

N° d'ordre : 2410

THÈSE

présentée
pour obtenir le titre de
DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE
École Doctorale : Sciences de l'Univers, de l'Environnement et de l'Espace
Spécialité : Sciences de la Terre et Environnement
par

Carine FAMY

Sujet de la thèse :

**LES TERMES D'ÉCHANGE ENTRE BLOCS ET FRACTURES
DANS LES SIMULATEURS DE RÉSERVOIRS FRACTURÉS**

Soutenue le 30 novembre 2006 devant le jury composé de :

MM. Rachid ABABOU	<i>Président</i>
Michel QUINTARD	<i>Directeur de thèse</i>
Mme Azita AHMADI-SENICHAULT	<i>Rapporteur</i>
MM. Fred DELAY	<i>Rapporteur</i>
Pierre FABRIE	<i>Rapporteur</i>
Bernard BOURBIAUX	<i>Membre</i>

Remerciements

Cette thèse a été réalisée dans les locaux de l'IFP à Rueil-Malmaison, au sein de la Direction Ingénierie de Réservoir, dans le Département Simulation des écoulements et Transferts en milieux poreux, et en collaboration avec l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) et l'Institut National Polytechnique de Toulouse (INPT).

Mes premiers remerciements, ainsi que toute ma reconnaissance, vont à M. Bernard Bourbiaux (IFP) et M. Michel Quintard (IMFT), pour leur encadrement efficace et les excellents conseils dont ils m'ont fait profiter durant ces trois ans, bien sûr, mais aussi et surtout pour leur gentillesse, leur patience et leurs qualités personnelles. Je remercie aussi M. Vincent Richard et M. Patrick Lemonnier, qui m'ont accueilli à l'IFP, et ont cru en l'intérêt de mon travail et en mes capacités.

Mes remerciements sincères vont aussi à Mme Azita Ahmadi-Sénichault et MM. Fred Delay et Pierre Fabrie, qui ont longuement relu ce manuscrit, ainsi qu'à M. Rachid Ababou, qui a eu l'amabilité de présider le jury de soutenance. Leurs commentaires avisés et critiques constructives m'ont permis de finaliser mon travail.

Ces années de travail intensif auraient été bien plus difficiles sans le soutien et l'amitié de mes collègues. Mes amitiés vont donc à toute l'équipe "fracturé", pour leur bonne humeur, et l'entente cordiale qui règne dans nos bureaux, en particulier à Caroline Choquet et Rémy Basquet, ainsi qu'aux stagiaires qui ont partagé un temps cette ambiance amicale.

Que les autres personnes que j'ai eu la chance de rencontrer à l'IFP ne se sentent pas oubliées, avec une pensée particulière pour les thésards de la Direction, ainsi que pour Isabelle Zabalza-Mezghani. Leur amitié et soutien m'ont été précieux, particulièrement dans les moments difficiles.

Plus personnellement, je tiens à remercier mes amis "bordelais", pour les soirées, fous rires et blagues en tout genre, et surtout pour leur amitié sans faille depuis notre rencontre.

Enfin, j'ai une tendre pensée pour ma famille. Qu'ils soient remerciés de leurs encouragements et de leur affection au long de ces années.

à Alexandre.

Table des matières

Remerciements	3
Nomenclature	9
Introduction	11
1 Simulation des écoulements dans les réservoirs fracturés	15
1.1 Simulation à grande échelle dans les réservoirs fracturés	15
1.1.1 Caractéristiques des réservoirs fracturés étudiés	15
1.1.2 Echelles d'observation	16
1.1.3 Description locale	17
1.2 Homogénéisation dans les deux milieux : exemple	18
1.2.1 Modèles double-porosité	19
1.2.2 Différentes méthodes de la littérature	19
1.2.3 Calcul du terme d'échange	20
1.3 Homogénéisation partielle : modèle mixte	21
1.3.1 Hypothèses et limites de validité de l'homogénéisation	21
1.3.2 Solutions du problème mathématique	23
1.4 Cas des écoulements multiphasiques	24
1.5 Mise en œuvre du modèle mixte	27
1.5.1 Bloc matriciel unique représentatif	27
1.5.2 Utilisation du modèle de Warren et Root	28
1.6 Conclusions	29
2 Mise en œuvre d'un modèle mixte	31
2.1 Lois d'écoulement à l'échelle locale	32
2.1.1 Lois de Darcy généralisées et lois de conservation de la masse	32
2.1.2 Notion de pression capillaire	33
2.1.3 Modèle black-oil diphasique eau-huile	34
2.1.4 Application au cas d'un système composé de deux milieux poreux distincts	36
2.2 Description du modèle mixte	36
2.2.1 Homogénéisation partielle des équations	36
2.2.2 Formulation des termes d'échange sur un bloc unique représentatif . .	37

2.3	Description du modèle homogénéisé conventionnel	38
2.4	Discrétisation spatiale	39
2.4.1	Maillage conventionnel et sous-maillage	39
2.4.2	Méthode des volumes finis	41
2.5	Discrétisation temporelle et découplage des systèmes	43
2.5.1	Discrétisations temporelles conventionnelles	43
2.5.2	Découplage de la résolution en temps	44
2.5.3	Choix des résolutions en temps	45
2.6	Discrétisation des équations	45
2.6.1	Termes d'accumulation	47
2.6.2	Termes de flux	48
2.6.3	Termes de flux entre mailles de même type	49
2.6.4	Termes d'échange entre milieux fracture et matrice	52
2.6.5	Systèmes à résoudre	59
2.7	Linéarisation de Newton	60
2.7.1	Principe	60
2.7.2	Systèmes à résoudre	61
3	Méthode de construction d'un sous-maillage optimal	63
3.1	Modèle de référence	64
3.1.1	Description des modèles de référence	64
3.1.2	Propriétés des zones et du fluide	64
3.2	Création d'un sous-maillage multi-dimensionnel optimisé	67
3.3	Création du sous-maillage optimal	71
3.3.1	Maillage concentrique de la matrice	71
3.3.2	Sous-maillage mono-dimensionnel optimal et pratique	73
3.3.3	Validation du modèle optimal	74
3.4	Anisotropie de forme et de perméabilité	77
3.5	Automatisation du sous-maillage optimal	79
3.5.1	Influence de paramètres pétrophysiques	79
3.5.2	Conclusions	82
3.6	Conclusion	83
4	Résultats	85
4.1	Validation du modèle mixte	85
4.1.1	Cas-test 1	86
4.1.2	Cas-test 2	87
4.2	Limites du modèle mixte	92
4.2.1	Cas-test 3	92
4.2.2	Cas-tests 4 et 5	93
	Conclusions	97

Bibliographie	101
A Développements mathématiques	105
B Publications	111
B.1 Publication lors du SPE Reservoir Simulation Symposium 2005, 31 jan.-02 fév., Houston, Texas, U.S.A. [22]	113
B.2 Publication lors du IAHR-GW 2006 Groundwater in Complex Environments, 12-14 juin, Toulouse, France [21]	127
B.3 Publication lors du CMWR-XVI 2006, Computational Methods in Water Re- sources, 19-22 juin, Copenhague, Danemark [20]	141

Nomenclature

SYMBOLES

Ac	Terme d'accumulation
c_f	Compressibilité totale dans la région fracture
c_m	Compressibilité totale dans la région matrice
f	Terme d'échange matrice-fracture à l'échelle locale
f^*	Terme d'échange matrice-fracture à l'échelle macroscopique
F_f	Fraction volumique de fracture
F_m	Fraction volumique de matrice
Fl	Terme de flux
g	Accélération de la pesanteur
k_r	Perméabilité relative
\mathbf{K}_f	Tenseur de perméabilité à l'échelle locale dans la région fracture
\mathbf{K}_f^*	Tenseur de perméabilité macroscopique dans la région fracture
\mathbf{K}_m	Tenseur de perméabilité à l'échelle locale dans la région matrice
\mathbf{K}_m^*	Tenseur de perméabilité macroscopique dans la région matrice
M	Mobilité massique à l'échelle locale
M^*	Mobilité massique macroscopique
N	Nombre de mailles double-milieu (= nombre de mailles fracture = nombre de mailles matrice)
N_{sm}	Nombre de sous-mailles par bloc matriciel représentatif
P	Pression à l'échelle locale
P^*	Pression macroscopique
\tilde{P}_f	Déviations macroscopiques de la pression dans la région fracture
Pc	Pression capillaire en eau à l'échelle locale
Pc^*	Pression capillaire macroscopique en eau
Q	Terme d'échange entre les régions matrice et fracture
S	Saturation à l'échelle locale
S^*	Saturation macroscopique
S_{orw}	Saturation en huile résiduelle après balayage à l'eau
S_{wi}	Saturation en eau irréductible
\mathbf{V}	Vitesse de filtration
V_f	Volume de fracture
V_m	Volume de matrice
V_{tot}	Volume total
z	Profondeur

SYMBOLES GRECS

β, γ	Paramètres prenant la valeur 0 ou 1
Δt	Pas de temps
ϵ	Paramètre d'homogénéisation
μ	Viscosité dynamique
ρ	Masse volumique à l'échelle locale
ρ^*	Masse volumique macroscopique
σ	Facteur de forme
φ	Porosité à l'échelle locale [adim]
φ^*	Porosité macroscopique
Φ	Terme de flux entre mailles numériques de même type

INDICES

$1(I)$	Relatif à la sous-maille limite dans une maille matrice indicée I
e	Relatif au composant eau
f	Relatif à la région fracture
g	Relatif à la phase gaz
h	Relatif au composant huile
I, K	Relatif aux mailles matrice et fracture
$j(I), k(I)$	Relatif aux sous-mailles matrice dans une maille matrice indicée I
m	Relatif à la région matrice
o	Relatif à la phase huile
v	Relatif au composant gaz (<i>volatil</i>)
w	Relatif à la phase eau

EXPOSANTS

l	Relatif aux itérations de Newton
$n, n + 1$	Relatif au pas de temps, dans la résolution du système principal
$n^*, n + 1^*$	Relatif au pas de temps, dans la résolution des systèmes secondaires

Introduction

Lorsqu'on cherche à étudier un réservoir pétrolier, la première et principale difficulté est son emplacement, sous plusieurs mètres, souvent des centaines de mètres, de profondeur par rapport au niveau du sol. Il est alors impossible de le connaître parfaitement, puisque sa profondeur interdit toute étude visuelle.

L'industrie pétrolière possède de nombreux outils permettant de récolter des informations sur les réservoirs pétroliers. Les données relevées le long des puits et les carottes d'exploration qui en sont extraites, mais aussi les résultats des campagnes sismiques, pouvant être répétées dans le temps, sont des exemples d'informations disponibles sur un réservoir, mais elles sont partielles.

Une difficulté supplémentaire réside dans les différentes échelles auxquelles un réservoir doit être décrit. En effet, de l'étude à l'échelle du pore jusqu'à l'étude d'un gisement, c'est-à-dire de plusieurs réservoirs, chacun s'étendant sur des kilomètres, toutes les échelles de mesure sont requises. Un géologue, par exemple, étudiera les différents types de roches et les mouvements de terrain qui ont permis de piéger les hydrocarbures. Ses observations seront alors faites à très grande échelle, en considérant des pans entiers de terrain. A l'inverse, l'étude d'une carotte est à l'échelle de la dizaine de centimètres.

Dans ce contexte d'incertitudes, la simulation de réservoir joue un rôle primordial, pour valider les modèles créés (calage d'historique) comme pour prédire les comportements futurs : récupération d'hydrocarbures, venues d'eau aux puits ... Elle est aussi utilisée pour optimiser les schémas d'exploitation, ou encore évaluer les risques financiers associés à un projet.

Cas particulier des réservoirs pétroliers, les réservoirs naturellement fracturés ont été soumis à de fortes contraintes mécaniques. Au lieu d'être constitués d'une roche poreuse et perméable, à l'image d'une éponge, comme un réservoir pétrolier classique, ils sont caractérisés par la présence de deux milieux distincts, de propriétés très différentes. On peut les visualiser par exemple comme un sol extrêmement sec : le sol se fissure, et se fractionne alors en plusieurs morceaux, séparés par un réseau d'espaces laissés vides. Dans le cas d'un réservoir naturellement fracturé, les morceaux de terre sont appelés des blocs de matrice, ou blocs matriciels, constitués de roche, et l'ensemble constitué des espaces entre les blocs est appelé le réseau de fractures. Les blocs contiennent dans leurs pores les hydrocarbures. Si ces hydrocarbures peuvent être expulsés des blocs, ils arrivent dans le réseau de fractures, qui va

assurer leur déplacement jusqu'aux puits de production. La clé de la simulation de ce type de réservoirs est ainsi l'évaluation précise des échanges entre les deux milieux.

Pour formuler les échanges entre milieux, les simulateurs de réservoir fracturé s'appuient généralement sur l'hypothèse selon laquelle, pour des propriétés de roche données, la quantité d'hydrocarbures passant des blocs matriciels vers le réseau de fractures dépend uniquement de la géométrie des blocs matriciels et de la différence de pression entre les deux milieux. On parle alors de formulation pseudo-permanente. Le flux d'échange est relié dans les modèles simples à la différence des potentiels moyens des milieux par un coefficient de proportionnalité ne dépendant que de la géométrie des blocs matriciels et de leur perméabilité.

Dans le cas d'écoulements monophasiques n'impliquant qu'un seul processus physique (diffusivité de pression, diffusion moléculaire, etc.), des méthodes d'homogénéisation permettent de formuler ce coefficient de proportionnalité connaissant la perméabilité de matrice et les dimensions des blocs.

Toutefois, la plupart des procédés de récupération secondaires mettent en jeu différents mécanismes physiques (capillarité, gravité, diffusion, etc.) régissant le transport de plusieurs phases. Ces processus multiphasiques lents ne s'homogénéisent pas de la même manière à l'échelle d'un bloc et nécessitent une meilleure représentation des états transitoires. De plus, les changements de phase et les phénomènes capillaires induisent un comportement non linéaire des variables locales décrivant les milieux. Ainsi, une formulation pseudo-permanente des échanges, telle qu'utilisée par les simulateurs de réservoir fracturé, ne peut représenter avec une précision suffisante les transferts entre milieux. La mise au point de formules homogénéisées pour les écoulements multiphasiques compositionnels dans les simulateurs de réservoir reste un problème ouvert.

Ce travail de thèse a donc pour objectif d'améliorer la formulation des échanges entre milieux constitutifs dans les simulateurs de réservoir fracturé, dans le cas d'écoulements multiphasiques.

Ce mémoire se présente en quatre parties distinctes.

Le *chapitre 1* est introductif. Après identification des différentes échelles mises en jeu dans la description des écoulements au sein d'un réservoir fracturé, l'exemple d'un fluide monophasique faiblement compressible permet de mettre en évidence les difficultés propres à la simulation des réservoirs fracturés. Un état de l'art des méthodes de calcul des échanges entre milieux est ensuite présenté, en particulier du point de vue des échelles de description. Il met en évidence l'intérêt des *modèles mixtes*, modèles couplant une description des réservoirs fracturés à deux échelles différentes, pour la problématique étudiée. Enfin, les contraintes opérationnelles de ce travail nous amènent à considérer le sous-maillage des blocs matriciels comme la mise en œuvre possible des modèles mixtes au sein d'un simulateur d'écoulement.

Dans le *chapitre 2*, la modélisation des écoulements multiphasiques dans les réservoirs

fracturés est présentée. A l'approche conventionnelle, basée sur une formulation pseudo-permanente, est opposé le modèle mixte développé dans cette thèse, consistant à sous-mailler les blocs matriciels. La volonté de proposer dans ce travail un modèle pouvant être implémenté dans les simulateurs industriels de réservoir fracturé, tel que le simulateur ATHOS, développé à l'IFP, nous amène à détailler les différences entre les deux modèles. Nous verrons ainsi comment le modèle mixte proposé peut être intégré à un simulateur conventionnel, en modifiant et ajoutant simplement quelques fonctionnalités. Les choix numériques effectués afin de minimiser le coût d'une méthode de sous-maillage seront présentés, en particulier un découplage dans le temps des différents systèmes à résoudre.

La mise en œuvre d'une méthode de sous-maillage des blocs matriciels passe bien sûr par la programmation de cette méthode, mais aussi par la définition d'un sous-maillage. C'est l'objet du *chapitre 3*, dans lequel nous proposons une méthode de construction d'un sous-maillage adapté de manière optimale au processus étudié (imbibition capillaire, gravité, ou les deux mécanismes), basée sur l'étude et la compréhension des phénomènes physiques. Les sous-maillages résultants seront décrits en terme de nombre de mailles et de dimensions relatives de ces mailles. Après une étude de l'influence de la géométrie et des propriétés pétrophysiques des blocs sur le sous-maillage, nous proposerons une automatisation du sous-maillage pour permettre son introduction aisée dans le simulateur ATHOS.

Enfin, des cas-tests utilisant la nouvelle fonctionnalité de sous-maillage du simulateur ATHOS seront présentés dans le *chapitre 4*. Ces études nous permettront de valider l'approche proposée, et mettront en évidence l'apport de ce travail par comparaison avec la méthode conventionnelle. Les limites du modèle mixte choisi seront aussi déterminées sur des exemples, afin de bien cerner le domaine de validité de notre approche.

Chapitre 1

Problématique de la simulation des écoulements multiphasiques dans les réservoirs fracturés - Introduction des modèles mixtes

Ce chapitre a pour objectif d'expliquer les difficultés liées à la simulation des écoulements multiphasiques dans les réservoirs fracturés, et de présenter les objectifs de la thèse ainsi que la voie choisie afin de les atteindre.

Dans un premier paragraphe, nous rappellerons les caractéristiques des réservoirs fracturés, ainsi que les différentes échelles intervenant dans la description de ces réservoirs et les lois d'écoulement à l'échelle dite de Darcy. Le second paragraphe porte sur les modèles macroscopiques, qui seront décrits et commentés sur l'exemple d'un fluide monophasique faiblement compressible. Le modèle privilégié pour ces travaux de thèse, appelé modèle mixte, sera présenté dans le troisième paragraphe, dans le cadre de l'exemple précédent. Nous verrons comment l'utilisation d'un tel modèle permet de pallier les défaillances des modèles macroscopiques. Le quatrième paragraphe traite d'écoulements multiphasiques, et se présente comme un état de l'art des différentes méthodes existantes. Enfin, les contraintes associées à ce travail de thèse seront énumérées et commentées dans le dernier paragraphe.

1.1 Présentation du problème de la simulation à grande échelle dans les réservoirs fracturés

1.1.1 Caractéristiques des réservoirs fracturés étudiés

Un réservoir pétrolier est une formation du sous-sol, poreuse et perméable, contenant des hydrocarbures liquides et/ou gazeux, dont la structure est limitée par des barrières imperméables (Cossé, [14]).

Certains réservoirs ont été, au cours du temps, soumis à de fortes contraintes mécaniques qui ont engendré des plans de rupture dans la roche. Des *fractures*, appelées aussi *joints*, d'extension centimétrique à métrique, et d'ouverture de l'ordre de la dizaine de microns, et des *failles*, traversant le réservoir sur plusieurs kilomètres, se sont alors formées (Reiss, [48], Saidi, [53]), rompant la continuité de la roche.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux fractures, appelées indifféremment joints, les dimensions caractéristiques des failles nécessitant une étude propre (Henn, [25]).

Les réservoirs étudiés sont des *milieux poreux fracturés*, c'est-à-dire dont le milieu matrice est perméable, par opposition aux *milieux purement fracturés*, à seule porosité de fracture, comme les karsts, dont la matrice est imperméable. Les réservoirs étudiés seront indifféremment nommés par la suite *réservoirs poreux fracturés* ou *réservoirs fracturés*.

De plus, il est important de noter que les réservoirs étudiés ici sont *naturellement* fracturés. Il s'agit donc d'un phénomène naturel, par opposition aux réservoirs ayant subi une *fracturation hydraulique* (Howard et Fast [27]), opération effectuée dans un puits, ayant pour but d'améliorer la perméabilité de la formation aux abords du puits traité.

Enfin, une fracture dans notre modélisation est considérée comme un milieu poreux, d'une part parce que les fractures peuvent dans certains cas être remplies de matériau détritique, d'autre part parce que les équations classiques de transport en milieu poreux décrivent bien les écoulements entre deux surfaces rugueuses (Plouraboué [43]). Bien que cela ne soit pas indispensable, nous utiliserons souvent l'image d'une fracture délimitée par deux surfaces planes d'ouverture constante.

1.1.2 Echelles d'observation

Les hétérogénéités présentes au sein d'un milieu poreux, comme ses caractéristiques, dépendent de l'échelle d'observation des phénomènes. Dans le cas d'un réservoir fracturé, ces échelles sont au moins au nombre de trois (Sahimi, [52]) :

l'échelle microscopique, au niveau du pore. Les écoulements sont alors généralement décrits par les équations de Stokes. Une étude à cette échelle permet de comprendre les phénomènes physiques mis en jeu, d'en déterminer certains paramètres, mais une extrapolation à l'échelle du réservoir est impossible.

l'échelle locale, ou échelle de Darcy. Des équations *homogénéisées* sont alors utilisées, comme la loi de Darcy pour les écoulements monophasiques. La longueur caractéristique de cette échelle est habituellement la taille d'une carotte prélevée à un puits.

l'échelle macroscopique, correspondant à des hétérogénéités du réservoir à grande échelle (métrique à hectométrique). Les écoulements obéissent alors à des équations de bilan qui peuvent être différentes de celles écrites à l'échelle locale.

La taille d'un réservoir fracturé, de quelques kilomètres à plusieurs dizaines de kilomètres, interdit sa modélisation à l'échelle microscopique. L'analyse et la modélisation du comportement dynamique du réservoir s'appuie donc sur des lois définies à l'échelle locale.

Les réservoirs fracturés se caractérisent par de fortes hétérogénéités entre les milieux matrice et fracture. Deux relations traduisent ce fort contraste. La première, d'ordre géométrique, concerne les fractions volumiques des deux milieux (Bourdarot [11]), définies comme le rapport du volume de chaque milieu sur le volume total des deux milieux :

$$F_f \ll F_m \quad (1.1)$$

où les fractions volumiques de fracture F_f et de matrice F_m sont respectivement définies comme :

$$F_f = \frac{V_f}{V_{tot}} \quad (1.2)$$

$$F_m = \frac{V_m}{V_{tot}} \quad (1.3)$$

avec V_f le volume de fracture, V_m le volume de matrice (c'est-à-dire de blocs matriciels) et $V_{tot} = V_f + V_m$.

La seconde, d'ordre hydraulique, exprime l'importante différence des ordres de grandeur des perméabilités, définies à l'échelle locale, des blocs matrice et du réseau de fractures :

$$\mathbf{K}_m \ll \mathbf{K}_f \quad (1.4)$$

La perméabilité du milieu fracture peut varier d'une dizaine de millidarcys (mD) à plusieurs darcys alors que la perméabilité du milieu matrice n'excède généralement pas un millidarcy (Reiss, [48]).

1.1.3 Description locale

A l'échelle locale, l'écoulement monophasique d'un fluide faiblement compressible est régi par l'équation de Darcy (1856) :

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla (P + \rho g z) \quad (1.5)$$

où \mathbf{V} est la vitesse de filtration du fluide, \mathbf{K} le tenseur de perméabilité de la roche, μ la viscosité dynamique du fluide, P la pression à l'échelle locale, ρ la masse volumique du fluide, g l'accélération de la pesanteur et z la profondeur.

Dans le cas d'un réservoir naturellement fracturé, deux milieux distincts sont considérés, séparés par une interface.

Considérons un réservoir poreux, noté Ω , constitué d'une région fracture Ω_f et d'une région matrice Ω_m : $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_m$. L'interface entre les deux régions Ω_f et Ω_m est notée Γ_{fm} .

Pour chacun des milieux, l'introduction de la loi de Darcy (1.5) dans l'équation de bilan de masse pour un fluide faiblement compressible (Quintard et Whitaker, [46]) permet d'écrire le système suivant, défini à l'échelle locale :

$$\varphi_f c_f \frac{\partial P_f}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f}{\mu} \cdot \nabla (P_f + \rho_f g z_f) \right) \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.6)$$

$$\varphi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_m}{\mu} \cdot \nabla (P_m + \rho_m g z_m) \right) \quad \text{dans } \Omega_m \quad (1.7)$$

avec c la compressibilité totale du milieu. Dans ce système, l'indice m (resp. f) se rapporte au milieu matrice (resp. fracture).

Ce problème est complété par les conditions aux limites suivantes :

$$\mathbf{n}_{fm} \cdot \mathbf{K}_f \cdot \nabla (P_f + \rho_f g z_f) = \mathbf{n}_{mf} \cdot \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_m g z_m) \quad \text{sur } \Gamma_{fm} \quad (1.8)$$

$$P_f = P_m \quad \text{sur } \Gamma_{fm} \quad (1.9)$$

Ce problème, lorsqu'il est complété par un jeu de conditions initiales et des conditions aux limites sur les frontières délimitant le réservoir, est mathématiquement bien posé. Toutefois, sa résolution est impossible compte tenu de l'extrême complexité de la géométrie, particulièrement à l'interface, et des fortes hétérogénéités des caractéristiques statiques et dynamiques des deux milieux.

Pour pallier ces difficultés, le problème (1.6)-(1.9) est habituellement résolu à l'échelle macroscopique, selon une approche dite *continue*, permettant l'étude des phénomènes de transport en milieux poreux.

1.2 Homogénéisation des équations dans les deux milieux : exemple d'un écoulement monophasique faiblement compressible

Dans l'approche *continue*, les régions matrice et fracture sont définies en tout point du domaine. Chaque région se comporte comme un milieu poreux homogène occupant tout le réservoir. Les deux régions se recouvrent donc (Reiss, [48]). Cette approche est valide tant que la dimension des blocs matriciels est petite devant celle du réservoir (Nelson, [40]).

En chaque point, des valeurs moyennes des pressions locales introduites dans le système (1.6)-(1.9) sont évaluées sur un volume élémentaire. Ces valeurs moyennes sont appelées *pressions macroscopiques* (ici, le mot macroscopique doit être compris au sens générique pour une échelle supérieure à celle de départ).

Les méthodes d'homogénéisation, permettant d'obtenir sous certaines conditions des équations de transport macroscopiques et des propriétés effectives reliées aux propriétés à l'échelle inférieure, sont nombreuses. Elles reposent sur le principe de séparabilité des échelles d'observation. Soient L la dimension caractéristique du réservoir, R le rayon d'un volume représentatif du réservoir et l la longueur caractéristique des hétérogénéités à l'échelle locale. La mise à l'échelle, en vue de la simulation macroscopique des écoulements au sein du réservoir, peut être formulée si :

$$l \ll R \ll L \quad (1.10)$$

Deux difficultés se posent alors. Comment rendre compte de la dualité entre les deux milieux ? Comment éviter la perte d'informations sur la géométrie locale par passage à grande échelle ?

Il est important de noter que les volumes élémentaires sont définis par rapport à la géométrie à l'échelle locale, et donc caractérisés par l'interface physique entre les blocs matriciels

et les fractures les délimitant. Afin de rendre compte de cette géométrie, on introduit dans le modèle macroscopique des coefficients macroscopiques, mémoire de la géométrie à l'échelle locale. On n'évoquera pas ici le cas de milieux poreux fracturés faiblement percolants, pour lesquels l'approche continue n'est pas nécessairement pertinente.

1.2.1 Modèles double-porosité

Les modèles macroscopiques les plus utilisés dans l'industrie pétrolière sont appelés *modèles double-porosité*. Ils sont obtenus par homog n sation (Wheeler, [59]) du système (1.6)-(1.9), décrit à l'échelle locale. Le système à grande échelle résultant est alors le suivant :

$$\varphi_f^* c_f \frac{\partial P_f^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f^*}{\mu} \cdot \nabla (P_f^* + \rho_f^* g z_f) \right) - Q \quad (1.11)$$

$$\varphi_m^* c_m \frac{\partial P_m^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_m^*}{\mu} \cdot \nabla (P_m^* + \rho_m^* g z_m) \right) + Q \quad (1.12)$$

où φ_f^* et φ_m^* sont les porosités macroscopiques respectives des régions fracture et matrice, P_f^* et P_m^* les pressions macroscopiques respectives dans les régions fracture et matrice, \mathbf{K}_f^* et \mathbf{K}_m^* les tenseurs de perméabilité macroscopiques respectifs des régions fracture et matrice, ρ^* la masse volumique macroscopique du fluide et Q un terme caractérisant les échanges de fluide entre les deux régions.

Les porosités macroscopiques φ_f^* et φ_m^* sont définies par les relations suivantes :

$$\varphi_f^* = \varphi_f F_f \quad (1.13)$$

$$\varphi_m^* = \varphi_m F_m \quad (1.14)$$

où F_f et F_m sont les fractions volumiques respectives des domaines fracture et matrice, et φ_f et φ_m sont les porosités respectives de ces domaines, définies à l'échelle locale par le volume des vides contenus dans le domaine (fracture ou matrice) sur le volume total du domaine.

Ce modèle, faisant intervenir les tenseurs de perméabilité \mathbf{K}_f^* et \mathbf{K}_m^* , est appelé *modèle double-porosité double-perméabilité*, par opposition au *modèle double-porosité simple perméabilité*. Ce dernier est obtenu à partir du modèle (1.11)-(1.12) en imposant la simplification $\mathbf{K}_m^* = 0$. L'écoulement dans la région matrice n'est alors crée que par la différence de potentiels à l'interface entre les deux régions :

$$\varphi_f^* c_f \frac{\partial P_f^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f^*}{\mu} \cdot \nabla (P_f^* + \rho^* g z) \right) - Q \quad (1.15)$$

$$\varphi_m^* c_m \frac{\partial P_m^*}{\partial t} = Q \quad (1.16)$$

1.2.2 Différentes méthodes de la littérature

L'expression du terme d'échange Q , apparaissant dans les systèmes (1.11)-(1.12) et (1.15)-(1.16), doit, pour être la mémoire de l'information à l'échelle locale, rendre compte de la géométrie réelle de l'interface matrice-fracture sur les volumes élémentaires.

Modèles pseudo-permanents

Dans les *modèles pseudo-permanents*, la contribution matricielle à l'écoulement est proportionnelle à la différence des potentiels moyens entre la matrice et la fissure, et ne dépend pas du temps. Le terme d'échange est alors de la forme :

$$Q = \frac{\sigma \mathbf{K}_m}{\mu} (P_f^* - P_m^*) \quad (1.17)$$

Il s'agit d'un flux d'échange volumique par unité de volume matrice, d'unité $m^3 \cdot s^{-1} \cdot m^{-3}$. Le coefficient σ (m^{-2}), appelé *facteur de forme*, est constant, comme l'adjectif *pseudo-permanent* le rappelle. Ces modèles ont été proposés à l'industrie pétrolière par Barenblatt et Zheltov [7], puis par Warren et Root [58], bientôt suivis par de nombreux auteurs comme Odeh [41] ou Mavor et Cinco-Ley [35].

A ce jour, la plupart des simulateurs de réservoir fissuré utilisent une formulation homogénéisée des échanges basée sur l'hypothèse d'un régime pseudo-stationnaire.

Les modèles double-milieu avec terme d'échange pseudo-permanent incorporent dans la modélisation macroscopique un seul temps caractéristique. Or on peut montrer (Landereau [30]) que la relaxation diffusive du champ de pression dans une famille de N blocs matriciels fait intervenir N familles de temps caractéristiques associées aux valeurs propres de l'opérateur de Laplace sur chaque bloc (*cf* paragraphe 1.3.2, p. 23). Un modèle double-milieu n'offre donc, par principe, qu'une approximation du comportement réel du milieu fracturé. Cette approximation est, le plus souvent, mauvaise pour des temps très courts, ce qui peut être pénalisant, par exemple pour l'interprétation d'essais de puits (Landereau [31]).

Toutefois, l'objectif de la simulation de réservoir étant la prédiction sur des temps longs (durée de vie d'un réservoir, par exemple), l'hypothèse de prépondérance du régime permanent sur le régime transitoire initial a pu paraître acceptable en première approximation (*cf*. Narasimhan, [39], par exemple). Pruess et Narasimhan [44] ont cependant démontré la nécessité de prendre en compte l'écoulement transitoire dans le milieu matriciel lorsque la perméabilité matricielle est très faible par rapport à la perméabilité de fracture.

1.2.3 Calcul du terme d'échange

Les modèles pseudo-permanents étant couramment utilisés dans l'industrie pétrolière, la question se pose de savoir comment calculer le facteur de forme σ , chargé de rendre compte de la géométrie à l'échelle locale de l'interface entre les régions matrice et fracture.

De nombreuses formulations ont été proposées, parmi lesquelles celles de Warren et Root [58], Kazemi *et al.* [29], Coats [13], Lim et Aziz [33], Bourbiaux *et al.* [9] et Sarda *et al.* [54] ou encore Quintard et Whitaker [46, 47].

Une comparaison des différents facteurs de forme peut être trouvée dans Sarda *et al.*, [54]. Cette étude démontre les écarts importants entre les valeurs fournies par les différentes méthodes. Ceci a conduit différents auteurs à chercher des méthodes visant à améliorer la représentation des divers temps caractéristiques.

1.3 Homogénéisation partielle : modèle mixte

Nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe des approches qui ne sont pas basées sur une formulation pseudo-permanente des échanges. On parle alors de *modèles transitoires*. Les auteurs ayant suivi ce type de démarche sont extrêmement nombreux, et le terme d'échange peut revêtir différentes formes. Toutefois, l'approche la plus courante repose sur des estimations transitoires du gradient de pression local entrant en jeu dans le terme d'échange, défini ci-dessous :

$$Q = \frac{1}{V_{tot}} \int_{\Gamma_{fm}} \frac{\mathbf{K}_m}{\mu} \cdot \nabla (P_m + \rho_m g z_m) d\Gamma \quad (1.18)$$

où Γ_{fm} est l'aire de contact entre les deux milieux.

Ce type de modèles a été introduit par Kazemi [28], puis développé par de Swaan [16], McGuinness [36], Najurieta [38] ou encore Arbogast [5]. Une revue des termes d'échange tenant compte du caractère transitoire des écoulements a été réalisée par Chen [12].

Ici, nous nous intéressons particulièrement aux *modèles mixtes*, basés sur l'utilisation couplée de deux échelles de grandeur différentes pour les équations relatives à chacun des deux milieux. Introduits de diverses manières par de nombreux auteurs (Kazemi, [28] ou encore de Swaan [17]), on peut en faire une présentation appuyée sur des développements asymptotiques en fonction d'un petit paramètre, noté ε (Arbogast *et al.* [4, 1, 5, 2, 3]). Les développements bien connus ne seront pas reproduits dans le détail ici.

Le milieu fracture est décrit en termes de propriétés à grande échelle alors que le transport dans le milieu matriciel est résolu à petite échelle. Le couplage de ces deux approches se fait ensuite par l'intermédiaire d'une condition aux limites à l'interface entre les deux milieux. Concrètement, la pression *locale* sur la surface matricielle est égale à la pression *macroscopique* du milieu homogénéisé fracture, d'où le vocable *mixte*.

Le principal avantage de cette méthode est de conserver une description fine des écoulements dans le milieu matriciel, tout en travaillant à grande échelle sur la région fracture.

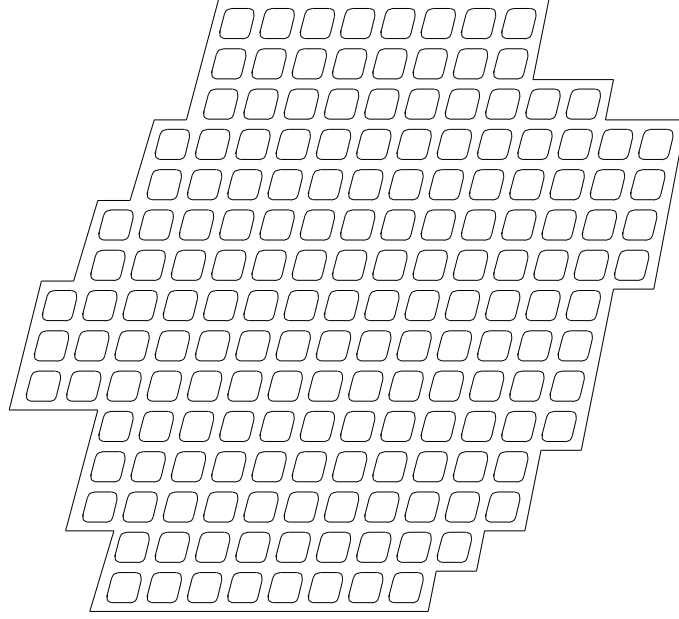
1.3.1 Hypothèses et limites de validité de l'homogénéisation

Soit un réservoir fracturé, noté Ω , idéalisé par un milieu poreux de structure périodique, répétition de blocs matriciels séparés par des fractures. La Fig. 1.1 présente la géométrie du réservoir Ω .

Le réservoir Ω est l'union d'ensembles disjoints identiques, notés \mathcal{Q} . Un ensemble \mathcal{Q} est composé de trois parties (*cf.* Fig. 1.2) :

- un domaine représentant le bloc matriciel, noté \mathcal{Q}_m ,
- un domaine fracture connecté, noté \mathcal{Q}_f ,
- une frontière entre les deux domaines précédents, notée $\partial\mathcal{Q}_m$.

Le modèle mixte est un modèle dans lequel les écoulements dans le domaine fracture sont homogénéisés, alors que les écoulements dans le domaine matrice sont décrits à l'échelle locale. Soient Ω_f et Ω_m respectivement l'ensemble du domaine fracture et l'ensemble du domaine matrice dans le réservoir Ω . Le domaine Ω_m est l'union des blocs \mathcal{Q}_m .

FIG. 1.1 – Structure périodique du réservoir Ω

Le système partiellement homogénéisé obtenu à partir des équations (1.6)-(1.7) s'écrit alors (développements dans Arbogast [1], Arbogast *et al.* [5], Douglas *et al.* [19]) :

$$\varphi_f^* c_f \frac{\partial P_f^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f^*}{\mu} \cdot \nabla P_f^* \right) - \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\partial \mathcal{Q}_m} \frac{\mathbf{K}_m}{\mu} \cdot \nabla P_m \cdot \mathbf{n}_{fm} d\Gamma \quad \text{dans } \Omega_f \quad (1.19)$$

$$\varphi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_m}{\mu} \cdot \nabla P_m \right) \quad \text{dans } \mathcal{Q}_m \quad (1.20)$$

et la condition aux limites associée (1.9) fournit l'équation suivante :

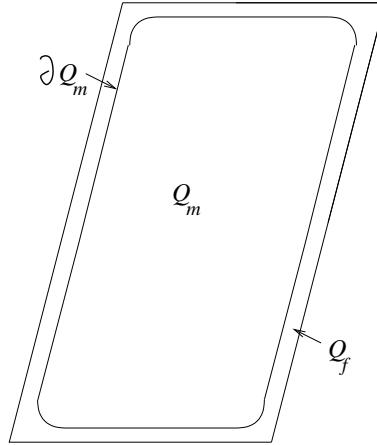
$$P_f^* = P_m \quad \text{sur } \partial \mathcal{Q}_m \quad (1.21)$$

Les grandeurs assorties d'une étoile sont exprimées à l'échelle macroscopique.

Remarque 1.3.1 *Les termes gravitaires ont été omis lors de l'homogénéisation partielle. Ils peuvent être introduits (Arbogast [3]) dans le système (1.19)-(1.20) après une linéarisation à l'ordre 1 de la masse volumique à l'échelle locale.*

La condition aux limites (1.21) est extrêmement importante car elle décrit les échanges entre les milieux à l'échelle des blocs. Elle mérite ainsi d'être détaillée, car elle impose une restriction au modèle mixte. En effet, si on introduit la décomposition spatiale suivante, qui exprime la pression locale en fonction de la pression macroscopique :

$$P_f = P_f^* + \tilde{P}_f \quad (1.22)$$

FIG. 1.2 – Ensemble Q

où \tilde{P}_f est la déviation macroscopique de la pression dans la région fracture, la condition aux limites (1.9) s'écrit alors :

$$P_f^* + \tilde{P}_f = P_m \quad (1.23)$$

L'équivalence entre les relations (1.21) et (1.9) est alors vraie si, dans la région fracture, la déviation de la pression \tilde{P}_f est négligeable devant la pression macroscopique P_f^* :

$$\tilde{P}_f \ll P_f^* \quad (1.24)$$

Cela revient à considérer que, sur l'interface entre les régions, la pression à l'échelle macroscopique dans le milieu fracture est égale à la pression à l'échelle locale dans le milieu matrice. Ceci n'est vrai que si la pression locale peut être considérée comme uniforme spatialement à la surface des blocs. Concrètement, le modèle mixte présenté ci-dessus est valable si le gradient de pression dans le réseau de fractures est suffisamment faible, afin que la pression locale P_f s'écarte très peu de la pression macroscopique P_f^* à l'échelle d'un volume élémentaire de réservoir. Ceci est vrai lorsque la perméabilité du réseau de fractures est grande par rapport à la perméabilité de matrice.

L'équation 1.24 est une condition de "raccordement" (entre le modèle à grande échelle homogénéisé relatif au domaine fracture et le modèle à l'échelle locale relatif au domaine matrice) qui constitue la limite du modèle mixte. Il faudra la garder à l'esprit en pratique afin que les bénéfices d'un tel modèle, c'est-à-dire une meilleure représentation des échanges, ne soient pas obtenus au détriment du respect des conditions d'écoulement et de structure propre à chacun des deux domaines.

1.3.2 Solutions du problème mathématique

Landereau [30, 31] a mis en évidence les approximations permettant de simplifier le modèle mixte en le modèle pseudo-permanent conventionnel, lorsque le rapport $\mathbf{K}_f F_f / \mathbf{K}_m F_m$ tend vers l'infini.

Il a proposé une représentation attractive du modèle mixte (1.19)-(1.21) en introduisant la méthode de Fourier afin de diagonaliser l'opérateur spatial du Laplacien.

Remarque 1.3.2 *Un rapport $\mathbf{K}_f F_f / \mathbf{K}_m F_m$ infini est une hypothèse cohérente avec les limites de validité du modèle mixte. En effet, l'écoulement dans la région fracture est alors si rapide qu'à la surface des blocs, la pression peut être considérée comme uniforme spatialement à chaque instant.*

La projection de P_m sur une base orthonormée composée des fonctions propres du Laplacien permet de ré-écrire le système (1.19)-(1.21) sous une forme algébrique similaire à celle des modèles pseudo-permanents :

$$\varphi_f^* c_f \frac{\partial P_f^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f^*}{\mu} \cdot \nabla P_f^* \right) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \lambda_k \frac{K_m}{\mu} (P_f^* - P_k) \quad (1.25)$$

$$\varphi_m c_m \frac{\partial P_m}{\partial t} = -\frac{K_m}{\mu} \lambda_k (P_k - P_f^*) \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

où la série $\{b_k\}_k$ est une série de coefficients adaptés et P_k est la projection normalisée de P_m sur la k -ième fonction propre du Laplacien.

Cette formulation va permettre d'identifier de façon claire la source d'erreur des modèles macroscopiques. En effet, comparons maintenant la formulation pseudo-permanente du terme d'échange, définie par (1.17), et le terme d'échange défini dans la relation (1.25).

Si on remplace dans le système précédent la totalité des valeurs propres par une valeur unique λ_r , la représentation transitoire du modèle mixte se simplifie :

$$\varphi_f^* c_f \frac{\partial P_f^*}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{K}_f^*}{\mu} \cdot \nabla P_f^* \right) - \frac{\lambda_r K_m}{\mu} (P_f^* - P_m^*) \quad (1.27)$$

$$\varphi_m^* c_m \frac{\partial P_m^*}{\partial t} = -\frac{\lambda_r K_m}{\mu} (P_m^* - P_f^*) \quad (1.28)$$

La formulation pseudo-permanente est ainsi une approximation de la réponse transitoire donnée par un modèle mixte, qui consiste à poser :

$$\sigma = \lambda_r \quad (1.29)$$

Les différentes possibilités afin de choisir la valeur λ_r expliquent la multitude de modèles macroscopiques pseudo-permanents proposés dans la littérature, et les écarts importants entre les formulations du coefficient σ .

1.4 Cas des écoulements multiphasiques

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu, sur l'exemple d'un fluide monophasique faiblement compressible, les difficultés que pose l'utilisation des modèles macroscopiques pseudo-permanents, et comment les modèles mixtes permettent de pallier ces difficultés en proposant une méthode plus précise (mais aussi considérablement plus lourde dans le cas général, on y reviendra) pour simuler les écoulements dans les réservoirs fracturés.

Lorsqu'on s'intéresse à l'écoulement de fluides multiphasiques, éventuellement multi-compositionnels, la complexité du problème est accrue de par la présence de fortes non-linéarités, induites particulièrement par l'apparition dans les équations à l'échelle locale des perméabilités relatives des fluides en présence. Le terme d'échange est alors fortement dépendant du phénomène considéré. La formulation pseudo-permanente n'est donc plus adaptée et de nombreux auteurs ont proposé des méthodes d'évaluation des termes d'échange matrice-fracture dépendantes du ou des phénomènes étudiés.

Pour des mécanismes d'imbibition pure, Thomas *et al.* [56] proposent un terme d'échange utilisant un facteur de forme, évalué par calage grâce à des simulations fines sur un bloc unique.

Toutefois, dès que les mécanismes mis en jeu sont plus complexes (tenant compte de la gravité, par exemple), la solution simple d'un facteur de forme ne suffit plus, et une grande partie des auteurs ont recours à des fonctions de transfert empiriques, des pseudo-paramètres et / ou des procédures de calage.

L'utilisation des fonctions de transfert consiste à contrôler l'échange entre les deux milieux constitutifs en décrivant la récupération de la matrice comme une fonction du temps. Cette méthode a été investiguée par Reiss [49]. Les fonctions doivent être déterminées hors du simulateur, par simulation sur un bloc unique, par exemple.

Les principaux pseudo-paramètres utilisés sont des pseudo-courbes de pression capillaire et de perméabilité relative. Il s'agit de modifier les courbes de pression capillaire et de perméabilité relative afin d'y introduire un terme gravitaire, en se basant sur le respect d'une condition d'équilibre vertical, à l'issue du processus, entre les forces gravitaires et capillaires en tout point des blocs. Thomas *et al.* [56] ont ainsi étudié un modèle proposé par Kazemi *et al.* [29], dans lequel les termes d'échange étaient proportionnels à la différence de potentiel associée aux forces capillaires, les effets gravitaires étant négligés. Ce modèle a ensuite été amélioré par Gilman et Kazemi [24] qui ont tenté d'introduire les effets gravitaires en recalculant, pour chacun des milieux, les hauteurs de contact des fluides, la différence générant le terme de gravité. Sonier *et al.* [55] reprendront plus tard cette idée de hauteurs de contact différentes, en y intégrant la notion de saturations irréductibles. Toutefois, ils ne tiennent pas compte de la dépendance en temps de la ségrégation gravitaire, et fournissent ainsi des résultats trop optimistes (Rossen et Shen, [50]). De plus, comme le soulignent Sonier et Blaskovitch [55], la même pseudo-courbe de perméabilité relative est utilisée pour les écoulements dans la région fracture et pour les termes d'échanges entre les deux régions, alors que les comportements sont tout à fait différents.

Les travaux de Rossen et Shen [50] démontrent que l'hypothèse de ségrégation gravitaire des fluides est souvent erronée. Or c'est sur cette hypothèse que se base l'introduction du terme de gravité dans le terme d'échange. Ainsi, Rossen et Shen utilisent des pseudo-courbes de pression capillaire, tenant compte des mécanismes de drainage, mais n'incluant pas de terme de gravité. Ces pseudo-courbes sont obtenues par simulation fine sur un bloc matriciel unique, tenant compte des effets capillaires et gravitaires. Une démarche similaire est suivie par Dean et Lo [18].

En 1989, Quandalle et Sabathier [45] proposent un traitement des échanges matrice-fracture basé sur un traitement indépendant de chaque force en présence. Les échanges sont calculés entre un unique bloc matriciel supposé représentatif, situé au centre de la cellule de calcul, et la fracture environnante. Les trois forces agissant sur les écoulements entre les deux milieux (forces capillaire, gravitaire et visqueuse) sont exprimées en faisant intervenir les potentiels au centre des différentes faces du bloc matriciel. Compte-tenu de l'approximation de cette représentation sur l'estimation du flux d'échange matrice-fracture, les trois termes composant la différence de potentiels, associés aux trois forces en présence, sont pilotés chacun par un coefficient fourni comme entrée du simulateur. Ces coefficients sont issus de procédés de calage d'historique ou de simulation simple-porosité sur modèle de bloc finement maillé. Suite à une reprise de ces travaux en 1998 par Sabathier *et al.* [51], les coefficients pilotant l'influence propre de chacune des forces en jeu ne sont alors plus évalués par calage d'historique, mais par des procédures automatiques de calcul intégrées dans le simulateur pour les cas courants d'imbibition capillaire eau-huile et de drainage gravitaire gaz-huile. En particulier, pour le processus d'imbibition capillaire, la distance d'échange mise en jeu dans la transmissivité matrice-fracture n'est plus supposée constante mais évaluée comme une fonction de la saturation du milieu matrice. Cette démarche permet une meilleure reproduction du comportement transitoire de l'écoulement.

Enfin, toujours dans l'objectif de prédire convenablement le comportement transitoire, sans se baser sur une hypothèse d'état quasi-stationnaire, une autre voie a été explorée : le sous-maillage des blocs matriciels. Saidi [53] relève l'importance des blocs matriciels, puisque ces derniers contiennent la quasi-totalité des réserves d'huile. Parallèlement, dans ce même article, il insiste sur la non validité de l'utilisation des fonctions de transfert et autres pseudo-courbes lorsque les mécanismes simulés sont complexes, comme par exemple l'injection d'air. Dans ce type de processus, les fonctions de transfert, définies pour des processus simples, perdent leur caractère prédictif. De plus, la détermination des pseudo-courbes à partir de simulations fines les rend dépendantes des conditions initiales et aux limites du problème étudié, c'est-à-dire qu'une pseudo-courbe n'est valable que pour les conditions initiales de saturation considérées dans les deux milieux. Chaque nouveau jeu de conditions doit alors faire l'objet d'une nouvelle simulation fine. Saidi conclut alors sur l'intérêt d'envisager une technique de sous-maillage des blocs matriciels afin de s'affranchir de ces contraintes de calage, le sous-maillage permettant en effet de tenir compte de l'évolution de la pression dans les blocs matriciels pour toute condition imposée à leur limite par le milieu fracture. Suivant ces travaux, Pruess et Narasimhan [44] proposent un simulateur, selon une méthode appelée MINC (Multiple INteracting Continua), dans lequel les blocs matriciels sont partitionnés en fonction de la distance à la fracture.

La méthode de sous-maillage des blocs matriciels peut être envisagée comme une méthode mixte, puisque les différentes cellules composant les blocs sous-maillés obéissent à des lois exprimées à l'échelle locale, tandis que les mailles fracture sont régies par des équations macroscopiques.

L'efficacité de la méthode MINC, et sa précision, sont démontrées alors sur des exemples géothermiques. En 1986, Gilman [23] démontre la nécessité d'une technique de sous-maillage

des blocs matriciels lorsque les transferts de fluides ou de chaleur dans les blocs matriciels sont importants, comme lors du processus de conduction de la chaleur. Le sous-maillage s'effectue en regroupant des blocs de comportement similaire. Bien que le nombre de variables passe de $2n_i$ à $n_i(N+1)$ par cellule de calcul, avec n_i le nombre d'inconnues par milieu et par cellule de calcul et N_{sm} le nombre de sous-maillages, l'augmentation du temps de calcul reste raisonnable, et n'est pas directement proportionnelle à l'augmentation du nombre de mailles. Les résultats fournis par les méthodes de sous-maillage sont en adéquation avec ceux obtenus sur des modèles finement maillés, mais le temps de calcul reste rédhibitoire. Malgré la publication des travaux de Vossoughi et Asghari [57], traitant des simplifications numériques de la méthode MINC via un découplage des inconnues fracture et matrice et la récente contribution de Naimi-Tajdar *et al.* [37], les modèles mixtes et autres techniques de sous-maillage des blocs matriciels restent extrêmement peu usitées dans les simulateurs de réservoirs fracturés.

Dans cette thèse, on se propose d'introduire un modèle mixte afin d'accroître le caractère prédictif des simulateurs de réservoir fracturé à double-milieu. L'objectif est d'assurer à ces derniers une fiabilité accrue du calcul des échanges matrice-fracture, quel que soit le processus de production étudié, même complexe. Dans le cadre de cette thèse, le modèle mixte est formulé pour les cas d'échanges capillaires purs, gravitaires purs et capillo-gravitaires, et programmé dans le simulateur de réservoir ATHOS, développé à l'I.F.P.

1.5 Mise en œuvre du modèle mixte

L'introduction d'un modèle mixte dans un simulateur conventionnel est soumise à des contraintes de conception fortes, visant d'une part à minimiser le temps de calcul additionnel, d'autre part à inscrire ce modèle dans le schéma structurel du logiciel existant. Ce paragraphe reprend les contraintes qui ont guidé notre travail.

1.5.1 Bloc matriciel unique représentatif

Le problème initial de l'écoulement d'un fluide, exprimé à l'échelle locale, était trop complexe pour être résolu dans les deux milieux. L'utilisation d'un modèle mixte permet d'homogénéiser les lois d'écoulement dans la région fracture, et donc de simplifier grandement le problème. Toutefois, un terme d'échange doit toujours être calculé entre la région fracture homogénéisée et chaque bloc matriciel composant la région matrice. Le temps de calcul associé à la résolution d'un tel système, lorsqu'il est étendu à un réservoir, est donc considérable.

Pour simplifier le problème, et donc diminuer le temps de calcul associé, il est courant de supposer que le milieu matrice est uniforme à l'échelle d'un volume élémentaire du réservoir, c'est-à-dire que tous les blocs matriciels sont identiques dans ce volume élémentaire (Warren et Root [58], Kazemi *et al.* [29] et toutes les méthodes dérivées de ces travaux). Ainsi, il est suffisant d'étudier le comportement d'un seul de ces blocs pour en déduire le comportement de l'ensemble des blocs matriciels dans le volume élémentaire. En particulier, l'échange matrice-fracture est alors calculé entre un bloc unique et la région fracture contenue dans le volume élémentaire. Ce bloc unique sera appelé par la suite *bloc représentatif*.

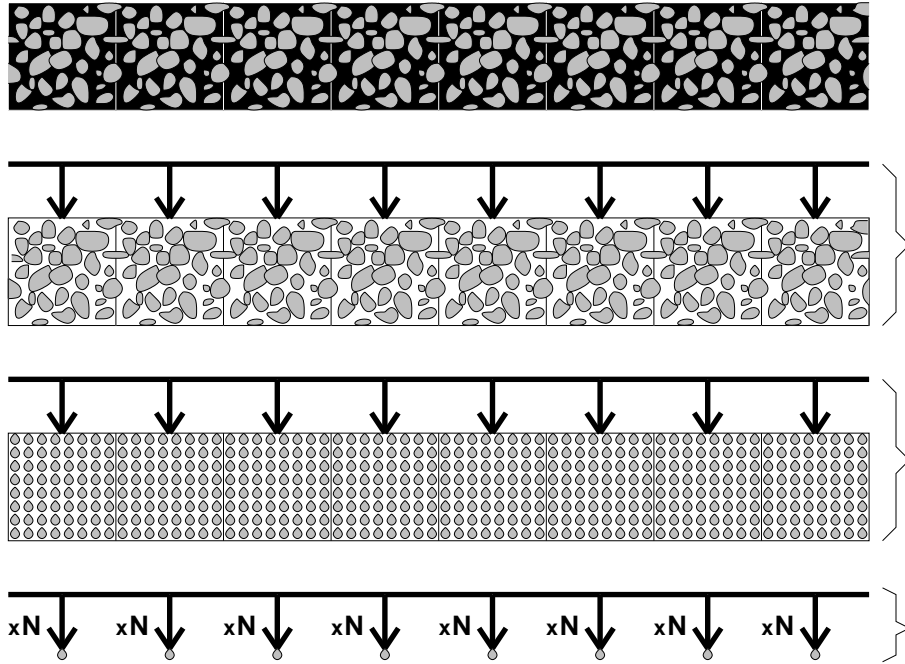


FIG. 1.3 – Modèle local, modèle mixte, hypothèse des blocs identiques et hypothèse du bloc représentatif (de haut en bas)

L'utilisation de l'hypothèse du bloc représentatif permet alors de réduire le nombre de termes d'échange calculés entre les régions fracture et matrice.

La Fig. 1.3 présente, sur quatre niveaux, les représentations des différentes simplifications effectuées. Elle se lit de haut en bas. Le premier niveau représente un domaine fracturé, dans lequel la région matrice est représentée en gris et la région fracture en noir. L'écoulement entre régions est alors exprimé à l'échelle locale. Le second niveau représente d'une part la région fracture homogénéisée (ligne noire) et d'autre part les blocs de la région matrice en gris. A ce stade des simplifications, il s'agit d'un modèle mixte conventionnel, et un terme d'échange doit être calculé entre la région fracture et chaque bloc (en gris). Le troisième niveau représente un modèle mixte dans lequel on a fait l'hypothèse que tous les blocs matriciels sont identiques par mailles. Enfin, le dernier niveau représente un modèle mixte auquel on a adjoint l'hypothèse de bloc représentatif. Les échanges entre régions ne sont alors plus calculés qu'entre la région fracture homogénéisée et le bloc représentatif de chaque volume élémentaire.

1.5.2 Utilisation du modèle de Warren et Root

Le logiciel ATHOS, développé par l'IFP, est un simulateur de réservoir conventionnel, pouvant simuler tout type de réservoir pétrolier dans le temps. Ici, nous nous intéressons particulièrement à la possibilité de simuler les écoulements dans les réservoirs fracturés. Lorsque cette option est choisie, le logiciel utilise un modèle macroscopique, pseudo-permanent, dans

lequel les termes d'échange utilisés dépendent des phénomènes simulés (Quandalle et Sabathier [45], Sabathier *et al.*, [51]). Pour formuler ces termes à l'échelle d'une maille du simulateur, l'hypothèse de l'existence d'un bloc représentatif par maille est faite.

Concrètement, la représentation idéalisée des réservoirs fracturés proposée par Warren et Root [58] est adoptée. Le réservoir est ainsi constitué d'un ensemble de blocs parallélépipédiques rectangles identiques par région, limités par un ensemble de fractures orthogonales orientées selon les directions principales de l'écoulement (*cf.* Fig. 1.4). Ce type de géométrie est appelé *réseau Warren et Root* ou encore, plus familièrement, *boîte à sucres*.

La représentation de Warren et Root ne signifie bien sûr pas que la géométrie du réservoir fracturé est de type boîte à sucres. Il s'agit d'une idéalisation : on suppose qu'il est possible de déterminer les caractéristiques de cette géométrie, c'est-à-dire les dimensions des blocs, de telle sorte que le comportement hydrodynamique du réservoir fracturé réel puisse être reproduit au moyen de la représentation de Warren et Root. La taille du ou des blocs équivalents, utilisés dans la représentation de Warren et Root, est habituellement déterminée par l'étude de carottes ou par des tests d'interférence (Warren et Root [58]). Des travaux plus récents (Bourbiaux *et al.* [10]) permettent de déterminer cette taille de bloc à partir d'images géologiques.

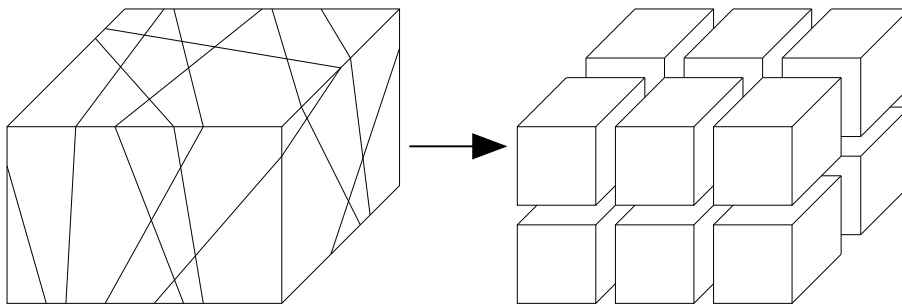


FIG. 1.4 – Réseau de fractures réel (à gauche) et représentation idéalisée de Warren et Root (à droite)

L'adoption du simulateur ATHOS (une des contraintes de ce travail) pour mettre en œuvre un modèle mixte impose donc d'utiliser un réseau de Warren et Root, puis de sous-mailler les blocs représentatifs.

1.6 Conclusions

Les approximations grossières permettant l'utilisation de modèles à deux équations ont été mises en évidence dans le cas de l'écoulement d'un fluide monophasique faiblement compressible. La volonté de traiter des écoulements multiphasiques, résultant éventuellement de plusieurs mécanismes, nous a mené à étudier les différentes méthodes de simulation proposées dans la littérature, en particulier les modèles mixtes, dont une des applications consiste à

sous-mailler le domaine matrice.

Ainsi, l'objectif de cette thèse est d'utiliser, au sein d'un modèle de réservoir double-milieu existant, une formulation mixte des échanges entre les deux domaines. Ce modèle sera créé pour les écoulements dus aux forces gravitaires et/ou capillaires, puis programmé et testé dans le simulateur de réservoir ATHOS pour le cas d'écoulements capillaires purs.

Ce travail est mené dans le cadre d'hypothèses simplificatrices, imposées par l'utilisation des simulateurs conventionnels de réservoir fracturé, sur l'échange entre les blocs matriciels et le réseau de fractures : pour chaque maille d'un tel simulateur, le calcul des termes d'échange porte sur un **bloc matriciel représentatif unique**, soumis à des **conditions aux limites uniformes**. De plus, la représentation de Warren et Root, vision idéalisée de la géométrie de réservoir, est utilisée.

Chapitre 2

Mise en œuvre d'un modèle mixte

Ce chapitre présente la modélisation mathématique et numérique conduisant à l'introduction d'un modèle mixte, consistant en un sous-maillage des blocs matriciels, dans un simulateur de réservoir fracturé conventionnel (ici, le simulateur ATHOS, développé par l'IFP).

Le premier paragraphe présente l'obtention des lois d'écoulement d'un fluide diphasique dans un réservoir fracturé, à l'échelle locale. Ces lois, exprimées d'abord dans le cas général d'un fluide triphasique, sont simplifiées dans le cas d'un modèle black-oil diphasique eau-huile.

Dans le second paragraphe, une homogénéisation partielle de ces lois d'écoulement est effectuée afin d'obtenir un modèle mixte. Une attention particulière est portée à la formulation des termes d'échange entre les régions matrice et fracture.

Afin de pouvoir comparer le modèle mixte au modèle homogénéisé conventionnel, les caractéristiques de ce dernier sont brièvement rappelées dans le troisième paragraphe.

Une fois le modèle formulé, il s'agit de détailler ensuite sa résolution numérique.

La discrétisation spatiale du réservoir fracturé, faisant intervenir des blocs matriciels sous-maillés au sein d'une géométrie idéalisée de Warren et Root, est présentée dans le quatrième paragraphe.

L'objet du cinquième paragraphe est la description de la discrétisation temporelle proposée. Il détaille le découplage en temps proposé pour réduire le coût numérique de la méthode de sous-maillage. Un système principal est d'abord résolu, constitué des équations relatives aux mailles fracture et aux sous-mailles matrice limitant les blocs, appelées *sous-mailles limites*, qui échangent avec les mailles fracture. La résolution de ce système, exprimé sur toutes les mailles du réservoir, permet la résolution, dans un second temps, des sous-systèmes (un par maille) liés aux écoulements le bloc matriciel représentatif de chaque maille.

Effectuée au moyen de la méthode des volumes finis, utilisée dans le simulateur ATHOS, la discrétisation des équations est détaillée dans le sixième paragraphe.

Le septième paragraphe est consacré à la linéarisation de Newton, méthode utilisée pour résoudre les systèmes fortement non-linéaires découlant des discrétisations précédentes.

Enfin, le huitième paragraphe rappelle brièvement les contraintes imposées par la programmation de notre modèle dans le simulateur ATHOS.

2.1 Lois d'écoulement à l'échelle locale

2.1.1 Lois de Darcy généralisées et lois de conservation de la masse

Dans le cas le plus général du génie pétrolier, les fluides, initialement en place ou injectés, sont composés de trois phases : l'eau, l'huile et le gaz. Chaque phase peut être composée de nombreux constituants. L'écoulement de tels fluides est alors décrit par les variations spatiales et temporelles des températures, pression et saturation. La modélisation de cet écoulement à l'échelle de Darcy (Aziz et Settari [6]) se base sur des lois combinant :

- les lois de Darcy généralisées,
- les lois de conservation de la masse,
- les relations thermodynamiques.

Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons à des modèles isothermes, sans variation de température.

Les lois de conservation de la masse expriment l'égalité, sur un volume élémentaire, entre les flux entrants et sortants et les variations de masse au sein du volume considéré en fonction du temps.

Les flux proviennent :

- des échanges entre mailles,
- des débits injectés ou soutirés par les puits,
- des échanges aux frontières du réservoir.

La variation de la masse de chaque constituant peut être due :

- à la variation de saturation due au balayage d'un fluide par un autre,
- à la compressibilité par variation de pression,
- à la variation de concentration (mélange de concentrations différentes dans une même phase et/ou échanges entre phases).

La loi de conservation de la masse s'écrit, pour un constituant, indicé c , présent dans plusieurs phases, indicées p :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \sum_p C_{cp} \rho_p S_p \right) = -\nabla \cdot \left(\sum_p C_{cp} \rho_p \mathbf{V}_p \right) + q_c \quad (2.1)$$

avec :

- φ la porosité,
- C_{cp} la fraction massique du constituant c dans la phase p ,
- ρ_p la masse volumique de la phase p ,
- S_p la saturation de la phase p ,
- \mathbf{V}_p la vitesse de filtration de la phase p ,
- q_c le débit du constituant c injecté ou soutiré par le puits.

La loi de Darcy, trouvée empiriquement par son auteur en 1856 dans le cas d'un écoulement monophasique monodimensionnel, lie la vitesse de filtration et le gradient de pression (cf. paragraphe 1.1.3, p. 17) :

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{K}}{\mu} \cdot \nabla (P + \rho g z) \quad (2.2)$$

Si l'écoulement est tridimensionnel et multiphasique, elle est généralisée par l'équation suivante :

$$\mathbf{V}_p = -\frac{k_{rp}\mathbf{K}}{\mu_p} \cdot \nabla (P_p + \rho_p g z) \quad (2.3)$$

avec :

- k_{rp} la perméabilité relative de la phase p ,
- μ_p la viscosité dynamique de la phase p ,

Remarque 2.1.1 *La loi de Darcy est valable pour des fluides Newtoniens et pour des débits suffisamment faibles. Les effets d'inertie et de turbulence sont alors négligeables. Dans la suite de ce travail, nous supposons que la loi de Darcy, et sa généralisation à des écoulements multiphasiques, sont valables.*

En intégrant la loi de Darcy généralisée (2.3) dans l'équation (2.1), on obtient l'équation d'écoulement générale du constituant c :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varphi \sum_p C_{cp} \rho_p S_p \right) - \nabla \cdot \left(\mathbf{K} \sum_p M_{cp} \nabla (P_p + \rho_p g z) \right) - q_c = 0 \quad (2.4)$$

où la mobilité massique M_{cp} du composant c dans la phase p est définie par :

$$M_{cp} = \frac{k_{rp}}{\mu_p} \rho_p C_{cp} \quad (2.5)$$

L'équation (2.4) est complétée par le bilan des fractions massiques des composants c d'une phase p :

$$\sum_c C_{cp} = 1 \quad (2.6)$$

et par l'équation :

$$S_w + S_o + S_g = 1 \quad (2.7)$$

traduisant l'hypothèse faite que les fluides emplissent la totalité du volume disponible. Les indices w , o et g se rapportent respectivement aux phases eau, huile et gaz.

2.1.2 Notion de pression capillaire

La notion de pression capillaire découle des effets de la tension interfaciale (tension à l'interface séparant deux milieux fluides) et de la mouillabilité du solide, c'est-à-dire l'affinité de ce dernier pour l'un ou l'autre des deux fluides en présence. Cette affinité se traduit par un angle de mouillage supérieur à 90° pour un fluide mouillant, et inférieur à 90° pour un fluide non mouillant (cf Fig. 2.1).

La pression capillaire, notée P_c , est définie comme la différence de pression, à l'échelle locale, entre deux points voisins situés de part et d'autre d'une interface séparant deux fluides (Marle [34]) :

$$P_c = P_{nmo} - P_{mo} \quad (2.8)$$

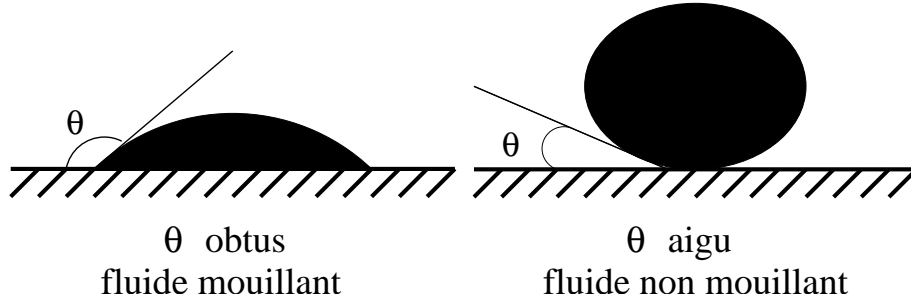


FIG. 2.1 – Fluides mouillant et non-mouillant

où les indices nmo et mo se réfèrent respectivement aux fluides non mouillant et mouillant. Le signe de P_c résulte d'une convention arbitraire (ici, il est choisi de telle sorte que la pression capillaire soit positive).

Pour les deux couples eau-huile et gaz-huile, les deux pressions capillaires suivantes peuvent être définies :

$$P_{c_w} = P_o - P_w \quad (2.9)$$

$$P_{c_g} = P_g - P_o \quad (2.10)$$

Dans le cas eau-huile, la pression capillaire ainsi définie n'est pas forcément positive (cas d'une roche de mouillabilité intermédiaire, par exemple).

La notion de pression capillaire peut être liée à celle de la saturation. En effet, la pression capillaire est égale à la courbure de l'interface multipliée par la tension interfaciale. Dans le cas d'un tube capillaire conique, la forme de l'interface est connue (il s'agit d'une calotte sphérique) et l'angle de raccordement entre l'interface et la surface solide du milieu poreux est déterminé. La position de l'interface résulte d'un calcul simple, et la proportion de chacun des fluides dans ce capillaire, c'est-à-dire la saturation de ces fluides, est alors directement liée à la pression capillaire (Marle [34]).

Toutefois, lorsque le milieu poreux est de géométrie complexe, plusieurs formes d'interface coexistent, donnant des valeurs de saturations différentes pour une même valeur de pression capillaire.

Dans la pratique, on admet qu'il existe une relation déterminée entre pression capillaire et saturations des fluides en présence :

$$P_{c_w}(S_w, S_g) = P_o - P_w \quad (2.11)$$

$$P_{c_g}(S_w, S_g) = P_g - P_o \quad (2.12)$$

2.1.3 Modèle black-oil diphasique eau-huile

Lorsque le transfert entre phases est limité à la présence d'un composant gaz dans les phases huile et gaz, l'écoulement est modélisé par une équation par phase : c'est le modèle "black-oil". La phase eau n'est alors constituée que du composant eau, la phase gaz que du composant gaz, et la phase huile est composée d'huile et de gaz dissous.

En indiquant e , h et v respectivement les composants eau, huile et gaz, et w , o et g respectivement les phases eau, huile et gaz, le bilan des fractions massiques s'écrit :

$$\begin{aligned} C_{ew} = 1 \quad \text{et} \quad C_{hw} = C_{vw} = 0 \\ C_{vg} = 1 \quad \text{et} \quad C_{eg} = C_{hg} = 0 \\ C_{vo} + C_{ho} = 1 \quad \text{et} \quad C_{eo} = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Une simplification du modèle black-oil est de ne considérer que les phases eau et huile. Dans ce cas, utilisé pour reproduire un processus d'imbibition pure, par exemple, les deux phases eau et huile ne sont composées que d'un seul constituant. Le bilan des fractions massiques (2.13) se simplifie alors :

$$C_{ew} = 1 \quad \text{et} \quad C_{ho} = 1 \quad (2.14)$$

ainsi que le bilan des saturations (2.7) :

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.15)$$

Chaque phase étant constituée d'un seul composant, les indices relatifs aux composants seront par la suite omis.

L'écoulement d'un fluide diphasique eau-huile décrit à l'échelle locale est alors régi par le système suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_w S_w) - \nabla \cdot (M_w \mathbf{K} \cdot \nabla (P_w + \rho_w g z)) - q_w = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_o S_o) - \nabla \cdot (M_o \mathbf{K} \cdot \nabla (P_o + \rho_o g z)) - q_o = 0 \quad (2.17)$$

Les inconnues du système sont au nombre de 4 : P_w , P_o , S_w et S_o . Or seules deux équations composent le système. Le nombre d'inconnues est donc réduit en utilisant les relations définissant le bilan des saturations et les pressions capillaires. Ainsi, on peut définir l'inconnue principale de saturation, notée S , par :

$$S_w = S \quad \text{et} \quad S_o = 1 - S \quad (2.18)$$

et l'inconnue principale de pression, notée P , par :

$$P_o = P \quad \text{et} \quad P_w = P - P c_w (S_w = S) \quad (2.19)$$

Le système d'équations régissant l'écoulement d'un fluide diphasique eau-huile s'écrit, en intégrant les relations (2.18) et (2.19) dans le système (2.16)-(2.17) :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_w S) - \nabla \cdot (M_w \mathbf{K} \cdot \nabla (P - P c_w + \rho_w g z)) - q_w = 0 \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi \rho_o (1 - S)) - \nabla \cdot (M_o \mathbf{K} \cdot \nabla (P + \rho_o g z)) - q_o = 0 \quad (2.21)$$

2.1.4 Application au cas d'un système composé de deux milieux poreux distincts

Dans le cas d'un réservoir poreux fracturé, le système (2.20)-(2.21) doit être écrit pour le domaine matrice, indicé m , et pour le domaine fracture, indicé f :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f \rho_{w,f} S_f) - \nabla \cdot (M_{w,f} \mathbf{K}_f \cdot \nabla (P_f - Pc_{w,f} + \rho_{w,f} gz)) - q_{w,f} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{w,m} S_m) - \nabla \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} gz)) - q_{w,m} = 0 \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f \rho_{o,f} (1 - S_f)) - \nabla \cdot (M_{o,f} \mathbf{K}_f \cdot \nabla (P_f + \rho_{o,f} gz)) - q_{o,f} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{o,m} (1 - S_m)) - \nabla \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} gz)) - q_{o,m} = 0 \quad (2.25)$$

Ce système est complété par les conditions de continuité des flux et des pressions à l'interface entre les deux milieux :

$$\mathbf{n}_{fm} \cdot (M_{w,f} \mathbf{K}_f \cdot \nabla (P_f - Pc_{w,f} + \rho_{w,f} gz)) = \mathbf{n}_{mf} \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} gz)) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{n}_{fm} \cdot (M_{o,f} \mathbf{K}_f \cdot \nabla (P_f + \rho_{o,f} gz)) = \mathbf{n}_{mf} \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} gz)) \quad (2.27)$$

$$P_f - Pc_{w,f} = P_m - Pc_{w,m} \quad (2.28)$$

$$P_f = P_m \quad (2.29)$$

L'équation 2.28 traduit la continuité des pressions de la phase eau à l'interface.

2.2 Description du modèle mixte

En supposant la périodicité du réservoir fracturé étudié, on peut alors appliquer au système (2.22)-(2.25), décrit à l'échelle locale, un modèle mixte. Ainsi, les équations (2.22) et (2.24), relatives à la région fracture, seront homogénéisées et couplées aux équations (2.23) et (2.25) décrivant le transport, à l'échelle locale, dans la région matrice.

2.2.1 Homogénéisation partielle des équations

Afin d'homogénéiser les équations relatives à la région fracture, on choisit d'appliquer la méthode de prise de moyenne volumique proposée par Quintard et Whitaker [46, 60]. Les équations (2.22) et (2.24) sont ainsi intégrées sur un volume fracture moyen. Après utilisation du théorème de moyenne spatiale, le système (2.22)-(2.25) partiellement homogénéisé s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{w,f}^* S_f^*) - \nabla \cdot (M_{w,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* - Pc_{w,f}^* + \rho_{w,f}^* gz)) + f_w^* - q_{w,f} = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{w,m} S_m) - \nabla \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} gz)) - q_{w,m} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{o,f}^* (1 - S_f^*)) - \nabla \cdot (M_{o,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* + \rho_{o,f}^* gz)) + f_o^* - q_{o,f} = 0 \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{o,m} (1 - S_m)) - \nabla \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} gz)) - q_{o,m} = 0 \quad (2.33)$$

où

- S_f^* est la saturation macroscopique dans la région fracture,
- $M_{w,f}^*$ et $M_{o,f}^*$ sont les mobilités en eau et en huile définies par la relation (2.5) avec $C_{cp} = 1$ et homogénéisées :

$$M_{w,f}^* = \frac{k_{rw,f}^*}{\mu_w} \rho_w^* \quad \text{et} \quad M_{o,f}^* = \frac{k_{ro,f}^*}{\mu_o} \rho_o^* \quad (2.34)$$

- $Pc_{w,f}^*$ est la pression capillaire macroscopique dans la région fracture, définie directement par la connaissance de S_f^* :

$$Pc_{w,f}^* = Pc_{w,f}^*(S_f^*). \quad (2.35)$$

- f_w^* et f_o^* sont les termes d'échange matrice-fracture en eau et en huile exprimés sur une maille fracture homogénéisée. Ces termes d'échange sont développés dans le paragraphe suivant.

Les conditions aux bords des blocs, traduisant la continuité de pression, complètent ces équations :

$$P_f^* - Pc_{w,f}^* = P_m - Pc_{w,m} \quad (2.36)$$

$$P_f^* = P_m \quad (2.37)$$

Dans la suite de ce travail, on suppose que les puits ne se trouvent que dans la région fracture, soit :

$$q_{w,m} = q_{o,m} = 0 \quad (2.38)$$

Cette hypothèse est justifiée par l'utilisation de la géométrie idéalisée de Warren et Root, imposée comme contrainte (*cf.* paragraphe 1.5.2, p. 28). En effet, dans cette représentation, les régions matrice et fracture sont superposées, et chacune occupe la totalité du réservoir. On peut donc décrire la trajectoire d'un puits dans le réservoir à travers l'un, l'autre ou les deux milieux.

De plus, on suppose que la pression capillaire est nulle dans la fracture :

$$Pc_{w,f}^* = 0 \quad (2.39)$$

La condition (2.36) de continuité de la pression de la phase eau à l'interface entre les blocs et le réseau de fractures se simplifie alors :

$$Pc_{w,m} = 0 \quad (2.40)$$

2.2.2 Formulation des termes d'échange sur un bloc unique représentatif

Les termes d'échange, notés f_w^* pour la phase eau, et f_o^* pour la phase huile, sont les termes relatifs à la région matrice qui apparaissent dans les équations relatives à la région fracture. Il s'agit de termes communs aux deux régions matrice et fracture, mais qui n'apparaissent que dans les équations homogénéisées relatives à la région fracture. Ils traduisent l'échange

de flux entre les deux régions au sein du volume d'homogénéisation. Ces termes sont définis comme suit :

$$f_w^* = -\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}_m} \nabla \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m}gz)) \, dV \quad (2.41)$$

$$f_o^* = -\frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}_m} \nabla \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m}gz)) \, dV \quad (2.42)$$

Dans la formulation (2.43)-(2.44), l'ensemble \mathcal{Q}_m représente la totalité de la région matrice contenue dans le volume d'homogénéisation. Or, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.5.1, p. 27, ce travail utilise l'hypothèse du bloc matriciel représentatif. Ainsi, les termes d'échange peuvent être exprimés sur un bloc matriciel unique, puis multipliés par le nombre de blocs matriciels contenus dans le volume d'homogénéisation :

$$f_w = -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\Omega_b} \nabla \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m}gz)) \, dV \quad (2.43)$$

$$f_o = -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\Omega_b} \nabla \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m}gz)) \, dV \quad (2.44)$$

où N_b est le nombre de blocs matriciels contenus dans le volume d'homogénéisation et Ω_b est le domaine occupé par le bloc matriciel représentatif.

L'application du théorème de Green-Ostrogradsky permet d'écrire ces termes d'échange sous forme d'intégrales de surface, où $\partial\Omega_b$ est le bord du domaine Ω_b :

$$f_w^* = -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\partial\Omega_b} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m}gz) \, d\Gamma \quad (2.45)$$

$$f_o^* = -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\partial\Omega_b} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m}gz) \, d\Gamma \quad (2.46)$$

Cette formulation du terme d'échange peut être rapprochée des formulations transitoires décrites dans le paragraphe 1.3, p. 21.

2.3 Description du modèle homogénéisé conventionnel

Les équations (2.22) et (2.24) décrites à petite échelle peuvent aussi être homogénéisées, moyennant des estimations sur les champs de pression et de flux afin d'obtenir un *modèle double-milieu conventionnel*. Ce modèle est rappelé ici, car c'est lui qui, de façon classique, est résolu dans un simulateur de réservoir fracturé :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{w,f}^* S_f^*) - \nabla \cdot (M_{w,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* - Pc_{w,f}^* + \rho_{w,f}^*gz)) + f_w^* - q_{w,f} = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m^* \rho_{w,m}^* S_m^*) - \nabla \cdot (M_{w,m}^* \mathbf{K}_m^* \cdot \nabla (P_m^* - Pc_{w,m}^* + \rho_{w,m}^*gz)) - f_w^* - q_{w,m} = 0 \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{o,f}^* (1 - S_f^*)) - \nabla \cdot (M_{o,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* + \rho_{o,f}^*gz)) + f_o^* - q_{o,f} = 0 \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m^* \rho_{o,m}^* (1 - S_m^*)) - \nabla \cdot (M_{o,m}^* \mathbf{K}_m^* \cdot \nabla (P_m^* + \rho_{o,m}^*gz)) - f_o^* - q_{o,m} = 0 \quad (2.50)$$

où f_w^* et f_o^* sont les termes d'échange respectifs pour les phases eau et huile, exprimés sur le bloc matriciel représentatif.

2.4 Discrétisation spatiale

Afin de résoudre numériquement les équations régissant l'écoulement d'un fluide diphasique eau-huile dans un réservoir fracturé, le domaine du réservoir est *discrétisé*, c'est-à-dire décomposé en plusieurs parties, appelées *mailles numériques*. Sur chacune de ces mailles numériques, une valeur de chaque inconnue, ici pression et saturation, sera calculée en fonction du temps. Le réservoir est alors considéré comme un milieu discontinu.

Le maillage spatial choisi ici est une géométrie idéalisée de Warren et Root (*cf.* paragraphe 1.5.2, p. 28) dans laquelle les blocs représentatifs sont sous-maillés afin de mettre en œuvre un modèle mixte.

2.4.1 Maillage conventionnel et sous-maillage

Maillage conventionnel

Par *maillage conventionnel*, nous entendons ici le maillage utilisé habituellement pour la résolution numérique du modèle double-milieu conventionnel. Ce maillage classique, associé à une représentation de Warren et Root, consiste à discrétiser les régions matrice et fracture superposées par le même maillage, composés de mailles parallélépipédiques rectangles. Ainsi, une maille matrice représente un assemblage cartésien de blocs matriciels parallélépipédiques rectangles identiques. La maille fracture correspondante est une maille de mêmes dimensions superposée.

Pour le calcul des échanges matrice-fracture, le bloc matriciel représentatif (de l'ensemble des blocs contenus dans une maille matrice) est placé au centre de la maille matrice, de telle sorte que le centre du bloc coïncide avec le centre de la maille.

Les mailles numériques constituant le maillage spatial sont alors les mailles fracture pour la région fracture, et les mailles matrice pour la région matrice. Une valeur des inconnues pression et saturation est donc attribuée à chacune des mailles numériques.

Les *nœuds de calcul* sont les points dans les mailles où sont attribuées les valeurs des inconnues. Dans chaque maille numérique (mailles fracture et matrice), un nœud de calcul est placé au centre de la maille. Ainsi, les nœuds de calcul d'une maille fracture et de la maille matrice associée sont situés au même point.

La Fig. 2.2 présente de façon schématique la discrétisation spatiale décrite ci-dessus.

Sous-maillage

Voyons maintenant quelles modifications doivent être apportées à ce sous-maillage pour permettre l'application d'un modèle mixte.

Lorsqu'une représentation de Warren et Root est imposée, comme ici, le modèle mixte se rapproche d'une méthode de sous-maillage des blocs matriciels représentatifs (un par maille matrice) (*cf.* paragraphe 1.4, p. 24).

Le bloc matriciel représentatif est décomposé en plusieurs *sous-mailles numériques*. Au centre de chacune de ces sous-mailles est placé un nœud de calcul, et donc une valeur des inconnues pression et saturation. Pour calculer le terme d'échange entre les régions matrice

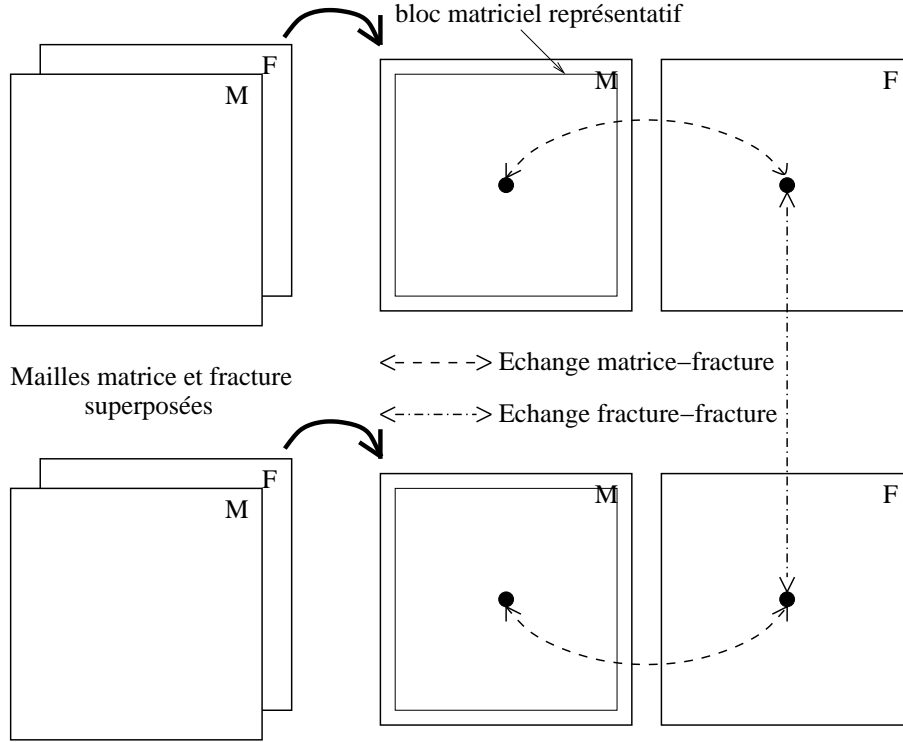


FIG. 2.2 – Schéma représentatif de la discrétisation spatiale associée à une représentation de Warren et Root

et fracture, on s'intéresse alors aux sous-maillages numériques qui limitent le bloc. Dans le cas d'un sous-maillage mono-dimensionnel, présenté Fig. 2.3, elles sont au nombre de deux. Ces sous-maillages numériques matricielles, qui échangent des fluides avec la maille fracture associée, sont appelées *sous-maillages numériques limites*.

La Fig. 2.3 présente de façon schématique la discrétisation spatiale dans le cas d'un sous-maillage mono-dimensionnel des blocs matriciels.

Notations

L'ensemble du réservoir fracturé Ω est subdivisé en mailles fracture, notées Ω_f , au nombre de N et en mailles matricielles, notées Ω_m , en même nombre que les mailles fracture associées :

$$\Omega = \left(\bigcup \Omega_f \right) \cup \left(\bigcup \Omega_m \right) \quad (2.51)$$

Chaque maille matricielle est composée d'un ensemble de blocs matriciels, notés Ω_b :

$$\Omega_m = \bigcup \Omega_b \quad (2.52)$$

Le bloc matriciel supposé représentatif de l'ensemble de ces blocs est sous-maillé. Les sous-maillages, au nombre de N_{sm} par bloc, sont notés ω_{mi} , à l'exception de la sous-maille limitant le bloc, appelée *sous-maille limite*, et notée ω_{ml} :

$$\Omega_b = \left(\bigcup \omega_{mi} \right) \cup \omega_{ml} \quad (2.53)$$

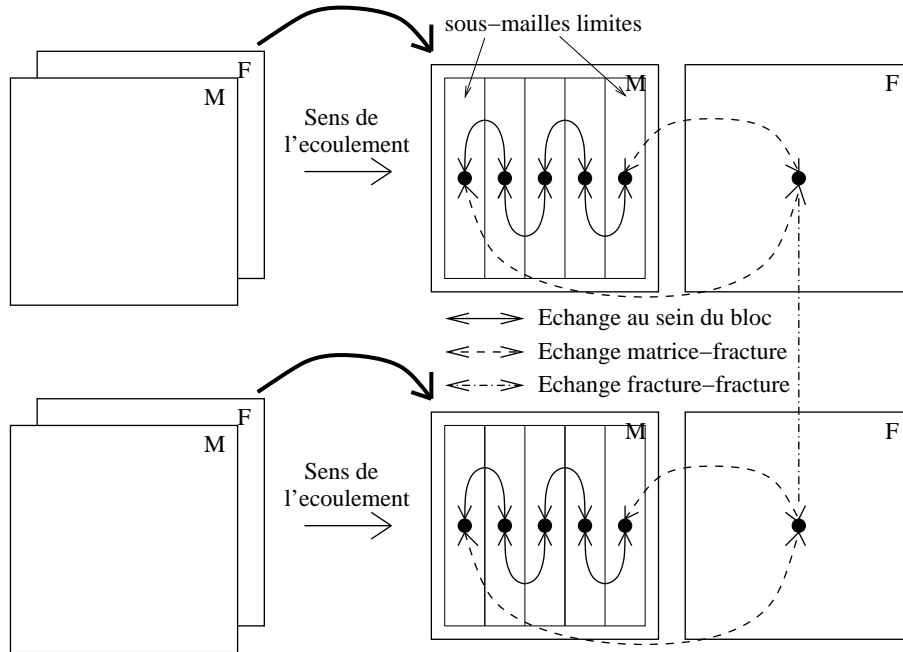


FIG. 2.3 – Schéma représentatif de la discrétisation spatiale associée à un sous-maillage des blocs matriciels représentatifs

La frontière entre les domaines matrice et fracture, à l'échelle du réservoir fracturé, est notée $\partial\Omega$. Elle est composée de l'ensemble des frontières entre les mailles fracture et les mailles matrice associées, notées $\partial\Omega_m$. L'interface entre une maille fracture et la maille matrice associée est elle-même composée de l'ensemble des frontières des blocs matriciels, notées $\partial\Omega_b$. Enfin, dans le cas d'un sous-maillage mono-dimensionnel des blocs matriciels, la frontière d'un bloc se limite à sa sous-maille limite ω_{ml} :

$$\partial\Omega = \bigcup \partial\Omega_m \quad (2.54)$$

$$= \bigcup \left(\bigcup \partial\Omega_b \right) \quad (2.55)$$

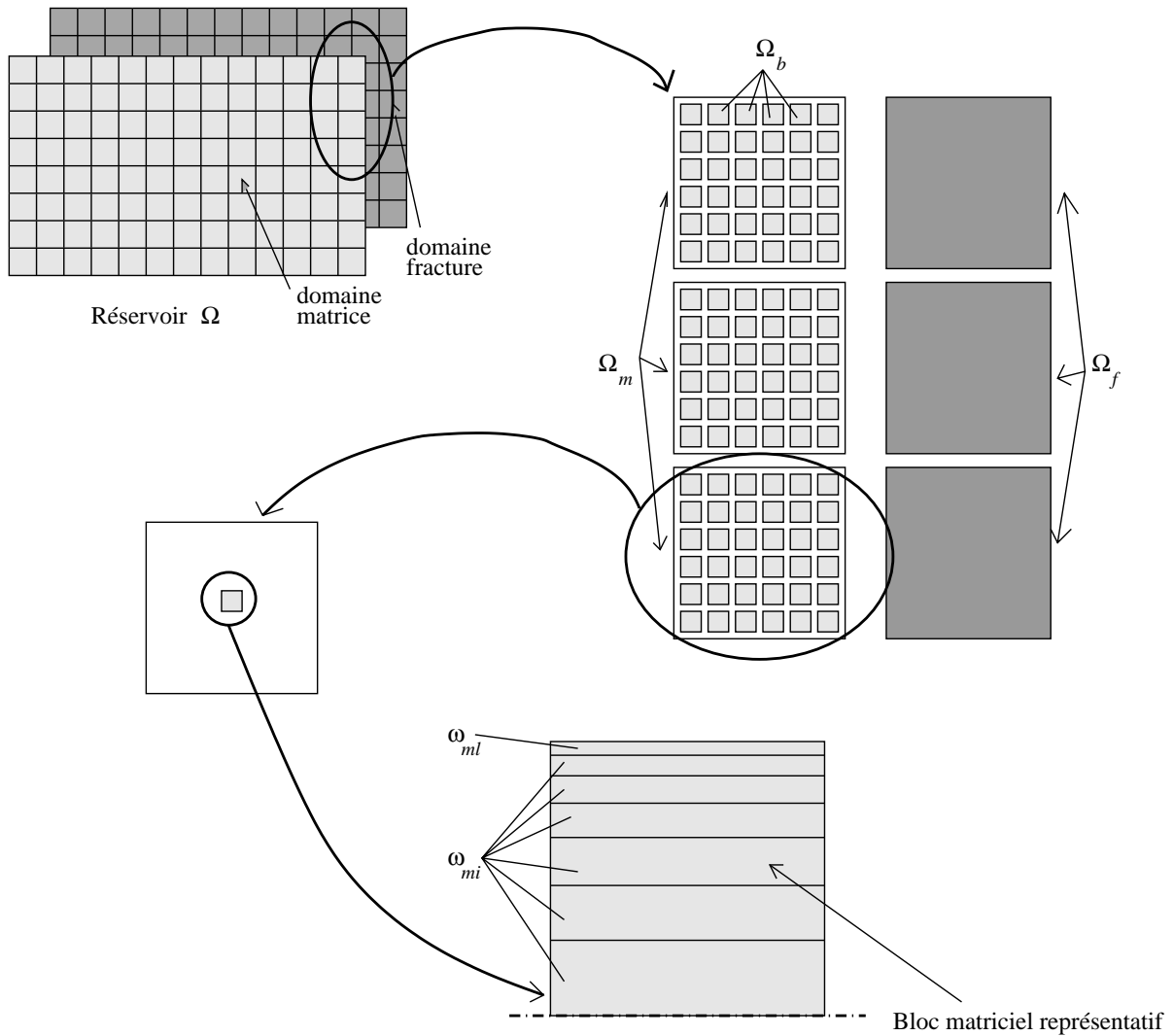
$$= \bigcup \left(\bigcup \omega_{ml} \right) \quad (2.56)$$

Ces notations sont rappelées dans la Fig. 2.4.

Dans la suite de ce travail, l'indice I se rapporte au pas d'espace du maillage initial, c'est-à-dire aux mailles matrice et fracture, et les indices $1(I)$ et $j(I)$ se rapportent à la sous-maille limite et aux sous-maillages internes composant le bloc matriciel représentatif de la maille matrice I . Les indices f et m se rapportent respectivement aux domaines fracture et matrice.

2.4.2 Méthode des volumes finis

Le système à résoudre est composé de quatre équations aux dérivées partielles. La méthode choisie pour résoudre ces équations est la méthode des volumes finis (Dautray et Lions [15]).

FIG. 2.4 – *Discretisation spatiale : notations*

Il s'agit de définir sur le domaine des volumes de contrôle le recouvrant de façon conforme, puis d'intégrer les équations à résoudre sur ces volumes de contrôle. Les flux sur les bords des volumes de contrôle sont ensuite approchés par une technique de différences finies (Patault [42]).

La méthode des volumes finis, largement utilisée depuis des décennies en mécanique des fluides, présente l'avantage majeur d'être conservative, c'est-à-dire que, lorsqu'on considère deux mailles numériques voisines, le flux sortant de la première maille numérique est égal au flux entrant dans la seconde maille numérique. Cette propriété, permettant de démontrer la convergence de la méthode des volumes finis (Herbin, [26]), est particulièrement appréciée en ingénierie pétrolière puisque les équations à résoudre sont des équations de conservation de la masse.

2.5 Discrétisation temporelle et découplage des systèmes

Nous avons vu que, pour simuler numériquement l'écoulement dans un réservoir fracturé, il est nécessaire de *discrétiser* l'espace afin de traiter un nombre fini de valeurs des inconnues pression et saturation.

Mais les valeurs des inconnues ne peuvent non plus être évaluées dans le temps de façon continue. Il faut donc discrétiser aussi le temps sur la durée à simuler. Les inconnues ne sont donc plus évaluées à chaque instant mais à des instants précis répartis le long de la durée à simuler. L'écart entre un instant simulé et le suivant est appelé *pas de temps*.

Ce paragraphe porte ainsi sur la discrétisation temporelle choisie dans le cadre de notre travail.

2.5.1 Discrétisations temporelles conventionnelles

Plusieurs discrétisations temporelles peuvent être envisagées afin de résoudre le système conventionnel. En effet, lors d'un pas de temps, il s'agit de déterminer une nouvelle valeur des inconnues pression et saturation, connaissant les valeurs précédentes, c'est-à-dire au pas de temps précédent. De plus, les équations font apparaître un certain nombre d'inconnues dites *secondaires*, dépendantes de la valeur de la pression ou de la saturation. Par exemple, la pression capillaire est une inconnue secondaire dépendant de la saturation.

Les dépendances des inconnues secondaires par rapport aux inconnues pression et saturation sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \phi_p^* &= \phi_p(P^*) \\
 \rho_p^* &= \rho_p(P^*) \\
 \mu_p^* &= \mu_p(P^*) \\
 k_{rp}^* &= k_{rp}(S^*) \\
 Pc_w^* &= Pc_w(S^*)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Lorsqu'on cherche à résoudre le système (2.47)-(2.50) sur un pas de temps, il faut donc connaître les valeurs de pression et saturation au pas de temps d'avant, mais aussi calculer les valeurs des inconnues secondaires. On choisit de résoudre de façon *implicite* ou *explicite* chacune des inconnues. Le schéma implicite revient à n'utiliser dans les équations que la valeur de l'inconnue à la fin du pas de temps, c'est-à-dire la valeur cherchée. Dans le schéma explicite, au contraire, on utilise la valeur de l'inconnue au début du pas de temps, c'est-à-dire la valeur connue.

Pour l'inconnue pression, on utilise toujours un schéma implicite. En effet, le schéma explicite est conditionnellement stable, et la condition de stabilité, liant le pas de maillage et le pas de temps, peut être trop contraignante (Lemonnier, [32]).

Selon le choix du schéma pour l'inconnue saturation, on crée deux schémas :

Schéma IMPES, IMplicite en Pression et Explicite en Saturation,

Schéma implicite, implicite pour la pression et la saturation.

La question se pose aussi de savoir comment on évalue les inconnues secondaires : soit de façon explicite, c'est-à-dire que c'est l'ancienne valeur de la pression ou de la saturation qui est utilisée, soit de façon implicite, auquel cas on détaille la dépendance (formulation analytique par exemple) par rapport à la pression ou à la saturation, et on utilise la valeur cherchée.

2.5.2 Découplage de la résolution en temps

Lors de l'application du modèle mixte, la taille du système à résoudre est beaucoup plus importante. En effet, le système conventionnel est composé de quatre équations par maille double-milieu, une équation par phase et par milieu, alors que le système issu du modèle mixte est composé de $2N_{sm} + 2$ équations par maille double-milieu : une équation par phase dans la maille numérique fracture, et N_{sm} équations par phase dans la maille numérique matrice, où N_{sm} est le nombre de sous-maillles discrétisant le bloc matriciel représentatif.

L'objectif de ce travail étant d'introduire le modèle mixte dans le simulateur ATHOS en apportant un minimum de changements dans le code, nous choisissons de conserver la résolution conventionnelle du système. Cela signifie que, grâce à certaines modifications, la résolution d'un système composé de $4N$ équations, où N est le nombre de mailles double-milieu, sera toujours effectuée par le simulateur. Ce système est maintenant composé d'une équation par phase dans la maille numérique fracture, et d'une équation par phase dans la première sous-maille du bloc matriciel, ou *sous-maille limite*, qui échange avec la maille numérique fracture. Ce système est appelé *système principal*.

Le système principal est créé en remplaçant, pour le simulateur, la maille numérique matrice existant dans le modèle conventionnel par la sous-maille limite. Ceci est réalisé en "écrasant", dans le simulateur, les données relatives à la maille matrice conventionnelle par les données de la sous-maille limite. Par données, nous entendons une modification de la transmissivité entre mailles matrice et fracture, les dimensions géométriques de la maille et son volume poreux.

La discrétisation temporelle de ce système peut être une discrétisation IMPES ou implicite, comme nous l'avons vu au paragraphe précédent.

Au début d'un pas de temps, toutes les inconnues sont évaluées au temps n . A l'issue de la résolution du système principal, les inconnues des mailles numériques fracture et des sous-maillles limites sont connues au temps suivant, c'est-à-dire au temps $n + 1$: $P_{I,f}^{*,n+1}$, $S_{I,f}^{*,n+1}$, $P_{1(I),m}^{n+1}$ et $S_{1(I),m}^{n+1}$, $I = 1, \dots, N$.

Il reste maintenant à évaluer les valeurs des inconnues dans les autres sous-maillles, indicées $2(I), \dots, N_{sm}(I)$, $I = 1, \dots, N$. Pour résoudre les équations relatives à ces sous-maillles, on utilise les valeurs de la pression et de la saturation déjà évaluées dans les sous-maillles limites, $P_{1(I),m}^{n+1}$ et $S_{1(I),m}^{n+1}$, $I = 1, \dots, N$. En effet, ces valeurs déjà connues nous permettent de résoudre de façon indépendante chaque système relatif à un bloc matriciel donné. On appelle ces systèmes des *sous-systèmes*. Les valeurs des inconnues dans les sous-maillles limites jouent alors le rôle de condition de Dirichlet sur les sous-systèmes.

Les sous-systèmes sont donc résolus avec un décalage en temps par rapport au système principal. Ainsi, bien que résolues dans le même pas de temps que les inconnues relatives aux sous-maillles limites, les inconnues relatives aux autres sous-maillles du bloc sont repérées par

l'exposant $n + 1^*$. Cet exposant caractérise une résolution indépendante effectuée à l'issue de la résolution du système principal, mais dans le même pas de temps. On calcule ainsi les inconnues $P_{j(I),m}^{n+1^*}$ et $S_{j(I),m}^{n+1^*}$, $I = 1, \dots, N$, $j = 2, \dots, N_{sm}$.

Ainsi, la résolution d'un pas de temps s'effectue en deux étapes :

1. Résolution du système principal, composé des équations relatives aux mailles numériques fracture et aux sous-mailles limites.
2. Résolution des sous-systèmes, un par maille numérique matrice, composé des équations relatives aux sous-mailles internes (autres que la sous-maille limite).

Ces étapes sont schématisées sur la Fig. 2.5. Elle se lit de haut en bas, et décrit la résolution d'un pas de temps.

Remarque 2.5.1 *Ce découplage permet un gain de temps de calcul, et rend possible une éventuelle parallélisation du programme, dans laquelle les sous-systèmes seraient résolus simultanément par différents processeurs.*

2.5.3 Choix des résolutions en temps

Ce paragraphe détaille les résolutions en temps choisies dans le cadre de ce travail.

Le système principal est résolu de façon totalement implicite, avec résolution simultanée des inconnues pression et saturation dans les mailles numériques fracture et dans les sous-mailles limites.

A l'issue de cette résolution, les sous-systèmes sont résolus selon un schéma IMPES, c'est-à-dire que les inconnues pression sont déterminées de façon implicite, et les inconnues saturation de façon explicite.

Les inconnues secondaires volume poreux, masses volumiques, perméabilités relatives et pressions capillaires sont évaluées de façon implicite, grâce à des formulations analytiques ou des tables. Les viscosités dynamiques des fluides sont supposées constantes.

2.6 Discrétisation des équations

Nous détaillons dans ce paragraphe la discrétisation des termes composant le système composé des équations (2.30) à (2.33) et (2.36)-(2.37). Les différents termes (termes d'accumulation notés Ac , termes de flux entre mailles de même type notés Φ et termes d'échange matrice-fracture notés f) sont d'abord discrétisés de façon indépendante, puis les équations discrétisées sont présentées.

Les équations (2.30) et (2.32) relatives au domaine fracture sont intégrées sur une maille numérique $\Omega_{I,f}$ et les équations (2.31) et (2.33) relatives au domaine matrice sont intégrées sur une sous-maille $\omega_{j(I),m}$ et sur une sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$.

Dans la suite de ce travail, nous ne considérerons que les équations relatives à un écoulement capillaire pur. C'est pourquoi les termes gravitaires seront omis. Ils peuvent être pris en compte en faisant certaines modifications, en particulier au niveau des termes d'échange entre matrice et fracture.

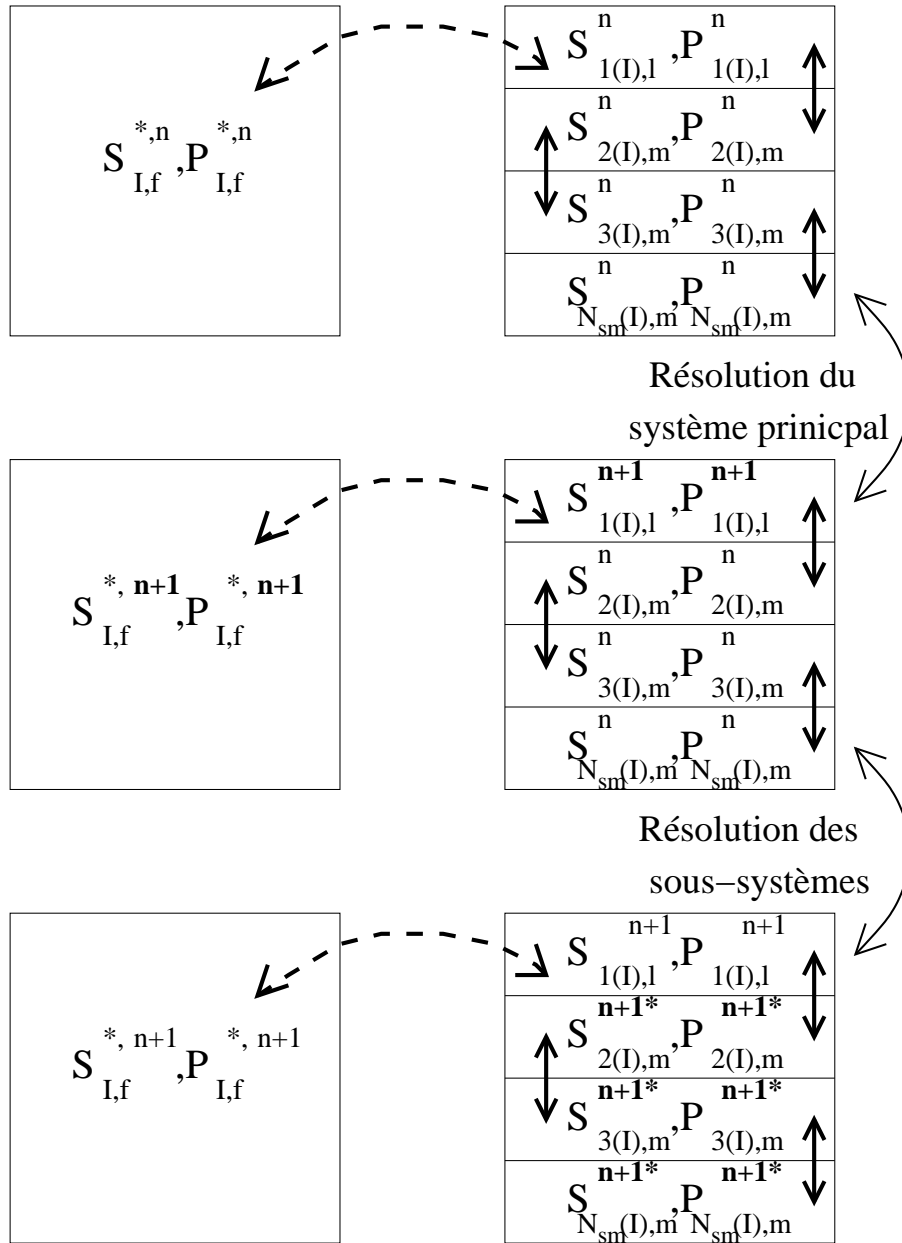


FIG. 2.5 – Schéma représentatif de la discrétisation temporelle et de la résolution d'un pas de temps en deux étapes associées à un sous-maillage des blocs matriciels représentatifs

2.6.1 Termes d'accumulation

Les termes d'accumulation, notés $Ac_{w,f}^*$ et $Ac_{o,f}^*$ dans le domaine fracture homogénéisé, et $Ac_{w,m}$ et $Ac_{o,m}$ dans le domaine matrice décrit à l'échelle locale, sont définis comme suit :

$$Ac_{w,f}^* = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{w,f}^* S_f^*) \quad (2.58)$$

$$Ac_{w,m} = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{w,m} S_m) \quad (2.59)$$

$$Ac_{o,f}^* = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_f^* \rho_{o,f}^* (1 - S_f^*)) \quad (2.60)$$

$$Ac_{o,m} = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_m \rho_{o,m} (1 - S_m)) \quad (2.61)$$

Ces termes sont alors discrétisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Ac_{w,I,f}^{*,n+1} &= \int_{\Omega_{I,f}} Ac_{w,f}^* dV \\ &= \frac{VP_{I,f}^{n+1,*} \rho_{w,I,f}^{*,n+1} S_{I,f}^{*,n+1} - VP_{I,f}^{*,n} \rho_{w,I,f}^{*,n} S_{I,f}^{*,n}}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} Ac_{w,1(I),m}^{n+1} &= \int_{\omega_{1(I),m}} Ac_{w,m} dV \\ &= \frac{VP_{1(I),m}^{n+1} \rho_{w,1(I),m}^{n+1} S_{1(I),m}^{n+1} - VP_{1(I),m}^n \rho_{w,1(I),m}^n S_{1(I),m}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} Ac_{w,j(I),m}^{n+1*} &= \int_{\omega_{j(I),m}} Ac_{w,m} dV \\ &= \frac{VP_{j(I),m}^{n+1*} \rho_{w,j(I),m}^{n+1*} S_{j(I),m}^{n+1*} - VP_{j(I),m}^n \rho_{w,j(I),m}^n S_{j(I),m}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} Ac_{o,I,f}^{*,n+1} &= \int_{\Omega_{I,f}} Ac_{o,f}^* dV \\ &= \frac{VP_{I,f}^{n+1,*} \rho_{o,I,f}^{*,n+1} (1 - S_{I,f}^{*,n+1}) - VP_{I,f}^{*,n} \rho_{o,I,f}^{*,n} (1 - S_{I,f}^{*,n})}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} Ac_{o,1(I),m}^{n+1} &= \int_{\omega_{1(I),m}} Ac_{o,m} dV \\ &= \frac{VP_{1(I),m}^{n+1} \rho_{o,1(I),m}^{n+1} (1 - S_{1(I),m}^{n+1}) - VP_{1(I),m}^n \rho_{o,1(I),m}^n (1 - S_{1(I),m}^n)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} Ac_{o,j(I),m}^{n+1*} &= \int_{\omega_{j(I),m}} Ac_{o,m} dV \\ &= \frac{VP_{j(I),m}^{n+1*} \rho_{o,j(I),m}^{n+1*} (1 - S_{j(I),m}^{n+1*}) - VP_{j(I),m}^n \rho_{o,j(I),m}^n (1 - S_{j(I),m}^n)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.67)$$

où :

- $VP_{I,f}^*$, $VP_{1(I),m}$ et $VP_{j(I),m}$ sont respectivement les volumes poreux, produit de la porosité φ et du volume des mailles numériques $\Omega_{I,f}$, $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{j(I),m}$,
- Δt désigne le pas de temps.

2.6.2 Termes de flux

Les termes de flux, notés $Fl_{w,f}^*$ et $Fl_{o,f}^*$ dans le domaine fracture homogénéisé, et $Fl_{w,m}$ et $Fl_{o,m}$ dans le domaine matrice décrit à l'échelle locale, sont définis comme suit :

$$Fl_{w,f}^* = -\nabla \cdot \left(M_{w,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* - Pc_{w,f}^*) \right) \quad (2.68)$$

$$Fl_{w,m} = -\nabla \cdot (M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m})) \quad (2.69)$$

$$Fl_{o,f}^* = -\nabla \cdot (M_{o,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla P_f^*) \quad (2.70)$$

$$Fl_{o,m} = -\nabla \cdot (M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla P_m) \quad (2.71)$$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky à l'intégrale sur le volume de contrôle des termes de flux :

$$\int_{\Omega_{I,f}} Fl_{w,f}^* dV = -\int_{\partial\Omega_{I,f}} M_{w,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla (P_f^* - Pc_{w,f}^*) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.72)$$

$$\int_{\omega_{1(I),m}} Fl_{w,m} dV = -\int_{\partial\omega_{1(I),m}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.73)$$

$$\int_{\omega_{j(I),m}} Fl_{w,m} dV = -\int_{\partial\omega_{j(I),m}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m}) \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.74)$$

$$\int_{\Omega_{I,f}} Fl_{o,f}^* dV = -\int_{\partial\Omega_{I,f}} M_{o,f}^* \mathbf{K}_f^* \cdot \nabla P_f^* \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.75)$$

$$\int_{\omega_{1(I),m}} Fl_{o,m} dV = -\int_{\partial\omega_{1(I),m}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla P_m \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.76)$$

$$\int_{\omega_{j(I),m}} Fl_{o,m} dV = -\int_{\partial\omega_{j(I),m}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla P_m \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (2.77)$$

Identifions maintenant les frontières de chacune des mailles numériques considérées.

Une maille fracture $\Omega_{I,f}$ possède des frontières communes avec d'autres mailles fracture voisines, notées, de façon générale, $\Omega_{K,f}$. Ainsi, les termes $Fl_{w,f}^*$ et $Fl_{o,f}^*$ contiennent des termes de flux entre ces mailles de même type $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$. Ces termes seront notés $\Phi_{w,f}^*$ et $\Phi_{o,f}^*$, et détaillés dans le paragraphe suivant.

De plus, la maille fracture $\Omega_{I,f}$ est superposée à la maille matrice $\Omega_{I,m}$. Ces deux mailles possèdent donc des frontières communes, et des termes de flux entre ces deux mailles sont aussi présents dans les termes $Fl_{w,f}^*$ et $Fl_{o,f}^*$. On nomme ces termes de flux des *termes d'échange*, notés f_w^* et f_o^* . Ils font l'objet du paragraphe 2.6.4.

Une sous-maille $\omega_{j(I),m}$ possède des frontières communes avec les sous-mailles voisines, notées, de façon générale, $\omega_{k(I),m}$. Ainsi, des termes de flux entre ces mailles de même type, notés $\Phi_{w,m}$ et $\Phi_{o,m}$, sont présentés dans le paragraphe suivant.

La sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$, cas particulier des sous-mailles, est la seule sous-maille à être en contact avec l'extérieur du bloc matriciel représentatif, et donc avec la maille fracture associée. C'est pourquoi il existe aussi des termes de flux entre la sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$ et la maille fracture $\Omega_{I,f}$. Ces termes d'échange sont notés f_w et f_o , et sont décrits dans le paragraphe 2.6.4.

2.6.3 Termes de flux entre mailles de même type

Les termes de flux $\Phi_{w,f}^*$, $\Phi_{o,f}^*$, $\Phi_{w,m}$ et $\Phi_{o,m}$ sont discrétisés, sur les mailles numériques $\Omega_{I,f}$, $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{j(I),m}$, $j \neq 1$, par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi_{w,I,f}^{*,n+1} &= \int_{\Omega_{I,f}} \Phi_{w,f}^* dV \\ &= - \sum_{K \text{ voisins}} A_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,n+1} K_{I-K,f}^* \\ &\quad \left[\frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1})}{\delta_{I-K,f}} - \frac{(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,K,f}^{*,n+1})}{\delta_{I-K,f}} \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{w,1(I),m}^{n+1} &= \int_{\omega_{1(I),m}} \Phi_{w,m} dV \\ &= -A_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} K_{I,m} \\ &\quad \left[\frac{(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*})}{\delta_{1(I)-2(I),m}} - \frac{(P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^{n*})}{\delta_{1(I)-2(I),m}} \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{w,j(I),m}^{n+1*} &= \int_{\omega_{j(I),m}} \Phi_{w,m} dV \\ &= - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} A_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^{n+1*} K_{I,m} \\ &\quad \left[\frac{(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*})}{\delta_{j(I)-k(I),m}} - \frac{(P_{w,j(I),m}^{n+1*} - P_{w,k(I),m}^{n+1*})}{\delta_{j(I)-k(I),m}} \right] \\ &\quad + \gamma A_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n+1*} K_{I,m} \\ &\quad \left[\frac{(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n+1*})}{\delta_{1(I)-2(I),m}} - \frac{(P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^{n+1*})}{\delta_{1(I)-2(I),m}} \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{o,I,f}^{*,n+1} &= \int_{\Omega_{I,f}} \Phi_{o,f}^* dV \\ &= - \sum_{K \text{ voisins}} A_{I-K,f} M_{o,I-K,f}^{*,n+1} K_{I-K,f}^* \frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1})}{\delta_{I-K,f}} \end{aligned} \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{o,1(I),m}^{n+1} &= \int_{\omega_{1(I),m}} \Phi_{o,m} dV \\ &= -A_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} K_{I,m} \frac{(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*})}{\delta_{1(I)-2(I),m}} \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{o,j(I),m}^{n+1*} &= \int_{\omega_{j(I),m}} \Phi_{o,m} dV \\ &= - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} A_{j(I)-k(I),m} M_{o,j(I)-k(I),m}^{n+1*} K_{I,m} \frac{(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*})}{\delta_{j(I)-k(I),m}} \end{aligned}$$

$$+\gamma A_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n+1*} K_{I,m} \frac{\left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n+1*} \right)}{\delta_{1(I)-2(I),m}} \quad (2.83)$$

avec :

- $A_{I-K,f}$, $A_{1(I)-2(I),m}$ et $A_{j(I)-k(I),m}$ les aires respectives des surfaces d'échange entre les mailles $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$, $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{2(I),m}$ et entre les mailles $\omega_{j(I),m}$ et $\omega_{k(I),m}$,
- $M_{p,I-K,f}^*$, $M_{p,1(I)-2(I),m}$ et $M_{p,j(I)-k(I),m}$, $p = w, o$ les mobilités massiques respectives à l'interface entre les mailles $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$, $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{2(I),m}$ et entre les mailles $\omega_{j(I),m}$ et $\omega_{k(I),m}$,
- $K_{I-K,f}^*$ une moyenne harmonique des perméabilités des mailles $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$,
- $K_{I,m}$ la projection du tenseur de perméabilité $\mathbf{K}_{I,m}$ (les blocs matriciels sont homogènes) sur la direction perpendiculaire à l'interface entre sous-mailles ,
- $\delta_{I-K,f}$, $\delta_{1(I)-2(I),m}$ et $\delta_{j(I)-k(I),m}$ les distances respectives entre les nœuds de calcul des mailles $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$, $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{2(I),m}$ et entre les nœuds de calcul des mailles $\omega_{j(I),m}$ et $\omega_{k(I),m}$.
- γ un paramètre prenant la valeur 1 si $j(I) = 2(I)$ et 0 sinon :

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } j(I) = 2(I), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.84)$$

En effet, pour la sous-maille $\omega_{2(I),m}$, il faut faire apparaître le terme d'échange avec la sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$.

Remarque 2.6.1 *Entre les mailles numériques fracture $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$, le terme $K_{I-K,f}^*$ à l'interface entre les deux mailles est calculé comme une moyenne harmonique des projections des tenseurs $\mathbf{K}_{I,f}^*$ et $\mathbf{K}_{K,f}^*$ sur la direction perpendiculaire à l'interface entre les mailles $\Omega_{I,f}$ et $\Omega_{K,f}$*

Par contre, le tenseur de perméabilité $\mathbf{K}_{I,m}$ est constant dans la maille numérique matrice $\Omega_{I,m}$. C'est pourquoi il n'est pas utile de calculer une moyenne harmonique de la projection de ce tenseur à l'interface entre deux sous-mailles.

Les formulations précédentes peuvent se simplifier en définissant les transmissivités $T_{I-K,f}^*$, $T_{1(I)-2(I),m}$ et $T_{j(I)-k(I),m}$ comme :

$$T_{I-K,f}^* = \frac{K_{I-K,f}^* A_{I-K,f}}{\delta_{I-K,f}} \quad (2.85)$$

$$T_{1(I)-2(I),m} = \frac{K_{I,m} A_{1(I)-2(I),m}}{\delta_{1(I)-2(I),m}} \quad (2.86)$$

$$T_{j(I)-k(I),m} = \frac{K_{I,m} A_{j(I)-k(I),m}}{\delta_{j(I)-k(I),m}} \quad (2.87)$$

Remarque 2.6.2 *Les transmissivités sont des invariants de la géométrie, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du temps. Le découplage entre la perméabilité et les perméabilités relatives est couramment utilisé dans le domaine pétrolier.*

Les termes (2.78) à (2.83) s'écrivent alors :

$$\int_{\Omega_{I,f}} \Phi_{w,f}^* dV = - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,n+1} \left[\left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1} \right) - \left(Pc_{w,I,f}^{*,n+1} - Pc_{w,K,f}^{*,n+1} \right) \right] \quad (2.88)$$

$$\int_{\omega_{1(I),m}} \Phi_{w,m} dV = -T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} \left[\left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*} \right) - \left(Pc_{w,1(I),m}^{n+1} - Pc_{w,2(I),m}^{n*} \right) \right] \quad (2.89)$$

$$\int_{\omega_{j(I),m}} \Phi_{w,m} dV = - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^{n+1,*} \left[\left(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*} \right) - \left(Pc_{w,j(I),m}^{n+1*} - Pc_{w,k(I),m}^{n+1*} \right) \right] \\ + \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n+1*} \left[\left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n+1*} \right) - \left(Pc_{w,1(I),m}^{n+1} - Pc_{w,2(I),m}^{n+1*} \right) \right] \quad (2.90)$$

$$\int_{\Omega_{I,f}} \Phi_{w,f}^* dV = - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{o,I-K,f}^{*,n+1} \left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1} \right) \quad (2.91)$$

$$\int_{\omega_{1(I),m}} \Phi_{o,m} dV = -T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*} \right) \quad (2.92)$$

$$\int_{\omega_{j(I),m}} \Phi_{o,m} dV = - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{o,j(I)-k(I),m}^{n+1,*} \left(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*} \right) \\ + \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n+1*} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n+1*} \right) \quad (2.93)$$

La mobilité massique de la phase p est fonction de la masse volumique et de la viscosité de cette phase. De par ces termes, la mobilité massique est donc une fonction de la pression de référence. De plus, la mobilité massique est fonction de la perméabilité relative, donc de la saturation de la phase considérée.

Parmi les grandeurs composant l'expression de la mobilité massique, la perméabilité relative est la plus délicate à discrétiser, puisqu'elle est susceptible de varier fortement entre deux mailles voisines. Ce terme introduit la principale non-linéarité du système (2.30)-(2.33) (Aziz et Settari, [6]). Un schéma classique centré, du type :

$$k_{rp,ik} = \frac{k_{rp,i} + k_{rp,k}}{2} \quad (2.94)$$

est numériquement instable et peut conduire à des solutions non-physiques, bien que d'ordre 2. Ce comportement est une conséquence du caractère hyperbolique des équations à résoudre. Dans le cas purement hyperbolique (pressions capillaires nulles), le problème n'a pas une

unique solution. Le schéma centré converge donc vers une solution mathématique correcte, mais physiquement impossible (Aziz et Settari, [6]).

Une alternative à son utilisation est le schéma amont, d'ordre 1. Il consiste à utiliser, lors du calcul de la mobilité massique, la perméabilité relative de la maille amont de l'écoulement :

$$k_{rp,ik} = \begin{cases} k_{rp,i} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_i \text{ vers } \Omega_k, \\ k_{rp,k} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_k \text{ vers } \Omega_i. \end{cases} \quad (2.95)$$

où Ω_i et Ω_k désigne deux mailles numériques voisines, qu'il s'agisse de mailles fracture ou de sous-mailles matrice.

Bien que ce schéma génère une importante dispersion numérique, due à son ordre faible, sa stabilité est très appréciée dans le domaine pétrolier, et il permet d'éviter des solutions non-physiques.

De même, la masse volumique $\rho_{p,ik}$ et la viscosité dynamique $\mu_{p,ik}$ de la phase p sont évaluées par leurs valeurs dans la maille amont :

$$\rho_{p,ik} = \begin{cases} \rho_{p,i} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_i \text{ vers } \Omega_k, \\ \rho_{p,k} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_k \text{ vers } \Omega_i. \end{cases} \quad (2.96)$$

$$\mu_{p,ik} = \begin{cases} \mu_{p,i} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_i \text{ vers } \Omega_k, \\ \mu_{p,k} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_k \text{ vers } \Omega_i. \end{cases} \quad (2.97)$$

Revenant maintenant à nos notations, on introduit le paramètre $\beta_{I-K,f}^n$, qui prend la valeur 0 ou 1, afin d'exprimer l'utilisation du schéma amont dans l'expression de la mobilité massique à l'interface entre deux mailles numériques fracture :

$$M_{p,I-K,f}^{*,n+1} = \beta_{I-K,f}^n M_{p,I,f}^{*,n+1} + (1 - \beta_{I-K,f}^n) M_{p,K,f}^{*,n+1} \quad (2.98)$$

Lorsque $\beta_{I-K,f}^n$ prend la valeur 0, la maille fracture "amont" est la maille $\Omega_{K,f}$, et lorsque $\beta_{I-K,f}^n$ prend la valeur 1, la maille fracture "amont" est la maille $\Omega_{I,f}$.

De même, on introduit $\beta_{1(I)-2(I),m}^{n,n*}$ et $\beta_{j(I)-k(I),m}^{n*}$, respectivement, pour exprimer l'utilisation du schéma amont dans l'expression de la mobilité massique à l'interface entre les sous-mailles $\omega_{1(I),m}$ et $\omega_{2(I),m}$ d'une part, et entre les sous-mailles $\omega_{j(I),m}$, $j \neq 1$, d'autre part, qui prennent la valeur 0 ou 1 :

$$M_{p,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} = \beta_{1(I)-2(I),m}^{n,n*} M_{p,1(I),m}^{n+1} + (1 - \beta_{1(I)-2(I),m}^{n,n*}) M_{p,2(I),m}^{n*} \quad (2.99)$$

$$M_{p,j(I)-k(I),m}^{n+1*} = \beta_{j(I)-k(I),m}^{n*} M_{p,j(I),m}^{n+1*} + (1 - \beta_{j(I)-k(I),m}^{n*}) M_{p,k(I),m}^{n+1*} \quad (2.100)$$

2.6.4 Termes d'échange entre milieux fracture et matrice

Les termes d'échange sont des termes de flux entre mailles numériques appartenant à des milieux différents, milieu matrice ou milieu fracture.

Ces termes d'échange entre les domaines matrice et fracture sont calculés, entre une maille matrice et une maille fracture, sur le bloc matriciel représentatif, puis multipliés par le nombre

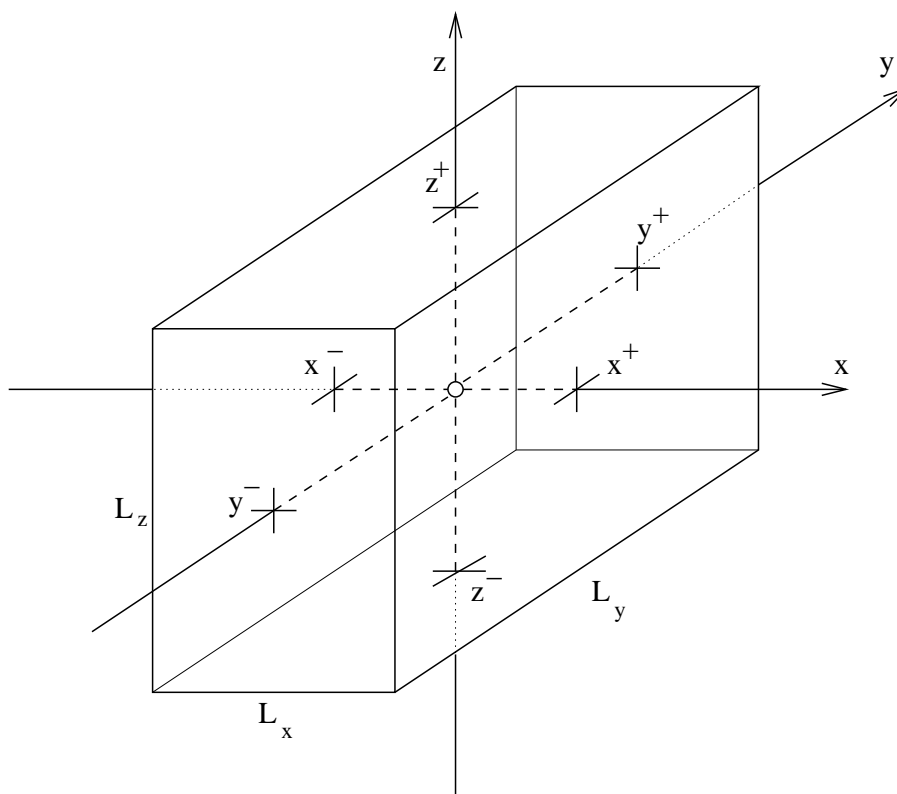


FIG. 2.6 – Bloc matriciel représentatif : nœuds fictifs

de blocs contenus dans la maille matrice considérée. Le sous-maillage du bloc matriciel représentatif dans chaque maille numérique matrice entraîne donc des modifications du calcul des termes d'échange.

De plus, nous souhaitons intégrer notre modèle mixte dans le simulateur de réservoir ATHOS. Nous devons donc nous inspirer de la modélisation utilisée par ATHOS dans le cas double-milieu conventionnel pour modéliser les termes d'échange correspondants au modèle mixte.

Formulation conventionnelle d'ATHOS

La formulation discrétisée conventionnelle d'ATHOS s'appuie sur l'utilisation de "nœuds de calcul fictifs". En effet, des nœuds de calcul supplémentaires sont placés au centre de chaque face du bloc matriciel représentatif. Les échanges entre la matrice et la fracture avoisinante sont alors calculés entre le nœud de calcul situé au centre du bloc matriciel et les nœuds de calcul fictifs. La Fig. 2.6 représente les six nœuds fictifs, notés x^+ , x^- , y^+ , y^- , z^+ et z^- dans le bloc matriciel représentatif.

Les termes d'échange f_w^* et f_o^* apparaissant dans les équations (2.47) à (2.50) sont alors

définis comme :

$$\begin{aligned}
f_w^* = & -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \left(\int_{A_{x^+}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{x^+} d\Gamma \right. \\
& + \int_{A_{x^-}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{x^-} d\Gamma \\
& + \int_{A_{y^+}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{y^+} d\Gamma \\
& + \int_{A_{y^-}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{y^-} d\Gamma \\
& + \int_{A_{z^+}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{z^+} d\Gamma \\
& \left. + \int_{A_{z^-}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m - Pc_{w,m} + \rho_{w,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{z^-} d\Gamma \right) \quad (2.101)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_o^* = & -N_b \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \left(\int_{A_{x^+}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{x^+} d\Gamma \right. \\
& + \int_{A_{x^-}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{x^-} d\Gamma \\
& + \int_{A_{y^+}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{y^+} d\Gamma \\
& + \int_{A_{y^-}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{y^-} d\Gamma \\
& + \int_{A_{z^+}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{z^+} d\Gamma \\
& \left. + \int_{A_{z^-}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla (P_m + \rho_{o,m} g z_m) \cdot \mathbf{n}_{z^-} d\Gamma \right) \quad (2.102)
\end{aligned}$$

où A_{x^+} , A_{x^-} , A_{y^+} , A_{y^-} , A_{z^+} et A_{z^-} et \mathbf{n}_{x^+} , \mathbf{n}_{x^-} , \mathbf{n}_{y^+} , \mathbf{n}_{y^-} , \mathbf{n}_{z^+} et \mathbf{n}_{z^-} désignent respectivement les surfaces et les normales sortantes des faces contenant les points x^+ , x^- , y^+ , y^- , z^+ et z^- .

En utilisant $L_{x,I}$, $L_{y,I}$ et $L_{z,I}$, dimensions du bloc matriciel représentatif correspondant à la maille $\Omega_{m,I}$, les deux termes d'échange sont discrétisés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
f_w^* = & -N_b \frac{1}{L_{x,I} L_{y,I} L_{z,I}} M_{w,I,m-f} K_{I,m-f} \left(2L_{y,I} L_{z,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) - (Pc_{w,I,f} - Pc_{w,I,m})}{\frac{L_{x,I}}{2}} \right) \right. \\
& + 2L_{x,I} L_{z,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) - (Pc_{w,I,f} - Pc_{w,I,m})}{\frac{L_{y,I}}{2}} \right) \\
& \left. + L_{x,I} L_{y,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) - (Pc_{w,I,f} - Pc_{w,I,m}) + (\rho_{w,I,f} - \rho_{w,I,m}) g (z_{z^+,f} - z_{I,m})}{\frac{L_{z,I}}{2}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+L_{x,I}L_{y,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) - (Pc_{w,I,f} - Pc_{w,I,m}) + (\rho_{w,I,f} - \rho_{w,I,m})g(z_{z^-,f} - z_{I,m})}{\frac{L_{z,I}}{2}} \right) \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} f_o^* = & -N_b \frac{1}{L_{x,I}L_{y,I}L_{z,I}} M_{o,I,m-f} K_{I,m-f} \left(2L_{y,I}L_{z,I} \frac{(P_{I,f} - P_{I,m})}{\frac{L_{x,I}}{2}} + 2L_{x,I}L_{z,I} \frac{(P_{I,f} - P_{I,m})}{\frac{L_{y,I}}{2}} \right. \\ & + L_{x,I}L_{y,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) + (\rho_{o,I,f} - \rho_{o,I,m})g(z_{z^+,f} - z_{I,m})}{\frac{L_{z,I}}{2}} \right) \\ & \left. + L_{x,I}L_{y,I} \left(\frac{(P_{I,f} - P_{I,m}) + (\rho_{o,I,f} - \rho_{o,I,m})g(z_{z^-,f} - z_{I,m})}{\frac{L_{z,I}}{2}} \right) \right) \quad (2.104) \end{aligned}$$

Nous pouvons constater que les termes d'échange sont composés de plusieurs termes :

- $(P_{I,f} - P_{I,m})$ est la différence de pression entre les deux domaines,
- $(Pc_{w,I,f} - Pc_{w,I,m})$ représente l'influence des forces capillaires,
- $(\rho_{w,I,f} - \rho_{w,I,m})g(z_{z^-,f} - z_{I,m})$, $(\rho_{w,I,f} - \rho_{w,I,m})g(z_{z^+,f} - z_{I,m})$, $(\rho_{o,I,f} - \rho_{o,I,m})g(z_{z^-,f} - z_{I,m})$ et $(\rho_{o,I,f} - \rho_{o,I,m})g(z_{z^+,f} - z_{I,m})$ traduisent l'influence des forces gravitaires.

En introduisant le facteur de forme σ_I relatif à la maille Ω_I défini par :

$$\sigma_I = 4 \left(\frac{1}{L_{x,I}^2} + \frac{1}{L_{y,I}^2} + \frac{1}{L_{z,I}^2} \right) \quad (2.105)$$

les termes d'échange peuvent être écrit sous la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned} f_w^* = & -N_b \sigma_I M_{w,I,m-f}^* K_{I,m-f} \left((P_{I,f}^* - P_{I,m}^*) - (Pc_{w,I,f}^* - Pc_{w,I,m}^*) \right. \\ & \left. + (\rho_{w,I,f}^* - \rho_{w,I,m}^*)g(z_{z^+,f} - z_{I,m}) + (\rho_{w,I,f}^* - \rho_{w,I,m}^*)g(z_{z^-,f} - z_{I,m}) \right) \quad (2.106) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_o^* = & -N_b \sigma_I M_{o,I,m-f}^* K_{I,m-f} \left((P_{I,f}^* - P_{I,m}^*) + (\rho_{o,I,f}^* - \rho_{o,I,m}^*)g(z_{z^+,f} - z_{I,m}) \right. \\ & \left. + (\rho_{o,I,f}^* - \rho_{o,I,m}^*)g(z_{z^-,f} - z_{I,m}) \right) \quad (2.107) \end{aligned}$$

Remarque 2.6.3 *Les pressions macroscopiques apparaissent suite à l'intégration des pressions locales sur les mailles matrice et fracture. En toute rigueur, les mobilités devraient être exprimées à l'échelle locale car la non-linéarité de ces termes interdit leur prise de moyenne volumique. Toutefois, les mobilités macroscopiques $M_{w,I,m-f}^*$ et $M_{o,I,m-f}^*$ peuvent être introduites comme des estimateurs des mobilités à l'échelle locale sur l'interface matrice-fracture.*

Remarque 2.6.4 *Les exposants se référant aux pas de temps considérés ne sont pas précisés car il s'agit d'une formulation générale, indépendante du schéma de résolution en temps choisi.*

Formulation adaptée au modèle mixte

Dans le cadre de notre modèle mixte, nous avons conservé le principe de nœuds fictifs. Toutefois, comme détaillé plus loin, il est possible d'adopter une modélisation monodimensionnelle dans le cas d'un écoulement capillaire pur. On ne place alors qu'un nœud fictif, noté x^+ , au centre de la face limitant la sous-maille limite ω_{ml} .

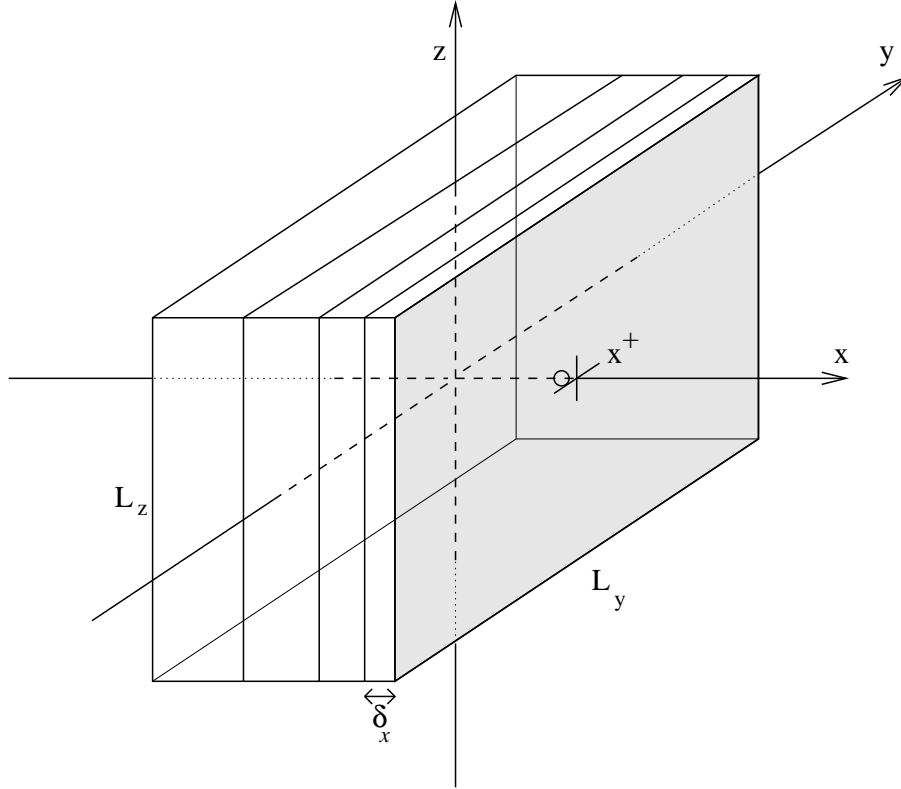


FIG. 2.7 – Bloc matriciel représentatif sous-maillé : nœud fictif

La Fig. 2.7 représente le nœud fictif ajouté et la face grisée limitant la sous-maille limite et jouxtant la fracture avoisinante. Le cercle, situé au centre de la sous-maille limite, représente le nœud de calcul associé à cette sous-maille.

Les termes d'échange apparaissent donc dans les équations relatives aux mailles numériques fracture, mais aussi dans les équations relatives aux sous-mailles limites. En effet, les sous-mailles limites constituent la frontière du bloc matriciel.

Pour la sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$ d'un bloc matriciel, les flux d'échange matrice-fracture s'écrivent :

$$-f_w = \int_{\partial\omega_{1(I),m}} M_{w,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla(P_m - P_{c_{w,m}}) \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.108)$$

$$-f_o = \int_{\partial\omega_{1(I),m}} M_{o,m} \mathbf{K}_m \cdot \nabla P_m \cdot \vec{n} \, d\Gamma \quad (2.109)$$

En faisant intervenir les valeurs de la pression et de la pression capillaire au point x^+ , c'est-à-dire les valeurs dans la maille numérique fracture $\Omega_{I,f}$, et les dimensions de la sous-maille limite $\delta_{x,1(I)}$, $L_{y,I}$ et $L_{z,I}$, on peut écrire :

$$-f_{w,1(I),m}^{n+1} = L_{y,I}L_{z,I}M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1}K_{1(I)-I,m-f} \left(\frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} - \frac{(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} \right) \quad (2.110)$$

$$-f_{o,1(I),m}^{n+1} = L_{y,I}L_{z,I}M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1}K_{1(I)-I,m-f} \frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} \quad (2.111)$$

Ces termes d'échange sont valables lorsque le bloc représentatif est totalement baigné par la phase p , $p = w, o$. Or les blocs composant la maille numérique matrice ne sont pas obligatoirement tous baignés par la phase p . C'est pourquoi il faut, dans les termes à l'échelle d'une maille fracture introduire une fonction représentant la proportion de blocs matriciels baignés par le fluide p . Cette fonction est notée G_p . En se basant sur l'hypothèse de ségrégation gravitaire des fluides dans le réseau de fractures, la saturation mobile normée du fluide p dans le domaine fracture permet de déterminer le nombre de blocs envoyés dans ce fluide :

$$G_p(S_{p,f}^*) = \frac{S_{p,f}^* - S_{p,irr,f}^*}{1 - S_{wi,f}^* - S_{orw,f}^*} \quad (2.112)$$

avec :

- $S_{wi,f}^*$ la saturation en eau irréductible dans la maille fracture,
- $S_{orw,f}^*$ la saturation en huile résiduelle après balayage à l'eau dans la maille fracture,
- $S_{p,irr,f}^* = \begin{cases} S_{wi,f}^* & \text{si } p = w, \\ S_{orw,f}^* & \text{si } p = o. \end{cases}$

Pour une maille numérique fracture $\Omega_{I,f}$, les termes précédents sont donc multipliés par le nombre de blocs matriciels N_b envoyés dans le fluide p et sont de signe opposé :

$$f_{w,I,f}^{*,n+1} = -N_b L_{y,I}L_{z,I}M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1}K_{1(I)-I,m-f}G_w(S_{I,f}^*) \left(\frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} - \frac{(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} \right) \quad (2.113)$$

$$f_{o,I,f}^{*,n+1} = -N_b L_{y,I}L_{z,I}M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1}K_{1(I)-I,m-f}G_o(1 - S_{I,f}^*) \frac{(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1})}{\frac{\delta_{x,1(I)}}{2}} \quad (2.114)$$

Par analogie avec le facteur de forme σ utilisé dans le cas conventionnel, on introduit le facteur η défini par :

$$\eta = 2 \frac{L_{y,I}L_{z,I}}{\delta_{x,1(I)}} \quad (2.115)$$

Les termes d'échange à l'échelle d'une maille numérique fracture peuvent alors s'écrire :

$$f_{w,I,f}^{*,n+1} = -N_b \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{1(I)-I,m-f} G_w(S_{I,f}^*) \left((P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1}) - (P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1}) \right) \quad (2.116)$$

$$f_{o,I,f}^{*,n+1} = -N_b \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{1(I)-I,m-f} G_o(1 - S_{I,f}^*) (P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1}) \quad (2.117)$$

et les termes d'échange à l'échelle de la sous-maille limite :

$$f_{w,1(I),m}^{n+1} = \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{1(I)-I,m-f} \left((P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1}) - (P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1}) \right) \quad (2.118)$$

$$f_{o,1(I),m}^{n+1} = \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{1(I)-I,m-f} (P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1}) \quad (2.119)$$

Plusieurs remarques peuvent être faites au sujet des termes évalués à l'interface entre les deux domaines.

La perméabilité $K_{1(I)-I,m-f}$ est choisie comme étant la perméabilité du domaine matrice, projetée perpendiculairement à l'interface entre la sous-maille $\omega_{1(I),m}$ et la maille $\Omega_{I,m}$:

$$K_{1(I)-I,m-f} = K_{I,m} \quad (2.120)$$

En effet, l'écoulement d'eau s'effectue dans le bloc, et la fracture n'intervient que comme condition à la limite.

La mobilité $M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1}$ fait l'objet d'un traitement particulier. Nous avons présenté précédemment le schéma amont, très stable, qui permet la discrétisation de la perméabilité relative à la frontière entre deux mailles numériques. Dans le cas de l'échange entre les domaines fracture et matrice, ce schéma n'est plus adapté.

En effet, les contrastes de perméabilité sont extrêmement forts à l'interface entre les deux domaines, mais c'est dans le domaine matrice que siègent les écoulements associés à l'échange. Le sens de l'écoulement du fluide considéré doit toujours être pris en compte, comme lors de l'application du schéma amont, mais un nouveau schéma numérique est proposé afin de rendre compte de la perméabilité relative à l'interface. Deux cas sont alors distingués : le cas des fluides entrant dans le bloc matriciel représentatif et celui des fluides en sortant.

Dans le cas des fluides sortant du bloc représentatif, le schéma amont reste adapté, puisqu'il fait intervenir les inconnues associées à la sous-maille limite :

$$k_{rp,1(I)-I,m-f} = k_{rp,1(I),m}(S_{1(I),m}) \text{ si l'écoulement est dirigé de } \omega_{1(I),m} \text{ vers } \Omega_{I,f}. \quad (2.121)$$

Par contre, le cas des fluides entrant dans le bloc représentatif est plus complexe. En effet, l'application du schéma amont conduirait à faire intervenir des inconnues associées à la maille fracture. Or l'écoulement entre les domaines matrice et fracture est essentiellement contrôlé par les propriétés matricielles ou par la résistance à l'écoulement dans le bloc. Ainsi, l'utilisation des perméabilités relatives de la fracture n'est plus adaptée et peut conduire à des solutions non-physiques.

Un schéma adapté à l'expression de la perméabilité relative à l'interface entre les domaines, dans le cas d'un écoulement de la fracture vers la matrice, fait intervenir la saturation à l'équilibre :

$$k_{rp,1(I)-I,m-f} = k_{rp,1(I),m}(S_{1(I),eq,m}) \text{ si l'écoulement est dirigé de } \Omega_{I,f} \text{ vers } \omega_{1(I),m} \quad (2.122)$$

avec $S_{1(I),eq,m}$ la saturation en eau à l'équilibre dans la sous-maille limite.

Cette formulation repose sur l'hypothèse que l'équilibre local (en tout point de la frontière matrice-fracture) en pression est atteint instantanément pour chaque phase. Dans un grand nombre de cas, cette hypothèse est valide compte tenu du fort contraste de capillarité entre les deux milieux (Wu *et al*, [61]).

La définition de la notion d'équilibre diffère suivant les processus investigués (imbibition capillaire, gravitaire ...) et la mouillabilité de la matrice au fluide mouillant.

Dans notre cas, la matrice est totalement mouillable à l'eau, puisque nous étudions le processus de capillarité pure. La notion de saturation matricielle à l'équilibre se traduit donc par la continuité à l'interface des pressions capillaires relatives aux deux milieux :

$$S_{1(I),eq,m} = S_{1(I),m} \text{ telle que } Pc_{w,1(I),m} = Pc_{w,I,f}^* = 0. \quad (2.123)$$

La saturation $S_{1(I),eq,m}$ est alors déterminée en imposant une valeur nulle de pression capillaire matricielle et en inversant la fonction de pression capillaire dans le domaine matrice.

Le schéma utilisé pour calculer la perméabilité de la phase p à l'interface matrice-fracture s'écrit alors :

$$k_{rp,1(I)-I,m-f} = \begin{cases} k_{rp,1(I),m}(S_{1(I),m}) & \text{si écoulement de } \omega_{1(I),m} \text{ vers } \Omega_{I,f}, \\ k_{rp,1(I),m}(S_{1(I),eq,m}) & \text{si écoulement de } \Omega_{I,f} \text{ vers } \omega_{1(I),m}. \end{cases} \quad (2.124)$$

avec la saturation en eau à l'équilibre $S_{1(I),eq,m}$ définie par l'équation (2.123).

Par contre, les termes $\rho_{p,1(I)-I,m-f}$ et $\mu_{p,1(I)-I,m-f}$ entrant en jeu dans le calcul de la mobilité massique de la phase p à l'interface sont toujours évalués par un schéma amont :

$$\rho_{p,1(I)-I,m-f} = \begin{cases} \rho_{p,1(I),m} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \omega_{1(I),m} \text{ vers } \Omega_{I,f}, \\ \rho_{p,I,f} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_{I,f} \text{ vers } \omega_{1(I),m}. \end{cases} \quad (2.125)$$

$$\mu_{p,1(I)-I,m-f} = \begin{cases} \mu_{p,1(I),m} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \omega_{1(I),m} \text{ vers } \Omega_{I,f}, \\ \mu_{p,I,f} & \text{si l'écoulement est dirigé de } \Omega_{I,f} \text{ vers } \omega_{1(I),m}. \end{cases} \quad (2.126)$$

On introduit alors le paramètre $\beta_{1(I)-I,m-f}^n$, qui prend la valeur 0 ou 1, afin d'exprimer l'utilisation du schéma amont dans l'expression de la masse volumique et de la viscosité à l'interface matrice-fracture :

$$M_{p,1(I)-I,m-f} = \beta_{1(I)-I,m-f}^n M_{p,1(I),m} + (1 - \beta_{1(I)-I,m-f}^n) M_{p,I,f} \quad (2.127)$$

Lorsque $\beta_{1(I)-I,m-f}^n$ prend la valeur 0, la maille "amont" est la maille fracture $\Omega_{I,f}$, et lorsque $\beta_{1(I)-I,m-f}^n$ prend la valeur 1, la maille "amont" est la sous-maille limite $\omega_{1(I),m}$.

2.6.5 Systèmes à résoudre

Les systèmes à résoudre sont alors la combinaison des différents termes explicités plus haut : termes d'accumulation, termes de flux et termes d'échange, ceci pour les trois types de mailles numériques : mailles fracture, sous-mailles limites et sous-mailles matrice. Il faut de plus ajouter les termes sources dans les équations relatives aux mailles numériques fracture.

Le système principal s'écrit :

$$Ac_{w,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}) + \Phi_{w,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{K,f}^{*,n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{K,f}^{*,n+1}) \\ + f_{w,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) + q_{w,I,f}^{*,n+1} = 0 \quad (2.128)$$

$$Ac_{w,1(I),m}^{n+1}(P_{1(I),m}^{n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) + \Phi_{w,1(I),l}^{n+1}(P_{1(I),m}^{n+1}, P_{2(I),m}^{n*}, S_{1(I),m}^{n+1}, S_{2(I),m}^{n*}) \\ + f_{w,1(I),m}^{n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) = 0 \quad (2.129)$$

$$Ac_{o,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}) + \Phi_{o,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{K,f}^{*,n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{K,f}^{*,n+1}) \\ + f_{o,I,f}^{*,n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) + q_{o,I,f}^{*,n+1} = 0 \quad (2.130)$$

$$Ac_{o,1(I),m}^{n+1}(P_{1(I),m}^{n+1}, S_{1(I),l}^{n+1}) + \Phi_{o,1(I),m}^{n+1}(P_{1(I),m}^{n+1}, P_{2(I),m}^{n*}, S_{1(I),m}^{n+1}, S_{2(I),m}^{n*}) \\ + f_{o,1(I),m}^{n+1}(P_{I,f}^{*,n+1}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) = 0 \quad (2.131)$$

Pour tout I , les sous-systèmes s'écrivent :

$$Ac_{w,j(I),m}^{n+1*}(P_{j(I),m}^{n+1*}, S_{j(I),m}^{n+1*}) + \Phi_{w,j(I),m}^{n+1*}(P_{j(I),m}^{n+1*}, P_{k(I),m}^{n+1*}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{j(I),m}^{n+1*}, S_{k(I),m}^{n+1*}, S_{1(I),m}^{n+1}) = 0 \quad (2.132)$$

$$Ac_{o,j(I),m}^{n+1*}(P_{j(I),m}^{n+1*}, S_{j(I),m}^{n+1*}) + \Phi_{o,j(I),m}^{n+1*}(P_{j(I),m}^{n+1*}, P_{k(I),m}^{n+1*}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{j(I),m}^{n+1*}, S_{k(I),m}^{n+1*}, S_{1(I),m}^{n+1}) = 0 \quad (2.133)$$

Les systèmes sont détaillés dans l'annexe A : le système (2.128)-(2.131) est développé par le système (A.1)-(A.4), et le système (2.132)-(2.133) est développé par le système (A.5)-(A.6).

2.7 Linéarisation de Newton

Le système (2.128)-(2.131) construit dans le paragraphe précédent est fortement non-linéaire, de la forme :

$$H(X_1) = 0 \quad \text{avec} \quad X_1 = (P_{I,f}^{*,n+1}, P_{1(I),m}^{n+1}, S_{I,f}^{*,n+1}, S_{1(I),m}^{n+1}) \quad (2.134)$$

De même, les sous-systèmes (2.132)-(2.133) construits dans le paragraphe précédent sont tous fortement non-linéaires, de la forme :

$$H(X_2) = 0 \quad \text{avec} \quad X_2 = (P_{j(I),m}^{n+1*}, S_{j(I),m}^{n+1*}) \quad (2.135)$$

Afin de permettre la résolution de ces systèmes, ils sont d'abord linéarisés selon la méthode de Newton, dont nous rappelons ici le principe.

2.7.1 Principe

Lors d'un pas de temps, une ou plusieurs itérations de Newton sont effectuées. A chaque itération de Newton, le système linéaire suivant est résolu :

$$\frac{dH}{dX} \delta X^l = -H(X^l) \quad (2.136)$$

avec

$$\delta X^l = X^{l+1} - X^l \quad (2.137)$$

Le terme $\frac{dH}{dX}$ est la *matrice jacobienne* du système, et δX^l est appelée l'*incrément de Newton*. Au cours des itérations de Newton, l'incrément de Newton tend vers 0. Lorsque sa valeur est inférieure à un seuil préalablement fixé, noté ϵ , les itérations de Newton sont arrêtées et le pas de temps est incrémenté.

Le principe de la méthode de Newton se résume comme suit :

1. Initialisation : $X^{l=0} = X^n$.
2. Résolution de l'équation (2.136), fournissant le résultat δX^l .
3. Incrémentation de l'inconnue : $X^{l+1} = X^l + \delta X^l$.
4. Test de convergence :
 - Si $\delta X^l > \epsilon$, alors $l = l + 1$ et retour à 2.
 - Sinon, arrêt des itérations de Newton.
5. Fin du pas de temps : $X^{n+1} = X^{l+1}$.

2.7.2 Systèmes à résoudre

Après linéarisation de Newton, le système principal et les sous-systèmes devant être résolus à chaque pas de temps sont détaillés dans l'annexe A, système principal (A.7)-(A.10) et sous-systèmes (A.11)-(A.12).

Ces systèmes sont résolus selon le choix de l'implémentation, grâce à des solveurs internes au logiciel ATHOS.

Chapitre 3

Méthode de construction d'un sous-maillage optimal

Nous avons vu précédemment comment l'application d'un modèle mixte dans un simulateur conventionnel menait à l'utilisation d'une technique de sous-maillage des blocs matriciels, et donc, suivant l'hypothèse du paragraphe 1.5.1, au sous-maillage du bloc matriciel unique représentatif.

Toutefois, la méthode de sous-maillage des blocs matriciels proprement dite demeure à spécifier. Il s'agit de savoir comment créer les sous-maillages, en quel nombre, de quelles dimensions, dans quelles directions ...

Ce chapitre présente donc une méthode de sous-maillage du bloc matriciel s'appuyant sur la nature des phénomènes physiques mis en jeu. Nous nous intéresserons ici au cas de l'imbibition capillaire et de la gravité eau-huile.

Le premier chapitre présente la méthode de construction des modèles servant de référence à notre travail, ainsi que les données associées.

Dans le second chapitre, nous proposons une méthodologie, basée sur la physique des phénomènes d'écoulement étudiés, afin de construire un sous-maillage multi-dimensionnel optimisé selon le processus étudié.

Ce sous-maillage multi-dimensionnel est ensuite simplifié en un sous-maillage mono- ou bi-dimensionnel selon le processus étudié (prise en compte ou non de la gravité) à partir de l'hypothèse d'écoulement de type piston au sein des blocs. C'est l'objet du troisième paragraphe. Un sous-maillage optimal et simple à implémenter dans un simulateur de réservoir est ainsi créé, puis validé par rapport aux modèles de référence.

Le quatrième paragraphe porte sur l'adaptation de la méthodologie de sous-maillage à des blocs anisotropes en forme ou en perméabilité. Un changement de variables permet alors de se ramener dans le domaine de validité de notre méthodologie.

Enfin, le cinquième paragraphe traite de l'automatisation possible de la méthodologie de sous-maillage au sein d'un simulateur de réservoir, après avoir étudié l'influence des paramètres pétrophysiques sur le sous-maillage optimal obtenu.

3.1 Modèle de référence

3.1.1 Description des modèles de référence

Afin de comprendre la physique des écoulements, il est nécessaire de disposer d'un modèle dit *de référence*. Idéalement, il s'agit de données réelles, relevées sur le terrain ou mesurées en laboratoire, dans un cas d'écoulement bien identifié. Ici, malheureusement, nous ne disposons pas de telles données.

C'est pourquoi les modèles de référence sont des modèles numériques, les plus précis possibles, et dont les hypothèses de construction sont peu simplificatrices.

Dans notre cas, nous utilisons un modèle simple-milieu dont les mailles numériques ont des valeurs de porosité et de perméabilité à l'échelle macroscopique différentes. On parlera alors de *zone matrice* et de *zone fracture*. Ceci permet de reproduire un réservoir fracturé, sans utiliser l'hypothèse d'une représentation de Warren et Root, et toutes les approximations associées. De plus, afin de nous affranchir de l'hypothèse du bloc représentatif, nous nous intéressons à un bloc unique, entouré de fractures. Enfin, pour reproduire le plus précisément possible les écoulements, on maille spatialement le domaine de façon très fine, dans chaque direction. Le nombre de mailles est tel qu'un raffinement supplémentaire ne modifie pas les résultats obtenus. Dans notre cas, ce nombre était de l'ordre de 80 mailles dans chaque direction.

Le bloc étudié est, à l'état initial, saturé en huile, à la saturation $S_o = 1 - S_{wi}$, où S_{wi} est la saturation irréductible en eau (*cf.* Marle, [34]). Les fractures entourant le bloc sont saturées d'eau, à la saturation $S_w = 1$. Pour s'assurer que la saturation en eau dans les fractures ne diminue pas, malgré le transfert d'huile avec le bloc, on use d'un artefact numérique en fixant une porosité quasi-infinie dans les fractures (*cf.* Tab. 3.1).

Dans un premier temps, pour simplifier le cas, on travaille sur un bloc cubique, de mêmes dimensions dans toutes les directions, et isotrope, c'est-à-dire que les valeurs de la diagonale du tenseur de perméabilité sont identiques.

Enfin, afin de diminuer les ressources informatiques nécessaires à la simulation sur un tel bloc, nous utilisons les symétries dans les directions horizontales. Verticalement, le bloc est étudié dans toute sa hauteur pour permettre la prise en compte des effets gravitaires. Ainsi, le nombre de mailles du modèle de référence est $40 \times 40 \times 80 = 128\,000$ mailles.

Des modèles de référence ont été construits en une, deux et trois dimensions dans le cas de l'imbibition capillaire pure et en une et trois dimensions dans les cas de la gravité pure et de la gravito-capillarité.

La Fig. 3.1 présente un exemple de la géométrie du modèle de référence en deux dimensions, dans le cas de l'imbibition capillaire pure.

3.1.2 Propriétés des zones et du fluide

Dans ce paragraphe, nous présentons les valeurs des propriétés de chaque zone et des fluides, choisies pour construire nos modèles. Ces valeurs ont été voulues réalistes. Elles sont représentatives d'un réseau fracturé poreux pour lequel la perméabilité matrice est faible avec, néanmoins, une porosité matrice, et donc une capacité matrice, importante. Les fluides sont typiques de cas diphasiques eau-huile.

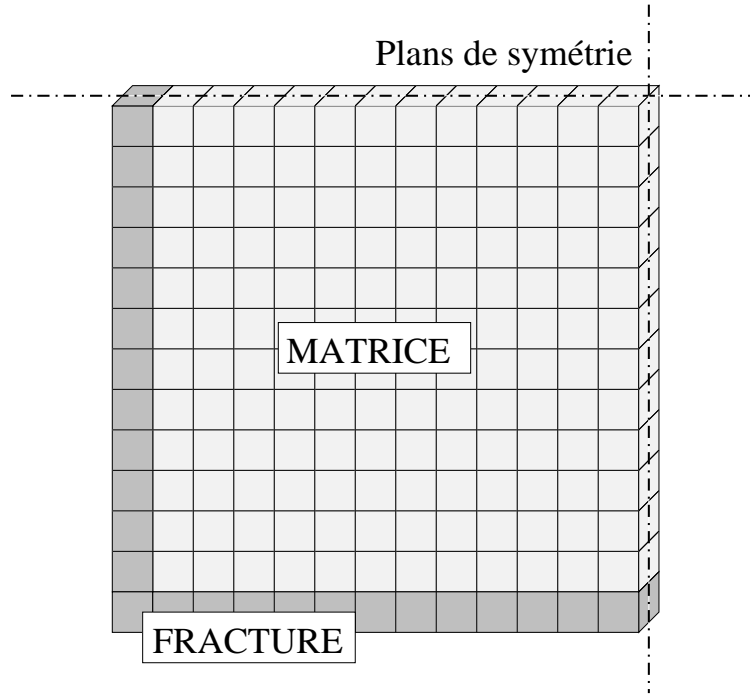


FIG. 3.1 – Géométrie du modèle de référence bi-dimensionnel

Les porosités et perméabilités des deux zones sont présentées dans le Tab. 3.1.

	Porosité φ^*			Perméabilité K^*	
	[adim]			[mD]	
Zone matrice	0,29			1	
Zone fracture	1	500	000	10	000

TAB. 3.1 – Porosités et perméabilités des zones matrice et fracture

La saturation irréductible en eau et la saturation résiduelle en huile, dans la zone matrice, ont les valeurs suivantes :

$$S_{wi} = 0,2 \quad \text{et} \quad S_{orw} = 0,25. \quad (3.1)$$

Les courbes de perméabilités relatives sont tracées sur la Fig. 3.2. Les perméabilités relatives maximales, notées $k_{rw_{max}}$ pour la phase eau et $k_{ro_{max}}$ pour la phase huile, ont des valeurs identiques dans les deux zones :

$$k_{rw_{max}} = 0,23 \quad \text{et} \quad k_{ro_{max}} = 1 \quad \text{dans les zones matrice et fracture.} \quad (3.2)$$

Les courbes de perméabilités relatives dans la zone fracture sont des courbes dites *en croix* (courbes linéaires) définies sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est-à-dire que, dans la zone fracture, $S_{wi} = S_{orw} = 0$.

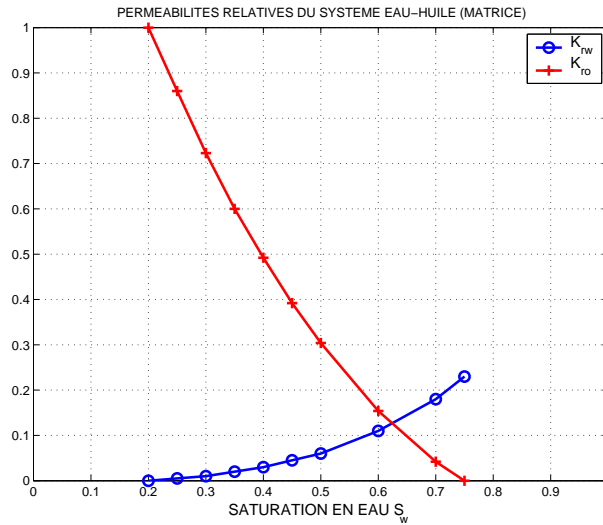


FIG. 3.2 – Perméabilités relatives eau-huile dans la matrice

La courbe de pression capillaire est différente selon qu'on étudie un cas capillaire pur ou un cas gravito-capillaire. En effet, afin de créer un processus d'imbibition pure, on choisit de simuler une roche mouillable à l'huile, dont la courbe de pression capillaire est positive. Cette courbe est présentée sur la Fig. 3.3, à gauche. Par contre, pour obtenir un processus d'échange régi par les forces capillaires et gravitaires, la roche doit être de mouillabilité intermédiaire, donc caractérisée par une courbe de pression capillaire possédant une partie positive et une partie négative. Cette courbe est présentée sur la Fig. 3.3, à droite.

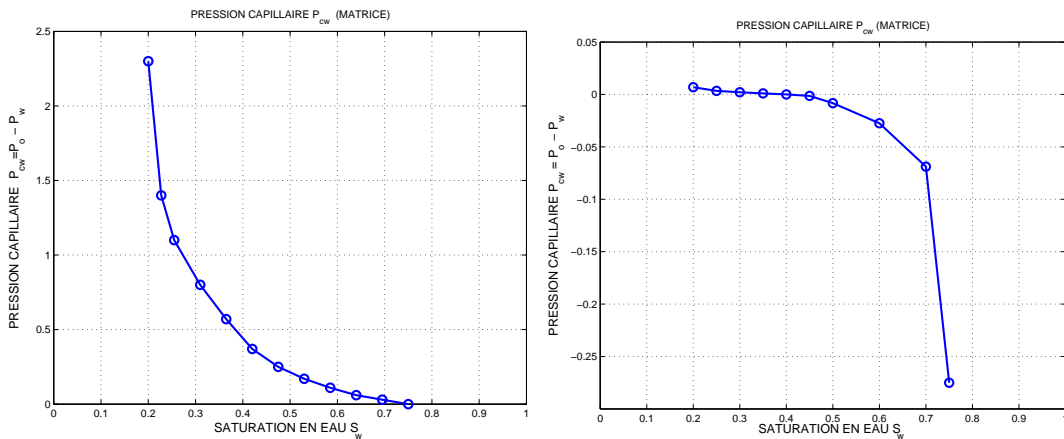


FIG. 3.3 – Pression capillaire eau-huile dans la matrice mouillable à l'huile (à gauche) ou de mouillabilité intermédiaire (à droite)

Dans le cas de la roche mouillable à l'huile, les pressions capillaires extrêmes (en bars)

sont :

$$Pc_{w_{min}}^* = 0 \quad \text{et} \quad Pc_{w_{max}}^* = 2,3 \quad (3.3)$$

Dans le cas de la roche de mouillabilité intermédiaire, les pressions capillaires extrêmes sont :

$$Pc_{w_{min}}^* = -0,275 \quad \text{et} \quad Pc_{w_{max}}^* = 0,00689 \quad (3.4)$$

et la pression capillaire nulle Pc_w^* est atteinte à la saturation $S_w^* = 0,4$.

Lorsqu'on étudie un cas gravitaire pur, on supprime la pression capillaire ($Pc_{w_{min}}^* = Pc_{w_{max}}^* = 0$).

Les propriétés des phases eau et huile composant le fluide sont présentées dans le Tab.3.2 :

	Masse volumique ρ^* à la pression de référence [g.cm ⁻³]	Compressibilité c [bar ⁻¹]	Viscosité dynamique μ [cPo]
Phase eau	1,0412	5,076.10 ⁻⁵	0,35
Phase huile	0,8192	6.10 ⁻⁴	0,21

TAB. 3.2 – Propriétés des phases eau et huile

Le rapport de mobilité R^* , défini comme $R^* = \frac{k_{rw_{max}} \mu_o}{k_{ro_{max}} \mu_w}$, est largement inférieur à 1, valeur limite déterminant le type de front (Marle [34]). Ici, $R^* = 0,138$.

3.2 Création d'un sous-maillage multi-dimensionnel optimisé

Nous voulons construire un sous-maillage du bloc matriciel qui permettra de reproduire la physique de l'écoulement dans ce bloc à la fois aux temps courts et longs.

Nous proposons une méthodologie de création de ce sous-maillage en trois étapes :

1. Identification de pas de temps représentatifs échantillonnant au mieux le déroulement du phénomène,
2. Pour chaque pas de temps représentatif, création d'un sous-maillage adapté,
3. Combinaison des sous-maillages précédents pour créer le sous-maillage multi-dimensionnel optimisé.

Le point de départ de cette méthodologie est un cas de référence, c'est-à-dire une simulation appliquée à un modèle de référence. Le nombre de dimensions du modèle est choisi en fonction du phénomène étudié (capillarité, gravité ou gravito-capillarité).

Identification de temps représentatifs

Le cas de référence fournit, comme résultat, l'évolution de la saturation moyenne normée en eau dans la zone matrice en fonction du temps, notée $|\bar{S}|(t)$. La saturation est moyennée sur la zone matrice, puis normée selon la relation suivante :

$$|\bar{S}|(t) = \frac{\bar{S}(t) - S_{wi}}{1 - S_{orw} - S_{wi}} \quad (3.5)$$

où $\bar{S}(t)$ est la saturation moyenne en eau.

Nous choisissons comme temps représentatifs les temps correspondant à une description régulière de l'intervalle de saturation : l'intervalle de saturation est sub-divisé en pas constants, et les temps $\{t^n\}_{n=1,\dots,N}$, correspondant à chaque pas, sont relevés :

$$|\bar{S}|(t^n) = \frac{n}{N} \quad \text{d'où} \quad t^n = |\bar{S}|^{-1} \left(\frac{n}{N} \right) \quad (3.6)$$

où $|\bar{S}|^{-1}$ désigne l'inverse de la fonction $|\bar{S}|$ bijective et N est le nombre de divisions de l'intervalle $[0, 1]$ parcouru par la saturation normée.

Le nombre N de temps représentatifs est choisi a priori à une valeur suffisante pour décrire le phénomène dans sa totalité.

La Fig. 3.4 représente en bleu la courbe de saturation moyenne normée en fonction du temps, et en rouge les sub-divisions régulières et les temps représentatifs déduits.

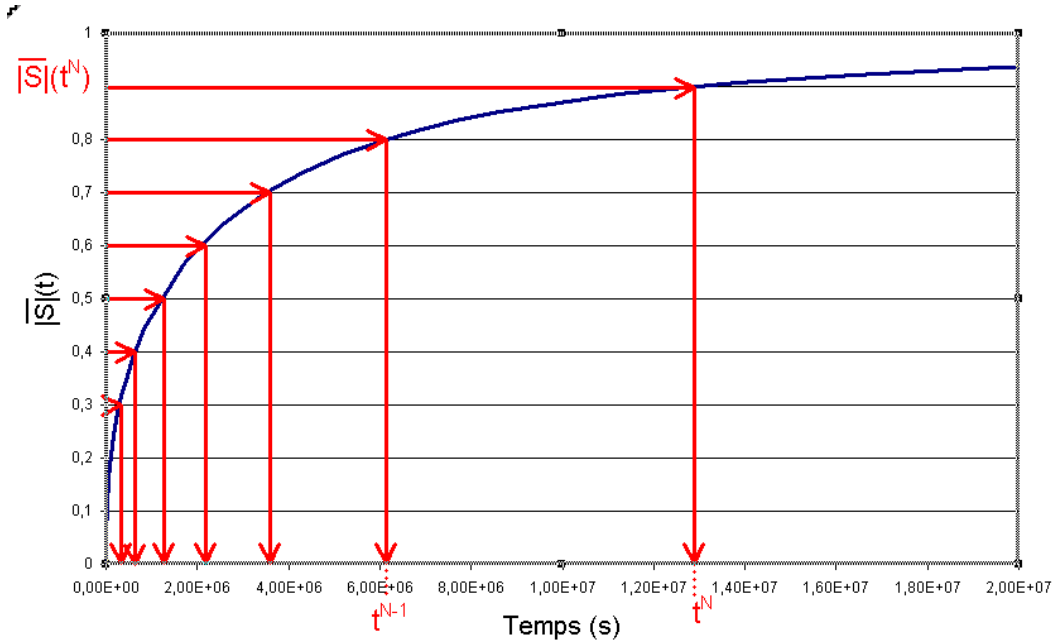


FIG. 3.4 – Obtention des temps représentatifs

Sous-maillage adapté à chaque temps représentatif

Pour chacun de ces temps représentatifs, on crée maintenant un sous-maillage adapté.

Le cas de référence fournit, pour chaque temps représentatif t^n , la saturation locale en eau normée, notée $|S^n|(x)$, en fonction de la distance x à la fracture. La saturation locale est normée à l'instant t^n par le minimum et le maximum atteints à ce temps :

$$|S^n|(x) = \frac{S^n(x) - S_{min}^n}{S_{max}^n - S_{min}^n} \quad (3.7)$$

Nous choisissons alors les abscisses correspondant à une description régulière de l'intervalle de saturation : l'intervalle de saturation est sub-divisé en pas constants, et les abscisses $\{x_i^n\}_{i=1,\dots,I}$, correspondant à chaque pas, sont relevées :

$$|S^n|(x_i^n) = 1 - \frac{i}{I} \quad \text{d'où} \quad x_i^n = |S^n|^{-1} \left(1 - \frac{i}{I} \right) \quad (3.8)$$

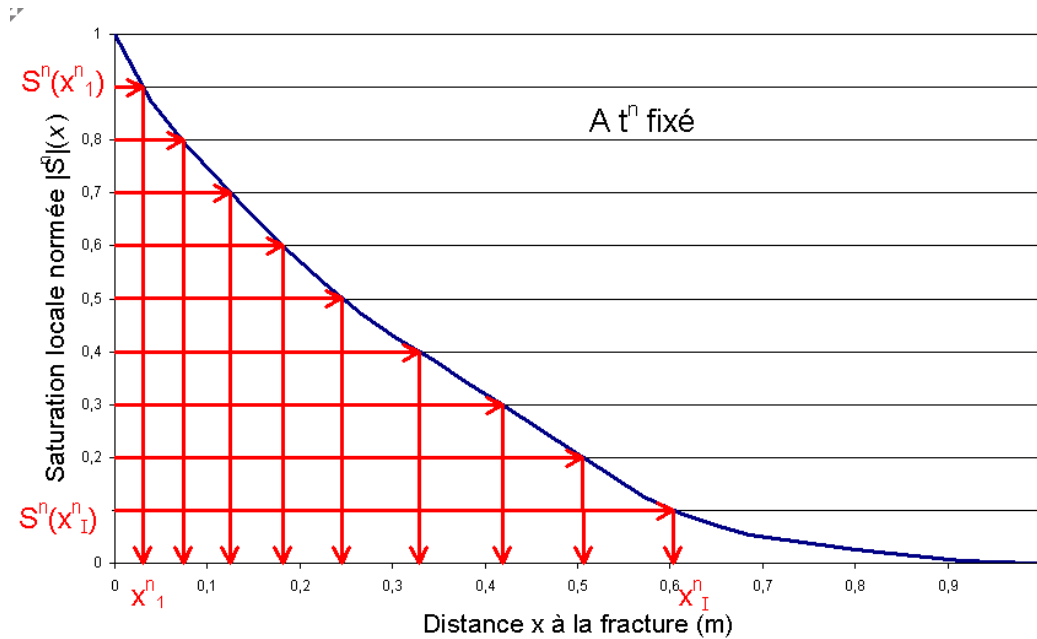


FIG. 3.5 – Pour chaque temps représentatif, obtention d'un sous-maillage

La Fig. 3.5 représente, pour un temps t^n fixé, en bleu la courbe de saturation locale normée en fonction de la distance x à la fracture, et en rouge les sub-divisions régulières et les abscisses déduites.

Pour chaque temps représentatif t^n , la série $\{x_i^n\}_{i=1,\dots,I}$ forme une discrétisation optimale du champ de saturation au sein du bloc et, par extension, un sous-maillage adapté au pas de temps considéré.

Une des caractéristiques de ces sous-maillages est que la dimension des sous-maillages de l'interface matrice-fracture vers le centre du bloc est strictement croissante. En effet, le front de saturation tend à s'étaler au fur et à mesure de sa progression dans le bloc. La pente d'un profil de saturation $|S^n(x)|$ diminue, et donc la dimension des mailles augmente vers le centre du bloc.

Sous-maillage optimisé résultant

Il s'agit d'obtenir un sous-maillage unique, qui décrit à la fois le comportement aux temps courts et aux temps longs. On "combine" donc les sous-maillages précédents grâce à un algorithme simple :

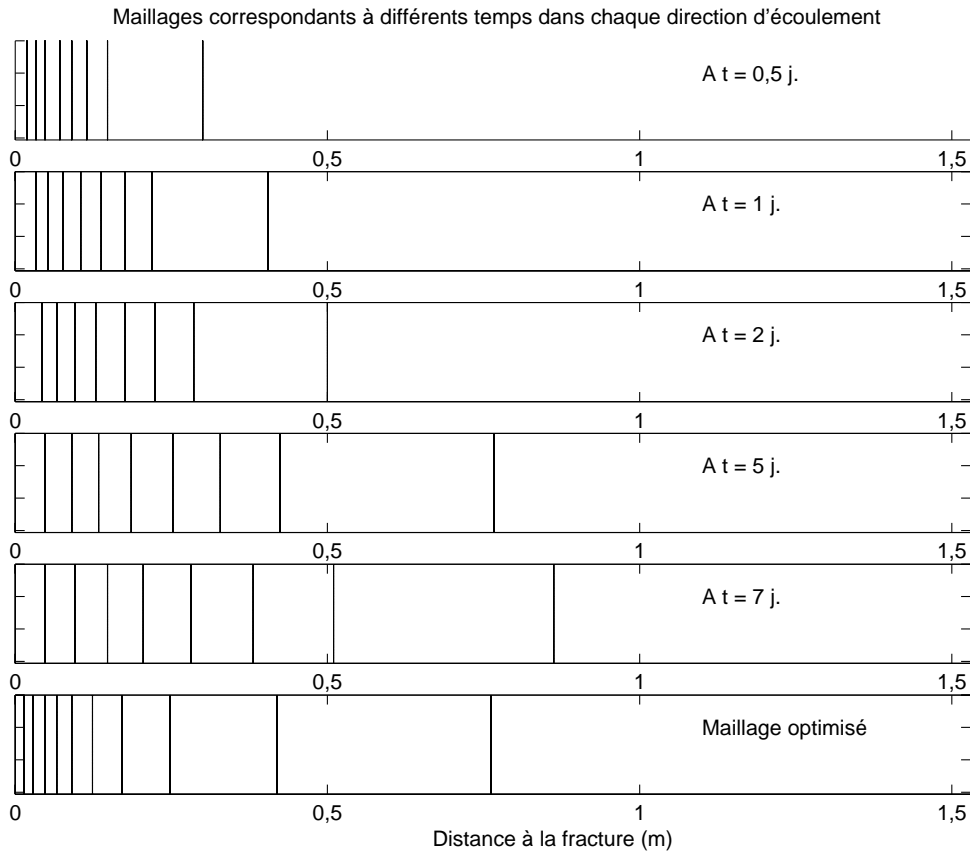


FIG. 3.6 – Maillages à différents temps et optimisé (*dernier maillage*)

1. On se place sur le bord du bloc ($x = 0$).
2. On repère la plus petite des sous-maillages.
3. On se déplace vers le centre du bloc de la dimension de cette sous-maille.
4. On cherche, parmi les sous-maillages restantes situées en aval de cette nouvelle abscisse, la sous-maille la plus petite dont la taille est strictement plus grande que la précédente.
5. Si elle existe, retour à 3. Sinon, fin de l'algorithme.

La Fig. 3.6 présente un exemple de maillages correspondant à des temps donnés, puis le maillage optimisé résultant de cette dernière étape.

Dans le cas d'un processus d'imbibition capillaire pure, les trois directions sont équivalentes puisque le phénomène n'est pas directionnel. On applique donc cette méthodologie dans une direction, puis on reproduit le sous-maillage optimisé résultant sur les autres directions.

Dans le cas d'un processus de gravité pure ou de gravito-capillarité, la direction verticale est différenciée des autres. Ainsi, on applique cette méthodologie dans la direction verticale et dans l'une des directions horizontales. Le sous-maillage résultant de l'étude dans une direction horizontale est reproduit sur l'autre direction horizontale.

3.3 Création du sous-maillage optimal

Nous avons obtenu un sous-maillage multi-dimensionnel, défini selon le même nombre de directions que le modèle de référence. Toutefois, pour tenir compte des symétries d'écoulement, comme dans le cas de capillarité pure, le sous-maillage peut encore être simplifié, en "regroupant" les sous-maillages dans les directions concernées.

Ainsi, dans le cas du processus de capillarité pure, on peut se limiter à un sous-maillage mono-dimensionnel, car toutes les directions jouent le même rôle. Dans un cas gravitaire et gravito-capillaire, le sous-maillage peut être réduit à un sous-maillage bi-dimensionnel : selon la direction verticale et selon l'une des directions horizontales.

Remarque 3.3.1 *Le modèle de référence simulant un phénomène de gravité pure nous a permis de mettre en évidence un envahissement tri-dimensionnel du bloc par l'eau.*

3.3.1 Maillage concentrique de la matrice

Pour s'appuyer réellement sur la physique du phénomène d'imbibition capillaire, il n'est pas nécessaire de reproduire le sous-maillage résultant de la méthodologie dans chacune des directions (Fig.3.7, à gauche). Le processus étant indépendant de la direction considérée en milieu homogène, un maillage concentrique, conforme à l'avancée du front dans le bloc, (Fig.3.7, à droite), suffit à reproduire la progression du fluide imbibant vers l'intérieur du bloc.

Ce paragraphe introduit les développements et hypothèses nécessaires pour passer du maillage optimisé dans chacune des directions créé précédemment, de type cartésien, à un maillage concentrique, composé de "couronnes".

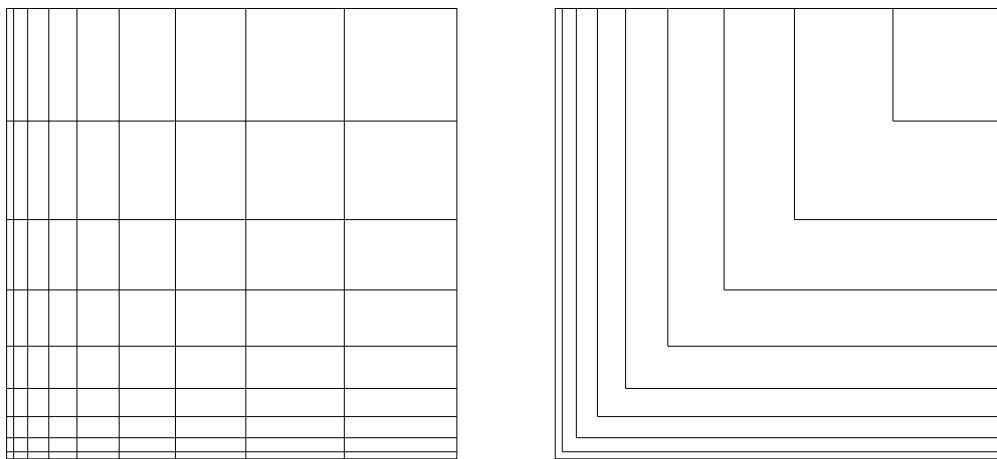


FIG. 3.7 – Cas bi-dimensionnel soumis à la capillarité pure : sous-maillage optimisé (à gauche) et sous-maillage concentrique (à droite)

Notons $\Omega_{(i,j)}$ les mailles numériques du sous-maillage optimisé, et Ω_c les "couronnes" composant le sous-maillage concentrique.

Une couronne est alors définie comme l'ensemble des mailles $\Omega_{(i,j)}$ pour $i = c$ ou $j = c$:

$$\Omega_c = \{\Omega_{(i,j)}, i = c \text{ ou } j = c\} \quad (3.9)$$

L'hypothèse principale utilisée dans la suite de ces développements est que les inconnues pression et saturation ont la même valeur sur toutes les mailles numériques composant une couronne. Cette hypothèse est vraie si l'écoulement est un écoulement dit *piston*, c'est-à-dire lorsque le front de progression du fluide ne s'étale pas.

Lorsque les équations d'écoulement (2.31) et (2.33) sont intégrées, selon la méthode des volumes finis, sur une maille numérique $\Omega_{(i,j)}$, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & \frac{VP_{(i,j)}^{n+1} \rho_w^{n+1} S_{(i,j)}^{n+1} - VP_{(i,j)}^n \rho_w^n S_{(i,j)}^n}{\Delta t} \\ & - A_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)} KM_{w,(i-1/2,j)}^k \frac{(P_{(i,j)}^k - Pc_{w,(i,j)}^k) - (P_{(i-1,j)}^k - Pc_{w,(i-1,j)}^k)}{l_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)}} \\ & + A_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)} KM_{w,(i+1/2,j)}^k \frac{(P_{(i+1,j)}^k - Pc_{w,(i+1,j)}^k) - (P_{(i,j)}^k - Pc_{w,(i,j)}^k)}{l_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)}} \\ & - A_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)} KM_{w,(i,j-1/2)}^k \frac{(P_{(i,j)}^k - Pc_{w,(i,j)}^k) - (P_{(i,j-1)}^k - Pc_{w,(i,j-1)}^k)}{l_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)}} \\ & + A_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} KM_{w,(i,j+1/2)}^k \frac{(P_{(i,j+1)}^k - Pc_{w,(i,j+1)}^k) - (P_{(i,j)}^k - Pc_{w,(i,j)}^k)}{l_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)}} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{VP_{(i,j)}^{n+1} \rho_o^{n+1} (1 - S_{(i,j)}^{n+1}) - VP_{(i,j)}^n \rho_o^n (1 - S_{(i,j)}^n)}{\Delta t} \\ & - A_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)} KM_{o,(i-1/2,j)}^k \frac{P_{(i,j)}^k - P_{(i-1,j)}^k}{l_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)}} + A_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)} KM_{o,(i+1/2,j)}^k \frac{P_{(i+1,j)}^k - P_{(i,j)}^k}{l_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)}} \\ & - A_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)} KM_{o,(i,j-1/2)}^k \frac{P_{(i,j)}^k - P_{(i,j-1)}^k}{l_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)}} + A_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} KM_{o,(i,j+1/2)}^k \frac{P_{(i,j+1)}^k - P_{(i,j)}^k}{l_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)}} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

avec :

- $VP_{(i,j)}$ le volume poreux de la maille numérique $\Omega_{(i,j)}$,
- $A_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)}$, $A_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)}$, $A_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)}$ et $A_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)}$ les aires d'échange respectives entre les mailles numériques $\Omega_{(i-1,j)}$ et $\Omega_{(i,j)}$, $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i+1,j)}$, $\Omega_{(i,j-1)}$ et $\Omega_{(i,j)}$ et entre les mailles numériques $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i,j+1)}$,
- $M_{w,(i-1/2,j)}^k$, $M_{w,(i+1/2,j)}^k$, $M_{w,(i,j-1/2)}^k$ et $M_{w,(i,j+1/2)}^k$ les mobilités massiques respectives aux interfaces entre les mailles numériques $\Omega_{(i-1,j)}$ et $\Omega_{(i,j)}$, $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i+1,j)}$, $\Omega_{(i,j-1)}$ et $\Omega_{(i,j)}$ et entre les mailles numériques $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i,j+1)}$,
- $l_{(i-1,j) \rightarrow (i,j)}$, $l_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)}$, $l_{(i,j-1) \rightarrow (i,j)}$ et $l_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)}$ les longueurs entre les centres des mailles numériques $\Omega_{(i-1,j)}$ et $\Omega_{(i,j)}$, $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i+1,j)}$, $\Omega_{(i,j-1)}$ et $\Omega_{(i,j)}$ et entre les centres des mailles numériques $\Omega_{(i,j)}$ et $\Omega_{(i,j+1)}$.

Remarque 3.3.2 *L'exposant k se réfère au schéma choisi :*

$$\begin{aligned} k &= n && \text{pour le schéma explicite,} \\ k &= n + 1 && \text{pour le schéma implicite.} \end{aligned}$$

On définit les attributs des couronnes Ω_c de la façon suivante :

$$P_c = P_{(i,j)} \quad \forall \Omega_{(i,j)} \in \Omega_c, \quad (3.12)$$

$$S_c = S_{(i,j)} \quad \forall \Omega_{(i,j)} \in \Omega_c, \quad (3.13)$$

$$k_{r,c} = k_{r,(i,j)} \quad \forall \Omega_{(i,j)} \in \Omega_c, \quad (3.14)$$

$$l_{c \rightarrow c+1} = l_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)} = l_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} \quad \forall \Omega_{(i,j)} \in \Omega_c, \quad (3.15)$$

$$\phi_c = \phi_{i,j} \quad \forall \Omega_{(i,j)} \in \Omega_c, \quad (3.16)$$

$$A_{c \rightarrow c+1} = \sum_{\substack{j, \\ i=c}} A_{(i,j) \rightarrow (i+1,j)} + \sum_{\substack{i, \\ j=c, i \neq c}} A_{(i,j) \rightarrow (i,j+1)} \quad (3.17)$$

$$V_c = \sum_{\substack{j, \\ i=c}} V_{i,j} + \sum_{\substack{i, \\ j=c, i \neq c}} V_{i,j} \quad (3.18)$$

En sommant les équations (3.10) et (3.11) sur $i = c$ et $j = c$, où $j \neq i$, et en remarquant que les termes faisant intervenir la différence de pression entre deux cellules de la couronne s'annulent, on obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} & V_c \varphi_c \frac{\rho_w^{n+1} S_c^{n+1} - \rho_w^n S_c^n}{\Delta t} \\ & - A_{c-1 \rightarrow c} K M_{w,c-1/2}^k \frac{(P_c^k - P_{c,w,c}^k) - (P_{c-1}^k - P_{c,w,c-1}^k)}{l_{c-1 \rightarrow c}} \\ & + A_{c \rightarrow c+1} K M_{w,c+1/2}^k \frac{(P_{c+1}^k - P_{c,w,c+1}^k) - (P_c^k - P_{c,w,c}^k)}{l_{c \rightarrow c+1}} = 0 \quad (3.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & V_c \varphi_c \frac{\rho_o^{n+1} (1 - S_c^{n+1}) - \rho_o^n (1 - S_c^n)}{\Delta t} \\ & - A_{c-1 \rightarrow c} K M_{o,c-1/2}^k \frac{P_c^k - P_{c-1}^k}{l_{c-1 \rightarrow c}} + A_{c \rightarrow c+1} K M_{o,c+1/2}^k \frac{P_{c+1}^k - P_c^k}{l_{c \rightarrow c+1}} = 0 \quad (3.20) \end{aligned}$$

On remarque que le système (3.19)-(3.20) est une discrétisation du système (2.23)-(2.25) sur un maillage mono-dimensionnel. Ainsi, le nouveau modèle en couronnes, créé en égalant les inconnues des mailles situées à même distance des fissures, est équivalent à un modèle mono-dimensionnel. Ce sous-maillage est du même type que le sous-maillage proposé par Pruess et Narasimhan [44] dans la méthode MINC, à savoir un sous-maillage élaboré en fonction de la distance à la fracture.

3.3.2 Sous-maillage mono-dimensionnel optimal et pratique

Le sous-maillage "en couronnes" est un sous-maillage mono-dimensionnel optimisé selon le processus étudié. Toutefois, il n'est pas facilement implémentable dans un simulateur de réservoir fracturé car les aires d'échange entre couronnes sont différentes d'une couronne à l'autre.

Ce paragraphe décrit comment le sous-maillage en couronnes peut être remplacé par un sous-maillage équivalent, dont l'aire d'échange est constante. L'équivalence est assurée par la conservation de certaines grandeurs.

Afin de conserver la cinétique d'écoulement, une grandeur, indépendante du temps, est introduite : la transmissivité entre deux mailles. La transmissivité, définie à l'interface, traduit la facilité du fluide à traverser l'interface entre deux mailles numériques.

En une dimension, soit $T_{c,c+1}$ la transmissivité entre les mailles numériques indicées c et $c + 1$, définie par :

$$T_{c,c+1} = \frac{KA_{c \rightarrow c+1}}{l_{c \rightarrow c+1}} \quad (3.21)$$

Remarque 3.3.3 *La perméabilité est constante sur une maille matrice, donc, a fortiori, sur deux sous-mailles du bloc représentatif voisines.*

La conservation des transmissivités entre deux mailles ainsi que du volume poreux nous assure donc un processus de déplacement identique dans les deux modèles. De plus, la porosité est aussi conservée, afin de ne pas "fausser" les équations de conservation de la masse.

Par contre, l'aire d'échange, qui doit être constante dans le sous-maillage optimal, sera forcément modifiée. L'aire d'échange du modèle optimal est choisie arbitrairement, et notée A^{opt} .

La volonté de conserver le volume poreux et la porosité tout en modifiant l'aire d'échange nous impose de modifier aussi les dimensions des sous-mailles. La dimension, dans la direction sous-maillée, des nouvelles sous-mailles, notée l_c^{opt} , est définie par :

$$l_c^{opt} = \frac{VP_c}{A^{opt}\varphi_c} \quad (3.22)$$

où VP_c désigne le volume poreux de la maille d'indice c , qu'il s'agisse d'une couronne ou d'une nouvelle sous-maille optimisée.

La définition d'une nouvelle longueur de maille devrait entraîner une modification de la transmissivité définie par la relation (3.21). Cette difficulté est contournée par l'utilisation d'une option, disponible dans la majorité des simulateurs de réservoir fracturé, permettant d'imposer les valeurs des transmissivités entre deux mailles.

Ainsi, le maillage mono-dimensionnel équivalent est construit en :

- conservant le nombre de mailles du modèle en couronnes,
- conservant la porosité de chaque maille,
- imposant une aire d'échange entre deux mailles constante sur le modèle,
- calculant la nouvelle longueur des mailles afin de conserver le volume poreux de chaque maille,
- imposant, dans le simulateur, la transmissivité entre deux mailles calculée sur le modèle originel.

La Fig. 3.8 récapitule les différents sous-maillages construits pour arriver au sous-maillage optimal

3.3.3 Validation du modèle optimal

La validation des sous-maillages optimaux créés est faite par comparaison avec le modèle de référence correspondant. Pour évaluer l'écart entre les résultats, la norme suivante est mise

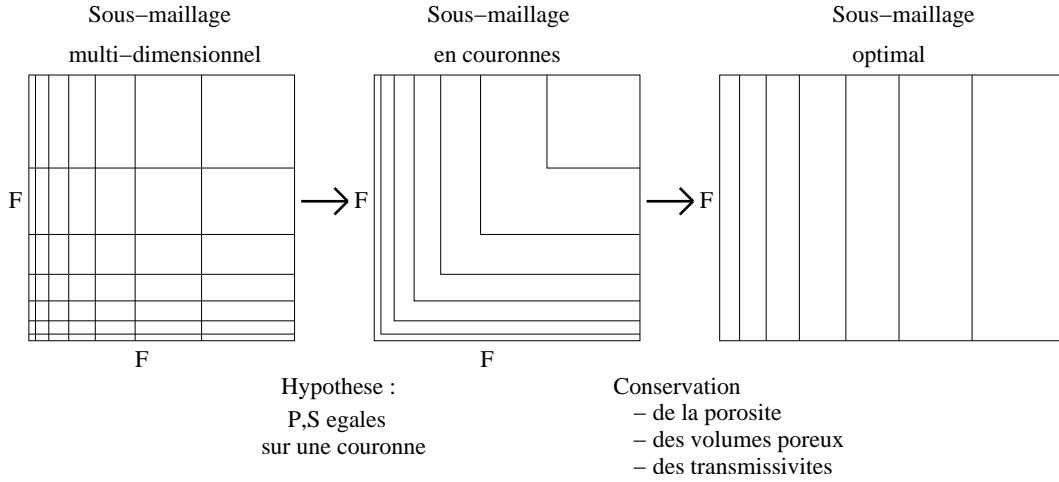


FIG. 3.8 – Cas bi-dimensionnel soumis à la capillarité pure : sous-maillage optimisé (à gauche), sous-maillage concentrique (au centre) et sous-maillage optimal (à droite)

en place :

$$e = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\left| s_{test}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right) - s_{ref}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right) \right|}{s_{ref}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right)} \right) \quad (3.23)$$

où s est la solution du problème, c'est-à-dire la courbe de récupération échantillonnée, et où les indices ref et $test$ se réfèrent respectivement au modèle de référence et au sous-maillage optimal testé.

Dans le cas de la simulation d'un processus d'imbibition pure, la Fig. 3.9 présente une comparaison du pourcentage d'huile récupérée en fonction du temps sur quatre modèles différents :

- Les résultats sur le cas de référence finement maillé sont tracés en bleu foncé.
- Les résultats sur le cas avec sous-maillage multi-dimensionnel sont tracés en bleu clair.
- Les résultats sur le cas avec sous-maillage optimal (ici, sous-maillage mono-dimensionnel) sont tracés en rouge.
- Les résultats sur le cas double-milieu conventionnel sont tracés en vert.

Le cas double-milieu conventionnel correspond à une formulation des échanges pseudo-stationnaire, comme présentée dans le paragraphe 1.2.2, p. 20, utilisant le facteur de forme proposé par Kazemi *et al.* [29] :

$$\sigma_{Kazemi} = 4 \left(\frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right) \quad (3.24)$$

où L_x , L_y et L_z sont les dimensions du bloc matriciel selon les directions x , y et z , et dans laquelle seule la force capillaire est prise en compte (Quandalle et Sabathier [45], Sabathier *et al.* [51]).

Les résultats du modèle avec sous-maillage optimal sont très proches des résultats de référence : $e < 1,7\%$.

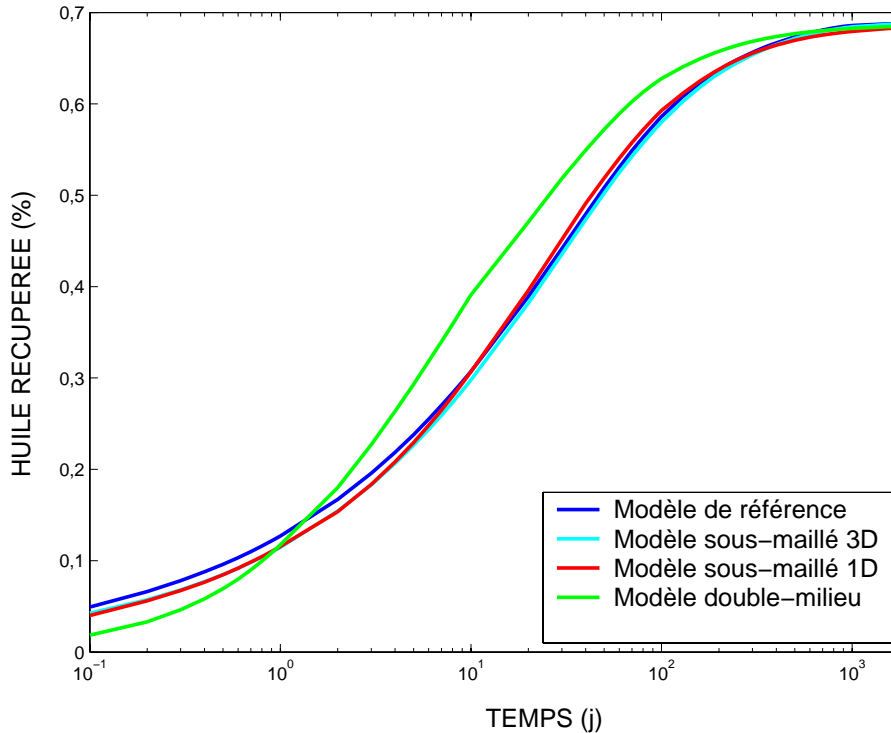


FIG. 3.9 – Capillarité pure, cas tri-dimensionnel : comparaisons des différents maillages

De même, les Fig. 3.10 et 3.11 présentent une comparaison des quatre modèles précédents dans le cas de la simulation d'un processus de gravité pure et d'un processus de gravito-capillarité, respectivement. Les sous-maillages optimaux correspondants sont bi-dimensionnels.

Une fois encore, les résultats obtenus sur les modèles sous-maillés de façon optimale sont très proches des résultats du modèle de référence : $e < 1\%$.

Un sous-maillage peut être défini par le nombre de sous-maillages le composant et par le rapport moyen des longueurs des sous-maillages.

Dans les trois cas présentés ci-dessus, le nombre de maillages composant les sous-maillages optimisés (sous-maillage horizontal dans les cas bi-dimensionnels) est compris entre 14 et 16 sous-maillages, et le rapport moyen des longueurs varie entre 1,2 et 1,3 (c'est-à-dire qu'en moyenne, une sous-maille est 1,2 à 1,3 fois plus grande que la sous-maille précédente).

Dans les cas faisant intervenir le processus de drainage gravitaire (seul ou couplé avec l'imbibition capillaire), les sous-maillages verticaux sont composés d'environ 10 sous-maillages, avec un rapport de progression moyen légèrement inférieur à 1,5

Un tel sous-maillage optimal du bloc matriciel permet de simuler les échanges entre le milieu matriciel et le milieu fissure de façon précise.

Remarque 3.3.4 Ces résultats permettent de vérifier la validité des sous-maillages proposés. Les cas sous-maillés sont des cas simple-milieu, dans lesquels les zones matrice et fracture

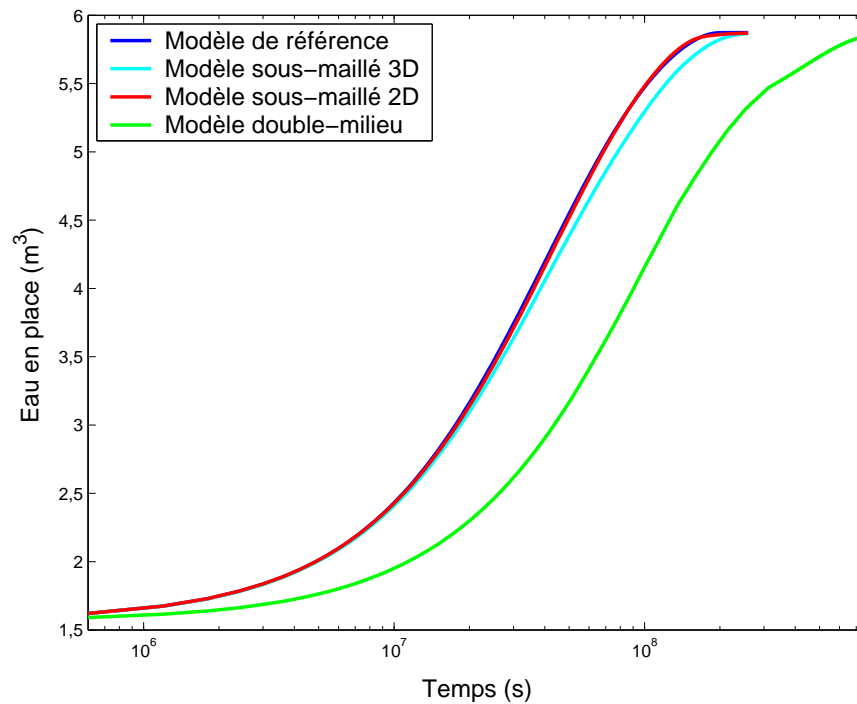


FIG. 3.10 – Gravité pure, cas tri-dimensionnel : comparaisons des différents maillages

sont différenciées par des valeurs différentes des données selon la zone, comme il a été fait pour le modèle de référence. Il ne s'agit pas de la mise en œuvre d'un modèle mixte.

Les études menées jusqu'à présent portaient sur des blocs isotropes en perméabilité, et cubiques, ou plutôt de même longueur selon chacune des dimensions considérées. Le prochain paragraphe s'intéresse aux cas anisotropes en perméabilité (perméabilité différente selon chacune des directions) et non cubiques (de longueurs différentes selon chacune des directions).

En effet, la possibilité de reproduire le même maillage dans chacune des directions pour l'obtention du modèle optimisé de même dimension reposait sur le fait que le bloc était cubique et isotrope, des directions (deux dans les cas gravitaire et gravito-capillaire, trois dans le cas capillaire) pouvant alors jouer le même rôle.

3.4 Anisotropie de forme et de perméabilité

Lorsque la même force (force capillaire) agit dans plusieurs directions mais que les perméabilités diffèrent suivant ces directions, les vitesses d'échange dans chaque direction ne sont plus les mêmes. Il n'est plus possible de faire jouer le même rôle à ces directions.

On modifie alors les dimensions du bloc, grâce à un changement de variables, afin de se ramener à un bloc isotrope en perméabilité (Besson, [8]).

Les développements qui suivent supposent que les trois directions sont soumises uniquement à la force capillaire. Dans le cas gravito-capillaire, il suffit de ne pas tenir compte des

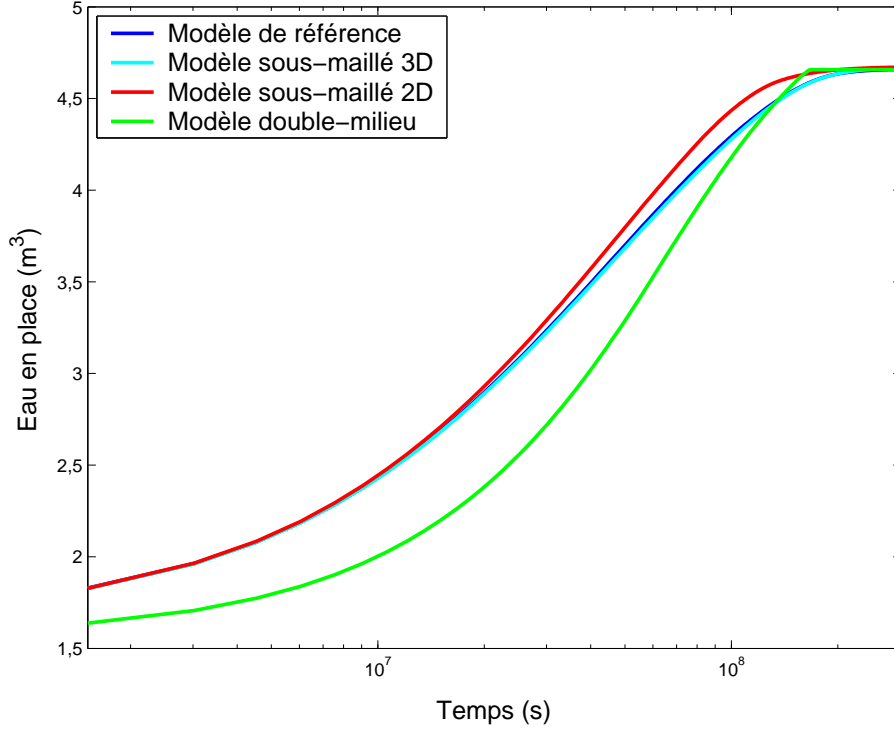


FIG. 3.11 – Gravito-capillarité, cas tri-dimensionnel : comparaisons des différents maillages

équations dans la direction verticale z . On étudie un quart de bloc de dimensions $a/2$, $b/2$, c et de perméabilités (tenseur diagonal) K_x , K_y et K_z respectivement dans les directions x , y et z .

L'équation de conservation de la masse s'écrit, pour une phase :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\rho S) - K_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - K_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) - K_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.25)$$

Après avoir fixée une perméabilité de référence K , on pose le changement de variables suivant :

$$X = x \sqrt{\frac{K}{K_x}}, \quad X \in \left[0; \frac{A}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{K}{K_x}} \right], \quad dx = \sqrt{\frac{K_x}{K}} dX \quad (3.26)$$

$$Y = y \sqrt{\frac{K}{K_y}}, \quad Y \in \left[0; \frac{B}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{K}{K_y}} \right], \quad dy = \sqrt{\frac{K_y}{K}} dY \quad (3.27)$$

$$Z = z \sqrt{\frac{K}{K_z}}, \quad Z \in \left[0; C = c \sqrt{\frac{K}{K_z}} \right], \quad dz = \sqrt{\frac{K_z}{K}} dZ \quad (3.28)$$

L'équation (3.25) s'écrit maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi\rho S) - K \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - K \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - K \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{k_r \rho}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 0 \quad (3.29)$$

L'équation (3.29) est l'équation de conservation de la masse écrite dans le cas d'un bloc *isotrope* de perméabilité K et de dimensions (A, B, C) .

Le quart de bloc initialement étudié peut ainsi être remplacé par un bloc isotrope de dimension $A/2, B/2$ et C suivant les directions x, y et z , et de perméabilité K , dans toutes les directions.

Le bloc est maintenant isotrope selon les directions soumises à la seule force capillaire. Toutefois, les dimensions sont différentes dans chaque direction. Nous allons maintenant voir comment la méthodologie de sous-maillage peut être appliquée dans ce cas.

Dans un bloc isotrope, les fronts de saturation, évoluant à partir de chacune des faces, sont identiques à un temps donné, quelle que soit la face considérée (hypothèse de l'écoulement de type piston). Toutefois, les dimensions étant différentes dans chaque direction, le front de saturation atteindra le centre du bloc suivant la direction dont la dimension est la plus faible. A ce moment-là, les fronts suivant les deux autres directions seront stoppés, bien que n'ayant pas atteint le centre du bloc (*cf* Fig. 3.12).

La dimension à prendre en compte lors de la création du sous-maillage est ainsi la

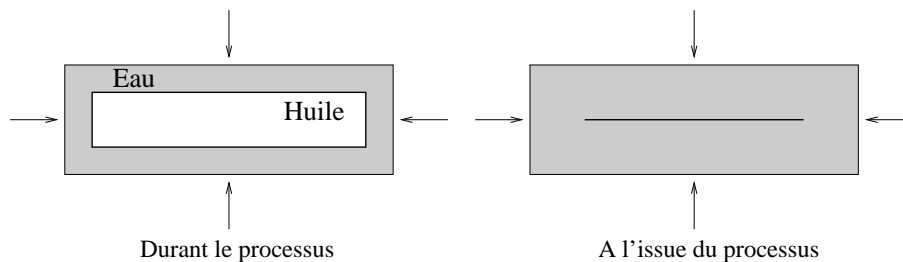


FIG. 3.12 – Capillarité pure, cas bi-dimensionnel : Avancée des fronts de saturation dans un bloc de dimensions quelconques

plus petite des dimensions du bloc isotrope, puisqu'elle va déterminer en premier la fin du processus d'imbibition. Le maillage optimal, qui sera "dupliqué" dans chacune des directions, est donc celui qui décrira l'écoulement monodimensionnel dans un bloc monodimensionnel de dimension égale à la plus petite des longueurs A, B et C .

L'obtention du maillage optimal se déroule donc selon la méthodologie présentée dans les paragraphes 3.3, en privilégiant la plus petite des dimensions du bloc isotrope équivalent. Ce maillage est alors reproduit dans chaque direction. La dimension de la maille centrale dans les deux directions de plus grandes dimensions est calculée comme la différence entre la dimension du bloc et la somme des dimensions des sous-mailles précédentes (*cf* Fig. 3.13). Le maillage mono-dimensionnel optimal est ensuite déduit du maillage concentrique.

3.5 Automatisation du sous-maillage optimal

3.5.1 Influence de paramètres pétrophysiques

Les cas présentés dans les paragraphes précédents ont tous été construits avec les mêmes données pétrophysiques (courbes de pression capillaire, de perméabilités relatives, et rapport

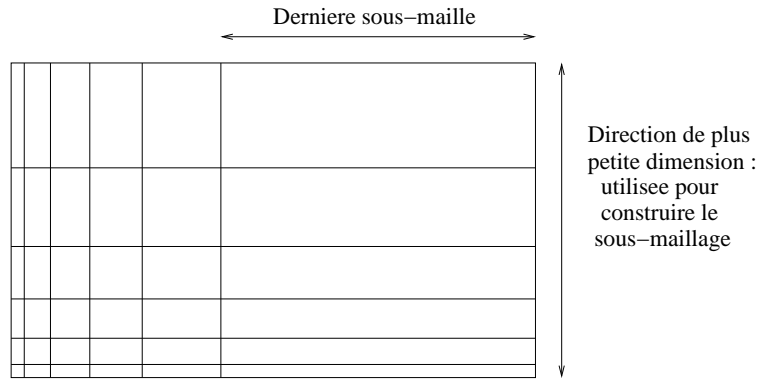


FIG. 3.13 – Cas bi-dimensionnel avec anisotropie de forme : sous-maillage

de mobilité).

Ce paragraphe a pour vocation d'évaluer l'influence de ces trois paramètres sur le maillage optimisé. De nouveaux cas sont construits, en faisant varier ces paramètres, puis, pour chacun d'eux, le maillage optimisé correspondant est construit.

Cette étude a été menée sur des modèles soumis à la force capillaire uniquement. Les résultats peuvent être étendus aux directions horizontales pour les modèles soumis à la force gravitaire, ou aux forces gravitaire et capillaire.

Courbes de pression capillaire

Deux courbes de pression capillaire $Pc_w(S_w)$ sont testées, en conservant les mêmes valeurs des points extrêmes :

- une courbe de pression capillaire linéaire, de la forme :

$$Pc_w(S_w) = Pc_{wmax} \frac{1 - S_w - S_{orw}}{1 - S_{wi} - S_{orw}},$$

- une courbe de pression capillaire homothétique, construite à partir de la courbe de pression capillaire utilisée précédemment dans le cas capillaire (cf. Fig. 3.3, à gauche) :

pour chaque point (S_w, Pc_w) appartenant à la courbe de pression capillaire initiale, le nouveau point (S_w, Pc'_w) est défini par : $Pc'_w(S_w) = \frac{Pc_w(S_w)}{4}$.

Ces deux courbes sont tracées sur la Fig. 3.14.

Courbes de perméabilités relatives

Deux jeux de courbes de perméabilité relative sont envisagées, en conservant les mêmes valeurs extrêmes :

- deux courbes de perméabilité relative linéaires, de la forme :

$$k_{rw}(S_w) = k_{rwmax} \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{orw} - S_{wi}}$$

$$k_{row}(S_w) = k_{rowmax} \frac{1 - S_w - S_{orw}}{1 - S_{orw} - S_{wi}}$$

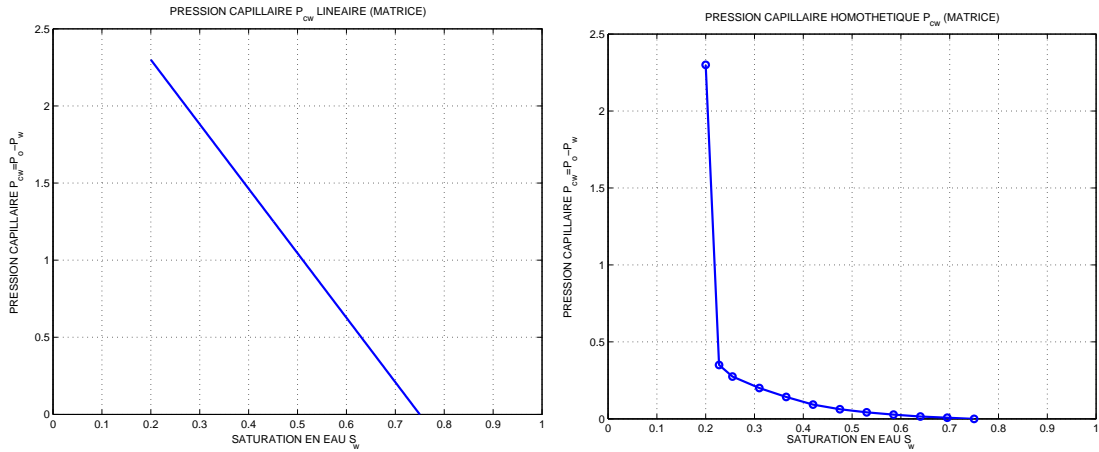


FIG. 3.14 – Courbes de pression capillaire linéaire (à gauche) et homothétique (à droite)

– deux courbes de perméabilité relative polynomiale d'ordre 3, de la forme :

$$k_{rw}(S_w) = k_{rw_{max}} \left(\frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{orw} - S_{wi}} \right)^3$$

$$k_{row}(S_w) = k_{row_{max}} \left(\frac{1 - S_w - S_{orw}}{1 - S_{orw} - S_{wi}} \right)^3$$

Ces deux courbes sont tracées sur la Fig. 3.15.

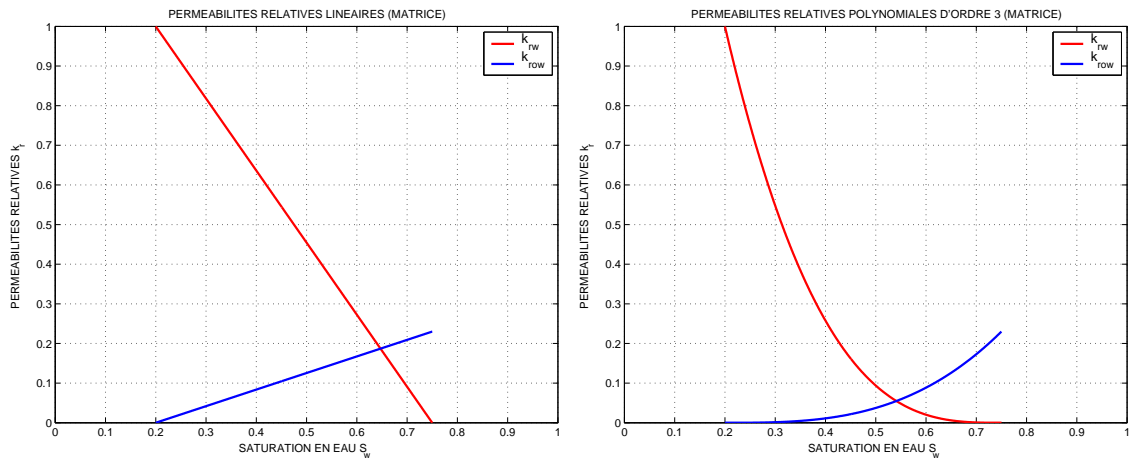


FIG. 3.15 – Courbes de perméabilité relative linéaire (à gauche) et polynomiale d'ordre 3 (à droite)

Rapports de mobilité

Deux rapports de mobilité R^* sont envisagés. Le rapport de mobilité peut être modifié via l'un des quatre termes constitutifs (viscosité de l'huile et de l'eau, perméabilité relative

maximale de l'huile et de l'eau). Ici, c'est la viscosité de l'huile qui est modifiée. Les deux rapports de mobilité testés sont :

- $R^* = 0,138$, comme défini dans la section 3.1.2,
- $R^* = 4,14$, en multipliant la précédente viscosité de l'huile par 30.

Résultats

En combinant les différentes valeurs des trois paramètres étudiés, huit cas ont été créés puis étudiés.

Le nombre de mailles est quasiment constant, et comme dans les cas précédents, le rapport de progression moyen demeure compris entre 1,2 et 1,35.

L'erreur e , entre le modèle de référence et le modèle optimal, a été évaluée pour chacun des jeux de données pétrophysiques. Elle est très faible, de l'ordre de 0,1%, pour les cas mettant en jeu des courbes de perméabilités relatives linéaires, et légèrement plus élevée, mais n'excédant pas 1,3%, dans les cas mettant en jeu des courbes de perméabilités relatives polynômiales d'ordre 3.

3.5.2 Conclusions

La méthode d'obtention d'un sous-maillage mono- ou bi-dimensionnel est basée sur une étude de la physique des écoulements lors d'un processus d'imbibition capillaire pure, de gravité pure ou de gravito-capillarité. Cette méthode peut être appliquée quel que soit le bloc de départ (dimensions, anisotropie) et les données pétrophysiques (courbes de perméabilité relative, de pression capillaire, rapport de mobilité),

Toutefois, il semble impossible de réitérer cette méthode d'obtention pour chacun des blocs représentatifs lors d'une étude à grande échelle dans un simulateur de réservoir fissuré. Même si cette méthode était totalement automatisée, le coût du pré-traitement serait prohibitif.

Il s'agit donc de déterminer de façon immédiate un sous-maillage mono- ou bi-dimensionnel optimisé connaissant la géométrie d'un bloc, son éventuelle anisotropie, les données pétrophysiques du milieu matriciel et les forces en présence.

Dans les paragraphes composant ce chapitre, plusieurs cas de figure ont été envisagés, et plusieurs remarques générales concernant les sous-maillages peuvent être faites.

Dans le cas capillaire pur, ainsi que pour les directions horizontales des cas gravitaire et gravito-capillaire, le nombre de sous-mailles varie peu, entre 11 et 18 sous-mailles, sans que la dimension du problème, ou une éventuelle anisotropie de forme n'ait d'influence. Le nombre moyen de mailles est 15. Le rapport de progression moyen entre les tailles de deux sous-mailles voisines demeure compris entre 1,2 et 1,35, les plus grands rapports de progression étant de façon logique associés aux maillages comprenant le moins de mailles.

Dans la direction verticale, intervenant dans les cas gravitaire pur et capillo-gravitaire, le nombre de sous-mailles est en moyenne de 10, et le rapport de progression moyen entre deux sous-mailles est, dans les deux cas, légèrement inférieur à 1,5.

Connaissant le nombre de mailles constituant le maillage, et le rapport de progression

moyen, il est alors possible de créer de façon automatique un maillage optimisé mono- ou bi-dimensionnel.

3.6 Conclusion

Une méthodologie de sous-maillage, basée sur la compréhension physique des processus d'écoulement, a été proposée dans le cas d'écoulements capillaires, gravitaires et gravito-capillaires. Après plusieurs étapes, le sous-maillage résultant est mono-dimensionnel, ou bi-dimensionnel si la gravité est considérée. L'indépendance des sous-maillages aux paramètres pétrophysiques permet de proposer une automatisation de ce sous-maillage au sein d'un simulateur de réservoir, en fournissant comme donnée le nombre de sous-maillages et le rapport moyen des longueurs entre sous-maillages.

Chapitre 4

Résultats

Ce chapitre présente plusieurs cas traités avec le nouveau modèle mixte faisant l’objet de ce travail de thèse. Les cas-test proposés permettent de valider l’utilisation du modèle mixte pour la simulation précise des échanges entre régions matrice et fracture dans un réservoir fracturé, mais aussi de mettre en évidence les limites de validité du modèle proposé.

Les cas de validation du modèle mixte font l’objet du premier paragraphe. Par comparaison avec des simulations de référence et des simulations conventionnelles (basées sur l’hypothèse d’écoulements pseudo-permanents), ils mettent en évidence le gain de précision apporté par notre méthode.

Le second paragraphe propose des cas-tests se situant hors du domaine de validité des modèles mixtes, afin de mettre en évidence les limites de ce domaine.

4.1 Validation du modèle mixte

L’implémentation, dans le simulateur de réservoir ATHOS, d’un modèle mixte, consistant en un sous-maillage mono- ou bi-dimensionnel des blocs matriciels représentatifs, est validée dans ce paragraphe sur plusieurs exemples. Nous considérons ici un phénomène d’imbibition capillaire pure.

Dans chacun des exemples présentés, les résultats obtenus avec le modèle mixte (sous-maillage à une dimension des blocs matriciels représentatifs) seront comparés à des résultats de référence, obtenus sur un modèle simple-milieu finement maillé, et à des résultats obtenus sur un modèle dit *conventionnel*.

Ce modèle conventionnel est un modèle double-milieu, basé sur l’hypothèse d’un régime pseudo-stationnaire, et dont le terme d’échange entre les régions matrice et fracture est formulé via l’utilisation du facteur de forme défini par Kazemi *et al.* [29], présenté par l’équation (3.24) (*cf.* paragraphe 3.3.3, p. 74). Seule la force capillaire est prise en compte, en annulant les coefficients pilotant les forces gravitaire et visqueuse.

4.1.1 Cas-test 1 : cas mono-maille, mono-bloc, avec conditions aux limites stationnaires

Le premier cas-test est extrêmement simple : il s'agit d'une unique maille double-milieu, c'est-à-dire une maille fracture et une maille matrice superposées. L'échange matrice-fracture est mono-dimensionnel selon la direction x , c'est-à-dire que seules les deux faces orthogonales à l'axe x peuvent échanger des fluides avec la fracture limitrophe.

La maille matrice ne contient qu'un bloc matriciel, de mêmes dimensions que la maille matrice. Ce bloc matriciel est initialement saturé en huile. La maille fracture est emplie d'eau, et est considérée comme un réservoir infini d'eau (porosité quasi-infinie).

Les conditions aux limites appliquées au bloc matriciel sont donc stationnaires, puisque le bloc est, à chaque instant, entouré uniquement d'eau ($S_w = 1$). Le gradient de pression dans la fracture est donc nul et ce cas se situe dans les limites de validité du modèle mixte.

Le modèle mixte compte 15 sous-mailles, selon la direction x . Le rapport de progression moyen des sous-mailles est 1,25.

Le modèle de référence simple-milieu finement maillé est constitué de 41 mailles dans la direction x , seule direction maillée. La première représente la zone fracture, les 40 autres la zone matrice.

Les trois modèles sont représentés schématiquement sur la Fig. 4.1.

Données

Le bloc est de dimensions $6,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$. Le sous-maillage étant mono-dimensionnel, on se limite dans le modèle de référence et dans le modèle mixte à l'étude d'un demi-bloc de dimensions $3,05 \text{ m} \times 0,1 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$.

Les données pétrophysiques sont détaillées dans le Tab 4.1. Les courbes de perméabilités relatives sont formulées analytiquement selon le modèle de Corey :

$$kr_p = S_p^r \quad (4.1)$$

où S_p est la saturation normée (entre 0 et 1) de la phase p et r est le coefficient de Corey. La courbe de pression capillaire dans la région matrice est linéaire entre les points extrêmes.

Les données thermodynamiques, relatives à la composition du fluide, sont données dans le Tab. 4.2. La pression de référence est définie au centre du bloc.

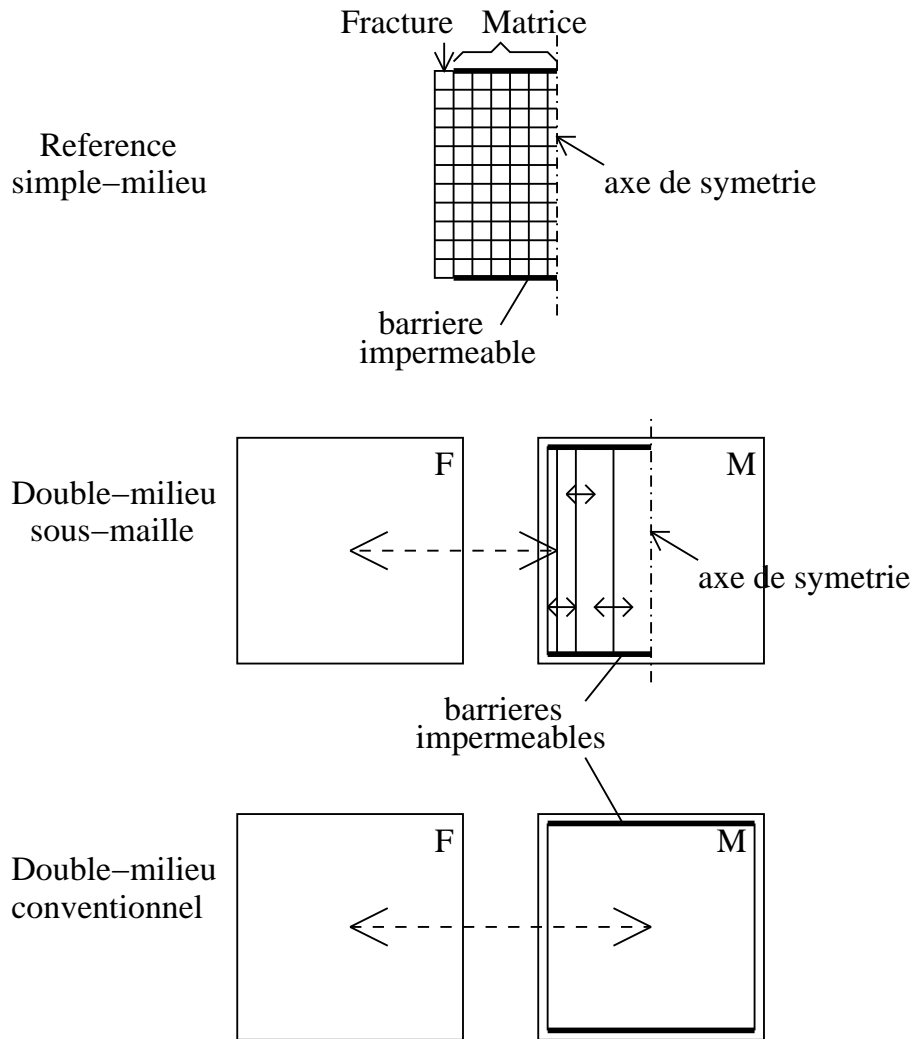


FIG. 4.1 – Cas-test 1 : modèle simple-milieu finement maillé de référence (en haut), modèle mixte (au centre) et modèle double-milieu conventionnel (en bas)

Résultats

La Fig. 4.2 compare la quantité d'eau en place (en m^3) pour les trois modèles. Le modèle simple-milieu finement maillé de référence est tracé en bleu, le modèle mixte en rouge et le modèle conventionnel en vert.

Les résultats du modèle mixte sont très proches de ceux du modèle de référence, et améliorent considérablement ceux du modèle double-milieu conventionnel.

4.1.2 Cas-test 2 : cas mono-maille, mono-bloc, avec conditions aux limites quasi-stationnaires

Ce second cas-test diffère du précédent par la volonté de faire varier au cours du temps les conditions aux limites appliquées au bloc. Pour ce faire, on introduit dans notre cas des

	Région matrice	Région fracture
Compressibilité de la roche (bar^{-1})	5.10^{-5}	5.10^{-5}
Volume poreux (m^3)	0,008845	150
Perméabilité K_x (mD)	1	10000
Perméabilité K_y (mD)	0	10000
Perméabilité K_z (mD)	0	10000
Saturation résiduelle S_{orw}	0,25	0
Saturation irréductible S_{wi}	0,2	0
Pression capillaire min. $P_{c_{w,min}}$ (bar)	0	0
Pression capillaire max. $P_{c_{w,max}}$ (bar)	2,3	0
Perméabilité relative en eau max. $k_{rw_{max}}$	0,23	0,23
Perméabilité relative en huile max. $k_{rw_{max}}$	1	1
Coefficient de Corey r	1	1

TAB. 4.1 – Cas-test 1 : Données pétrophysiques

	Phase eau	Phase huile
Masse volumique (g.cm^{-3})	1,0412	0,8192
Compressibilité (bar^{-1})	$5,076.10^{-5}$	6.10^{-4}
Viscosité (cPo)	0,35	0,21

TAB. 4.2 – Cas-test 1 : Données thermodynamiques

puits, qui permettent de faire varier la saturation en eau dans la maille fracture au cours du temps. L'écoulement est mono-dimensionnel selon la direction y .

La maille double-milieu étudiée, identique à celle présentée dans le précédent cas-test, est donc précédée et suivie de deux mailles double-milieu supplémentaires. Ces deux mailles fracture contiennent chacune un puits, l'un injecteur, l'autre producteur. Pour simplifier le problème, les mailles matrice associées sont des mailles mortes (de porosité nulle), donc ne contenant pas de fluide.

Initialement, les trois mailles double-milieu sont emplies d'huile à la saturation maximale et, au début de la simulation, de l'eau est injectée par le puits injecteur. Le puits producteur, produisant au même débit est ouvert aussi dès le début de la simulation.

Le modèle mixte compte, dans le bloc matriciel central, 15 sous-maillles, selon la direction y . Le rapport de progression moyen des sous-maillles est 1,25.

Le modèle simple-milieu finement maillé de référence correspondant est constitué de 22 mailles dans la direction x , et 21 dans la direction y .

De plus, nous avons construit un second modèle simple-milieu finement maillé, dans lequel

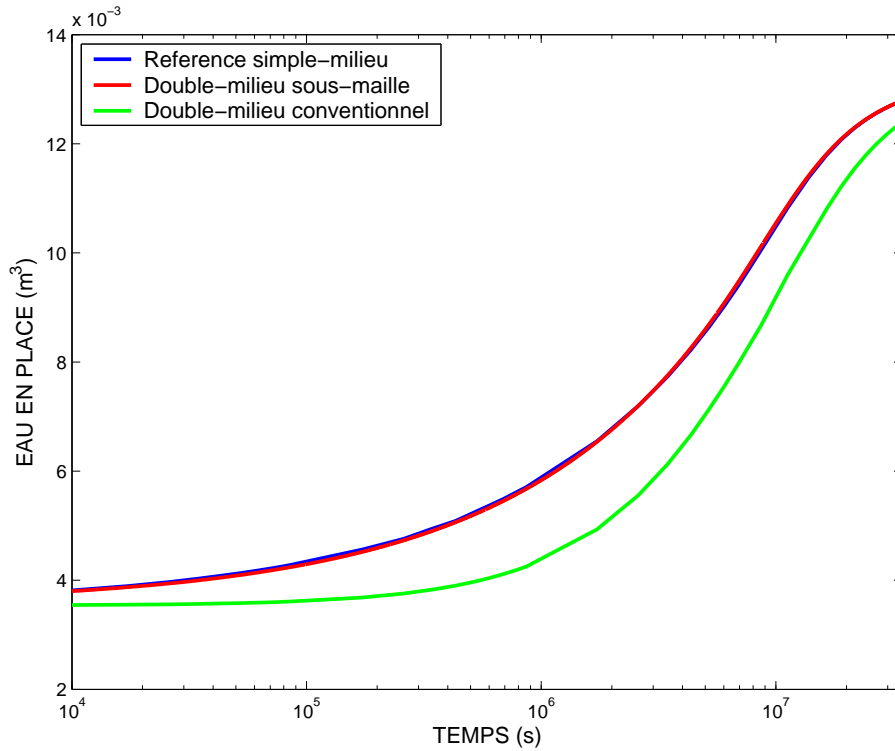


FIG. 4.2 – Cas-test 1 : Eau en place en fonction du temps

le bloc représentatif associé à la maille centrale n'est maillé que dans la direction y , qui est la direction de sous-maillage. Ce modèle est constitué de 3 mailles dans la direction x (dont les deux extrêmes contiennent les puits) et 21 dans la direction y , comme le cas simple-milieu finement maillé de référence.

Les quatre modèles sont représentés schématiquement sur la Fig. 4.3.

Données

Le bloc a pour dimensions $0,25 \text{ m} \times 0,5 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$. Le sous-maillage étant mono-dimensionnel, on se limite dans le modèle de référence et dans le modèle mixte à l'étude d'un demi-bloc de dimensions $0,25 \text{ m} \times 0,25 \text{ m} \times 0,1 \text{ m}$.

Les données pétrophysiques pour la maille double-milieu centrale sont identiques à celles du cas-test 1 (Tab. 4.1), à l'exception de la porosité et des perméabilités, détaillées dans le Tab 4.3.

Dans les mailles fracture contenant les puits, la porosité est égale à 1. Les données pétrophysiques des mailles matrice associées à ces mailles fracture ne sont pas définies ici car elles sont inutilisées, puisque ces mailles n'interviennent pas dans la simulation.

Le débit des puits est de $2,08 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Les deux puits sont ouverts au début de la simulation. Le débit est volontairement choisi élevé pour maintenir des conditions aux limites constantes sur le bloc, à la phase initiale de balayage d'huile en place près, éviter

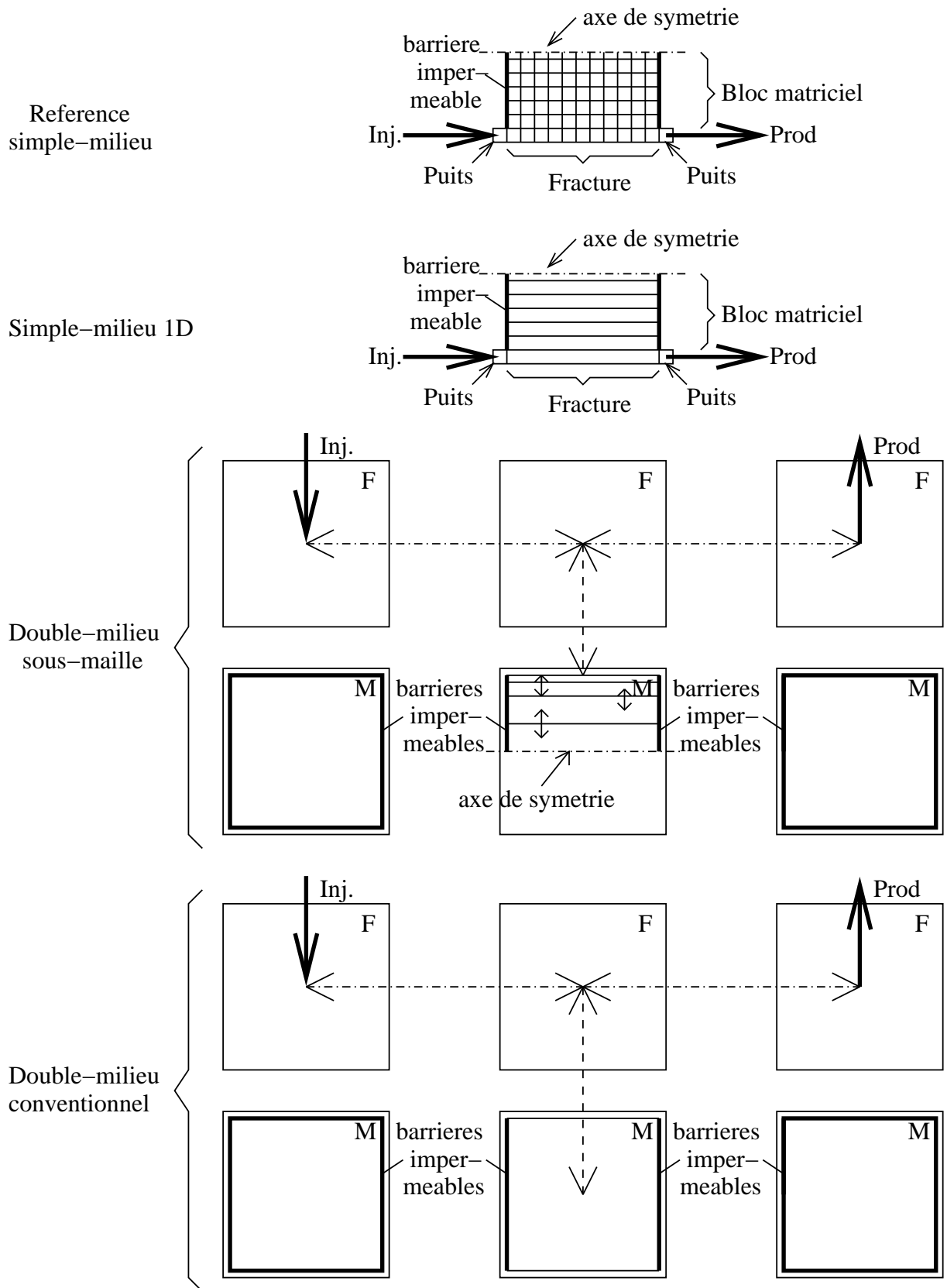


FIG. 4.3 – Cas-test 2 et 3 : (de haut en bas) modèle simple-milieu finement maillé de référence, modèle simple-milieu finement maillé 1D, modèle mixte et modèle double-milieu conventionnel

	Région matrice	Région fracture
Porosité	0,29	0,005
Perméabilité K_x (mD)	0	10000
Perméabilité K_y (mD)	1	10000
Perméabilité K_z (mD)	0	10000

TAB. 4.3 – Cas-test 2 : porosité et perméabilités

les variations de saturation durables dans la maille fracture centrale et ainsi rester dans le domaine de validité du modèle mixte.

Les données thermodynamiques, relatives à la composition du fluide, sont identiques à celles du cas-test 1 (Tab.4.2).

Résultats

La Fig. 4.4 compare la quantité d'eau en place (en m^3) pour les trois modèles. Le modèle simple-milieu finement maillé de référence est tracé en bleu, le modèle simple-milieu mono-dimensionnel en noir, le modèle mixte en rouge et le modèle conventionnel en vert.

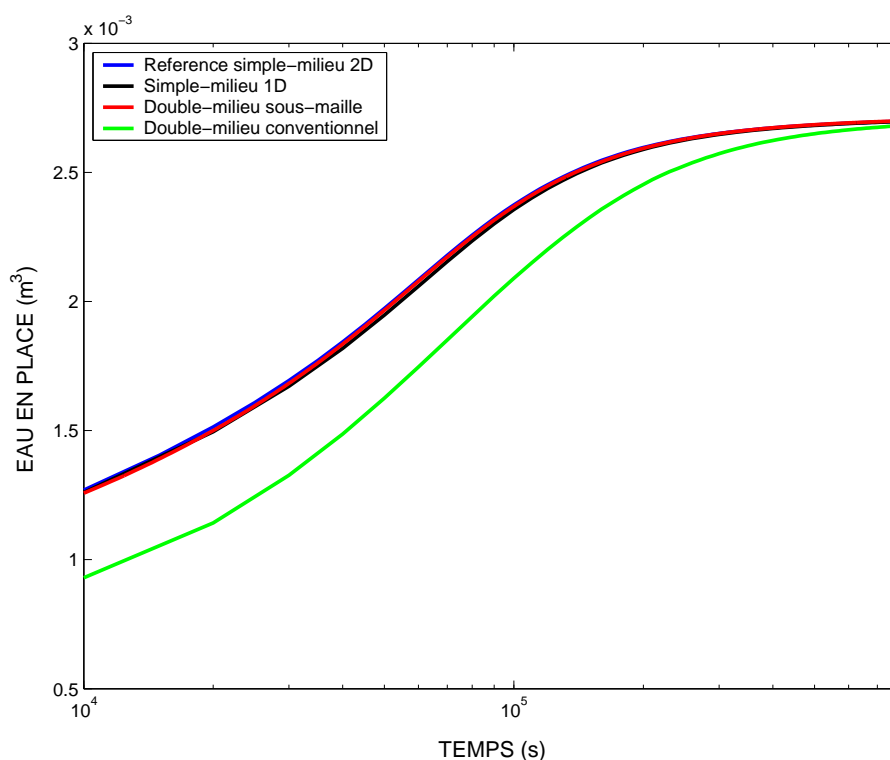


FIG. 4.4 – Cas-test 2 : Eau en place en fonction du temps

Le modèle mixte reproduit quasiment exactement le comportement du modèle de référence. Par contre, le modèle double-milieu conventionnel fournit une cinétique beaucoup trop lente des échanges.

4.2 Limites du modèle mixte

Les limites de validité du modèle mixte ont été présentées dans le paragraphe 1.3.1, p. 21, en particulier par la relation (1.24). Nous avons donc cherché à mettre en évidence ces limites en créant des cas pour lesquels le présent modèle mixte n'est pas adapté.

4.2.1 Cas-test 3 : cas mono-maille, mono-bloc, avec conditions aux limites non-stationnaires

Ce cas est le même que le précédent (*cf* Fig. 4.3), à l'exception de la valeur du débit aux puits. Le débit est diminué d'un facteur 100. En diminuant le débit, on crée, le long du bloc, une variation de la saturation locale.

Dans cette situation, représentée sur la Fig. 4.5, on constate que l'envahissement du bloc par l'eau se fait de façon radiale. En effet, le débit est tellement faible que toute l'eau injectée rentre immédiatement dans le bloc, sans remplir la fracture.

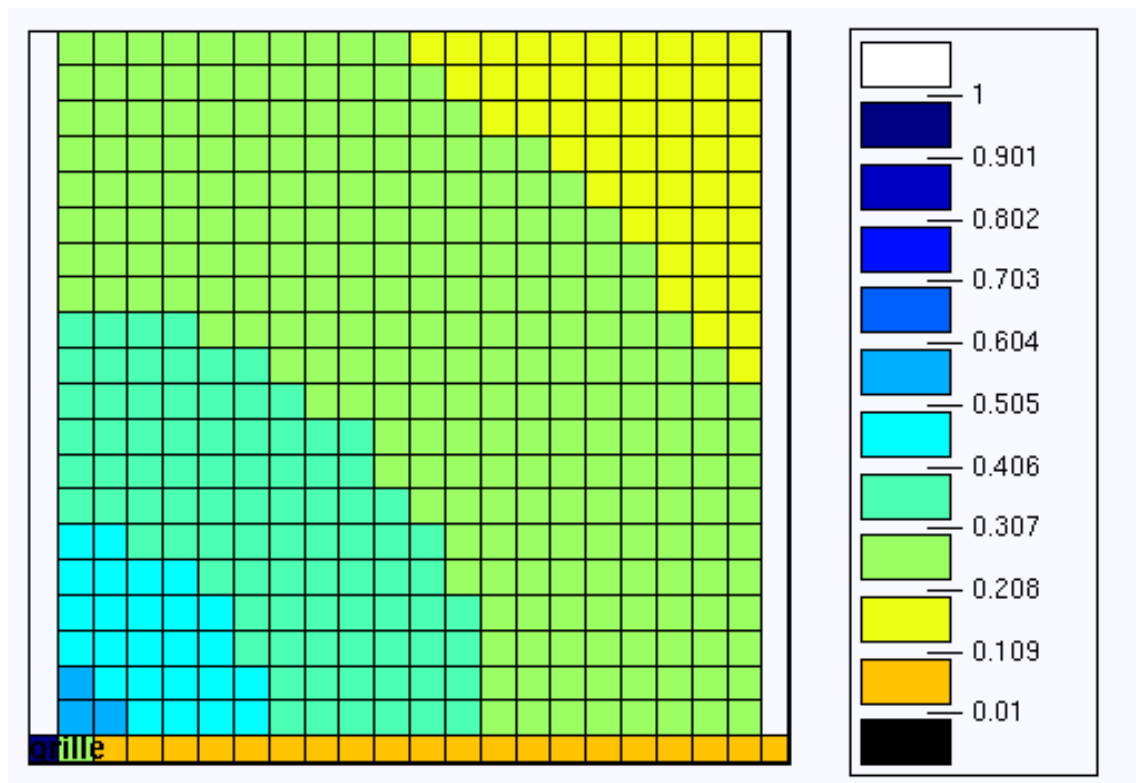


FIG. 4.5 – Cas-test 3 : Saturation en eau dans le modèle de référence, $t > 0$

Un modèle sous-maillé mono-dimensionnel ne permet pas de reproduire ce comportement.

La Fig. 4.6 présente la quantité simulée d'eau en place en fonction du temps pour les quatre modèles. Comme prévu, le modèle mixte surestime l'avancée du front d'eau dans le bloc. Toutefois, il apporte une amélioration par rapport au modèle double-milieu conventionnel qui, une fois encore, prévoit une cinétique trop lente des échanges.

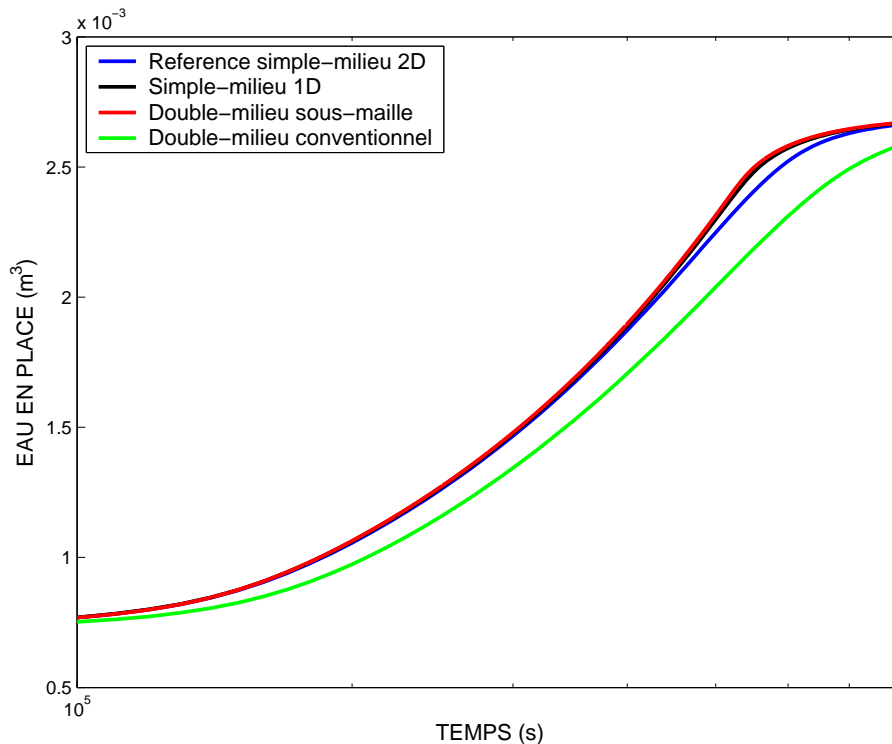


FIG. 4.6 – Cas-test 3 : Eau en place en fonction du temps

4.2.2 Cas-tests 4 et 5 : cas mono-maille, multi-blocs, avec conditions aux limites quasi-stationnaires

Ces quatrième et cinquième cas-tests ont pour objectif d'évaluer l'hypothèse de représentativité d'un bloc unique par maille. On considère toujours trois mailles double-milieu, dont les deux extrêmes contiennent, dans les mailles fracture, les puits. La maille matrice centrale contient maintenant plusieurs blocs matriciels, de même taille, alignés selon la direction x . Pour conserver la même cinétique que dans le second cas-test, la dimension de cette maille matrice est multipliée par le nombre de blocs dans la direction x . Ainsi, les blocs matriciels ont toujours la même dimension qu'avant.

Cas-test 4 : 4 blocs par maille

Dans ce quatrième cas-test, la maille matrice centrale contient 4 blocs. La dimension de la maille double-milieu centrale est donc multipliée par 4.

Le modèle mixte compte, dans le bloc matriciel représentatif, 15 sous-maillages, selon la direction y . Le rapport de progression moyen des sous-maillages est 1,25.

Le modèle simple-milieu finement maillé de référence correspondant est constitué de 82 mailles dans la direction x (20 mailles par bloc, plus 2 mailles puits), et 21 dans la direction y .

Excepté ces modifications, ce cas-test est identique au cas-test 2. En particulier le débit est identique à celui choisi dans le cas-test 2, c'est-à-dire un débit de $2,08 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, la cinétique des échanges sur un bloc est identique à celle du cas-test 2. Par contre, cette cinétique n'aura pas lieu au même moment pour chaque bloc.

La Fig. 4.7 compare la quantité d'eau en place (en m^3) pour les trois modèles. Le modèle simple-milieu finement maillé de référence est tracé en bleu, le modèle mixte en rouge et le modèle conventionnel en vert.

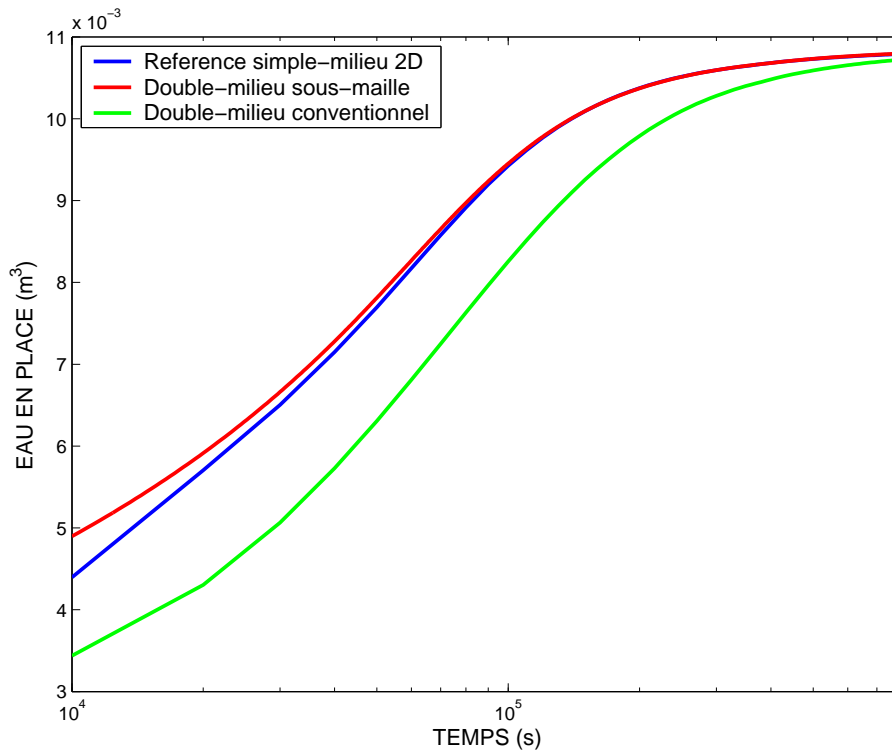


FIG. 4.7 – Cas-test 4 : Eau en place en fonction du temps

Le modèle mixte peine à reproduire le comportement du modèle de référence lors des temps courts, c'est-à-dire durant la période transitoire. Il surestime durant cette période la quantité d'eau pénétrant dans le bloc. Lorsque le régime pseudo-permanent est mis en place, les résultats du modèle simple-milieu finement maillé de référence et du modèle mixte sont très proches. Toutefois, même durant la période transitoire, les résultats prédits par le modèle mixte sont bien meilleurs que ceux du modèle double-milieu conventionnel.

Cas-test 5 : 12 blocs par maille

Dans ce cinquième cas-test, la maille matricielle centrale contient 12 blocs. La dimension de la maille double-milieu centrale est donc multipliée par 12. Hormis cette modification, le cas est identique au précédent.

Le modèle mixte compte, dans le bloc matriciel représentatif, 15 sous-maillages, selon la direction y . Le rapport de progression moyen des sous-maillages est 1,25.

Le modèle simple-milieu finement maillé de référence correspondant est constitué de 242 mailles dans la direction x (20 mailles par bloc, plus 2 mailles puits), et 21 dans la direction y .

Excepté ces modifications, ce cas-test est identique au cas-test 2. En particulier le débit est identique à celui choisi dans les cas-test 2 et 4, c'est-à-dire un débit de $2,08 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Ainsi, la cinétique des échanges sur un bloc est identique à celle des cas-tests 2 et 5. Par contre, cette cinétique n'aura pas lieu au même moment pour chaque bloc.

La Fig. 4.8 compare la quantité d'eau en place (en m^3) pour les trois modèles. Le modèle simple-milieu finement maillé de référence est tracé en bleu, le modèle mixte en rouge et le modèle conventionnel en vert.

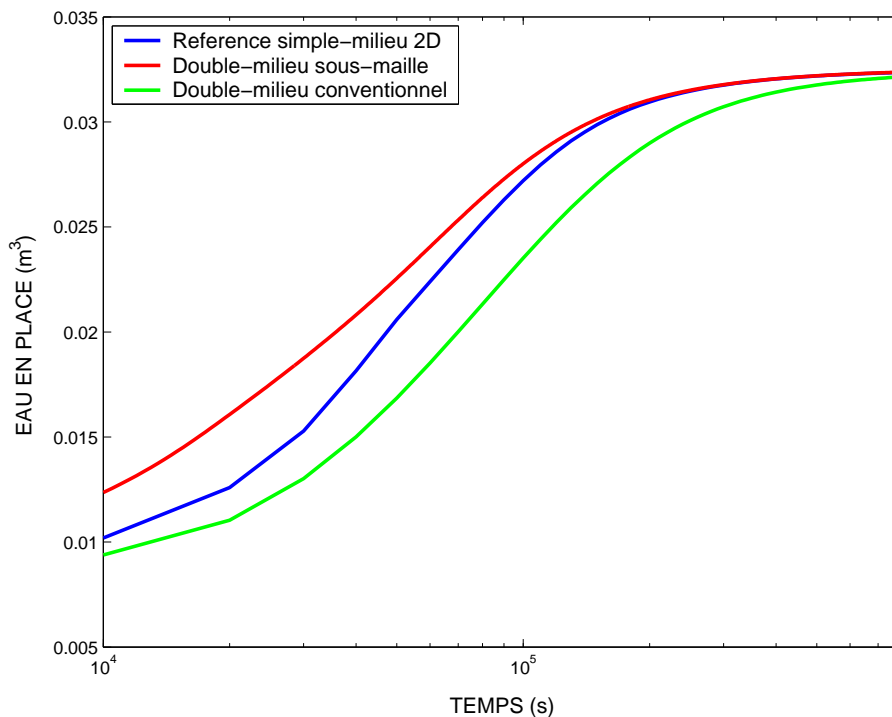


FIG. 4.8 – Cas-test 5 : Eau en place en fonction du temps

Dans ce cas, le modèle mixte ne reproduit pas le comportement du bloc matriciel. La cinétique prévue par le modèle mixte est trop rapide : en effet, le bloc représentatif étant situé au centre de la maille, il est atteint par le front d'eau bien avant les blocs situés à la fin de la maille dans le cas simple-milieu. La quantité d'eau en place est alors surestimée. Toutefois, le modèle mixte, aux temps longs, finit par coïncider avec le modèle de référence,

offrant ainsi une amélioration par rapport au double-milieu.

Validité de l'hypothèse du bloc matriciel unique représentatif

Peu de simulations visant à mettre en évidence l'influence de l'hypothèse du bloc représentatif ont été effectuées. Toutefois, comme nous pouvions le supposer, lorsque le nombre de blocs matriciels dans une maille augmente, la précision de la simulation des échanges diminue. Ainsi, les résultats du modèle mixte sur le cas 5 (12 blocs dans la maille matrice centrale) reproduisent moins bien le comportement de référence que sur le cas 4 (4 blocs par maille). Une étude de sensibilité plus approfondie sur le nombre de blocs par maille permettrait de vérifier ce phénomène, et même de trouver un critère de validité de l'hypothèse du bloc représentatif.

Conclusions

Durant ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à la modélisation des transferts entre milieux constitutifs dans les simulateurs de réservoirs fracturés. L'objectif de ce travail était de pallier, dans le cas d'écoulements multiphasiques, les insuffisances de la formulation pseudo-permanente, la plus courante, et de proposer une méthodologie innovante, basée sur l'utilisation d'un modèle mixte, afin d'améliorer la modélisation de ces termes d'échange, et donc de simuler de façon plus précise et fiable les profils de production des réservoirs naturellement fracturés.

Dans un premier chapitre, nous avons étudié les difficultés liées à la simulation de réservoirs fracturés, et les différentes méthodes présentées dans la littérature pour les pallier.

Dans un premier temps, nous avons présenté les différentes échelles impliquées dans la description des écoulements dans les réservoirs naturellement fracturés. La difficulté est alors de proposer des lois régissant les écoulements à une échelle macroscopique, utilisée pour la simulation des écoulements sur l'ensemble d'un réservoir.

Puis, sur l'exemple de l'écoulement d'un fluide monophasique faiblement compressible, nous avons introduit les modèles double-milieu, modèles conventionnels homogénéisés, couramment utilisés, et les modèles mixtes, partiellement homogénéisés, couplant une description à grande échelle des écoulements dans le réseau de fractures et à petite échelle dans les blocs de roche matrice, contenant les hydrocarbures. Une confrontation des deux catégories de modèles a permis de comprendre les approximations grossières effectuées dans les modèles double-milieu, et donc mettre en évidence l'intérêt des modèles mixtes pour une simulation précise des échanges matrice-fracture.

Enfin, un état de l'art consacré à la question des échanges multiphasiques dans les réservoirs fracturés insiste sur la complexité du problème posé, et sur la multitude de méthodes existantes. La méthode de sous-maillage des blocs matriciels, qui, sous certaines contraintes opérationnelles (comme la programmation au sein d'un simulateur conventionnel), se rapproche de l'utilisation des modèles mixtes, a retenu notre attention et sera privilégiée dans la suite de notre travail.

Le second chapitre porte sur la modélisation des écoulements multiphasiques dans les réservoirs naturellement fracturés dans le cas de l'utilisation d'un modèle mixte pour décrire les écoulements au sein des blocs matriciels.

Tout d'abord, nous avons rapidement rappelé comment obtenir les lois d'écoulement, à

l'échelle locale, dans un milieu poreux hétérogène, en associant l'application des lois de Darcy généralisées et de conservation de la masse. Puis ces lois sont étendues au cas d'un milieu composé de deux domaines distincts : une partie fracture et une partie matrice, de propriétés différentes. On s'intéresse alors particulièrement aux conditions aux limites écrites à l'interface entre les deux domaines, et traduisant les échanges de fluides à cette frontière.

Après homogénéisation partielle du système obtenu pour créer notre modèle mixte, nous avons détaillé les choix numériques faits afin de permettre la programmation et la résolution numérique du modèle mixte. La discrétisation du réservoir s'appuie sur la représentation en double-milieu conventionnellement adoptée par les simulateurs de réservoir, tels que le logiciel ATHOS. La discrétisation temporelle, quant à elle, fait apparaître un découplage des systèmes afin de minimiser le coût numérique de la résolution, et permettre une éventuelle parallélisation future.

Finalement, les systèmes sont détaillés, et leur forte non-linéarité nous amène à utiliser la méthode de Newton pour leur résolution.

La création d'un sous-maillage optimisé selon les phénomènes d'écoulements mis en jeu fait l'objet du troisième chapitre.

Nous avons dans un premier temps présenté la méthodologie proposée pour créer un sous-maillage multi-dimensionnel qui permette de reproduire les états transitoires des processus physiques étudiés (imbibition capillaire et gravité).

Le nombre de dimensions de ce sous-maillage a ensuite été réduit en tenant compte des symétries d'écoulement présentes dans le cas d'un processus de capillarité pure. Nous avons ainsi mis au point un sous-maillage optimal et simple à mettre en œuvre dans un simulateur conventionnel, applicable au cas de blocs matriciels de géométrie parallélépipédique rectangle quelconque et d'une matrice anisotrope en perméabilité.

L'étude de sensibilité aux paramètres pétrophysiques valide plus avant les paramètres du sous-maillage défini plus haut, et permet finalement d'aboutir à une procédure de génération automatique d'un sous-maillage optimal utilisable pour les simulation de réservoir pour ce type d'échanges matrice-fracture.

Enfin, le dernier chapitre présente les premiers résultats obtenus à partir du simulateur ATHOS modifié pour permettre la prise en compte de notre modèle mixte.

La première partie porte sur la validation du modèle mixte. Les cas présentés se placent tous dans les limites de validité du modèle mixte. Une comparaison des résultats ainsi obtenus avec les résultats conventionnels a mis en évidence le gain de précision apporté par le modèle mixte.

Dans un second temps, les cas-tests se situent hors du domaine de validité du modèle mixte. Ils nous ont permis de mettre en évidence les limites de notre modèle, en particulier de l'hypothèse forte du bloc matriciel représentatif par maille, sans pour autant remettre en question l'amélioration apportée par le modèle mixte sur le modèle double-milieu conventionnel.

En conclusion, ces travaux de thèse démontrent l'intérêt de l'utilisation des modèles mixtes pour la simulation d'écoulements multiphasiques au sein de réservoirs naturellement fracturés. Nous avons proposé une méthodologie complète afin de permettre l'introduction d'un modèle mixte dans un simulateur conventionnel, et ce avec un minimum de modifications. Il n'est donc pas nécessaire de reconcevoir l'architecture des simulateurs de réservoir existants, mais seulement d'en modifier ou compléter certains éléments, ce qui présente un intérêt pratique certain. De plus, nos premiers tests mettent en évidence un gain de précision important comparé à un modèle conventionnel, et donc la plus grande fiabilité d'un modèle mixte pour les prévisions de production des réservoirs fracturés.

Plusieurs améliorations de notre modèle peuvent être envisagées lors d'une poursuite de ce travail. La première consiste bien évidemment à programmer dans le simulateur le sous-maillage proposé pour les cas gravitaires et gravito-capillaires, et de quantifier plus avant l'amélioration apportée par le modèle mixte dans la simulation de ces processus, ainsi que la contrepartie en termes de surcoût numérique. Une extension de ce travail pourrait aussi être l'application de notre modèle mixte à des processus de production plus complexes, comme l'injection de gaz ou des procédés de récupération tertiaire.

Bibliographie

- [1] T. ARBOGAST, *Analysis of the simulation of single phase flow through a naturally fractured reservoir*, in SIAM Journal Math Anal., vol. 26, 1989, pp. 12–29.
- [2] ———, *A simplified dual-porosity model for two-phase flow*, tech. report, Rice University, Houston, Texas, Feb. 1992.
- [3] ———, *Gravitational forces in dual-porosity systems*, Transport in Porous Media, (1993), pp. 179–203.
- [4] T. ARBOGAST, J. DOUGLAS, AND U. HORNUNG, *Modeling of naturally fractured reservoirs by formal homogenization techniques*, tech. report, Purdue University and SCHL, Nov. 1988.
- [5] ———, *Derivation of the double-porosity model of single phase flow via homogenization theory*, in SIAM Journal Math Anal., vol. 21, 1990, pp. 823–836.
- [6] K. AZIZ AND A. SETTARI, *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science Publishers, 1979.
- [7] G. BARENBLATT, I. ZHELTOV, AND I. KOCHINA, *Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks (strata)*, P.M.M., 24 (1960), pp. 852–864.
- [8] J. BESSONS, *Performance of slanted and horizontal wells on an anisotropic medium*, in Europec90, The Hague, Netherlands, Oct. 1990.
- [9] B. BOURBIAUX, R. BASQUET, M.-C. CACAS, J.-M. DANIEL, AND S. SARDA, *An integrated workflow to account for multi-scale fractures in reservoir simulation models : Implementation and benefits*, in 10th Abu Dhabi International Petroleum Exhibition and Conference, 2002.
- [10] B. BOURBIAUX, S. GRANET, P. LANDEREAU, B. NËTINGER, S. SARDA, AND J.-C. SABATHIER, *Scaling up matrix-fracture transfers in dual-porosity models : Theory and application*, in SPE Fall Meeting, Houston, Texas, 1999.
- [11] G. BOURDAROT, *Essais de puits : méthodes d'interprétation*, Ed. Technip, 1996.
- [12] Z.-X. CHEN, *Transient flow of slightly compressible fluids through double-porosity, double-permeability systems - a state-of-the-art review*, Transport in Porous Media, (1989), pp. 147–184.
- [13] K. H. COATS, *Implicit compositionnal simulation of single-porosity and dual-porosity reservoirs*, in SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, Feb. 1989.

- [14] R. COSSÉ, *Le gisement*, Editions Technip, 1988.
- [15] R. DAUTRAY AND J. LIONS, *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Volume 4 : Integral equations and numerical methods*, Springer-Verlag, 2000.
- [16] A. DE SWAAN, *Analytic solutions for determining naturally fractured reservoir properties by well-testing*, SPE Journal, (1976), pp. 117–122.
- [17] ———, *Influence of shape and skin of matrix-blocks on pressure transients in fractured reservoirs*, in 61st SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New-Orleans, Louisiana, Oct. 1986.
- [18] R. H. DEAN AND L. L. LO, *Simulation of naturally fractured reservoirs*, in SPE Reservoir Engineering, May 1988.
- [19] J. DOUGLAS JR., P. J. PAES LEME, T. ARBOGAST, AND T. SCHMITT, *Simulation of flow in naturally fractured reservoirs*, in 9th SPE Reservoir Simulation Symposium, San Antonio, Texas, Feb. 1987.
- [20] C. FAMy, B. BOURBIAUX, P. LEMONNIER, AND M. QUINTARD, *Accurate modelling of matrix-fracture transfers in fractured porous media through sub-gridded dual-porosity models*, in CMWR-XVI, Copenhagen, 2006.
- [21] ———, *Sub-gridded dual-porosity models : accurately modelling matrix-fracture transfers in fractured porous media*, in IAHR-GW2006, Groundwater in Complex Environments, Toulouse, 2006.
- [22] C. FAMy, B. BOURBIAUX, AND M. QUINTARD, *Accurate modeling of matrix-fracture transfers in dual-porosity models : optimal subgridding of matrix blocks*, in SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 2005.
- [23] J. R. GILMAN, *An efficient finite-difference method for simulating phase segregation in the matrix blocks in double-porosity reservoirs*, SPE Reservoir Engineering, (1986).
- [24] J. R. GILMAN AND H. KAZEMI, *Improvements in simulation of naturally fractured reservoirs*, SPE Journal, (1983).
- [25] N. HENN, *Modélisation des réservoirs fracturés - Cas des milieux multi-échelles*, PhD thesis, E.N.S.A.M., 2000.
- [26] R. HERBIN, *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles - cours de master de mathématiques, université d'aix-marseille 1*.
- [27] G. C. HOWARD AND C. R. FAST, *Hydraulic fracturing*, SPE monograph 2, 1970.
- [28] H. KAZEMI, *Pressure transient analysis of naturally fractured reservoirs with uniform fracture distribution*, SPE Journal, (1969), pp. 451–462.
- [29] H. KAZEMI, L. S. MERRIL, K. L. PORTERFIELD, AND P. R. ZEMAN, *Numerical simulation of water-oil flow in naturally fractured reservoirs*, SPE Journal, (1976), pp. 317–326.
- [30] P. LANDERAU, *Modèles macroscopiques pour les écoulements monophasiques en milieu poreux fracturé : application aux tests de puits*, PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers et Institut Français du Pétrole, Dec. 2000.

- [31] P. LANDEREAU, B. NOETINGER, AND M. QUINTARD, *About the shape factor of complex fractured media : comparison of several approaches*, in 7th European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, Italy, 2000.
- [32] P. LEMONNIER, *Modélisation de l'écoulement appliquée à l'étude des réservoirs pétroliers*, tech. report, Rapport interne 38775, I.F.P., 1991.
- [33] K. T. LIM AND K. AZIZ, *Matrix-fracture transfer shape factors for dual-porosity simulators*, Journal of Petroleum Science and Engineering, (1995), pp. 169–178.
- [34] C. MARLE, *Cours de production - Tome IV : Les Ecoulements Polyphasiques en Milieu Poreux*, Ed. Technip, 1984.
- [35] M. J. MAVOR AND H. CINCO LEY, *Transient pressure behavior of naturally fractured reservoirs*, in SPE Regional Meeting, Ventura, California, Apr. 1979.
- [36] M. J. MCGUINNESS, *Pressure transmission in a bounded randomly fractured reservoir of single-phase fluid*, Transport in Porous Media, 1 (1986), pp. 371–397.
- [37] R. NAIMI-TAJDAR, C. HAN, K. SEPEHRNOORI, T. J. ARBOGAST, AND M. A. MILLER, *A fully implicit, compositional, parallel simulator for ior processes in fractured reservoirs*, in 2006 SPE/DOE Symp. on Improved Oil Recovery, Tulsa, Oklahoma, U.S.A., Apr. 2006.
- [38] H. L. NAJURIETA, *A theory for pressure transient analysis in naturally fractured reservoirs*, Journal of Petroleum Technology, (1980).
- [39] T. N. NARASIMHAN, *Multidimensional numerical simulation of fluid flow in fractured porous media*, Water Resources Research, 18 (1982), pp. 1235–1247.
- [40] R. A. NELSON, *Geological Analysis of Naturally Fractured Reservoirs*, Gulf Professional Publishing, 2001.
- [41] A. S. ODEH, *Unsteady-state behavior of naturally fractured reservoirs*, SPE Journal, (1964), pp. 60–66.
- [42] S. PATAULT, *Etude bibliographique sur la modélisation des réservoirs pétroliers*, tech. report, Institut Français du Pétrole, 1997.
- [43] F. PLOURABOUÉ, *Propriétés géométriques et propriétés de transport des fractures à parois rugueuses*, PhD thesis, Université de Paris VII, 1996.
- [44] K. PRUESS AND T. N. NARASIMHAN, *A practical method for modeling fluid and heat flow in fractured porous media*, SPE Journal, (1985).
- [45] P. QUANDALLE AND J.-C. SABATHIER, *Typical features of a multipurpose reservoir simulator*, SPE Reservoir Engineering, (1989).
- [46] M. QUINTARD AND S. WHITAKER, *Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media. i : Theoretical development of region-averaged equations for slightly compressible single-phase flow*, Advances in Water Resources, 19 (1996), pp. 29–47.
- [47] ———, *Transport in chemically and mechanically heterogeneous porous media. ii : Comparison with numerical experiments for slightly compressible single-phase flows*, Advances in Water Resources, 19 (1996), pp. 49–60.
- [48] L. H. REISS, *Reservoir Engineering en Milieu Fissuré*, Ed. Technip, 1980.

- [49] L. H. REISS, D. N. BOSSIE CODREANU, AND E. J. LEFEBVRE DU PREY, *Flow in fissured reservoirs*, in 2nd Annual European SPE of AIME Meeting, Apr. 1973.
- [50] R. H. ROSSEN AND E. I. SHEN, *Simulation of gas/oil drainage and water/oil imbibition in naturally fractured reservoirs*, in 62nd Annual SPE Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, 1987.
- [51] J.-C. SABATHIER, B. J. BOURBIAUX, M.-C. CACAS, AND S. SARDA, *A new approach of fractured reservoirs*, in SPE International Petroleum Conference and Exhibition, Mexico, Mar. 1998.
- [52] M. SAHIMI, *Flow and Transport in Porous Media and Fractured Rock*, VCH, 1995.
- [53] A. M. SAIDI, *Simulation of naturally fractured reservoirs*, in 7th SPE Reservoir Simulation Symposium, San-Francisco, California, Nov. 1983.
- [54] S. SARDA, L. JEANNIN, R. BASQUET, AND B. BOURBIAUX, *Hydraulic characterization of fractured reservoirs : Simulation on discrete fracture models*, in SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 2001.
- [55] F. SONIER, P. SOUILLARD, AND F. BLASKOVICH, *Numerical simulation of naturally fractured reservoirs*, in 61st SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, Louisiana, Oct. 1983.
- [56] L. K. THOMAS, T. N. DIXON, AND R. G. PIERSON, *Fractured reservoir simulation*, SPE Journal, (1983), pp. 42–54.
- [57] S. VOSSOUGH AND K. ASGHARI, *Simulation of fractured gas reservoir - an overview*, in 5th Latin American and Caribbean Petroleum Conference and Exhibition, Rio de Janeiro, Sept. 1997.
- [58] J. E. WARREN AND P. J. ROOT, *The behavior of naturally fractured reservoirs*, SPE Journal, (1963), pp. 245–255.
- [59] M. F. WHEELER, ed., *Numerical simulation in oil recovery*, vol. 11, The IMA volumes in mathematics and its applications, 1988.
- [60] S. WHITAKER, *Flow in porous media ii : The governing equations for immiscible, two-phase flow*, Transport in Porous Media, 1 (1986), pp. 105–125.
- [61] Y.-S. WU, L. PAN, AND K. PRUESS, *A physically based approach for modeling multiphase fracture-matrix interaction in fractured porous media*, Advances in Water Resources, 27 (2004), pp. 875–887.

Annexe A

Développements mathématiques

Cette annexe présente de façon exhaustive les systèmes évoqués dans le chapitre 2.

Après discrétisation de chacun des termes composant les systèmes d'équations, un système principal et des sous-systèmes (un par bloc représentatif, c'est-à-dire un par maille matrice) sont écrits et résolus.

Le système principal, composé des équations relatives aux mailles numériques fracture et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\left(VP_{I,f}^* \rho_{w,I,f}^* S_{I,f}^* \right)^{n+1} - \left(VP_{I,f}^* \rho_{w,I,f}^* S_{I,f}^* \right)^n \right) - q_{w,I,f}^{n+1} \\ & - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,n+1} \left(\left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,K,f}^{*,n+1} \right) \right) \\ & - N_b \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{I,m} G_{w,I,f}^{*,n+1} \left(\left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1} \right) \right) = 0 \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\left(VP_{1(I),m} \rho_{w,1(I),m} S_{1(I),m} \right)^{n+1} - \left(VP_{1(I),m} \rho_{w,1(I),m} S_{1(I),m} \right)^n \right) \\ & - T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} \left(\left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*} \right) - \left(P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^{n*} \right) \right) \\ & + \eta M_{w,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{I,m} \left(\left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,n+1} - P_{w,1(I),m}^{n+1} \right) \right) = 0 \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\left(VP_{I,f}^* \rho_{o,I,f}^* (1 - S_{I,f}^*) \right)^{n+1} - \left(VP_{I,f}^* \rho_{o,I,f}^* (1 - S_{I,f}^*) \right)^n \right) - q_{w,I,f}^{n+1} \\ & - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{o,I-K,f}^{*,n+1} \left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{K,f}^{*,n+1} \right) \\ & - N_b \eta M_{o,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{I,m} G_{o,I,f}^{*,n+1} \left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1} \right) = 0 \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left(\left(VP_{1(I),m} \rho_{o,1(I),m} (1 - S_{1(I),m}) \right)^{n+1} - \left(VP_{1(I),m} \rho_{o,1(I),m} (1 - S_{1(I),m}) \right)^n \right) \\ & - T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*} \right) \\ & + \eta M_{o,1(I)-I,m-f}^{n+1} K_{I,m} \left(P_{I,f}^{*,n+1} - P_{1(I),m}^{n+1} \right) = 0 \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

Les sous-systèmes, composés des équations relatives aux sous-mailles, à l'exception de la sous-maille limite, s'écrivent, pour tout bloc représentatif, c'est-à-dire pour tout I :

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\left(VP_{j(I),m} \rho_{w,j(I),m} S_{j(I),m} \right)^{n+1*} - \left(VP_{j(I),m} \rho_{w,j(I),m} S_{j(I),m} \right)^{n*} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^{n+1*} \left(\left(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*} \right) - \left(P_{w,j(I),m}^{n+1*} - P_{w,k(I),m}^{n+1*} \right) \right) \\
& \quad + \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,n+1*} \left(\left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n+1*} \right) - \left(P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^{n+1*} \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(V P_{j(I),m} \rho_{o,j(I),m} (1 - S_{j(I),m}) \right)^{n+1*} - \left(V P_{j(I),m} \rho_{o,j(I),m} (1 - S_{j(I),m}) \right)^{n*} \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k(I) \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{o,j(I)-k(I),m}^{n+1*} \left(P_{j(I),m}^{n+1*} - P_{k(I),m}^{n+1*} \right) \\
& \quad + \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,n*} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^{n*} \right) = 0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Ces systèmes, fortement non-linéaires, sont résolus grâce à la linéarisation de Newton, présentée dans le paragraphe 2.7.

Après linéarisation du système (A.1)-(A.4) selon la relation (2.136), le système principal devant être résolu à chaque itération de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial V P_{I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \rho_{w,I,f}^* + V P_{I,f}^* \frac{\partial \rho_{w,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \right)^l S_{I,f}^{*,l} \delta P_{I,f}^{*,l} + \left(V P_{I,f}^* \rho_{w,I,f}^* \right)^l \delta S_{I,f}^{*,l} \right) \\
& - \frac{\partial q_{w,I,f}}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} - \frac{\partial q_{w,I,f}}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} \beta_{I-K,f}^l \frac{\partial M_{w,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,K,f}^{*,l} \right) \right) \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} (1 - \beta_{I-K,f}^l) \frac{\partial M_{w,K,f}^*}{\partial P_{K,f}^*} \delta P_{K,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,K,f}^{*,l} \right) \right) \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} \beta_{I-K,f}^l \frac{\partial M_{w,I,f}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,K,f}^{*,l} \right) \right) \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} (1 - \beta_{I-K,f}^l) \frac{\partial M_{w,K,f}^*}{\partial S_{K,f}^*} \delta S_{K,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,K,f}^{*,l} \right) \right) \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,l} \left(\left(\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(\frac{\partial P_{w,I,f}^{*,l}}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} - \frac{\partial P_{w,K,f}^{*,l}}{\partial S_{K,f}^*} \delta S_{K,f}^{*,l} \right) \right) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{w,I,f}^{*,l} \beta_{1(I)-I,m-f}^l \frac{\partial M_{w,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,1(I),m}^l \right) \right) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{w,I,f}^{*,l} (1 - \beta_{1(I)-I,m-f}^l) \frac{\partial M_{w,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,1(I),m}^l \right) \right) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{w,I,f}^{*,l} \frac{\partial M_{w,1(I)-I,m-f}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{w,I,f}^{*,l} - P_{w,1(I),m}^l \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{w,I,f}^{*,l} M_{w,1(I)-I,m-f}^l \left(\left(\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{1(I),m}^l \right) - \left(\frac{\partial P_{c_{w,I,f}}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} - \frac{\partial P_{c_{w,1(I),m}}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \right) \right) \\
& -N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} \frac{\partial G_{w,I,f}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} M_{w,1(I)-I,m-f}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \left(\left(V P_{I,f}^* \rho_{w,I,f}^* S_{I,f}^* \right)^l - \left(V P_{I,f}^* \rho_{w,I,f}^* S_{I,f}^* \right)^n \right) + q_{w,I,f}^{*,l} \\
& + \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,K,f}}^{*,l} \right) \right) \\
& + N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{w,I,f}^{*,l} M_{w,1(I)-I,m-f}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial V P_{1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \rho_{w,1(I),m} + V P_{1(I),m} \frac{\partial \rho_{w,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \right)^l S_{1(I),m}^l \delta P_{1(I),m}^l + \left(V P_{1(I),m} \rho_{w,1(I),m} \right)^l \delta S_{1(I),m}^l \right) \\
& - T_{1(I)-2(I),m} \beta_{1(I)-2(I),m}^{l,n*} \frac{\partial M_{w,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l \left(\left(P_{1(I),m}^l - P_{2(I),m}^{n*} \right) - \left(P_{c_{w,1(I),m}}^l - P_{c_{w,2(I),m}}^{n*} \right) \right) \\
& - T_{1(I)-2(I),m} \beta_{1(I)-2(I),m}^{l,n*} \frac{\partial M_{w,1(I),m}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \left(\left(P_{1(I),m}^l - P_{2(I),m}^{n*} \right) - \left(P_{c_{w,1(I),m}}^l - P_{c_{w,2(I),m}}^{n*} \right) \right) \\
& - T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^l \left(\delta P_{1(I),m}^l + \frac{\partial P_{c_{w,1(I),m}}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \right) \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} \beta_{1(I)-I,m-f}^l \frac{\partial M_{w,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} (1 - \beta_{1(I)-I,m-f}^l) \frac{\partial M_{w,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} \frac{\partial M_{w,1(I)-I,m-f}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} M_{w,1(I)-I,m-f}^l \left(\left(\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{1(I),m}^l \right) - \left(\frac{\partial P_{c_{w,I,f}}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} - \frac{\partial P_{c_{w,1(I),m}}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \right) \right) \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \left(\left(V P_{1(I),m} \rho_{w,1(I),m} S_{1(I),m} \right)^l - \left(V P_{1(I),m} \rho_{w,1(I),m} S_{1(I),m} \right)^n \right) \\
& + T_{1(I),2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^l \left(\left(P_{1(I),m}^l - P_{2(I),m}^{n*} \right) - \left(P_{c_{w,1(I),m}}^l - P_{c_{w,2(I),m}}^{n*} \right) \right) \\
& - \eta \mathbf{K}_{I,m} M_{w,1(I)-I,m-f}^l \left(\left(P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l \right) - \left(P_{c_{w,I,f}}^{*,l} - P_{c_{w,1(I),m}}^l \right) \right) \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial V P_{I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \rho_{o,I,f}^* + V P_{I,f}^* \frac{\partial \rho_{o,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \right)^l (1 - S_{I,f}^{*,l}) \delta P_{I,f}^{*,l} - \left(V P_{I,f}^* \rho_{o,I,f}^* \right)^l \delta S_{I,f}^{*,l} \right) \\
& - \frac{\partial q_{o,I,f}}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} - \frac{\partial q_{o,I,f}}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} \left(\beta_{I-K,f}^l \frac{\partial M_{o,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} + (1 - \beta_{I-K,f}^l) \frac{\partial M_{o,K,f}^*}{\partial P_{K,f}^*} \delta P_{K,f}^{*,l} \right) \left(P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} \left(\beta_{I-K,f}^l \frac{\partial M_{o,I,f}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} + (1 - \beta_{I-K,f}^l) \frac{\partial M_{o,K,f}^*}{\partial S_{K,f}^*} \delta S_{K,f}^{*,l} \right) (P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l}) \\
& - \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{w,I-K,f}^{*,l} (\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{K,f}^{*,l}) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{o,I,f}^{*,l} \left(\beta_{1(I)-I,m-f}^l \frac{\partial M_{o,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l + (1 - \beta_{1(I)-I,m-f}^l) \frac{\partial M_{o,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} \right) (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{o,I,f}^{*,l} \frac{\partial M_{o,1(I)-I,m-f}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \\
& - N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{o,I,f}^{*,l} M_{o,1(I)-I,m-f}^l (\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{1(I),m}^l) \\
& + N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} \frac{\partial G_{o,I,f}^*}{\partial S_{I,f}^*} \delta S_{I,f}^{*,l} M_{o,1(I)-I,m-f}^l (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \left((VP_{I,f}^* \rho_{o,I,f}^* (1 - S_{I,f}^*))^l - (VP_{I,f}^* \rho_{o,I,f}^* (1 - S_{I,f}^*))^n \right) + q_{o,I,f}^{*,l} \\
& + \sum_{K \text{ voisins}} T_{I-K,f} M_{o,I-K,f}^{*,l} (P_{I,f}^{*,l} - P_{K,f}^{*,l}) + N_b \eta \mathbf{K}_{I,m} G_{o,I,f}^{*,l} M_{o,1(I)-I,m-f}^l (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \quad (\text{A.9}) \\
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial VP_{1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \rho_{o,1(I),m} + VP_{1(I),m} \frac{\partial \rho_{o,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \right)^l (1 - S_{1(I),m}^l) \delta P_{1(I),m}^l - (VP_{1(I),m} \rho_{o,1(I),m})^l \delta S_{1(I),m}^l \right) \\
& - T_{1(I)-2(I),m} \beta_{1(I)-2(I),m}^{l,n*} \left(\frac{\partial M_{o,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l + \frac{\partial M_{o,1(I),m}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l \right) (P_{1(I),m}^l - P_{2(I),m}^{n*}) \\
& - T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^l \delta P_{1(I),m}^l \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} \left(\beta_{1(I)-I,m-f}^l \frac{\partial M_{o,1(I),m}}{\partial P_{1(I),m}} \delta P_{1(I),m}^l + (1 - \beta_{1(I)-I,m-f}^l) \frac{\partial M_{w,I,f}^*}{\partial P_{I,f}^*} \delta P_{I,f}^{*,l} \right) (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \\
& + \eta \mathbf{K}_{I,m} \left(\frac{\partial M_{o,1(I)-I,m-f}}{\partial S_{1(I),m}} \delta S_{1(I),m}^l (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) + M_{o,1(I)-I,m-f}^l (\delta P_{I,f}^{*,l} - \delta P_{1(I),m}^l) \right) \\
& = -\frac{1}{\Delta t} \left((VP_{1(I),m} \rho_{o,1(I),m} (1 - S_{1(I),m}))^l - (VP_{1(I),m} \rho_{o,1(I),m} (1 - S_{1(I),m}))^n \right) \\
& + T_{1(I),2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^l (P_{1(I),m}^l - P_{2(I),m}^{n*}) - \eta \mathbf{K}_{I,m} M_{w,1(I)-I,m-f}^l (P_{I,f}^{*,l} - P_{1(I),m}^l) \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

Les inconnues de ce système sont les incréments de Newton $\delta P_{I,f}^{*,n+1}$, $\delta P_{1(I),m}^{n+1}$, $S_{I,f}^{*,n+1}$ et $S_{1(I),m}^{n+1}$, $I = 1, \dots, N$.

Après linéarisation du système (A.5)-(A.6) selon la relation (2.136), les sous-systèmes devant être résolus à chaque itération de Newton s'écrivent, pour tout I :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial VP_{j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \rho_{w,j(I),m} + VP_{j(I),m} \frac{\partial \rho_{w,j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \right)^l S_{j(I),m}^l \delta P_{j(I),m}^l + (VP_{j(I),m} \rho_{w,j(I),m})^l \delta S_{j(I),m}^l \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} \beta_{j(I)-k(I),m}^l \frac{\partial M_{w,j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \delta P_{j(I),m}^l \left((P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l) - (P_{w,j(I),m}^l - P_{w,k(I),m}^l) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} (1 - \beta_{j(I)-k(I),m}^l) \frac{\partial M_{w,k(I),m}}{\partial P_{k(I),m}} \delta P_{k(I),m}^l \left((P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l) - (P_{w,j(I),m}^l - P_{w,k(I),m}^l) \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^l \left(\delta P_{j(I),m}^l - \delta P_{k(I),m}^l \right) \\
& + \gamma T_{1(I)-2(I),m} (1 - \beta_{1(I)-2(I),m}^{l,n*}) \frac{\partial M_{w,2(I),m}}{\partial P_{2(I),m}} \delta P_{2(I),m} \left((P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^l) - (P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^l) \right) \\
& - \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,l} \delta P_{2(I),m} \\
& = - \frac{1}{\Delta t} \left((VP_{j(I),m} \rho_{w,j(I),m} S_{j(I),m})^l - (VP_{j(I),m} \rho_{w,j(I),m} S_{j(I),m})^{n*} \right) \\
& + \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^l \left((P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l) - (P_{w,j(I),m}^l - P_{w,k(I),m}^l) \right) \\
& - \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{w,1(I)-2(I),m}^{n+1,l} \left((P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^l) - (P_{w,1(I),m}^{n+1} - P_{w,2(I),m}^l) \right) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left(\left(\frac{\partial VP_{j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \rho_{o,j(I),m} + VP_{j(I),m} \frac{\partial \rho_{o,j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \right)^l (1 - S_{j(I),m}^l) \delta P_{j(I),m}^l - (VP_{j(I),m} \rho_{o,j(I),m})^l \delta S_{j(I),m}^l \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} \beta_{j(I)-k(I),m}^l \frac{\partial M_{o,j(I),m}}{\partial P_{j(I),m}} \delta P_{j(I),m}^l \left(P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} (1 - \beta_{j(I)-k(I),m}^l) \frac{\partial M_{o,k(I),m}}{\partial P_{k(I),m}} \delta P_{k(I),m}^l \left(P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l \right) \\
& - \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{w,j(I)-k(I),m}^l \left(\delta P_{j(I),m}^l - \delta P_{k(I),m}^l \right) \\
& + \gamma T_{1(I)-2(I),m} \left((1 - \beta_{1(I)-2(I),m}^{l,n*}) \frac{\partial M_{o,2(I),m}}{\partial P_{2(I),m}} \delta P_{2(I),m} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^l \right) - M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,l} \delta P_{2(I),m} \right) \\
& = - \frac{1}{\Delta t} \left((VP_{j(I),m} \rho_{o,j(I),m} (1 - S_{j(I),m}))^l - (VP_{j(I),m} \rho_{o,j(I),m} (1 - S_{j(I),m}))^{n*} \right) \\
& + \sum_{\substack{k \neq 1 \\ k \text{ voisins}}} T_{j(I)-k(I),m} M_{o,j(I)-k(I),m}^l \left(P_{j(I),m}^l - P_{k(I),m}^l \right) \\
& - \gamma T_{1(I)-2(I),m} M_{o,1(I)-2(I),m}^{n+1,l} \left(P_{1(I),m}^{n+1} - P_{2(I),m}^l \right) \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Remarque A.0.1 *Les termes dérivant les pressions capillaires et perméabilités relatives par rapport à la saturation sont nuls de par le choix du schéma IMPES pour résoudre les sous-systèmes.*

Les inconnues de ce système sont les incréments de Newton $\delta P_{j(I),m}^{n+1*}$ et $\delta S_{j(I),m}^{n+1*}$, $j = 2, \dots, N_{sm}$, pour I fixé. Un sous-système est écrit pour chaque I , $I = 1, \dots, N$.

Annexe B

Publications

B.1 Publication lors du SPE Reservoir Simulation Symposium 2005, 31 jan.-02 fév., Houston, Texas, U.S.A. [22]



SPE 93115

Accurate Modeling of Matrix-Fracture Transfers in Dual-Porosity Models: Optimal Subgridding of Matrix Blocks

C. Famy, SPE, and B. Bourbiaux, SPE, Institut Français du Pétrole, and M. Quintard, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse

Copyright 2004, Society of Petroleum Engineers Inc.

This paper was prepared for presentation at the 2005 SPE Reservoir Simulation Symposium held in Houston, Texas U.S.A., 31 January 2005 – 2 February 2005.

This paper was selected for presentation by an SPE Program Committee following review of information contained in a proposal submitted by the author(s). Contents of the paper, as presented, have not been reviewed by the Society of Petroleum Engineers and are subject to correction by the author(s). The material, as presented, does not necessarily reflect any position of the Society of Petroleum Engineers, its officers, or members. Papers presented at SPE meetings are subject to publication review by Editorial Committees of the Society of Petroleum Engineers. Electronic reproduction, distribution, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Society of Petroleum Engineers is prohibited. Permission to reproduce in print is restricted to a proposal of not more than 300 words; illustrations may not be copied. The proposal must contain conspicuous acknowledgment of where and by whom the paper was presented. Write Librarian, SPE, P.O. Box 833836, Richardson, TX 75083-3836, U.S.A., fax 01-972-952-9435.

Abstract

This paper proposes a sub-gridding technique to improve the reliability of matrix-fracture exchanges predicted by dual-porosity simulators. As a preliminary target, this sub-gridding technique was designed for the capillary imbibition case, by taking into account the physical specificities of this mechanism while minimizing the computational cost. Very accurate exchange terms are obtained, showing interesting perspectives of application of this modelling methodology.

Introduction

Flow simulation in fractured reservoirs is usually based on the "dual-porosity" concept. This approach was first introduced by Barenblatt and Zheltov¹ in 1960 and consists in considering two distinct continuous media, with different porosities, permeabilities and compressibilities. Following this concept, single-phase flows in fractured reservoirs are described by a set of two equations, one for each medium, coupled together by exchange terms characterized by a shape factor depending on the network geometry.

In 1963, this concept was applied within the scope of petroleum engineering by Warren and Root² in order to interpret well tests. The authors proposed a formulation of the exchange terms by using a simplified representation of the reservoir geometry. The matrix medium is represented by an array of parallelepipedic blocks separated by one, two or three sets of orthogonal and equidistant fractures. This regular geometry facilitates the calculation of single-phase and pseudo-steady-state matrix-fracture exchanges, i.e. the shape factor, at the scale of a matrix block.

The dual-porosity concept is implemented in most of the conventional fractured reservoir simulators. Two superposed identical grids, representing respectively the matrix and fracture media, are created to discretize the reservoir. That is,

at any given reservoir location, each matrix cell is associated with a fracture cell and the unknowns of those two cells are linked via a matrix-fracture transfer term. The latter is generally formulated using Warren and Root representation, i.e., for a parallelepipedic matrix block assumed to be representative of all the blocks of the matrix cell under consideration.

All dual-porosity simulators use the same balance equations under the assumption of a pseudo-steady-state matrix-fracture exchange flow. Simulators may differ in the formulation of the exchange term. We can find in the literature several papers discussing these formulations^{2,3,4,5,6,7,8}. Recently, Bourbiaux *et al.*⁹ and Sarda *et al.*⁸ proposed a new technique, based on an image processing algorithm, to calculate the shape factor from geological fracture network images. However, as long as matrix-fracture transfer remains single-phase, involving only pressure diffusivity, the choice of one shape factor formulation or another has rarely any practical impact as the pressure equilibrium between fractures and matrix blocks is established almost instantaneously by comparison with the time accuracy required in reservoir engineering predictions¹⁰. This remark would not apply, of course, for well test modelling.

In order to meet the industry requirement to predict oil recovery processes from fractured reservoirs, the formulation of exchange terms had to be extended to multiphase flows. Several methods were proposed to formulate, i.e. upscale, multiphase transfer mechanisms at the scale of a reservoir simulation cell. One method consists in using a time-dependent law named recovery function¹¹. These recovery functions are determined from laboratory experiments or from reference fine gridded numerical simulations. Recovery functions are depending on matrix block geometry and properties, and on the production mechanisms, and thus have a limited validity. Another way to simulate exchanges between matrix and fractures is through the use of pseudo-curves of capillary pressure and/or relative permeabilities^{12,13,14}, deduced from reference simulations. However, pseudo-functions, like the previous recovery functions, do not satisfy the conditions of invariability in space and time required for a valid upscaling. Indeed, their construction depends closely on the initial and boundary conditions applied to the simulated flow problem. Consequently, none of the two above methods can be recommended.

Saidi¹⁵ underlined the weaknesses of previous methodologies while pointing out the importance of matrix-fracture transfers, as matrix blocks often contain over 90 per cent of the total oil reserve. His work led to the introduction of the matrix blocks sub-gridding techniques^{16,17}. These techniques consist in sub-gridding the *representative* matrix block of each matrix cell, to obtain a more accurate description of fluids displacements inside the block, and thus provide a more reliable prediction of matrix-fracture exchange terms. Referring to upscaling theories, this approach is close to the concept of mixed model¹⁸, where exchanges take place between objects modelled at different scales, that is an equivalent fracture network modelled at cell-scale and matrix blocks modelled at a local-scale. But this method is still not implemented in engineering models because of its computational cost, in spite of possible simplifications of the resulting system of equations, as proposed by Vossoughi and Asghari¹⁹.

The purposes of this paper are to re-investigate the matrix blocks sub-gridding technique in the capillary imbibition case, by taking into account the physical specificities of this mechanism while minimizing the computational cost.

Model description

The optimization of the matrix blocks sub-gridding technique is based on the study of the kinetics of exchange between the fracture and matrix media. This study is performed on a single matrix block, supposed to be representative of the set of matrix blocks in a given matrix grid cell. We suppose that this block is initially saturated with a dead oil and irreducible water, and surrounded by fractures filled with water. To begin with, we consider an isotropic matrix block (in terms of permeability) and having the same dimensions in each direction. The matrix rock is preferentially water-wet, and matrix blocks dimensions are assumed to be small enough. These two conditions allow us to assume that gravity effects are negligible. For our test cases, we choose the capillary pressure and relative permeability curves of the matrix medium as shown in **Fig. 1**. Cross-shaped curves are used for the fracture medium. The mobility ratio, defined as:

$$M = \frac{\mu_o}{\mu_w} \frac{kr_{w_{\max}}}{kr_{o_{\max}}} \dots \dots \dots (1)$$

is below the unity threshold value which determines the front type²⁰ in conventional immiscible two-phase displacements ($\mu_o = 0.21$ cp, $\mu_w = 0.35$ cp, $kr_{w_{\max}} = 0.23$ and $kr_{o_{\max}} = 1$, leading to $M = 0.138$). Porosity and permeability data are given in **Table 1**.

Reference fine-grid model. The fine grid for the matrix block reference model was designed optimally so that maximum possible accuracy was achieved. The boundary condition imposed at the matrix block surface is constant with time and describes full immersion in water. This condition is simulated by initiating a maximum water saturation in a fracture cell of "infinite" porosity. The flow symmetries are used to divide by two the number of cells in each horizontal direction. However, the number of cells was not reduced in the vertical direction to

allow for gravity effects in a subsequent stage, problem beyond the scope of the present paper.

The minimum number of grid cells to obtain a reference model is given in **Table 2** for 1D, 2D and 3D flows.

The reference models will be used for the creation of the new sub-gridding technique described later in this paper. They will also provide the reference solution of matrix-fracture transfer kinetics for validating the optimized sub-gridded model. An example of a two-dimensional reference model is shown in **Fig. 2**.

Sub-gridding optimization. A sub-gridded model of the matrix block is optimized by reducing the number of cells in the reference model, while reproducing accurately the matrix block behaviour. This optimization involves the following three steps.

Time discretization of the transfer process: First, a reference simulation, carried out on the reference model, provides the evolution versus time of the normalized mean water saturation of the matrix block, $\bar{S}(t)$, defined by:

$$\bar{S}(t) = \frac{S(t) - S_{wi}}{1 - S_{or} - S_{wi}} \dots \dots \dots (2)$$

This curve is subdivided into N intervals, corresponding to a constant mean saturation step. The number of intervals is fixed *a priori* at a value that is sufficient to describe the different stages of the displacement process. Several times t_n , with $n = 1, \dots, N$ are then defined by:

$$\bar{S}(t_n) = \frac{n}{N} \text{ thus } t_n = \bar{S}^{-1}\left(\frac{n}{N}\right) \dots \dots \dots (3)$$

where \bar{S}^{-1} is the inverse of the function \bar{S} and N is the number of subdivisions of the interval $[0,1]$ covered by the normalized mean water saturation.

Discretization of the saturation profile at a given time:

Second, for each time t_n determined previously, the local saturation values, S^n , within the matrix block, are plotted versus the abscissa taken from the block boundary, x^n , where the superscript n refers to time t_n . N curves are then plotted. Each curve is discretized into I abscissa intervals, corresponding to a constant local saturation step. For each profile $S^n(x_i)$, several abscissae x_i^n , $i = 1, \dots, I$ are then marked, and defined by:

$$S^n(x_i^n) = S^n(x=0) - \frac{i}{I} \text{ thus } x_i^n = S^{n-1}\left(S^n(x=0) - \frac{i}{I}\right) (4)$$

The minimum and maximum local saturation values involved in the subdivision of each saturation profile curve coincide with the values observed at the boundary and the centre of the matrix block at that time.

For a given time t_n , the series $\{x_i^n\}$, $i = 1, \dots, I$, constitutes an optimized discretization of the saturation field within the block, and by extension, an optimal one-dimensional sub-grid

of the block at that time. One property of this sub-grid, as expected from the adopted procedure, is the strictly increasing size of cells from block boundary to block centre. Indeed, the saturation front gets smoother and smoother as water penetrates deeper into the homogeneous domain^{20,21}. Subsequently, N sub-grids are created, each corresponding to a given time.

Resulting optimized sub-grid. The purpose of the methodology is to obtain an optimized sub-grid which reproduces the matrix block behaviour, deduced from simulations on the reference model, for both short and long times. So the N sub-grids previously built must be lumped into a unique matrix block sub-grid.

A simple algorithm reads the previous sub-grids and combines them in order to create a "global" sub-grid, by imposing strictly increasing cell dimensions from the fracture to the matrix block centre. **Fig. 3** shows an example of application of the whole process described above, with the sub-grids at different times, and the resulting optimized sub-grid at the bottom of the figure.

In two-dimensional and three-dimensional flow cases, this sub-gridding procedure is applied in each flow direction. The number of grid cells in reference and optimized models are given in **Table 3**.

In order to validate this new sub-grid, composed of fewer grid cells than the reference model, a norm is defined to evaluate the difference between the results. Simulation results based on the reference model, denoted with subscript *ref*, are compared to simulation results from the new optimized model, denoted with subscript *test*. The norm is then defined by:

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\left| S_{test}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right) - S_{ref}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right) \right|}{S_{ref}^{-1} \left(\frac{n}{N} \right)} \right) \dots \dots \dots (5)$$

In the one-, two- or three-dimensional studies, the norm does not exceed 1.7% for our test cases.

Creation of an equivalent one-dimensional sub-grid. In the case of capillary dominated flows, further model size reduction can be introduced in order to reduce the numerical cost. The previous sub-grid, either one-, two- or three-dimensional, is replaced by a one-dimensional sub-grid while reliably reproducing the matrix-fracture transfers, as described below.

Nested sub-grid. Indeed, to describe exactly the physics of capillary imbibition phenomenon, it is not necessary to reproduce the sub-grid in each direction (cf. **Fig 4**, left): a nested sub-grid (cf. **Fig 4**, right) can fairly well simulate the progression of fluid front into the block. This nested sub-grid is obtained by supposing equal the unknowns (pressure and saturation) of all grid cells composing a "ring".

Equivalent one-dimensional sub-grid. There must be an equivalence between the previous optimized sub-grid and the

one-dimensional sub-grid (cf. **Fig. 5**). This equivalence is based on the following four conditions:

- the number of "rings" is equal to the number of cells in a given flow direction of the original optimized multi-dimensional sub-grid,
- the total pore volume of the cells constituting a "ring" is conserved,
- porosity is equal to the average porosity of the cells constituting the "ring",
- the global transmissivity between two adjacent "rings" is conserved.

To satisfy the second condition, an arbitrary constant exchange area between adjacent cells of the 1D model is fixed, and the length of each cell is modified to reproduce the pore volume of the "ring":

$$l_m^{1D} = \frac{PV_m}{A^{1D} \phi_m} \dots \dots \dots (6)$$

where l_m^{1D} and A^{1D} are respectively the length of the m -th cell and the constant exchange area between cells in the equivalent one-dimensional model, PV_m and ϕ_m are respectively the total pore volume and average porosity of the m -th "ring" of cells in the multi-dimensional model.

In both multi-dimensional and one-dimensional models, flow transmissivities between two adjacent cells are calculated with the following formula:

$$T_{i,j} = \frac{2KA_{i,j}}{l_i + l_j} \dots \dots \dots (7)$$

with K the mean permeability defined as:

$$K = \frac{K_i K_j (l_i + l_j)}{K_j l_i + K_i l_j} \dots \dots \dots (8)$$

The global transmissivity between two adjacent "rings" of the multi-dimensional model is calculated as the sum of the transmissivities between adjacent constitutive cells in the flow direction. This global transmissivity value is assigned to the transmissivity between the two corresponding cells of the 1D sub-gridded model.

Table 4 gives the one-dimensional grid cell lengths for one-, two- and three-dimensional matrix-fracture exchange cases, for our test cases. The length of the last cell, which is the central cell, is not calculated with the algorithm previously presented, but is equal to the difference between the matrix block total length and the sum of previous cells dimensions.

We found that there is nearly the same number of grid cells in each case. The progression ratio is defined as one grid cell length divided by the length of the adjacent cell. In each case, this progression ratio is between 1 and 2, and its average value is:

- $\bar{R} = 1.038$ in the isotropic one-dimensional case,
- $\bar{R} = 1.238$ in the isotropic two-dimensional case,
- $\bar{R} = 1.34$ in the isotropic three-dimensional case.

Validation of the equivalent one-dimensional model

The equivalent one-dimensional model is validated by comparison with the reference model. A comparison is also made with a dual-porosity model, in order to appreciate the improvement brought by the matrix block sub-gridding method. Simulations on the dual-porosity model were made with the reservoir simulator ATHOS, using the option denoted as "PC". This option considers only capillary forces and neglects gravity and viscous forces.

Physical comparison. The purpose is to check that the new equivalent one-dimensional model with an optimized sub-grid predicts the same kinetics of matrix-fracture transfer as the reference one, whatever the number of flow dimensions. Fig. 6 presents the produced oil versus time in three cases involving one-, two- or three-dimensional transfers.

For each case, a comparison is made between the nD reference model with n being the number of flow dimensions (*SImbi_PMU_nD_8*, solid line), the nD model with an optimal sub-grid (*SImbi_PMU_nD_optinD*, dashdot line), the model involving an optimized one-dimensional sub-grid (*SImbi_PMU_nD_opti1D*, dashed line), and the conventional dual-porosity model with "PC" option (*DImbi_PMU_nD_PC*, dotted line).

In the three cases, results on the equivalent one-dimensional model are close to the reference results. We can conclude that the equivalent one-dimensional model allows a very reliable simulation of matrix-fracture exchanges. Fig. 6 also illustrates the improved accuracy of this model compared to a conventional dual-porosity model. Still, this improvement must not be counterbalanced by a prohibitive additional computational cost to make it an attractive option of industrial simulators. This point is discussed below.

Numerical performance. Computational times for the different models are compared in Table 5. These results show that the computational time for a sub-gridded matrix block model can be greatly reduced by optimizing the gridding and, furthermore, by turning it into an equivalent one-dimensional model.

Generalization of the sub-gridding methodology

So far, the methodology to set up an equivalent one-dimensional model was implemented on isotropic cubic matrix blocks. However, for practical applicability, this methodology has to be generalized to anisotropic matrix blocks with any rectangular parallelepipedic shape.

The influence of petrophysical parameters (mobility ratio, relative permeability and capillary pressure curves) must also be investigated to validate the matrix blocks sub-gridding method for any petrophysical properties of the matrix medium.

Block shape and permeability anisotropy. The matrix block sub-gridding methodology deals with parallelepipedic matrix blocks with different lengths and/or permeabilities in each direction. In fact, it is sufficient to consider the block shape, since flows in anisotropic blocks are equivalent to flows in isotropic blocks with modified shapes as shown below²².

Permeability anisotropy. The flow in a matrix block with permeabilities differing in each direction can be formulated as the flow in an isotropic matrix block thanks to a transformation of the length variables in each direction. Considering a matrix block with dimension *a* (respectively *b*, *c*) in the *x*-direction (respectively *y*, *z*) and with a permeability *k_x* along this direction (respectively *k_y*, *k_z*), and assuming negligible gravity effects, the mass conservation equation for slightly-compressible two-phase flows can be written for each phase (phase indice is omitted) as:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right) - k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y} \right) - k_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \dots \dots \dots (9)$$

A reference permeability *k* is chosen and the following transformation of variables is defined:

$$X = x \sqrt{\frac{k}{k_x}}, X \in \left[0; \frac{A}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{k}{k_x}} \right], dx = \sqrt{\frac{k_x}{k}} dX,$$

$$Y = y \sqrt{\frac{k}{k_y}}, Y \in \left[0; \frac{B}{2} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{k}{k_y}} \right], dy = \sqrt{\frac{k_y}{k}} dY, \dots \dots (10)$$

$$Z = z \sqrt{\frac{k}{k_z}}, Z \in \left[0; \frac{C}{2} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{k}{k_z}} \right], dz = \sqrt{\frac{k_z}{k}} dZ.$$

Eq. (9) can now be written as:

$$\phi \frac{\partial S}{\partial t} - k \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial X} \right) - k \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Y} \right) - k \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{k_r}{\mu} \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 0 \dots \dots \dots (11)$$

which is the *mass conservation equation for an isotropic matrix block* with dimensions *A*, *B* and *C* and isotropic permeability *k*.

Optimal sub-gridding construction. We now have to build an optimal sub-grid of the previous parallelepipedic isotropic matrix block of lengths *A*, *B*, *C*. In such a block, the saturation fronts, penetrating at the same speed from each face into the block, are nearly identical at a given time. In the case of a rectangular parallelepipedic block, the saturation front will reach the matrix block centre following the direction of minimum flow length. The determining dimension for flow description is then the smallest of the three equivalent matrix block dimensions, *A*, *B* and *C*. Therefore, the optimized sub-grid to be adopted in each direction is the one which describes the one-dimensional flow in a block with a length equal to the smallest of the three lengths, *A*, *B* and *C*.

Once this direction of minimum flow has been identified, an optimal sub-grid is generated and reproduced in each direction, before being converted into an equivalent one-

dimensional sub-grid using the same procedure as described before.

Influence of petrophysical parameters. A sensitivity study was carried out to verify that the petrophysical parameters do not significantly alter the efficiency of the equivalent one-dimensional model.

Tested parameters. For each kind of parameter (mobility ratio, relative permeability curves and capillary pressure curves), two extreme scenarii were tested. A "linear Pc" (Fig. 7, left) and an "incurved Pc" (Fig. 7, right) were considered for capillary pressures, and "linear kr" (Fig. 8, left) and "third-order polynomial kr", or third-order Corey equation (Fig. 8, right) for relative permeabilities.

The mobility ratio was modified by changing the oil viscosity μ_o . The two values of the mobility ratio tested were the base case value, M equal to 0.14 and denoted as "M<1", and a value of M equal to 4.1, denoted as "M>1". This latter value was obtained by multiplying the oil viscosity by 30.

Results. By combining the different values of the three tested parameters, eight different cases have been created and studied. The optimized sub-grids corresponding to each case are described in Table 6. The number of cells in the optimized sub-grids is nearly constant and, as in the cases described before, the progression ratio remains between 1.2 and 1.35. The deviation between equivalent and reference models (σ , Eq. (5)) is very small, in the order of 0.1%, for cases involving a linear relative permeability curve, and somewhat higher, but not exceeding 1.3%, for cases involving a third-order polynomial relative permeability curve.

Automation of equivalent one-dimensional sub-gridding.

The equivalent one-dimensional model, for any shape and petrophysical properties of the matrix block, was based on a study of capillary imbibition processes. However, for practical reasons, this multi-step procedure cannot be applied to each type of matrix blocks found in a given fractured reservoir. Fortunately, the sensitivity studies presented in this paper showed that the optimized sub-grid of a matrix block do not differ very much with the shape and petrophysical properties of the matrix blocks. Indeed, the number of cells in optimized sub-grids varied slightly, and was always between 11 and 18 cells, with an average of 14. The mean progression ratio of cell lengths was comprised between 1.2 and 1.35. The number of flow dimensions had no influence on these grid characteristics.

Therefore, the number of grid cells composing the sub-grid, and the cell lengths progression ratio in the optimized multi-dimensional model, can be fixed, which makes possible an automatic creation of the equivalent one-dimensional sub-grid for matrix blocks of any shape and petrophysical properties. Eventually, this sub-gridding methodology can be easily integrated into any industrial fractured reservoir simulator.

Conclusion

This study proposes an optimal sub-gridded matrix block model that may be incorporated into a dual-porosity model. It contributes to the development of a mixed dual-porosity modelling approach.

The main contributions are as follows:

- The numerical study of capillary imbibition mechanisms in a matrix block showed that an optimized one-dimensional sub-gridded matrix block model can be created on the basis of the local saturation evolution within the block.
- This sub-gridding methodology has been validated by comparison with reference fine-grid simulations, for various block shapes and rock-fluid properties, and for anisotropic flow conditions. The reference solutions are reproduced very accurately, without any significant differences in the detailed evolution of matrix-fracture transfer rate.

The accuracy of the simulated exchange term represents a determining improvement that would justify to introduce this sub-gridding methodology into dual-porosity simulators to ensure a reliable prediction of production profiles from naturally fractured reservoirs.

Nomenclature

a,b,c	=	dimensions of the matrix block, L
A	=	area, L^2
A,B,C	=	dimensions of the matrix block after transformation of variables
i,I	=	number of abscissa intervals
K	=	absolute permeability, L^2
kr	=	relative permeability, L^2
l	=	cell length, L
M	=	mobility ratio
n,N	=	number of time intervals
P	=	pressure, $M.L^{-1}.T^{-2}$
Pc	=	capillary pressure, $M.L^{-1}.T^{-2}$
PV	=	pore volume, L^3
R	=	progression ratio
S	=	saturation
t	=	time, T
T	=	transmissivity, L^3
x	=	position
x,y,z	=	directions
ϕ	=	porosity
μ	=	viscosity, $M.L^{-1}.T^{-1}$
σ	=	norm

Subscripts

m	=	matrix medium
max	=	maximum value
o	=	oil phase
or	=	oil residual
w	=	water phase
wi	=	water irreducible

Superscripts

$1D$	=	one-dimensional model
n	=	reference time

References

1. Barenblatt G.I., Zheltov I.P. and Kochina I.N.: "Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks," *J. Applied Math. Mech.* (USSR) (1960).
2. Warren J. and Root P.: "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs," *SPE Journal* (1963) 245-255.
3. Coats K.; "Implicit Compositional Simulation of Single-Porosity and Dual-Porosity Reservoirs," paper SPE 18427 presented at the 1989 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Feb. 6-8.
4. Lim K. and Aziz K.: "Matrix-Fracture Transfer Shape Factors for Dual-Porosity Simulators," *Journal of Petroleum Science and Engineering* (1995) 169-178.
5. Quintard M. and Whitaker S.: "Transport in Chemically and Mechanically Heterogeneous Porous Media. I: Theoretical Development of Region-Averaged Equations for Slightly Compressible Single-Phase Flow," *Advances in Water Resources* (1996) 19, 29-60.
6. Kazemi H., Merrill L.S., Porterfield K.L. and Zeman P.R.: "Numerical Simulation of Water-Oil Flow in Naturally Fractured Reservoirs," *SPE Journal* (1976).
7. Bourbiaux B., Granet S., Landereau P., Nøtinger B., Sarda S. and Sabathier J.C.: "Scaling Up Matrix-Fracture Transfers in Dual-Porosity Models: Theory and Application," paper SPE 56557 presented at the 1999 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, San-Francisco, Oct. 3-6.
8. Sarda S., Jeannin L. and Bourbiaux B.: "Hydraulic Characterisation of Fractured Reservoirs," paper SPE 66398 presented at the 2001 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Feb. 11-14.
9. Bourbiaux B., Cacas M.-C., Sarda S. and Sabathier J.-C.: "A Rapid and Efficient Methodology to Convert Fractured Reservoir Images into a Dual-Porosity Model," *Revue de l'Institut Français du Pétrole* (1998) 53, No. 6.
10. Granet S., Fabrie P., Lemonnier P. and Quintard M.: "A Two-Phase Flow Simulation of a Fractured Reservoir Using a New Fissure Element Method," *Journal of Petroleum Science and Engineering* (2001) 32, 35-52.
11. Reiss L.H., Bossie-Codreanu D.N. and Lefebvre Du Prey E.J.: "Flow in Fissured Reservoirs," paper SPE 4343 presented at the 1973 SPE Annual European Meeting, London, Apr. 2-3.
12. Thomas L.K., Dixon T.N. and Pierson R.G.: "Fractured Reservoir Simulation," *SPE Journal* (1983).
13. Rossen R.H. and Chen E.I.: "Simulation of Gas/Oil Drainage and Water/Oil Imbibition in Naturally Fractured Reservoirs," paper SPE 16982 presented at the 1987 SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Dallas, Sept. 27-30.
14. Dean R.H. and Lo L.L.: "Simulations of Naturally Fractured Reservoirs," *SPE Reservoir Engineering* (1988).
15. Saidi A.M.: "Simulation of Naturally Fractured Reservoirs," paper SPE 12270 presented at the 1983 SPE Reservoir Simulation Symposium, San Francisco, Nov. 15-18.
16. Pruess K. and Narasimhan T.N.: "A Practical Method for Modeling Fluid and Heat Flow in Fractured Porous Media," *SPE Journal* (1985).
17. Gilman J.R.: "An Efficient Finite-Difference Method for Simulating Phase Segregation in the Matrix Blocks in Double-Porosity Reservoirs," *SPE Reservoir Engineering* (1986).
18. Arbogast T., Douglas J. and Santos J.E.: "Two-Phase Immiscible Flow in Naturally Fractured Reservoirs," *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications* (1986) 11, 47-66.
19. Vossoughi S. and Asghari K.: "Simulation of Fractured Gas Reservoir - An Overview," paper SPE 39060 presented at the 1997 SPE Latin and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition, Rio de Janeiro, 30 Aug-3 Sept.
20. Marle C.: *Cours de production - Tome IV : Les écoulements polyphasiques en milieux poreux*, Cours de l'Ecole Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs, Ed. Technip (1984).
21. Bourbiaux B.J. and Kalaydjian F.J.: "Experimental Study of Cocurrent and Countercurrent Flows in Natural Porous Media," *SPE Reservoir Engineering* (1990).
22. Besson J.: "Performance of Slanted and Horizontal Wells on an Anisotropic Medium," paper SPE 20965 presented at Europec. 1990, The Hague, Oct. 22-24.

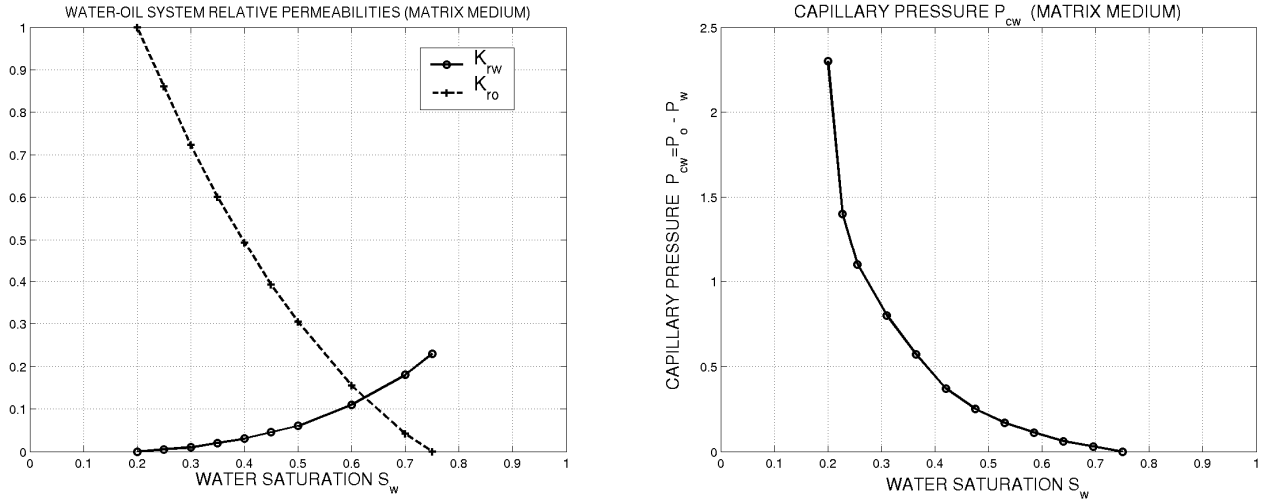


Figure 1 - Relative permeabilities (left) and capillary pressure (right) curves in the matrix medium

Table 1 - Matrix and fracture porosity-permeability data

	Porosity ϕ	Permeability K (mD)
Matrix medium	0.29	1
Fracture medium	1 500 000	10 000

Table 2 - Number of grid cells in reference models

	Fraction of the block studied	Block dimensions (m)	Number of grid cells
1D case	1 / 2	$a/2 = 1.525$	40
2D case	1 / 4	$a/2 * b/2 = 1.525 * 1.525$	40x40
3D case	1 / 4	$a/2 * b/2 * c = 1.525 * 1.525 * 3.05$	40x40x80

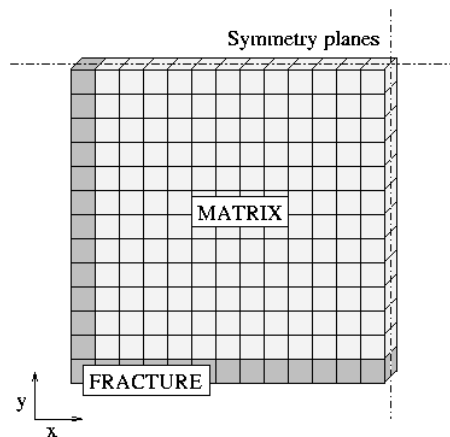


Figure 2 - Isotropic two-dimensional reference model

Table 3 - Number of grid cells in the reference and optimized models

	Reference model	Optimized model
1D case	40	18
2D case	40x40	16x16
3D case	40x40x80	16x16x32

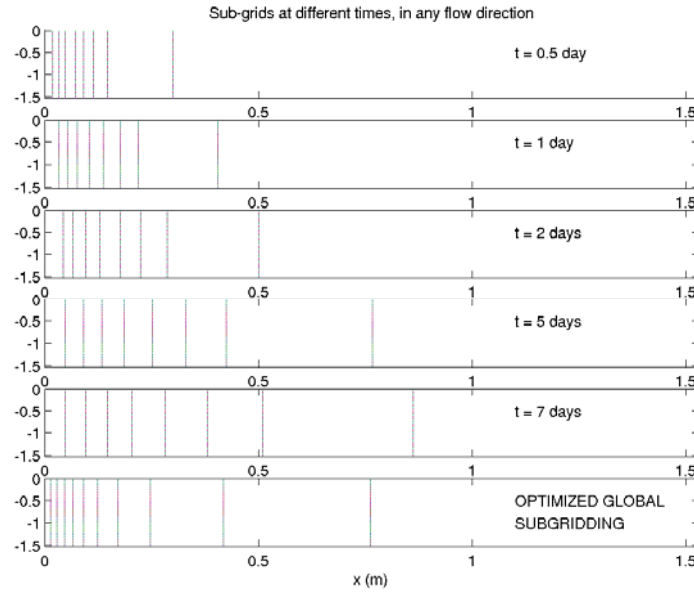


Figure 3 - Sub-grids at different times and resulting optimized sub-grid of the matrix block (*bottom*)

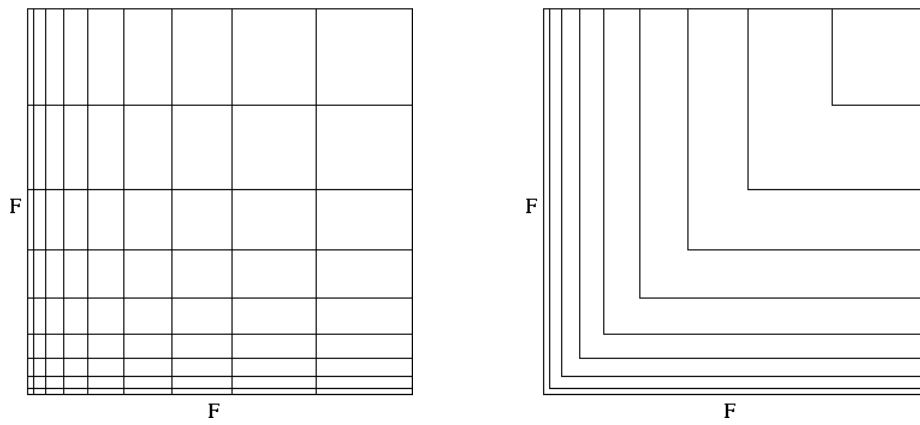


Figure 4 - Two-dimensional case: optimized sub-grid reproduced in each direction (*left*) and nested sub-grid (*right*)

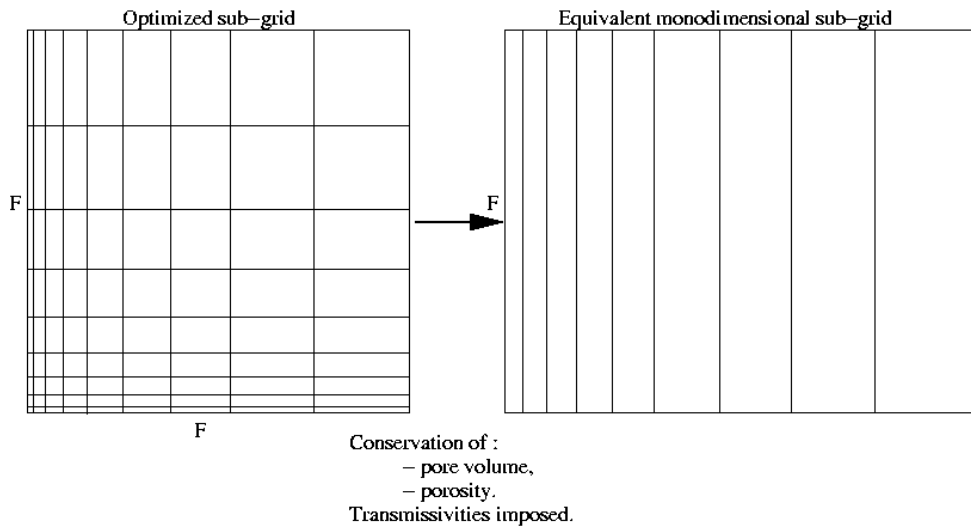


Figure 5 - Conversion of the optimized two-dimensional sub-grid into an equivalent one-dimensional sub-grid

Table 4 - Cell dimensions of the equivalent 1D sub-grid for 1D, 2D and 3D flow exchange cases

Isotropic 1D case 18 grid cells	Isotropic 2D case 16 grid cells	Isotropic 3D case 16 grid cells
0.021071	0.014012	0.01042
0.021632	0.014513	0.013394
0.025749	0.01465	0.013912
0.026028	0.020281	0.017761
0.027095	0.021454	0.018772
0.028909	0.022639	0.022041
0.031027	0.030442	0.030441
0.035655	0.0596	0.038381
0.03625	0.086454	0.042337
0.069754	0.121643	0.051213
0.084873	0.129396	0.053805
0.099985	0.129815	0.091174
0.104849	0.157475	0.108226
0.112148	0.19157	0.164111
0.116972	0.218282	0.21608
0.184555	0.292774	0.632932
0.204967		
0.293481		

Table 5 - Computation time (seconds)

	Reference model	Optimized model (same dimension)	Equivalent one-dimensional model
1D case	2.18	1.09	-
2D case	23.16	6.16	1.03
3D case	10953.0	238.71	0.99

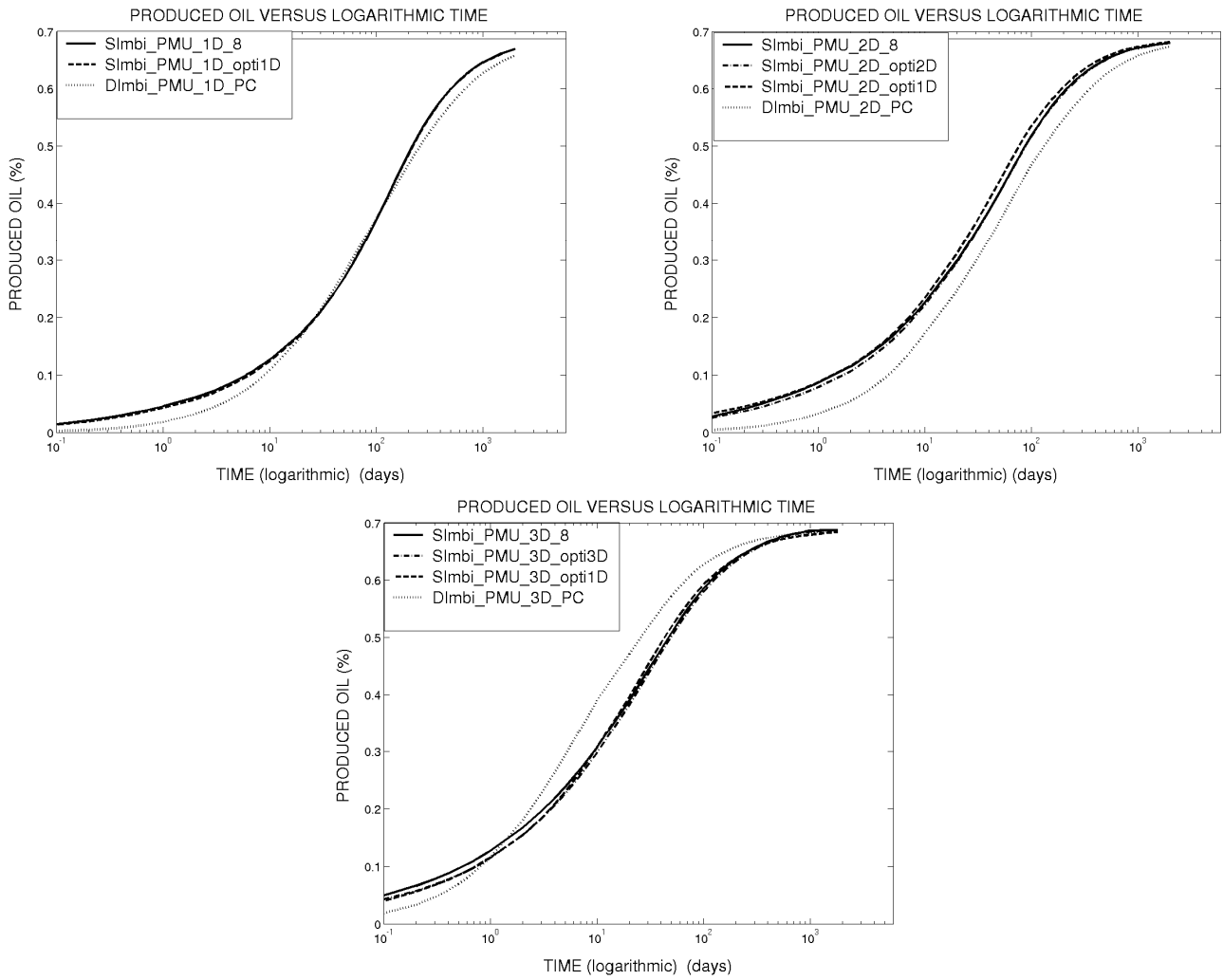


Figure 6 - Prediction of the kinetics of capillary imbibition of a matrix block using the sub-gridded models and a dual-porosity model for 1D (top left), 2D (top right) and 3D (bottom) cases

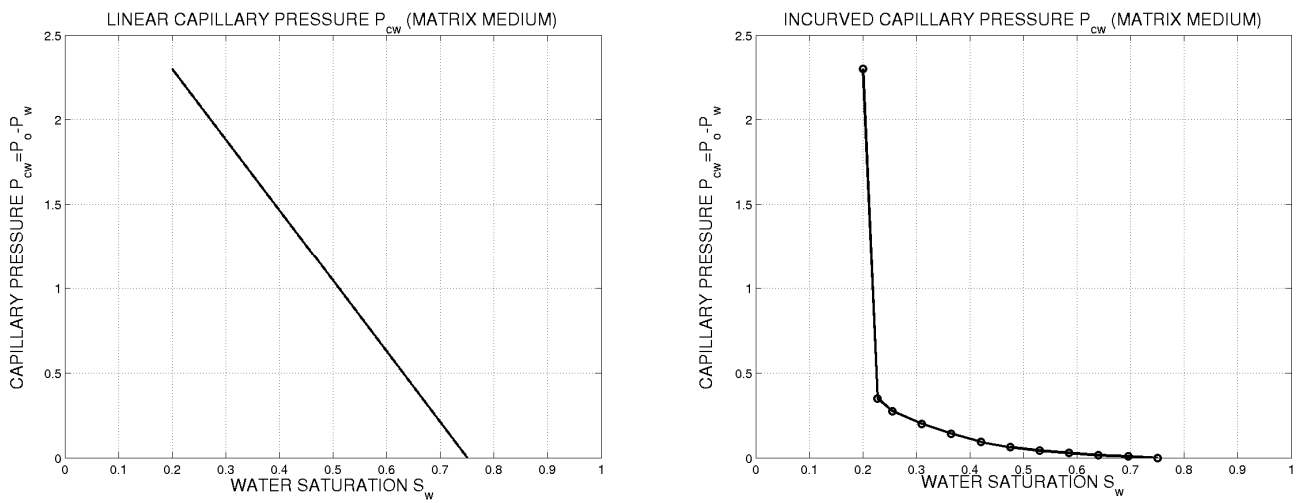


Figure 7 - Linear (left) and incurred (right) capillary pressure curves

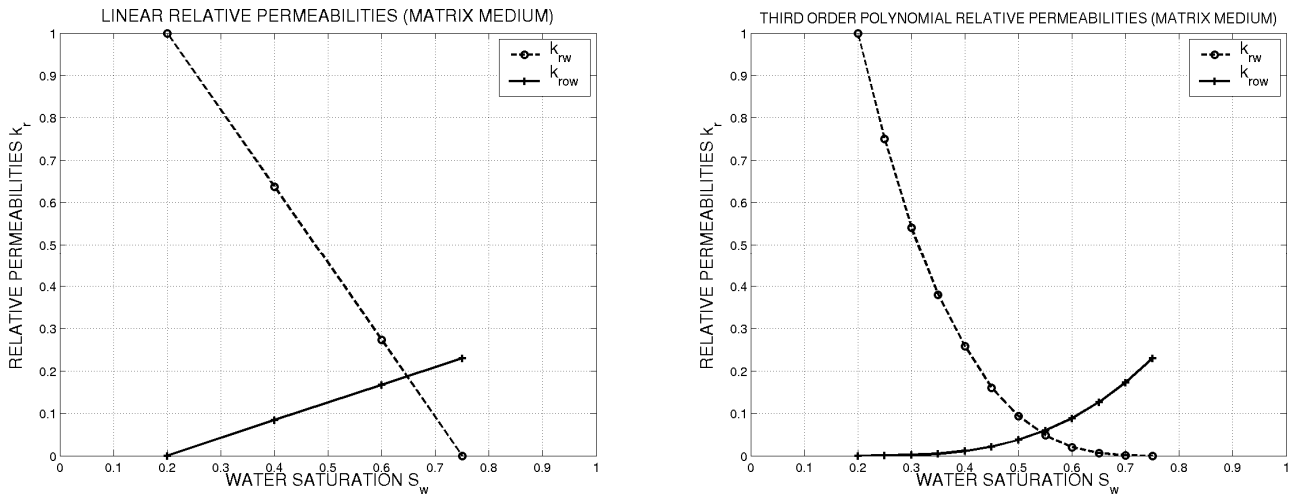


Figure 8 - Linear (left) and third-order polynomial (right) relative permeability curves

Table 6 - Influence of petrophysical parameters on the optimized grid cells size

Linear kr				Third-order polynomial kr			
Linear Pc		Incurved Pc		Linear Pc		Incurved Pc	
M<1 17 grid cells	M>1 15 grid cells	M<1 13 grid cells	M>1 16 grid cells	M<1 12 grid cells	M>1 14 grid cells	M<1 15 grid cells	M>1 11 grid cells
$\bar{R} = 1.214$	$\bar{R} = 1.209$	$\bar{R} = 1.334$	$\bar{R} = 1.188$	$\bar{R} = 1.27$	$\bar{R} = 1.255$	$\bar{R} = 1.194$	$\bar{R} = 1.358$
$\sigma = 0.058\%$	$\sigma = 0.13\%$	$\sigma = 0.11\%$	$\sigma = 0.09\%$	$\sigma = 1.09\%$	$\sigma = 0.48\%$	$\sigma = 0.47\%$	$\sigma = 1.3\%$
0.023996	0.020808	0.017441	0.017243	0.030889	0.023543	0.028587	0.024432
0.02447	0.021681	0.02073	0.020752	0.036736	0.024075	0.029832	0.035223
0.025399	0.022996	0.020951	0.02145	0.043677	0.027164	0.037434	0.036957
0.026246	0.029598	0.028193	0.022533	0.071837	0.030211	0.040284	0.072896
0.026636	0.035363	0.030341	0.028842	0.078459	0.04518	0.045532	0.104655
0.027187	0.036614	0.052664	0.034128	0.102615	0.050942	0.050766	0.130242
0.029502	0.043694	0.057433	0.049485	0.115999	0.063834	0.056635	0.190807
0.032993	0.046396	0.068491	0.057737	0.169652	0.078007	0.08441	0.277494
0.041084	0.059614	0.082735	0.064853	0.173036	0.115577	0.085922	0.285077
0.046494	0.097752	0.11927	0.08551	0.236361	0.119526	0.102952	0.32142
0.084839	0.12026	0.175238	0.100761	0.306403	0.136954	0.148115	0.045797
0.11817	0.120717	0.335643	0.117383	0.159336	0.201947	0.15875	
0.137303	0.171394	0.52387	0.117411		0.31385	0.1801	
0.196503	0.216191		0.164572		0.29248	0.257208	
0.247319	0.481922		0.174585			0.218473	
0.355469			0.437755				
0.081139							

B.2 Publication lors du IAHR-GW 2006 Groundwater in Complex Environments, 12-14 juin, Toulouse, France [21]

Sub-gridded dual-porosity models: accurately modelling matrix-fracture transfers in fractured porous media

C. FAMY, B. BOURBIAUX & P. LEMONNIER

IFP, 1 & 4 avenue de Bois-Préau 92852 Rueil-Malmaison, France

e-mail : Carine.Famy@ifp.fr

M. QUINTARD

IMFT, allée du Professeur Camille Soula 31400 Toulouse, France

Abstract This paper proposes a new application of mixed models, for the prediction of matrix-fracture exchanges in dual-porosity simulators. The resulting model, which can be numerically viewed as a sub-gridding technique, improves the accuracy of exchange terms. This methodology has been designed for capillary imbibition cases, and implemented in a conventional dual-porosity simulator. First results show the improved reliability of the new exchange terms, by comparison with conventional dual-porosity predictions.

Key words fractured reservoirs; dual-porosity models; mixed models; sub-gridding technique

INTRODUCTION

Flows in porous media can be predicted with a satisfactory accuracy at the Darcy scale. At this scale, homogenized laws are available and flow equations are well established. But the characteristic length-scales of many studied problems, such as petroleum reservoirs, prohibit the flow simulations at this local scale. Therefore, transfer mechanisms are upscaled at a higher scale, i.e., the reservoir simulation cell scale.

In naturally fractured petroleum reservoirs, two media are present: the matrix medium, which contains most of the oil reserves; and the fracture medium, which mainly transports the hydrocarbons from the matrix medium to the wells. In the usual "dual-porosity" concept (Barenblatt *et al.*, 1960, Warren & Root, 1963), flows in both media are upscaled to the reservoir simulation cell scale. For the matrix medium, fluid flows are often assumed to occur in a unique matrix block, supposed to be representative of all the set of matrix blocks composing a matrix simulation cell. All dual-porosity simulators use the same balance equations under the assumption of a pseudo-steady-state matrix-fracture exchange flow. Simulators may differ in the formulation of the exchange term, but as long as matrix-fracture transfer remains single-phase, involving only pressure diffusivity, the choice of one homogenization method or another has rarely any practical impact as the pressure equilibrium between fractures and matrix blocks is established almost instantaneously by comparison with the time accuracy required in reservoir engineering predictions, unless considering well testing cases. On the opposite, the choice of the homogenization method is crucial for multiphase flows.

Mixed models (Arbogast, 1989, Arbogast *et al.*, 1990, Arbogast & Bryant, 2002, Pruess & Narasimhan, 1985, Shi *et al.*, 2005), where exchanges take place between objects modelled at different scales, i.e., homogenized equations for the fracture network and Darcy-scale equations with mixed boundary conditions for the matrix blocks, avoid the dependence between the homogenized equations and the initial and boundary conditions of the studied case, which is the main problem of other methods,

like the use of pseudo-functions (Thomas *et al.*, 1983). However, the mixed models requires some approximations to be introduced for practical purposes. Two major simplifications are often implemented. The first one consists in considering a single matrix block associated to the fracture grid cell. The choice of this “representative” block is of course crucial, but this problem is beyond the scope of this paper. Even under these circumstances, the computational load may still be too heavy for practical uses. This paper describes a mixed fractured reservoir model where a sub-gridding procedure of the matrix blocks provides a very accurate prediction of capillary-driven matrix -fracture transfers, while offering very interesting computational performances.

MODEL DESCRIPTION

The optimisation of the matrix blocks sub-gridding technique applied to capillary-driven mechanisms is based on the study of the kinetics of exchanges between the fracture and matrix media. This study is performed on a single matrix block, supposed to be representative of the set of matrix blocks in a given matrix simulation cell (Quandalle & Sabathier, 1989). This representative block is supposed to be initially saturated with a dead oil and irreducible water, and surrounded by fractures filled with water. To begin with, we consider an isotropic matrix block (in terms of permeability) having the same dimensions in each direction. The matrix rock is preferentially water-wet, and the matrix block height is small enough to allow us to neglect the impact of gravity forces on matrix-fracture exchanges. For our test cases, we choose the capillary pressure and relative permeability curves of the matrix medium as shown in Fig. 1 and Fig. 2. Cross-shaped curves are used for the fracture medium.

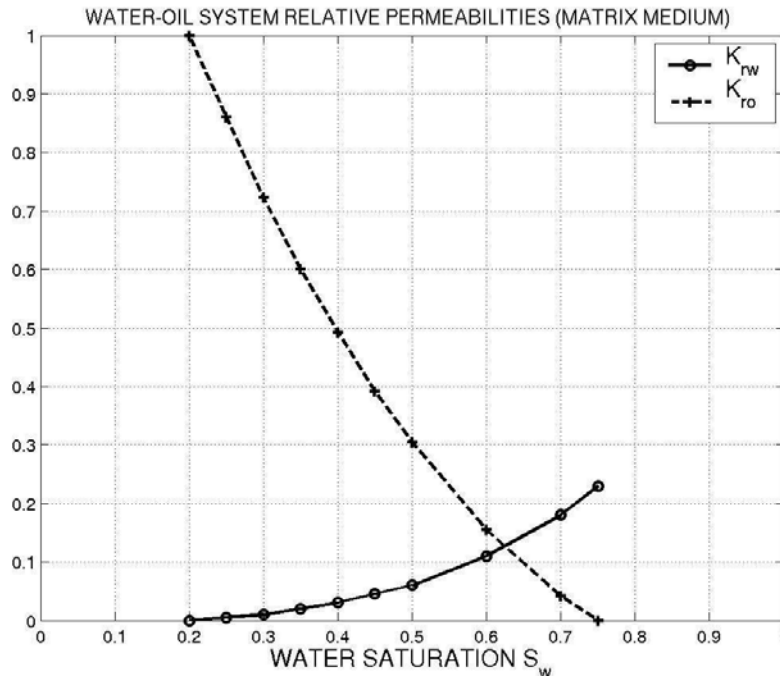


Fig. 1 Relative permeability curves in the matrix medium.

The mobility ratio is lower than one. In our simulation example, matrix porosity is 0.29 and matrix permeability is 1 md. In order to maintain the fracture saturation constant during the simulations, the fracture porosity is arbitrarily taken as very large.

Fracture permeability is taken equal to 10 darcys. The boundary conditions on the matrix block surface are constant with time and correspond to a full immersion in water.

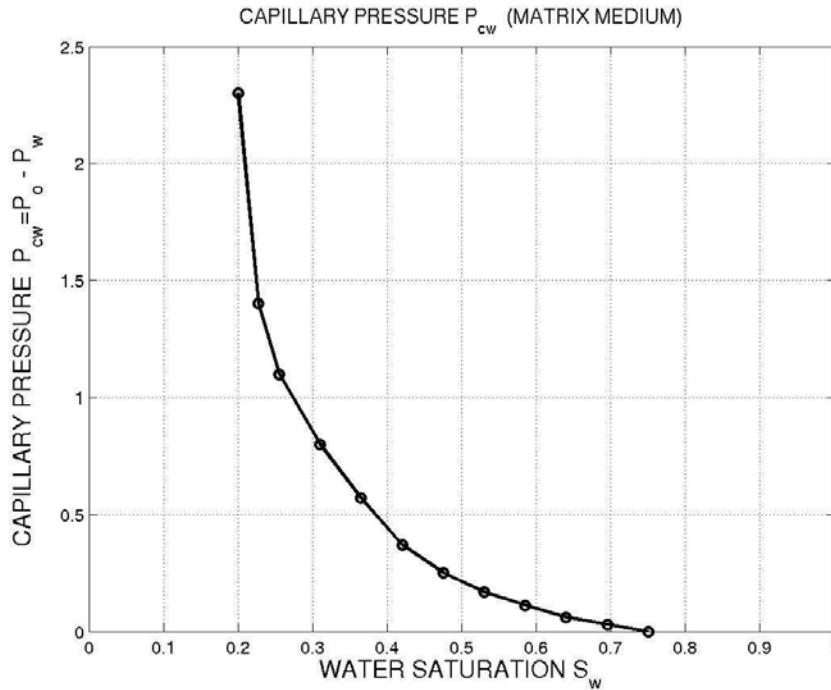


Fig. 2 Capillary pressure curve in the matrix medium.

Sub-gridding optimisation

The sub-gridding optimisation is based on the study of the exchanges kinetics. The starting point of the methodology is a reference fine-gridded simulation.

This reference simulation provides the evolution versus time of the normalised mean water saturation of the block, $\bar{S}^*(t) = \frac{\bar{S}(t) - S_{wi}}{1 - S_{orw} - S_{wi}}$. This curve is subdivided into intervals corresponding to constant mean saturation steps. For each step, the corresponding time t^n is denoted.

For each time t^n , the local saturation value $S^n(x)$ within the block is plotted versus the abscissa, taken from the block boundary. The resulting saturation profile, $S^n(x)$, is discretized into intervals corresponding to constant saturation steps, and the corresponding abscissae are denoted x_i^n . This set of abscissae $\{x_i^n\}$ constitutes an optimised discretization of the saturation field within the block and, by extension, an optimal one-dimensional sub-grid of the block at that time t^n .

Resulting optimised sub-grid

The sub-grids previously obtained at various times t^n have to be lumped into a unique one, in order to create an optimised sub-grid which reproduces the matrix block

behaviour at both short and long times. This is made by a simple algorithm, based on the imposed condition of strictly increasing cell dimensions from the fracture to the block center. In two- and three-dimensional flow cases, the optimised sub-grid is created by applying this procedure on the direction of smallest length, and then reproduced in each direction. Indeed, in an isotropic parallelepipedic matrix block, whatever its dimensions, the saturation fronts penetrate at the same speed from each face into the block, hence they are nearly identical at a given time, as seen from the matrix block surface. The saturation front will then reach the matrix block centre following the direction of minimum flow length.

In order to validate the resulting sub-grid choice, a matrix-fracture capillary transfer was simulated on this optimized sub-grid and results were compared with those obtained on the reference highly refined grid. It was found that *the relative error does not exceed 1.7%*, whatever the number of flow directions.

Creation of an equivalent one-dimensional model

In the case of capillary dominated flows, further model size reduction can be performed in order to reduce the numerical cost. Indeed, to describe exactly the physics of capillary imbibition phenomena, it is not necessary to reproduce the sub-grid in each direction (*cf.* Fig. 3(a)): a nested sub-grid (*cf.* Fig. 3(b)) can fairly well simulate the progression of the fluid front into the block. This nested sub-grid is obtained by supposing equal the unknowns (pressure and saturation) of all the grid cells composing a "ring".

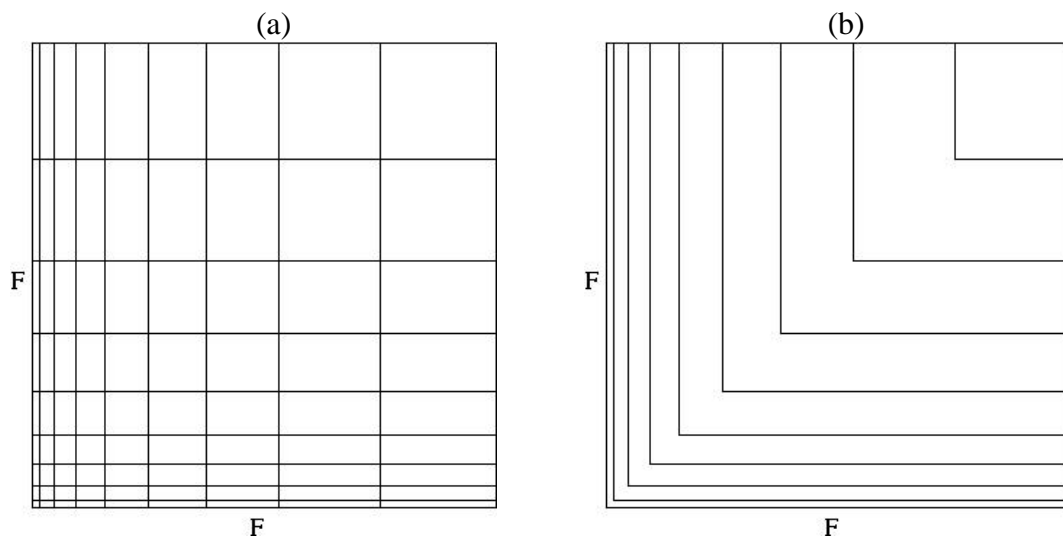


Fig. 3 (a) Optimised sub-grid reproduced in each direction and (b) nested sub-grid in a two-dimensional case:

The equivalence between the two sub-grids is obtained by respecting four conditions:

- the number of "rings" is equal to the number of cells in a given flow direction of the multi-dimensional sub-grid,
- the total pore volume of the cells composing a "ring" is conserved,
- the "ring" porosity is equal to the average porosity within the cells composing a "ring",
- the global transmissivity between two adjacent "rings" is conserved.

The second condition implies the calculation of a new length of the cells and the choice of an arbitrary exchange area between cells.

Validation of the equivalent one-dimensional model

The equivalent one-dimensional model is validated by comparison with the reference model. A comparison is also made with the conventional dual-porosity model, in order to appreciate the improvement brought by the matrix block sub-gridding method. Simulations on the dual-porosity model have been made with the reservoir simulator ATHOS, with an option considering only capillary forces (and neglecting gravity and viscous effects). Fig. 4 compares the matrix oil recoveries predicted by the 3D-reference model (*SImbi_PMU_3D_8*, solid line), the 3D sub-gridded model (*SImbi_PMU_3D_opti3D*, dash-dotted line), the equivalent one-dimensional model (*SImbi_PMU_3D_opti1D*, dashed line) and the conventional dual-porosity model (*DImbi_PMU_3D_PC*, dotted line).

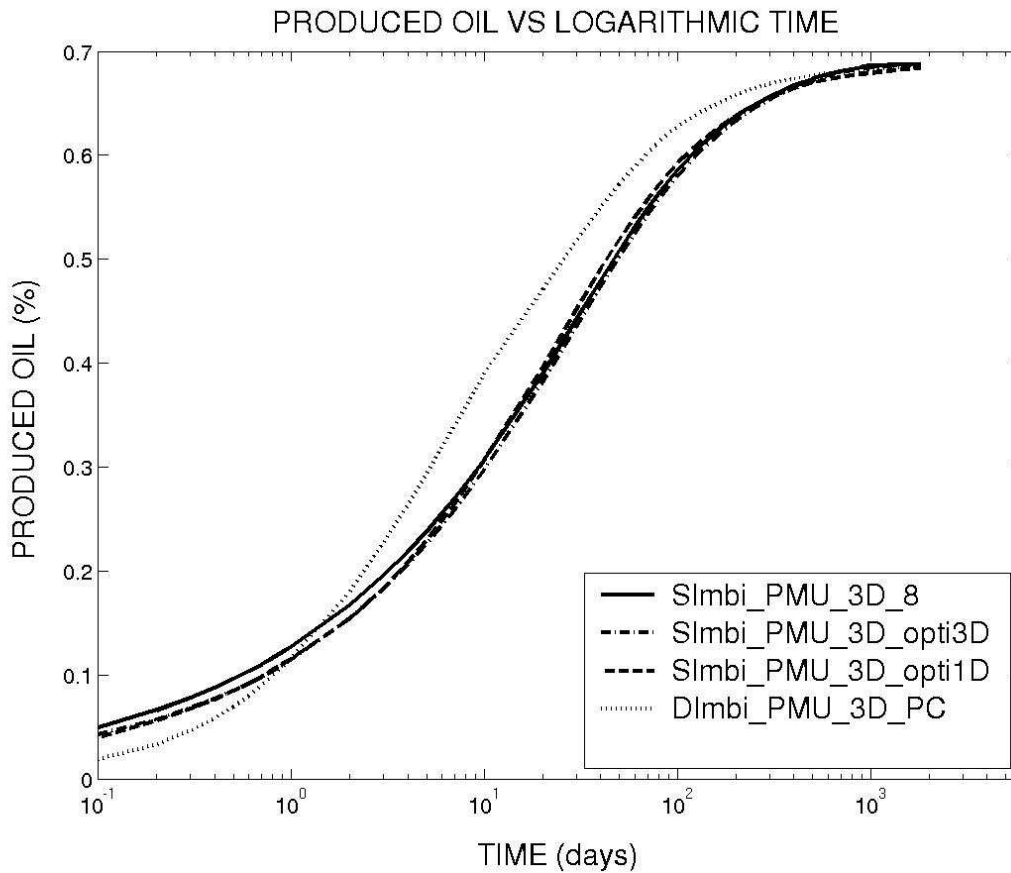


Fig. 4 Predictions of the kinetics of capillary imbibition of the matrix block (3D).

This kind of comparison was made for 1D, 2D and 3D cases and, in each case, results for the equivalent one-dimensional model were very close to the reference results. Fig. 4 also illustrates the improved accuracy of matrix-fracture exchanges calculated with the new sub-gridded model compared to the conventional dual-porosity model.

Generalisation and automation of the sub-gridding methodology

The methodology previously presented can also be applied to anisotropic and non-cubic blocks. The key idea is to use a substitution of variables to transform an anisotropic block into an isotropic one, with different dimensions. The methodology described before is then applied.

The influence of petrophysical parameters (capillary pressure and relative permeability curves and mobility ratio) has also been studied, and we can conclude that the optimised sub-grid does not change significantly with the shape or the petrophysical parameters of the block.

The required number of cells in the sub-grid was found to be always close to an average value of 14, with a mean progression ratio of the cells length comprised between 1.2 and 1.35. These general results allow the automation of the sub-gridding, by fixing the number of cells and the progression ratio between them. More details on this sub-gridding methodology and its validation can be found in Famy *et al* (2005).

IMPLEMENTATION OF THE MIXED MODEL IN A RESERVOIR SIMULATOR

Since the sub-gridding methodology provides accurate exchange terms, it has been implemented in a conventional dual-porosity flow simulator.

Conventional dual-porosity flow simulators

Conventional flow simulators dedicated to fractured porous media are based on flow equations written at the simulation cell scale. These equations then refer to up-scaled flows.

For each phase, the equations in the two media are obtained by combining generalised Darcy's laws with mass conservation laws. The equations in both media are coupled by an exchange term, for each phase respectively.

In the capillary imbibition case, only two phases are present: water and oil. We neglect gravity effects and we suppose that each phase is composed by only one component. External source terms, represented by wells, are only present in the fracture medium. The resulting system can then be written as:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\phi^M \rho_w S_w^M) - \text{div} (K^M M_w^M \text{grad} P_w^M) - F_w = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi^F \rho_w S_w^F) - \text{div} (K^F M_w^F \text{grad} P_w^F) - q_w^F + F_w = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi^M \rho_o S_o^M) - \text{div} (K^M M_o^M \text{grad} P_o^M) - F_o = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi^F \rho_o S_o^F) - \text{div} (K^F M_o^F \text{grad} P_o^F) - q_o^F + F_o = 0 \end{cases} \quad (1)$$

where the superscript M (respectively F) refers to the matrix (respectively the fracture) medium, and the subscript w (respectively o) refers to the water (respectively oil) phase, and:

- $\phi = \phi(P)$ is the porosity at the local scale, multiplied by a volume fraction of matrix block,
- $\rho = \rho(P)$ is the density of the considered phase,
- S is the saturation of the considered phase,
- K is the permeability tensor of the considered medium,
- M is the mass mobility of the considered phase, defined as $M_p = \frac{k_{rp} \rho_p}{\mu_p}$, with $k_r = k_r(S_w)$ the relative permeability, and μ the viscosity,
- P is the pressure of the considered phase,
- q is the source term,
- F is the exchange term between the two media.

The two saturations S_w and S_o are related by $S_w + S_o = 1$, and P_w and P_o by the capillary pressure relationship $Pc_w(S_w) = P_o - P_w$.

The calculation of the exchange terms F consists in calculating the exchange terms on a single matrix block, which is supposed to be representative of all the matrix blocks of the matrix simulation cell, and in multiplying this term by the number of matrix blocks on the cell.

It should be observed that the system (1) is highly non-linear, mainly due to the relative permeabilities, which can strongly vary between two adjacent cells. So the system is solved by using finite volumes, and Newton's method. At each time step, the system is linearised with respect to pressure and saturation increments, and solved using a classical fully implicit or IMPES (IMPLICIT in Pressure, EXPLICIT in Saturation) scheme (*cf.* Aziz & Settari, 1979).

The mixed model

As shown in the previous chapter, the representative single matrix block is sub-gridded. Thus, in the new mixed dual-porosity model, matrix-fracture exchanges are calculated between the fracture cell and the first matrix block sub-cell, whereas they were previously calculated between the fracture cell and the homogenised matrix block (*cf.* Fig. 5, dashed arrows). Some additional exchanges must be calculated between the adjacent sub-cells in each block (*cf.* Fig. 5, solid arrows). Calculation of fracture-fracture exchanges is not modified (*cf.* Fig. 5, dash-dotted arrows).

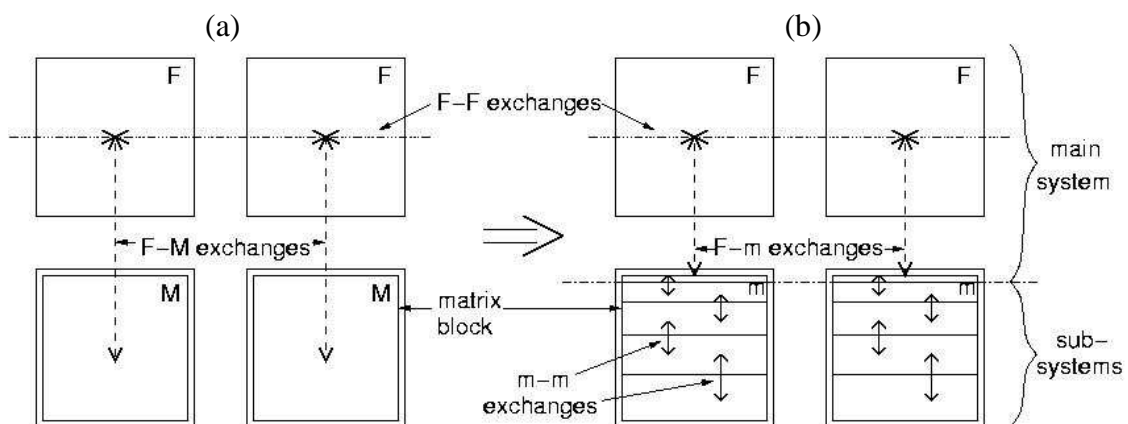


Fig. 5 Matrix-fracture exchanges (a) in the conventional dual-porosity case and (b) in the sub-gridded dual-porosity case.

The matrix-fracture exchange terms at the simulation cell scale are now formulated in our mixed model as follows:

$$F_p = 2N_b G(S_p^F) T_{I-1(I)}^{m-F} M_{p,I-1(I)}^{m-F} (P_{p,I}^F - P_{p,1(I)}^m) \quad (2)$$

where the subscript m refers to the sub-gridded matrix medium, $p = w, o$, I is the number of the considered fracture cell, $1(I)$ is the first matrix sub-cell (which exchanges with fissure medium) corresponding to the fracture cell I and:

- N_b is the number of matrix blocks in the considered matrix simulation cell,
- $G(S_p^F)$ is a function of fracture cell saturation that represents the number of blocks in the matrix cell that are exchanging fluids with the matrix medium,
- V is the volume of the considered cell,
- $T_{I-1(I)}^{m-F}$ is the flow transmissivity between fracture cell I and the first sub-cell $1(I)$, defined by $T_{I-1(I)}^{m-F} = \frac{K^m A^m}{l_{1(I)}}$, with A^m the flow cross-section area of the block,
- M^{m-F} is the mobility at the interface between the two media, evaluated by an upstream scheme,
- $l_{1(I)}$ is the length between the center of the sub-cell $1(I)$ and the surface A^m .

Equations describing flow between matrix sub-cells are similar to equations of system (1), but without any exchange or source term, and are solved in the same way.

In order to minimize the extra computational cost, implied by the need to solve an additional matrix system, or sub-system, for each dual-medium cell, the unknowns of this matrix system are decoupled from those of the matrix-fracture system, or main system. Practically, the main system is solved first. This resolution provides the values of pressure and saturation in the fracture cells and in the first matrix sub-cells at the considered time step. After this, each matrix system is solved independently, by using the pressure and saturation values on the first sub-cells as Dirichlet boundary conditions. This decoupling is schematically represented on Fig. 5(b).

First results

The modified simulator has been tested first on a single matrix block, initially filled with oil. The sub-grid of the matrix block is composed by 15 sub-cells. The associated fracture cell is full of water. Fig. 6 compares the reference fine-grid single-porosity (solid line) and the conventional dual-porosity (dotted line) simulation results with our mixed dual-porosity model (dashed line): our method provides very accurate results, reproducing the reference solution.

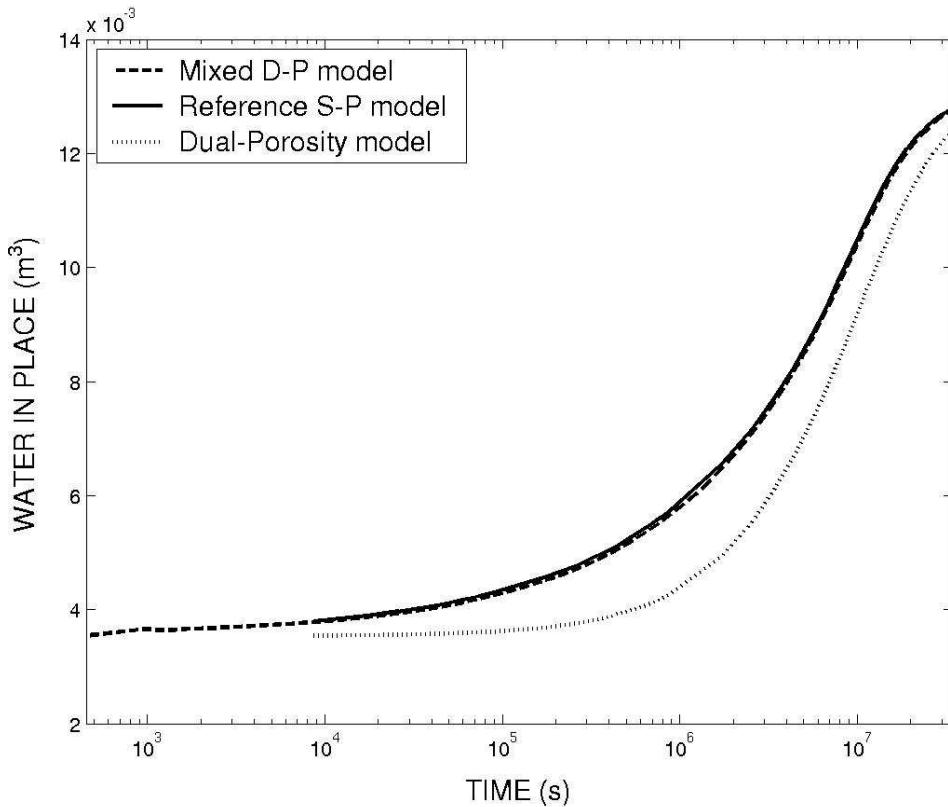


Fig. 6 Water in place in the matrix block versus time with fixed boundary conditions.

The second test, sketched in Fig. 7, involves matrix block boundary conditions changing with time: the studied cell is surrounded by two cells, an upstream one containing a water injection well, and a downstream one containing a production well.

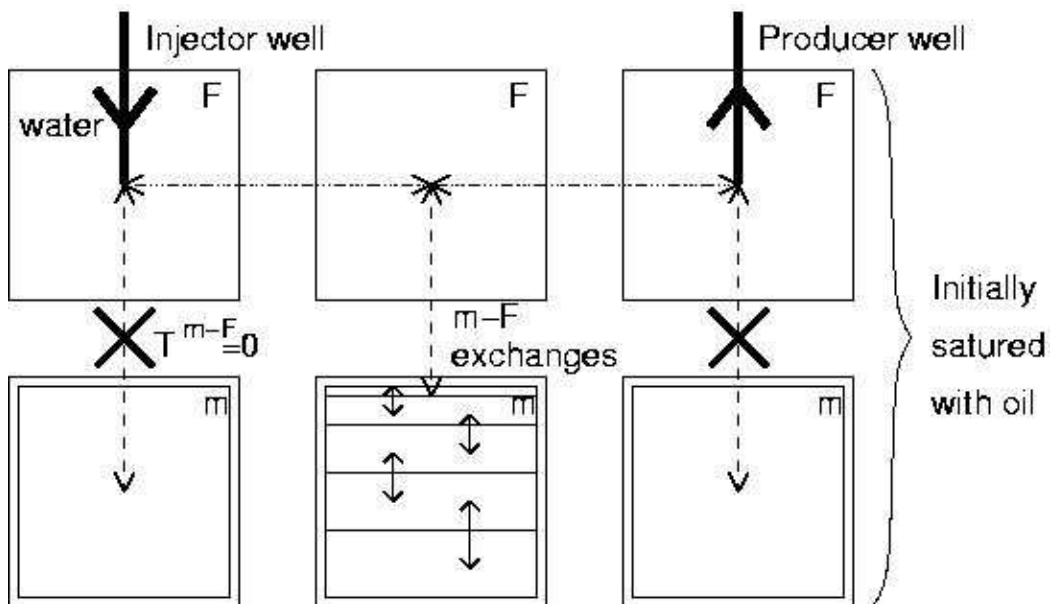


Fig. 7 Second test case.

No matrix-fracture exchanges take place in those well cells. All the cells are initially saturated with oil, and water is injected from the beginning of the simulation.

Once again, results obtained using our mixed dual-porosity model are compared to the predictions of two reference fine-grid single-porosity models and to a conventional dual-porosity model. The two reference fine-grid single-porosity models differ by the number of grid dimensions: one model is gridded in one direction and the other one in two directions.

Two cases of non-stationary boundary condition on the matrix block were then considered by changing the well injection/production rate. Fig. 8 corresponds to a very slow rate and Fig. 9 to a rate 100 times higher than the previous one.

When the flow rate is slow in the fracture, the matrix block invasion by water is no more a one-dimensional process: water enters by the first-contacted corner and the water front progresses in a radial way from this corner. Thus, the mixed dual-porosity model (dashed line) cannot reproduce exactly the flow behaviour, given by the reference two-dimensional single-porosity model (solid line), as shown in Fig. 8. However, it is worth underlining that the mixed dual-porosity model reproduces the reference one-dimensional single-porosity model (dash-dotted line), as expected, and is much closer to the physically-exact reference two-dimensional single-porosity model than the conventional dual-porosity model (dotted line) is.

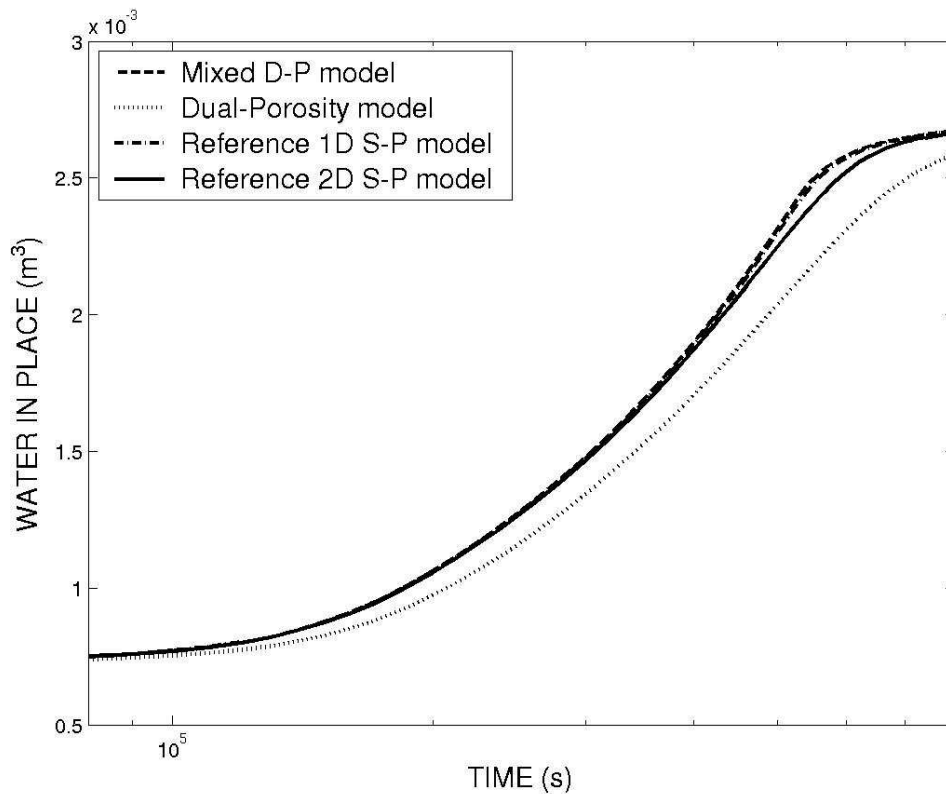


Fig. 8 Water in place in the matrix block versus time with non-stationary boundary conditions with a slow well rate.

When the flow rate is increased, the water invasion becomes a one-dimensional process, then the mixed dual-porosity model predicts very accurately the quantity of water in place versus time (*cf.* Fig. 9).

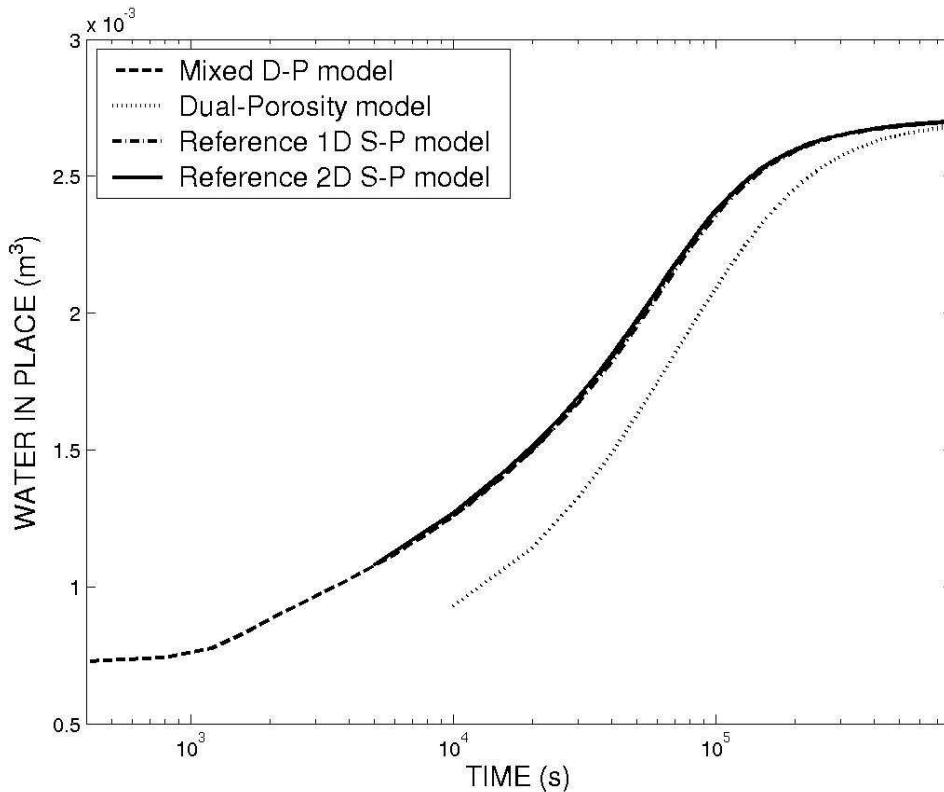


Fig. 9 Water in place in the matrix block versus time with non-stationary boundary conditions with a high well rate.

These first results allow us to estimate the influence of the matrix block boundary conditions. They are promising in the sense that they are consistent with the model assumption (one-dimensional transfer) and reproduce quite satisfactorily well the actual physics of matrix-fracture transfers.

CONCLUSIONS

This study proposes a practical and innovative method to increase the reliability of matrix-fracture exchanges when simulating flows in porous fractured media. The approach consists in the application of a mixed model for which each fracture cell of a conventional dual-medium model is coupled with a detailed sub-gridded matrix block. The methodology described here allows the creation of an optimised one-dimensional sub-grid for capillary-driven mechanisms, derived from the study of the local saturation evolution within the blocks.

The implementation of this mixed modelling approach in a conventional dual-porosity simulator led to very accurate exchange terms. It confirms the attractive perspectives of application of this methodology to water-driven fractured porous media where the matrix-fracture exchanges have a strong impact on multiphase flows.

Further extension of this methodology concerns more complex multi-phase matrix-fracture transfers, driven by gravity and capillary forces, for instance.

REFERENCES

- Arbogast, T. (1989) Analysis of the simulation of single phase flow through a naturally fractured reservoir. *SIAM J. Numer. Anal.* **26**, 12-29.
- Arbogast, T., Douglas, J. & Hornung, U. (1990) Derivation of the double-porosity model of single phase flow via homogenization theory. *SIAM Journal Math. Anal.* **21**(4), 823-836.
- Arbogast, T. & Bryant, S. L. (200) A two-scale numerical subgrid technique for waterflood simulations. *SPE Journal*.
- Aziz, K. & Settari, A. (1979) *Petroleum reservoir simulation*, Elsevier Applied Science Publishers.
- Barenblatt, G. I., Zheltov I. P. & Kochina, I. N. (1960) Basic concepts in the theory of homogeneous liquids in fissured rocks. *J. Applied Math. Mech.* (U.S.S.R.)
- Famy, C., Bourbiaux, B. & Quintard, M. (2005) Accurate modeling of matrix-fracture transfers in dual-porosity models: optimal sub-gridding of matrix blocks. Paper presented at the 2005 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 31 Jan-02 Feb.
- Pruess, K. & Narasimhan, T. N. (1985) A practical method for modeling fluid and heat flow in fractured porous media. *SPE Journal*.
- Quandalle, Ph. & Sabathier, J. C. (1989) Typical features of a multipurpose reservoir simulator. *SPERE*.
- Shi, P., Spagnuolo, A. & Wright, S. (2005) Reiterated homogenization and the double-porosity model. *Transp. Porous Med.* **59**, 73-95.
- Thomas, L. K., Dixon T. N. & Pierson, R. G. (1983) Fractured reservoir simulation. *SPE Journal*.
- Warren, J. E. & Root, P. J. (1963) The behavior of naturally fractured reservoir. *SPE Journal*.

B.3 Publication lors du CMWR-XVI 2006, Computational Methods in Water Resources, 19-22 juin, Copenhagen, Danemark [[20](#)]

ACCURATE MODELLING OF MATRIX-FRACTURE TRANSFERS IN FRACTURED POROUS MEDIA THROUGH SUB-GRIDDED DUAL-POROSITY MODELS

C. FAMy¹, B. BOURBIAUX¹, P. LEMONNIER¹ AND M. QUINTARD²

¹Institut Français du Pétrole, 1-4 av. de Bois-Préau 92852 Rueil-Malmaison cedex, France

²Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, allée du Pr Soula 31400 Toulouse, France

ABSTRACT

This paper proposes a new way to apply mixed models to the prediction of matrix-fracture exchanges in dual-porosity simulators. This model can be viewed as a sub-gridding technique, improving the reliability of exchange terms. First, this sub-gridding technique has been designed for the capillary imbibition case, by taking into account the physical specificities of this mechanism while minimizing the computational cost. Then it has been implemented in a conventional dual-porosity simulator. Moreover, fracture and matrix unknowns have been decoupled in order to reduce the CPU time. First results show the high accuracy of the simulated exchange terms, by comparison with conventional dual-porosity simulation results.

1. INTRODUCTION

Flows in porous media can be predicted with a satisfactory accuracy at the Darcy scale. At this scale, homogenized laws are available and flow equations are well-known. But the characteristic length-scales of many studied problems, such as petroleum reservoirs, prohibit the flow simulations at this local scale. Therefore, transfer mechanisms are upscaled at a higher scale, i.e. the reservoir simulation cell scale.

In naturally fractured petroleum reservoirs, two media are present: the matrix medium, which contains most of the oil reserves; and the fracture medium, which transport the hydrocarbons from the matrix medium to the wells. In the usual "dual-porosity" concept [Barenblatt *et al.*, 1960], [Warren and Root, 1963], flows in both media are upscaled to the reservoir simulation cell scale. For the matrix medium, fluid flows are often assumed to occur in a unique matrix block, supposed to be representative of all the set of matrix blocks composing a matrix simulation cell. All dual-porosity simulators use the same balance equations under the assumption of a pseudo-steady-state matrix-fracture exchange flow. Simulators may differ in the formulation of the exchange term, but as long as matrix-fracture transfer remains single-phase, involving only pressure diffusivity, the choice of one homogenization method or another has rarely any practical impact as the pressure equilibrium between fractures and matrix blocks is established almost instantaneously by comparison with the time accuracy required in reservoir engineering predictions, unless considering well testing cases. On the opposite, the choice of the homogenization method is crucial for multiphase flows.

Mixed models [Arbogast *et al.*, 1990], where exchanges take place between objects modelled at different scales, i.e. homogenized equations for the fracture network and Darcy-scale equations with mixed boundary conditions for the matrix blocks, avoid the dependence between the homogenized equations and the initial and boundary conditions of the studied case, which is the main problem of other methods, like the use of pseudo-functions [Thomas *et al.*, 1983]. This paper describes a mixed fractured reservoir model where a sub-gridding procedure of the matrix blocks provides a very accurate prediction of capillary-driven matrix -fracture transfers.

2. MODEL DESCRIPTION

The optimisation of the matrix blocks sub-gridding technique applied to capillary-driven mechanisms is based on the study of the kinetics of exchanges between the fracture and matrix media. This study is performed on a single matrix block, supposed to be representative of the set of matrix blocks in a given matrix simulation cell. This representative block is supposed to be initially saturated with a dead oil and irreducible water, and surrounded by fractures filled with water. To begin with, we consider an isotropic matrix block (in terms of permeability) having the same dimensions in each direction. The matrix rock is preferentially water-wet, and the matrix block height is small enough to allow us neglecting the impact of gravity forces on matrix-fracture exchanges. For our test cases, we choose the capillary pressure and relative permeability curves of the matrix medium as shown in Fig. 1. Cross-shaped curves are used for the fracture medium.

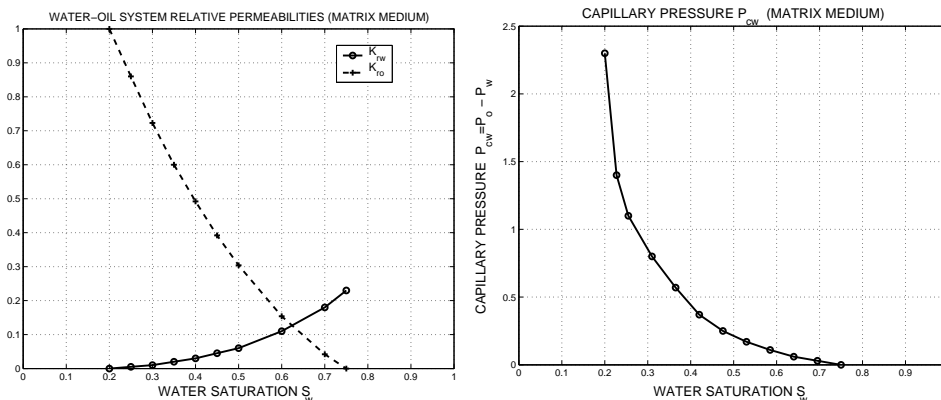


FIGURE 1. Relative permeabilities (*left*) and capillary pressure (*right*) curves in the matrix medium.

The mobility ratio is lower than one. In our simulation example, matrix porosity is 0.29 and matrix permeability is 1 md. In order to maintain fracture saturation constant during the simulations, fracture porosity is arbitrarily taken as very large. Fracture permeability is taken equal to 10 darcys. The boundary conditions on the matrix block surface are constant with time and corresponds to a full immersion in water.

2.1. Sub-gridding optimisation. The sub-gridding optimisation is based on the study of the exchanges kinetics. The starting-point of the methodology is a reference fine-gridded simulation.

This reference simulation provides the evolution versus time of the normalized mean water saturation of the block, $\bar{S}^*(t) = \frac{\bar{S}(t) - S_{wi}}{1 - S_{orw} - S_{wi}}$. This curve is subdivided into intervals corresponding to constant mean saturation steps. For each step, the corresponding time t^n is denoted.

For each time t^n , the local saturation value $S^n(x)$ within the block is plotted versus the abscissa, taken from the block boundary. The resulting saturation profile, $S^n(x)$ is discretised into intervals corresponding to constant saturation steps, and the corresponding abscissae x_i^n are denoted. This set of abscissae $\{x_i^n\}$ constitutes an optimised discretisation of the saturation field within the block and, by extension, an optimal one-dimensional sub-grid of the block at that time t^n .

2.2. Resulting optimised sub-grid. The sub-grids previously obtained at various times t^n have to be lumped into a unique one, in order to create an optimised sub-grid which reproduces the matrix block behaviour at both short and long times. This is made by a simple algorithm, based on the imposed condition of strictly increasing cell dimensions from the fracture to the block center. In two- and three-dimensional flow cases, this procedure is applied in each flow direction, with the same number of sub-cells.

In order to validate the resulting sub-grid, a matrix-fracture capillary transfer was simulated on this optimized sub-grid and results were compared with those obtained on the reference highly-refined grid. It was found that the relative error does not exceed 1.7%, whatever the number of flow directions.

2.3. Creation of an equivalent one-dimensional sub-grid. In the case of capillary dominated flows, further model size reduction can be performed in order to reduce the numerical cost. Indeed, to describe exactly the physics of capillary imbibition phenomena, it is not necessary to reproduce the sub-grid in each direction (*cf.* Figure 2, *left*): a nested sub-grid (*cf.* Figure 2, *right*) can fairly well simulate the progression of the fluid front into the block. This nested sub-grid is obtained by supposing equal the unknowns (pressure and saturation) of all the grid cells composing a "ring".

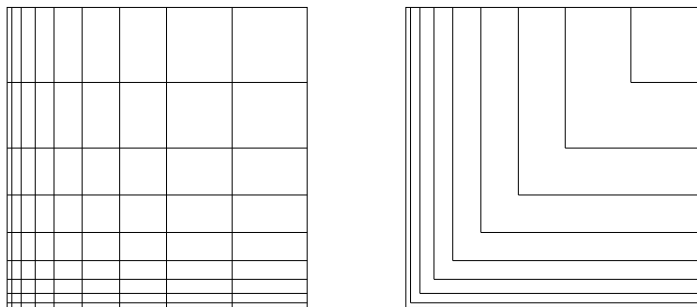


FIGURE 2. Two-dimensional case: optimised sub-grid reproduced in each direction (*left*) and nested sub-grid (*right*).

The equivalence between the two sub-grids is obtained by respecting four conditions:

- the number of "rings" is equal to the number of cells in a given flow direction of the multi-dimensional sub-grid.

- the total pore volume of the cells composing a "ring" is conserved.
- the "ring" porosity is equal to the average porosity within the cells composing a "ring".
- the global transmissivity between two adjacent "rings" is conserved.

The second condition implies the calculation of a new length of the cells and the choice of an arbitrary exchange area between cells.

2.4. Validation of the equivalent one-dimensional model. The equivalent one-dimensional model is validated by comparison with the reference model. A comparison is also made with the conventional dual-porosity model, in order to appreciate the improvement brought by the matrix block sub-gridding method. Simulations on the dual-porosity model have been made with the reservoir simulator ATHOS, with an option considering only capillary forces (and neglecting gravity and viscous effects). Fig. 3 compares the matrix oil recoveries predicted by the 3D-reference model (*SImbi_PMU_3D_8*, solid line), the 3D sub-gridded model (*SImbi_PMU_3D_opti3D*, dash-dotted line), the equivalent one-dimensional model (*SImbi_PMU_3D_opti1D*, dashed line) and the conventional dual-porosity model (*DImbi_PMU_3D_PC*, dotted line).

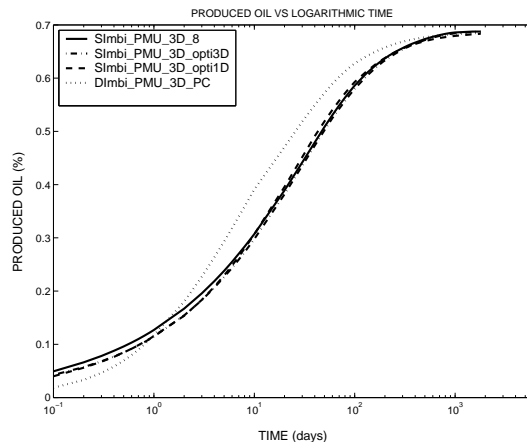


FIGURE 3. Prediction of the kinetics of capillary imbibition of the matrix block (3D case).

This kind of comparison was made for 1D, 2D and 3D cases and, in each case, results for the equivalent one-dimensional model were very close to the reference results. Fig. 3 also illustrates the improved accuracy of matrix-fracture exchanges calculated with the new sub-gridded model compared to the conventional dual-porosity model.

2.5. Generalization and automation of the sub-gridding methodology. The methodology previously presented can also be applied to anisotropic and non cubic blocks. The key idea is to use a substitution of variables to transform an anisotropic block into an isotropic one, with different dimensions. The direction of smallest length is then used in the sub-gridding methodology, and the resulting sub-grid is reproduced in each direction. The multi-dimensional sub-grid is then turned into a one-dimensional one, as explained before.

The influence of petrophysical parameters (capillary pressure and relative permeabilities curves and mobility ratio) has also been studied, and we can conclude that the optimised sub-grid does not differ very much with the shape or the petrophysical parameters of the block.

The required number of cells in the sub-grid was found to be always close to an average value of 14, with a mean progression ratio of the cells length comprised between 1.2 and 1.35. These general results allow the automation of the sub-gridding, by fixing the number of cells and the progression ratio between them. More details on this sub-gridding methodology and its validation can be found in [Famy *et al.*, 2005].

3. IMPLEMENTATION OF THE SUB-GRIDDED MODEL IN A RESERVOIR SIMULATOR

Since the sub-gridding methodology provides accurate exchange terms, it has been implemented in a conventional dual-porosity flow simulator.

3.1. Conventional dual-porosity flow simulators. Conventional flow simulators dedicated to fractured porous media are based on flow equations written at the simulation cell scale. These equations then refer to up-scaled flows.

For each phase, the equations in the two media are obtained by combining generalized Darcy's laws with mass conservation laws. The equations in both media are coupled by an exchange term, for each phase respectively.

In the capillary imbibition case, only two phases are present: water and oil. We neglect gravity effects and we suppose that each phase is composed by only one component. External source terms, represented by wells, are only present in the fracture medium. The resulting system can then be written as :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\phi^M \rho_w S_w^M) - \text{div}(K^M M_w^M \text{grad } P_w^M) \quad -F_w = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi^F \rho_w S_w^F) - \text{div}(K^F M_w^F \text{grad } P_w^F) \quad -q_w^F \quad -F_w = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi^M \rho_o S_o^M) - \text{div}(K^M M_o^M \text{grad } P_o^M) \quad -F_o = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\phi^F \rho_o S_o^F) - \text{div}(K^F M_o^F \text{grad } P_o^F) \quad -q_o^F \quad -F_o = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

where the superscript M (respectively F) refers to the matrix (respectively the fracture) medium, and the subscript w (respectively o) refers to the water (respectively oil) phase, and :

- $\phi = \phi(P)$ is the porosity at the local scale, multiplied by a volume fraction of matrix block,
- $\rho = \rho(P)$ is the density of the considered phase,
- S is the saturation of the considered phase,
- K is the permeability tensor of the considered medium,
- M is the mass mobility of the considered phase, defined as $M_p = \frac{k_{rp} \rho_p}{\mu_p}$, with $k_r = k_r(S)$ the relative permeability, and μ the viscosity,
- P is the pressure of the considered phase,
- q is the source term,
- F is the exchange term between the two media.

The two saturations S_w and S_o are related by $S_w + S_o = 1$, and P_w and P_o by the capillary pressure $Pc_w(S_w) = P_o - P_w$.

The calculation of the exchange terms F consists in calculating the exchange terms on a single matrix block, which is supposed to be representative of all the matrix blocks of the matrix simulation cell, and in multiplying this term by the number of matrix blocks on the cell.

It should be observed that the system (1) is highly non-linear, mainly due to the relative permeabilities, which can strongly vary between two adjacent cells. So the system is solved by using finite volumes, and the Newton's method. At each time step, the system is linearised with respect to pressure and saturation increments, and solved using a classical fully implicit or IMPES (Implicit in Pressure, Explicit in Saturation) scheme [Aziz and Settari, 1979].

3.2. The mixed model. As shown in the previous chapter, the representative single matrix block is sub-gridded. Thus, matrix-fracture exchanges are calculated between the fracture cell and the first matrix block sub-cell, whereas they were previously calculated between the fracture cell and the homogenized matrix block (*cf.* Fig. 4, dashed arrows). Some additional exchanges must be calculated between the adjacent sub-cells in each block (*cf.* Fig. 4, solid arrows). Calculation of fracture-fracture exchanges are not modified (*cf.* Fig. 4, dash-dotted arrows).

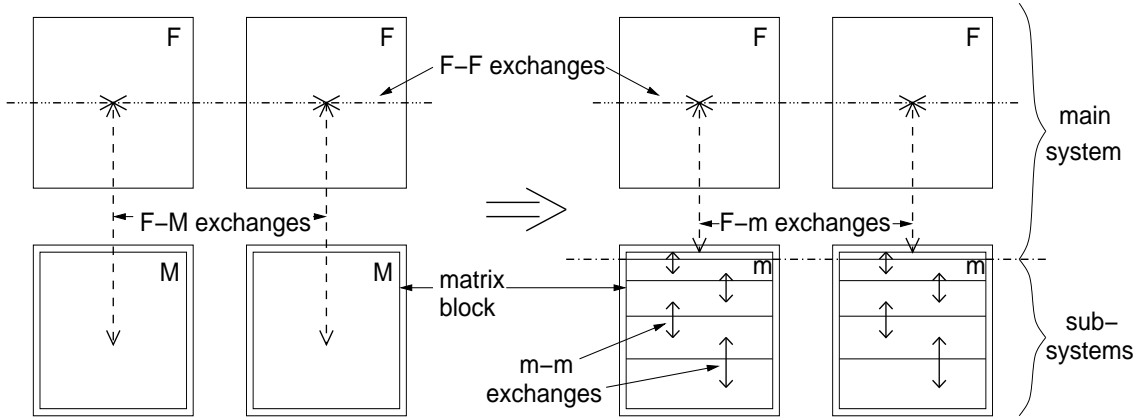


FIGURE 4. Matrix-fracture exchanges in the conventional dual-porosity case (*left*) and in the sub-gridded dual-porosity case (*right*).

The matrix-fracture exchange terms at the simulation cell scale are now formulated in our mixed model as follows:

$$F_p = N_b G(S_p^F) 2 T_{I-1(I)}^{m-F} M_{p,I-1(I)}^{m-F} (P_{p,I}^F - P_{p,1(I)}^m) \quad (2)$$

where the subscript m refers to the sub-gridded matrix medium, $p = w$ or o , I is the number of the considered fracture cell, $1(I)$ is the first matrix sub-cell (which exchanges with fissure medium) corresponding to the fracture cell I and :

- N_b is the number of matrix blocks in a matrix simulation cell,
- $G(S_p^F)$ is a function that represents the number of smothered matrix blocks,
- V is the volume of the considered cell,

- $T_{I-1(I)}^{m-F}$ is the flow transmissivity between fracture cell I and the first sub-cell $1(I)$, defined by $T_{I-1(I)}^{m-F} = \frac{K^m A^m}{l_{1(I)}}$, with A^m the flow cross-section area of the block,
- M^{m-F} is the mobility at the interface between the two media, evaluated by an upstream scheme,
- $l_{1(I)}$ is the length between the center of the sub-grid $1(I)$ and the surface A^m .

Equations describing flow between matrix sub-cells are similar to equations of system (1), but without any exchange or source term, and are solved in the same way.

In order to minimize the extra computational cost, implied by the need to solve an additional matrix system, or sub-system, for each dual-medium cell, the unknowns of this matrix system are decoupled from those of the matrix-fracture system, or main system. Practically, the main system is solved first. This resolution provides the values of pressure and saturation in fracture cells and in the first sub-cells at the considered time step. After this, each matrix system is solved independently, by using the pressure and saturation values on the first sub-cells as Dirichlet boundary conditions. This decoupling is schematically represented on Fig. 4, on the right.

3.3. First results. The modified simulator has been tested first on a single matrix block, initially filled with oil. The sub-grid of the matrix block is composed by 15 sub-cells. The associated fracture cell is full of water. Fig. 6, left, compares the reference fine-grid (solid line) and the conventional dual-porosity (dotted line) simulation results with our mixed model: our method provides very accurate results, reproducing the reference solution.

The second test, sketched in Fig. 5, involves matrix block boundary conditions changing with time: the studied cell is surrounded by two cells, an upstream one containing a water injection well, and a downstream one containing a production well. No matrix-fracture exchanges take place in those well cells. All the cells are initially saturated with oil.

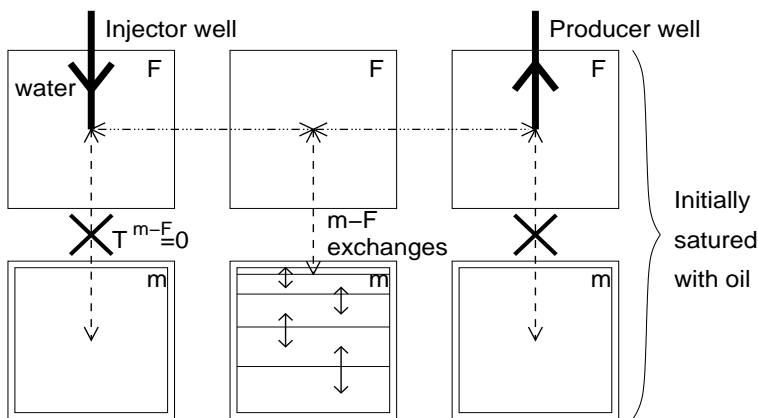


FIGURE 5. Second test case.

Once again, results obtained using the sub-gridded model are compared to a reference fine-grid and a conventional dual-porosity simulations. The results, shown in Fig. 6, on the right, are very promising. Additional tests are still in progress.

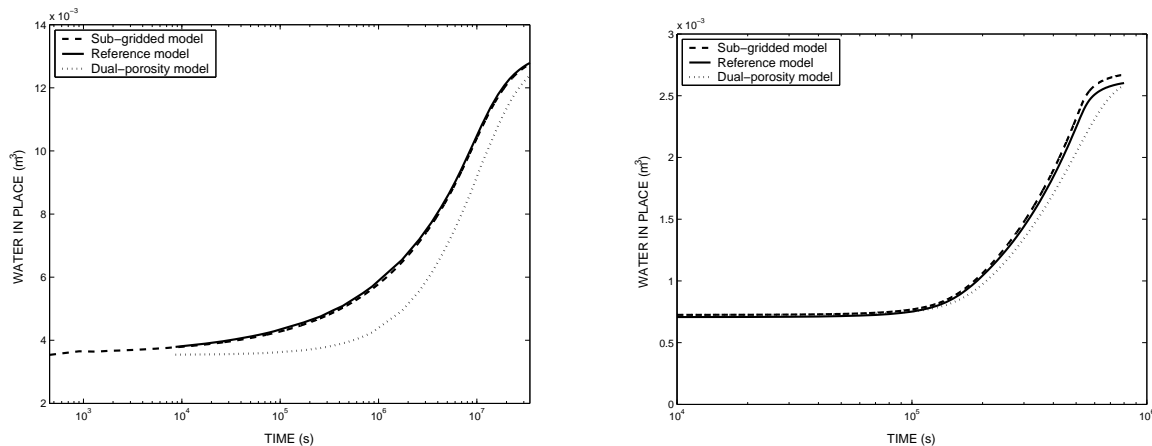


FIGURE 6. Water in place in the matrix block versus time: with fixed boundary conditions (*left*), and with non-stationary block boundary conditions (*right*).

CONCLUSIONS

This study proposes a practical and innovative method to increase the reliability of matrix-fracture exchanges when simulating flows in porous fractured media. The approach consists in the application of a mixed model for which each fracture cell of a conventional dual-medium model is coupled with a detailed sub-gridded matrix block.

The methodology described here allows the creation of an optimised one-dimensional sub-grid for capillary-driven mechanisms, derived from the study of the local saturation evolution within the blocks.

The implementation of this mixed modelling approach in a conventional dual-porosity simulator led to very accurate exchange terms. It confirms the attractive perspectives of application of this methodology to water-driven fractured porous media where the matrix-fracture exchanges have a strong impact on multiphase flows.

Further extension of this methodology concerns more complex multi-phase matrix-fracture transfers, driven by gravity and capillary forces, for instance.

REFERENCES

- Arbogast *et al.*, 1990. Arbogast T, J. Douglas, and U. Hornung (1990), Derivation of the Double-Porosity Model of Single Phase Flow via Homogenization Theory, *SIAM Journal Math. Anal.* 21(4), 823-836
- Barenblatt *et al.*, 1960. Barenblatt G.I., I.P. Zheltov, and I.N. Kochina (1960), Basic Concepts in the Theory of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks, *J. Applied Math. Mech.* (U.S.S.R.)
- Famy *et al.*, 2005. Famy C., B. Bourbiaux, and M. Quintard (2005), Accurate Modeling of Matrix-Fracture Transfers in Dual-Porosity Models: Optimal Subgridding of Matrix Blocks, paper presented at the 2005 SPE Reservoir Simulation Symposium, Houston, Texas, 31 Jan-2 Feb.
- Aziz and Settari, 1979. Aziz K. and A. Settari (1979), *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier Applied Science Publishers.
- Thomas *et al.*, 1983. Thomas L.K., T.N. Dixon, and R.G. Pierson (1983), Fractured Reservoir Simulation, *SPE Journal*.
- Warren and Root, 1963. Warren J.E. and P.J. Root (1963), The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs, *SPE Journal*, 245-255.

RESUME

La modélisation des écoulements en réservoir fracturé s'appuie généralement sur une représentation dite double-milieu. La fiabilité du calcul des transferts matrice-fissure est alors essentielle pour les prévisions de production. A l'échelle de la maille d'un simulateur double-milieu, ces transferts sont formulés en supposant un écoulement pseudo-permanent entre un bloc matriciel représentatif, non discrétisé, d'une part, et le réseau de fissures limitrophes homogénéisé d'autre part. Si elle peut suffire à estimer les échanges monophasiques, une telle formulation se révèle par contre inadaptée à la prévision des mécanismes de production polyphasiques. Cette thèse revisite une méthode de sous-maillage des blocs matriciels et l'optimise en vue de la rendre opérationnelle et intégrable aux simulateurs double-milieu tels qu'utilisés à ce jour par l'industrie pétrolière.

Sur le plan théorique, un modèle mixte a été construit en couplant le modèle d'écoulement de fracture à grande échelle à un modèle d'écoulement à l'échelle locale du bloc matriciel désormais discrétisé et non plus comme un simple terme-source.

Sur le plan pratique, la mise en œuvre de ce modèle mixte a comporté trois étapes principales, (a) la définition d'une méthode générale de discrétisation du bloc matrice réalisant le meilleur compromis entre caractère prédictif et coût de calcul, (b) la transcription numérique du couplage entre d'une part, le modèle double-milieu tel qu'utilisé actuellement et d'autre part, un modèle d'écoulement diphasique au sein du bloc matriciel maillé, (c) la validation des formules de couplage et des méthodes de résolution pour divers cas d'application qui mettent également en évidence l'impact de certaines hypothèses de travail.

Le modèle mixte proposé offre de réelles et décisives perspectives d'amélioration des simulateurs double milieu de l'industrie.

ABSTRACT

Flow modelling in fractured reservoirs is generally based upon a dual-medium representation. The reliability of matrix-fracture transfers calculation is then essential for production forecasts. At the scale of the dual-medium simulator cell, these transfers are formulated assuming a pseudo-steady-state flow between a representative, non-gridded matrix block and the homogenized adjacent fracture network. If such a formula is satisfactory to estimate single-phase exchanges, it is on the contrary inadequate for the prediction of multi-phase production mechanisms. This PhD thesis reconsiders a matrix block sub-gridding method and optimizes it in order to make it efficient and applicable in dual-medium simulators as used to date by the oil industry.

On a theoretical aspect, a mixed model was built by coupling the large-scale fracture flow model and a local-scale flow model of the matrix block that is now discretized and no more treated as a simple source term.

On a practical aspect, the implementation of this mixed model followed three main steps: (a) the definition of a general matrix-block discretizing method that ensures the best compromise between physical predictability and computing cost, (b) the numerical transcription of the coupling between the dual-medium model as used to date and a two-phase flow model of the sub-gridded matrix block, (c) the validation of the coupling formulas and of resolution methods for different application cases showing also the impact of some working assumptions.

The proposed mixed model offers real and decisive perspectives for improving the dual-medium simulators of the industry.