de l'allée de Von Kármán. Les modes 4 et 5 correspondent à la partie symétrique de l'écoulement, et ressemblent aux iso- U . Les structures sont symétriques dans le cas du cylindre fixe. L'axe de ces structures est dévié sous l'effet de la rotation pour $\alpha = 1,5$, ligne rouge sur la figure 5.32. La symétrie n'est plus conservée puisque les lobes inférieurs sont plus atténués que les lobes supérieurs.

Concernant le mode II de plus basse fréquence, $Re = 200$, $\alpha = 4,75$, les modes sont représentés sur la figure 5.33. On retrouve que le premier mode correspond au champ moyen, Les modes 2 et 3 forment une paire montrant l'instabilité dans la zone supérieure du cylindre. Les modes 4 et 5 sont formés par un nombre double de structures que les modes 2 et 3. On ne retrouve plus les lobes inférieurs comme dans le cas de la première instabilité.

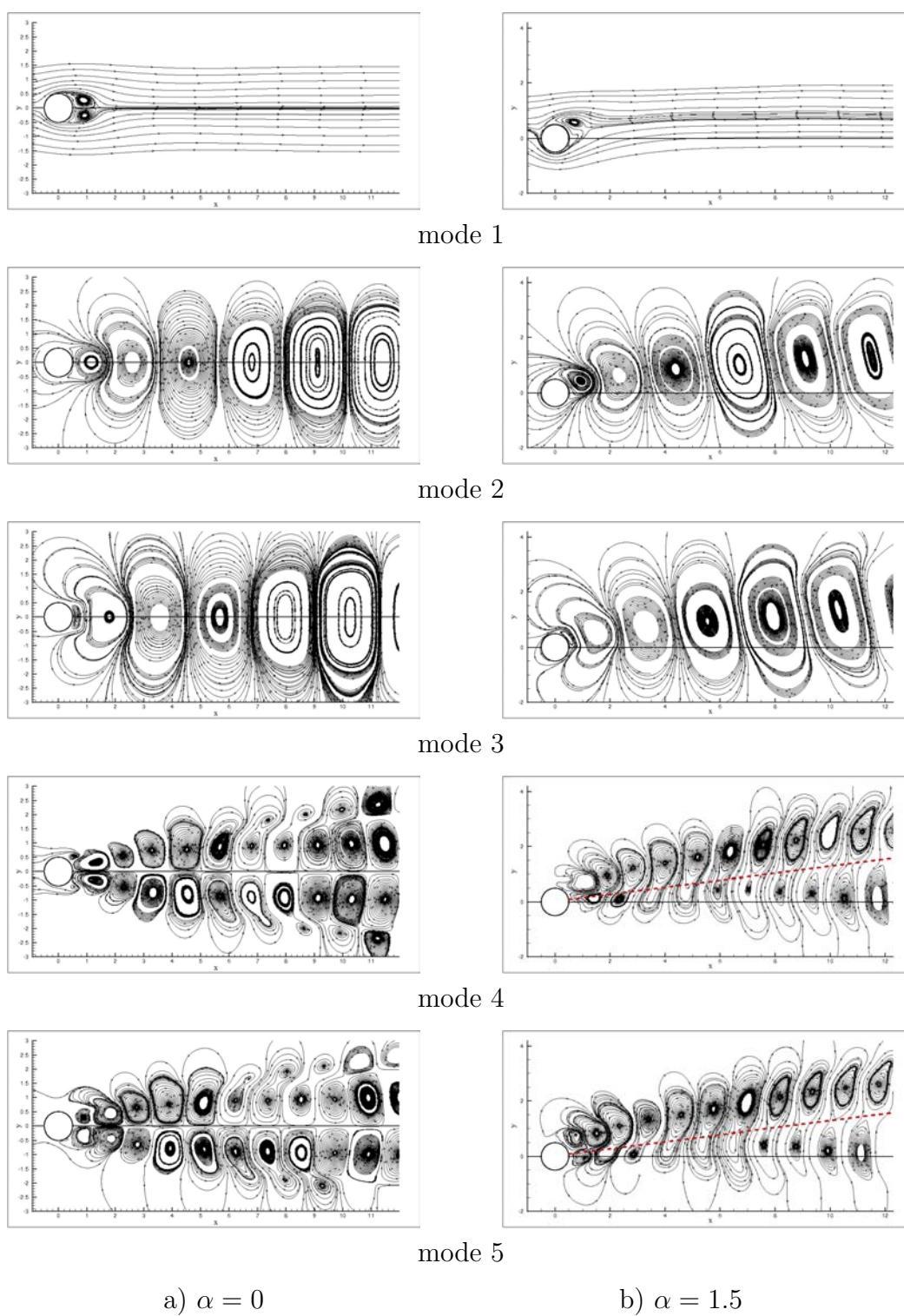


FIGURE 5.32 – Topos des cinq premiers modes, première instabilité

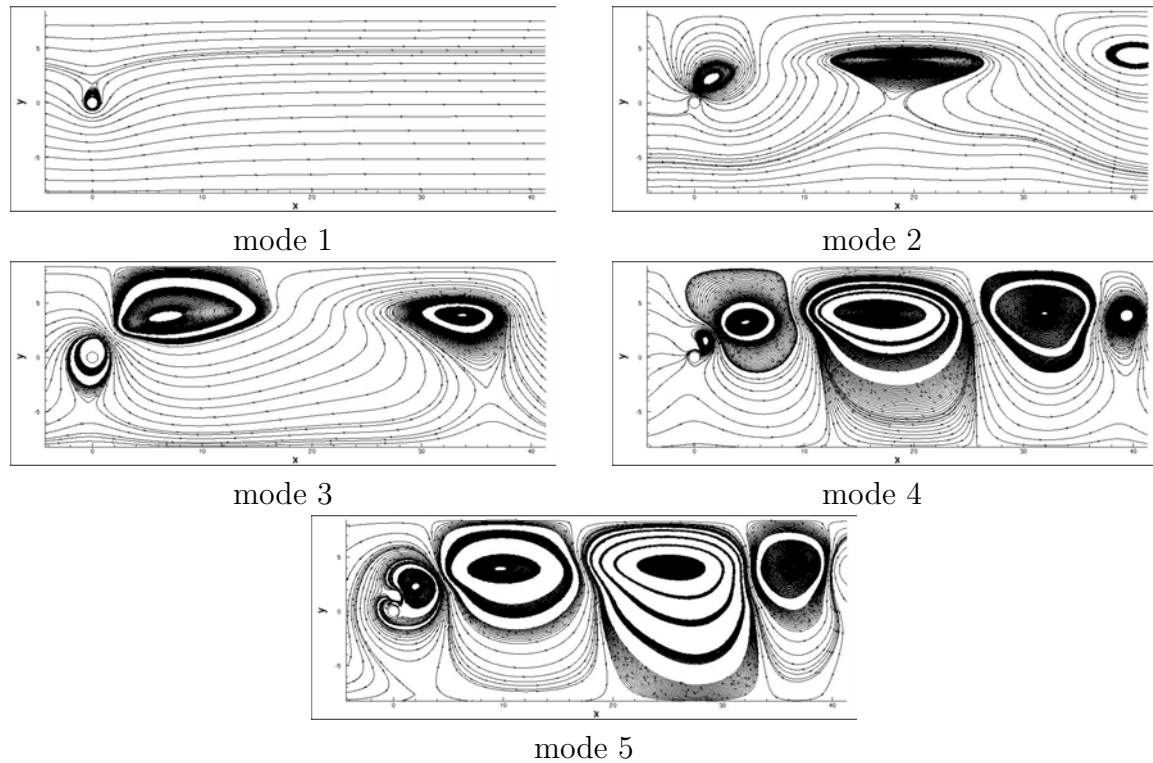


FIGURE 5.33 – Topos des cinq premiers modes, $Re = 200$, $\alpha = 4,75$; seconde instabilité

Chronos des modes les plus énergétiques

La figure 5.34 montre l'évolution temporelle des modes 2, 3, 4, 5, 6 et 7 pour $Re = 200$ concernant les 3 vitesses de rotation traitées. Les chronos sont toujours périodiques, ce qui correspond à des structures fermées dans le portrait de phase des chronos en fonction du mode 2, figure 5.35. Les modes 2 et 3 ont la même période qui est équivalente à celle du lâcher tourbillonnaire. Le portrait de phase $(\psi_2; \psi_3)$ est formé alors par un lobe. Les portraits de phase des modes 4 et 5 montrent une structure à deux lobes, à cause d'une variation d'une demie-longueur d'onde par rapport au mode 2. Les modes 6 et 7 sont déplacés d'un tiers de longueur d'onde, ce qui correspond à une structure à trois lobes dans le portrait de phase. Les portraits de phase de la figure 5.35 montrent la modulation des chronos sous l'effet de la rotation et la destruction de la symétrie quand α augmente.

Reconstruction des champs 2D à partir des modes les plus énergétiques

La reconstruction du signal à l'aide des modes les plus énergétiques est achevée en utilisant l'équation 5.14. Les figures 5.36 et 5.37 montrent les reconstructions successives en fonction du nombre de modes et l'évolution vers l'écoulement initial, pour $\alpha = 1,5$ et $4,75$ respectivement. Pour la première instabilité, à l'aide de trois modes on peut reconstruire la formation des tourbillons proche paroi, mais trois modes ne sont pas suffisants pour reproduire suffisamment la longueur d'onde λ_x de l'instabilité de Von Kármán. Pour l'obtenir, il faut un nombre supérieur de modes, ce qui est très bien achevé par 9 modes. La rotation n'introduit pas de complexité dans le cadre de la

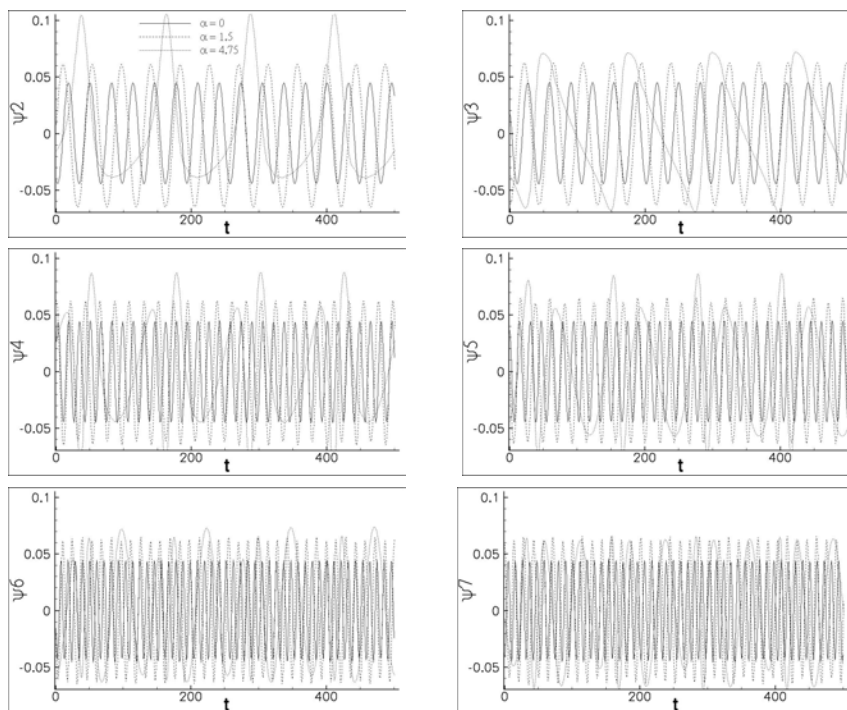


FIGURE 5.34 – Chronos des modes P.O.D. les plus énergétiques, $Re = 200$

première instabilité, ce qui n'est pas le cas pour la seconde instabilité, $\alpha = 4,75$. Un nombre plus important de modes est nécessaire pour retrouver les tourbillons positifs, ce qui est achevé par un nombre de 20 modes.

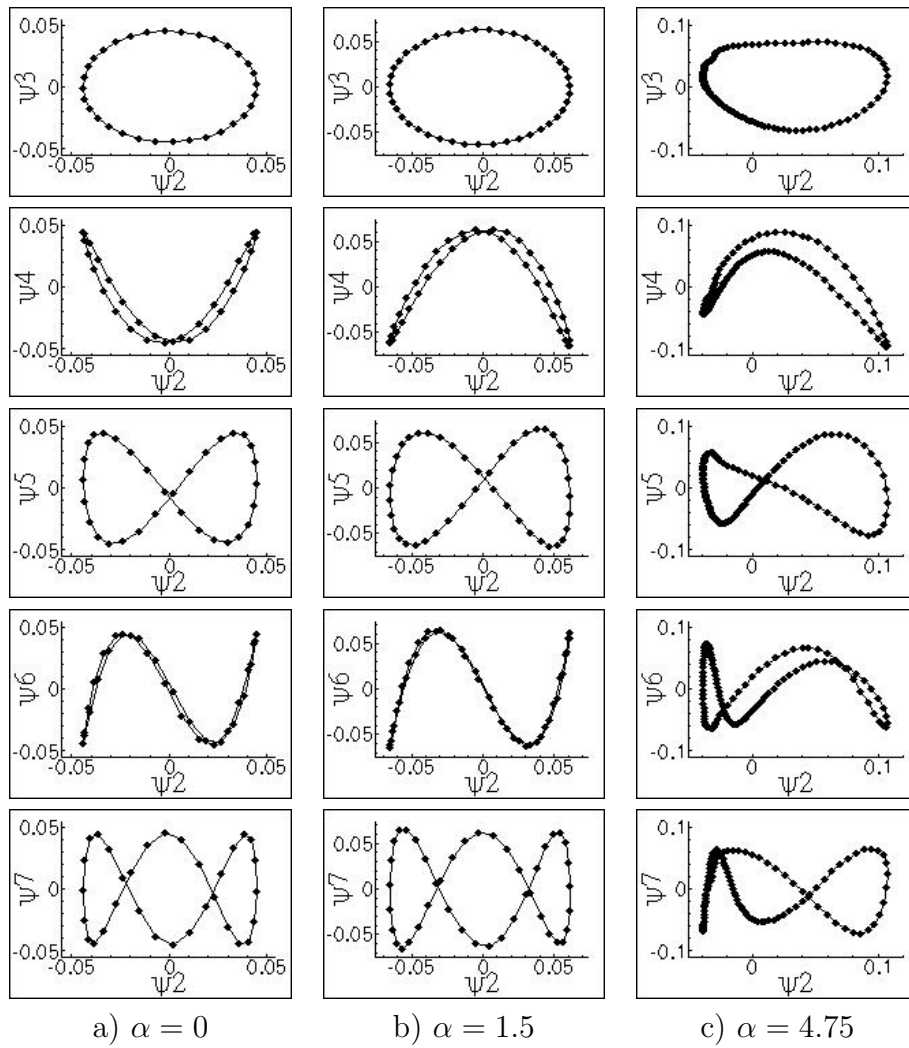


FIGURE 5.35 – Portraits de phase des chronos (ψ_2, ψ_i) , ψ_i associé au mode i ; effet de la rotation pour $Re = 200$

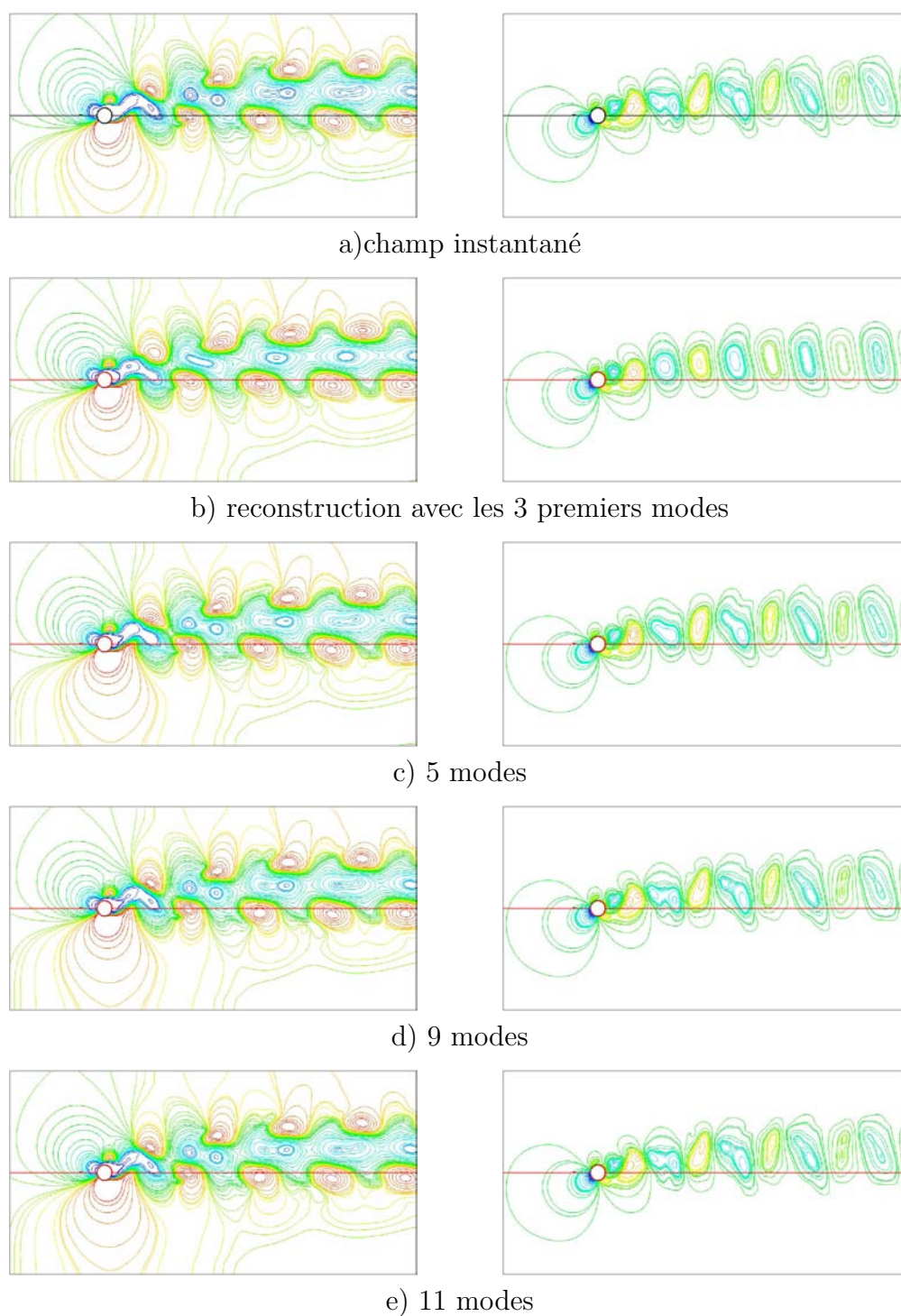
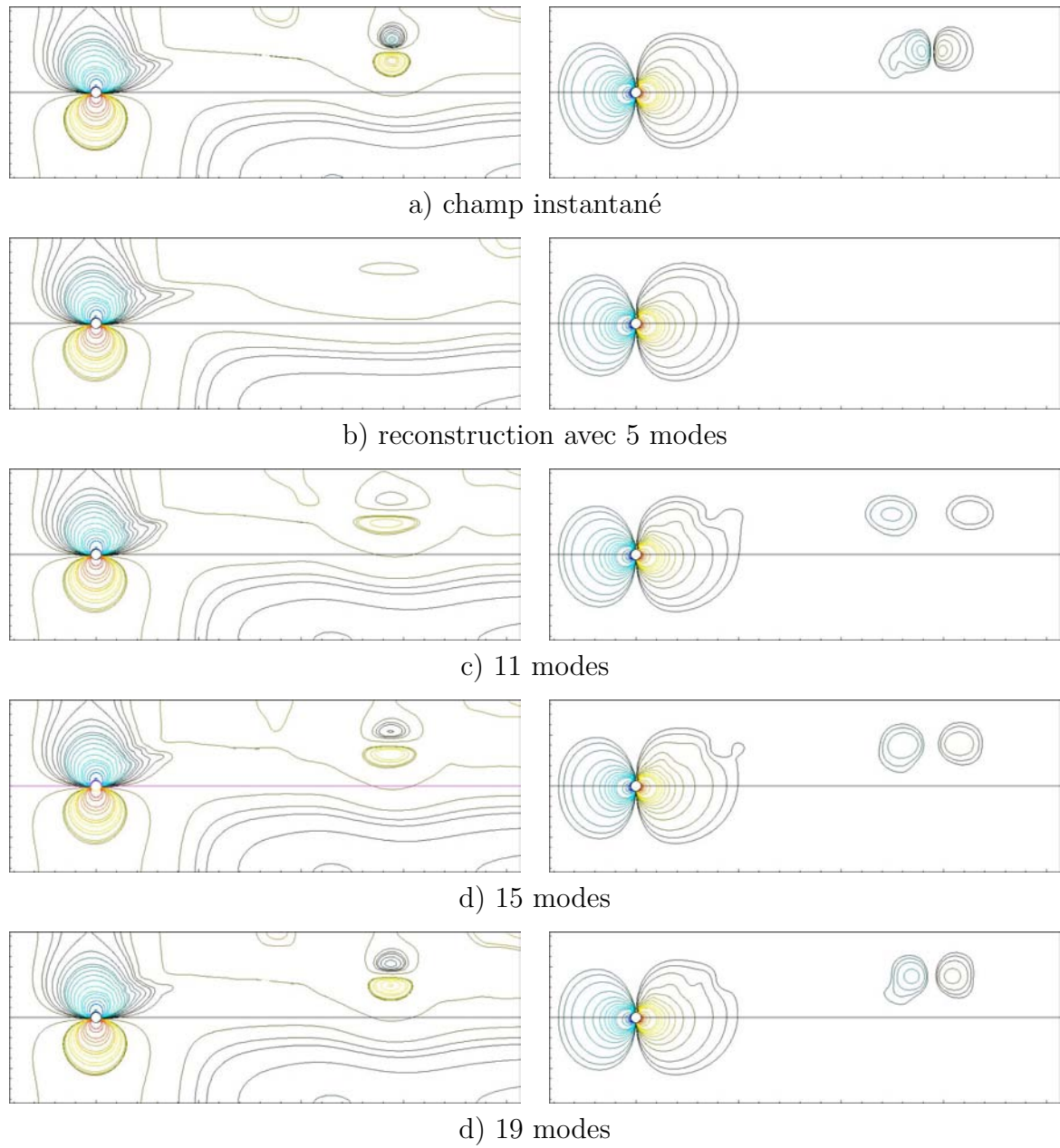


FIGURE 5.36 – Reconstruction du champ instantané à partir des modes les plus énergétiques de la P.O.D., à gauche, iso- U , à droite, iso- V $Re = 200$, $\alpha = 1,5$

FIGURE 5.37 – *idem.* $Re = 200$, $\alpha = 4,75$

5.3.4 Analyse de l'instabilité secondaire sous l'effet de rotation par la P.O.D.

L'analyse des structures cohérentes 3D est également menée par l'approche P.O.D.. Un sous-domaine de $160 \times 52 \times 80$ est stocké dans chaque cas traité durant 6 périodes de l'écoulement ce qui correspond à 170 champs instantanés. La contribution énergétique des 100 premiers modes pour $Re = 300$, $\alpha = 0.5$ est montrée sur la figure 5.38. Le décroissement rapide de la contribution énergétique est remarquable. La figure 5.39 montre l'effet de la rotation sur l'énergie des premiers modes pour $Re = 200$, $\alpha = 0$ et 1,5. Rappelons que pour $\alpha = 1.5$, les effets tri-dimensionnels sont atténués par la rotation. Le premier mode est plus énergétique que le cas du cylindre fixe, et la décroissance de la contribution énergétique est plus forte. La décroissance est également plus forte dans le cas des simulations 2D par comparaison aux modes 3D comme le montre la figure 5.40.

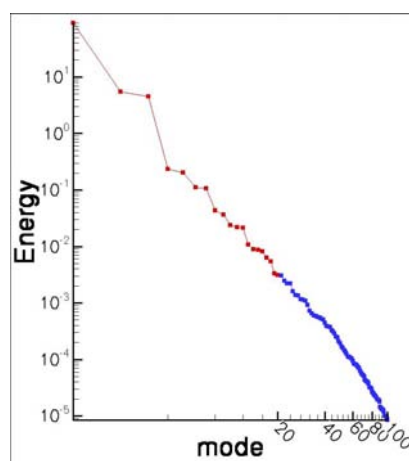


FIGURE 5.38 – Contribution énergétique des 100 premiers modes; simulations 3D, $Re = 300$ et $\alpha = 0.5$

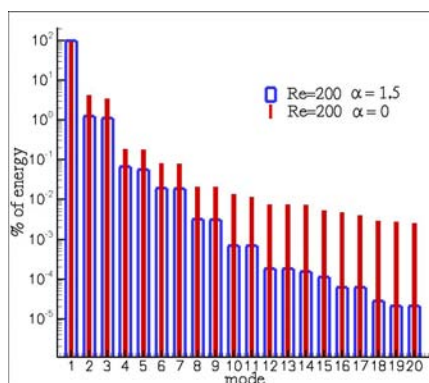


FIGURE 5.39 – Effet de la rotation sur la contribution énergétique des 20 premiers modes

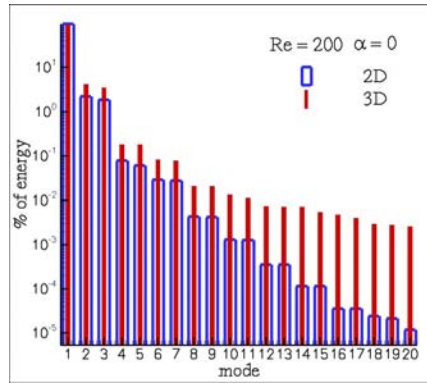


FIGURE 5.40 – Comparaison de la contribution énergétique des 20 premiers modes à partir de simulations 2D et 3D

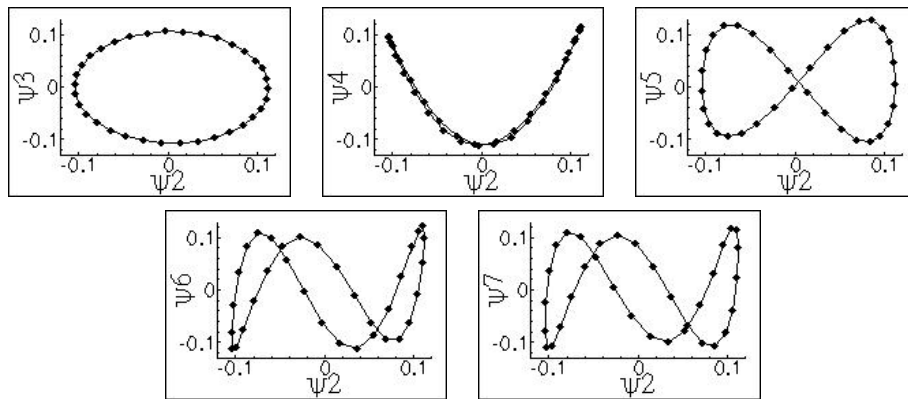


FIGURE 5.41 – Portraits de phases des modes 3D, $Re = 300$, $\alpha = 0,5$

Topos et chronos des modes 3D les plus énergétiques

La figure 5.42 montre les 5 premiers modes 3D pour $Re = 200$ et $\alpha = 0$, et $Re = 300$ et $\alpha = 0.5$ respectivement. Comme dans le cas de la P.O.D. 2D, le premier mode correspond au champ moyen où on peut voir les effets tri-dimensionnels dans la direction transversale. Les modes 2 et 3 constituent une paire, chacun formé d'une rangée de structures alternées. Les modes 4 et 5 sont plus fragmentés avec deux rangées de structures.

La figure 5.41 montre les mêmes comportements que le cas 2D quant aux portraits de phase pour $Re = 300$, $\alpha = 0.5$.

Reconstruction des champs 3D

La reconstruction des champs 3D est montrée dans les figures 5.43 et 5.44 pour $Re = 200$, $\alpha = 0$ et $Re = 300$, $\alpha = 0.5$ respectivement. 3 modes ne sont pas suffisants pour reproduire l'allure des structures tourbillonnaires. 11 modes paraissent suffisants pour reconstruire l'ondulation transversale. La reconstruction avec 19 modes est très proche de celle avec 11 modes, mais elle montre plus clairement les structures de *fer à cheval*.

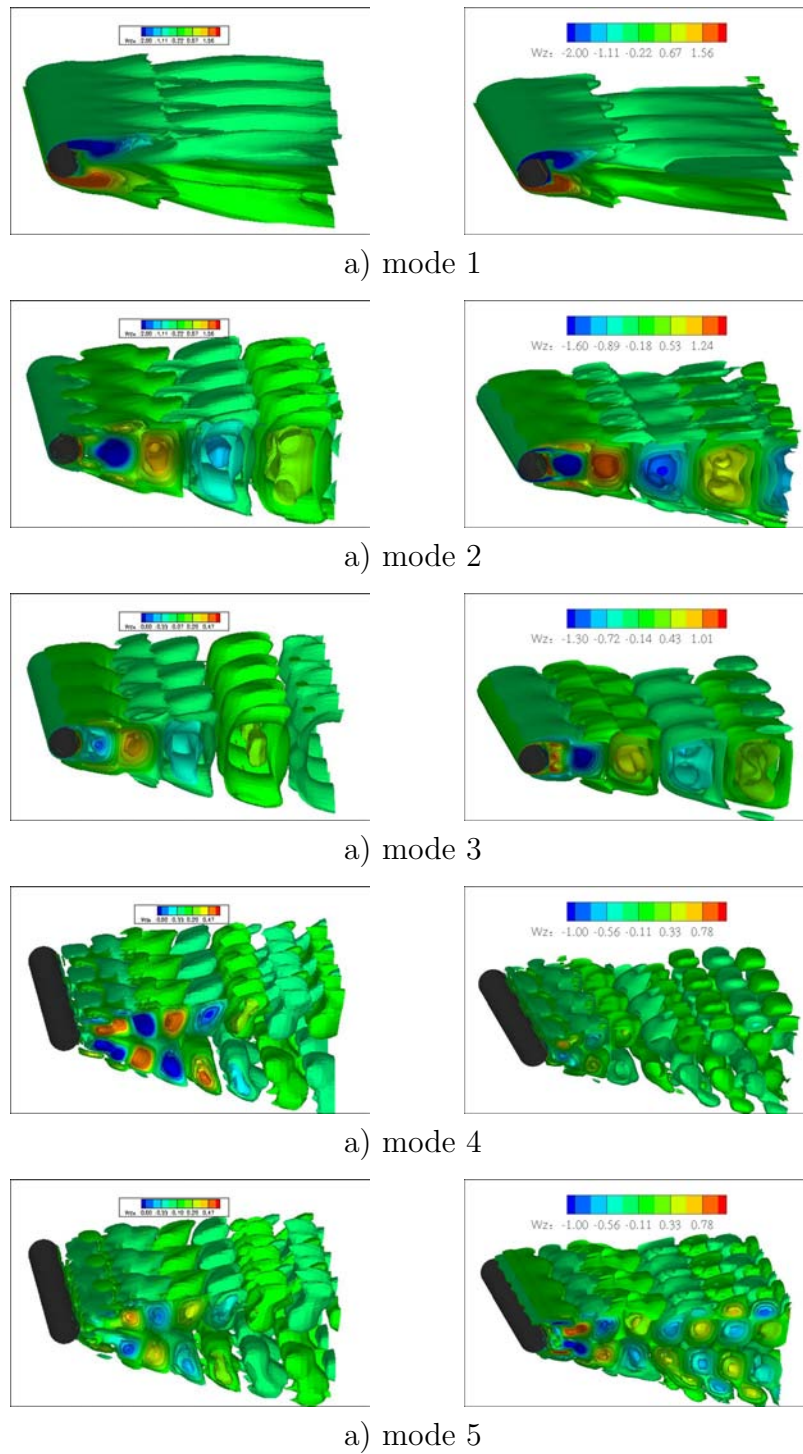
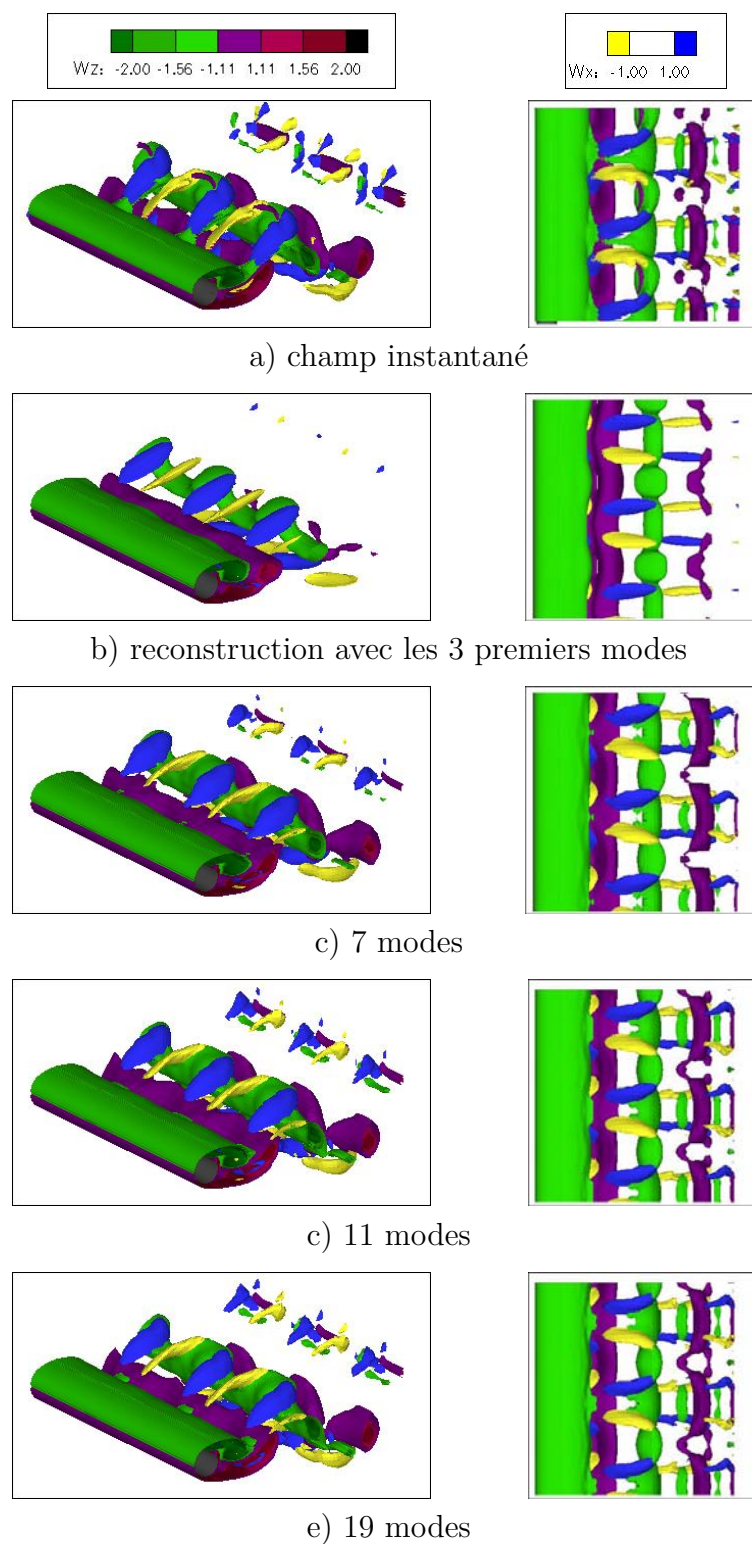


FIGURE 5.42 – Topologie des cinq premiers modes 3D, gauche, $Re = 200$, $\alpha = 0$; droite, $Re = 300$, $\alpha = 0,5$

FIGURE 5.43 – Reconstruction des iso-surfaces de vorticité, $Re = 200$, $\alpha = 0$

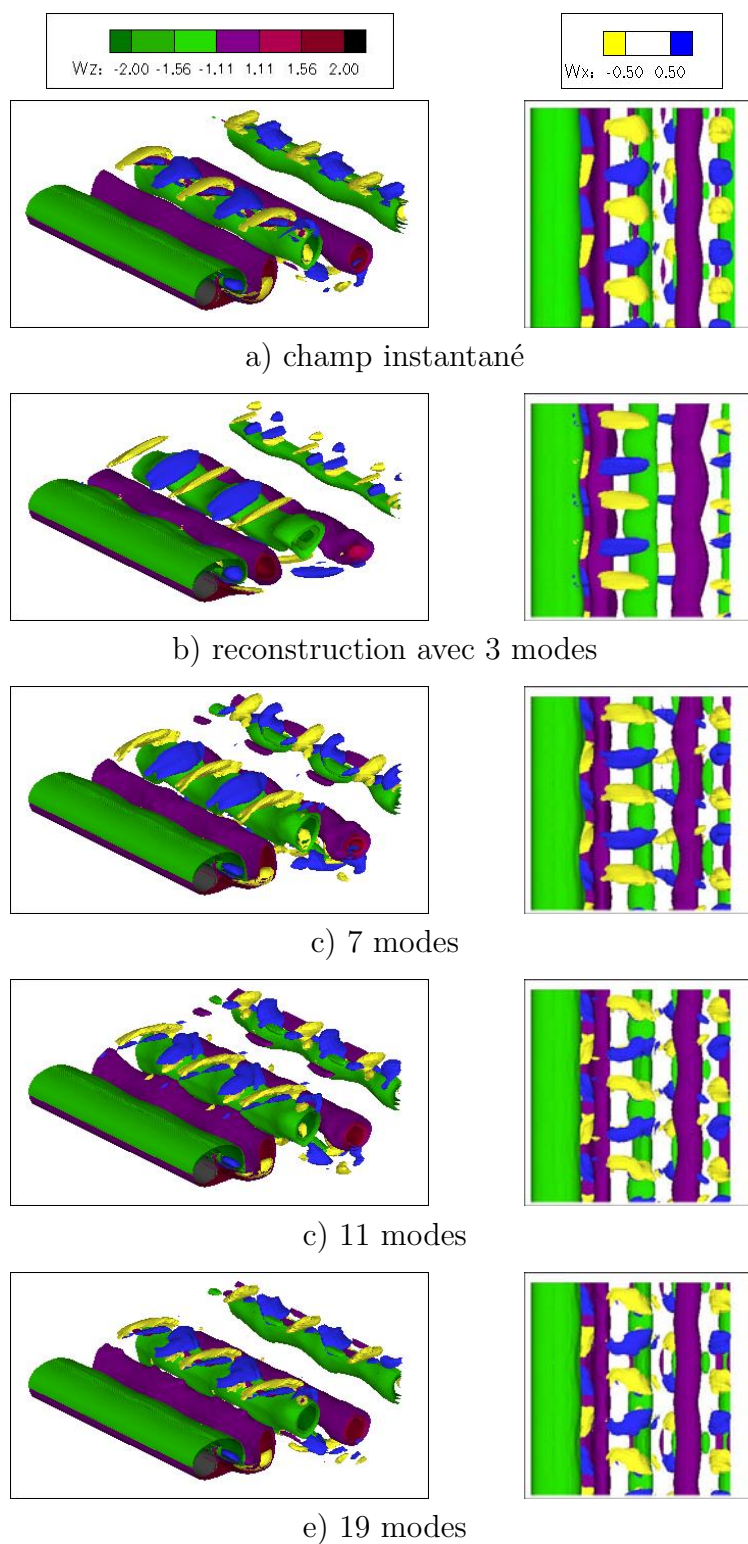


FIGURE 5.44 – Reconstruction des iso-surfaces de vorticité, $Re = 300$, $\alpha = 0,5$

Lire
la seconde partie
de la thèse