



THÈSE

PRESENTÉE POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École Doctorale : Transferts, Dynamique des fluides, énergétique et procédés

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES

PAR

Franck NOEL

**Simulation numérique de la formation
d'un dépôt de particules
sur une surface poreuse,
*application à la filtration d'arrêt***

Soutenue le 27 Janvier 2006 à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse :

devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	M. QUINTARD	Directeur de Recherche CNRS-IMFT
<i>Directeur de thèse :</i>	P. SCHMITZ	Professeur INSA Toulouse
<i>Rapporteurs :</i>	F. FEUILLEBOIS	Directeur de recherche CNRS-LPMMH
	B. GOYEAU	Maître de Conférence UPMC, Paris 6
<i>Examineurs :</i>	M. PRAT	Directeur de Recherche CNRS-IMFT
	M. MEIRELES	Directeur de Recherche CNRS-LGC

N° d'ordre : 2321



THÈSE

PRESENTÉE POUR OBTENIR LE TITRE DE

DOCTEUR

DE

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

École Doctorale : Transferts, Dynamique des fluides, énergétique et procédés

Spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES

PAR

Franck NOEL

**Simulation numérique de la formation
d'un dépôt de particules
sur une surface poreuse,
*application à la filtration d'arrêt***

Soutenue le 27 Janvier 2006 à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse :

devant le jury composé de :

<i>Président :</i>	M. QUINTARD	Directeur de Recherche CNRS-IMFT
<i>Directeur de thèse :</i>	P. SCHMITZ	Professeur INSA Toulouse
<i>Rapporteurs :</i>	F. FEUILLEBOIS	Directeur de recherche CNRS-LPMMH
	B. GOYEAU	Maître de Conférence UPMC, Paris 6
<i>Examineurs :</i>	M. PRAT	Directeur de Recherche CNRS-IMFT
	M. MEIRELES	Directeur de Recherche CNRS-LGC

N° d'ordre : 2321

à ma famille, à Laure

RÉSUMÉ

L'écoulement de Stokes à travers un dépôt constitué par l'empilement de particules sur une surface poreuse, rencontré en filtration, est classiquement modélisé par la loi de Darcy. Cependant, l'effet de singularités géométriques sur l'interface dépôt-surface poreuse met en défaut le modèle de Darcy lorsque la taille caractéristique des pores de la surface, est de l'ordre de la taille des grains ou des pores du dépôt (pas de séparation des échelles). Tout d'abord, lorsque la séparation des échelles est assurée, la perméabilité apparente de la couche de particules est calculée numériquement par la résolution semi-analytique de l'équation de Darcy en faisant l'hypothèse que la couche de particules a une épaisseur uniforme. Des corrélations simples sont établies entre la perméabilité apparente, la hauteur de la couche de particules et la porosité de la paroi filtrante.

Ensuite, pour s'affranchir de l'hypothèse d'épaisseur uniforme, l'accumulation progressive des particules sur la surface poreuse a été simulée. Aux temps courts, les résultats mettent en évidence, pour un même volume déposé et une même porosité de paroi, une perméabilité apparente plus faible que dans le cas d'une couche de particules d'épaisseur uniforme. Aux temps longs, les perméabilités apparentes des dépôts uniforme et non uniforme sont identiques.

Puis, une étude comparative des modèles de Brinkman et de Stokes pour calculer la perméabilité apparente d'un empilement régulier de cylindres a été effectuée. La résolution des équations de Stokes a été réalisée par une méthode originale d'éléments frontières spectraux. Contrairement à la perméabilité apparente évaluée par le modèle de Darcy, la perméabilité apparente évaluée avec le modèle de Brinkman est sensible à la compacité du dépôt. Elle rend compte notamment de la compétition entre la résistance hydraulique due aux particules et celle due au frottement sur la paroi.

Finalement, lorsqu'il n'y a pas séparation des échelles, la modélisation de la formation d'un dépôt de particules sphériques a été mise en oeuvre par la simulation de la formation de la formation d'un dépôt en trois dimensions par l'équation de Brinkman. Cette méthode consiste à lâcher une par une des particules dans le domaine. Les particules suivent les lignes de courant jusqu'à leur immobilisation lorsqu'elles entrent en contact avec la paroi ou une autre particule déjà déposée. L'écoulement, dans le domaine fluide faiblement concentré en particules et au sein de la couche de particules déposées, est recalculé par l'équation de Brinkman après chaque dépôt de particule. Cette approche semble être un bon compromis entre les approches simplistes du point de vue hydrodynamique et les approches plus rigoureuses de type simulation numérique directe car elle permet de prendre en compte l'influence des particules sur l'écoulement. L'étude préliminaire a permis d'évaluer l'influence de la taille des particules et des pores de la paroi sur des paramètres macroscopiques telle que l'évolution du débit en fonction du volume déposé, de la compacité moyenne du dépôt et de l'efficacité de filtration.

Mots-Clés : perméabilité apparente, filtration, couche poreuse, particules, loi de Darcy, équations de Stokes, équation de Brinkman, méthodes intégrales.

ABSTRACT

Stokes flow through a porous layer backed by a perforated plate, met in filtration, is classically modeled by the Darcy's law. However, the effect of geometrical singularities on the interface porous layer-perforated plate puts the Darcy's model in wrong when the characteristic size of the perforations, is about the size of the grains or the of the pores of the deposit (no separation of the scales).

When *there is separation of the scales*, the apparent permeability of the layer of particles is numerically calculated by the semi-analytical resolution of the Darcy's equation by making the assumption that the layer of particles has a uniform thickness. Simple correlations are established between the apparent permeability, the height of the particles layer and the porosity of the perforated plate. Then, to free ourselves from the assumption of uniform thickness, the progressive accumulation of the particles on porous surface was simulated. For the same deposited volume and the same porosity of the perforated plate, the apparent permeability is weaker than in the case of a porous layer of uniform thickness. The apparent permeabilities of the uniform and nonuniform deposits tend to be identical when the porous layer is sufficiently thick.

When *there is not separation of the scales*, a comparative study of the models of Brinkman and Stokes to compute the apparent permeability of an array of cylinders was carried out. The Stokes equations was solved by an original method of circular boundary elements. It was shown that the apparent permeability evaluated with the model of Brinkman is sensitive to the compactness and the radius of the particles contrary to the apparent permeability evaluated by the Darcy's model. The competition between hydraulic resistance due to the particles and friction of the wall is taken into account.

The modeling of the formation of a deposit of spherical particles was modeled by the Brinkman's model. Particles enter one by one in th computation domain. The particles follow the stream lines until they stopped when they come into contact with the wall or another already deposited particle. The flow field slightly concentrated in particles the and within the layer of deposited particles, is recomputed by the equation of Brinkman after every deposition of particle. This approach seems to be a good compromise between the simplistic approaches from the hydrodynamic point of view and the more rigorous approaches of direct numerical simulation type because it makes it possible to take into account the influence of the particles on the flow. It was possible to evaluate the influence of the size of the particles and the pores of the perforated plate on macroscopic parameters such as the evolution of the flow according to deposited volume, of the average compactness of the deposit and the effectiveness of filtration.

Keywords : apparent permeability, filtration, porous layer, particles, Darcy's law, Stokes' equations, Brinkman's equations, Integral methods.

La science ne cherche pas à énoncer des vérités éternelles ou des dogmes immuables ;
loin de prétendre que chaque étape est définitive et qu'elle a dit son dernier mot,
elle cherche à cerner la vérité par approximations successives.
(Bertrand Russel)

La meilleure façon de ne pas avancer est de suivre une idée fixe.
(Jacques Prévert)

REMERCIEMENTS

Les 4 années que j'ai passé au sein du Groupe d'Étude sur les Milieux Poreux à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse ont été pour moi une source d'enrichissement aussi bien professionnel que personnel. Pour cela, je tiens à remercier très chaleureusement, mon directeur de thèse, Philippe Schmitz et Marc Prat pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en me confiant ce sujet de thèse et leur soutien sans faille dans les moments difficiles. Je tiens également à remercier Michel Quintard pour m'avoir fait partager ses connaissances et m'avoir fait l'honneur de présider le jury qui a validé ce travail. François Feuillebois et Benoît Goyeau ont accepté d'être rapporteurs, leurs remarques constructives et leurs corrections minutieuses m'ont apporté une vision extérieure et un recul appréciable. Je remercie Martine Meireles pour les corrections qu'elle a apportées au manuscrit ainsi que pour ses remarques très enrichissantes présentant des perspectives de recherches très intéressantes.

Les conseils techniques très amicalement prodigués par Marc Bonnet sur les éléments frontières m'ont permis d'acquérir des connaissances essentielles sur ce sujet et de mener à bien les simulations numériques du deuxième chapitre. Jérôme Dufrêche, mon prédécesseur sur ce sujet, m'a très gentiment apporté toute l'aide nécessaire afin de prendre en main le code de calcul Stokes éléments frontières 2D.

La solidarité entre doctorants et l'enthousiasme très remarquable au sein du GEMP m'ont permis d'acquérir l'essentiel des connaissances théoriques sur les milieux poreux et techniques en simulation numérique. Nicolas Puiroux a su, durant sa thèse, me communiquer ainsi qu'à beaucoup de thésards ses connaissances en méthodes numériques et aider efficacement et amicalement dans la mise au point de codes de calculs. Fabrice Golfier m'a apporté une aide théorique et technique décisive concernant les problématiques des chapitres 3 et 4. Les longues discussions que j'ai eues avec Vincent Pavan m'ont fait découvrir des domaines des mathématiques dont je ne soupçonnais pas l'existence.

Je remercie les stagiaires d'écoles d'ingénieur, Laurent Benezech (ENSEEIH) ainsi que Juan Carlos Garcia Hernandez (INSA Toulouse), pour leur contribution à la mise au point des codes de calcul.

Je remercie Gérard Leblanc, Gilles Martin et Yannick Exposito, du Service Informatique, ainsi que Murielle Sabater et Gwenaëlle Hareau, du service Reproduction, pour leur disponibilité et leur efficacité.

Ma gratitude va également à M. Faux, M. Delmas, M. Lachaise, Jean Batina, Serge

Blancher, René Creff, René Peyrous, Bernard Held et Jean-Francis Loiseaux qui m'ont communiqué leur goût pour les sciences physiques et la recherche.

La "team filtration" composée de Kader, Oxa, Philippe et Mehdi a été très enrichissante du point de vue humain et professionnel avec une mention spéciale à Kader pour m'avoir supporté pendant toute sa thèse dans notre bureau.

Je remercie Kader, Bruno, XS, XR, Seb, Philippe, Farfa, Olivier, Bletz, Damien, Pauline, Xabart, Laurent R., Typhaine, Frédérique, David, Mehdi, Pascal, Mamour, Caro, M.C. Labat, Laurette pour tous ces moments sympas qui m'ont fait aimer Toulouse. Les soirées à la Paillote et au bar pop ont été des moments indispensables pour la décompression afin d'obtenir une productivité scientifique optimale. La soirée des 60 ans de finesse restera dans les annales grâce au superbe plongeon de XS dans la haie de thuyas et au blind test mémorable improvisé par Bruno à 5h du matin.

Je tiens à remercier Sébastien M.L. pour le soutien moral et l'enthousiasme communicatif qu'il m'a apporté durant toutes mes études.

Bien qu'il soit difficile d'exprimer avec de simples mots tout ce que je leur dois, je remercie Laure pour sa présence et son soutien quotidien, mes frères Patrick et Bertrand pour leurs encouragements, et mes parents pour m'avoir soutenu et encouragé tout au long de mes études.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction générale</i>	19
 <i>partie I Dépôt avec séparation des échelles</i>	 25
1. <i>Perméabilité apparente d'une couche de particules homogène et uniforme</i>	27
1.1 Introduction	27
1.2 Position du problème	28
1.3 Perméabilité apparente	35
1.3.1 Notion de perméabilité apparente	35
1.3.2 Calcul de la réduction de perméabilité	36
1.4 Résultats numériques	36
1.4.1 Convergence des résultats	36
1.4.2 Résultats pour le pore carré	39
1.4.3 Résultats pour le pore rond	43
1.5 Représentation des résultats numériques	43
1.5.1 Modèle couche mince	44
1.5.2 Modèle couche épaisse	45
1.5.3 Modèle couches d'épaisseur intermédiaire	48
1.5.4 Validité des modèles approchés de calcul de réduction de perméabilité	51
1.6 Comparaison par rapport aux résultats du modèle en 2 dimensions	53
1.7 Applications	56
1.7.1 Cinétique de colmatage	56
1.7.2 Filtre à particules diesel	66
1.8 conclusion	69
 2. <i>Modélisation de la formation d'un dépôt non uniforme</i>	 73
2.1 Introduction	73
2.2 Modèle de colmatage	75
2.2.1 Hypothèses de modélisation	75
2.2.2 Modélisation de l'évolution de la forme du dépôt	76
2.3 Calcul du champ de pression à l'intérieur du dépôt	80
2.3.1 Mise en équation du problème	80
2.3.2 Discrétisation et résolution par la méthode des éléments de frontières	81
2.4 Simulation de la formation du dépôt	83
2.4.1 Description de l'algorithme de formation de dépôt.	83
2.4.2 Réduction de perméabilité d'un dépôt non uniforme	87
2.5 Cinétique de colmatage	97
2.6 Conclusion	102

<i>partie II Dépôt sans séparation des échelles</i>	105
3. <i>Dépôt bi-dimensionnel uniforme</i>	107
3.1 Introduction	107
3.2 Équation de Brinkman	107
3.3 Écoulement à travers une couche de particules dans une conduite (caractérisation de la viscosité effective)	109
3.3.1 Présentation du problème	109
3.3.2 Résolution du problème de Brinkman équivalent	111
3.3.3 Résolution du problème de Stokes par éléments frontières	113
3.3.4 Comparaison des modèles Stokes, Brinkman et Darcy	121
3.4 Écoulement à travers une couche de particules limitée par une paroi perforée.	126
3.4.1 Présentation du problème	126
3.4.2 Problème de Brinkman équivalent	127
3.4.3 Résultats	128
3.5 Conclusion	142
4. <i>Modélisation tri-dimensionnelle de la formation d'un dépôt</i>	143
4.1 Introduction	143
4.1.1 Modélisation de la formation d'une couche de particules	143
4.1.2 Revue des méthodes de simulation du transport de particules à faible nombre de Reynolds	146
4.1.3 Approches proposées	147
4.2 Modèle de la formation de la couche de particules	148
4.2.1 Modélisation de la paroi filtrante	148
4.2.2 Algorithme de formation de la couche de particules	150
4.3 Résultats des simulations	153
4.3.1 Etude de la sensibilité au maillage	153
4.3.2 Résultats et discussion	161
4.4 Conclusion	166
<i>Conclusion générale</i>	167
<i>Bibliographie</i>	171
<i>Annexe</i>	177
A. <i>Réduction de perméabilité pour le pore rond</i>	179
B. <i>Résolution de l'équation de Laplace par la méthode des éléments de frontière</i>	181
B.1 Formulation intégrale de l'équation de Laplace	181
B.2 Solution élémentaire de l'équation de Laplace	182
B.3 Équations intégrales de frontière	183
B.4 Calcul des intégrales de frontière	183

B.5	Validation du code élément frontière	187
C.	<i>Calcul des champs internes de vitesse et de pression à partir de la solution frontière</i>	191
C.1	Calcul du champ de pression	191
C.2	Calcul du champ de vitesse	193
D.	<i>Résolution des équations de Brinkman par la méthode des volumes finis</i>	197
D.1	Méthode du prédicteur correcteur	197
D.2	Algorithme de Uzawa	198
D.3	Discrétisation du problème par la méthode des volumes finis	199
D.3.1	Discrétisation du problème de Darcy	199
D.3.2	Discrétisation du problème de Brinkman	201

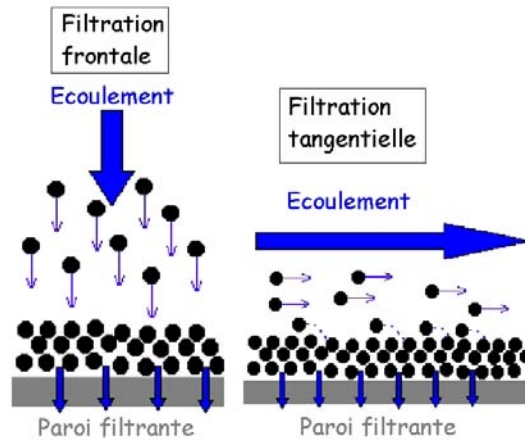
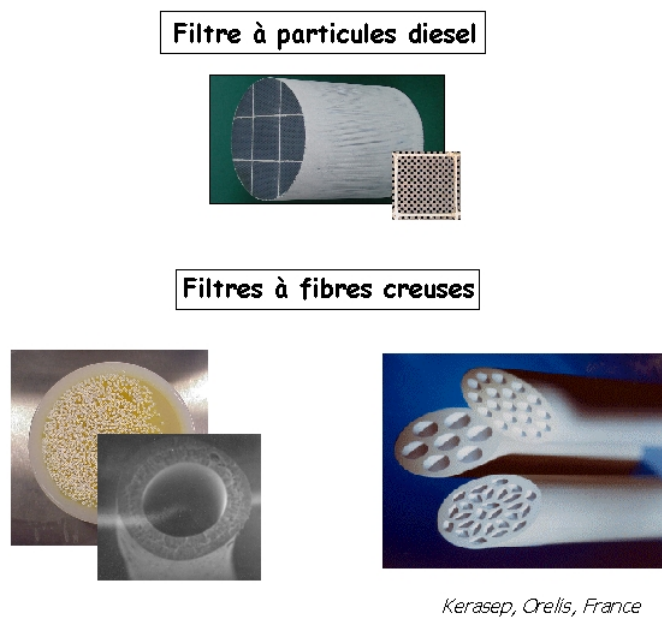


Fig. 0.2: Classification des différents types de filtration.

tangentiellement à la paroi et le fluide, débarrassé de ses particules polluantes, est évacué perpendiculairement à la paroi. Les filtres mettant en oeuvre ce type de technique (par exemple, filtres à particules diesel, filtres à fibres creuses : Cf. figure 0.3) présente l'avantage, d'une part, pour une même surface filtration d'être beaucoup moins encombrant et d'autre part, de limiter le colmatage de la surface par la présence d'un cisaillement au niveau de la paroi.



Kerasep, Crellis, France

Fig. 0.3: Exemples de filtres mettant en oeuvre la filtration tangentielle.

Quelque soit le type ou la technique de filtration employé, le colmatage du filtre (accumulation des particules sur la paroi filtrante) s'accompagne d'une augmentation de la résistance hydraulique de l'ensemble du système (dépôt de particules + paroi). Une technique de calcul

de cette résistance, souvent employée, consiste à additionner la résistance de la paroi sans particule et celle du dépôt. Cette approximation est valable lorsque la couche de particules est grande devant la taille des pores de la paroi filtrante et la taille des particules faible devant le diamètre des pores mais est imprécise dans le cas contraire. Ce calcul ne tient pas compte, d'une part, de la modification de l'écoulement par les pores de la paroi qui augmente la résistance hydraulique par l'allongement des lignes de courant et d'autre part du caractère discret des particules lorsque la taille des particules est comparable à celle du pore.

La détermination précise de la résistance hydraulique totale du système paroi + dépôt nécessite la connaissance détaillée de la structure de l'écoulement au niveau du pore de la paroi. Suivant la taille relative des particules par rapport aux pores de la paroi, on peut distinguer 2 cas. Si la taille caractéristique des particules est faible devant la taille du pore de la paroi (séparation des échelles), l'écoulement au sein du milieu poreux peut alors être modélisé, dans le cas où la vitesse à l'échelle des pores du dépôt n'est pas trop grande, par des équations moyennées de type Darcy ou Brinkman (Cf. figure 0.4). Dans le cas où la taille des particules est de l'ordre de la taille du pore de la paroi (pas de séparation des échelles), l'écoulement et le transport des particules doivent être directement calculés à partir des équation de Stokes

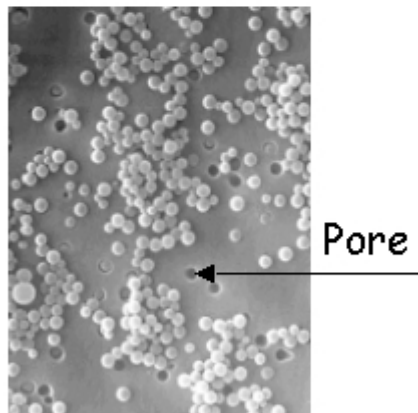
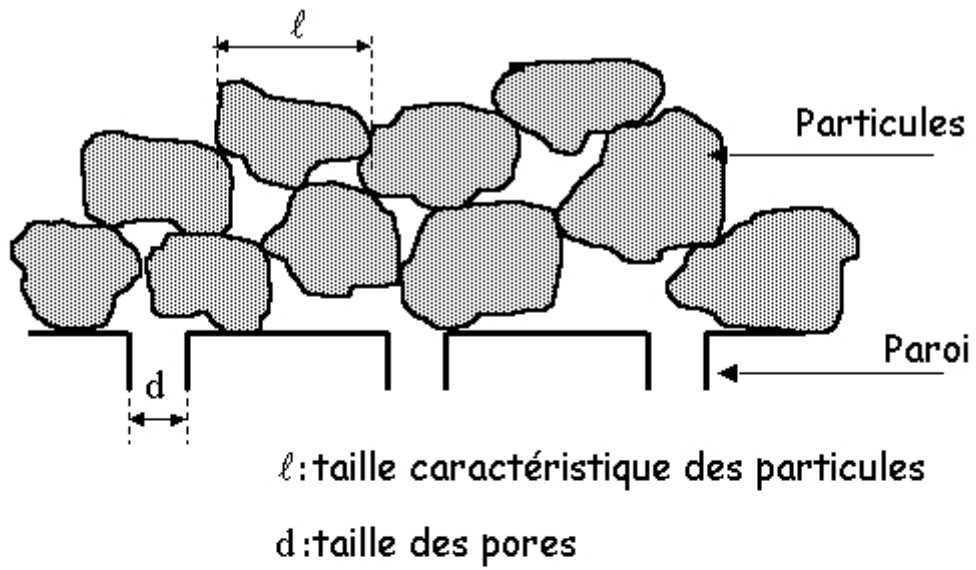
Ainsi les deux objectifs principaux de cette thèse sont, d'une part, de calculer la perméabilité apparente d'une couche de particules et d'autre part, de modéliser la formation du dépôt au cours du temps au niveau du pore de la paroi. Cette étude se fait dans le cadre où il n'y a pas séparation des échelles et dans le cas où il y a séparation des échelles (en nous limitant au cas où la taille des particules est très petite devant la taille du pore).

Plan du mémoire.

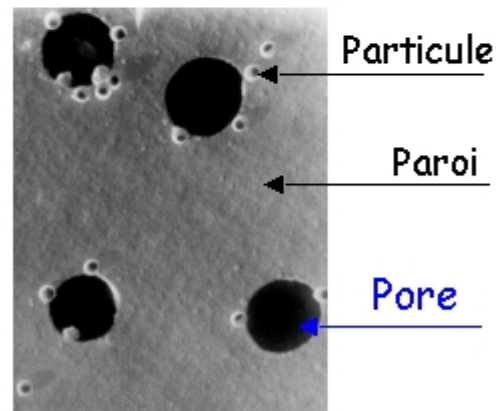
Ce mémoire comporte 2 parties.

La première partie, composée des 2 premiers chapitres, est consacrée à l'étude de l'écoulement tri-dimensionnel à travers une couche de particules limitée par une paroi filtrante lorsqu'il y a séparation des échelles.

Le but du premier chapitre est de calculer numériquement par une méthode semi-analytique la perméabilité apparente d'un dépôt d'épaisseur uniforme en fonction de la taille du dépôt et de la porosité de la paroi. En s'inspirant des travaux analytiques du calcul de la perméabilité apparente d'un dépôt bi dimensionnel, nous établissons des corrélations à partir des résultats numériques pour le cas 3D. Nous analysons ensuite les apports de la modélisation tri dimensionnelle par rapport à la modélisation bi dimensionnelle. Ensuite nous appliquons les résultats des calculs de la perméabilité apparente à deux applications : l'évolution de l'épaisseur d'un dépôt au cours du temps et l'évaluation de la perte de charge



Pas de separation
des échelles
 $l \approx d$



Séparation des
échelles
 $l \ll d$

Fig. 0.4: Tailles caractéristiques du système dépôt + particules.

induite par la formation d'une couche de particules de suie qui se forme sur les parois d'un filtre à particules diesel.

Le second chapitre porte sur la modélisation tri-dimensionnelle par la méthode des éléments frontières de la formation d'un dépôt non uniforme lorsqu'il y a séparation des échelles. Le but de ce chapitre est d'une part de modéliser l'accumulation non uniforme des particules (en fonction de la concentration de la solution en particules, de la porosité du dépôt, de la taille des particules et de la porosité de la paroi) sur la paroi et d'en évaluer l'impact sur la réduction de perméabilité et l'évolution du volume du dépôt en fonction du temps.

La seconde partie, composée des 2 derniers chapitres, porte sur la modélisation d'un dépôt de particules lorsqu'il n'y a plus séparation des échelles.

Le troisième chapitre évalue, dans le cadre de la modélisation d'un dépôt bi-dimensionnel, la précision du calcul de la perméabilité apparente avec les modèles de Brinkman et Darcy par rapport à un calcul direct de Stokes (effectué par une méthode d'élément frontière) pour différents rapports entre la taille des particules et la taille du pore de la paroi.

Le quatrième chapitre est consacré à la modélisation tri-dimensionnelle de la formation d'un dépôt lorsqu'il y a séparation des échelles. La partie fluide (faiblement concentrée en particules dans le cadre de cette étude) et le dépôt de particules sont modélisés par une seule équation : l'équation de Brinkman. Une étude de la morphologie du dépôt et de la variation temporelle du débit en fonction de la taille des pores de la paroi, de la taille des particules est proposée. Enfin on présente une étude préliminaire de l'efficacité de filtration pour une taille de pore donnée en fonction du rapport entre la taille des particules et la taille du pore.

Enfin nous concluons et présentons des perspectives de recherche.

Première partie

DÉPÔT AVEC SÉPARATION DES ÉCHELLES

1. PERMÉABILITÉ APPARENTE D'UNE COUCHE DE PARTICULES HOMOGÈNE ET UNIFORME

1.1 Introduction

Dans la majorité des systèmes filtrants, il est nécessaire de déterminer la variation du débit (à pression imposée) ou de la différence de pression (à débit imposé) en fonction des divers paramètres caractérisant la surface filtrante et le dépôt de particules. En déterminant la porosité de la surface filtrante, par exemple, par examen microscopique, et la perméabilité de la couche de particules, on cherche à évaluer le débit en fonction de la différence de pression imposée [Oxa04], [Ben05] (Cf. figure 1.1).

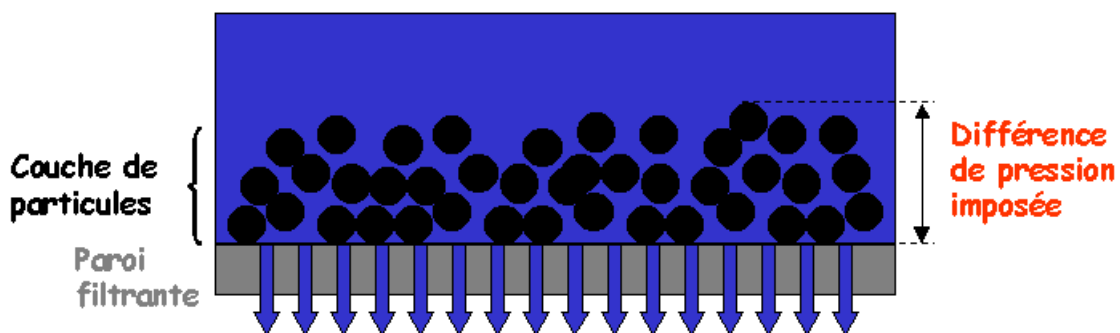


Fig. 1.1: Schéma d'une paroi filtrante colmatée par une couche de particules.

Une première approche consiste à considérer la paroi filtrante et la couche de particules déposées comme 2 résistances hydrauliques en série [RK00], [Civ98], [KH02], ainsi on écrit :

$$\delta P = \frac{\mu}{S} (R_c + R_m) Q$$

δP : différence de pression

μ : viscosité du fluide

S : surface de contact entre le haut de la couche de particules et le fluide

R_m : résistance hydraulique de la membrane

R_c : résistance hydraulique de la couche de particules

Q : débit du fluide

Cependant, cette approche sous-entend une variation linéaire de la pression avec la hauteur de la couche de particules, pour un gradient de pression uniforme, ce qui n'est pas le cas pour les couches de faible épaisseur. En effet, les lignes de courant au voisinage du pore se courbent entraînant une augmentation significative de la résistance hydraulique du système du fait de la non uniformité du champ de pression. Ceci a été démontré dans le cadre d'une modélisation du système en 2 dimensions. Lorsqu'il y a séparation des échelles entre la taille des particules et la taille des pores une formulation analytique de la réduction de perméabilité a pu être obtenue à l'aide des transformations conformes [DPSS02], [Pav04]. Dans le cas où la taille des particules est comparable à celle des pores, le calcul systématique de la réduction de perméabilité, d'un empilement régulier de particules sur une paroi perforée, en fonction de la compacité et de la taille de la couche de particules a été réalisé à l'aide de la méthode des éléments de frontière [Duf00]. Cependant ces derniers travaux ne tiennent pas compte de l'aspect tri-dimensionnel de l'écoulement et de la géométrie (Cf. figure 1.2).

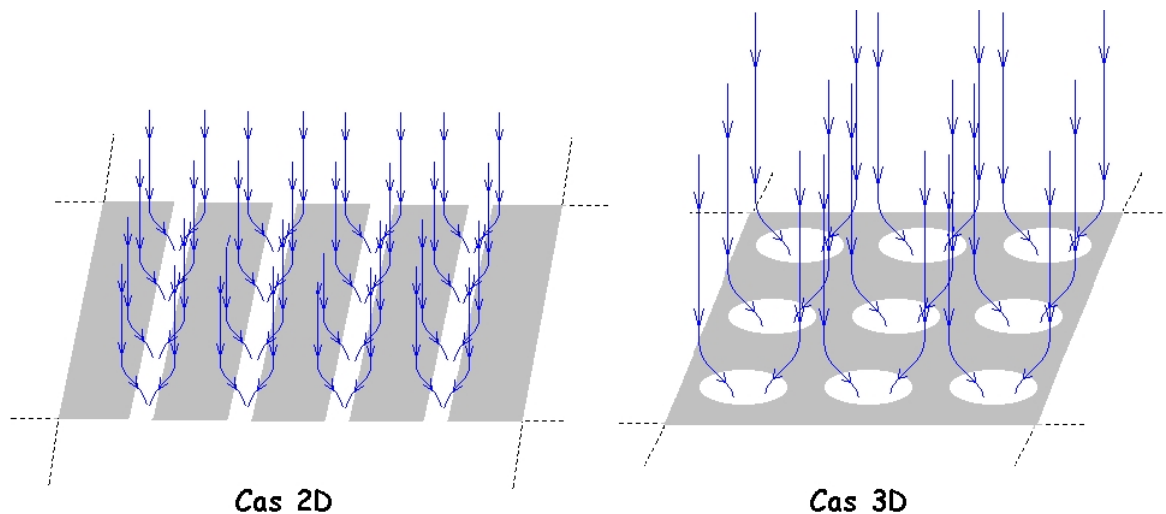


Fig. 1.2: Représentation des lignes de courant à l'intérieur d'une couche poreuse limitée par une paroi perforée.

Le but de ce chapitre est donc d'évaluer la réduction de perméabilité dans le cas de la couche de particules en géométrie tri-dimensionnelle.

1.2 Position du problème

Afin de modéliser la couche de particules sur une surface filtrante, on considère que le système à modéliser est constitué d'une paroi perforée sur laquelle repose une couche poreuse

homogène et uniforme. On suppose que la paroi est constituée de pores identiques répartis périodiquement suivant un arrangement carré (Cf. figure 1.3). Cette dernière simplification permet de limiter l'étude de l'écoulement à un élément unitaire représentatif de la paroi perforée, constitué d'une paroi comportant un seul pore, muni de conditions aux limites périodiques. De plus la forme du pore est supposée carrée afin de simplifier les calculs analytiques présentés plus loin. Cette approximation sera justifiée et discutée par la suite.

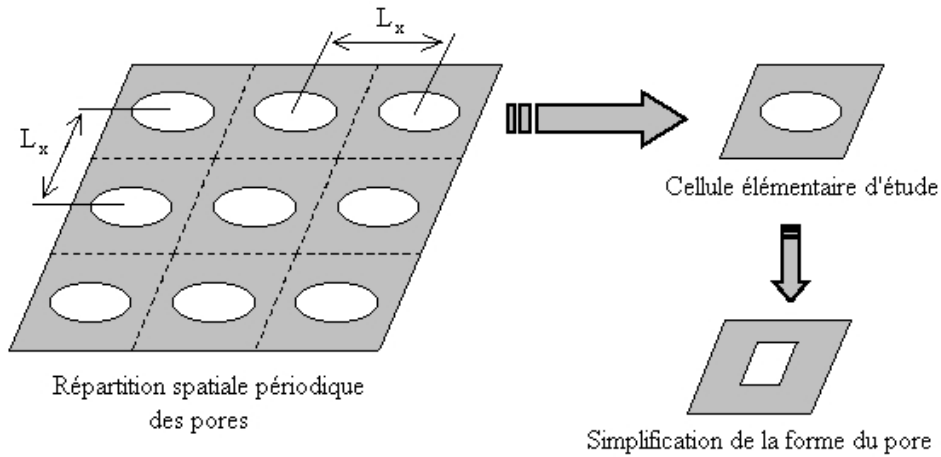


Fig. 1.3: Modélisation de la surface filtrante

On considère que la couche poreuse est homogène (on néglige donc ici les éventuelles variations de porosité et de perméabilité dues à la proximité de la paroi ou au processus de dépôt), isotrope et uniforme, d'épaisseur L_z (Cf. figure 1.4), sur toute la plaque perforée. Si l est la taille caractéristique des particules constituant la couche poreuse, l'écoulement d'un fluide incompressible à travers ce milieu poreux est régi par l'équation de Darcy si $Re \ll 1$ et si les hypothèses de séparation d'échelle $l \ll d_x$ et $l \ll L_z$ sont vérifiées. Le nombre de Reynolds est défini par $\frac{V_d l \rho}{\epsilon \mu}$. V_d est la vitesse de filtration, ϵ la porosité et μ la viscosité dynamique et ρ la masse volumique du fluide. Les équations régissant l'écoulement à l'intérieur de la couche de particules sont donc :

$$\vec{v} = \frac{K_i}{\mu} \vec{\nabla} P \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.2)$$

K_i est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux, μ la viscosité dynamique du fluide et P le champ de pression à l'intérieur de la couche de particules.

Étant donné que K_i est homogène et isotrope, le problème consiste à calculer un champ de pression harmonique à l'intérieur du domaine :

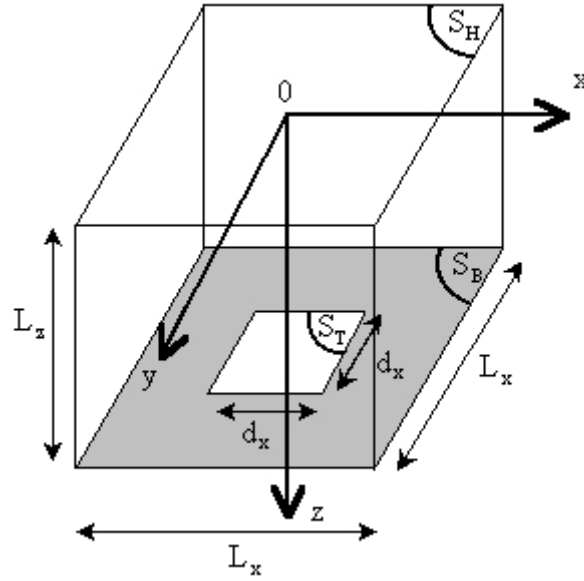


Fig. 1.4: Modélisation de la couche de particules sur la paroi filtrante

$$\Delta P = 0 \quad (1.3)$$

On considère que la pression est uniforme sur le haut de la couche de particules (surface $S_H : P = P_0$) et sur le pore (surface $S_T : P = P_1$). L'expérience montre que ce type de conditions aux limites permet de mieux prédire l'écoulement à l'intérieur de la couche de particules [Duf00]. Compte tenu des symétries de la cellule unitaire, les conditions aux limites périodiques sur les autres frontières ($x = \pm \frac{L_x}{2}$ et $y = \pm \frac{L_x}{2}$) sont traduites par un flux nul dans le cas du problème de Laplace :

$$\vec{\nabla} P \cdot \vec{n} = 0 \quad (1.4)$$

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\Delta P = 0 \quad (1.5)$$

$$P = P_0 \text{ en } \forall (x, y) \in S_H \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ en } x = \pm \frac{L_x}{2} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ en } y = \pm \frac{L_x}{2} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0, \forall (x, y) \in S_B \quad (1.9)$$

$$P = P_1, \forall (x, y) \in S_T \quad (1.10)$$

Si on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$x = x' \frac{L_x}{2}, y = y' \frac{L_x}{2}, z = z' \frac{L_x}{2}, L_z = L_z^* \frac{L_x}{2} \quad (1.11)$$

$$\Theta = \frac{P - P_0}{P_1 - P_0} \quad (1.12)$$

Le problème étant symétrique par rapport aux plans ($x = 0$) et ($y = 0$), le système (1.5) à (1.6) se réécrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z'^2} = 0 \quad (1.13)$$

$$\Theta(z' = 0) = 0, x' \leq 1, y' \leq 1 \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x'}(x' = 0 \text{ ou } 1) = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y'}(y' = 0 \text{ ou } 1) = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z' = \frac{2L_z}{L_x}) = 0, z = 0, \frac{d_x}{L_x} \leq x' \leq 1, \frac{d_x}{L_x} \leq y' \leq 1, \quad (1.17)$$

$$\Theta(z' = \frac{2L_z}{L_x}) = 1, x' \leq \frac{d_x}{L_x}, y' \leq \frac{d_x}{L_x} \quad (1.18)$$

Les conditions aux limites sont toutes homogènes sauf une, on peut donc appliquer la méthode de séparation des variables. Ceci conduit à écrire la pression de la manière suivante :

$$P(x', y', z') = X(x')Y(y')Z(z') \quad (1.19)$$

L'équation (1.13) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx'^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy'^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz'^2} = 0 \quad (1.20)$$

On montre facilement que l'équation aux dérivées partielles (1.20) est équivalente à un

système d'équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d^2 X}{dx'^2} + \alpha^2 X = 0 \quad (1.21)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy'^2} + \beta^2 Y = 0 \quad (1.22)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz'^2} + (\alpha^2 - \beta^2)Z = 0 \quad (1.23)$$

α et β sont des constantes réelles, arbitraires, déterminées à l'aide des conditions aux limites. En introduisant les conditions aux limites (1.14) à (1.16) on prouve que la solution générale du système (1.13) à (1.16) s'exprime à l'aide d'une série de fonctions :

$$\Theta(x', y', z') = K_{00}z' + \sum_{i,j}^{\infty} K_{ij} \cos(i\pi x') \cos(j\pi y') \sinh(\gamma_{i,j} z') \quad (1.24)$$

$$\gamma_{i,j} = \pi \sqrt{i^2 + j^2} \quad (1.25)$$

Les coefficients K_{ij} de la série ne peuvent être déterminés à l'aide de la technique de projection classique car les conditions aux limites (1.18) et (1.17) sont mixtes sur la frontière ($z = 0$) (flux nul sur la paroi et pression uniforme imposée dans le pore). Pour cela on introduit la fonctionnelle E_r :

$$E_r = \int_{S_1} (\Theta(z' = \frac{2L_z}{L_x}) - 1)^2 + \int_{S_2} (\frac{\partial \Theta}{\partial z'}(z' = \frac{2L_z}{L_x}) - 0)^2 \quad (1.26)$$

Les surfaces S_1 et S_2 sont décrites sur la figure 1.5.

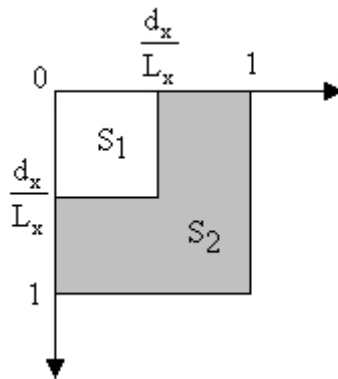


Fig. 1.5: Description des surfaces S_1 et S_2 .

Les coefficients sont calculés de telle manière que, en tronquant la série (1.24) à l'ordre N , E_r soit minimale. En introduisant l'expression du champ de pression (1.24) dans (1.26)

E_r peut s'écrire comme une forme quadratique :

$$E_r = \frac{1}{2} K_{ij} A_{ijkl} K_{kl} + B_{ij} K_{ij} + \frac{d_x^2}{L_x^2} \quad (1.27)$$

Les matrices A et B ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_{klmn} &= \int_{x=0}^{\frac{d_x}{L_x}} \int_{y=0}^{\frac{d_x}{L_x}} F_{klmn}(x, y, z) F_{klmn}(x, y, z) dx dy \\ &+ \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 G_{klmn}(x, y, z) G_{klmn}(x, y, z) dx dy \\ &- \int_{x=0}^{\frac{d_x}{L_x}} \int_{y=0}^{\frac{d_x}{L_x}} G_{klmn}(x, y, z) G_{klmn}(x, y, z) dx dy \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$B_{mn} = \int_{x=0}^{\frac{d_x}{L_x}} \int_{y=0}^{\frac{d_x}{L_x}} F_{mm}(x, y) dx dy \quad (1.29)$$

avec :

$$\text{Si } (i, j) \neq (0, 0) \begin{cases} F_{klmn}(x, y, z) = \cosh(\gamma_{i,j} \delta) \cos(i\pi x) \sin(i\pi y) \\ G_{klmn}(x, y, z) = \gamma_{i,j} \sinh(\gamma_{i,j} \delta) \cos(i\pi x) \sin(i\pi y) \end{cases}$$

$$\text{Si } (i, j) = (0, 0) \begin{cases} F_{klmn}(x, y, z) = \delta \\ G_{klmn}(x, y, z) = 1 \end{cases}$$

$$\delta = \frac{2L_z}{L_x}$$

Étant donné que A est symétrique ($A_{klmn} = A_{mnlk}$), si cette dernière est définie positive alors la fonction E_r est minimale si les coefficients de la série vérifient le système linéaire suivant :

$$A_{ijkl} K_{kl} = B_{ij} \quad (1.30)$$

Afin d'obtenir un bon conditionnement pour la matrice A_{ijkl} on introduit le changement de variable suivant :

$$\Gamma_{kl} = e^{\gamma_{kl}\delta} K_{kl} \quad (1.31)$$

Si $(m, n) \neq (0, 0)$ et $(k, l) \neq (0, 0)$ le système (1.30) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(1 - e^{-2\gamma_{kl}\delta})(1 - e^{-2\gamma_{mn}\delta})a_{klmn} \\ & + \gamma_{kl}\gamma_{mn}(1 + e^{-2\gamma_{kl}\delta})(1 + e^{-2\gamma_{mn}\delta})(a_{klmn} + b_{klmn})] \Gamma_{kl} \\ & = (1 - e^{-2\gamma_{mn}\delta})c_{mn} \end{aligned} \quad (1.32)$$

Les intégrales $a_{k,l,m,n}$, $b_{k,l,m,n}$ et $c_{k,l,m,n}$ ont les formes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{klmn} &= \int_0^{\frac{d_x}{L_x}} \cos(k\pi x) \cos(m\pi x) dx \int_0^{\frac{d_x}{L_x}} \cos(l\pi y) \cos(n\pi y) dy \\ b_{klmn} &= \int_0^1 \cos(k\pi x) \cos(m\pi x) dx \int_0^1 \cos(l\pi y) \cos(n\pi y) dy \\ c_{mn} &= \int_0^{\frac{d_x}{L_x}} \cos(k\pi x) \cos(m\pi x) dx \int_0^{\frac{d_x}{L_x}} \cos(l\pi y) \cos(n\pi y) dy \end{aligned} \quad (1.33)$$

Si $(m, n) = (0, 0)$, la première ligne du système s'écrit :

$l \neq 0$ et $k \neq 0$

$$\frac{1}{2kl\pi^2} [\delta(1 - \gamma_{kl}\delta) + \gamma_{kl}(1 - e^{\gamma_{kl}\delta})] \sin(k\pi \frac{d_x}{L_x}) \sin(l\pi \frac{d_x}{L_x}) \Gamma_{kl} = B_{kl}$$

$l = 0$ et $k \neq 0$

$$\frac{1}{2k\pi} \left[\frac{\delta d_x}{L_x} (1 - e^{-2\gamma_{k0}\delta}) - (1 - \frac{d_x}{L_x} \gamma_{k0})(1 + e^{-2\gamma_{k0}\delta}) \right] \sin(k\pi \frac{d_x}{L_x}) = B_{k0}$$

$k = 0$ et $l \neq 0$

$$\frac{1}{2l\pi} \left[\frac{\delta d_x}{L_x} (1 - e^{-2\gamma_{0l}\delta}) - (1 - \frac{d_x}{L_x} \gamma_{0l})(1 + e^{-2\gamma_{0l}\delta}) \right] \sin(l\pi \frac{d_x}{L_x}) = B_{0l}$$

Enfin si $k = l = m = n = 0$

$$A_{0000} = \frac{(L_x - d_x)^2 L_x^2 + 4d_x^2 L_z^2}{L_x^4} \quad (1.34)$$

$$B_{00} = 2 \frac{d_x^2 L_z}{L_x^3}$$

Le système formé à l'aide des équations (1.30) à (1.34) permet de déterminer numériquement les coefficients Γ_{kl} . Le champ de pression à l'intérieur de la couche poreuse est alors calculé avec la formule suivante :

$$\Theta(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j \neq (0,0)}^N \Gamma_{ij} \cos(i\pi x) \cos(j\pi y) (e^{-\gamma_{i,j}(z-\delta)} - e^{-\gamma_{i,j}(z+\delta)}) + K_{00}z \quad (1.35)$$

1.3 Perméabilité apparente

1.3.1 Notion de perméabilité apparente

La perméabilité K_i intrinsèque d'un milieu poreux, si l'écoulement est en régime darcéen, est définie de la manière suivante :

$$K_i = \frac{\mu L_z}{P_0 - P_1} \frac{Q_i}{L_x^2} \quad (1.36)$$

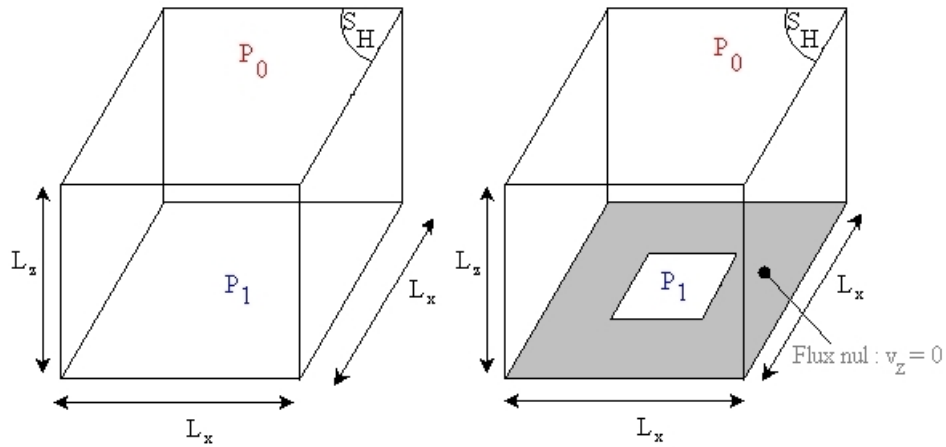


Fig. 1.6: Principe de calcul de la réduction de perméabilité.

Q_i étant le débit passant à travers la surface S_H ($S_H = L_x^2$) (Cf. figure 1.6), μ est la viscosité dynamique du fluide et $(P_1 - P_0)$ est la différence de pression entre le haut et le

bas de la couche de particules. Par analogie à (1.36) on définit la perméabilité apparente K de ce même milieu poreux limité par une paroi perforée :

$$K = \frac{\mu L_z}{P_0 - P_1} \frac{Q}{L_x^2} \quad (1.37)$$

Si la différence de pression est identique, le débit Q passant à travers S_H sera plus faible. En effet, la perméabilité intrinsèque est inchangée, mais la présence de la paroi perforée entraîne une diminution apparente de la perméabilité du milieu. Ainsi la réduction de perméabilité se calcule de la manière suivante :

$$\frac{K}{K_i} = \frac{Q}{Q_i} \quad (1.38)$$

1.3.2 Calcul de la réduction de perméabilité

La réduction de perméabilité est calculée à l'aide de la relation (1.38).

$$Q = \int_{S_H} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\frac{K_i}{\mu} \int_{S_H} \frac{\partial P}{\partial z} dS \quad (1.39)$$

En introduisant les expressions (1.12) et (1.24), on a alors :

$$Q = \frac{K_i L_x}{2\mu} (P_1 - P_0) K_{00} \quad (1.40)$$

On en déduit l'expression de la réduction de perméabilité :

$$\frac{K}{K_i} = \frac{2L_z}{L_x} K_{00} = L_z^* K_{00} \quad (1.41)$$

avec :

$$L_z^* = \frac{L_z}{L_x/2}$$

1.4 Résultats numériques

Dans cette partie nous allons calculer de manière systématique les variations de la réduction de perméabilité en fonction de la porosité de la paroi perforée et de la hauteur de la couche de particules.

1.4.1 Convergence des résultats

La matrice du système permettant de calculer les coefficients de la série (1.24) est symétrique définie positive. La méthode utilisée est donc la méthode de Cholesky. Afin de

gagner de la place mémoire, on utilise une routine spécifique de la bibliothèque numérique LAPACK implémentant cette méthode et permettant de n'utiliser que la partie supérieure de la matrice. Dans le cas particulier du pore carré, toutes les intégrales définissant les coefficients de la matrice et le second membre (formules (1.28) et (1.29)) sont analytiques. Si le pore a une forme différente, les intégrales doivent être calculées numériquement ce qui augmente considérablement les temps de calcul. Sur la figure 1.7 on a représenté le temps de calcul des coefficients de la série en fonction de l'ordre de la série. Les intégrales pour le pore circulaire ont été calculées par la méthode de Simpson.

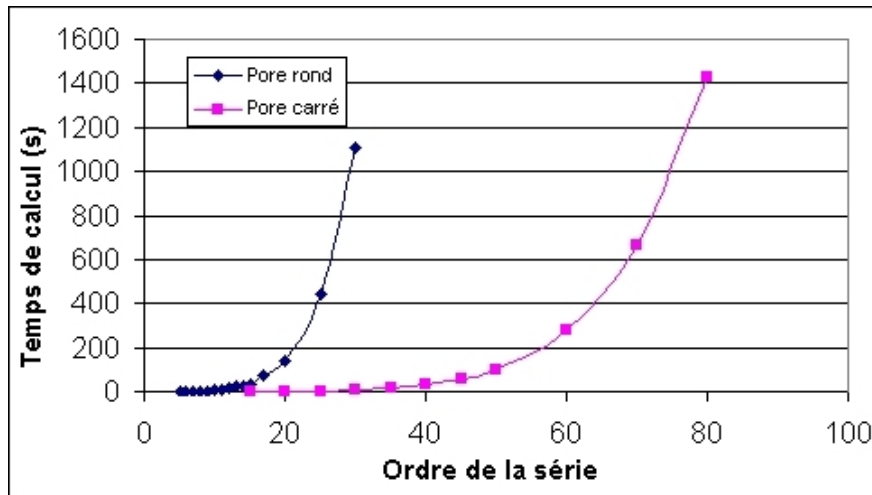


Fig. 1.7: Temps de calcul nécessaire en fonction de l'ordre de la série pour 2 géométries différentes (rond et carré).

Étant donné que la perméabilité apparente est calculée à partir du premier terme de la série (1.24), il est nécessaire d'étudier la convergence de ce dernier en fonction de la porosité de la plaque (Cf. figure 1.4)

$$\epsilon = \frac{d_x^2}{L_x^2}$$

et de la hauteur de la couche de particules ceci afin de fixer le nombre minimal de termes dans la série pour obtenir une précision donnée. La figure (1.8) présente la variation de (1.42) en fonction de l'ordre de la série pour différentes hauteurs de la couche de particules et différentes porosités de plaque.

$$E_R = \left| \frac{(K_{00})_{N+1} - (K_{00})_N}{(K_{00})_{N+1}} \right| \quad (1.42)$$

N : ordre de la série

On constate que, lorsque la porosité est comprise entre 10% et 80%, l'erreur relative est inférieure à 0.01 si l'ordre de la série est égal à 50 (ce qui correspond à 2500 coefficients). Si

la porosité est inférieure à 0.1 (Cf. figure (1.8)), l'ordre de la série doit être supérieur à 80. Par conséquent, on fixera donc $N = 80$ lorsque la porosité est inférieure à 10% et $N = 50$ dans le cas contraire.

Si les intégrales ne peuvent pas être calculées de manière analytique (cas des pores ronds) une méthode de type collocation ([Wan94]) peut être mise en oeuvre pour calculer le champ de pression. Cette dernière est plus rapide et plus simple à implémenter que la précédente mais nécessite un plus grand nombre de termes dans la série (1.24) pour obtenir une précision équivalente dans le calcul de la réduction de perméabilité. La matrice obtenue (dans le cas de la méthode de collocation) pour le calcul des coefficients de la série n'est pas positive et ne présente aucune structure particulière. Les coefficients ne sont pas calculés par la minimisation de E_r (Cf. équation (1.26)) mais en plaçant des points de collocation sur S_1 et S_2 (Cf. figure 1.5) sur lesquels la solution doit vérifier les conditions aux limites ((1.18) et (1.17)). La figure 1.9 représente la convergence de la réduction de perméabilité en fonction de l'ordre de la série pour une porosité variant de 1% à 80%. La méthode de collocation est moins précise que la méthode précédente (Cf. figure 1.8) quelque soit la porosité et la hauteur de la couche de particules. La convergence présente de plus fortes oscillations en fonction de l'ordre de la série. Ces dernières sont dues à la présence d'un point de collocation sur la frontière entre le trou et la paroi.

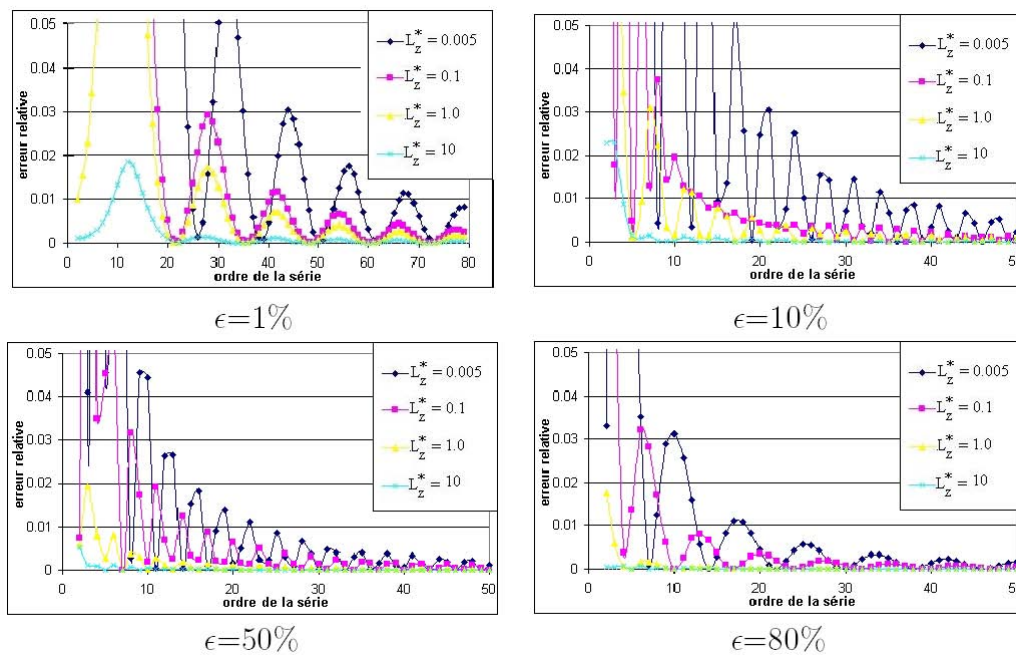


Fig. 1.8: Variation de l'erreur relative en fonction de l'ordre de la série pour différentes porosités de plaque.

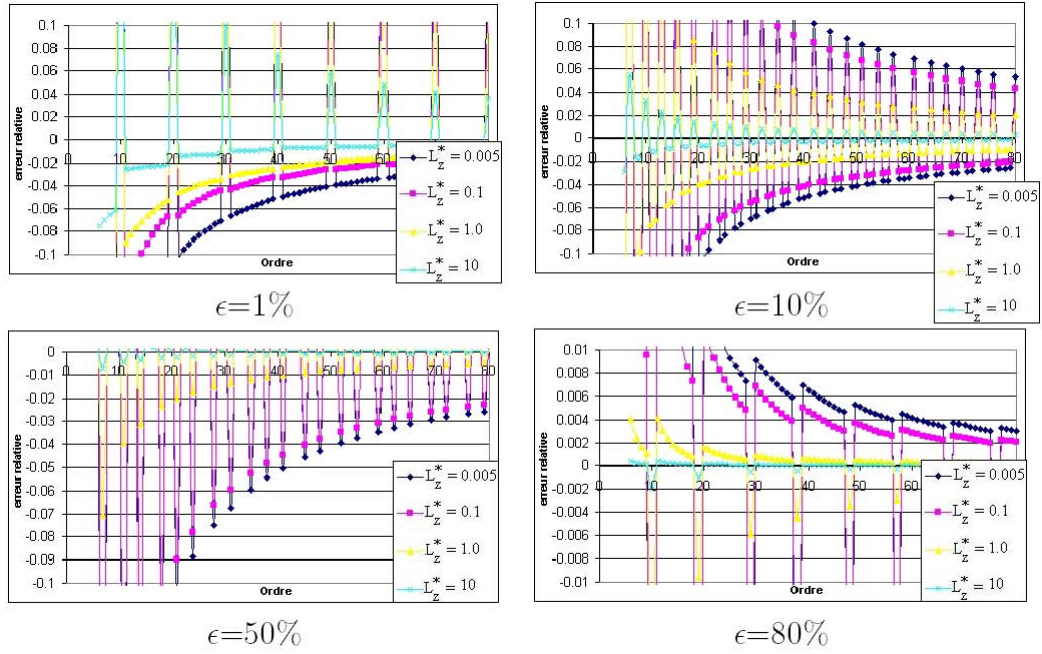


Fig. 1.9: Variation de l'erreur relative en fonction de l'ordre de la série pour différentes porosités de plaque (Méthode de collocation).

1.4.2 Résultats pour le pore carré

Si on observe la variation de la réduction de perméabilité en fonction de la hauteur de la couche de particules pour différentes porosités de plaque, on constate, comme attendu, que la perméabilité apparente tend vers la perméabilité intrinsèque lorsque L_z^* tend vers l'infini ou lorsque la porosité de la paroi (définie comme d_x^2/L_x^2) tend vers 1 (Cf. figure 1.10). Maintenant, si on représente la réduction de perméabilité en fonction de la porosité, pour de faibles épaisseurs de la couche de particules (L_z^* compris entre 0.005 et 0.05 : figure 1.11), on constate que cette dernière varie linéairement en fonction de la porosité. Ceci est la conséquence du confinement de l'écoulement dans une zone située au-dessus du pore (Cf. figure 1.12), en raison de la proximité entre la paroi et le haut de la couche de particules. On peut dans ce cas calculer le débit de manière approchée par :

$$Q = d_x^2 \frac{K_i}{\mu} \frac{P_1 - P_0}{L_z} \quad (1.43)$$

Si il n'y avait pas de paroi, le débit serait le suivant :

$$Q_i = L_x^2 \frac{K_i}{\mu} \frac{P_1 - P_0}{L_z} \quad (1.44)$$

Par conséquent on obtient une estimation de la réduction de perméabilité (1.38) :

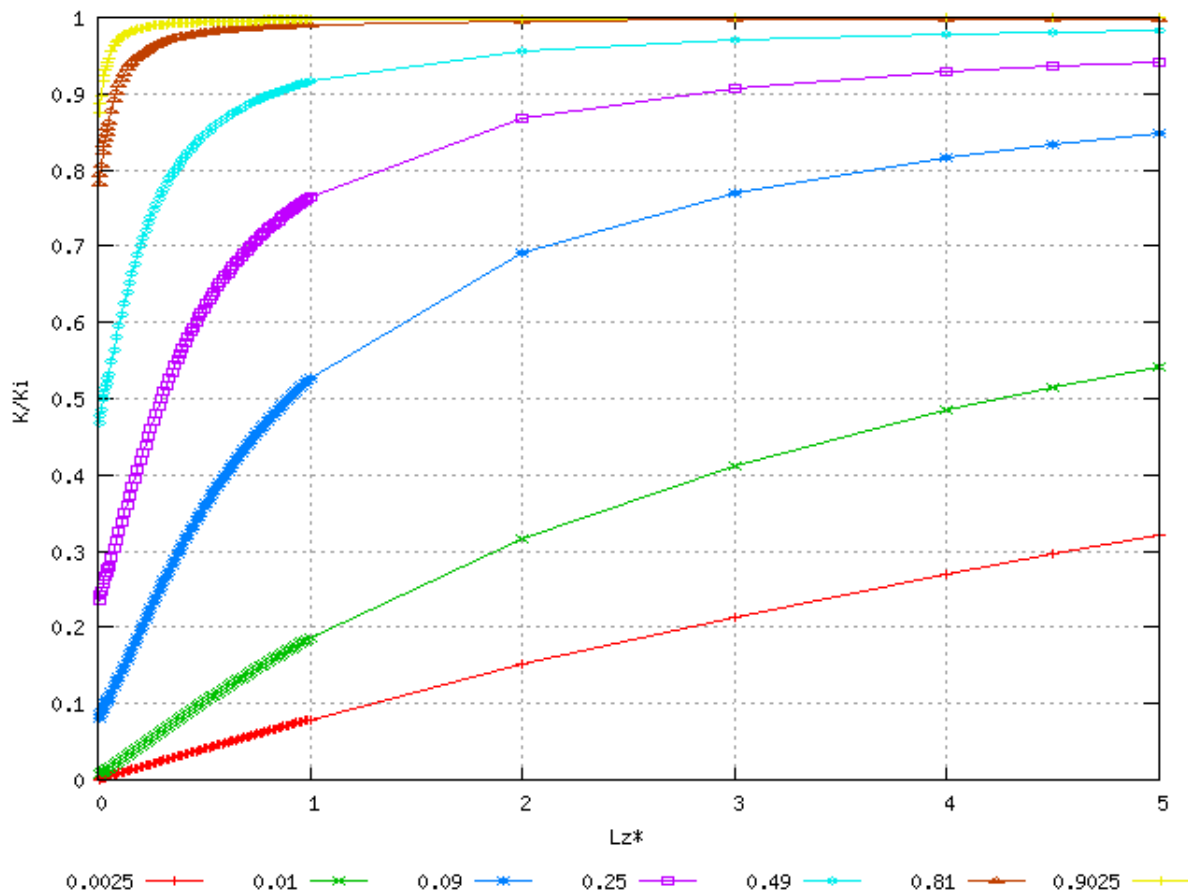


Fig. 1.10: Variation de la réduction de perméabilité en fonction de la hauteur de la couche de particules pour différentes porosités

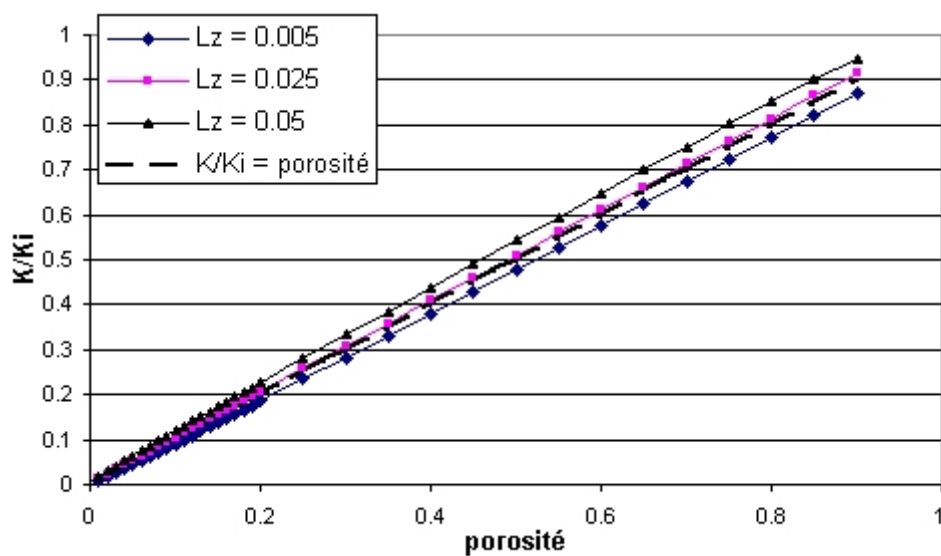


Fig. 1.11: Variation de la réduction de perméabilité en fonction de la porosité pour des faibles hauteurs de la couche de particules.

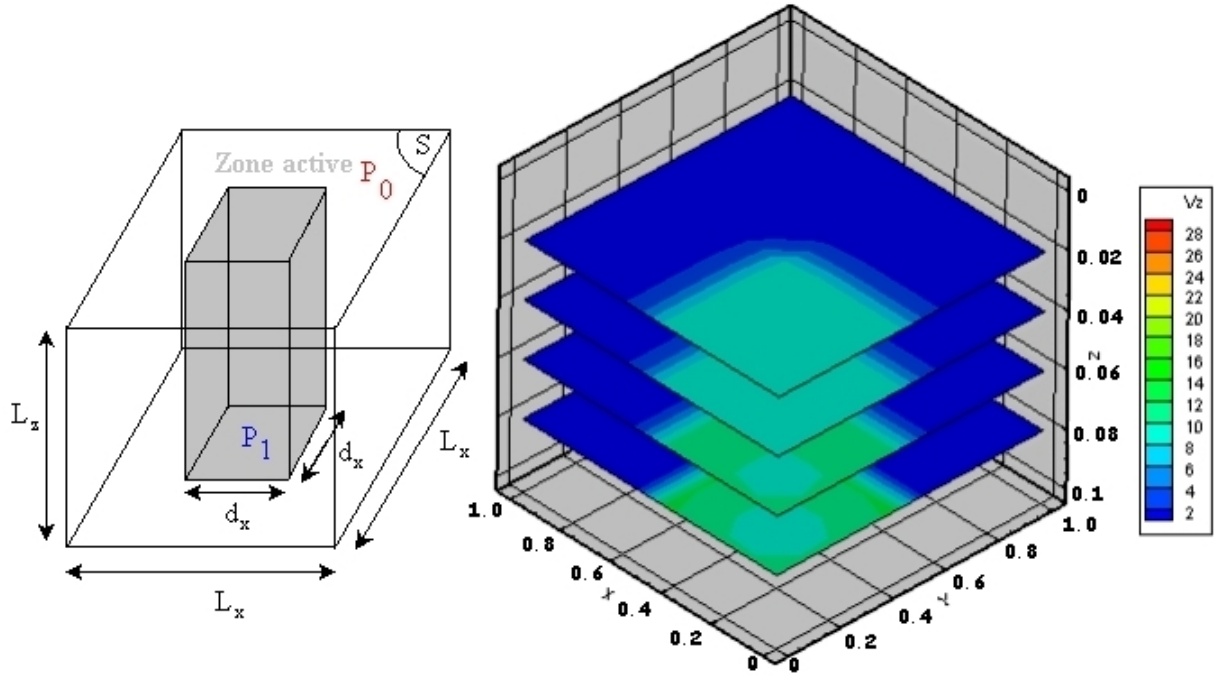


Fig. 1.12: Représentation des iso valeurs de la composante en z de la vitesse moyenne de filtration pour $L_z^* = 0.01$ et une porosité de plaque de 25%. L'échelle suivant la direction z est très dilatée, pour la clarté de la figure.

$$\frac{K}{K_i} = \frac{Q}{Q_i} \approx \frac{d_x^2}{L_x^2} = \epsilon \quad (1.45)$$

Pour les faibles valeurs de L_z^* on constate que la réduction de perméabilité varie linéairement avec la hauteur de la couche de particules (Cf. figures 1.13 et 1.14). Ceci a été démontré analytiquement à l'aide des transformations conformes dans le cas d'une modélisation en 2 dimensions [DPSS02].

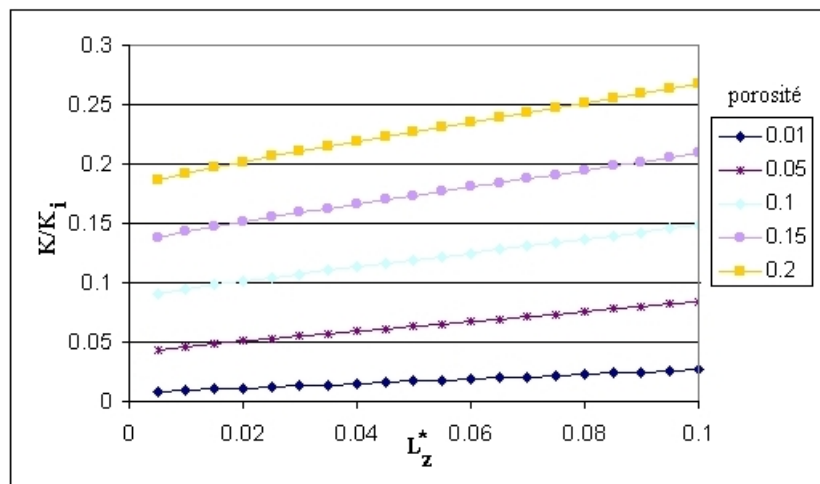


Fig. 1.13: Variation de la réduction de perméabilité en fonction de la hauteur de la couche de particules pour $1\% < \epsilon < 20\%$

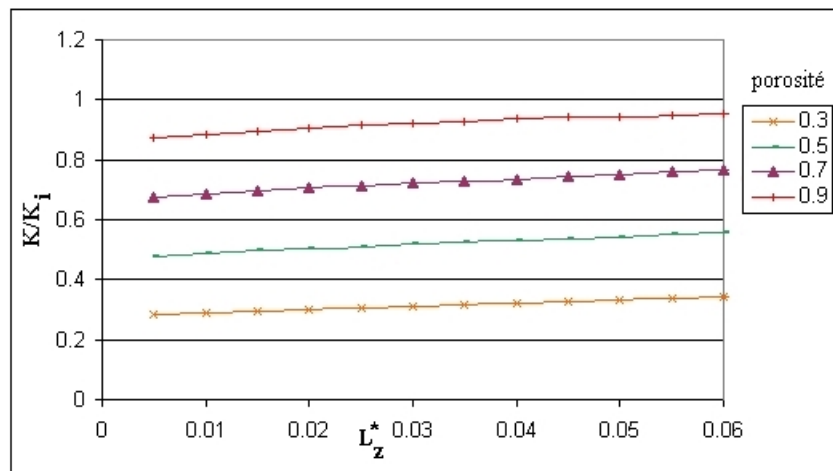


Fig. 1.14: Variation de la réduction de perméabilité en fonction de la hauteur de la couche de particules pour $30\% < \epsilon < 90\%$

1.4.3 Résultats pour le pore rond

Nous avons effectué des calculs de réduction de perméabilité pour un pore rond (Cf. figure 1.3). Nous avons étudié l'écart relatif entre les deux réductions de perméabilité (Cf. figure 1.15) :

$$E_{RC} = \left| \frac{K_R - K_C}{K_R} \right|$$

K_R est la perméabilité obtenue dans le cas du pore rond.

K_C est la perméabilité obtenu dans le cas du pore carré.

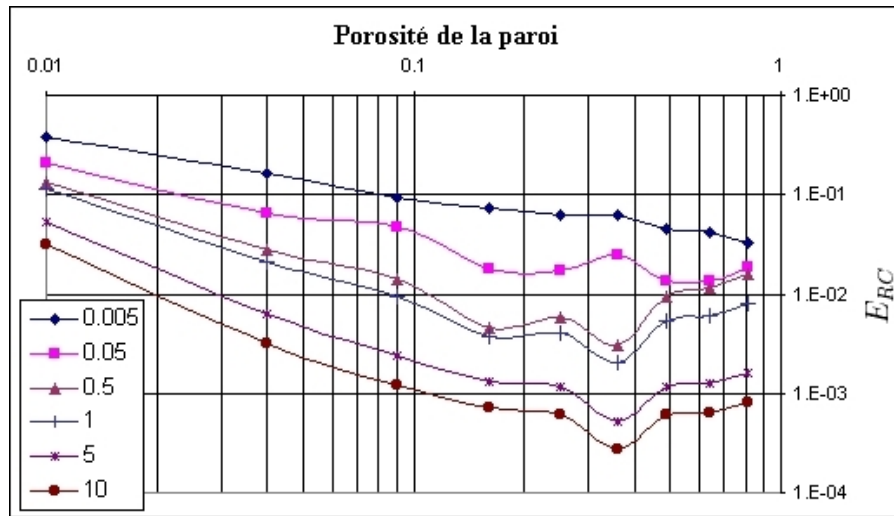


Fig. 1.15: Variation de l'écart relatif entre la réduction de perméabilité pour le pore rond et celle du pore carré en fonction de la porosité de la paroi pour différentes valeurs de L_z^* .

Si on se fixe un écart maximum de 10%, on peut alors dire que les deux modèles de pores prévoient les mêmes valeurs de réduction de perméabilité $\forall L_z^*$ si $\epsilon > 0.09$. Nous avons reporté en annexe les variations de la réduction de perméabilité pour le pore rond pour $0.01 < \epsilon < 0.785$ et $0.005 < L_z^* < 10$. Si on compare les variations de la réduction de perméabilité pour le pore carré et le pore rond on constate que $\forall L_z^*$ et $\forall \epsilon$ que $\frac{K_R}{K_i} > \frac{K_C}{K_i}$; la perméabilité apparente d'un dépôt limitée par une paroi perforée dont les pores sont ronds est plus grande que si les pores étaient carrés. Cet écart est d'autant plus faible que L_z^* est grand et que ϵ est proche de 1.

1.5 Représentation des résultats numériques

Afin de pouvoir exploiter facilement les résultats numériques présentés dans le paragraphe précédent, nous avons établi des corrélations entre la réduction de perméabilité ($\frac{K}{K_i}$), la

hauteur de la couche de particules (L_z^*) et la porosité de la plaque dans le cas du **pore carré**. Ces relations s'inspirent des formes analytiques établies par transformations conformes dans le cadre d'une modélisation 2D de la couche de particules. On présente, 3 types de relations suivant l'épaisseur de la couche de particules.

1.5.1 Modèle couche mince

Par analogie aux résultats proposés dans [Duf00], on propose la corrélation suivante :

$$\frac{K}{K_i} = a(\epsilon)L_z^* + b(\epsilon) \quad (1.46)$$

Les coefficients ont été déterminés par régression linéaire à l'aide des courbes de la réduction de perméabilité en fonction de L_z^* ($0.005 < L_z^* < 0.05$) pour une porosité de plaque donnée. Les variations de ces coefficients sont représentés sur les figures 1.16 et 1.17. Les modèles proposés pour les 2 coefficients sont les suivants :

$$a(\epsilon) = -4.2796 \cdot 10^{-2} + 2.0113\epsilon^{0.471867} \quad (1.47)$$

$$b(\epsilon) = -2.9811 + 0.90671\epsilon + 0.13205\epsilon^2 - 0.076898\epsilon^3 \quad (1.48)$$

$$\epsilon \in [0.05, 0.81]$$

L'ajustement du coefficient b réalisé avec un polynôme de degré 3 est nécessaire pour mieux rendre compte des variations de ce paramètre aux faibles porosités.

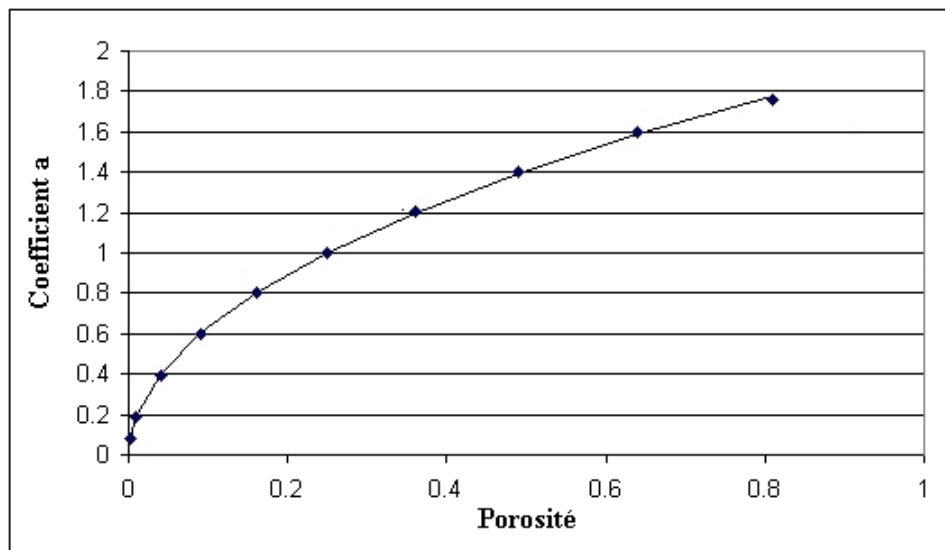


Fig. 1.16: Variation du coefficient a en fonction de la porosité

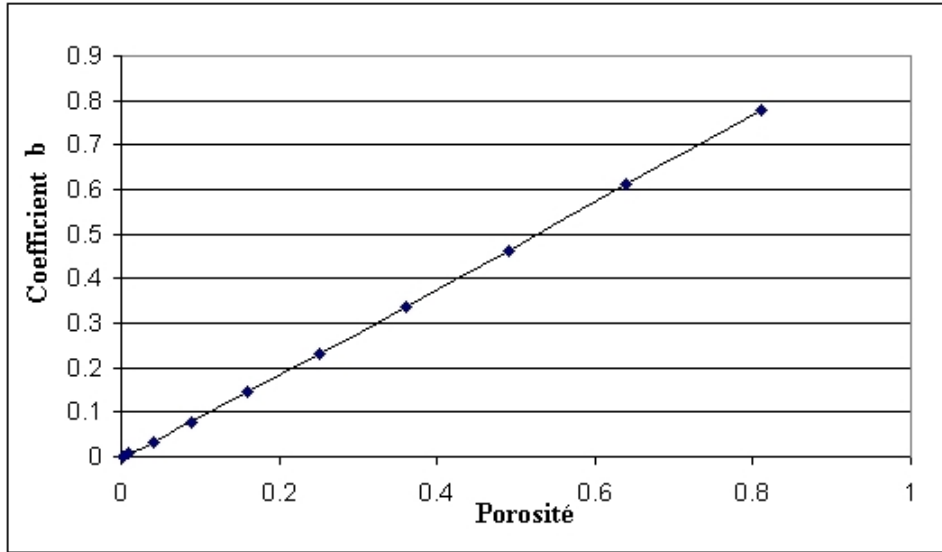


Fig. 1.17: Variation du coefficient b en fonction de la porosité

1.5.2 Modèle couche épaisse

Lorsque la couche de particules est suffisamment épaisse, elle peut être divisée en 2 sous couches (figure 1.18). La première près de la paroi perforée a une perméabilité apparente K_1 inférieure à la perméabilité intrinsèque de la couche de particules ($K_1 < K_i$), en raison de la courbure des lignes de courant près du pore. La seconde a une perméabilité égale à la perméabilité intrinsèque de la couche de particules : les lignes de courant sont toutes parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface du haut de la couche de particules, les surfaces isobares étant parallèles à la surface de la couche de particules. On peut ainsi considérer que la couche poreuse est ainsi constituée de 2 résistances hydrauliques en série, on peut alors écrire que :

$$\frac{L_z}{K} = \frac{L_1}{K_1} + \frac{L_z - L_1}{K_i}$$

on en déduit que :

$$L_z^* \left(\frac{K}{K_i} \right)^{-1} = L_z^* + L_1 \left[\left(\frac{K_1}{K_i} \right)^{-1} - 1 \right] \quad (1.49)$$

La quantité

$$c(\epsilon) = L_1 \left[\left(\frac{K_1}{K_i} \right)^{-1} - 1 \right] \quad (1.50)$$

ne dépend que de la porosité de la plaque. On constate effectivement que la variation

du produit de L_z^* par l'inverse de la réduction de perméabilité en fonction de l'épaisseur de la couche de particules pour différentes porosités de plaque (Cf. figure 1.19) est linéaire pour les grandes valeurs de L_z^* . Le coefficient c n'est autre que l'ordonnée à l'origine, dont la variation en fonction de L_z^* est représentée sur la figure 1.20 Ce coefficient peut être calculé par la relation suivante :

$$c(\epsilon) = \frac{a + c\sqrt{\epsilon} + e\epsilon}{1 + b\sqrt{\epsilon} + d\epsilon} \quad (1.51)$$

$$\epsilon \in [0.05, 0.81] \quad (1.52)$$

avec :

$$a = -1.0945.10^2$$

$$b = -2.3759.10^2$$

$$c = 2.1731.10^2$$

$$d = 1.0973.10^2$$

$$e = -1.0787.10^2$$

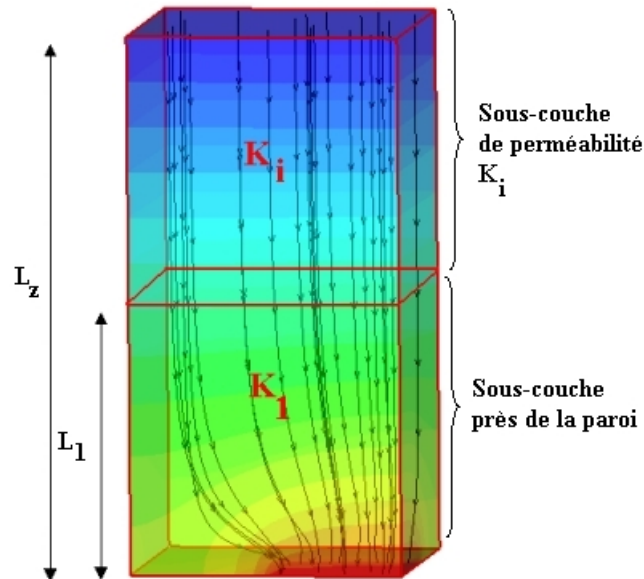


Fig. 1.18: Représentation du champ de pression et des lignes de courant dans la couche de particules.

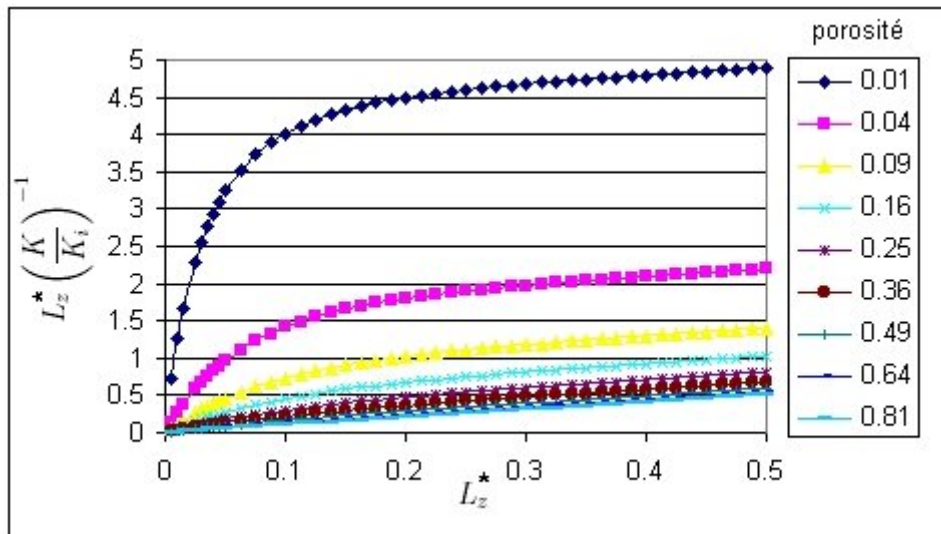


Fig. 1.19: Variations du produit de l'épaisseur de la couche de particules par l'inverse de la réduction de perméabilité.

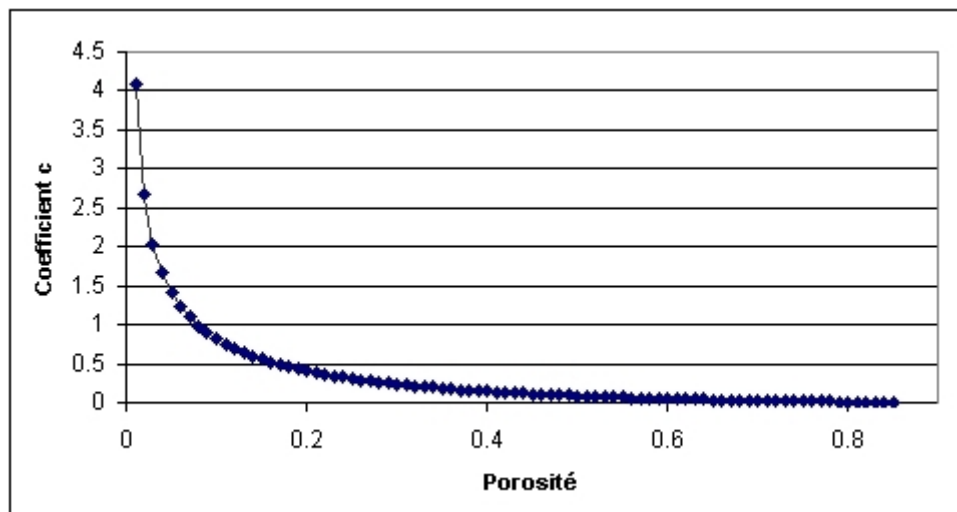


Fig. 1.20: Variations du coefficient c en fonction de la porosité de la plaque.

	α_3	α_4
a	9.7241	-1.0143
b	185.56	-0.5076
c	251.28	-1.2642
d	2231.2	-3.2356
e	427.90	10.469
f	-1786.2	9.6547
g	-1742.4	-23.594
h	353.96	-5.0951
i	1051.82	17.261
j	-610.16	-3.3739

Tab. 1.1: Coefficients des polynômes de α_3 et α_4 .

1.5.3 Modèle couches d'épaisseur intermédiaire

La formule permettant de calculer la réduction de perméabilité en fonction de la hauteur de la couche de particules et de la porosité de la plaque pour les couches d'épaisseur intermédiaire est la suivante :

$$\left(\frac{K_1}{K_i}\right)_\epsilon = \alpha_1(\epsilon) + \frac{\alpha_2(\epsilon)}{1 + \left(\frac{L_z^*}{\alpha_3(\epsilon)}\right)^{\alpha_4(\epsilon)}} \quad (1.53)$$

Cette formule a été déterminée à l'aide de Table Curve. Les coefficients α_1 et α_2 ont des variations linéaires en fonction de la porosité (Cf. figure 1.21 et 1.22).

$$\alpha_1(\epsilon) = 0.9687\epsilon - 9.534 \cdot 10^{-3} \quad (1.54)$$

$$\alpha_2(\epsilon) = 0.9384\epsilon + 9.854 \cdot 10^{-1} \quad (1.55)$$

Les coefficients α_3 et α_4 ont une variation plus complexe. Il n'a été possible de trouver un ajustement robuste pour α_4 (Cf. figure 1.23 et 1.24) que pour $\epsilon < 0.81$.

$$\alpha_3, \alpha_4 = \frac{a + c\epsilon + e\epsilon^2 + g\epsilon^3 + i\epsilon^4}{1 + b\epsilon + d\epsilon^2 + f\epsilon^3 + h\epsilon^4 + j\epsilon^5} \quad (1.56)$$

$$\epsilon \in [0.05, 0.81]$$

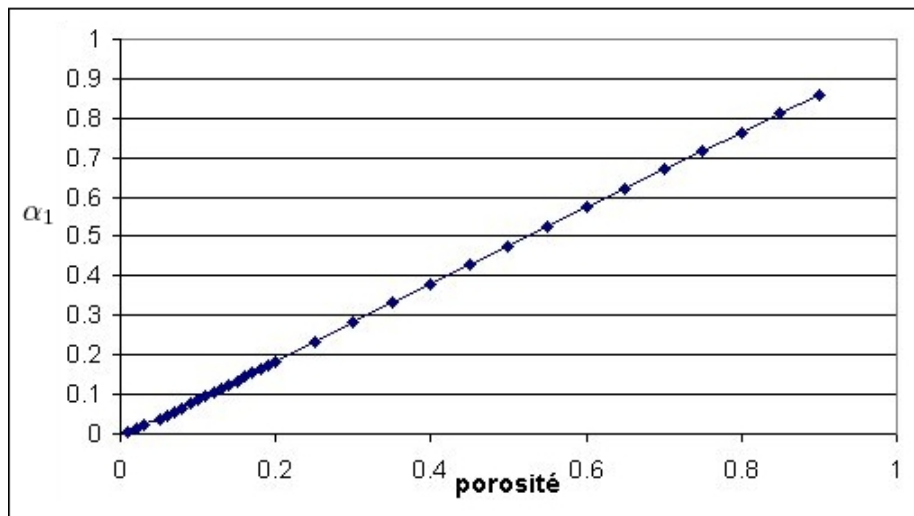


Fig. 1.21: Variation du coefficient α_1 en fonction de la porosité de la plaque

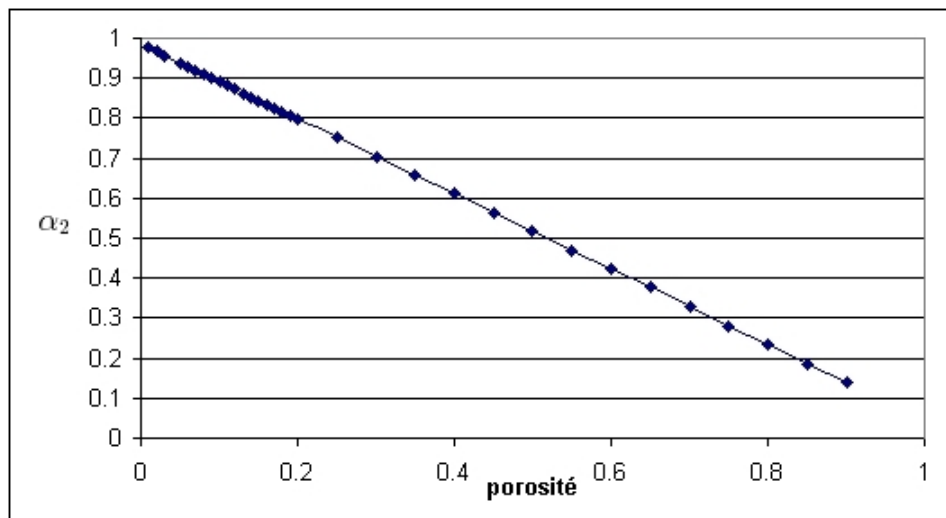


Fig. 1.22: Variation du coefficient α_2 en fonction de la porosité de la plaque

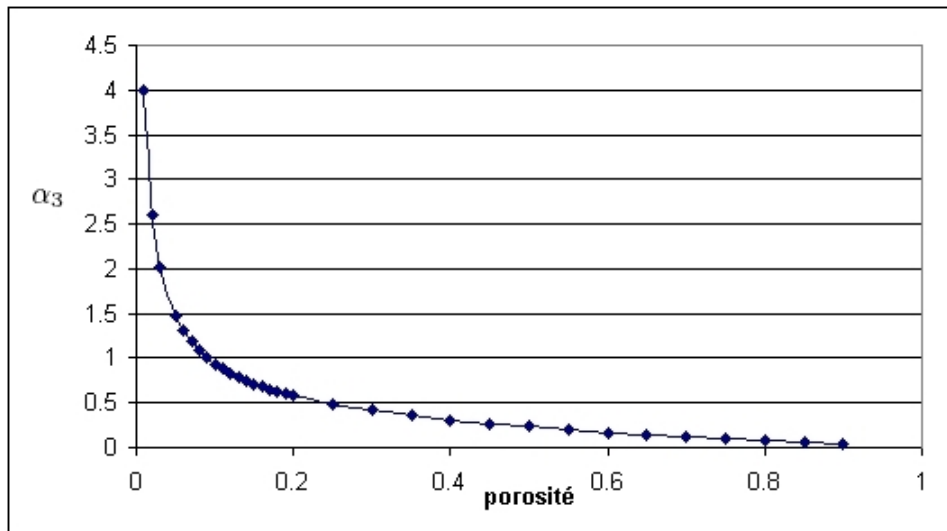


Fig. 1.23: Variation du coefficient α_3 en fonction de la porosité de la plaque

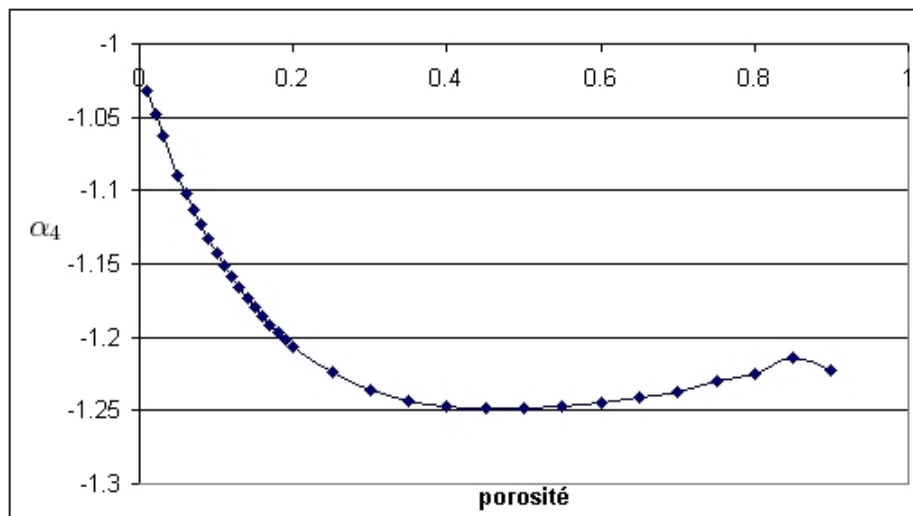


Fig. 1.24: Variation du coefficient α_4 en fonction de la porosité de la plaque

1.5.4 Validité des modèles approchés de calcul de réduction de perméabilité

Cette partie porte sur l'évaluation de la précision des relations (1.46), (1.53) ou 1.49. Le critère de précision choisi est le suivant :

$$E_A = \left| \frac{K_N - K_A}{K_N} \right| \quad (1.57)$$

K_N est la perméabilité évaluée par la méthode semi-analytique, K_A est la perméabilité évaluée par l'un des 3 modèles.

Les variations de cette erreur sont représentées pour les 3 modèles (couche mince, couche d'épaisseur intermédiaire et couche épaisse). La porosité de plaque varie de 5% à 90% sur 3 intervalles de L_z^* : $L_z^* \in [0.005, 0.1]$ (Cf. figure 1.25), $L_z^* \in [0.1, 1]$ (Cf. figure 1.26) $L_z^* \in [1, 5]$ (Cf. figure 1.27).

On se fixe une erreur maximale de 10%.

Pour $L_z^* \in [0.005, 0.1]$ on constate que les modèles couche mince et couche d'épaisseur intermédiaire évaluent la réduction de perméabilité avec $E_R < 0.1$ tandis que le modèle couche épaisse est imprécis pour cette gamme d'épaisseurs. Cependant on peut remarquer que la précision du modèle couche mince est meilleure $\forall \epsilon$ pour $L_z^* < 0.05$ que celle du modèle couche d'épaisseur intermédiaire. Enfin, si $0.05 < L_z^* < 0.1$ le modèle couche d'épaisseur intermédiaire est plus précis.

Pour $L_z^* \in [0.1, 1]$ le modèle couche d'épaisseur intermédiaire est plus précis que les deux autres modèles.

Pour $L_z^* > 0.5$ le modèle permet d'évaluer la réduction de perméabilité très précisément puisque que E_R dans ce cas là est comprise entre 1% et 0.0001%.

On peut alors proposer que suivant la hauteur de la couche de particules, la réduction de perméabilité soit calculée de manière différente pour $5\% \leq \epsilon \leq 90\%$:

- Si $L_z^* \leq 0.05$ on évalue la réduction de perméabilité avec (1.46)
- Si $0.05 \leq L_z^* \leq 1$ on évalue la réduction de perméabilité avec (1.53)
- Si $L_z^* \geq 1$ on évalue la réduction de perméabilité avec (1.49)

L'écart relatif (E_A) entre les résultats numériques et les valeurs de la réduction de perméabilité évaluée par l'une des trois relations ((1.46), (1.53) ou 1.49) est strictement inférieur à 10%.

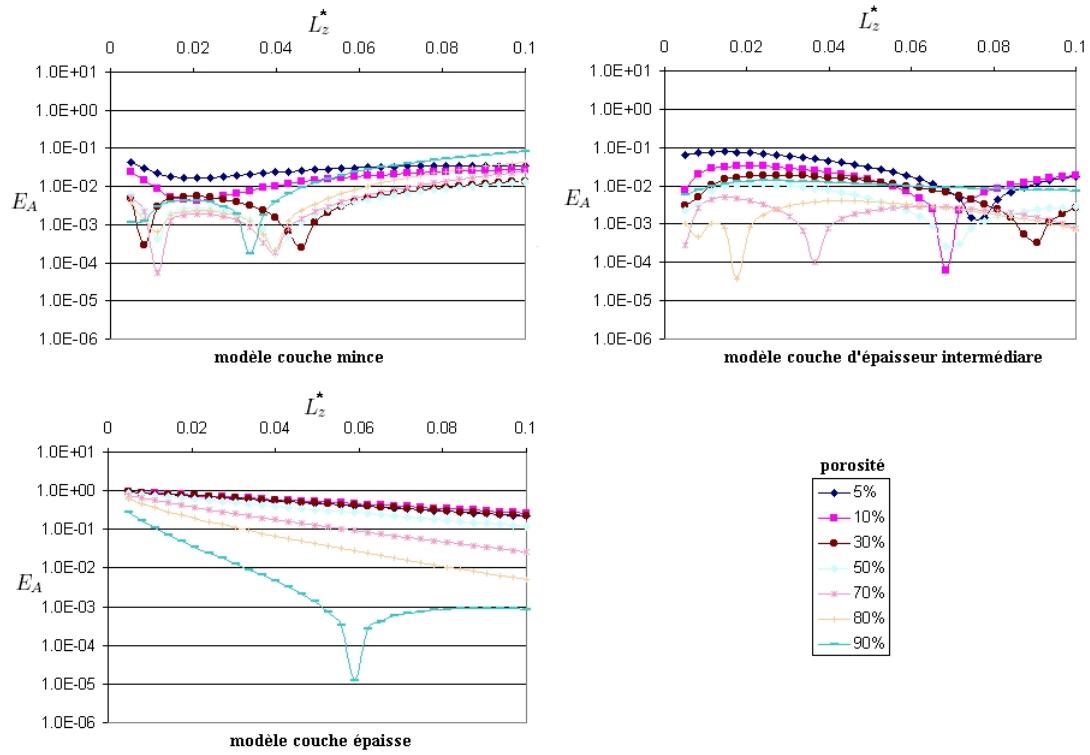


Fig. 1.25: Variation de E_A (Cf. formule (1.57)) en fonction de $L_z^* \in [0.005, 0.1]$ pour $\epsilon \in [0.05, 0.9]$

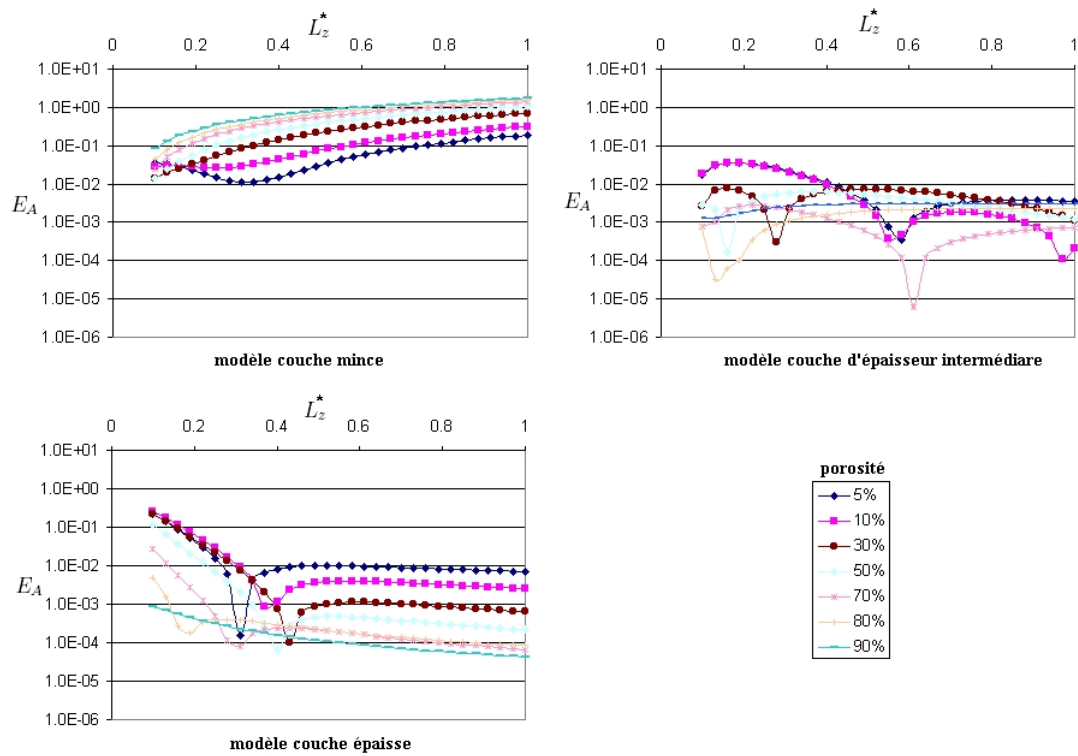


Fig. 1.26: Variation de E_A (Cf. formule (1.57)) en fonction de $L_z^* \in [0.1, 1]$ pour $\epsilon \in [0.05, 0.9]$

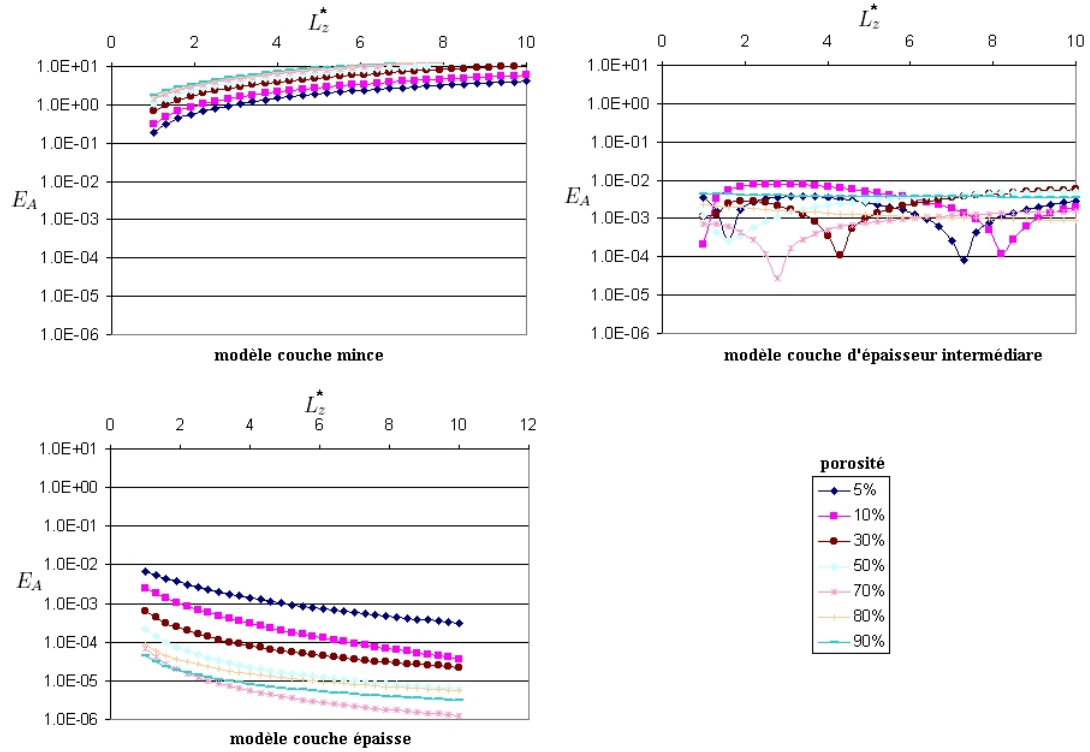


Fig. 1.27: Variation de E_A (Cf. formule (1.57)) en fonction de $L_z^* \in [1, 10]$ pour $\epsilon \in [0.05, 0.9]$

1.6 Comparaison par rapport aux résultats du modèle en 2 dimensions

Dans ce paragraphe, les calculs de réduction de perméabilité réalisés en 3 dimensions sont comparés aux résultats obtenus par Dufrèche et al [DPSS02] dans le cas 2D. La paroi filtrante dans les 2 cas est modélisée différemment (Cf. figure 1.28).

Si la paroi a une porosité ϵ alors :

$$d_x = \epsilon L_x \text{ en 2D}$$

$$d_x = \sqrt{\epsilon} L_x \text{ en 3D}$$

Sur les figures 1.29, 1.30 et 1.31 la variable $\frac{K_{3D}}{K_{2D}}$ est représentée en fonction de L_z^* pour $\epsilon \in [5\%, 90\%]$. Comme attendu, on constate que la différence entre les modèles est d'autant plus importante pour les faibles hauteurs de la couche de particules que la porosité est faible. Le rapport entre les perméabilités apparentes en 2D et 3D peut être important, jusqu'à un facteur 3 pour les gammes de porosité étudiées. Si $\epsilon < 80\%$, lorsque l'épaisseur de la couche de particules est inférieure à la taille de la cellule élémentaire (L_x), le modèle 3D prévoit une réduction de perméabilité plus importante que celle du modèles 2D. Dans le cas où $L_z^* > 0.6$ et $\epsilon > 30\%$ (Cf. figure 1.31) le modèle 2D évalue la réduction de manière satisfaisante car

la différence entre les 2 modèles est inférieure à 5%.

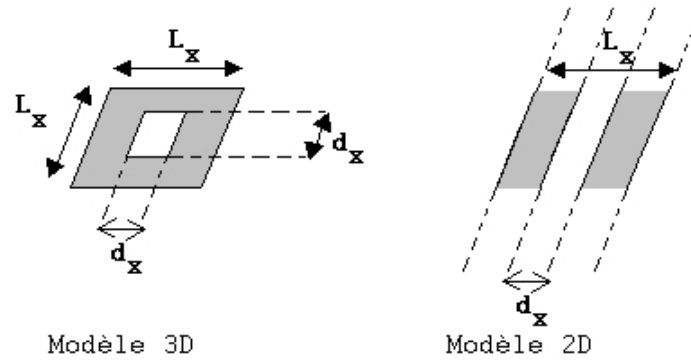


Fig. 1.28: Modélisation de la paroi filtrante dans le cas du modèle 3D et du modèle 2D.

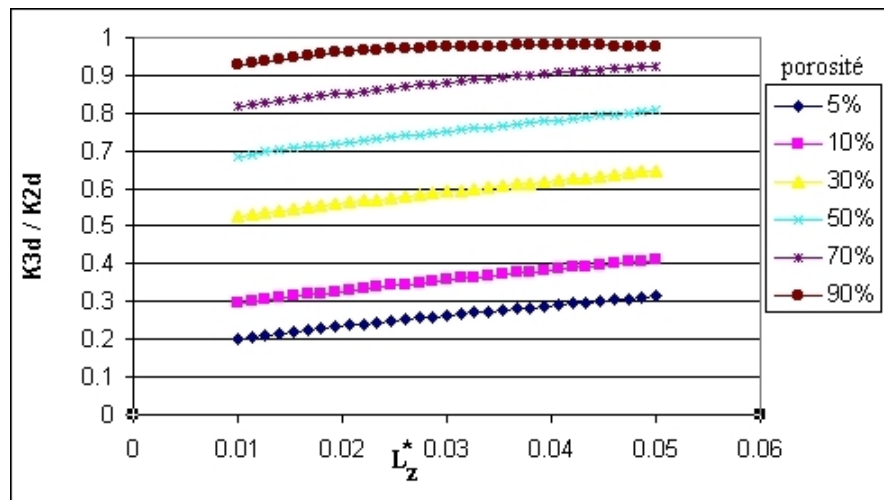


Fig. 1.29: Rapport entre la réduction de perméabilité évaluée par le modèle 3D et celle calculée par le modèle 2D.

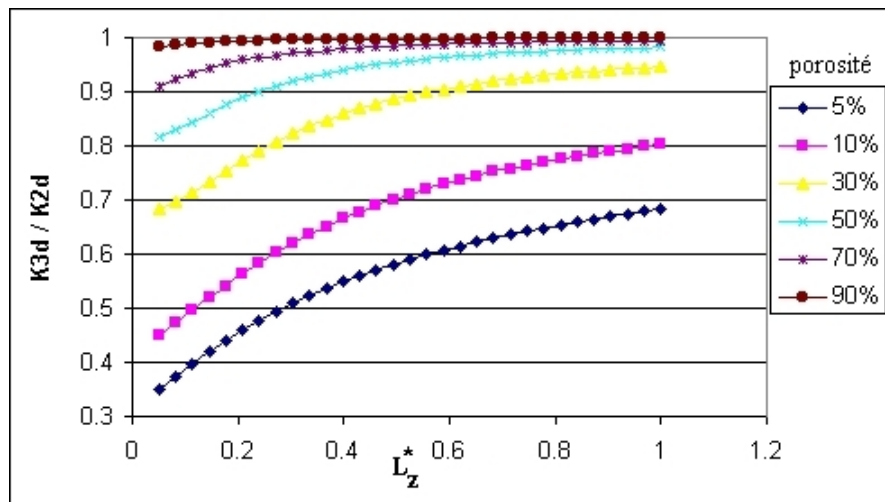


Fig. 1.30: Rapport entre la réduction de perméabilité évaluée par le modèle 3D et celle calculée par le modèle 2D.

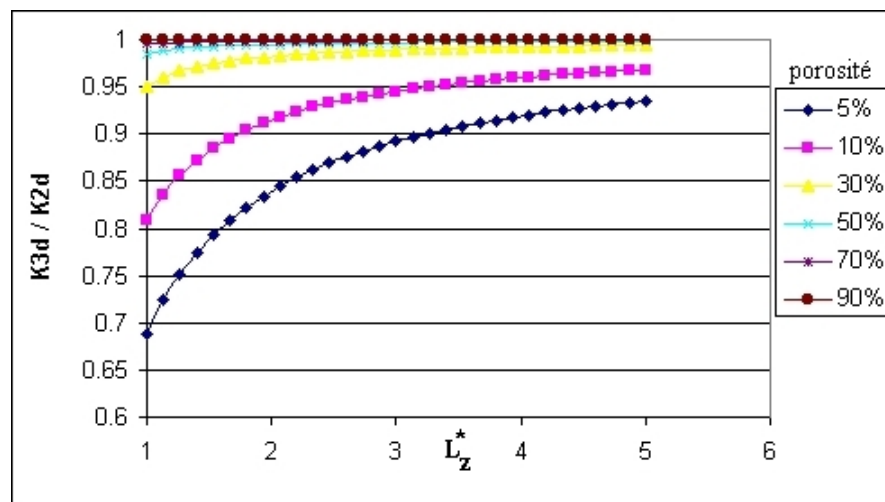


Fig. 1.31: Rapport entre la réduction de perméabilité évaluée par le modèle 3D et celle calculée par le modèle 2D.

1.7 Applications

1.7.1 Cinétique de colmatage

Equation d'évolution de la hauteur de la couche de particules en fonction du temps

Les hypothèses faites pour la modélisation de la formation de la couche de particules sont les suivantes :

- la couche de particules est uniforme sur toute la paroi filtrante,
- on suppose que la pression est constante sur le haut de la couche de particules,
- la couche de particules est caractérisée par une perméabilité intrinsèque homogène et isotrope,
- on suppose que l'hypothèse de séparation des échelles entre la taille des particules et celle du pore est respectée.

La couche de particules se forme comme schématisé sur la figure 1.32. Le débit moyen de filtration est donné par :

$$Q = L_x^2 \frac{K}{\mu} \frac{\delta P}{L_z} \quad (1.58)$$

L_x^2 : surface du haut du dépôt

K : perméabilité apparente de la couche de particules

μ : viscosité du fluide

δP : différence de pression entre le haut et le bas de la couche de particules

L_z : hauteur de la couche de particules

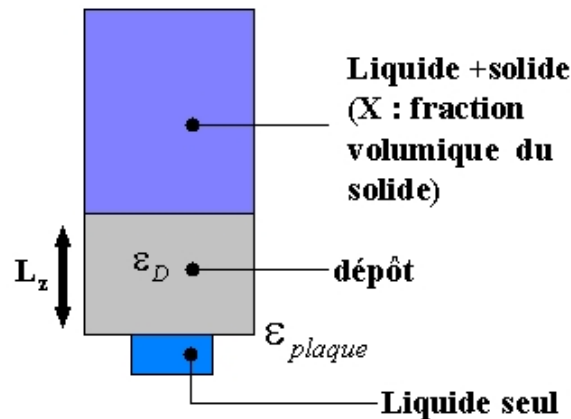


Fig. 1.32: Modélisation de la formation d'une couche de particules sur une surface filtrante

Si on note C la concentration en particules (en $kg.m^{-3}$) dans le fluide arrivant sur la couche de particules, la densité de flux de celles-ci est :

$$\vec{j} = C\vec{v} \quad (1.59)$$

\vec{v} : la vitesse du mélange liquide-particule.

La masse arrivant à la surface supérieure de la couche de particules pendant un temps dt est :

$$dm = CQdt \quad (1.60)$$

Si on suppose que la concentration est indépendante de x , y et z . En supposant que la vitesse de particules est égale à celle du fluide, le flux massique sur la surface de la couche de particules est :

$$J = C \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = CQ \quad (1.61)$$

Q : débit du liquide sans particules.

\vec{n} : normale à la surface de la couche de particules.

Si on considère la couche de particules et les particules incompressibles, le volume de particules arrivant sur la surface supérieure de la couche de particules par unité de temps dt est :

$$\frac{dV_p}{dt} = \frac{CQ}{\rho_p} \quad (1.62)$$

ρ_p : masse volumique des particules

On suppose que la couche de particules de volume V_D a une porosité uniforme ϵ_D , par conséquent :

$$V_p = (1 - \epsilon_D)V_D \Rightarrow \frac{dV_D}{dt} = \frac{CQ}{(1 - \epsilon_D)\rho_p} \quad (1.63)$$

Etant donné que la couche de particules a une épaisseur uniforme et que la pression est constante sur le haut de la couche de particules, on peut alors écrire que :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{C}{\rho_p(1 - \epsilon_D)} L_x^2 \frac{K}{\mu} \frac{\delta P}{L_z} \quad (1.64)$$

K est la perméabilité apparente de la couche de particules prenant en compte la résistance à l'écoulement induite par la courbure des lignes de courant près de la paroi. Cette grandeur dépend de L_z et de la porosité de la plaque.

Si on emploie les notations de la figure 1.4 la différentielle du volume de la couche de particules peut s'écrire :

$$dV_D = L_x^2 dL_z \quad (1.65)$$

Ainsi l'évolution de la hauteur de la couche de particules est donnée par l'équation différentielle :

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{C}{\rho_p(1 - \epsilon_D)} \frac{K}{\mu} \frac{\delta P}{L_z} \quad (1.66)$$

On adimensionnalise le temps de la manière suivante :

$$t = \frac{\rho_p(1 - \epsilon_D)}{C} \frac{\mu L_x^2}{K_i \delta P} t^* \quad (1.67)$$

On pose également que :

$$L_z = L_x L_z^* \quad (1.68)$$

On a alors :

$$dt = \frac{1 - \epsilon_D}{X} \frac{\mu L_x^2}{K_i \delta P} dt^* \quad (1.69)$$

avec :

$$X = \frac{C}{\rho_p} \quad (1.70)$$

L'équation (1.66) devient dans le cas du modèle 2D ou du modèle 3D :

$$\frac{dL_z^*}{dt^*} = \left(\frac{K}{K_i} \right) \frac{1}{L_z^*}$$

La durée nécessaire pour obtenir une couche d'épaisseur L_z^* est alors :

$$\Delta t^* = \int_{L_{z0}^*}^{L_{z1}^*} L_z^* \left(\frac{K}{K_i} \right)^{-1} dL_z^* \quad (1.71)$$

Dans la suite du paragraphe nous allons étudier la différence entre Δt_{3D}^* et Δt_{2D}^* par l'intermédiaire du rapport $\frac{\Delta t_{2D}^*}{\Delta t_{3D}^*}$.

Évolution de la hauteur en fonction du temps

Si on considère que la paroi n'a pas d'influence, dans ce cas la réduction de perméabilité est égale à 1. L'équation (1.71) s'intègre simplement, et on retrouve l'expression communément utilisée ($L_{z0}^* = 0$ et $L_{z1}^* = L_z^*$) :

$$\Delta t^* = \frac{1}{2} L_z^{*2} \quad (1.72)$$

Dans le cas de la couche mince (et $L_z^* < 0.05$), la réduction de perméabilité pour le modèle 2D et le modèle 3D prend la forme suivante :

$$\frac{K}{K_i} = a(\epsilon) L_z^* + b(\epsilon)$$

avec pour le modèle 2D :

$$a_{2D}(\epsilon) = \frac{4 \ln(2)}{\pi} \quad (1.73)$$

$$b_{2D}(\epsilon) = \sqrt{\epsilon} \quad (1.74)$$

et pour le modèle 3D :

$$a_{3D}(\epsilon) = -4.2796 \cdot 10^{-2} + 2.0113 \epsilon^{0.471867}$$

$$b_{3D}(\epsilon) = -2.9811 + 0.90671 \epsilon + 0.13205 \epsilon^2 - 0.076898 \epsilon^3$$

Etant donné que les coefficients a et b ne dépendent pas de L_z^* . L'équation (1.71) s'intègre simplement ($L_{z0}^* = 0$ et $L_{z1}^* = L_z^*$).

$$\Delta t^* = \frac{L_z^*}{a(\epsilon)} - \frac{b(\epsilon)}{a(\epsilon)^2} \ln \left(1 + \frac{a(\epsilon)}{b(\epsilon)} L_z^* \right) \quad (1.75)$$

Dans le cas des couches épaisses ($L_z^* \geq 1.0$), la réduction de perméabilité pour le modèle 2D et le modèle 3D prend la forme suivante :

$$\frac{K}{K_i} = \frac{L_z^*}{L_z^* + c(\epsilon)}$$

Pour le modèle 2D :

$$c_{2D}(\epsilon) = -\frac{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi \sqrt{\epsilon}}{2} \right) \right)}{\pi} \quad (1.76)$$

Pour le modèle 3D :

$$c_{3D}(\epsilon) = \frac{a + c\sqrt{\epsilon} + e\epsilon}{1 + b\sqrt{\epsilon} + d\epsilon}$$

avec :

$$\begin{aligned} a &= -1.0945.10^2 \\ b &= -2.3759.10^2 \\ c &= 2.1731.10^2 \\ d &= 1.0973.10^2 \\ e &= -1.0787.10^2 \end{aligned}$$

Pour les couches épaisses l'intégration de (1.71) est triviale :

$$\Delta t^* = c(\epsilon) (L_{z1}^* - L_{z0}^*) + \frac{1}{2} (L_{z1}^{*2} - L_{z0}^{*2}) \quad (1.77)$$

On retrouve l'expression (1.72) au terme additionnel $c(\epsilon)L_z^*$ près. Lorsque $L_z^* \rightarrow \infty$ ce terme devient négligeable devant $\frac{1}{2}L_z^{*2}$. Quand $\epsilon \rightarrow 1$ $c(\epsilon) \rightarrow 0$, l'influence de la paroi est négligeable sur la réduction de perméabilité ($K \rightarrow K_i$) et on retrouve (1.72).

Dans le cas des couches d'épaisseurs intermédiaires ($0.1 \leq L_z^* \leq 1.0$) les expressions pour la réduction de perméabilité en fonction de L_z^* sont plus complexe. Pour le modèle à 2 dimensions :

$$\frac{K}{K_i} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{K}{K_i} \right)_f + \left(\frac{K}{K_i} \right)_s \right)$$

avec :

$$\left(\frac{K}{K_i} \right)_f = \frac{\pi L_z^*}{\ln(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})} \quad (1.78)$$

$$\left(\frac{K}{K_i} \right)_s = \frac{\pi L_z^*}{\pi L_z^* - \ln \beta} \quad (1.79)$$

$$\alpha = \frac{\sinh(\pi L_z^*)}{\beta} \quad (1.80)$$

$$\beta = \sin \left(\frac{\pi \sqrt{\epsilon}}{2} \right) \quad (1.81)$$

Pour le modèle 3D :

$$\left(\frac{K_1}{K_i} \right)_\epsilon = \alpha_1(\epsilon) + \frac{\alpha_2(\epsilon)}{1 + \left(\frac{L_z^*}{\alpha_3(\epsilon)} \right)^{\alpha_4(\epsilon)}} \quad (1.82)$$

Les expressions des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont données par (1.54), (1.55) et (1.56).

L'intégration de l'équation différentielle (1.71) pour le modèle 3D donne le résultat suivant :

$$\Delta t^* = -\frac{1}{2\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)} [(\alpha_1 + \alpha_2)(L_{z0}^{*2} - L_{z1}^{*2}) - \alpha_2 (L_{z0}^{*2}\Pi(L_{z0}^*, \epsilon) - L_{z1}^{*2}\Pi(L_{z1}^*, \epsilon))] \quad (1.83)$$

avec :

$$\Pi(L_z^*, \epsilon) = {}_2F_1 \left(\frac{2}{\alpha_4(\epsilon)}, 1, \frac{\alpha_4(\epsilon) + 2}{\alpha_4(\epsilon)}, -\frac{\alpha_1(\epsilon) \left(\frac{L_z^*}{\alpha_3(\epsilon)}\right)^{\alpha_4(\epsilon)}}{\alpha_1(\epsilon) + \alpha_2(\epsilon)} \right) \quad (1.84)$$

Où ${}_2F_1(a, b, c, z)$ est la fonction hypergéométrique définie par :

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1+a)}{\Gamma(1+a)} \frac{\Gamma(n+1+b)}{\Gamma(1+b)} \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(n+1+c)} \frac{z^n}{n!}$$

Comparaison des modèles 2D et 3D

Une comparaison entre les résultats des modèles 2D et 3D est proposée sur les figures 1.33, 1.34 et 1.35. En accord avec les résultats sur les perméabilités apparentes, le temps de formation d'un dépôt d'épaisseur donnée est plus long à même porosité de paroi, en 3D qu'en 2D. L'écart peut être de 100% pour des porosités ($\approx 10\%$ - 30%) et des hauteurs de dépôt représentatifs des membranes de filtration. Ceci illustre qu'il est nécessaire d'utiliser les résultats 3D, même s'ils ne se présentent pas sous une forme aussi compacte que les formules plus simples du cas 2D.

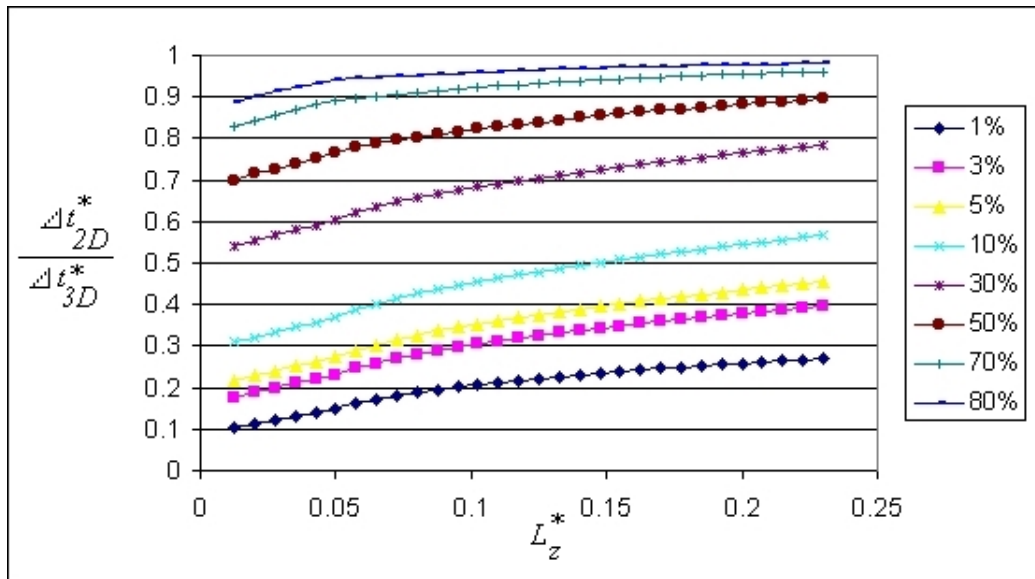


Fig. 1.33: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.0125, 2.3]$

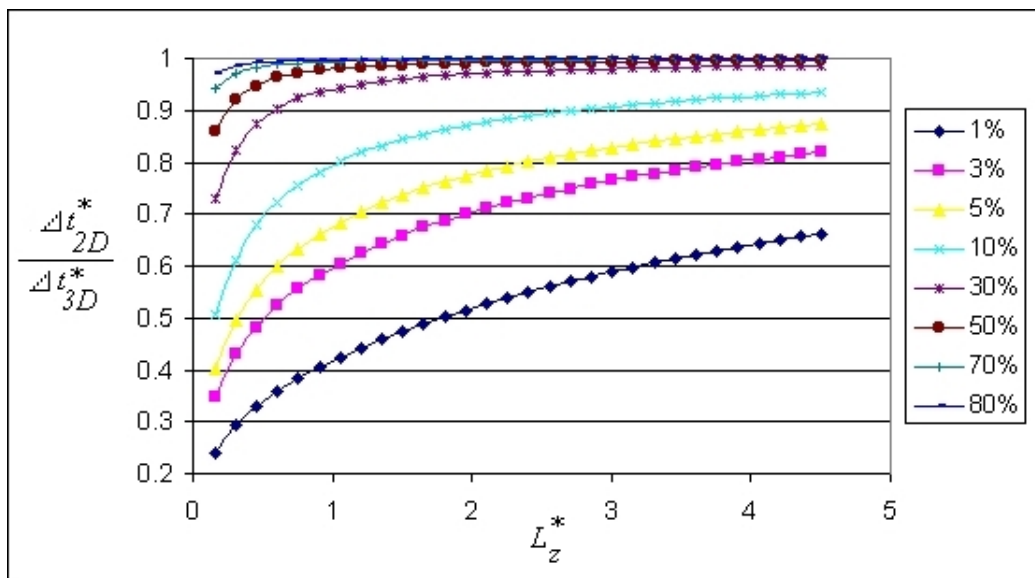


Fig. 1.34: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.15, 4.5]$

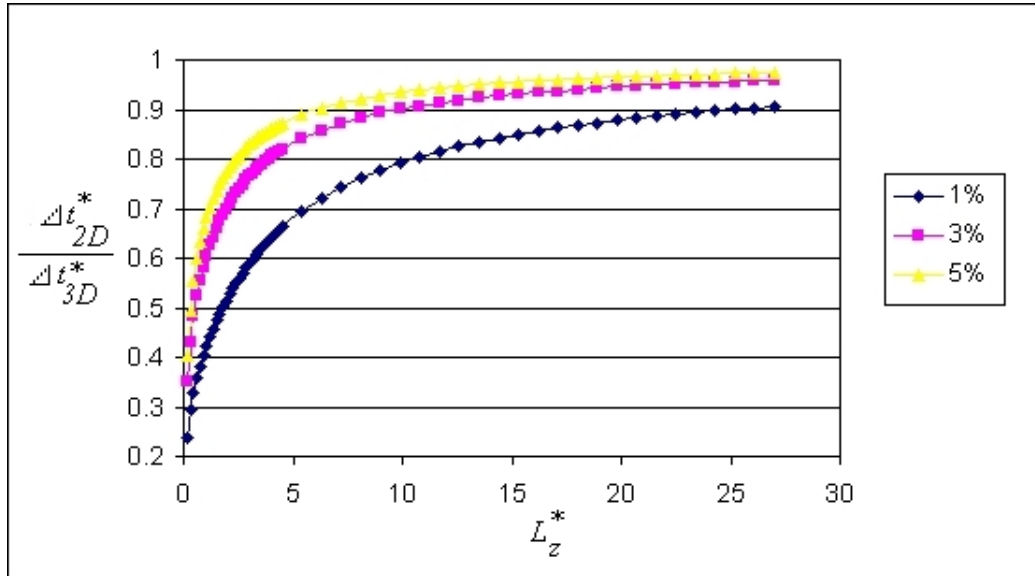


Fig. 1.35: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.15, 27]$

Comparaison du modèle 3D et des modèles "classiques"

Si on modélise la résistance hydraulique R du système paroi + couche de particules par l'addition de la résistance hydraulique de la paroi R_M et de la couche de particules R_I :

$$R = R_M + R_I \Leftrightarrow \frac{L_z}{K} = \frac{L_z}{K_i} + R_M$$

alors la réduction de perméabilité est évaluée de la manière suivante :

$$\frac{K}{K_i} = \frac{1}{1 + \frac{R_M K_i}{L_z}}$$

R_M peut être évaluée, par exemple, par la résolution de l'équation de Stokes dans notre type de configuration (Cf. figure 1.3). Pour des pores carrés [Wan94], $R_M^* = L_x * R_M$ est comprise entre 0.0002 et 0.15 (Cf. figure 1.36). La perméabilité intrinsèque K_i d'un dépôt est telle que $K_i < 1.10^{-6}$. On peut également dire que $Lz > 0.0001$, ainsi la réduction de perméabilité est négligeable ($\frac{K}{K_i} > 0.999$). Par conséquent, la durée nécessaire pour obtenir une couche de particules de hauteur L_z^* , dans ce cas là, est de la forme :

$$\Delta t_I^* = \frac{1}{2} L_z^{*2} \quad (1.85)$$

Sur les figures 1.37, 1.38 et 1.38 on a représenté le rapport $\frac{\Delta t_I^*}{\Delta t_{3D}^*}$ pour trois différents intervalles de L_z^* . Si on ne tient pas compte de la réduction de perméabilité induite par la

courbure des lignes de courant à proximité de la paroi, le temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules d'épaisseur donnée est sous-évalué. L'écart peut être important et atteindre plus d'un facteur 10 lors du début de la formation du dépôt.

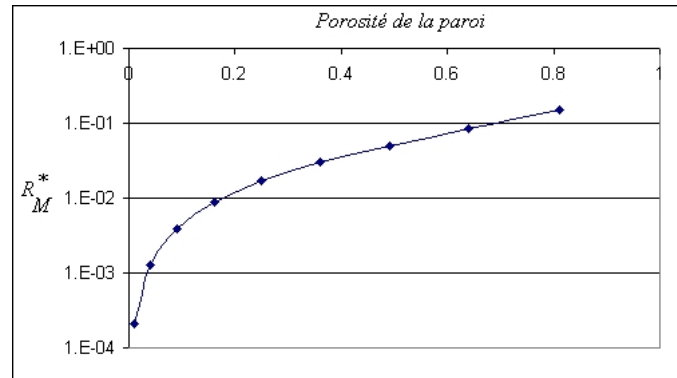


Fig. 1.36: Variation de la résistance hydraulique en fonction de la porosité de la paroi [Wan94].

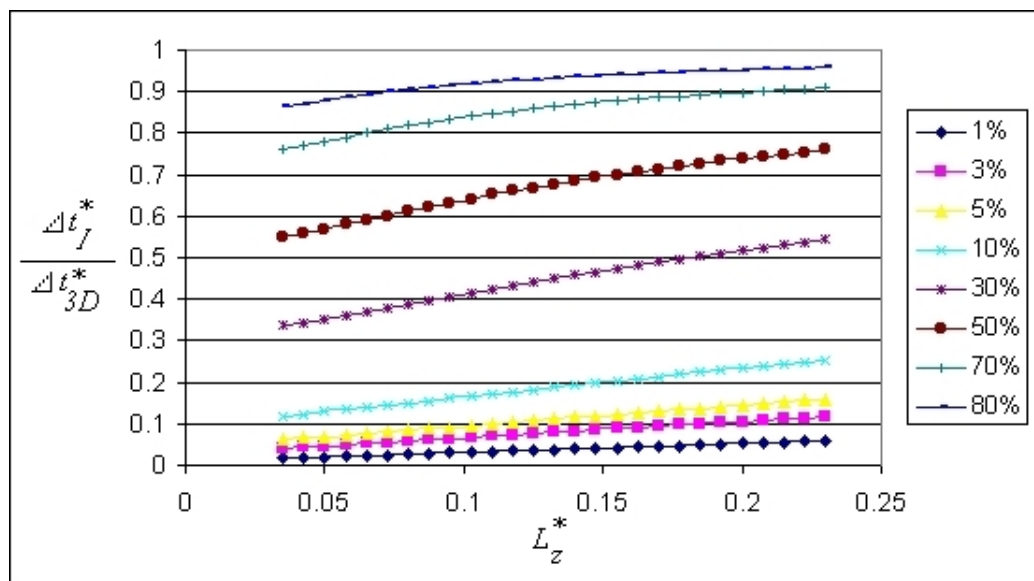


Fig. 1.37: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.0125, 2.3]$

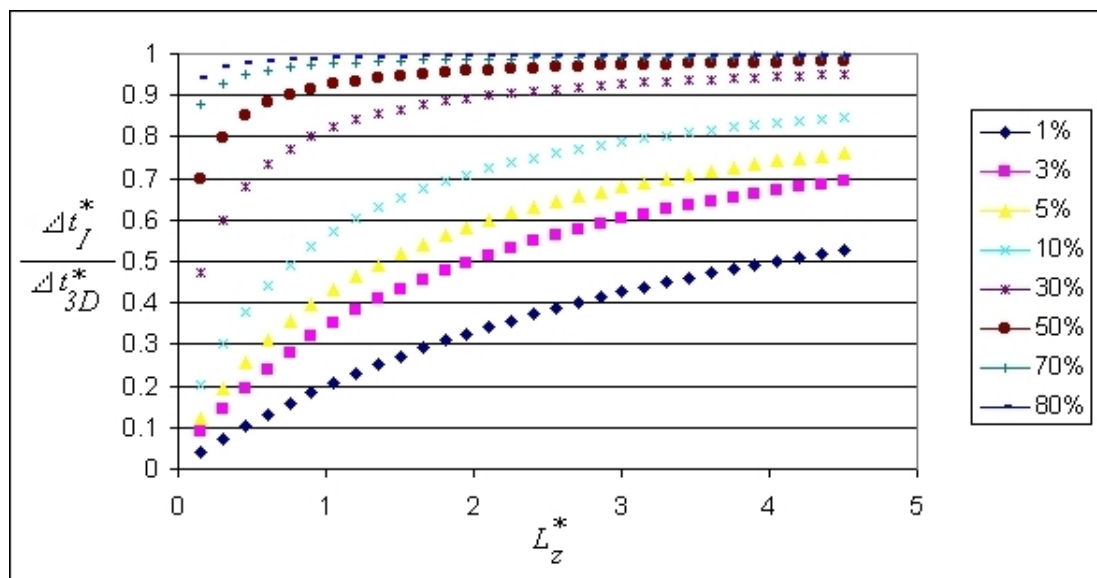


Fig. 1.38: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.15, 4.5]$

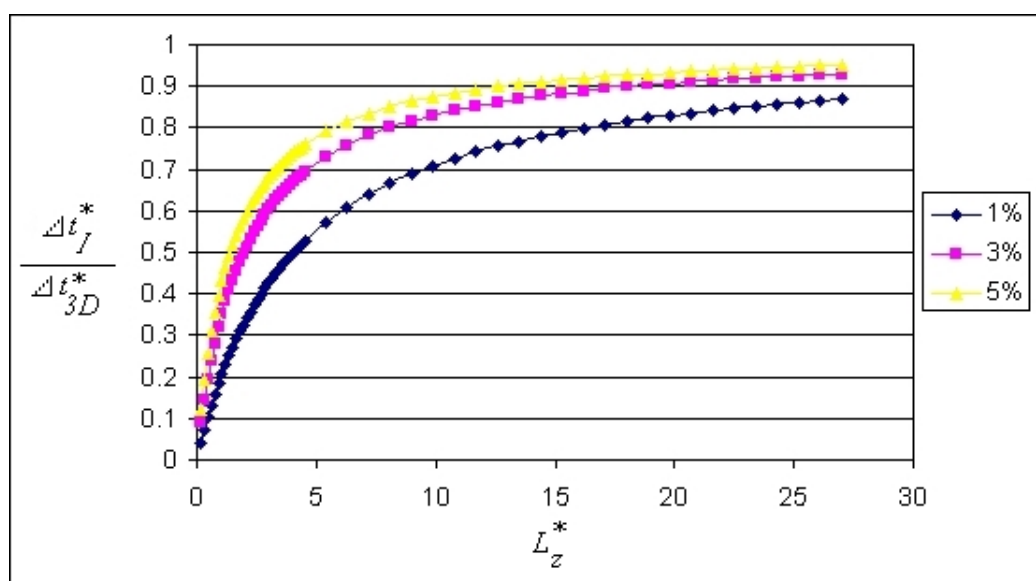


Fig. 1.39: Temps nécessaire à l'obtention d'une couche de particules de hauteur L_z^* pour $L_z^* \in [0.15, 27]$

1.7.2 Filtre à particules diesel

Une application directe des modèles analytiques déterminant la réduction de perméabilité en fonction de la porosité de la paroi filtrante et de la hauteur de la couche de particules est la modélisation de la chute de pression due à la couche de suies se formant sur les parois d'un filtre diesel à particules [OBSQ03]. Ce filtre est composé de centaines de canaux carrés, dont l'un des côtés est obturé (Cf. figure 1.40). L'air chargé de suies entre dans le canal (flèches rouges) et dépose les particules à la traversée des parois composées de grains de SiC (carbure de silicium).

Les pores formés par ces grains de SiC composant la paroi ont un diamètre moyen compris entre $D_p = 9$ et $15\mu m$, tandis que celui des particules de suies est de l'ordre de $10nm$. La séparation des échelles entre la taille des pores et celle des particules de suie dans ce cas là est bien vérifiée. Dans ce filtre la phase de filtration en profondeur (les particules de suies vont se déposer à l'intérieur de la paroi) est très courte. Elle est suivie par la phase de filtration en surface qui est le procédé de séparation dominant dans ce type de filtre. La diminution de la perméabilité du filtre est essentiellement provoquée par la formation de la couche de particules sur la paroi. L'objectif dans cette modélisation, connaissant les variations du débit d'air entrant dans le filtre et la concentration des particules, est de déterminer la perte de charge en fonction de la masse de particules déposée durant la phase de filtration en surface.

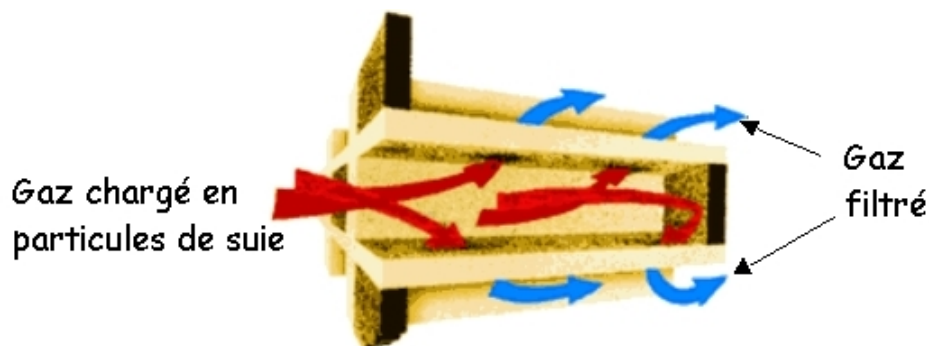


Fig. 1.40: Schéma de fonctionnement d'un filtre à particule diesel

La paroi en céramique du filtre est modélisée par un empilement cubique de sphères (Cf. figure 1.41) s'inter-pénétrant afin de rendre compte du pontage réalisé par des grains de SiC frittés. Il est évident que dans cette géométrie, la modélisation de ce type pores par un pore carré semble judicieuse (Cf. figure 1.41). Les particules de suie, beaucoup plus petites que les pores formés par les grains de SiC, forment un milieu poreux à travers lequel l'air peut s'écouler. On considère ainsi que les premières particules qui viennent se déposer sur la paroi, sont suffisamment petites pour ne pas modifier pas la forme initiale (carrée) du pore.

Afin d'obtenir une corrélation rendant compte précisément des résultats numériques,

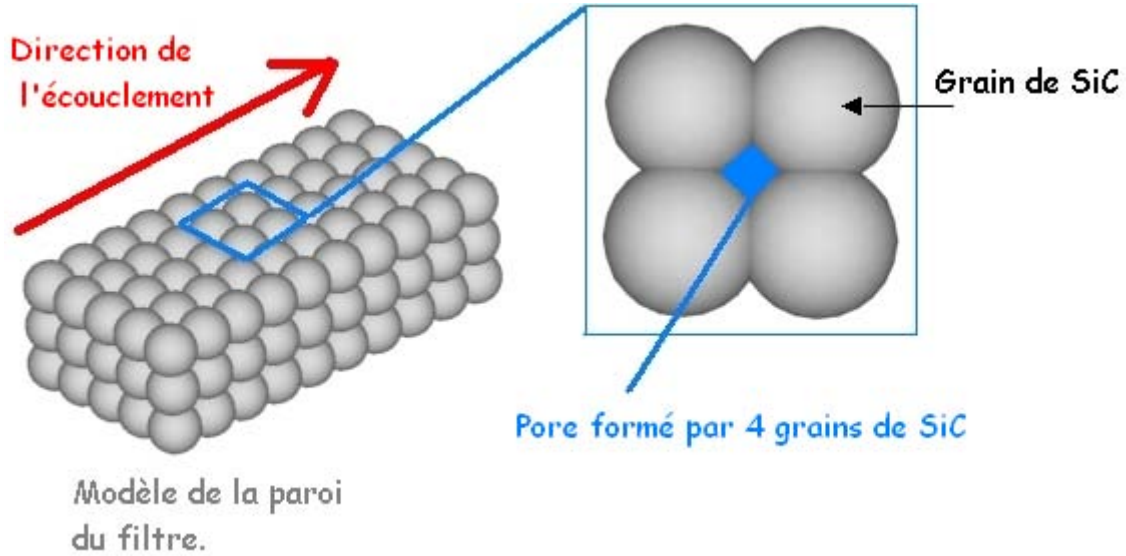


Fig. 1.41: Modélisation de la paroi par un empilement de sphères imbriquées.

nous avons établi des corrélations pour une porosité de paroi de $\epsilon = 0.39$. Si D_p est le diamètre des particules composant la paroi filtrante, alors :

Si $L_z < 2D_p$: (modèle couche mince)

$$\zeta_m = \frac{K}{K_i} = 0.778487 \frac{L_z}{D_p} + 0.135586$$

Si $L_z \geq 2D_p$:

$$\zeta_e = \frac{K}{K_i} = \exp \left(\frac{-2.39426896 - 0.0093196 \frac{L_z}{D_p}}{1 + 4.376261 \frac{L_z}{D_p}} \right)$$

Connaissant la perméabilité intrinsèque K_{suie} (correspondant à la perméabilité de la couche de particules sans paroi), déterminée expérimentalement, on peut ainsi en déduire la perméabilité apparente de la couche de particules de suie prenant en compte la présence de la paroi.

$$K_{depot} = \zeta_{m,e} K_{suie}$$

Ainsi la résistance hydraulique totale peut se calculer comme la somme de 2 résistances en série : celle de la couche de particules de suie et celle de la paroi (Cf. figure 1.42) :

$$K_T = \frac{K_{depot} K_{paroi} L_z}{L_P K_{depot} + L_z K_{paroi}}$$

Le débit passant à travers S_F est alors :

$$Q = S_F \frac{K_T}{\mu} \frac{\delta P}{L_z}$$

Si m_S et ρ_S sont respectivement la masse et la masse volumique des suies, ϵ_D la porosité de la couche de particules de suie, alors la perte de charge s'exprime de la manière suivante :

$$\delta P = m_S \frac{\mu Q}{S_F^2 \rho_S \epsilon_D K_T}$$

m_S et S_F étant respectivement la masse totale de suie et la surface totale de filtration. Cette relation entre le débit et la perte de charge entre les 2 canaux permet de coupler la résolution de l'écoulement dans les 2 canaux, sans avoir à résoudre explicitement l'équation de Darcy dans le système paroi-(couche de particules). Des essais expérimentaux menés par Oxarango mettent en évidence un très bon accord (Cf. figure 1.43) entre la simulation et l'expérience tant que la réduction de section du canal occasionnée par l'accumulation de suie n'est pas trop importante.

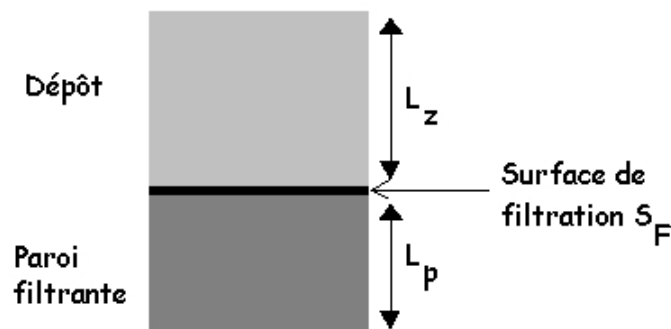


Fig. 1.42: Représentation de la couche de particules de suie sur la paroi en SiC.

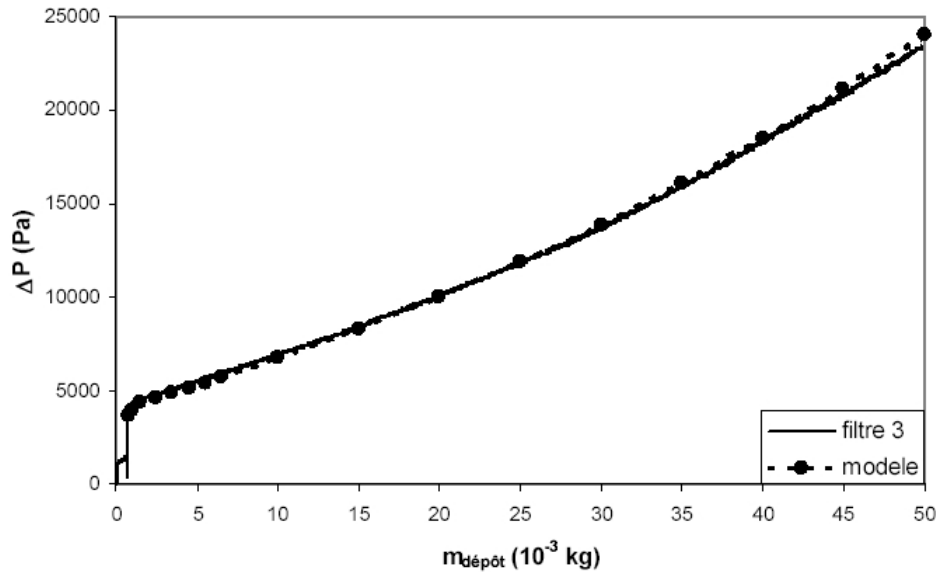


Fig. 1.43: Comparaison entre la perte de charge totale expérimentale et celle déterminé par le modèle [Oxa04].

1.8 conclusion

Dans ce chapitre nous avons mis en évidence l'importance de la prise en compte de la réduction *apparente* de perméabilité de la couche de particules limitée par une paroi perforée. Lorsque l'épaisseur de la couche de particules est faible la résistance hydraulique de la paroi (induite par la courbure des lignes de courant) n'est pas négligeable devant celle de la couche de particules. La réduction *apparente* de perméabilité de la couche de particules peut être de 50% pour une paroi ayant une porosité de 0.5 si la couche de particules a une épaisseur de la taille du pore. Cette réduction de perméabilité est d'autant plus importante que l'épaisseur de la couche de particules est faible et que la porosité de la paroi est faible.

L'approximation qui consiste à additionner la résistance hydraulique de la couche de particules et celle de la paroi ne rend pas compte de la structure de l'écoulement. Une évaluation précise de la réduction de perméabilité nécessite la résolution des équations régissant l'écoulement dans la couche de particules.

Nous avons montré qu'il était possible d'obtenir une solution semi-analytique du champ de pression au sein de la couche de particules à condition que celle-ci soit uniforme sur toute la paroi et que les pores aient une répartition spatiale périodique. On suppose également que l'écoulement au sein de la couche de particules est régi par les équations de Darcy, ce qui impose les hypothèses suivantes :

- La séparation des échelles, entre la taille des particules formant la couche de particules et la dimension caractéristique des pores de la paroi, est vérifiée.

- La couche de particules est caractérisée par une perméabilité intrinsèque homogène et isotrope.
- Le nombre de Reynolds de pore caractérisant l'écoulement dans la couche de particules est très inférieur à 1.

Nous avons pu calculer assez simplement la réduction de perméabilité pour une gamme de porosité de paroi allant de 5% à 90% et des épaisseurs variant de 0.005 à 10 fois la taille caractéristique du pore.

La réduction de perméabilité dans le cas d'un modèle 2D est moins importante quelque que soit la hauteur de la couche de particules et la porosité de la paroi. Étant donné que les variations des réductions de perméabilité dans les 2 modèles présentent des similarités, nous avons pu établir des formules analytiques simples. Comme dans la modélisation en 2D, il est commode de distinguer, quelque soit la porosité de la paroi filtrante, 3 gammes d'épaisseurs :

- les couches minces ($L_z^* < 0.05$),
- les couches d'épaisseur intermédiaire ($0.05 < L_z^* < 1$),
- et les couches épaisses ($L_z^* > 1$),

L_z^* représentant la taille relative entre l'épaisseur de la couche de particules et la taille caractéristique de la cellule représentative de la paroi.

Nous avons mis en évidence l'impact de la réduction de perméabilité sur l'évolution temporelle de l'épaisseur de la couche de particules en fonction du temps (cinétique de colmatage) au cours d'une filtration à pression constante : le temps de formation d'une couche de particules d'une épaisseur donnée est plus important dans le cas d'une modélisation en 3D que dans le cas d'une modélisation 2D. De même, si on modélise la résistance hydraulique par une simple addition des résistances de la paroi et de la couche de particules on sous estime de façon importante le temps de formation de la couche de particules. Les modèles de réduction de perméabilité établis, en fonction de la hauteur de la couche de particules et de la porosité de la paroi, dans ce chapitre, ont été utilisés afin de modéliser la couche de particules dans des systèmes complets de filtration tels que les filtres à particules diesel ou les filtres plissés.

Nous avons cependant supposé que la couche de particules, en début de filtration (dans le cas d'une filtration en surface : les particules n'entrent pas dans le pore), avait une croissance uniforme sur toute la paroi, ce qui ne semble pas être le cas : les zones préférentielles d'accumulation des particules semblent être alors situées sur le haut de la couche de particules, en regard du pore, là où le gradient de pression de la couche de particules est le plus important. Enfin l'hypothèse de séparation des échelles ne permet pas de modéliser la couche de particules lorsque la taille des particules est de l'ordre de la taille caractéristique des pores.

Ces différents points font l'objet des chapitres suivants.

2. MODÉLISATION DE LA FORMATION D'UN DÉPÔT NON UNIFORME

2.1 Introduction

Nous avons supposé, dans le chapitre 1, que la croissance du dépôt était uniforme. Cependant des simulations numériques directes [FS00] calculant la densité de probabilité du point d'impact d'une particule approchant un pore dans un écoulement de type Stokes, ont montré que la position de capture sur la membrane était fortement liée à la porosité de la paroi, la taille de la particule et au taux de cisaillement (dans le cas de la filtration tangentielle). Lors d'une étude expérimentale et numérique sur l'accumulation de particules sur un milieu poreux bi-dimensionnel [FSDP99] les auteurs ont montré que la morphologie du dépôt était corrélée à la forme de l'écoulement. La croissance du dépôt, calculée à l'aide de la densité de probabilité d'impact des particules, sans tenir compte de la modification de l'écoulement provoquée par la modification locale de géométrie du milieu, a permis de simuler les différents processus expérimentaux d'envahissement du milieu par les particules. Une étude numérique bi-dimensionnelle de la réduction de perméabilité d'un dépôt en filtration frontale [Duf00], s'appuyant sur les mêmes techniques de formation de dépôt que l'étude précédente, prenant en compte la modification de l'écoulement due à la croissance de la couche de particules, a montré d'une part, que la réduction de perméabilité était plus forte que dans le cas d'un dépôt uniforme et d'autre part, que le dépôt avait tendance à croître préférentiellement sur la partie du haut du dépôt en regard du pore durant la phase initiale de formation. Le but de ce chapitre est d'étendre ces études au cas tri-dimensionnel en tenant des modifications de l'écoulement avec l'évolution du dépôt. Cette technique fait intervenir un paramètre numérique imposé *a priori* qui concerne le taux de croissance du dépôt entre 2 étapes de calcul de l'écoulement (à chaque modification de la forme de la couche de particules). Dans cette étude nous avons modélisé ce terme en fonction de la porosité du dépôt, de la fraction volumique et de la taille des particules.

Nous présenterons, tout d'abord, le modèle de croissance du dépôt et les hypothèses faites dans le cadre de cette étude. Ensuite nous introduirons la méthode numérique utilisée. Enfin nous comparerons d'une part, la réduction de perméabilité obtenue par ces simulations à celle du chapitre précédent et d'autre part, l'impact de la formation du dépôt sur l'évolution

temporelle du débit de filtration.

2.2 Modèle de colmatage

2.2.1 Hypothèses de modélisation

On suppose, comme dans le chapitre 1, que les pores de la paroi filtrante ont une répartition spatiale périodique. L'écoulement transportant les particules dans le cas de filtration frontale ou tangentielle [FSDP99] est perpendiculaire à la paroi filtrante. On se place dans le cadre de la séparation des échelles entre la taille des particules l et celle de la taille du pore d : $\frac{l}{d} \ll 1$. Dans ce cas là, plusieurs études numériques d'une particule isolée en interaction, hydrodynamique + moléculaire [KWPW98], électrostatique + moléculaire [FSA99], hydrodynamique + électrostatique+ brownienne [KZ04] avec un pore, démontrent qu'en dessous d'une vitesse de filtration critique, les particules ne bouchent pas le pore et peuvent rester en suspension au-dessus de la paroi (la répulsion engendrée par les forces physico-chimiques sont à l'origine d'une barrière de potentiel que la force de traînée ne peut contre balancer). Cependant des études expérimentales [HVT99], [CHG02] et numériques [MMZ05] mettent en évidence une réduction significative de cette vitesse critique lorsque la concentration en particules augmente. On supposera, dans cette étude que la vitesse de filtration est inférieure à la vitesse critique de filtration. Les particules, ne franchissant pas le pore, s'accumulent au-dessus de ce dernier.

On suppose que la solution filtrée contient une fraction volumique X des particules et que le dépôt a une porosité uniforme ϵ_D .

$$X = \frac{V_P}{V_D} \quad (2.1)$$

$$V_D = V_P + V_F$$

V_P : volume du dépôt

V_P : volume des particules

V_F : volume du fluide porteur

Étant donné que la chute de pression est bien plus importante à travers le dépôt que dans le domaine fluide (Cf. figure 2.1), on peut faire l'approximation suivante : $P_2 - P_0 \approx P_1 - P_0$. Ainsi la différence de pression est appliquée entre le haut de dépôt et la sortie du pore. Dans le cas où la vitesse du fluide est de l'ordre de la vitesse moyenne à l'intérieur du dépôt [Duf00], on peut alors effectuer les approximations suivantes :

$$\begin{aligned}\vec{v}_{Stokes} \cdot \vec{n} &= \vec{v}_{Darcy} \cdot \vec{n} \\ \vec{v}_{Stokes} \cdot \vec{t} &= \vec{v}_{Darcy} \cdot \vec{t} = 0 \\ P_{Stokes} &= P_{Darcy}\end{aligned}$$

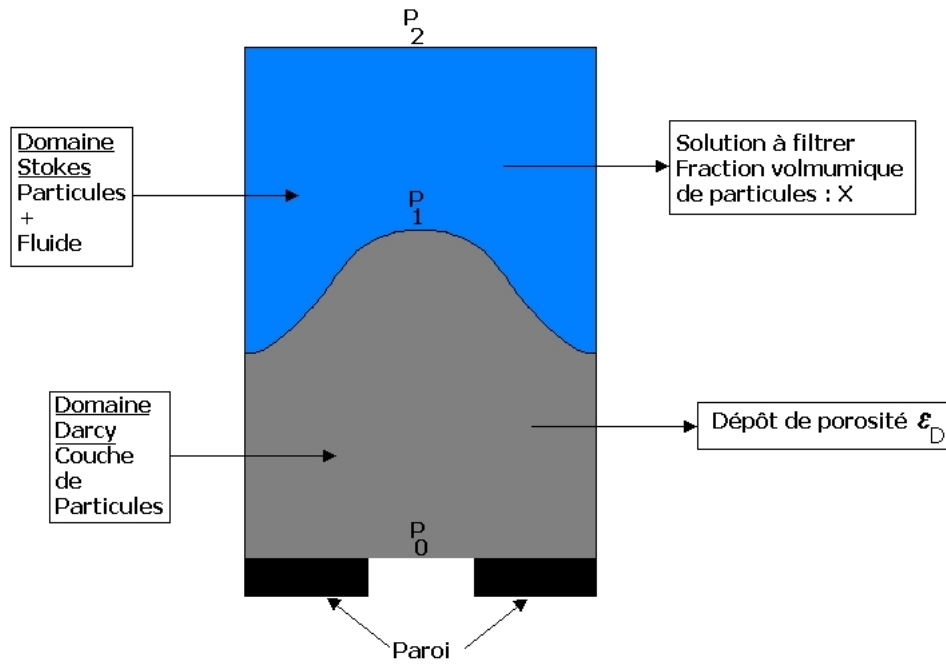


Fig. 2.1: Modélisation du dépôt.

La vitesse du fluide et des particules très proches de la surface du dépôt est perpendiculaire à cette dernière. On supposera que la croissance du dépôt est normale à sa surface supérieure. Dans le paragraphe suivant, nous allons modéliser la croissance en fonction du flux.

2.2.2 Modélisation de l'évolution de la forme du dépôt

Si C ($kg.m^{-3}$) est la concentration massique des particules que l'on suppose constante dans toute la solution :

$$C = \frac{m_P}{V_F + V_P} \quad (2.2)$$

m_P est la masse totale des particules dans le mélange fluide+particule

Si \vec{v} est la vitesse du mélange fluide + particules à la surface du dépôt, alors la densité de flux \vec{j} ($kg.m^{-2}.s^{-1}$) arrivant sur le haut du dépôt est :

$$\vec{j} = C\vec{v} \quad (2.3)$$

Si on suppose C constante dans tout le mélange solide liquide, le flux J ($kg.s^{-1}$) des particules arrivant sur le haut du dépôt est alors :

$$J = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = \int_S C\vec{v} \cdot \vec{n} dS = C \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.4)$$

La masse m (kg) qui s'accumule sur le dépôt pendant le temps dt est :

$$dm = Jdt \quad (2.5)$$

La porosité du dépôt ϵ_D , supposée égale à la porosité moyenne, s'exprime à l'aide du volume total des particules V_p et du volume du dépôt V_D :

$$\epsilon_D = 1 - \frac{V_p}{V_D} \quad (2.6)$$

avec :

$$m = \rho_p V_p \quad (2.7)$$

où ρ_p ($kg.m^{-3}$) est la masse volumique des particules.

Par conséquent, l'équation différentielle décrivant l'évolution temporelle du volume du dépôt est la suivante :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{C}{(1 - \epsilon_D)\rho_p} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS \quad (2.8)$$

d'après (2.1) et (2.2) :

$$X = \frac{C}{\rho_p} \quad (2.9)$$

Si la surface du haut du dépôt est décrite par la surface d'équation $z = h(x, y)$, alors :

$$V_D = \int_S h(x, y) dS \quad (2.10)$$

On peut alors écrire que :

$$\frac{dV_D}{dt} = \int_S \frac{dh(x, y)}{dt} dS \quad (2.11)$$

En identifiant (2.8) et (2.11), on en déduit que :

$$\frac{dh(x, y)}{dt} = \frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \vec{v}(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) \quad (2.12)$$

Étant donné, que par hypothèse, il y a continuité de la vitesse normale sur la surface du dépôt on peut écrire que :

$$\vec{v}(x, y) = -\frac{K_i}{\mu} \vec{\nabla} P(x, y) \quad (2.13)$$

On a donc :

$$\frac{dh(x, y)}{dt} = -\frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \frac{K_i}{\mu} \partial_n P(x, y) \quad (2.14)$$

avec :

$$\partial_n P(x, y) = \vec{\nabla} P(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) \quad (2.15)$$

Les particules arrivent à la surface du dépôt avec une vitesse normale à cette dernière. On peut donc supposer [Duf00] que l'accroissement du dépôt s'effectue perpendiculairement à la surface. On peut alors écrire que :

$$\frac{d\vec{h}(x, y)}{dt} = -\frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \frac{K_i}{\mu} \vec{\nabla} P(x, y) \quad (2.16)$$

Par conséquent, la variation de hauteur du dépôt, durant l'intervalle de temps Δt peut se mettre sous la forme suivante :

$$\Delta \vec{h}(x, y) \approx -\frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \frac{K_i}{\mu} \vec{\nabla} P(x, y) \Delta t \quad (2.17)$$

Si d_p est la distance moyenne entre les particules se trouvant dans la solution et D leur diamètre moyen on peut alors mettre X sous la forme suivante :

$$X = \frac{\pi}{6} \left(\frac{D}{d_p} \right)^3 \quad (2.18)$$

Le Δt minimum (Δt_{min}) que l'on puisse prendre est la durée pendant laquelle au moins une particule ayant la vitesse la plus forte v_{max} a atteint la surface du dépôt.

$$v_{max} = \frac{K_i}{\mu} |\partial_n P|_{max} \quad (2.19)$$

Etant donné que les particules sont en moyenne distante de d_p :

$$\Delta t_{min} = \frac{d_p}{v_{max}} = \frac{\mu d_p}{K_i |\partial_n P|_{max}} \quad (2.20)$$

En fixant $\Delta t = \Delta t_{min}$ dans (2.17) et en remplaçant X par son expression (2.18), le modèle de croissance locale du dépôt prend la forme suivante :

$$\Delta \vec{h}(x, y) = -\alpha_h \frac{\vec{\nabla} P(x, y)}{|\partial_n P|_{max}} \quad (2.21)$$

Cette variation de hauteur du dépôt est induite par les particules qui arrivent sur le dépôt.

avec :

$$\alpha_h = \frac{D}{(1 - \epsilon_D)} \left(\frac{\pi X^2}{6} \right)^{1/3} \quad (2.22)$$

Le préfacteur α_h ne dépend que de grandeurs constantes au cours du temps : X , le diamètre moyen des particules et la porosité du dépôt.

Dans le modèle à 2 dimensions proposé par Frey [Fre98] et Dufrèche [Duf00] la croissance du dépôt est proportionnelle à la densité de probabilité $dI(x, y)$ d'impact des particules transportées par le fluide sur le haut du dépôt. Elle s'exprime sous la forme suivante :

$$\Delta \vec{h}(x, y) = \alpha dI(x, y) \vec{n} \quad (2.23)$$

$dI(x, y)$: densité de probabilité d'impact des particules

Dans ce modèle α est un paramètre inférieur au rayon des particules D fixé arbitrairement. Si on compare (2.23) avec (2.21) et (2.22) on peut écrire que :

$$dI(x, y) \equiv \frac{\vec{\nabla} P(x, y)}{|\partial_n P|_{max}} \quad (2.24)$$

$$\alpha_h \equiv \alpha \quad (2.25)$$

Les 2 modèles décrivent de façon équivalente la croissance du dépôt. En effet, les lignes de courant (dans le domaine fluide) tendent à se resserrer lorsqu'elles sont proches des régions où le gradient normal de pression, sur le haut du dépôt, est le plus important, ce qui implique une probabilité d'impact plus importante. Les 2 paramètres α et α_h sont homogènes à une longueur. Dans notre cas α_h est donc déterminé à partir de la fraction volumique des particules X (Cf. (2.1)), de la porosité du dépôt ϵ_D et du diamètre moyen des particules D . Pour un même gradient de pression, si X , D ou ϵ_D augmentent, il est clair que α_h augmente

(Cf. (2.22)). Ainsi pour un même gradient de pression, la variation locale de la hauteur du dépôt est plus importante (Cf. (2.21)).

Cependant, afin d'initialiser la simulation de la formation du dépôt, il faut *a priori* connaître la forme de la première couche de particules. Nous supposons que cette couche de particule est uniforme et que son épaisseur est très mince. Cette hypothèse permet d'une part, de calculer le gradient normal de pression et d'autre part de simuler de manière convenable le comportement d'une paroi sans dépôt. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent qu'en dehors de la zone poreuse située juste au-dessus du trou les vitesses étaient négligeables lorsque l'épaisseur du dépôt était très mince.

2.3 Calcul du champ de pression à l'intérieur du dépôt

2.3.1 Mise en équation du problème

En effectuant les mêmes hypothèses que dans le chapitre précédent, on trouve un système d'équations identique, à la différence importante près que la surface du haut du dépôt peut avoir une forme quelconque.

Le système à résoudre est alors le suivant :

$$\Delta P = 0$$

$$P = P_1 \text{ en } z = h(x, y) \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0, \frac{L_x}{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0, \frac{L_x}{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0 \text{ avec } x > \frac{d_x}{2}, y > \frac{d_x}{2}$$

$$P = 0 \text{ en } z = 0 \text{ avec } x \leq \frac{d_x}{2}, y \leq \frac{d_x}{2}$$

Si on introduit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
x &= x' \frac{L_x}{2} \\
y &= y' \frac{L_x}{2} \\
z &= z' \frac{L_x}{2} \\
P &= (P_1 - P_0)\Theta + P_0
\end{aligned}$$

On aboutit au système suivant :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z'^2} = 0 \quad (2.27)$$

$$\theta = 1 \text{ en } z' = h(x', y') \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x'} = 0 \text{ en } x' = 0, 1 \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y'} = 0 \text{ en } y' = 0, 1 \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z'} = 0 \text{ en } z' = 0 \text{ avec } x' > \frac{d_x}{L_x}, y' > \frac{d_x}{L_x} \quad (2.31)$$

$$\theta = 0, \text{ en } z' = 0 \text{ avec } x' \leq \frac{d_x}{L_x}, y' \leq \frac{d_x}{L_x} \quad (2.32)$$

Dans ce cas, il est alors impossible d'obtenir une expression analytique du champ de pression. Il faut déterminer la dérivée normale $\vec{\nabla} P \cdot \vec{n}$ du champ de pression sur $h(x, y)$ qui est de forme quelconque au cours de la formation du dépôt. La méthode des éléments de frontières, que nous présentons dans le paragraphe suivant, donne directement la valeur de $\vec{\nabla} P \cdot \vec{n}$ sur $h(x, y)$ et seul un maillage de la frontière du domaine de calcul est nécessaire.

2.3.2 Discrétisation et résolution par la méthode des éléments de frontières

La formulation intégrale régularisée de l'équation (2.27) est la suivante (Cf. annexe, [Bon95], [Poz02], [SJ02] [DHP03], [GKRR92], [LJ75]) :

$$\int_{\partial\Omega} [(\theta(\mathbf{y}) - \theta(\mathbf{x})) H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_n \theta(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] dS(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.33)$$

$\partial\Omega$ est la frontière du domaine Ω : le contour du dépôt

$G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ et $H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sont les fonctions de Green associées à l'opérateur laplacien

\mathbf{x} est un point parcourant $\partial\Omega$

\mathbf{y} est un point parcourant $\partial\Omega$

$$\partial_n\theta(\mathbf{y}) = \vec{\nabla}\theta(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y})$$

Le problème consiste alors à déterminer les grandeurs $\theta(\mathbf{y})$ et $\partial_n\theta(\mathbf{y})$ avec $\mathbf{y} \in \partial\Omega$. Pour cela on discrétise la frontière $\partial\Omega$ en éléments triangulaires τ_e , on obtient alors une approximation $\partial\Omega'$ de cette dernière :

$$\partial\Omega \rightarrow \partial\Omega' = \bigcup_{e=1}^{N_e} \tau_e \quad (2.34)$$

L'équation (2.33) devient alors :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \int_{\tau_e} [(\theta(\mathbf{y}) - \theta(\mathbf{x})) H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_n\theta(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = 0 \quad (2.35)$$

Il faut également déterminer la base de fonctions d'interpolation décrivant $\theta(\mathbf{y})$ et $\partial_n\theta(\mathbf{y})$ sur les éléments τ_e . Etant donné que nous avons des conditions aux limites mixtes de type Dirichlet Neumann sur $\partial\Omega$, le flux est discontinu au passage entre S_T (le trou) et S_B (la paroi) d'une part et entre le haut et les côtés du dépôt d'autre part. On est alors obligé de choisir des éléments de type constants : $\theta(\mathbf{y})$ et $\partial_n\theta(\mathbf{y})$ sont constants sur les éléments τ_e ,

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{y} \in \tau_e, \\ \theta(\mathbf{y}) &= \theta_e \\ \partial_n\theta(\mathbf{y}) &= \partial_n\theta_e \end{aligned}$$

L'égalité (2.33) devient alors :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[(\theta_e - \theta(\mathbf{x})) \int_{\tau_e} H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \partial_n\theta_e \int_{\tau_e} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right] = 0 \quad (2.36)$$

Nous résolvons l'équation (2.36) par la méthode de collocation. Cette équation est vraie $\forall \mathbf{x} \in \partial_n\Omega$. Nous avons alors 2 inconnues par élément. Les conditions aux limites nous donnent la valeur soit de θ soit de $\partial_n\theta$. Il nous reste donc N_e équations à établir. On choisit d'écrire l'équation (2.36) pour chaque point $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c$ où \mathbf{x}_c est le barycentre de l'élément numéro c avec $c \in [0; N_e]$. On établit alors les N_e équations manquantes. L'équation (2.36) devient alors :

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[(\theta_e - \theta_c) \int_{\tau_e} H(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) - \partial_n\theta_e \int_{\tau_e} G(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \right] = 0 \text{ avec } c \in [0; N_e] \quad (2.37)$$

Les intégrales de (2.37) :

$$\int_{\tau_e} H(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \text{ et } \int_{\tau_e} G(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) \quad (2.38)$$

peuvent être calculées à l'aide de formules de quadratures adaptées aux éléments triangulaires si $\mathbf{x}_c \notin \tau_e$. Si $\mathbf{x}_c \in \tau_e$ elles sont singulières, il faut donc procéder dans ce cas là à une intégration analytique. On trouve en annexe les différentes techniques employées pour calculer ce type d'intégrales [Bon95]. On obtient alors le système linéaire suivant :

$$\sum_{i,j=0}^{N_e} a_{ij} \theta_j + b_{i,j} (\partial_n \theta)_j = 0 \quad (2.39)$$

En appliquant les conditions aux limites l'équation précédente devient :

$$\sum_{i,j=0}^{N_e} c_{ij} X_j = d_i \quad (2.40)$$

Le vecteur \mathbf{X} contient les inconnues du problème. Si on impose la pression sur l'élément i , alors l'inconnue dans ce cas là est la dérivée normale de la pression et si la dérivée normale de la pression est imposée, la pression est inconnue. Étant donné que l'on impose la pression sur le haut du dépôt, le calcul élément frontière nous donne directement la valeur du flux par inversion du système (2.40).

2.4 Simulation de la formation du dépôt

2.4.1 Description de l'algorithme de formation de dépôt.

L'algorithme de formation du dépôt commence par le calcul de la solution de Darcy dans une couche poreuse uniforme. Dans le cadre de cette étude nous avons fixé l'épaisseur à $L'_z = 0.05$ (avec $L'_z = \frac{L_z}{L_x/2+}$) On détermine ainsi le gradient normal de pression au centre C_τ des éléments triangulaires de la surface supérieure du dépôt. On peut alors calculer la nouvelle position de C_τ à l'aide des expressions

$$\Delta \vec{h}'(x, y) = -\alpha'_h \frac{\vec{\nabla}' P'(x, y)}{|\partial'_n P'|_{max}} \quad (2.41)$$

$$\alpha'_h = \frac{D'}{(1 - \epsilon_D)} \left(\frac{\pi X^2}{6} \right)^{1/3} \quad (2.42)$$

versions adimensionnalisées de (2.21) et (2.22), où $\alpha'_h = \frac{2\alpha_h}{L_x}$.

Ces points C_τ nous permettent de générer, en prenant en compte les conditions aux

limites de symétrie, un maillage structuré secondaire permettant de calculer les positions des noeuds du maillage à l'itération suivante (Cf. figure 2.2).

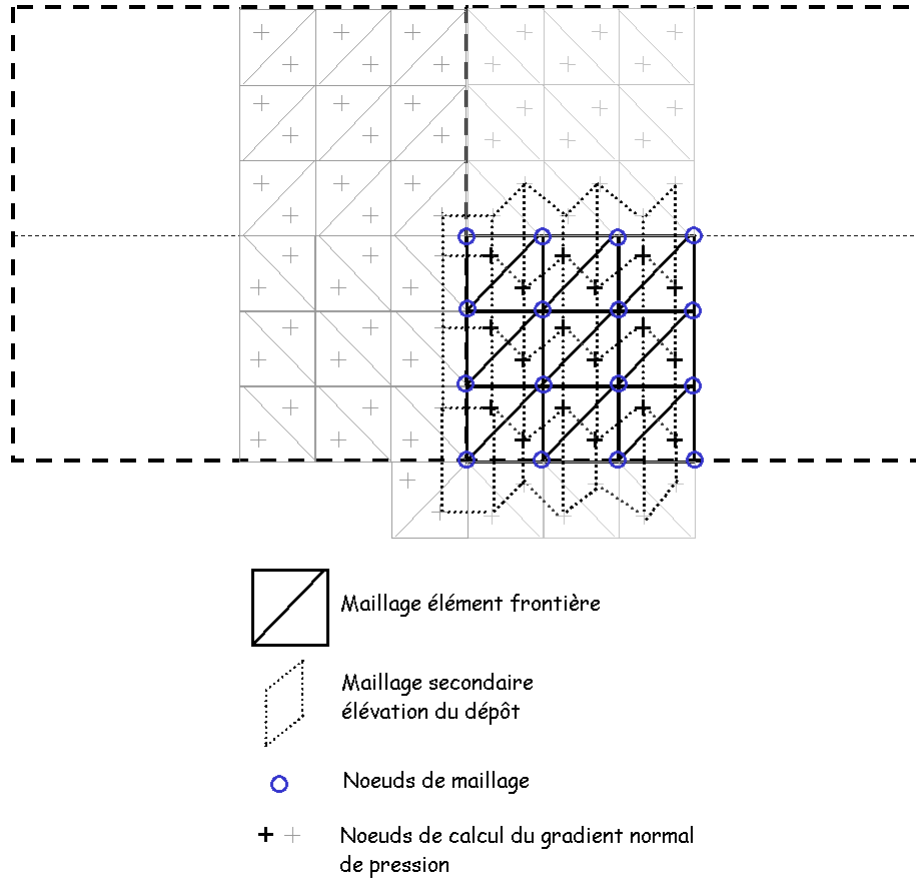


Fig. 2.2: Maillage du haut du dépôt.

Les positions des noeuds du maillage à l'itération suivante sont calculées à l'aide d'une formule d'interpolation bilinéaire à 4 points (Cf. fig 2.3) :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 \xi_1 \xi_2 + \mathbf{y}^2 (1 - \xi_1) \xi_2 + \mathbf{y}^3 \xi_1 (1 - \xi_2) + \mathbf{y}^4 (1 - \xi_1) (1 - \xi_2) \quad (2.43)$$

La maillage de la surface du haut du dépôt étant fait, on remaille les bords du dépôt (Cf. fig 2.4).

On calcule les nouveaux champs $\partial'_n P'$ et P' . On peut alors en déduire la valeur de la réduction de perméabilité. On sait, d'une part, que :

$$Q = \int_{S_H} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = -\frac{K_i L_x (P_1 - P_0)}{2\mu} \int_{S_H} \partial'_n P' dS' \quad (2.44)$$

D'autre part, on pose, par analogie à la perméabilité apparente d'un dépôt uniforme, que :

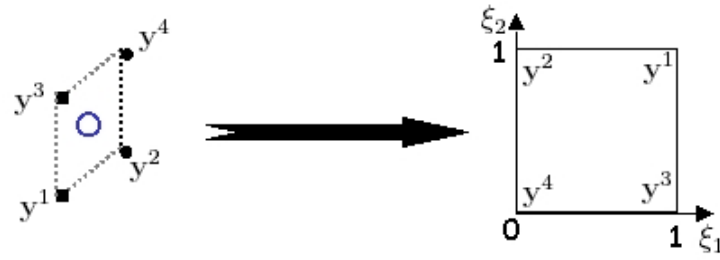


Fig. 2.3: Interpolation bilinéaire pour le calcul de la position des noeuds du nouveau maillage.

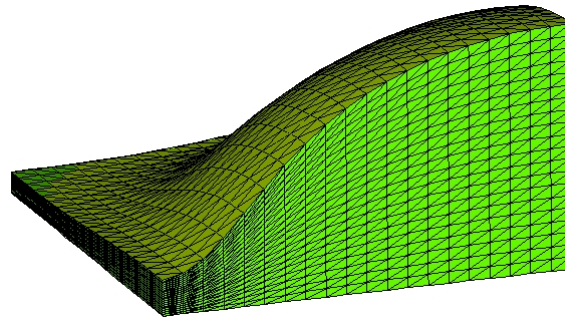


Fig. 2.4: Maillage du bord du dépôt

$$Q = \frac{L_x^2 K P_1 - P_0}{4 \mu \frac{V_D}{L_x^2/4}} \quad (2.45)$$

La réduction de perméabilité se calcule de la manière suivante :

$$\frac{K}{K_i} = V_D' \int_{S_H} \partial_n' P' dS' \quad (2.46)$$

$$V_D' = -\frac{V_D}{L_x^3/8} \quad (2.47)$$

On peut alors déterminer la forme du nouveau dépôt. On répète ces différentes étapes jusqu'à ce que la réduction de perméabilité, pour un volume de dépôt donné, soit égale à 90% de celle d'un dépôt uniforme. Au-delà de cette valeur, on considère que l'approximation de dépôt uniforme est suffisante. L'algorithme de la simulation de la formation du dépôt est résumé sur la figure 2.5.

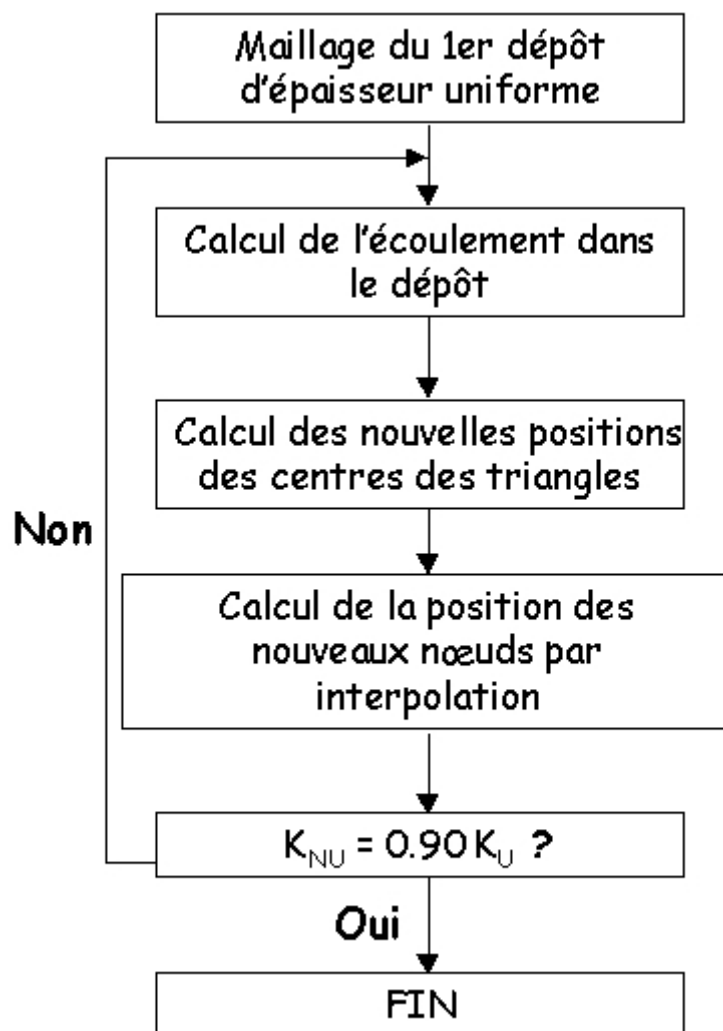


Fig. 2.5: Algorithme de formation du dépôt.

2.4.2 Réduction de perméabilité d'un dépôt non uniforme

Nous avons effectué des simulations de croissance de dépôts pour différentes valeurs de $d'_x \in [0; 0.9]$ et α'_h . Le paramètre α_h est représentatif à la fois de la solution à filtrer et de la porosité du dépôt. On rappelle que α'_h est calculé de la manière suivante :

$$\alpha'_h = \frac{D'}{1 - \epsilon_D} \left(\frac{\pi X^2}{6} \right)^{(1/3)}$$

D' représente le diamètre moyen des particules adimensionné par rapport à la moitié de la largeur de la cellule représentative de la paroi :

$$D' = \frac{d_p}{L_x/2}$$

Dans les simulations, nous avons fait varier α_h entre $5.0 \cdot 10^{-4}$ et $5.0 \cdot 10^{-2}$ ce qui correspond approximativement à :

$$0.005 \leq D' \leq 0.1$$

$$0.01 \leq X \leq 0.1$$

$$0.3 \leq \epsilon_D \leq 0.6$$

On a représenté sur la figures 2.6 (vue en 3 dimensions du quart du domaine de simulation) et 2.7 (vue de côté du quart du domaine de simulation) l'évolution de la forme du dépôt au cours des itérations. On constate que la croissance s'effectue sur la région située en regard du pore comme on peut le voir entre la 1^{ere} et la 60^{eme} itération. L'accumulation de matière a ensuite lieu sur les bords du domaine lors des itérations suivantes. La 250^{eme} itération représente le dépôt lorsque $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$. On constate que le dépôt à cette étape de son évolution est loin d'être uniforme. On peut également constater que le dépôt est plus uniforme (Cf. figure 2.8) lorsque α'_h est faible pour $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$. Dans tous les cas, aux temps longs, le dépôt finit par s'uniformiser. En d'autres termes, le processus de croissance est stable aux temps longs, l'interface devient plate et le dépôt d'épaisseur constante. Le dépôt finit donc par oublier le caractère discret de la paroi. Ceci n'est pas surprenant si on raisonne par exemple par analogie avec l'instabilité de Saffman-Taylor en milieu poreux. Le dépôt peut se voir comme un doigt de fluide visqueux croissant au sein d'un fluide non visqueux, situation connue comme hydrodynamiquement stable (l'analogie est basée sur le fait que l'équation résolue au sein du dépôt n'est autre que l'équation de Darcy).

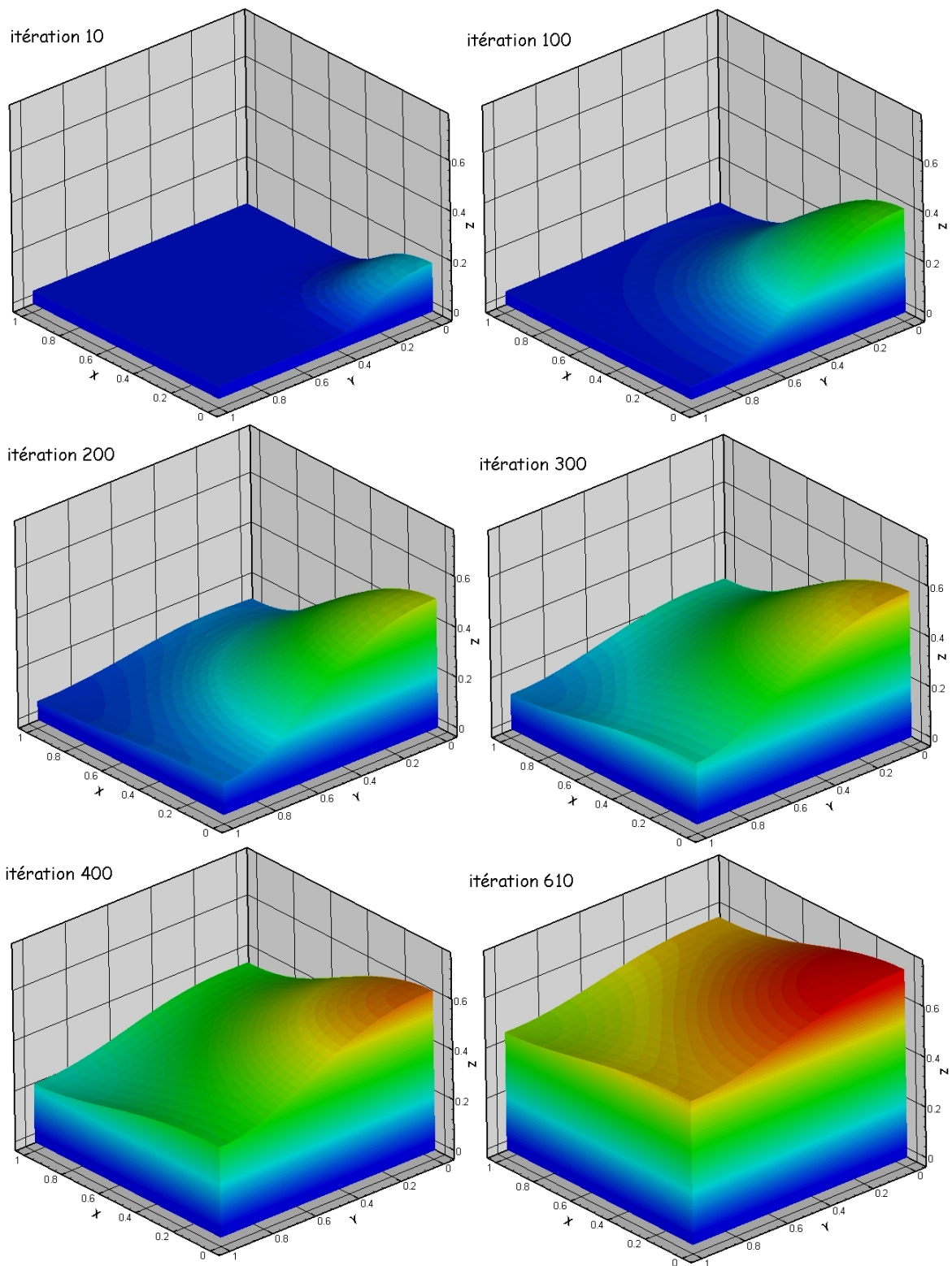


Fig. 2.6: Évolution de la forme du dépôt (un quart du domaine de simulation) pour $\alpha'_h = 0.05$ et $\epsilon_P = 0.04$. les niveaux de couleurs caractérisent la hauteur du dépôt.

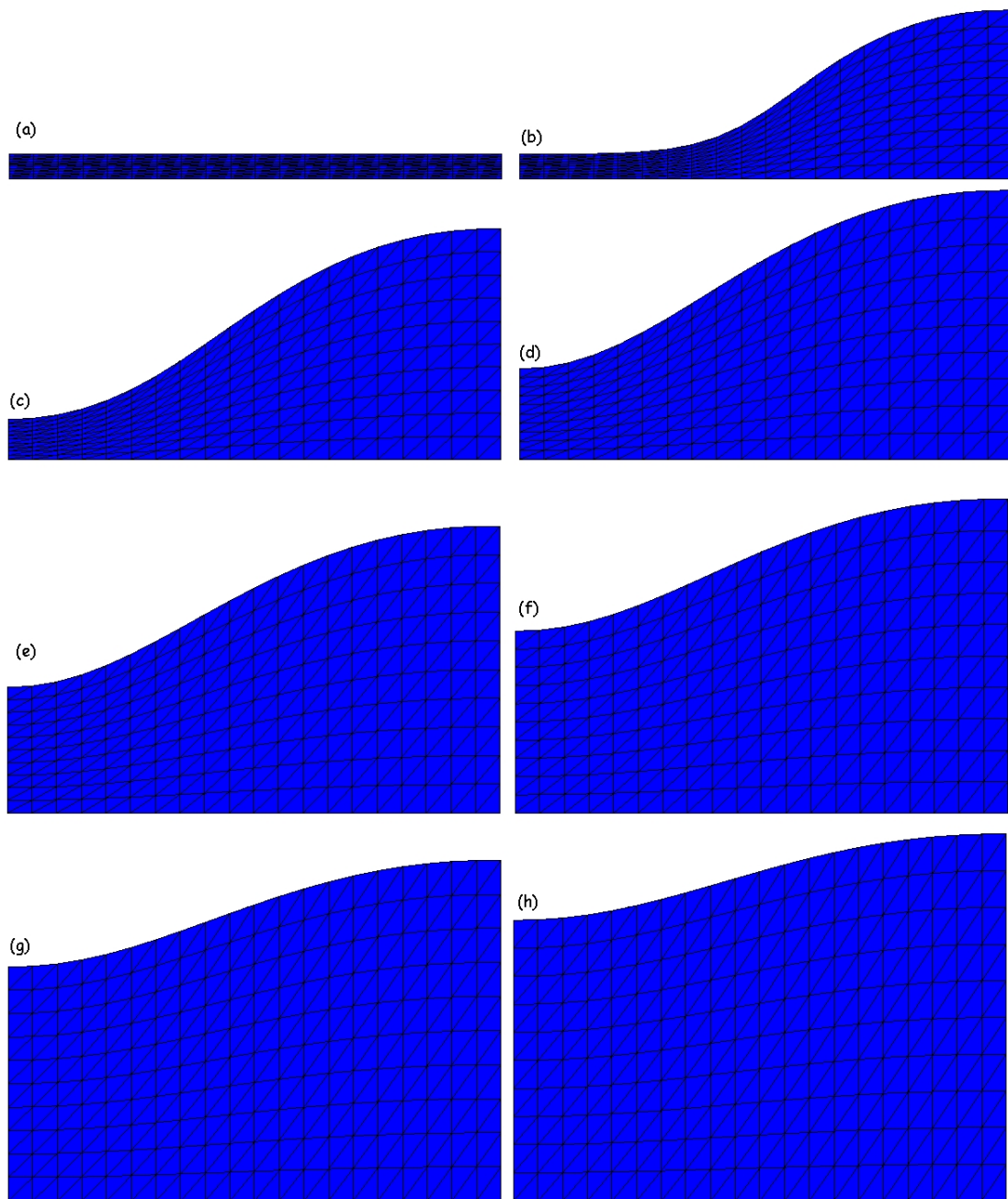


Fig. 2.7: Évolution de la forme du dépôt pour $\alpha'_h = 0.05$ et $\epsilon_P = 0.04$.

- (a) : géométrie initiale, le dépôt est uniforme ($V'_D = 0.05$).
- (b) : 60^{ème} itération ($V'_D = 0.113$).
- (c) : 140^{ème} itération ($V'_D = 0.200$).
- (d) : 250^{ème} itération ($V'_D = 0.307$).
- (e) : 310^{ème} itération ($V'_D = 0.365$).
- (f) : 410^{ème} itération ($V'_D = 0.454$).
- (g) : 510^{ème} itération ($V'_D = 0.540$).
- (h) : 610^{ème} itération ($V'_D = 0.614$).

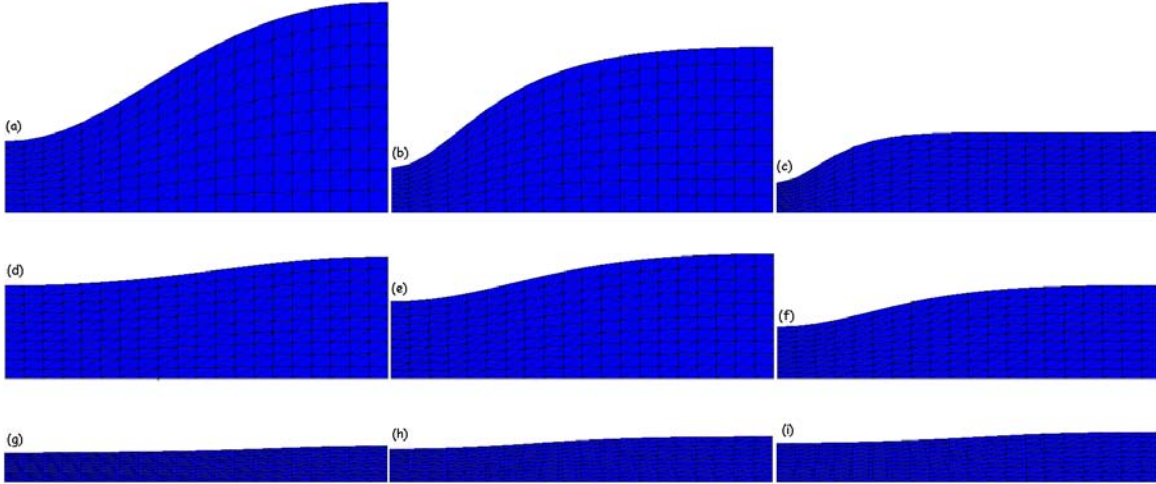


Fig. 2.8: Forme du dépôt lorsque $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$. (a) : $\alpha'_h = 0.05$ et $\epsilon_P = 0.04$. (b) : $\alpha'_h = 0.05$ et $\epsilon_P = 0.36$. (c) : $\alpha'_h = 0.05$ et $\epsilon_P = 0.64$. (d) : $\alpha'_h = 0.005$ et $\epsilon_P = 0.04$. (e) : $\alpha'_h = 0.005$ et $\epsilon_P = 0.36$. (f) : $\alpha'_h = 0.005$ et $\epsilon_P = 0.49$. (g) : $\alpha'_h = 0.0005$ et $\epsilon_P = 0.04$. (h) : $\alpha'_h = 0.0005$ et $\epsilon_P = 0.16$. (i) : $\alpha'_h = 0.0050$ et $\epsilon_P = 0.36$.

On a représenté, sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11, la variation des rapports $\frac{K_{NU}}{K_i}$ (courbes continues) et $\frac{K_U}{K_i}$ (courbes avec des symboles) en fonction du volume du dépôt. K_{NU} représente la réduction de perméabilité du dépôt non uniforme et K_U celle du dépôt uniforme de même volume. La réduction de perméabilité $\frac{K_U}{K_i}$ est calculée, pour un même volume de dépôt uniforme, à l'aide des modèles présentés dans le chapitre précédent. Le dépôt devenant uniforme aux temps longs, on constate, sans surprise, que $\frac{K_{NU}}{K_i} \rightarrow \frac{K_U}{K_i}$ lorsque le volume du dépôt augmente. Le dépôt non uniforme a une perméabilité apparente identique à celle du dépôt uniforme lorsque son volume est suffisamment important.

On a représenté sur la figure 2.12 la variation du volume V_U , tel que $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$. Ce rapport de 90% entre les 2 réductions de perméabilité à été choisi, car ce rapport tend très lentement vers 1. En effet, étant donné que la différence de pression est fixée, le débit décroît avec le volume du dépôt et le taux de croissance de dépôt est de plus en plus faible. Pour une porosité de paroi ϵ_P fixée, $K_{NU} \rightarrow K_U$ d'autant plus vite que α'_h est petit : plus X , D' ou ϵ_D sont faibles, plus la perméabilité apparente du dépôt non uniforme deviendra rapidement comparable à celle d'un dépôt uniforme.

Comme cela est illustré sur la figure 2.12, V_U passe par un maximum lorsqu'on le porte en fonction de la porosité de la paroi. La valeur de ce maximum ainsi que la porosité correspondante dépendent de α'_h . Ceci peut être mis en relation avec le comportement aux temps courts du dépôt qui est caractérisée par une non uniformité induite par la déposition privilégiée des particules au droit du pore (Cf. figure 2.7). Cette évolution aux temps courts est également illustrée par la figure 2.13 qui montre que l'évolution de l'aire de la surface

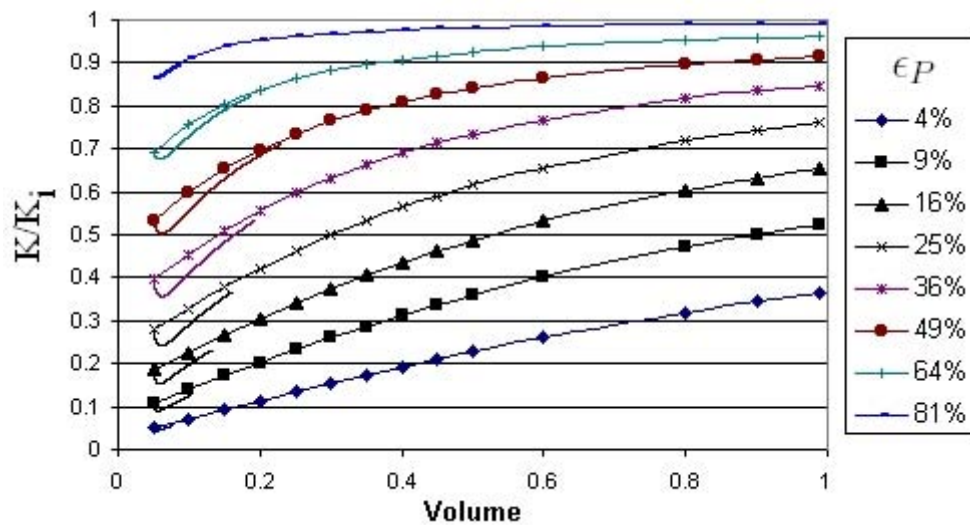


Fig. 2.9: Variation du rapport $\frac{K_U}{K_i}$ pour le dépôt uniforme (courbes continues) et $\frac{K_{NU}}{K_i}$ pour le dépôt non uniforme (courbes avec symboles) en fonction du volume du dépôt pour différentes valeurs de porosité de la paroi ϵ_P .
 $\alpha'_h = 5.0 \cdot 10^{-4}$

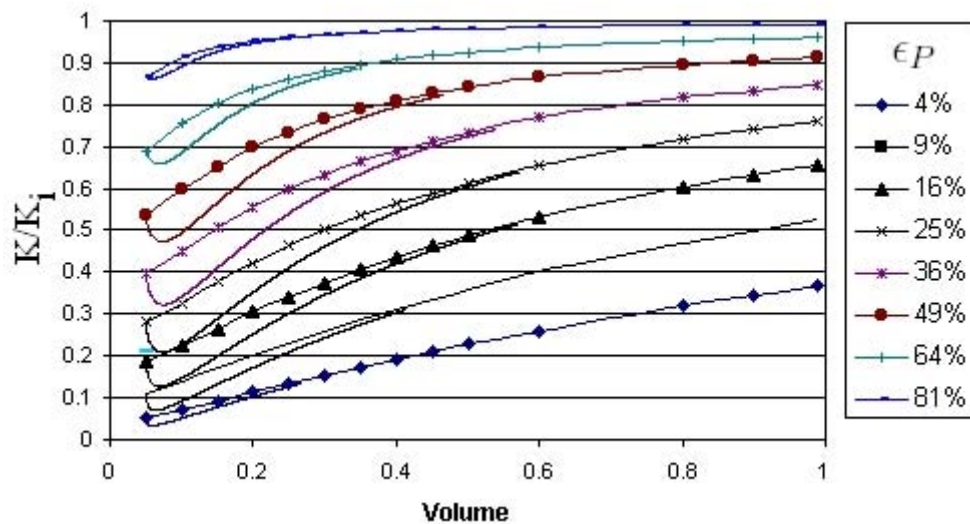


Fig. 2.10: Variation du rapport $\frac{K_U}{K_i}$ pour le dépôt uniforme (courbes continues) et $\frac{K_{NU}}{K_i}$ pour le dépôt non uniforme (courbes avec symboles) en fonction du volume du dépôt pour différentes valeurs de porosité de la paroi ϵ_P .
 $\alpha'_h = 5.0 \cdot 10^{-3}$

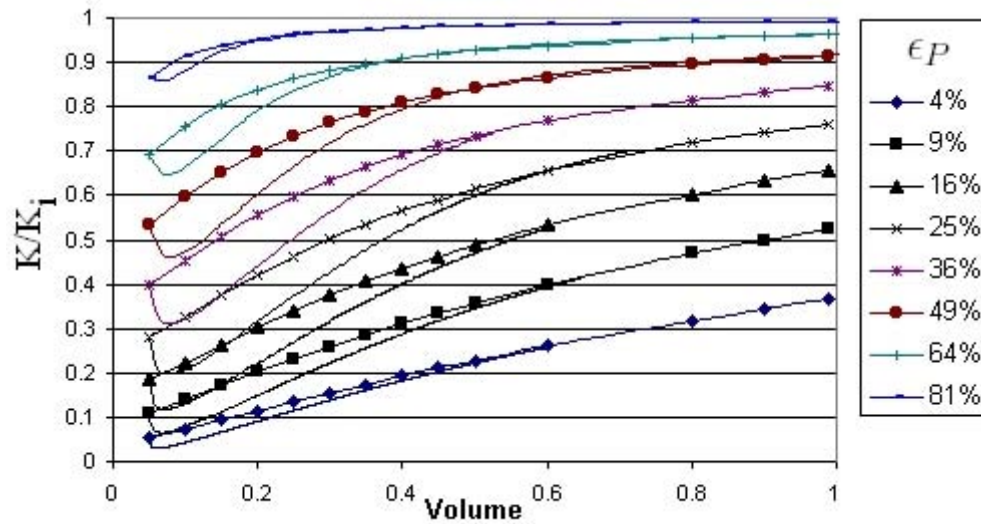


Fig. 2.11: Variation du rapport $\frac{K_U}{K_i}$ pour le dépôt uniforme (courbes continues) et $\frac{K_{NU}}{K_i}$ pour le dépôt non uniforme (courbes avec symboles) en fonction du volume du dépôt pour différentes valeurs de porosité de la paroi ϵ_P .
 $\alpha'_h = 5.0 \cdot 10^{-2}$

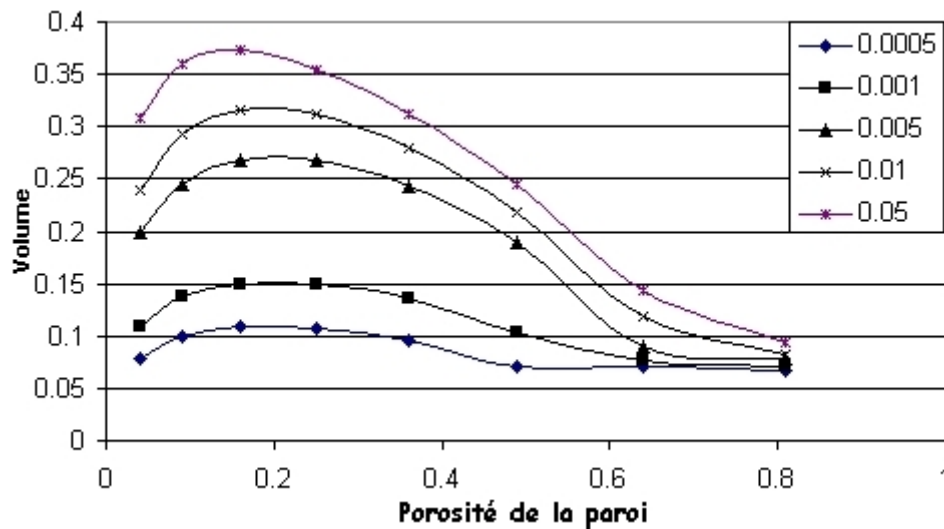


Fig. 2.12: Variation du volume V_U tel que $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$ en fonction de la porosité de la paroi pour différentes valeurs de α'_h .

externe $S'_H = S_H/L_x^2$ du dépôt en fonction du volume déposé pour différentes valeurs de ϵ_P et α'_h passe par un maximum S'_{Hmax} . De façon cohérente avec les évolutions de la figure 2.13, le volume déposé V_U correspondant à $\frac{K_{NU}}{K_i} = 0.9 \frac{K_U}{K_i}$ est d'autant plus grand que le maximum de non uniformisation du dépôt (S'_{Hmax}) est grand.

La figure 2.14 montre l'évolution de S'_{Hmax} en fonction de ϵ_P et α'_h . Ce maximum se situe pour les valeurs de α'_h considérées dans la plage de porosité $\epsilon_P \in [16\%, 25\%]$, plage de porosité qui correspond également au maximum de V_U , Cf. figure 2.12.

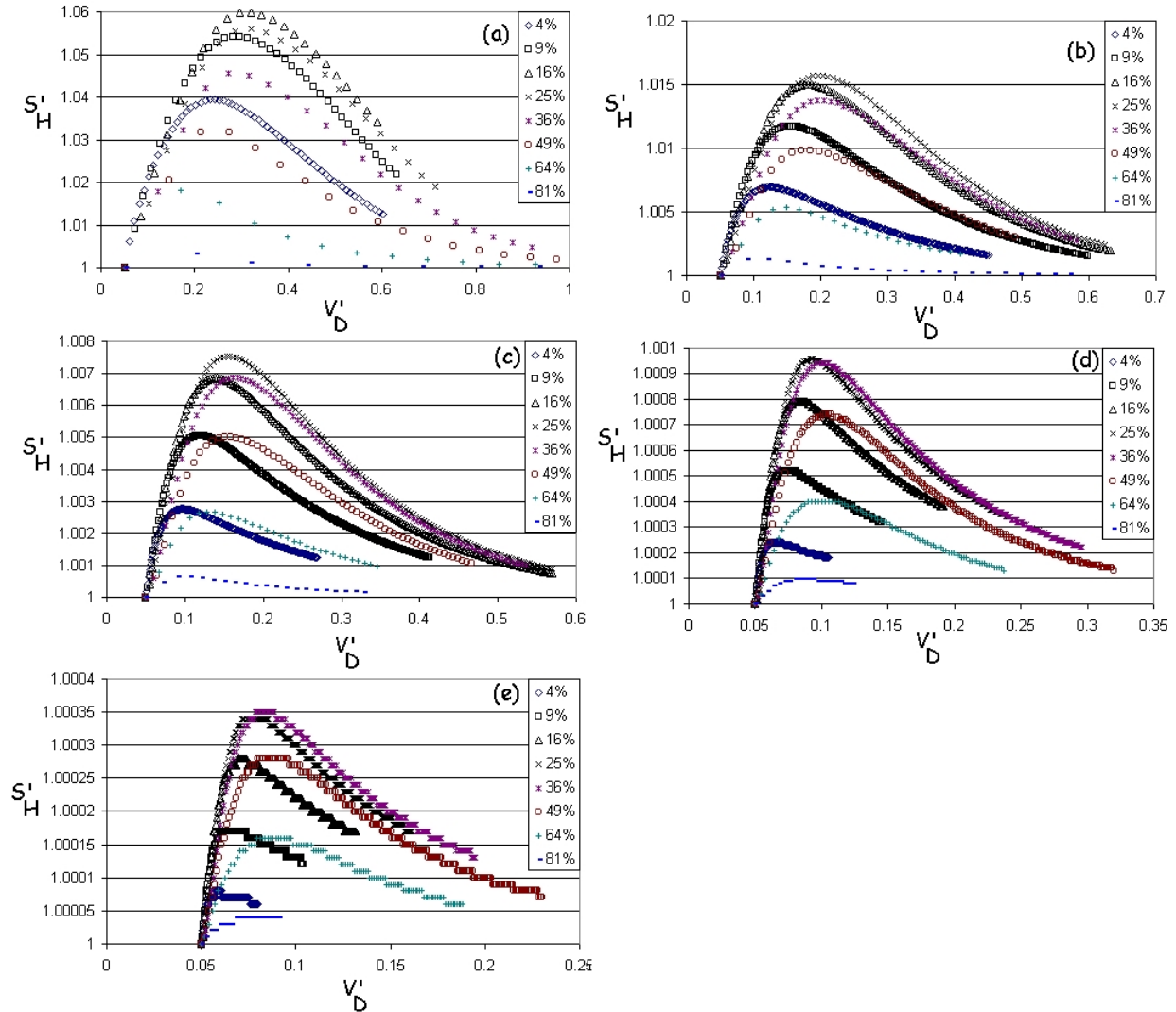


Fig. 2.13: Variations de l'aire de la surface S_H du haut du dépôt en fonction du volume pour différentes valeurs de ϵ_P et α'_h . (a) : $\alpha'_h = 0.05$, (b) : $\alpha'_h = 0.01$, (c) : $\alpha'_h = 0.005$, (d) : $\alpha'_h = 0.001$, (e) : $\alpha'_h = 0.0005$.

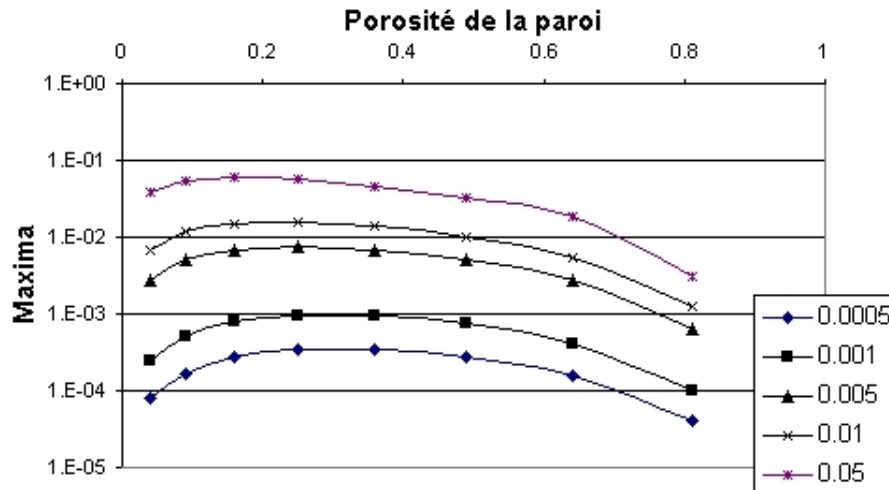


Fig. 2.14: Variations des maxima des courbes de la figure 2.13 en fonction de ϵ_P pour différentes valeurs de α'_h .

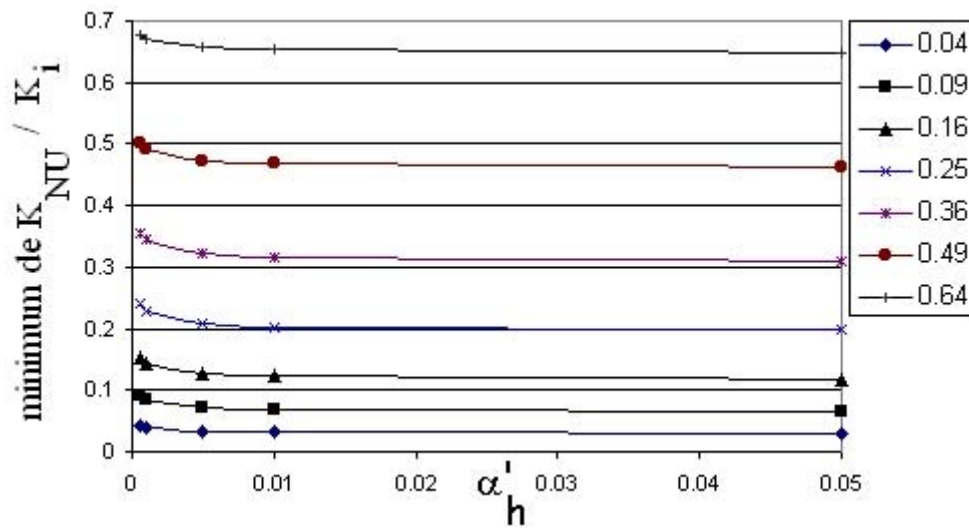


Fig. 2.15: Variations de la valeur minimale de $\frac{K_{NU}}{K_i}$ (V_D) en fonction de α'_h pour différentes valeurs de ϵ_P .

ϵ_P	$\langle K_{min} \rangle$	$\sigma(K_{min})$	$\frac{\sigma(K_{min})}{\langle K_{min} \rangle}$
0.04	0.0356	0.00586	0.165
0.09	0.0751	0.0110	0.147
0.16	0.133	0.0154	0.116
0.25	0.216	0.0184	0.0855
0.36	0.33	0.0193	0.0586
0.49	0.479	0.0170	0.0357
0.64	0.662	0.0111	0.0169
0.81	0.863	0.00283	0.00328

Tab. 2.1: K_{min} , sa moyenne et son écart type en fonction de la porosité.

On constate d'autre part, que $\frac{K_{NU}}{K_i} < \frac{K_U}{K_i}$. Ceci est du à la croissance du dépôt dans les premiers instants de colmatage au dessus du pore. L'écoulement a lieu dans la partie de la couche de particules juste au-dessus du pore. L'épaisseur de la couche de particules à cet endroit est beaucoup plus épaisse pour le dépôt non uniforme aux temps courts, ainsi la résistance hydraulique est plus grande pour le dépôt non uniforme que pour le dépôt uniforme. Les courbes $\frac{K_{NU}}{K_i} (V'_D)$ présentent un minimum. On a tracé ce dernier en fonction de α'_h pour différentes porosités (Cf. figure 2.15). Dans le tableau 2.1 sont reportées les valeurs moyennes ($\langle K_{min} \rangle$), écarts types ($\sigma(K_{min})$) et les rapports $\frac{\sigma(K_{min})}{\langle K_{min} \rangle}$.

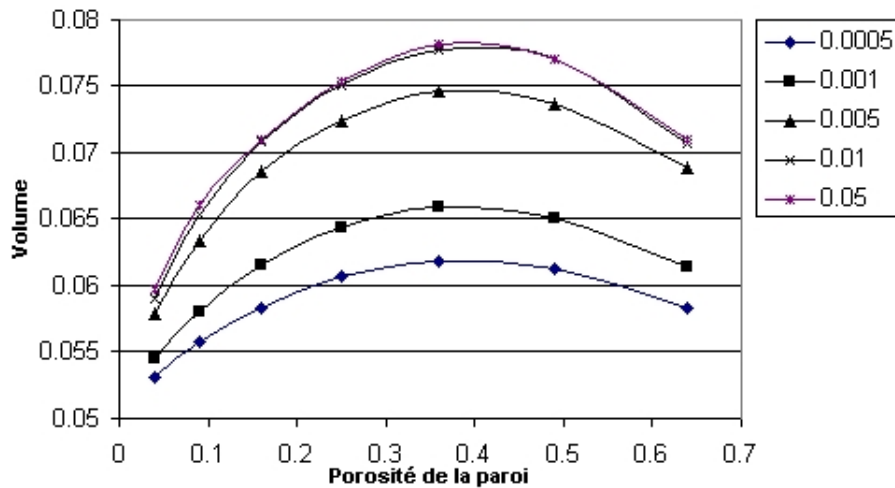


Fig. 2.16: Variations du volume V'_D (volume pour lequel $\frac{K_{NU}}{K_i} (V'_D)$ est minimale) en fonction de ϵ_P pour différentes valeurs de α'_h .

Nous avons également représenté (Cf. figure 2.16) la variation de la valeur de V'_D pour laquelle la valeur de $\frac{K_{NU}}{K_i}$ est minimale. On constate que $\forall \epsilon_P$ et $\forall \alpha'_h$ ce volume est très proche du volume de départ ($V'_D = 0.05$). La réduction de perméabilité atteint rapidement

un minimum, puis tend de manière monotone vers celle du dépôt uniforme (Cf. figures [2.9](#) à [2.11](#)).

2.5 Cinétique de colmatage

D'une manière générale, le débit du fluide porteur passant à travers la surface du dépôt s'exprime de la manière suivante :

$$Q = \int_{S_H} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{K_i(P_1 - P_0)L_x}{2\mu} \int_{S_H} \partial'_n P' dS' \quad (2.48)$$

En reportant l'expression (2.46) de $\frac{K_{NU}}{K_i}$, on obtient l'expression du débit adimensionnalisé :

$$Q' = \frac{Q}{Q_A} = \frac{1}{V'_D} \frac{K_{NU}}{K_i} \quad (2.49)$$

avec

$$Q_A = \frac{K_i(P_1 - P_0)L_x}{2\mu} \quad (2.50)$$

D'après (2.8), l'évolution du volume du dépôt est :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \int_{S_H} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \frac{K_i(P_1 - P_0)L_x}{\mu} \int_{S_H} \partial'_n P' dS' \quad (2.51)$$

Par conséquent, en reportant l'expression de la réduction de perméabilité (2.46) :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{X}{(1 - \epsilon_D)} \frac{K_i(P_1 - P_0)L_x}{\mu} \frac{1}{2} \frac{K_{NU}}{V'_D K_i} \quad (2.52)$$

On adimensionnalise le temps de la manière suivante :

$$t = \frac{2(1 - \epsilon)}{X} \frac{\mu L_x^2}{K_i(P_1 - P_0)} t' \quad (2.53)$$

Ainsi, on obtient l'équation différentielle du volume :

$$\frac{dV'_D}{dt'} = \frac{1}{V'_D} \left(\frac{K_{NU}}{K_i} \right) \quad (2.54)$$

avec :

$$\left(\frac{K_{NU}}{K_i} \right) = f(V'_D, \alpha'_h) \quad (2.55)$$

Cette équation est valable aussi bien pour le dépôt uniforme que non uniforme. Connaissant l'évolution du volume du dépôt en fonction du temps par intégration numérique de (2.54), on en déduit celle du débit avec (2.49).

On a représenté sur les figures 2.19 et 2.20 la variation des débits Q'_{NU} (débit calculé

avec perméabilité apparente du dépôt non uniforme) et Q'_U (débit calculé avec perméabilité apparente du dépôt uniforme) pour les 2 valeurs extrêmes de α'_h .

Un résultat *a priori* non intuitif illustré par les courbes des figures 2.19 et 2.20 est que $Q'_{NU}(t) \rightarrow Q'_U(t)$ aux temps longs. En d'autres termes le dépôt oublie l'histoire de sa formation pour avoir la même dynamique de croissance aux temps longs qu'un dépôt uniforme. Des éléments d'explication peuvent être recherchés en remarquant que le taux de croissance s'écrit :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{X}{1 - \epsilon_D} Q(t) \quad (2.56)$$

Par définition on a :

$$Q(t) = \frac{K(P_1 - P_0)}{\mu \frac{V_D}{L_x^2}} L_x^2 \quad (2.57)$$

d'où :

$$\frac{dV_D}{dt} = \frac{L_x^4 (P_1 - P_0)}{\mu} \frac{K}{V_D} \quad (2.58)$$

Les courbes des figures 2.19 et 2.20 indiquent qu'aux temps courts nous avons

$$\frac{K_{NU}(t)}{V_{DNU}(t)} < \frac{K_U(t)}{V_{DU}(t)}$$

En conséquence le dépôt croît moins vite dans le cas non uniforme que dans le cas uniforme (comme illustré sur la figure 2.17(I)). Dans l'équation (2.57) le terme $\frac{KL_x^4}{V_D}$ peut s'exprimer comme la conductance hydraulique globale du dépôt. Les courbes des figures 2.19 et 2.20 indiquent que les conductances globales des dépôts uniformes et non uniformes deviennent identiques pour les temps longs, soit :

$$\frac{K_{NU}}{V_{DNU}} \approx \frac{K_U}{V_{DU}} \text{ pour } t > t_1 \quad (2.59)$$

Ceci est illustré sur un exemple (Cf. figure 2.17(II)). Le terme $\frac{V_D}{L_x^2}$ peut s'interpréter comme une épaisseur équivalente de dépôt. On voit donc que la croissance plus rapide du dépôt uniforme ($V'_{DU}(t') > V'_{DNU}(t')$) le rend plus épais ce qui compense la perméabilité apparente du dépôt uniforme (Cf. figure 2.17(III)). Ce processus de compensation épaisseur-perméabilité est globalement illustré sur la figure 2.18. Il est intéressant de constater que le temps t'_1 (correspondant à $\frac{K_{NU}}{V_{DNU}} \approx \frac{K_U}{V_{DU}}$) est nettement plus court que le temps pour lequel $K_{NU} \approx K_U$ (Cf. figure 2.17(IV,V et VI)).

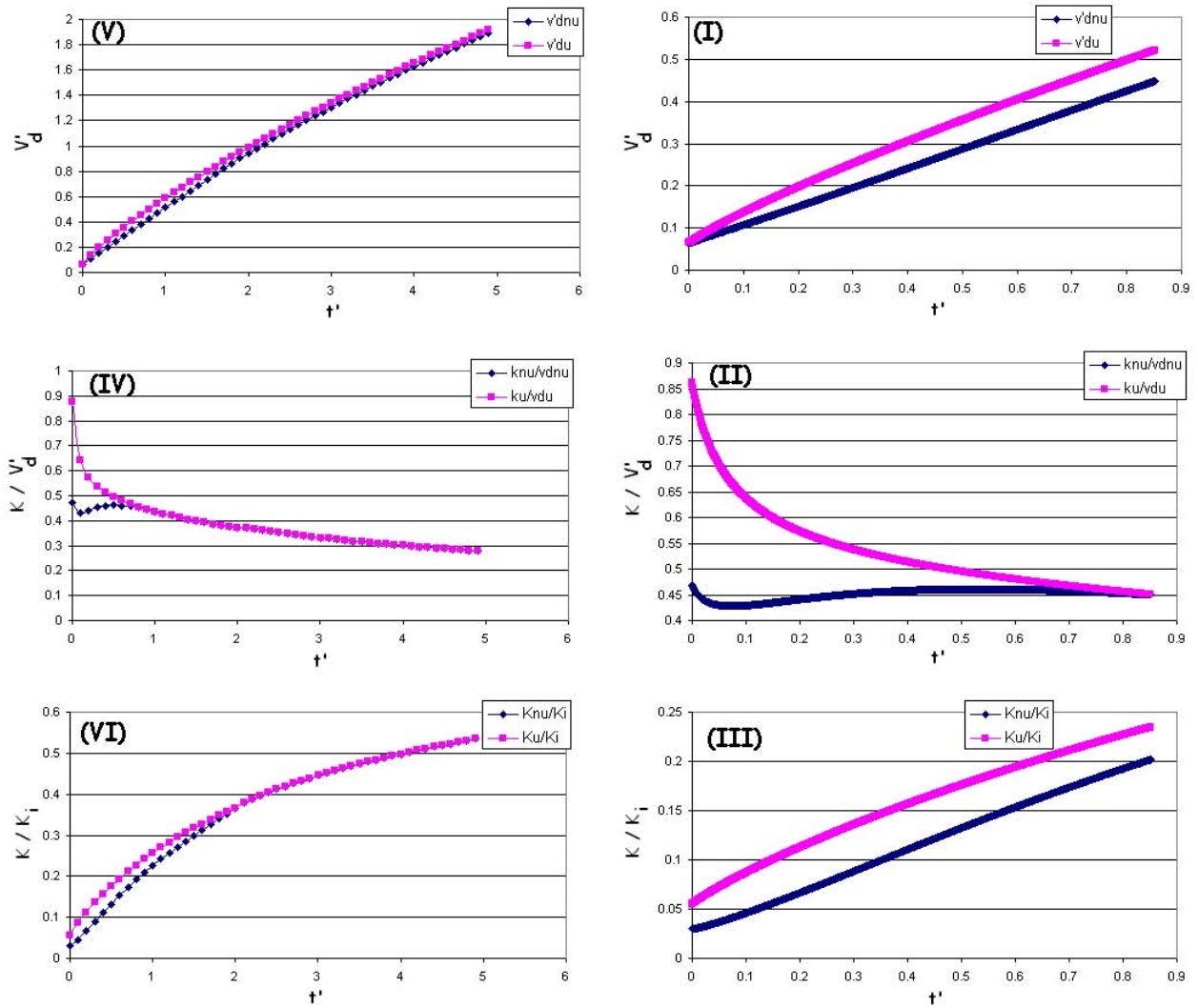


Fig. 2.17: Evolution du rapport $\frac{K}{V'_D}$, V'_D et de la réduction de perméabilité en fonction du temps pour $\epsilon_P = 0.4$ et $\alpha'_h = 0.05$.

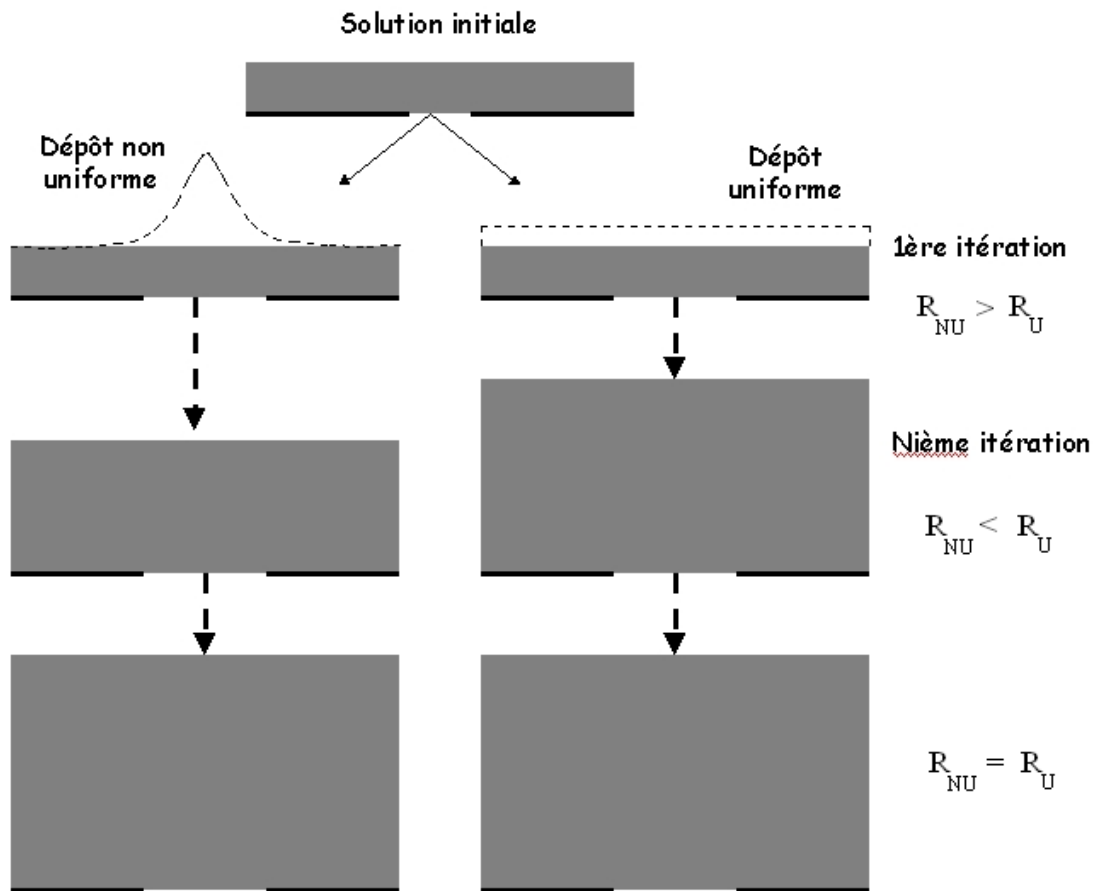


Fig. 2.18: Évolution schématique de la forme du dépôt de particules au au cours du temps.

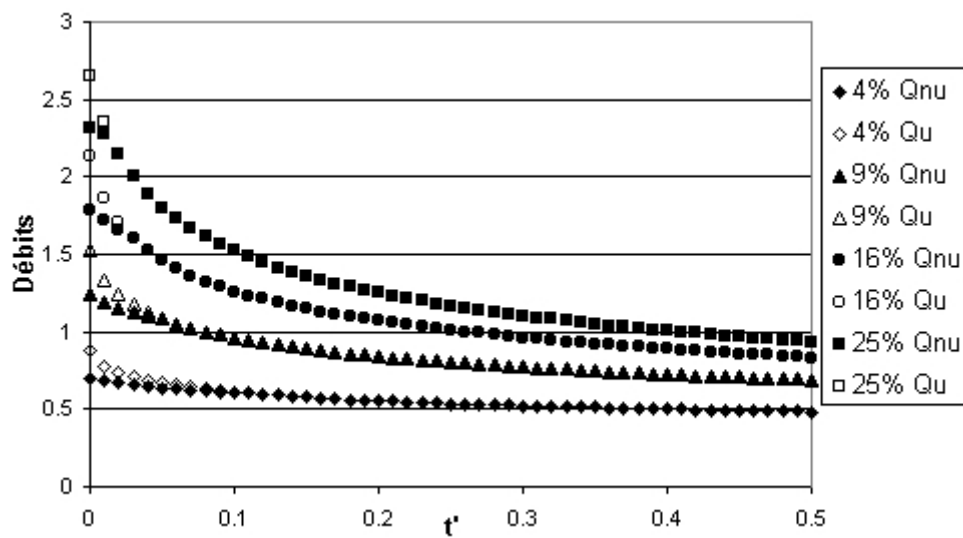


Fig. 2.19: Évolution du débit en fonction du temps (t') pour un dépôt uniforme (Q'_U) et un dépôt non uniforme (Q'_{NU}) pour $\alpha'_h = 0.0005$.

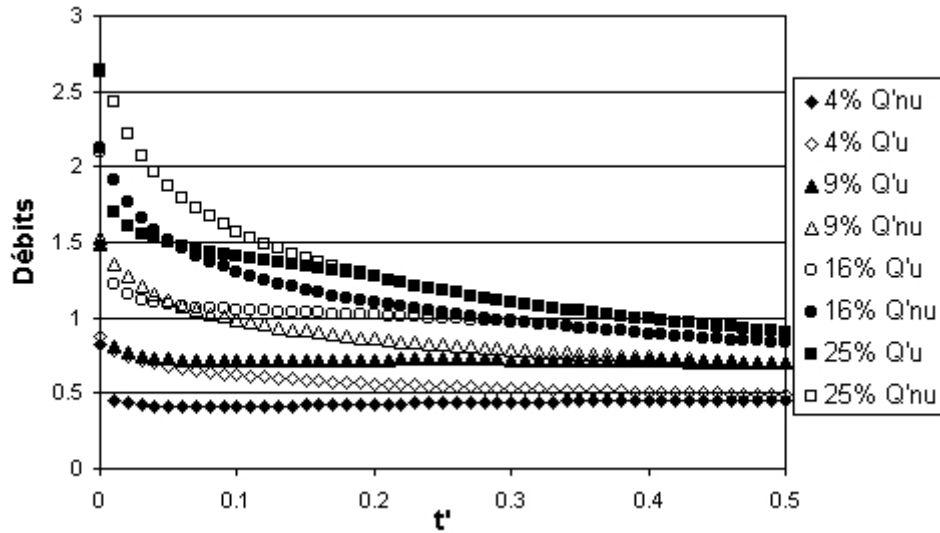


Fig. 2.20: Évolution du débit en fonction du temps (t') pour un dépôt uniforme (Q'_U) et un dépôt non uniforme (Q'_{NU}) pour $\alpha'_h = 0.05$.

Enfin, nous avons représenté sur la figure 2.21 la variation de la durée Δt telle que :

$$\frac{Q'_{NU}(\Delta t)}{Q'_U(\Delta t)} = 0.9$$

On remarque que ce retard est d'autant plus important, que α'_h est grand et que ϵ_P est faible. Si ϵ_P est faible, le débit est plus important sur la zone du haut du dépôt situé au-dessus du pore que pour les faibles porosités : le dépôt est ainsi beaucoup moins uniforme. Le temps nécessaire au rétablissement d'une couche uniforme est plus important. Le α'_h est d'autant plus grand que le diamètre moyen des particules D , la fraction volumique des particules X et la porosité sont grands. Ainsi pour ϵ_P fixée le volume de particules accumulé sur la portion de surface en regard du pore est d'autant plus important que α'_h est important. Le temps nécessaire à la réuniformisation du dépôt sera donc plus long.

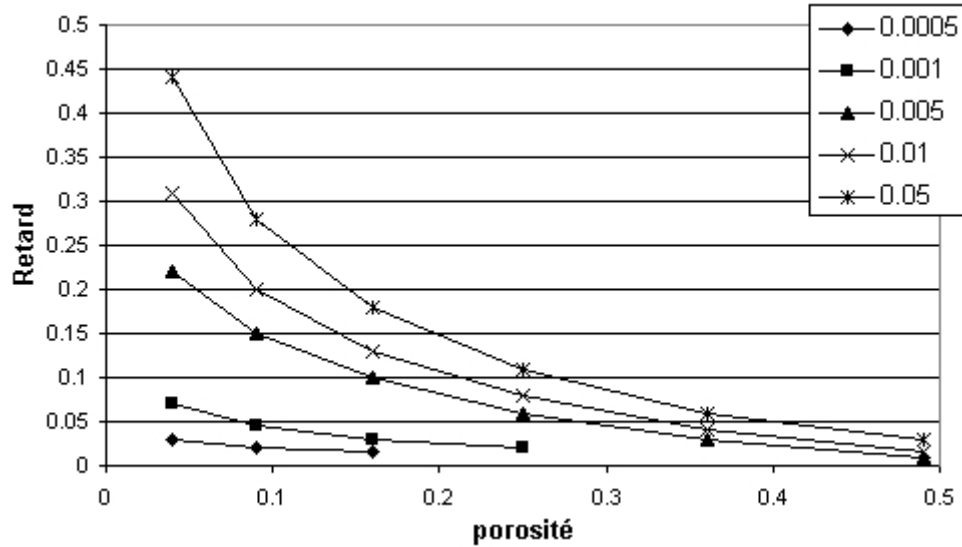


Fig. 2.21: Variation du *retard* en fonction de la porosité pour différentes valeurs de α'_h .

2.6 Conclusion

En faisant les mêmes hypothèses qu'au chapitre précédent (répartition spatiale périodique des pores, faible nombre de Reynolds, dépôt homogène et uniforme), nous avons développé un modèle de croissance de dépôt non uniforme à l'échelle du pore de la paroi filtrante.

Les simulations effectuées montrent que le dépôt devient d'épaisseur uniforme aux temps longs. Aux temps courts, le dépôt passe par une phase où il croît de façon non uniforme du fait de l'accumulation préférentielle des particules au droit du pore en début de formation du dépôt.

Il existe une plage de porosité de paroi, au voisinage de 20%, pour laquelle la non-uniformité du dépôt est maximisée aux temps courts. Les simulations mettent également en évidence qu'à même volume de particules déposé le modèle de croissance non uniforme conduit à une perméabilité apparente plus faible que le modèle du dépôt uniforme.

Les simulations (à écart de pression constant), révèlent que le débit à travers un dépôt non uniforme devient identique au débit à travers un dépôt uniforme aux temps longs. Les différences entre les modes de croissance n'induisent donc aucun décalage sur la dynamique de croissance aux temps longs.

Le temps nécessaire pour obtenir un débit identique augmente avec le paramètre α'_h et décroît avec la porosité ϵ_P de la paroi. En d'autres termes à ϵ_P fixée, ce temps augmente avec le diamètre des particules, la porosité du dépôt et la fraction volumique des particules dans l'écoulement incident.

L'approche présentée suppose que toutes les particules soient bloquées par la paroi fil-

trante. En d'autres termes, elle ignore totalement la notion d'efficacité de filtration.

Ceci couplé à l'importance pratique de la formation des premières couches de particules nous a conduit au développement de l'approche discrète de la simulation de la formation de dépôt, qui est présentée dans les chapitres suivants.

Lire
la seconde partie
de la thèse