

THESE

présentée

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Ecole doctorale : Transferts, Dynamique des Fluides, Energétique et Procédés

Spécialité : Dynamique des fluides

Par François PINSON

Laboratoire d'accueil : Commissariat à l'Energie Atomique
Direction de l'Energie Nucléaire
Département de Modélisation des Systèmes et Structures
Service Fluides, Modélisation numérique et Etudes

Titre de la thèse :

MODELISATION A L'ECHELLE MACROSCOPIQUE D'UN ECOULEMENT TURBULENT AU SEIN D'UN MILIEU POREUX

Soutenue le 28/03/2006 devant le jury composé de :

| | | |
|-----|------------------------------|--------------------|
| MM. | Michel QUINTARD, IMFT | Président |
| | Olivier SIMONIN, IMFT | Directeur de thèse |
| | Roland BORGHI, LMA | Rapporteur |
| | Pierre SAGAUT, LMM | Rapporteur |
| | Mouaouia FIRDAOUSS, LIMSI | Examineur |
| | Olivier GREGOIRE, CEA Saclay | Examineur |
| | Marc PRAT, IMFT | Invité |

Remerciements

Le déroulement de ma thèse a été l'occasion de rencontrer une multitude de personnes qui ont contribué à mon épanouissement professionnel et personnel. Pour l'ensemble de ces interactions, je tiens à les remercier.

Je voudrais tout d'abord remercier les membres de mon jury qui ont accepté de participer à la soutenance de ma thèse et plus particulièrement les rapporteurs qui ont bien voulu relire le manuscrit (notamment le chapitre 4 dont la lecture peut être douloureuse...). En choisissant la date du 28 mars pour ma soutenance (un peu égoïstement car cela coïncidait avec mon anniversaire), je ne me doutais pas que ce serait une grosse journée de manifestation anti CPE. Cela n'a pas facilité l'organisation des déplacements vers Toulouse, mais tout s'est finalement bien déroulé. Un nouveau grand merci aux membres du jury (et aux autres) qui ont subi les grèves dans les transports, mais qui ont tout de même réussi à venir (et à rentrer aussi...).

Je voudrais ensuite remercier Olivier Simonin, mon directeur de thèse, qui a accepté d'encadrer cette réflexion et de la ramener dans la bonne direction lorsque ma logique commençait à lui sembler un peu floue. Malgré la multitude de responsabilités qu'il doit assumer, il a été la plupart du temps disponible pour répondre à mes interrogations. Michel Quintard et Marc Prat ont aussi été particulièrement disponibles pour m'aiguiller dans les méandres des milieux poreux et des subtilités des méthodes d'homogénéisation. J'ai aussi bien apprécié nos discussions scientifiques que celles que nous avons eues au restaurant lors de mes déplacements à Toulouse.

Je voudrais aussi remercier les personnes qui m'ont accueilli au CEA. Tout d'abord, je commencerais par Daniel Caruge qui était chef du Laboratoire des Etudes Thermiques des Réacteurs (LETR) au moment où j'ai été recruté. Eric Royer lui a ensuite succédé et j'ai pu au cours de ces trois années passées au CEA apprécier ses qualités humaines. Par contre, si un jour l'idée de faire du vélo avec lui vous traversait l'esprit, réfléchissez-y à deux fois avant de vous décider : il va très vite ! Si vous n'êtes pas entraîné, choisissez plutôt de le suivre en moto !

Le mot remerciement est trop faible pour dire combien je suis reconnaissant envers Olivier Grégoire qui a choisi de me faire confiance pour réfléchir sur ce sujet et qui m'a ensuite largement conseillé d'une façon toujours très juste. C'était la première thèse qu'il encadrait et je pense que cela ne devait pas toujours être évident pour lui de savoir si il me donnait trop ou pas assez de libertés, de directions à suivre, etc. De mon côté, j'ai trouvé sa manière de me conseiller très intelligente et son soutien a toujours été sans faille. Nos échanges d'idées ont toujours été extrêmement fructueux. J'espère sincèrement que d'autres jeunes scientifiques profiteront de son encadrement.

Le LETR, vaste monde rempli de personnes très souvent de bonne humeur et surtout bourrées d'idées. J'y ai notamment cotoyé tous les jours Matthieu (mon colocataire de bureau, abonné invétéré de Yahoo Groupes Nucléaire et membre d'une fanfare Funk, rien que ça !!) qui a toujours su me faire oublier mes équations quand j'arrivais à une impasse ; Samuel, l'homme aux dix milliards de solutions alors que vous n'avez qu'un problème ; Augustin, l'ovap-man qui résoud éternellement l'écoulement de Poiseuille ; Florian l'éternel fumeur de cigarettes devant le bâtiment ; et tous les autres : Patricia, Danielle, Edwige (dont l'un de ces fils pose pour "Enfants Magazine" !!), Stéphanie, Anela, André, Philippe, Stéphane, Vincent, Ana Lisa, Michel, Jean Marc, Fabrice, Gilles, Michael, Stéphane (un deuxième, celui qui connaît Hubert Reeves !).

J'ai aussi cotoyé un autre monde, qui ressemble un peu au village d'Asterix : une poche de résistance au sein du SFME (mais rien de très belliqueux, je vous rassure...). Il s'agit des utilisateurs-développeurs de CAST3M Fluides du LTMF qui m'ont aidé à utiliser ce code de calcul et qui m'ont largement conseillé pour éviter les nombreux pièges qu'il renferme. Je tiens particulièrement à remercier Jean-Paul Magnaud qui m'a spécifiquement formé sur tout ce que je devais savoir sur la partie simulation de la turbulence avec CAST3M. Ces nombreux conseils m'ont fait gagner un temps précieux (alors que j'ai sûrement dû lui en faire perdre un petit peu...).

J'ai aussi rencontré au CEA d'autres thésards qui travaillaient sur des sujets complètement différents du miens et avec qui je partageais des apéros ou des restos le soir en rentrant à Paris. Merci à Stéphane, Solenn, Eric, Léa, Christophe et tous les autres que j'ai croisé. Et bien sûr l'indétrônable Nico, notre vulcanologue intérimaire spécialiste de l'Etna, avec qui j'ai partagé les trajets de bus du CEA quasiment tous les jours. Je crois que le jour où il m'a fait le plus rêver, c'est lorsqu'il m'a donné l'adresse d'un site internet où on pouvait voir une webcam en direct de l'Etna. C'était l'apothéose... Mais ne vous imaginez pas qu'il parle souvent de volcans, ce n'est pas du tout sa passion !

Je crois que la fin de ma thèse aurait été bien plus pénible sans l'aide de mes colocataires qui m'ont soutenu moralement en me faisant oublier à l'heure des repas le pêle-mêle de mes idées qui s'embrouillaient au fur et à mesure, et la solitude du thésard restant seul devant son ordinateur en train de se battre pour que la mayonnaise des ingrédients qu'il a réunis pendant trois ans prenne enfin. Mes colocataires, aux caractères complémentaires... Je crois que j'ai une formule pour les décrire mais je ne suis pas sûr que ça leur fasse plaisir : Yoann, le truand, qui a trafiqué une page web de conforama pour convaincre nos voisins du dessus de nous vendre à petit prix leur lave-vaisselle d'occasion ; Marina, le bon (la bonne c'est pas terrible comme formule...) qui a cru que c'était une vraie page web et qui a été de bonne foi leur expliquer qu'on pouvait acheter un lave-vaisselle neuf moins cher que leur lave-vaisselle d'occasion ; Guillaume, la brute, qui était très certainement capable de descendre tout seul le lave-vaisselle d'un étage mais qui ne l'a pas fait (sûrement pour ne pas trop nous impressionner...); et Anne, le quatrième mousquetaire, qui, elle, n'a rien à voir avec cette histoire de lave-vaisselle, mais qui a quand même été là pour me soutenir... Merci à vous quatre ! Je voudrais aussi remercier Bruno, Abdou, Julien et Franck, et m'excuser d'avoir souvent répondu non à leurs propositions de sorties la semaine et le week end pendant la rédaction de ma thèse...

Le fait de travailler en collaboration avec l'IMFT m'a permis de me déplacer régulièrement à Toulouse (en plus de mes voyages personnels) et de continuer à voir mes potes du Sud, qui sont un petit peu une seconde famille. Ils m'ont à chaque fois réservé de bons week end de fête et de détente qui me changeait beaucoup de la vie parisienne. Merci à Marie, Moignon, Babe, Nono, Lolo, Choupi, Tutu (l'exilé danois...), Raffu (l'exilé espagnol), Sylvan et tous les autres. Et un merci encore plus grand à Papa (Schultz pour qu'il n'y ait pas de confusion...) et Zeb qui sont venus à ma soutenance.

Et pour finir, merci Pierre de m'avoir toujours donné de bons conseils (surtout avec Matlab) et de m'avoir laissé de piquer tes fameuses courbes avec dégradé de couleurs (ne t'inquiètes pas, les miennes sont moins jolies que les tiennes !). Bien joué d'avoir réussi à soutenir ta thèse 5 jours avant moi : j'ai dû t'appeler docteur et te vouvoyer pendant tout ce temps là... J'en profite quand même pour te féliciter pour ta thèse ! Enfin merci à mes parents pour m'avoir soutenu, même quand je n'étais pas de bonne humeur au téléphone...

Muchas gracias Adela...

*"On fait la Sciences avec des faits comme une maison avec des pierres ;
mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de
pierres n'est une maison."*

Henri Poincaré

*"L'esprit s'use comme toute chose ; les sciences sont ses aliments, elles
le nourrissent et le consomment."*

La Bruyère

Table des matières

| | |
|---|----|
| Introduction | 1 |
| 1 Moyennes et filtres | 7 |
| 1.1 Moyenne statistique | 8 |
| 1.1.1 Axiomes de Reynolds | 8 |
| 1.1.2 Application de la moyenne statistique à l'équation bilan d'un scalaire passif | 9 |
| 1.2 Homogénéisation spatiale | 10 |
| 1.2.1 Différentes méthodes d'homogénéisation | 10 |
| 1.2.2 Moyenne spatiale | 12 |
| 1.2.3 Propriétés de la moyenne intrinsèque | 14 |
| 1.2.4 Application d'un filtre spatial à l'équation bilan d'un scalaire passif | 17 |
| 1.3 Etude de la dispersion d'un scalaire passif dans le cas d'un écoulement laminaire | 18 |
| 1.3.1 Méthodologie de Whitaker | 21 |
| 1.3.2 Problème de fermeture | 24 |
| 1.3.3 Mise sous forme adimensionnée | 25 |
| 1.3.4 Premiers résultats | 26 |
| 1.4 Application combinée de la moyenne statistique et du filtre spatial | 30 |
| 1.4.1 Problèmes engendrés par l'utilisation de deux moyennes | 30 |
| 1.4.2 Equation de continuité | 33 |
| 1.4.3 Equation bilan d'un scalaire passif | 33 |
| 1.4.4 Equation bilan de quantité de mouvement | 34 |
| 1.4.5 Equation bilan de la température | 36 |
| 1.5 Problématique | 37 |
| 2 Modélisation de la turbulence à l'échelle locale | 39 |
| 2.1 Modèles RANS au premier ordre | 42 |
| 2.1.1 Dérivation de l'équation de transport de \bar{k} | 44 |
| 2.1.2 Définition d'une échelle de longueur algébrique | 46 |
| 2.1.3 Définition d'une échelle de longueur en utilisant $\bar{\epsilon}$ | 47 |
| 2.2 Traitement spécifique des zones proche-paroi | 51 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.2.1 | Description de l'écoulement moyen et de la turbulence | 51 |
| 2.2.2 | Influence d'une paroi sur l'échelle de longueur | 53 |
| 2.2.3 | Modèles $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds | 54 |
| 2.2.4 | Simulations d'écoulements avec parois en utilisant la modélisation $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ | 55 |
| 2.3 | Applications : code de calcul 1D | 57 |
| 2.3.1 | Principe de l'avancement en temps et méthode numérique | 58 |
| 2.3.2 | Validation pour un écoulement en canal plan | 62 |
| 2.4 | Application : code de calcul 2D-3D | 70 |
| 2.4.1 | Validation du code CAST3M pour un écoulement turbulent en canal plan | 71 |
| 2.4.2 | Reconstruction des profils dans la zone proche-paroi | 77 |
| 2.4.3 | Présentation et validation des calculs de référence pour l'établissement d'un écoulement turbulent dans un canal plan | 78 |
| 2.5 | Conclusion | 82 |
| 3 | Etude de la dispersion pour un écoulement turbulent | 85 |
| 3.1 | Influence de la turbulence sur la dispersion d'un scalaire passif | 86 |
| 3.1.1 | Prise en compte de la turbulence dans l'analyse de Whitaker | 88 |
| 3.1.2 | Mise sous forme adimensionnée | 92 |
| 3.2 | Dispersion passive : résultats | 93 |
| 3.2.1 | Analyse de Taylor | 93 |
| 3.2.2 | Écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan | 94 |
| 3.2.3 | Écoulement turbulent dans un tube à section circulaire | 98 |
| 3.2.4 | Sensibilité au modèle de turbulence | 99 |
| 3.3 | Dispersion thermique | 100 |
| 3.3.1 | Les différents modèles macroscopiques thermiques | 101 |
| 3.3.2 | Le modèle mixte de dispersion thermique : dispersion active | 105 |
| 3.3.3 | Mise sous forme adimensionnée | 110 |
| 3.4 | Dispersion active : résultats | 111 |
| 3.4.1 | Écoulement laminaire dans un canal bidimensionnel plan et dans un tube à section circulaire | 111 |
| 3.4.2 | Écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan | 112 |
| 3.4.3 | Écoulement turbulent dans un tube à section circulaire | 114 |
| 3.4.4 | Sensibilité au modèle de turbulence | 115 |
| 3.5 | Dispersion et diffusion : éléments de comparaison | 115 |
| 3.5.1 | Coefficient de diffusion moléculaire et turbulent à l'échelle macroscopique | 117 |
| 3.5.2 | Comparaisons pour le canal bidimensionnel plan | 118 |
| 3.5.3 | Comparaisons pour le tube à section circulaire | 121 |
| 3.6 | Conclusion et perspectives | 124 |
| 4 | Analyse à deux échelles de la turbulence en milieux poreux | 127 |
| 4.1 | Introduction de l'analyse à deux échelles | 129 |
| 4.1.1 | Analyse spectrale schématique de la turbulence en milieux poreux | 129 |
| 4.1.2 | Principe de double décomposition | 130 |
| 4.2 | Etude des tenseurs de contraintes turbulentes | 132 |
| 4.2.1 | Equations bilans de $\langle u'_i \rangle_f$ et $\delta u'_i$ | 132 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.2.2 | Equation bilan du tenseur de Reynolds macroscopique \overline{R}_{ij}^M | 133 |
| 4.2.3 | Equation bilan du tenseur de Reynolds de sous-filtre $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$ | 136 |
| 4.2.4 | Reconstitution de l'équation bilan du tenseur de Reynolds filtré $\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f$: étude des termes inconnus | 140 |
| 4.2.5 | Equations bilans des énergies cinétiques turbulentes macroscopique et microscopique (respectivement \overline{k}^M et $\langle \overline{k}^m \rangle_f$): étude des transferts . . . | 145 |
| 4.3 | Energies cinétiques du mouvement moyen | 148 |
| 4.3.1 | Equations bilans de $\langle \overline{u}_i \rangle_f$ et $\delta \overline{u}_i$ | 149 |
| 4.3.2 | Equation bilan de l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen \overline{E}^M | 149 |
| 4.3.3 | Equation bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ | 150 |
| 4.3.4 | Reconstitution de l'équation bilan de $\langle \overline{E} \rangle_f$ | 151 |
| 4.4 | Analyse des transferts | 152 |
| 4.4.1 | Récapitulatif des transferts | 153 |
| 4.4.2 | Rôle du terme de production de sous-filtre | 155 |
| 4.4.3 | Analyse du terme de production de sous-filtre | 156 |
| 4.5 | Conclusion | 157 |
| 5 | Etablissement d'un modèle de turbulence pour un milieu stratifié | 159 |
| 5.1 | Etude bibliographique | 159 |
| 5.1.1 | Equation de transport de $\langle \overline{k} \rangle_f$ | 160 |
| 5.1.2 | Modélisation de $\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ | 165 |
| 5.1.3 | Etat asymptotique | 166 |
| 5.1.4 | Problématique | 168 |
| 5.2 | Modélisation de l'équation bilan de $\langle \overline{k} \rangle_f$ | 168 |
| 5.2.1 | Forme générale de l'équation bilan modèle de $\langle \overline{k} \rangle_f$ | 169 |
| 5.2.2 | Modélisation de la production de sous-filtre P_{SF} | 170 |
| 5.3 | Proposition d'une équation bilan modèle pour $\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ | 177 |
| 5.3.1 | Proposition d'une forme générale pour l'équation bilan modèle de $\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ | 177 |
| 5.3.2 | Identification du temps caractéristique τ_t et valeur de C_{ε_s} | 177 |
| 5.3.3 | Identification du temps caractéristique τ_s | 180 |
| 5.4 | Etablissement d'une expression modèle pour le coefficient de frottement . . . | 182 |
| 5.4.1 | Vers une expression modèle du coefficient de frottement | 183 |
| 5.4.2 | Etude de l'équilibre du modèle macroscopique $\langle \overline{k} \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f$ en fonction de l'expression modèle du coefficient de frottement | 185 |
| 5.4.3 | Modification de l'expression modèle de f_p | 187 |
| 5.4.4 | Synthèse de la modélisation dynamique du coefficient de frottement | 190 |
| 5.5 | Etablissement d'une équation bilan modèle pour $\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f$ dans un canal | 192 |
| 5.5.1 | Etude de la dissipation de sillage | 192 |
| 5.5.2 | Equation bilan modèle pour $\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f$ | 193 |
| 5.5.3 | Etude de l'équilibre du modèle macroscopique $\langle \overline{k} \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f$ en fonction de l'expression modèle du coefficient de frottement | 196 |
| 5.6 | Sensibilité des modèles partiels aux paramètres β et C_{ε_w} | 198 |
| 5.6.1 | Sensibilité du modèle macroscopique à deux équations au paramètre β | 198 |
| 5.6.2 | Sensibilité de l'équation bilan modèle de la dissipation de sillage au paramètre C_{ε_w} | 203 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.7 | Modélisation de l'état asymptotique de référence | 205 |
| 5.7.1 | Etude de l'état asymptotique : $f_{p\infty}$ | 205 |
| 5.7.2 | Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$ | 206 |
| 5.7.3 | Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f$ | 207 |
| 5.7.4 | Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f$ | 207 |
| 5.8 | Conclusion | 208 |
| 6 | Optimisation et évaluation du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements en canaux | 211 |
| 6.1 | Optimisation des coefficients du modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ | 212 |
| 6.1.1 | Sensibilité du modèle macroscopique aux paramètres β et C_{ε_w} | 212 |
| 6.1.2 | Optimisation des coefficients du modèle macroscopique pour les écoulements turbulents en canal plan | 218 |
| 6.1.3 | Optimisation des paramètres du modèle macroscopique pour les écoulements turbulents en tube à section circulaire | 221 |
| 6.1.4 | Discussion sur les variations des coefficients du modèle macroscopique | 225 |
| 6.2 | Exploitation du modèle macroscopique de turbulence | 226 |
| 6.2.1 | Capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements turbulents en canal plan | 226 |
| 6.2.2 | Capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements turbulents en tube à section circulaire | 231 |
| 6.3 | Conclusion | 234 |
| | Conclusion | 237 |

Nomenclature

| Symbole | Description | Unité |
|----------------------|---|--------------------|
| Lettres romaines | | |
| A_f | Interface fluide-solide | m^2 |
| A_ε | Constante de modélisation | — |
| A_μ | Constante de modélisation | — |
| c_p | Capacité calorifique | $J.kg^{-1}.K^{-1}$ |
| C_d | Constante de modélisation | — |
| C_l | Constante de modélisation | — |
| C_μ | Constante de modélisation | — |
| C_{ε_1} | Constante de modélisation | — |
| C_{ε_2} | Constante de modélisation | — |
| C_{ε_w} | Constante de modélisation | — |
| c | Scalaire passif | — |
| D | Coefficient de diffusion du scalaire passif | $m^2.s^{-1}$ |
| D_H | Diamètre hydraulique ($= 4S_H/P_m$) | m |
| \mathcal{D}_{ij} | Tenseur de dispersion | $m^2.s^{-1}$ |
| \mathcal{D}_{ij}^A | Tenseur de dispersion active | $m^2.s^{-1}$ |
| \mathcal{D}_{ij}^P | Tenseur de dispersion passive | $m^2.s^{-1}$ |
| \overline{E} | Energie cinétique du mouvement moyen ($= \overline{u_i u_i}/2$) | $m^2.s^{-2}$ |
| \overline{E}^M | Energie cinétique macroscopique du mouvement moyen | $m^2.s^{-2}$ |
| \overline{E}^m | Energie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen | $m^2.s^{-2}$ |
| E_c | Nombre d'Eckert ($= U^2/(c_p \Delta T_f)$) | — |
| \overline{E}_p | Dissipation supplémentaire (pour formulation bas-Reynolds) | $m^2.s^{-4}$ |
| E_t | Energie totale ($= e + u_i u_i/2$) | $m^2.s^{-2}$ |
| F_{ϕ_i} | Composante de la force volumique spécifique (perte de charge) | $m.s^{-2}$ |
| \mathcal{F} | Flux spectral d'énergie | $m^2.s^{-3}$ |
| f_1 | Fonction d'amortissement | — |

NOMENCLATURE

| Symbole | Description | Unité |
|------------------|--|-------------------|
| f_2 | Fonction d'amortissement | — |
| F_k | Loi de paroi pour l'énergie cinétique turbulente | — |
| F_ε | Loi de paroi pour la dissipation visqueuse | — |
| f_μ | Fonction d'amortissement | — |
| f_p | Coefficient de frottement | — |
| F_u | Loi de Reichardt (loi de paroi pour la vitesse) | — |
| g_i | Composante du vecteur gravitationnel | $m.s^{-2}$ |
| k_f | Conductivité thermique du fluide | $W.m^{-1}.K^{-1}$ |
| k_s | Conductivité thermique du solide | $W.m^{-1}.K^{-1}$ |
| \bar{k} | Energie cinétique turbulente | $m^2.s^{-2}$ |
| \bar{k}^M | Energie cinétique turbulente macroscopique | $m^2.s^{-2}$ |
| \bar{k}^m | Energie cinétique turbulente de sous-filtre | $m^2.s^{-2}$ |
| l | Echelle de longueur caractéristique des variations microscopiques | m |
| l_I | Echelle intégrale | m |
| l_κ | Echelle de Kolmogorov | m |
| l_m | Longueur de mélange | m |
| L | Echelle de longueur caractéristique des variations macroscopiques | m |
| m | Fonction de filtrage | — |
| n_i | Composante de la normale à l'interface fluide-solide orientée vers l'extérieur du domaine fluide | — |
| \mathcal{P} | Densité de probabilité | — |
| P | Pression statique | Pa |
| Pe | Nombre de Péclet ($= UD_H/D$, ou $= UD_H/\alpha_f$) | — |
| P_m | Périmètre mouillé | m |
| P_M | Production macroscopique de la turbulence | $m^2.s^{-3}$ |
| Pr | Nombre de Prandtl ($= \nu/\alpha_f$) | — |
| Pr_t | Nombre de Prandtl ($= \nu_t/\alpha_t$) | — |
| P_{SF} | Production de sous-filtre | $m^2.s^{-3}$ |
| Q | Source volumique de chaleur (rayonnement par exemple) | $m^2.s^{-3}$ |
| \bar{R}_{ij} | Composantes du tenseur des contraintes de Reynolds | $m^2.s^{-2}$ |
| \bar{R}_{ij}^c | Composantes du tenseur des contraintes de Reynolds croisées | $m^2.s^{-2}$ |
| \bar{R}_{ij}^m | Composantes du tenseur des contraintes de Reynolds de sous-filtre | $m^2.s^{-2}$ |
| \bar{R}_{ij}^M | Composantes du tenseur des contraintes de Reynolds macroscopiques | $m^2.s^{-2}$ |
| Re | Nombre de Reynolds ($= UD_H/\nu$) | — |
| Re_t | Nombre de Reynolds turbulent ($= u'l/\nu$) | — |
| Re_T | Nombre de Reynolds turbulent local ($= \bar{k}^2/(\nu\bar{\varepsilon})$) | — |
| Re_τ | Nombre de Reynolds de frottement ($= u_f D_H/(4\nu)$) | — |

| Symbole | Description | Unité |
|--------------------------------------|---|--------------------|
| r_0 | Echelle de longueur associée au VER | m |
| Sc | Nombre de Schmidt ($= \nu/D$) | – |
| Sc_t | Nombre de Schmidt turbulent ($= \nu_t/D_t$) | – |
| S_H | Section hydraulique (ou section de passage) | m^2 |
| t | Temps | s |
| T | Température | K |
| T_{ij} | Composante du tenseur de tortuosité | – |
| \mathbf{u} | Vitesse | $m.s^{-1}$ |
| u_i | Composante du vecteur vitesse | $m.s^{-1}$ |
| u_f | Vitesse de frottement | $m.s^{-1}$ |
| u_x | Composante suivant l'axe x du vecteur vitesse | $m.s^{-1}$ |
| u_y | Composante suivant l'axe y du vecteur vitesse | $m.s^{-1}$ |
| u_z | Composante suivant l'axe z du vecteur vitesse | $m.s^{-1}$ |
| U | Echelle caractéristique de la vitesse | $m.s^{-1}$ |
| u^+ | Vitesse normalisée ($= u/u_f$) | $m.s^{-1}$ |
| y_n | Distance normalisée à la paroi ($= y_w \bar{k}^{-1/2} / \nu$) | – |
| y^+ | Distance normalisée à la paroi ($= y_w u_f / \nu$) | – |
| y_p | Distance de raccord mesurée par rapport à la paroi | m |
| y_w | Distance normale à la paroi | m |
| Lettres grecques | | |
| α | Diffusivité thermique ($= k/(\rho c_p)$) | $m^2.s^{-1}$ |
| β | Fonction d'amortissement | – |
| δ_w | Fonction de Dirac associé à l'interface fluide-solide | m^{-1} |
| δ_{ij} | Symbole de Kroenecker | – |
| ΔV | Volume du VER | m^3 |
| ΔV_f | Volume du fluide inclus dans le VER | m^3 |
| ϵ | Paramètre d'échelle ($= l/L$) | m |
| $\bar{\epsilon}$ | Dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente | $m^2.s^{-3}$ |
| $\bar{\epsilon}^m$ | Dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre | $m^2.s^{-3}$ |
| $\bar{\epsilon}^M$ | Dissipation visqueuse de l'énergie cinétique turbulente macroscopique | $m^2.s^{-3}$ |
| $\bar{\epsilon}_p$ | Dissipation supplémentaire (pour formulation $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds) | $m^2.s^{-3}$ |
| $\langle \bar{\epsilon}_w \rangle_f$ | Dissipation de sillage | $m^2.s^{-3}$ |
| κ | Constante de Von Kármán ($\kappa = 0.41$) | – |
| η_i | Fonction de dispersion passive | m |
| λ | Constante | m |
| μ | viscosité dynamique du fluide | $kg.m^{-1}.s^{-1}$ |
| ν | viscosité cinématique du fluide | $m^2.s^{-1}$ |
| ν_t | Viscosité turbulente | $m^2.s^{-1}$ |
| ω_i | Composante de la vitesse de l'interface fluide-solide | $m.s^{-1}$ |

NOMENCLATURE

| Symbole | Description | Unité |
|---------------------------|---|--------------------|
| σ_{ij} | Composantes du tenseur des contraintes visqueuses | $kg.m^{-1}.s^{-2}$ |
| σ_c | Nombre de Schmidt «turbulent» associé au scalaire passif | — |
| σ_k | Nombre de Schmidt «turbulent» associé à \bar{k} | — |
| σ_ε | Nombre de Schmidt «turbulent» associé à $\bar{\varepsilon}$ | — |
| ς | distorsion du maillage gaussien | — |
| τ_d | Temps caractéristique de diffusion | s |
| τ_p | Temps caractéristique associé au travail de la force de trainée | s |
| τ_s | Temps caractéristique associé à la production de sous-filtre | s |
| τ_t | Temps caractéristique de retournement des tourbillons | s |
| τ_w | Temps caractéristique associé à la dissipation de sillage | s |
| χ_f | Fonction caractéristique de la phase fluide | — |
| χ_s | Fonction caractéristique de la phase solide | — |
| ζ | Fonction de dispersion active | s |
| Indices | | |
| ∞ | Etat asymptotique ou état d'équilibre «physique» | — |
| \triangleright | Etat asymptotique ou état d'équilibre du modèle macroscopique | — |
| f | Fluide | — |
| s | Solide | — |
| w | Paroi | — |
| Exposants | | |
| * | Variable sans dimension | — |
| Opérateurs | | |
| $\bar{\cdot}$ | Moyenne statistique | — |
| \cdot' | Fluctuation par rapport à la moyenne statistique | — |
| $\langle \cdot \rangle$ | Moyenne spatiale sur un VER | — |
| $\langle \cdot \rangle_f$ | Moyenne spatiale intrinsèque fluide | — |
| $\langle \cdot \rangle_s$ | Moyenne spatiale intrinsèque solide | — |
| δ | Déviation par rapport à la moyenne intrinsèque fluide | — |
| * | Produit de convolution | — |
| \otimes | Produit tensoriel entre deux vecteurs | — |
| : | Produit contracté entre deux vecteurs | — |

| Symbole | Description | Unité |
|-------------------|--|-------|
| Achronymes | | |
| VER | Volume Élémentaire Représentatif | – |
| RANS | Reynolds Averaged Navier Stokes | – |
| LES | Large Eddy Simulation (Simulation des Grandes Echelles) | – |
| DNS | Direct Numerical Simulation (Simulation Numérique Directe) | – |

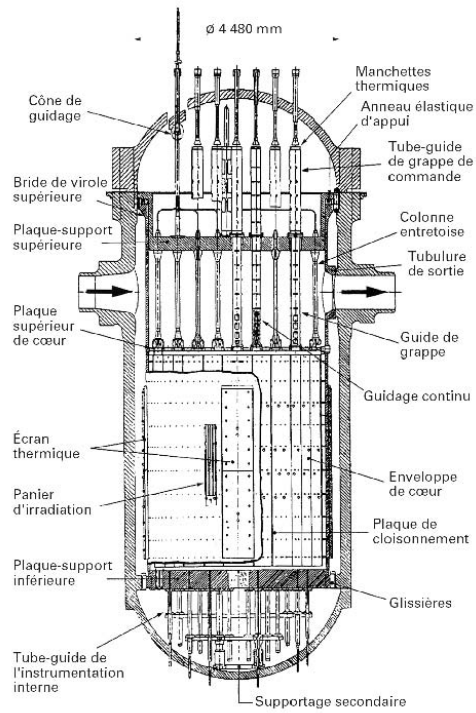
NOMENCLATURE

Introduction

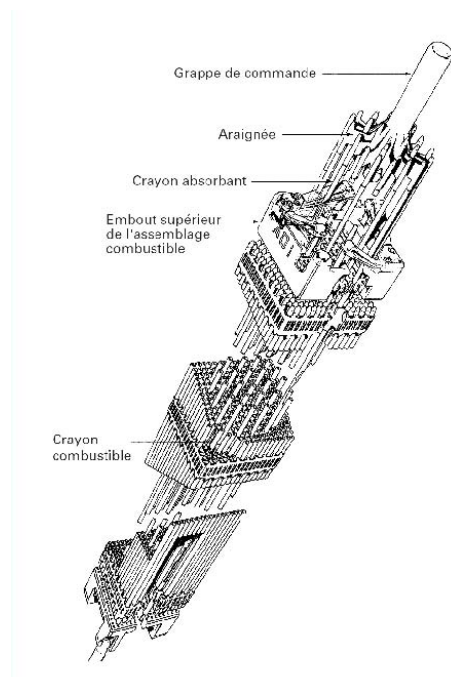
LES besoins de modélisation d'écoulements fluides (liquide ou gaz) turbulents traversant des structures solides complexes se rencontrent dans de nombreux domaines. C'est notamment le cas de l'étude des écoulements urbains et des écoulements dans les tunnels pour lesquels il peut être intéressant d'étudier la dispersion d'un polluant. Nous pouvons aussi citer les écoulements dans les canopées pour lesquels on peut par exemple étudier la propagation d'un feu. Enfin, pour les écoulements dans les échangeurs thermiques ou encore les écoulements dans les réacteurs nucléaires (Fig. 1), l'un des objectifs est de comprendre et de maîtriser l'échange de chaleur entre la structure solide et le fluide. Deux difficultés majeures rendent complexe l'étude de ces systèmes : la géométrie de la structure solide et le possible caractère turbulent de l'écoulement qui la traverse. Parallèlement à cela, les enjeux actuels de la simulation numérique reposent non seulement sur la puissance de calcul des ordinateurs, mais surtout sur la qualité de la modélisation des phénomènes considérés. Lorsque la puissance des calculateurs ne permet pas de réaliser des simulations fines des systèmes décrits, une approche homogénéisée peut être envisagée.

En considérant plus particulièrement le cas d'un réacteur nucléaire qui est composé d'assemblage de crayons combustibles (Figs. 1 et 2), différents niveaux de détails de l'écoulement peuvent être décrits. Tout d'abord, en supposant que l'écoulement est turbulent, le niveau de détails le plus fin au sens des milieux continus est celui décrivant la structure fine de la turbulence. Puis, à l'échelle des crayons combustibles (Fig. 2), le second niveau de détail est la description de la topologie de l'écoulement (entre 4 crayons), comme par exemple l'épaisseur de la couche limite. Enfin, à l'échelle de l'assemblage, nous nous intéressons plutôt à la répartition du débit et de la température, tout comme à l'échelle du quart de coeur. Comme nous l'avons dit précédemment, il est impossible à l'aide des moyens informatiques actuels de considérer ce système dans son intégralité. Par contre, si seul le comportement à grande échelle nous intéresse, il faut, grâce à la modélisation physique, restituer à l'échelle macroscopique l'impact des détails microscopiques de l'écoulement.

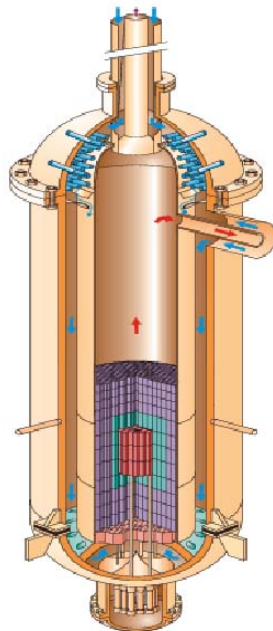
L'une des possibilités pour étudier ces systèmes est de considérer que la structure solide constitue un milieu poreux. Différentes méthodes d'homogénéisation spatiale permettent alors de modéliser ces écoulements. Il s'agit de la méthode dite «d'homogénéisation» [9, 66, 92], de la méthode des moments [4, 14] et de la méthode de la prise de moyenne [105, 112]. Ces trois méthodes reposent sur un principe commun : l'existence de deux échelles spatiales distinctes l et L qui caractérisent l'écoulement. Un point de vue différent doit être adopté si nous nous plaçons à l'une ou l'autre échelle. La figure 3 en fournit une représentation schématique. Ainsi, les variations macroscopiques peuvent être considérées comme



(a) Schéma descriptif d'un cœur de Réacteur à Eau Pressurisé (REP).



(b) Schéma descriptif d'une grappe composant le cœur d'un REP.



(c) Schéma descriptif d'un cœur de Réacteur à Gaz Haute Température.

FIG. 1: Description de deux réacteurs nucléaires.

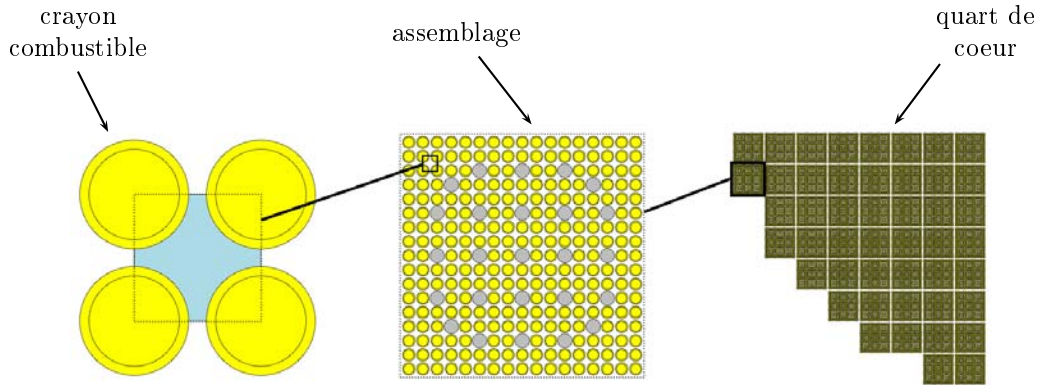


FIG. 2: Description d'un faisceau de crayons (composant un cœur de réacteur nucléaire) suivant différents niveaux de détails.

une succession d'états microscopiques constants. Par contre, si nous effectuons un zoom à l'échelle microscopique, nous retrouvons alors tous les détails contenus à cette échelle.

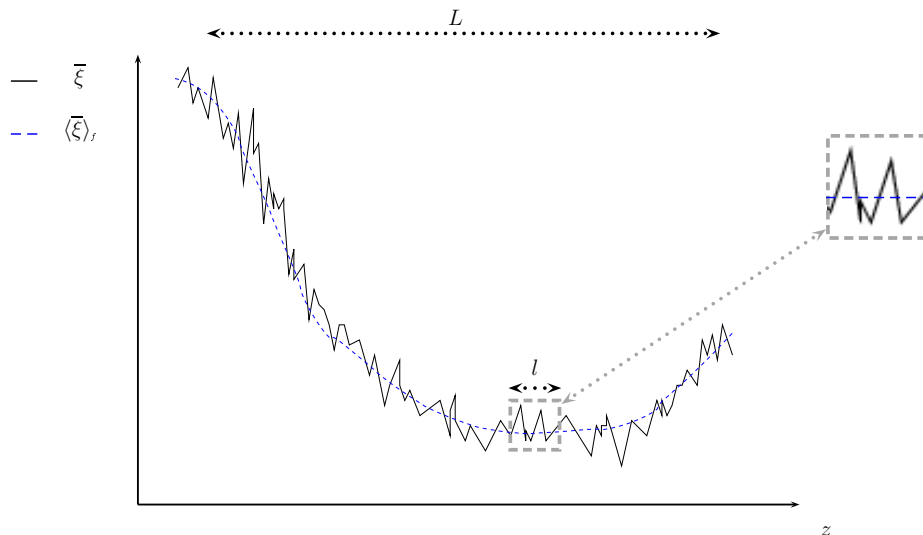


FIG. 3: Description du principe de séparation d'échelle qui est commun à toutes les méthodes d'homogénéisation spatiale.

Dans l'ensemble des résultats qu'il est possible d'étudier à l'aide des méthodes d'homogénéisation [113], la loi de Darcy [26] est le résultat le plus connu. A l'époque, Henry Darcy avait proposé de ne plus considérer un massif de sable comme un empilement de grains, mais de l'analyser comme un matériau homogène. En mesurant le débit d'eau s'écoulant au travers du massif, il a ainsi démontré la relation liant les pertes de charge au débit d'eau au travers de la perméabilité du milieu. Il avait introduit l'idée qu'on pouvait décrire à l'échelle macroscopique un écoulement à l'aide d'un paramètre descriptif du milieu (qui est ici la perméabilité). Par la suite, ces méthodes d'homogénéisation ont été largement exploitées pour modéliser des écoulements laminaires dans des milieux poreux. Elles ont notamment été appliquées à l'étude de la dispersion de polluants et à la dispersion thermique [16] via

l'introduction de la dispersion. Dans le cadre des configurations multi-dimensionnelles, la dispersion se présente sous la forme d'un tenseur. Par ailleurs, les interactions à l'échelle microscopique entre la phase fluide et la phase solide sont traduites à l'échelle macroscopique à travers la définition de coefficients d'échange, comme par exemple le coefficient de frottement (ou coefficient de perte de charge) pour les échanges de quantité de mouvement ou le coefficient d'échange thermique. Le tenseur de dispersion et les coefficients d'échange remplissent le même rôle de restitution à l'échelle macroscopique des détails microscopiques de l'écoulement. Cependant, dans une grande majorité des références qui ont été étudiés dans cette thèse, leur description et leur étude est réduite à des écoulements établis, c'est à dire à l'équilibre hydraulique. Or, par exemple dans le cas de l'établissement d'un écoulement laminaire dans un canal plan, il est aisé de démontrer que le coefficient de frottement le long de l'écoulement n'est pas identiquement égal à sa valeur à l'établissement. De la même façon, nous pouvons nous attendre à des variations du tenseur de dispersion au cours de l'établissement. Cette étude de la dispersion et des coefficients d'échange pour des écoulements laminaires en déséquilibre hydraulique est, à ce jour, un problème ouvert.

Pour les écoulements turbulents dans des milieux poreux, les méthodes d'homogénéisation n'ont pas encore été utilisées pour étudier la dispersion. L'impact de la turbulence sur ce mécanisme n'a pas pour l'instant été caractérisé, que ce soit pour un écoulement établi ou pour un écoulement en déséquilibre. Par ailleurs, l'influence (à l'échelle microscopique) de la turbulence sur les coefficients d'échange a déjà été étudiée dans le cas de couches limites dont l'écoulement externe présente une turbulence de plus ou moins grande intensité (voir par exemple [6, 7, 10, 11, 41]). Cependant la complexité de ces analyses locales ne permet pas de déduire l'impact de la turbulence à l'échelle macroscopique. Différentes propositions [61, 68] ont été faites pour restituer l'influence de la turbulence sur le coefficient d'échange thermique, mais leur forme reste critiquable car elles ne font pas référence à un état d'équilibre de la turbulence. Grâce à une approche différente, Fukagata et al. [34] montrent de façon plus rigoureuse que ces coefficients d'échange peuvent être considérés comme la somme d'une contribution «laminaire», d'une contribution instationnaire et d'une contribution purement turbulente. Cette étude indique qu'il est possible de décrire les variations des coefficients d'échange en fonction de variables macroscopiques caractérisant la turbulence.

Différents auteurs comme Liu et al. [60], Nakayama et Kuwahara [70] ou encore Pedras et De Lemos [73], ont employé la méthode de prise de moyenne spatiale pour proposer une modélisation de la turbulence à l'échelle macroscopique. Chacune de ces suggestions respecte un point spécifique de ce type de modélisation. Ainsi, le modèle de Pedras et De Lemos [73] est établi de telle façon que les termes supplémentaires associés au milieu poreux deviennent nuls si l'on est en présence d'un écoulement libre. Par contre, leur modèle est mal posé en ce qui concerne sa capacité à atteindre un état d'équilibre pertinent de la turbulence. Quant à Nakayama et Kuwahara [70], ils ont justement privilégié cette capacité, mais au détriment de la reproduction de la dynamique d'établissement. Le point commun de ces différents modèles est qu'ils ne tiennent pas réellement compte des déséquilibres (au niveau de la turbulence, de la forme et du niveau des profils) existant au sein de l'écoulement. De notre point de vue, la capacité de prédiction de ces déséquilibres est une qualité essentielle d'un modèle macroscopique de turbulence.

Par ailleurs, même si nous souhaitons conserver une certaine généralité, les géométries abordées dans cette étude possèdent toutes une direction privilégiée : c'est le cas des échangeurs de chaleur et des faisceaux de crayons. Dans ce dernier exemple (Figs. 1 et 2), l'écoulement est principalement dirigé suivant la même direction que les axes des crayons. Les

écoulements transversaux sont faibles en regard de l'écoulement longitudinal. Dans cette situation, il est possible d'étudier la dispersion et les coefficients d'échange en décomposant l'écoulement suivant les trois directions de l'espace. Les termes étudiés sont alors décrits par des tenseurs. Pour l'étude des écoulements dans les cœurs de réacteur nucléaire composés de faisceaux de crayons, ce raisonnement aboutit sur l'*analyse en sous-canaux*. Ainsi, l'écoulement au sein de l'espace décrit par quatre crayons (niveau d'échelle le plus faible sur la figure 2) est supposé assimilable à un écoulement en tube à section circulaire. La notion de diamètre hydraulique permet de faire l'analogie entre les deux géométries. Cet état d'esprit sera retrouvé tout au long de cette étude.

Dans ce mémoire, nous proposons de présenter les travaux de thèse portant sur la modélisation à l'échelle macroscopique d'un écoulement turbulent dans un milieu poreux. Ils correspondent aux quatre objectifs d'étude suivants :

- décrire un formalisme adapté à l'étude d'écoulements turbulents en utilisant l'approche «milieu poreux»,
- mettre en avant les termes qui nécessitent une modélisation,
- effectuer les premiers pas vers une modélisation à l'échelle macroscopiques d'écoulements turbulents,
- restituer les effets de déséquilibre de la turbulence à l'échelle macroscopique.

Dans le **chapitre 1**, nous décrivons différents outils mathématiques permettant d'étudier un écoulement turbulent dans un milieu poreux. L'accent est principalement porté sur une méthode d'homogénéisation qui est la méthode de prise de moyenne spatiale [113]. Elle est introduite dans le cas d'un écoulement laminaire et appliquée pour deux géométries simples. Les équations décrivant un écoulement turbulent à l'échelle macroscopique sont ensuite établies et les différents termes nécessitant une modélisation sont mis en avant.

Dans le **chapitre 2**, nous présentons plusieurs modèles RANS au premier ordre. L'établissement à partir des équations de Navier-Stokes moyennées statistiquement de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente (\bar{k}) est détaillée. Puis, la prescription d'une échelle de longueur caractérisant la turbulence est présentée. Nous insistons sur l'utilisation d'une seconde variable «turbulente», à savoir la dissipation visqueuse de la turbulence ($\bar{\epsilon}$), pour constituer un modèle de turbulence à l'échelle locale (ou microscopique). Après la validation de ce modèle dans des codes de calcul unidimensionnel et multidimensionnel, nous exposons enfin l'utilisation qui est faite des différents outils dans la suite de l'étude.

Le **chapitre 3** expose une étude de la dispersion en milieu poreux pour des écoulements turbulents. Plus précisément, nous présentons, dans le cas d'un scalaire passif, une extension possible de la méthodologie de Whitaker [16, 112]. Elle met en évidence l'impact de la turbulence au sein du problème de fermeture. Nous analysons ensuite, dans des géométries simples, les effets de la turbulence sur la composante longitudinale du tenseur de dispersion. Cette analyse constitue un prémice pour l'étude de la dispersion thermique qui, de par la présence du flux thermique en paroi, nécessite de considérer des contributions supplémentaires. Nous explicitons ainsi les notions de *dispersions active et passive* et nous présentons, dans les mêmes géométries, l'étude des composantes longitudinales des tenseurs associés.

Au cours du **chapitre 4**, nous proposons d'étudier la turbulence au sein d'un milieu poreux grâce à une analyse à deux échelles [96]. Pour cela, nous faisons l'hypothèse qu'il existe une échelle de coupure de taille comparable à celle du filtre spatial permettant l'homogénéisation de l'écoulement. L'établissement, la manipulation et la reconstitution de différentes équations bilans, permettant de caractériser la turbulence à l'échelle microscopique, sont décrits. De la même façon que dans l'étude locale de la turbulence, différents niveaux de complexité peuvent être considérés. Ainsi, les équations homogénéisées des tenseurs de Reynolds et de l'énergie cinétique turbulente sont exposées. L'étude de ces différentes équations permet d'aboutir à une description fine des transferts existant au sein de l'écoulement, que ce soit entre les écoulements moyens et turbulents ou entre les écoulements macroscopique et microscopique. Deux termes sont notamment introduits : la **production de sous-filtre** ainsi que la **dissipation de sillage**.

Dans le **chapitre 5**, une étude bibliographique critique souligne les contraintes inhérentes à la modélisation macroscopique de la turbulence en milieu poreux. Nous constatons que la plupart des modèles dérivés pour traiter ce problème sont des modèles de type $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ qui ne répondent que partiellement aux contraintes décrites. Dans cette même optique et par souci de cohérence avec les modèles utilisés dans cette étude pour simuler localement la turbulence, nous choisissons aussi d'explorer les possibilités de dérivation d'un tel modèle. La dérivation des équations bilans des quantités turbulentes sont présentées dans un contexte générale. Puis différents points sont particulièrement traités, comme la modélisation de la production de sous-filtre et de la dissipation de sillage. Devant le peu de connaissances disponibles concernant ces termes, nous proposons de les analyser dans une géométrie simple. Une modélisation est ensuite proposée dans ce cadre d'étude. Le modèle obtenu est alors un modèle à quatre équations (modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$) dépendant de deux coefficients. Il comprend trois équations bilan et une fermeture algébrique rendant compte de l'impact du déséquilibre sur le frottement.

Nous étudions au cours du **chapitre 6** le modèle de turbulence macroscopique. Sa sensibilité par rapport aux deux coefficients est dans un premier temps étudiée. Pour optimiser ces coefficients et évaluer le modèle de turbulence, nous nous appuyons sur une matrice d'écoulements de référence dans une géométrie donnée. Grâce à une méthode d'optimisation, nous déterminons un couple idéal de coefficients. Nous vérifions par la suite la relative universalité de ces coefficients en réalisant une optimisation sur des écoulements traversant une autre géométrie. Enfin, en simulant à l'échelle macroscopique différents écoulements n'appartenant pas aux matrices d'optimisation, nous montrons les capacités de prédiction de ce modèle.

Moyennes et filtres

UN écoulement turbulent dans un milieu poreux présente une large gamme d'échelles de temps et de longueur. Suivant la précision de l'étude visée, la description explicite de toutes ces échelles n'est pas nécessaire pour caractériser l'écoulement. Ainsi, l'utilisation d'une moyenne, qu'elle soit statistique, spatiale ou temporelle, permet de réduire cette gamme d'échelles. Par ailleurs, même si certaines échelles n'apparaissent plus explicitement dans la description (mathématique) des phénomènes, l'influence de ces échelles existent toujours au travers de termes inconnus. L'objectif du modélisateur est de décrire ces termes.

Pour s'affranchir du caractère pseudo-aléatoire de la turbulence, nous préconisons l'utilisation d'une moyenne statistique. Celle-ci est introduite dans la section 1.1. Ses propriétés sont étudiées et un exemple d'application de cette moyenne à une équation bilan est présenté. Pour limiter l'ensemble des échelles spatiales, différentes méthodes, regroupées sous le nom d'homogénéisation spatiale, sont succinctement décrites dans la section 1.2. L'accent est plus particulièrement mis sur la moyenne spatiale et ses propriétés. Un exemple d'application à une équation bilan est aussi présenté.

De façon symétrique, l'utilisation de la moyenne statistique ou de la moyenne spatiale nécessite de prendre en compte un phénomène nommé dispersion. Cette dispersion s'opère dans l'espace physique pour l'approche spatiale et dans l'espace temporel pour l'approche statistique¹. Pourtant, dans toute cette étude, lorsque nous emploierons le terme dispersion, nous ferons référence à la dispersion spatiale. La section 1.3 est dédiée à l'analyse introductive de ce phénomène.

Enfin, pour l'étude d'un écoulement turbulent dans un milieu poreux, nous recommandons l'utilisation conjointe des moyennes statistique et spatiale. Leur application combinée aux équations décrivant l'écoulement est décrite dans la section 1.4.

¹Nous faisons référence à l'espace temporel sous la condition que l'écoulement étudié est ergodique.

1.1 Moyenne statistique

La moyenne statistique est définie par :

$$\bar{\xi}(\mathbf{x}, t) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \xi_n(\mathbf{x}, t), \quad (1.1)$$

où $\xi_n(\mathbf{x}, t)$ correspond à la $n^{\text{ième}}$ réalisation de la variable ξ au point \mathbf{x} et au temps t . Cette moyenne est tout particulièrement adaptée à l'étude d'une quantité présentant un comportement aléatoire et donc applicable à l'étude de la turbulence. Nous définissons ensuite la fluctuation de la variable ξ comme étant l'écart à sa valeur moyenne :

$$\xi'(\mathbf{x}, t) = \xi(\mathbf{x}, t) - \bar{\xi}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

La moyenne statistique possède trois propriétés qui sont extrêmement utiles pour la manipulation des équations différentielles moyennées. Dans le domaine de la mécanique des fluides, elles sont communément regroupées sous le nom d'axiomes de Reynolds.

1.1.1 Axiomes de Reynolds

Ces trois axiomes sont :

1. la linéarité,
2. l'idempotence,
3. la commutativité avec les opérateurs de dérivations temporelle et spatiale.

Grâce aux propriétés du passage à la limite pour les sommations discrètes, nous pouvons montrer que la moyenne statistique respecte ces trois axiomes.

Tout d'abord, la linéarité peut être démontrée en considérant une constante λ , et en écrivant :

$$\overline{\lambda \xi} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p (\lambda \xi_n) = \lambda \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \xi_n \right) = \lambda \bar{\xi}. \quad (1.3)$$

La propriété d'impotence équivaut à la propriété de centrage d'une moyenne. Pour la moyenne statistique, nous avons :

$$\bar{\xi'} = \overline{\xi - \bar{\xi}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \left(\xi_n - \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q \xi_m \right), \quad (1.4)$$

d'où

$$\bar{\xi'} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \xi_n - \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{1}{q} \sum_{m=1}^q \xi_m = 0. \quad (1.5)$$

La propriété de commutativité avec l'opérateur de dérivation temporelle peut se montrer selon :

$$\overline{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \frac{\partial \xi_n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{n=1}^p \xi_n \right) = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}. \quad (1.6)$$

La même démonstration peut être appliquée dans le cas de l'opérateur de dérivation spatiale.

Pour résumer, les axiomes de Reynolds regroupent les trois règles suivantes :

$$\begin{aligned}
 1. \text{ Linearité} & \quad \overline{\lambda \xi} = \lambda \bar{\xi}, \quad \text{si } \lambda \text{ est une constante,} \\
 2. \text{ Idempotence} & \quad \overline{\bar{\xi}} = \bar{\xi} \iff \overline{\xi'} = 0, \\
 3. \text{ Commutativité avec les} & \quad \overline{\frac{\partial \xi}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}, \quad \overline{\frac{\partial \xi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.1.2 Application de la moyenne statistique à l'équation bilan d'un scalaire passif

La concentration c d'un traceur ou «scalaire passif» suit l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i c) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right), \tag{1.8}$$

où D ($m^2.s^{-1}$) est le coefficient de diffusion du traceur dans le fluide. Il sera considéré constant dans tout le domaine fluide. Aucune réaction chimique, ni phénomène d'absorption à la paroi ne seront pris en compte. La condition limite de ce problème à l'interface fluide-solide A_f est :

$$\left. \begin{aligned} D \frac{\partial c}{\partial x_i} n_i &= 0 \\ u_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \text{ sur } A_f, \tag{1.9}$$

où \mathbf{n} est la normale à l'interface orientée vers l'extérieur du volume fluide (Fig. 1.1).

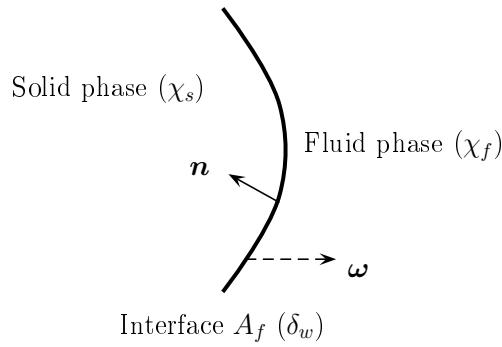


FIG. 1.1: Description de l'interface fluide - solide.

L'application de la moyenne statistique sur la relation (1.8) en utilisant les axiomes de Reynolds fournit directement :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i c}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right). \tag{1.10}$$

La propriété d'impotence de la moyenne permet de développer le terme convectif pour faire apparaître la moyenne d'un produit de fluctuations :

$$\overline{u_i \bar{c}} = \overline{u_i} \bar{c} + \overline{u'_i \bar{c}}. \quad (1.11)$$

L'équation bilan d'un scalaire passif, moyennée statistiquement, s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i \bar{c}}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i \bar{c}}. \quad (1.12)$$

Dans l'équation (1.12), la corrélation statistique (moment d'ordre 2) entre les fluctuations de vitesse et de concentration représente une inconnue. Ce terme est généralement appelé *flux turbulent* de concentration. Différents modèles existent pour déterminer ce terme. Ces méthodes seront discutées au chapitre 2.

1.2 Homogénéisation spatiale

1.2.1 Différentes méthodes d'homogénéisation

Pour aboutir à une représentation homogénéisée d'un milieu poreux, au moins trois méthodes peuvent être utilisées. Ces méthodes peuvent être employées dans un cadre plus général, mais seule leur adaptation au cas plus particulier d'un fluide s'écoulant dans une matrice solide fixe sera ici présentée. Il s'agit de la méthode d'homogénéisation [9, 66, 92], de la méthode des moments [4, 14] et de la méthode de la prise de moyenne [105, 112]. Les trois méthodes citées correspondent à des analyses différentes de l'écoulement. La méthode d'homogénéisation est très certainement la plus rigoureuse au niveau mathématique, mais peut apparaître éloignée de la physique des phénomènes entrant en jeu. La méthode de prise de moyenne s'inscrit dans une vision phénoménologique et peut paraître moins rigoureuse sur le plan mathématique (car les approximations ne sont pas entrées dans les hypothèses de départ mais sont faites au fur et à mesure du raisonnement). Quant à la méthode des moments, elle s'approche de la méthode de prise de moyenne, mais elle reste peu exploitée. Nous allons faire un rapide panorama de ces méthodes et des hypothèses simplificatrices qu'elles utilisent. Nous nous appuyerons sur l'équation bilan d'un scalaire passif pour illustrer notre propos.

Les méthodes qui sont ici présentées postulent toutes l'existence de deux échelles de variations l et L des grandeurs physiques telles que le paramètre $\epsilon = l/L$ vérifie $\epsilon \ll 1$. Pour un milieu poreux périodiques, nous précisons que $l \simeq D_H$, où D_H est le diamètre hydraulique des pores. Nous proposons d'adimensionner l'équation bilan du scalaire passif en considérant la longueur de référence D_H , le temps caractéristique $\tau_d = D_H^2/D$ et la vitesse caractéristique U . Les quantités adimensionnées sont indiquées par une astérisque :

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + Pe u_i^* \frac{\partial c^*}{\partial x_i^*} = \frac{\partial^2 c^*}{\partial x_i^* \partial x_i^*}, \quad (1.13)$$

où le nombre de Péclet de l'écoulement est défini par

$$Pe = \frac{U D_H}{D}. \quad (1.14)$$

La condition limite adimensionnée, associée à cette équation bilan, s'écrit

$$\frac{\partial c^*}{\partial x_i^*} n_i = 0 \quad \text{sur } A_f. \quad (1.15)$$

La **méthode d'homogénéisation** se distingue des deux autres car elle utilise l'opérateur de moyenne spatiale uniquement à la fin de l'analyse. On suppose que les grandeurs physiques dépendent de deux variables d'espace indépendantes² : une variable rapide \mathbf{X}^* et une variable lente $\tilde{\mathbf{X}}^* = \mathbf{X}^*/\epsilon$. L'opérateur de dérivée spatiale est donc modifié :

$$\frac{\partial}{\partial x_i^*} = \frac{\partial}{\partial X_i^*} + \epsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}_i^*}, \quad (1.16)$$

et l'équation bilan (1.13) de c prend la forme :

$$\frac{\partial c^*}{\partial t^*} + Pe u_i^* \left[\frac{\partial c^*}{\partial X_i^*} + \epsilon^{-1} \frac{\partial c^*}{\partial \tilde{X}_i^*} \right] = \frac{\partial^2 c^*}{\partial X_i^* \partial X_i^*} + 2\epsilon^{-1} \frac{\partial^2 c^*}{\partial \tilde{X}_i^* \partial X_i^*} + \epsilon^{-2} \frac{\partial^2 c^*}{\partial \tilde{X}_i^* \partial \tilde{X}_i^*} \quad (1.17)$$

Le scalaire passif est ensuite décomposé sous la forme d'un développement asymptotique par rapport à la variable ϵ :

$$c^*(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, t) = c_0^*(\tilde{\mathbf{X}}^*, t) + \epsilon c_1^*(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{X}}, t) + O(\epsilon), \quad (1.18)$$

où c_0^* ne dépend que de la variable lente et du temps. En reportant cette relation dans l'équation bilan (1.17), les différents ordres suivant les puissances du paramètre ϵ sont séparés pour obtenir différents problèmes (en général couplés) permettant de déduire les fonctions c_0^* et c_1^* . L'ordre de grandeur supposé du nombre de Péclet influence ces résultats, ce qui physiquement se traduit par différents régimes d'écoulement [94] :

- si $Pe \sim \epsilon$: la diffusion domine aux grandes et aux petites échelles ;
- si $Pe \rightarrow 1$: la diffusion ne domine qu'aux petites échelles mais la convection devient du même ordre de grandeur que la diffusion aux grandes échelles ;
- si $Pe \sim \epsilon^{-1}$: la convection est du même ordre de grandeur que la diffusion aux petites échelles, mais la convection domine aux grandes échelles ;
- si $Pe \sim \epsilon^{-2}$: la convection domine dans tous les domaines et la concentration est constante le long des lignes de courant.

La **méthode des moments** repose sur un traitement probabiliste du scalaire passif. On assimile le scalaire passif à un traceur sous forme de particules. On définit ensuite la densité de probabilité qu'une particule Brownienne soit située à la position \mathbf{x} à l'instant $t = t_1$, sous la condition qu'elle était à la position \mathbf{x}' à l'instant $t = 0$:

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}') . \quad (1.19)$$

Cette densité de probabilité est par ailleurs normée :

$$\int_{V_c} \mathcal{P}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}') d^3\mathbf{x} = 1, \quad (1.20)$$

²Dans cette méthode, c'est ici que repose l'approximation.

où V_c représente l'ensemble du volume physique étudié. Une équation de continuité et de conservation de la densité de fonction est établie. On étudie ensuite les moments de la distribution \mathcal{P} , dans un volume élémentaire représentatif (dont la définition sera donnée p. 16). Le moment d'ordre n est défini par :

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}') = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \mathbf{x}^n \mathcal{P}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Cette méthode s'attache à l'étude des différents moments en établissant leurs équations de transport. Le moment d'ordre 0 correspond à une représentation homogénéisée du scalaire passif. Puis la limite aux temps longs du moment d'ordre 1 représente sa vitesse moyenne. En utilisant la séparation des échelles de longueur, les équations des moments sont simplifiées et peuvent alors être résolues sous forme d'un problème de fermeture.

Une autre voie d'homogénéisation est la **méthode de prise de moyenne** qui a été pour la première fois clairement évoquée par Whitaker [112]. Cette méthode combine l'utilisation d'une fonction caractéristique, qui traduit mathématiquement la distinction entre le domaine fluide et le domaine solide, et d'une moyenne spatiale permettant l'homogénéisation. Les équations de transport des différentes quantités physiques sont donc soumises à l'application de cette moyenne. De la même façon que pour l'application de la moyenne statistique, différents termes inconnus apparaissent. Des modélisations sont ensuite proposées pour les termes inconnus en s'appuyant sur la séparation des échelles.

En conservant une représentation physique forte, la méthode de prise de moyenne semble intéressante pour l'homogénéisation spatiale des écoulements laminaires et turbulents. Les simplifications du type «variables rapides - variables lentes» sont effectuées *a posteriori* (à partir d'analyse d'ordre de grandeur), ce qui peut faire croire à un raisonnement moins rigoureux. Cependant cette méthode a déjà été appliquée avec succès à une large gamme d'écoulements. Nous nous appuyerons donc sur cette méthode pour conserver une vision phénoménologique des mécanismes physiques. Nous décrirons dans un premier temps l'opérateur de moyenne spatiale et étudierons ces propriétés. Nous appliquerons ensuite cet opérateur à l'équation bilan d'un scalaire passif. Les termes nécessitant une modélisation seront reliés aux mécanismes physiques qu'ils représentent.

1.2.2 Moyenne spatiale

Dans l'étude des milieux poreux le choix de la moyenne spatiale est un sujet qui a été maintes fois traité [27, 63, 85, 86]. Simplement, ce choix revient au choix d'une fonction de filtrage m grâce à laquelle la moyenne d'une grandeur ξ est définie comme le produit de convolution de cette grandeur avec la fonction de filtrage :

$$\langle \xi \rangle(\mathbf{x}, t) = (m * \xi)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \xi(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}. \quad (1.22)$$

Dans cette expression, ξ est une distribution (généralisation de la notion de fonction [98]) et m est une fonction de classe C^∞ . Le symbole $*$ désigne le produit de convolution. Afin que la moyenne d'une constante soit égale à cette constante, il faut que la fonction m soit normée suivant la définition [81]

$$\int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{x}) dV_{\mathbf{x}} = 1.$$

De plus, une des propriétés du produit de convolution est qu'il commute avec les opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial s}(\xi * m) = \frac{\partial \xi}{\partial s} * m = \frac{\partial m}{\partial s} * \xi \quad \text{avec } s = x_i, t. \quad (1.23)$$

En imposant à m d'être continue et indéfiniment dérivable, la continuité de $\langle \xi \rangle$ est assurée même si la fonction ξ est discontinue [27]. Ainsi, différents filtres peuvent être choisis. Nous présenterons ici deux exemples (Fig. 1.2) :

$$m_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sigma^3(2\pi)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\|\mathbf{r}\|^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall \mathbf{r}, \quad (1.24)$$

$$m_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{r_0^2 - \|\mathbf{r}\|^2}\right) & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq r_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Le filtre m_1 est appelé filtre gaussien. Il n'est pas à support compact, ce qui peut entraîner des difficultés d'interprétation des quantités moyennées. Bien que le filtre m_2 soit à support compact, son utilisation peut aussi mener à des difficultés d'interprétation. Par commodité et pour conserver une certaine vision physique des phénomènes mis en jeu, la plupart des auteurs utilisent le concept de moyenne cellulaire, en se restreignant à l'utilisation de l'opérateur de moyenne le plus simple. Ils choisissent alors pour fonction de filtrage :

$$m_V(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta V} & \text{si } \mathbf{r} \in V_f, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.26)$$

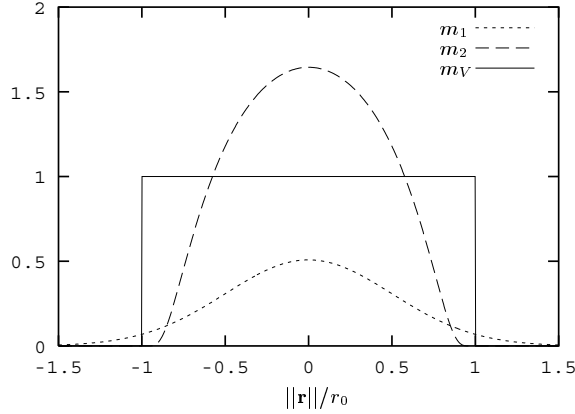


FIG. 1.2: Description des fonctions de filtrage m_1 , m_2 et m_V .

Dans cette définition, le choix du volume ΔV dépend des propriétés du milieu poreux considéré. Si le milieu est spatialement périodique, alors ΔV peut être choisi comme le motif élémentaire de la matrice solide. Si le milieu est désordonné, il faut que ΔV englobe un grand nombre de pores : sa taille caractéristique doit être grande devant la taille des pores. Par contre, comme m_V n'est pas de classe C^∞ , la continuité de la fonction $\langle \xi \rangle$ n'est pas assurée. Le lecteur pourra se référer à Quintard et Whitaker [85, 86] pour une description détaillée de la problématique du choix de la fonction de filtrage.

En se référant à la définition du produit de convolution, l'utilisation de la fonction m_V dans l'opération de filtrage revient à définir comme moyenne spatiale d'une grandeur ξ :

$$\langle \xi \rangle(\mathbf{x}, t) = (\xi * m_V)(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{x})} \int_{\Delta V(\mathbf{x})} \xi(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}. \quad (1.27)$$

Cependant, nous soulignons que l'opérateur de filtrage, défini par la relation (1.27), ne permet pas de faire la distinction entre la phase solide et la phase fluide. Il faut donc que cette précision soit une propriété de la grandeur ξ . La façon mathématiquement la plus simple pour identifier un domaine de définition auquel on souhaite se restreindre est d'utiliser une fonction caractéristique. On définit alors la fonction caractéristique de la phase fluide (Fig. 1.1) :

$$\chi_f = \begin{cases} 1 & \text{si au point } \mathbf{x} \text{ et à l'instant } t, \text{ on est en présence de la phase fluide,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.28)$$

Les dérivées d'une fonction discontinue font appel aux valeurs des sauts à travers les discontinuités [63]. Dans le cas de χ_f , ces règles de dérivation peuvent être simplifiées [101] pour s'écrire :

$$\frac{\partial \chi_f}{\partial t} + \omega_i \frac{\partial \chi_f}{\partial x_i} = 0, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \chi_f}{\partial x_i} = -n_i \delta_w. \quad (1.30)$$

où ω est la vitesse de propagation de l'interface fluide - solide et δ_w représente la distribution de Dirac associée à l'interface vue de la phase fluide (Fig. 1.1). La porosité ϕ du milieu est une fonction issue de l'opération de filtrage de la fonction caractéristique de la phase fluide. Elle est définie par :

$$\phi = \langle \chi_f \rangle = \frac{\Delta V_f}{\Delta V}. \quad (1.31)$$

En s'inspirant de la moyenne utilisée par Favre [29] dans le cas des écoulements turbulents à masse volumique variable, une moyenne spécifique à la phase fluide est introduite :

$$\langle \xi \rangle_f = \frac{\langle \xi \chi_f \rangle}{\langle \chi_f \rangle} = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \xi dV. \quad (1.32)$$

Par la suite, nous identifierons cet opérateur sous le nom de **moyenne intrinsèque**. Toute grandeur physique peut ainsi être décomposée en la somme de sa valeur filtrée et de sa déviation spatiale :

$$\xi = \langle \xi \rangle_f + \delta \xi. \quad (1.33)$$

1.2.3 Propriétés de la moyenne intrinsèque

De la même façon que pour la moyenne statistique, nous allons étudier les propriétés de la moyenne intrinsèque en regard des propriétés vérifiées par la moyenne statistique.

Linéarité

En se référant à la définition de la moyenne cellulaire, nous constatons immédiatement la linéarité de cet opérateur grâce aux propriétés de la sommation continue sur un intervalle bornée :

$$\langle \lambda \xi \rangle_f = \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \lambda \xi dV = \lambda \frac{1}{\Delta V_f} \int_{\Delta V_f} \xi dV = \lambda \langle \xi \rangle_f, \quad (1.34)$$

où λ est une constante.

Idempotence

La propriété d'idempotence permet de simplifier les opérations de calcul sur les équations filtrées. Or ce n'est pas une propriété intrinsèque de l'opération de filtrage définie précédemment.

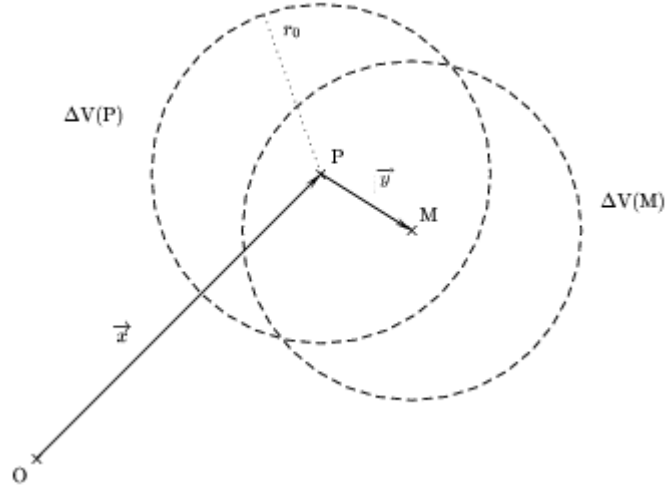


FIG. 1.3: Double filtrage.

En effet, la moyenne d'une grandeur ξ en un point P revient à appliquer un filtre spatial centré sur ce point. En filtrant deux fois la quantité ξ au même point, on fait intervenir des points qui ne font pas partie du volume ΔV_f centré sur le point P (Fig. 1.3). Mathématiquement, cette opération de double filtrage s'écrit :

$$\phi \langle \langle \xi \rangle_f \rangle_f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} m(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \langle \xi \rangle_f(\mathbf{r}, t) \chi_f(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}. \quad (1.35)$$

Le développement de Taylor autour du point P de la quantité filtrée $\langle \xi \rangle_f$ s'écrit en remarquant que $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$:

$$\langle \xi \rangle_f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \mathbf{y} \cdot \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} : \nabla \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (1.36)$$

où " \otimes " représente le produit tensoriel entre deux vecteurs et ":" le produit contracté entre deux tenseurs d'ordre deux. Les grandeurs définies au point \mathbf{x} étant des constantes par rapport au produit de convolution, la relation (1.35) devient :

$$\phi \langle \langle \xi \rangle_f \rangle_f(\mathbf{x}) = \langle \chi_f \rangle_f \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{y} \chi_f \rangle_f \cdot \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \chi_f \rangle_f : \nabla \nabla \langle \xi \rangle_f(\mathbf{x}) + O(\|\mathbf{y}\|^2). \quad (1.37)$$

De façon générale, il est possible de fournir un ordre de grandeur de ces termes en remarquant que la norme du vecteur \mathbf{y} est bornée par la taille du volume de filtrage r_0 , d'où :

$$\langle \mathbf{y} \chi_f \rangle = O(r_0 \phi), \quad (1.38)$$

$$\langle \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} \chi_f \rangle = O(r_0^2 \phi). \quad (1.39)$$

De la même manière, des échelles caractéristiques de variation sont associées aux différentes grandeurs physiques filtrées ou non filtrées :

$$\frac{1}{\xi} \|\nabla \xi\| = O\left(\frac{1}{l_\xi}\right), \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{\langle \xi \rangle_f} \|\nabla \langle \xi \rangle_f\| = O\left(\frac{1}{L_\xi}\right). \quad (1.41)$$

Ainsi, et **sous la condition que le développement de Taylor converge**, l'opération de filtrage est approximativement idempotente sous la condition :

$$r_0 \ll L_\xi. \quad (1.42)$$

Pour un milieu poreux quelconque, le volume de filtrage doit englober un nombre représentatif de pores pour que nous puissions parler d'*homogénéisation*. Cela revient à imposer la condition :

$$\text{milieu poreux quelconque : } l_\xi \ll r_0 \ll L_\xi. \quad (1.43)$$

Cependant, dans le cas d'un milieu spatialement ordonné et périodique, chaque pore est représentatif de son voisin, du point de vue géométrique. Le volume englobant le pore est alors nommé **Volume Élémentaire Représentatif** (VER). La condition (1.43) peut alors être relaxée pour avoir :

$$\text{milieu spatialement ordonné et périodique : } r_0 \sim l_\xi \ll L_\xi. \quad (1.44)$$

Filtrage et dérivation

En utilisant la propriété de commutation du produit de convolution avec les opérateurs de dérivation et les règles de dérivations liées à la fonction caractéristique de la phase fluide (Eqs. (1.29) et (1.30)), on peut montrer :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \chi_f \right\rangle = \frac{\partial \langle \xi \chi_f \rangle}{\partial x_i} - \langle \xi \frac{\partial \chi_f}{\partial x_i} \rangle = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \underbrace{\phi \langle \xi n_i \delta_w \rangle_f}_{\text{contribution de la paroi}}, \quad (1.45)$$

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f = \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \chi_f \right\rangle = \frac{\partial \langle \xi \chi_f \rangle}{\partial t} - \langle \xi \frac{\partial \chi_f}{\partial t} \rangle = \frac{\partial \phi \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \underbrace{\phi \langle \xi \omega_i n_i \delta_w \rangle_f}_{\text{contribution de la paroi}}. \quad (1.46)$$

En appliquant ces deux dernières équations à $\xi = 1$, les variations spatiale et temporelle de la porosité peuvent être caractérisées par :

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\langle n_i \delta_w \rangle_f, \quad (1.47)$$

$$\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\langle \omega_i n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.48)$$

Puis, en décomposant ξ suivant la moyenne spatiale dans la relation (1.45), en utilisant la propriété d'idempotence du filtre et la relation (1.47), on obtient :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right\rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i} + \phi \langle \delta \xi n_i \delta_w \rangle_f, \quad (1.49)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial x_i} - \phi \langle \delta \xi n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.50)$$

De la même façon, pour les variations temporelles, il vient :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \xi}{\partial t} \right\rangle_f = \phi \frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial t} + \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_w \rangle_f, \quad (1.51)$$

$$\phi \delta \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \phi \frac{\partial \delta \xi}{\partial t} - \phi \langle \delta \xi \omega_i n_i \delta_w \rangle_f, \quad (1.52)$$

Nous soulignons que ces quatre dernières relations peuvent être utilisées pour des milieux à porosité constante, spatialement variable et/ou temporellement variable.

Le filtre spatial respecte donc intrinsèquement la propriété de linéarité, mais n'est idempotent que sous la réserve d'une séparation d'échelle entre les échelles de variation macroscopique et microscopique. Par la suite, **nous supposons que cette hypothèse est vérifiée**. Enfin, à cause des contributions de paroi, le filtre spatial ne commute pas avec les opérateurs de dérivation. Les règles de calculs ont été définies par les relations (1.49), (1.50), (1.51) et (1.52). Elles seront par la suite dénommées **règles de permutation avec les opérateurs de dérivation**.

1.2.4 Application d'un filtre spatial à l'équation bilan d'un scalaire passif

L'opération de filtrage sur l'équation (1.8) de convection - diffusion du scalaire passif fournit dans un premier temps :

$$\phi \left\langle \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle_f + \phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} u_i c \right\rangle_f = \phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f. \quad (1.53)$$

Nous supposons par la suite que le milieu poreux est indéformable, immobile, avec adhérence du fluide en paroi. La vitesse de déplacement des parois ω est alors nulle. Par conséquent, la moyenne spatiale commute alors avec la dérivée temporelle (voir Eq. (1.51)) :

$$\phi \left\langle \frac{\partial c}{\partial t} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle c \rangle_f}{\partial t}. \quad (1.54)$$

En utilisant la relation (1.45), le terme convectif peut aussi s'écrire :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i c) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle u_i c \rangle_f) + \phi \langle u_i n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.55)$$

La condition d'adhérence en paroi implique que le dernier terme du membre de droite est nul. Puis, l'idempotence du filtre spatial permet de développer le terme convectif :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle u_i c \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle u_i \rangle_f \langle c \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta c \rangle_f. \quad (1.56)$$

En appliquant deux fois la relation (1.45) pour le terme de diffusion, nous avons :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \phi \langle c \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D c n_i \delta_w \rangle_f) + \phi \left\langle D \frac{\partial c}{\partial x_i} n_i \delta_w \right\rangle_f. \quad (1.57)$$

Le dernier terme de cette relation est nulle à cause de la condition de paroi imperméable (voir conditions limites (1.9)). En écrivant $c = \langle c \rangle_f + \delta c$, et en se référant à la relation (1.47), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D c n_i \delta_w \rangle_f) = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \langle c \rangle_f \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D \delta c n_i \delta_w \rangle_f). \quad (1.58)$$

L'équation bilan filtrée spatialement d'un scalaire passif s'écrit finalement :

$$\frac{\partial \phi \langle c \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle u_i \rangle_f \langle c \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi D \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta c \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle D \delta c n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.59)$$

Dans cette équation bilan macroscopique, deux termes sont inconnus et nécessitent des fermetures. Ce sont :

- la corrélation spatiale des hétérogénéités de vitesse et de concentration :

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta c \rangle_f, \quad (1.60)$$

ce terme correspondant à la **dispersion** du scalaire passif (par les hétérogénéités du champ de vitesse) ;

- la contribution des déviations de concentration en paroi :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle D \delta c n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.61)$$

Ce terme est appelé « de **tortuosité** ». Il traduit un effet de résistance à la diffusion provoquée par la présence de la matrice solide. Considérons, par exemple, une source ponctuelle, dans l'espace et dans le temps, de scalaire passif placée dans un faisceau de crayons. La figure 1.4 décrit le processus purement diffusif de ce spot de concentration. La description locale de ce processus suggère immédiatement que le flux diffusif local va contourner la structure solide. Par contre, la description homogénéisée ne permettant pas la distinction entre les phases solide et fluide, le flux diffusif macroscopique n'est pas détourné par la structure solide. Le terme de tortuosité permet de corriger le flux diffusif macroscopique pour prendre en compte le décalage décrit entre les descriptions locale et homogénéisée.

1.3 Etude de la dispersion d'un scalaire passif dans le cas d'un écoulement laminaire

La dispersion est un phénomène qui est induit par les hétérogénéités du champ local de vitesse. Plus précisément, à l'échelle locale, le champ de vitesse est perturbé par les obstacles solides, autant sur son amplitude que sur la distribution des trois composantes spatiales de

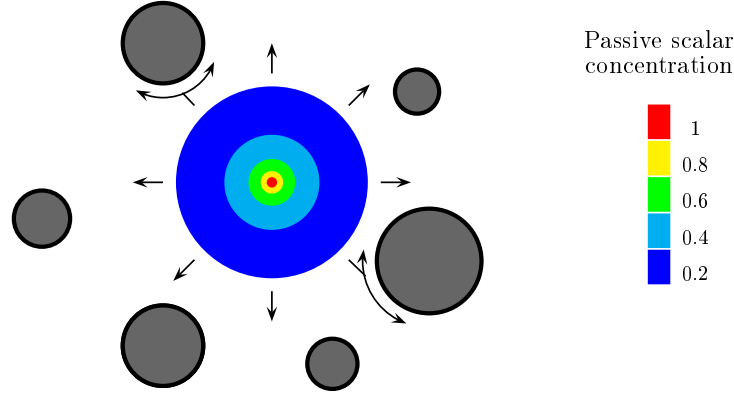


FIG. 1.4: Description à l'échelle locale du processus purement diffusif d'un spot de scalaire passif dans un milieu chargé en solides.

ce champ. Le transport d'un scalaire passif est alors affecté par ces changements. Par contre à l'échelle macroscopique, c'est à dire après l'application d'un filtre spatial, ces informations sont partiellement voire totalement occultées. La dispersion permet de considérer cette perte d'informations. A partir de l'équation (1.60), il est facile de constater formellement que, si en tout point de l'espace la déviation de vitesse est nulle, alors le terme de dispersion l'est aussi. De la même façon, la dispersion est induite par les hétérogénéités du champ de scalaire passif. La propriété d'idempotence du filtre permet de traduire analytiquement ces remarques :

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta c \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i c \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle u_i \delta c \rangle_f. \quad (1.62)$$

Nous pouvons par exemple considérer le cas d'un écoulement dans un empilement de canaux plans (aussi appelé milieu stratifié, voir Fig. 1.5). En développant la moyenne spatiale du terme convectif (voir Eq. (1.56)), le terme de convection par la vitesse macroscopique $\langle \mathbf{u} \rangle_f$ est isolé. Il correspond à une convection due à un champ de vitesse plat. Le terme de dispersion prend alors en compte le fait que le scalaire passif est convecté plus rapidement au centre des canaux que près des parois. La figure 1.6 montre que si nous sommes en présence, à l'instant initial, d'un créneau de scalaire passif (par rapport à la direction z de l'écoulement), ce créneau va être lissé aux instants suivants. Ce cas unidimensionnel permet de décrire une vision simplifiée de la dispersion, à savoir la dispersion de Taylor [105].

Pour caractériser cette dispersion pour un écoulement laminaire dans un tube à section circulaire, Taylor [105] a initialement montré que le flux dispersif de scalaire passif pouvait être exprimé en fonction du gradient macroscopique de scalaire passif. Il a pour cela introduit l'expression du profil auto-semblable de vitesse et a procédé à des bilans sur des sections transverses au tube. Aris [4] a ensuite généralisé ce travail pour un tube de section arbitraire en étudiant le mouvement du centre de gravité de la distribution de scalaire passif et de l'évolution des moments statistiques de cette distribution.

Dans le cadre de la méthode de prise de moyenne, en s'appuyant sur la forme du flux dispersif $\langle \delta u_i \delta c \rangle_f$, les équations bilans des déviations de vitesse et de scalaire passif sont étudiées [112]. Les dépendances de chacune de ces variables par rapport aux différentes grandeurs décrivant le système physique sont identifiées et, après plusieurs raisonnements

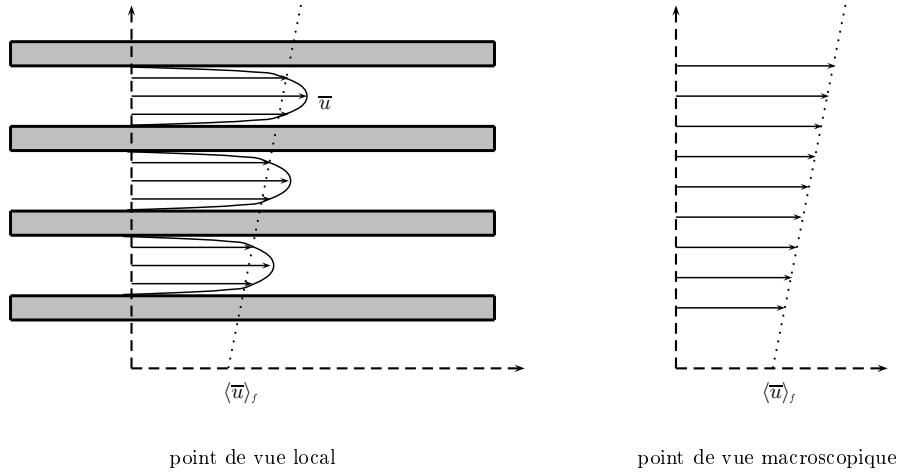


FIG. 1.5: Comparaison entre points de vue local et macroscopique pour le cas de l'écoulement dans un milieu stratifié.

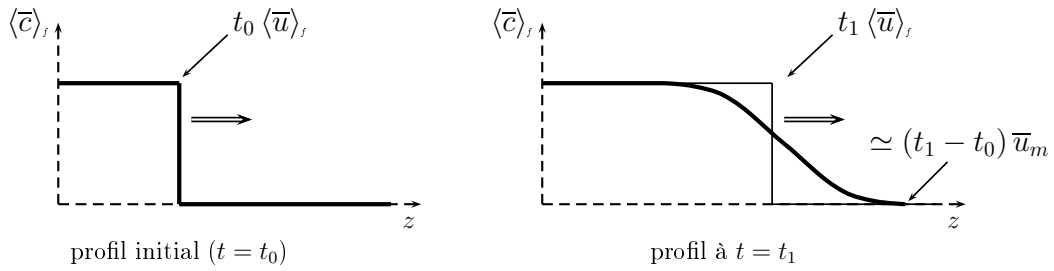


FIG. 1.6: Propagation macroscopique d'un scalaire passif dans un milieu stratifié : mise en évidence de la dispersion de Taylor [105]. La vitesse moyenne à l'intérieur d'un pore est représentée par $\langle \bar{u} \rangle_f$, alors que la vitesse maximale à l'intérieure d'un pore correspond à \bar{u}_m .

simplificateurs, le flux dispersif s'exprime sous la forme :

$$\langle \delta u_i \delta c \rangle_f = f_i \left(t, \langle \mathbf{u} \rangle_f, \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_j}, Re, Pe, \text{géométrie} \right). \quad (1.63)$$

En procédant à un développement de Taylor de la fonction f_i par rapport à $\langle \mathbf{u} \rangle_f$ et $\partial \langle c \rangle_f / \partial x_j$, il est possible d'analyser les propriétés des coefficients de ce développement, sans toutefois les déterminer explicitement. Pour estimer ces coefficients, une solution pourrait être l'expérimentation. Dans [112], cette possibilité est discutée et rapidement rejetée dû à la complexité du dispositif expérimental qu'il faudrait mettre en oeuvre.

L'étude a ensuite été recentrée sur l'équation bilan de la déviation de scalaire passif, en travaillant notamment sur les différentes hypothèses simplificatrices qui pouvaient être faites suivant la géométrie du milieu considéré. Différents articles ont participé au développement de cette méthodologie [16, 78, 82, 83, 117]. Une comparaison entre la méthode d'homogénéisation et la méthode de prise de moyenne a aussi été effectuée [12] pour aboutir à la conclusion que ces deux méthodes fournissent des problèmes de fermeture de nature identique. La différence fondamentale séparant l'homogénéisation de la prise de moyenne réside dans la définition des quantités macroscopiques. Le terme que nous avons précédemment noté c_0 n'est pas strictement égal à la moyenne spatiale $\langle c \rangle_f$. Il y a équivalence entre

ces deux termes que sous la condition d'idempotence du filtre spatial. Toutefois, la méthode d'homogénéisation permet d'accéder plus facilement à une analyse détaillée du phénomène de dispersion d'un scalaire passif, suivant l'ordre de grandeur du paramètre $\epsilon = l/L$ par rapport au nombre de Péclet (voir p. 11 ou [94])³. Toutes les méthodes d'homogénéisation spatiale s'accordent sur la modélisation du terme de dispersion par l'introduction d'un tenseur de dispersion \mathcal{D} . Le flux dispersif est alors relié au gradient macroscopique de scalaire passif par une hypothèse similaire à la loi de Fick :

$$-\langle \delta u_i \delta c \rangle_f = \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (1.64)$$

Cette formulation est la généralisation pour un écoulement tridimensionnel des premiers résultats obtenus par Taylor et Aris. Si l'écoulement peut être décomposé suivant les trois directions de l'espace et que l'écoulement suivant chaque direction est supposé indépendant des deux autres directions, alors le tenseur de dispersion est diagonal. Par exemple, pour un écoulement dans un milieu isotrope dont la vitesse moyenne et le gradient macroscopique de scalaire passif sont dirigés suivant l'axe z , ce tenseur s'écrit :

$$\mathcal{D} = \text{diag}(\mathcal{D}_\perp, \mathcal{D}_\perp, \mathcal{D}_\parallel). \quad (1.65)$$

Le coefficient de dispersion longitudinale est représenté par \mathcal{D}_\parallel et les coefficients de dispersion transverse sont indiqués par \mathcal{D}_\perp . En reprenant le cas du milieu isotrope (Eq. (1.65)), la méthode d'homogénéisation permet en particulier d'évaluer le coefficient de diffusion longitudinale suivant l'ordre de grandeur du nombre de Péclet [94, 2]. Grossièrement, nous pouvons estimer :

- si $Pe \sim \epsilon$, on a

$$\mathcal{D}_\parallel / D \sim 1; \quad (1.66)$$

- si $Pe \sim \epsilon^{-1}$ ou $Pe \sim \epsilon^{-2}$, on a

$$\mathcal{D}_\parallel / D \sim Pe^b, \quad (1.67)$$

où la puissance b est comprise entre 1 et 2. Elle dépend de la situation physique étudiée. Si la diffusion est toujours le mécanisme de mélange dominant (ce qui est vérifié pour un écoulement de Poiseuille dans un tube ou un canal plan), alors $b = 2$. Si ce sont les hétérogénéités de vitesse qui créent le mélange, alors $b = 1$. Si aucun des deux mécanismes n'est dominant alors on a généralement

$$\mathcal{D}_\parallel / D \sim Pe \ln(Pe).$$

Dans la section suivante, une méthodologie permettant de déterminer les composantes du tenseur de dispersion est exposée.

1.3.1 Méthodologie de Whitaker

Cette méthode repose essentiellement sur l'étude de l'équation de bilan de la déviation spatiale de la quantité considérée. Ainsi l'étude de la dispersion d'un scalaire passif requiert l'analyse de l'équation bilan de δc . Dans cette section, nous nous limiterons à l'étude

³En réalité, en analysant les problèmes complets pour $\langle c \rangle_f$ et δc , une analyse équivalente peut être réalisée.

d'un écoulement laminaire d'un fluide incompressible dans un milieu périodique à porosité constante. Les composantes du vecteur décrivant la périodicité du milieu sera noté l_{p_i} ($i = 1, 2, 3$). Nous étudierons le cas d'un scalaire passif dont le coefficient de diffusion dans le fluide est constant. L'équation d'évolution de la quantité δc est établie en soustrayant l'équation de $\langle c \rangle_f$ à celle de c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta c \langle u_i \rangle_f) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta c}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle c \rangle_f \delta u_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta c \delta u_i) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta c \delta u_i \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle D \delta c n_i \delta w \rangle_f. \end{aligned} \quad (1.68)$$

La condition limite associée à cette équation est :

$$n_i \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_i} = -n_i \frac{\partial \delta c}{\partial x_i} \quad \text{sur } A_f. \quad (1.69)$$

Une analyse des ordres de grandeurs des différents termes composant la relation (1.68) permet de la simplifier considérablement. L'échelle de variation temporelle est définie par :

$$\frac{1}{\delta c} \left| \frac{\partial \delta c}{\partial t} \right| = O\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (1.70)$$

Nous utilisons aussi les échelles caractéristiques de variation spatiale définie par les relations (1.40) et (1.41). Par la suite, nous considérons que l et L sont respectivement des échelles représentatives des variations spatiales de toutes les grandeurs physiques non filtrées et filtrées. Les ordres de grandeurs des différents termes composant l'équation (1.68) sont regroupés dans le tableau 1.1.

| | Termes de l'équation (1.68) | ordre de grandeur |
|-----|---|--|
| I | $\frac{\partial \delta c}{\partial t}$ | $\frac{\delta c}{\tau}$ |
| II | $\frac{\partial}{\partial x_i} \delta c \langle u_i \rangle_f$ | $\langle \bar{u} \rangle_f \frac{\delta c}{l}$ |
| III | $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta c}{\partial x_i} \right)$ | $D \frac{\delta c}{l^2}$ |
| IV | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle c \rangle_f \delta u_i)$ | $\frac{\delta u \langle c \rangle_f}{l}$ |
| V | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta c \delta u_i)$ | $\frac{\delta u \delta c}{l}$ |
| VI | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle D \delta c n_i \delta w \rangle_f$ | $D \frac{\delta c}{L^2}$ [69] |

TAB. 1.1: Ordre de grandeur des termes composant l'équation (1.68).

D'après les conditions limites associées au problème (Eq. (1.9))

$$\left. \begin{aligned} D \frac{\partial c}{\partial x_i} n_i &= 0 \\ u_i &= 0 \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } A_f, \quad (1.71)$$

et en développant c et u_i suivant leurs valeurs filtrées et leurs fluctuations, nous obtenons :

$$\frac{\langle c \rangle_f}{L} \sim \frac{\delta c}{l} \quad \text{et} \quad \langle u_i \rangle_f \sim \delta u_i. \quad (1.72)$$

Deux hypothèses sont alors nécessaires pour poursuivre notre analyse. Nous les noterons $H1$ et $H2$:

- $H1$: hypothèse de séparation des échelles qui s'écrit :

$$L \gg l. \quad (1.73)$$

En considérant une grandeur ξ qui satisfait la propriété

$$\delta \xi = O(\langle \xi \rangle_f),$$

alors l'hypothèse $H1$ implique que les dérivées spatiales de la grandeur filtrée sont négligeables devant les dérivées spatiales des déviations :

$$\underbrace{\frac{\partial \delta \xi}{\partial x_i}}_{O\left(\frac{\delta \xi}{l}\right)} \gg \underbrace{\frac{\partial \langle \xi \rangle_f}{\partial x_i}}_{O\left(\frac{\langle \xi \rangle_f}{L}\right)}; \quad (1.74)$$

- $H2$: hypothèse de quasi stationnarité de l'évolution de la déviation de scalaire passif, c'est à dire que la convection et la diffusion dominant sur les variations temporelles. En utilisant le temps caractéristique défini par la relation (1.70), l'hypothèse $H2$ est équivalente à

$$\theta = \frac{D \tau}{l^2} \gg 1, \quad (1.75)$$

$$\theta Pe \gg 1 \quad \text{où} \quad Pe = \frac{\langle u \rangle_f l}{D}, \quad (1.76)$$

D'après l'hypothèse $H1$, le terme de tortuosité (terme VI du tableau 1.1, qui est un terme décrivant un phénomène à l'échelle macroscopique) est négligeable devant le terme III . Ainsi, dans l'analyse de l'équation bilan de δc , la tortuosité n'entre pas en jeu. Pour autant, la tortuosité n'est *a priori* pas négligeable dans l'équation bilan de $\langle c \rangle_f$. Par cet exemple, **nous soulignons la différence existant dans le raisonnement suivant l'échelle, macroscopique ou microscopique, à laquelle on se place**. Puis, l'hypothèse de quasi stationnarité $H2$ permet de négliger le terme I devant les termes III et IV . L'équation (1.68) se réduit donc à la forme simple :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\delta c u_i) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta c}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle c \rangle_f \delta u_i) \quad \text{dans } V_f. \quad (1.77)$$

D'après l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, cette dernière équation peut à nouveau être simplifiée :

$$\rho = cste \implies u_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta c) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta c}{\partial x_i} \right) - \delta u_i \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (1.78)$$

1.3.2 Problème de fermeture

A la fois dans l'équation d'évolution de δc et dans la condition limite pariétale associée, nous remarquons que la fonction $\partial\langle c \rangle_f / \partial x_i$ se comporte comme un terme source [15]. Nous recherchons alors la solution du problème sous la forme :

$$\delta c = \eta_i \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_i} + \psi, \quad (1.79)$$

où le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ et la fonction ψ dépendent de l'espace. D'après les ordres de grandeurs précédemment étudiés (relations décrites en (1.72)), nous constatons que $\|\boldsymbol{\eta}\|$ a pour ordre de grandeur l . De plus, Carbonell et Whitaker [15] ont montré que pour un milieu spatialement périodique la fonction ψ est identiquement nulle. D'après la propriété d'idempotence du filtre spatial, cela entraîne :

$$\langle \delta c \rangle_f = \langle \eta_i \rangle_f \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_i} = 0. \quad (1.80)$$

Puisque la valeur du gradient macroscopique de scalaire passif est quelconque, la relation (1.80) est une relation additionnelle au problème de fermeture et se réduit à :

$$\langle \eta_i \rangle_f = 0. \quad (1.81)$$

L'hypothèse *H1* permet de simplifier les dérivées des produits entre grandeurs macroscopique et microscopique, comme le montre le développement suivant :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta_j \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j} \right) = \underbrace{\eta_j \frac{\partial^2\langle c \rangle_f}{\partial x_i \partial x_j}}_{o\left(\frac{l c}{L^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j}}_{o\left(\frac{c}{L}\right)} \simeq \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (1.82)$$

En combinant la fermeture proposée pour la déviation du scalaire passif (relation (1.79)) à l'équation bilan simplifiée de cette déviation (Eq. (1.78)) et en utilisant la simplification exposée par le développement précédent, nous obtenons :

$$u_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j} - \delta u_i \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_i}, \quad (1.83)$$

avec pour condition limite

$$-n_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_j} = n_i \frac{\partial\langle c \rangle_f}{\partial x_i} \quad \text{sur } A_f. \quad (1.84)$$

En permutant les indices i et j dans les doubles sommations faisant intervenir η_j et en simplifiant les équations par le gradient $\partial\langle c \rangle_f / \partial x_i$, nous dérivons le problème de fermeture associé au vecteur $\boldsymbol{\eta}$:

$$\text{dans le VER : } u_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(D \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \right) = -\delta u_i, \quad (1.85)$$

$$\text{sur } A_f : \quad -n_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} = n_i, \quad (1.86)$$

$$\text{periodicité : } \eta_i(\mathbf{x} + l_{p_j}) = \eta_i(\mathbf{x}), \quad (1.87)$$

$$\text{relation additionnelle : } \langle \eta_i \rangle_f = 0. \quad (1.88)$$

De la même façon que pour la méthode des moments, il est nécessaire de connaître le champ local de vitesse pour résoudre ce système. Ce champ est dépendant de la géométrie des pores et du nombre de Reynolds de l'écoulement. Le problème de fermeture est aussi influencé par la géométrie du milieu poreux à travers la condition limite à l'interface fluide-solide.

En reportant la relation de fermeture (1.79) dans l'équation (1.59), Carbonell et Whitaker [15] font apparaître deux tenseurs qu'ils nomment :

- tenseur de dispersion :

$$\mathcal{D}_{ij} = -\langle \delta u_i \eta_j \rangle_f, \quad (1.89)$$

- et tenseur de tortuosité :

$$\mathcal{T}_{ij} = \langle \eta_j n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.90)$$

En substituant ces quantités aux corrélations inconnues dans l'équation (1.59), et en supposant la porosité constante, l'équation homogénéisée de convection - diffusion du scalaire passif s'écrit :

$$\frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle c \rangle_f \langle u_i \rangle_f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ [D(\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}) + \mathcal{D}_{ij}] \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial x_j} \right\}, \quad (1.91)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, et est nul si $i \neq j$).

Pour valider cette méthode, les résultats de l'équation macroscopique ont été confrontés à différents résultats expérimentaux. Cependant, les résultats expérimentaux disponibles ne satisfont que faiblement l'hypothèse $H2$ (et plus précisément la relation (1.75) [103]). Ils montrent alors que, si cette approximation n'est pas vérifiée, toute la théorie qui a été présentée dans cette section tend à surestimer les coefficients de la matrice de dispersion effective $D(\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}) + \mathcal{D}_{ij}$ dans le domaine des forts nombres de Péclet ([50] et [113], p. 148). Cette réflexion est à tempérer car ils ne se sont intéressés qu'au régime laminaire et l'hypothèse de fort nombre de Péclet implique donc que D est très faible, ce qui n'avantage pas la condition $D\tau/l^2 \gg 1$.

Afin de mieux comprendre l'influence des données physiques sur le problème de la dispersion, nous allons dans un premier temps procéder à une mise sous forme adimensionnée des équations.

1.3.3 Mise sous forme adimensionnée

Nous proposons d'adimensionner l'équation bilan macroscopique du scalaire passif, ainsi que le problème de fermeture permettant de déterminer la fonction de dispersion. Nous procédons de la même façon que pour l'obtention de l'équation (1.13). Les milieux poreux considérés étant périodiques, l'échelle de longueur caractéristique d'un pore, à savoir le diamètre hydraulique, est unique et constante. Nous choisissons la vitesse débitante,

$$U = \sqrt{\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f}, \quad (1.92)$$

comme vitesse de référence. Nous définissons le temps caractéristique de diffusion τ_d par

$$\tau_d = \frac{D_H^2}{D}, \quad (1.93)$$

ainsi que les nombres de Schmidt et de Péclet qui s'écrivent respectivement :

$$Sc = \frac{\nu}{D}, \quad Pe = Re \times Sc = \frac{U D_H}{D}. \quad (1.94)$$

La présence d'une astérisque * permettra par la suite de distinguer les variables adimensionnées. Nous écrivons alors :

$$t^* \equiv \frac{t}{\tau_d}, \quad x_i^* \equiv \frac{x_i}{D_H}, \quad u_i^* \equiv \frac{u_i}{U}, \quad D^* \equiv \frac{D}{D} = 1, \quad \eta^* \equiv \frac{\eta}{D_H}, \quad \delta_w^* \equiv \delta_w D_H. \quad (1.95)$$

Le tenseur de dispersion intervient dans l'équation (1.91) comme un coefficient supplémentaire de diffusion. Il est donc adimensionné par le coefficient de diffusion moléculaire :

$$\mathcal{D}_{ij}^* = \frac{\mathcal{D}_{ij}}{D} = -Pe \langle \delta u_i^* \eta_j^* \rangle_f. \quad (1.96)$$

Quant au coefficient de tortuosité, il s'agit déjà d'un paramètre sans dimension :

$$\mathcal{T}_{ij}^* = \mathcal{T}_{ij} = \langle \eta_j^* n_i \delta_w^* \rangle_f. \quad (1.97)$$

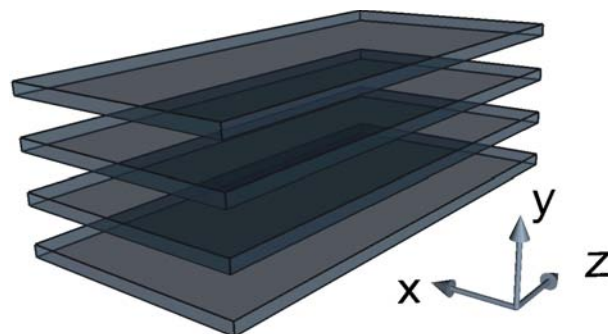
En utilisant ces variables adimensionnées, l'équation bilan macroscopique du scalaire passif (1.91) prend la forme :

$$\phi \frac{\partial \langle c^* \rangle_f}{\partial t^*} + Pe \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\phi \langle c^* \rangle_f \langle u_i^* \rangle_f) = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left\{ \phi [(D^* \delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}^*) + \mathcal{D}_{ij}^*] \frac{\partial \langle c^* \rangle_f}{\partial x_j^*} \right\}. \quad (1.98)$$

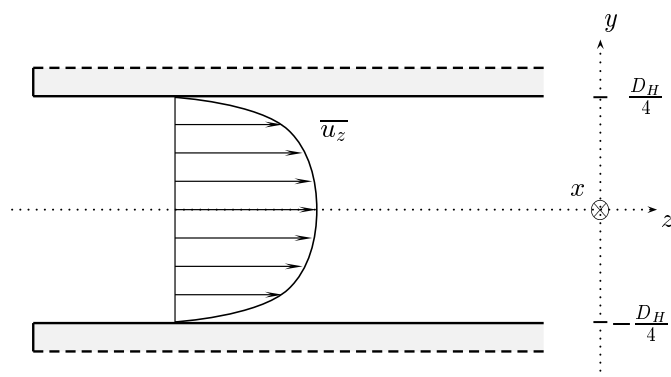
De la même manière, le problème de fermeture peut être formulé à nouveau :

$$u_j^* \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial^2 \eta_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} = -Pe \delta u_i^* \quad \text{dans } V_f, \quad (1.99)$$

$$-n_j \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j^*} = n_i \quad \text{sur } A_f. \quad (1.100)$$

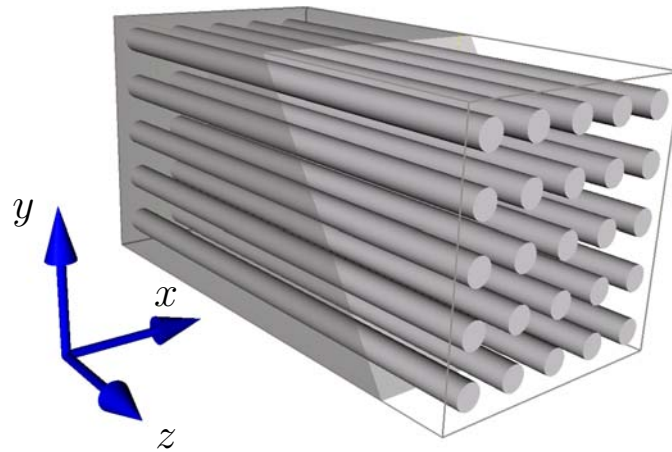


(a) Description tridimensionnelle d'un milieu stratifié composé de canaux plans.

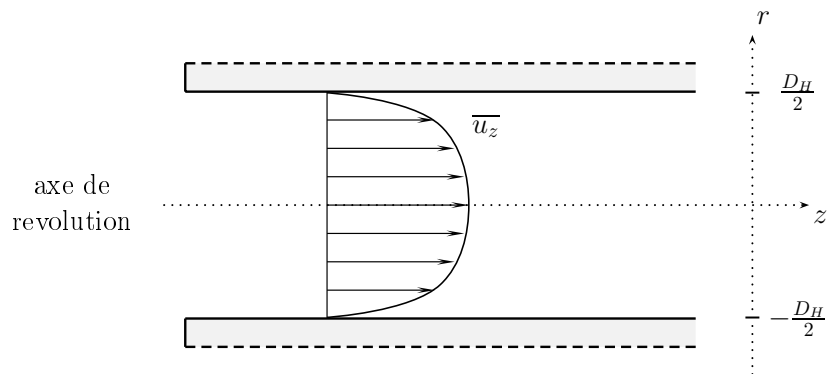


(b) Description bidimensionnelle d'un canal plan.

FIG. 1.7: Description d'un milieu stratifié composé de canaux plans. Le diamètre hydraulique est égale au double de la distance séparant deux plaques.



(a) Description tridimensionnelle d'un milieu «stratifié» composé de tubes à section circulaire.



(b) Description bidimensionnelle d'un tube à section circulaire.

FIG. 1.8: Description d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire. Le diamètre hydraulique est égal au diamètre des tubes.

1.3.4 Premiers résultats

Comme il a été souligné précédemment, la connaissance du champ local de vitesse est essentielle pour résoudre le problème de fermeture. Or, même en se restreignant à des écoulements laminaires, il n'est possible de déterminer analytiquement la forme de ce champ que pour des géométries extrêmement simples. Ainsi, nous nous focaliserons dans cette partie sur la résolution du problème de fermeture pour des milieux poreux stratifiés, c'est à dire pour lesquels il existe une direction privilégiée d'écoulement. Nous considérerons le cas de l'empilement régulier de canaux plans (Fig. 1.7) et le cas d'un milieu compact transpercé par des tubes parallèles (Fig. 1.8). Le milieu est donc périodique dans la direction transverse à l'écoulement (selon l'axe y ou l'axe r) mais aussi dans la direction de l'écoulement (suivant l'axe z). Le choix du VER doit être fait en fonction du milieu qui est considéré. Nous choisissons un parallélépipède, dont les cotés s'appuient sur les axes x , y et z . Sa largeur suivant les axes x et y est choisie pour représenter un motif de la matrice solide. Elle est donc au moins de l'ordre du diamètre hydraulique, suivant l'épaisseur des plaques. Par contre, suivant l'axe z , son épaisseur doit être petite devant les variations macroscopiques des grandeurs physiques. Comme nous nous intéressons à des écoulements dont l'établissement est caractérisé par des profils suivant une unique section transverse, cette épaisseur peut être extrêmement réduite.

Pour les deux catégories citées de milieux, l'étude peut être restreinte à celle d'un canal plan ou d'un tube de section circulaire. La relation de fermeture (1.79) se réduit donc ici à :

$$\delta c = \eta_z \frac{\partial \langle c \rangle_f}{\partial z}, \quad (1.101)$$

où η_z n'est fonction que de la distance au plan de symétrie pour le canal plan et à l'axe de révolution pour le tube. Par ailleurs, nous supposons que l'écoulement (et notamment en ce qui concerne le profil de vitesse) à l'intérieur du VER est établi. Seule la composante \mathcal{D}_{zz} du tenseur de dispersion est non nulle. Par ailleurs, toutes les composantes du tenseur de tortuosité sont nulles. En effet, η_z étant symétrique par rapport au plan de symétrie ou à l'axe de révolution, la composante T_{yz} (qui était la seule susceptible d'être non nulle) est en réalité nulle.

Écoulement laminaire dans un canal plan.

Pour un écoulement de Poiseuille dans un canal plan, l'expression sans dimension du profil de vitesse est :

$$u_z^*(y^*) = \frac{3}{2} - 24y^{*2}. \quad (1.102)$$

Le problème de fermeture associé à la définition de la fonction η_z se réduit à :

$$Pe \delta u_z^* = \frac{\partial^2 \eta_z^*}{\partial y^* \partial y^*} \quad \text{pour } y \in] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[, \quad (1.103)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right|_{y^* = \pm \frac{1}{4}} = 0, \quad (1.104)$$

Nous ajoutons à ces équations la condition de symétrie au centre du canal :

$$\left. \frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right|_{y^* = 0} = 0. \quad (1.105)$$

En résolvant ce système, nous obtenons :

$$\eta_z^*(y^*) = Pe \left(\frac{y^{*2}}{4} - 2y^{*4} \right) + C_\eta. \quad (1.106)$$

La constante C_η dépend de la valeur à la paroi de δc^* et du gradient macroscopique de concentration. Cependant, sa détermination n'a pas d'importance pour le calcul du tenseur de dispersion, car, une fois multipliée par la déviation de vitesse et moyennée spatialement, sa contribution est nulle. Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{D}_{zz}^* = -Pe \langle \delta u_z^* \eta_z^* \rangle_f = \frac{Pe^2}{840}. \quad (1.107)$$

Grâce à l'auto-similarité du profil de vitesse, il suffit de donner son amplitude en utilisant le nombre de Reynolds pour décrire entièrement ce profil. Le profil de scalaire passif peut être déduit du profil de vitesse au moyen du nombre de Schmidt. Le coefficient \mathcal{D}_{zz}^* peut donc être ensuite complètement décrit par le nombre de Péclet⁴ comme le montre la relation (1.107).

Écoulement laminaire dans un tube à section circulaire.

Pour un écoulement de Poiseuille dans un tube à section circulaire, l'expression du profil de vitesse (sans dimension) est :

$$u_z^*(r^*) = 2 - 8r^{*2}. \quad (1.108)$$

En utilisant les coordonnées cylindriques, le problème de fermeture associé à la définition de la fonction η_z^* s'écrit :

$$Pe \delta u_z^* = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right) \quad \text{pour } r^* \in]0; \frac{1}{2}[, \quad (1.109)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=\frac{1}{2}} = 0. \quad (1.110)$$

La condition de symétrie sur l'axe de révolution fournit :

$$\left. \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0. \quad (1.111)$$

En résolvant ce système, nous obtenons :

$$\eta_z^*(r^*) = Pe \left(\frac{r^{*2}}{4} - \frac{r^{*4}}{2} \right) + C_\eta. \quad (1.112)$$

Nous en déduisons la valeur du coefficient de dispersion :

$$\mathcal{D}_{zz}^* = -Pe \langle \delta u_z^* \eta_z^* \rangle_f = \frac{Pe^2}{192}. \quad (1.113)$$

Pour un écoulement laminaire, que ce soit dans le cas du tube à section circulaire ou du canal bidimensionnel plan, le coefficient de dispersion domine rapidement le coefficient de diffusion lorsque le nombre de Péclet augmente. Comme il a été décrit en introduction de la section 1.3, l'augmentation du coefficient de dispersion en fonction du carré du nombre de Péclet est lié au fait que la diffusion domine le mécanisme de mélange. Pour le canal plan et le tube à section circulaire, ce résultat était attendu.

⁴Nous rappelons que $Pe = Sc \times Re$.

1.4 Application combinée de la moyenne statistique et du filtre spatial

L'utilisation simultanée de deux moyennes sera dans un premier temps discutée. Les équations doublement moyennées décrivant l'écoulement d'un fluide incompressible, dont les propriétés physiques sont constantes, seront ensuite explicitées.

1.4.1 Problèmes engendrés par l'utilisation de deux moyennes

Pour étudier un écoulement turbulent en milieu poreux, deux moyennes ont été définies : d'une part la moyenne statistique qui permet de traiter l'aspect pseudo-aléatoire des écoulements turbulents et, d'autre part, la moyenne spatiale qui permet d'obtenir une représentation homogénéisée du système. Il a été montré que l'application de l'une ou l'autre de ces moyennes à l'équation bilan d'un scalaire passif entraînait la nécessité de modéliser les termes inconnus que sont notamment les corrélations statistiques (ou spatiales) des fluctuations (ou déviations) de vitesse et de concentration. Cependant, il est à présent nécessaire d'appliquer les deux moyennes. Le problème de l'ordre d'application de ces moyennes intervient alors.

Pedras et de Lemos [73] ont tout d'abord montré que la moyenne spatiale commutait avec la moyenne temporelle car les intervalles d'intégration sont bornés. D'une façon plus triviale, la moyenne statistique commute avec la moyenne spatiale. Cela implique que, **du point de vue strictement mathématique**, l'application des deux moyennes (statistique et spatiale) aux équations de Navier Stokes fournit un résultat identique, **quel que soit l'ordre d'application**. Le problème de l'ordre d'application des moyennes réside uniquement dans la modélisation des équations doublement moyennées, cet ordre influant de manière déterminante sur la perception des phénomènes physiques entrant en jeu. Initialement, certains auteurs, dont Masuoka et Takatsu [65] ainsi que Antohe et Lage [3], ont mis en avant l'importance de cet ordre car ils effectuaient une première étape de modélisation après l'application de la moyenne spatiale puis appliquaient alors la moyenne statistique. Or l'interprétation d'un modèle moyenné est extrêmement délicate et peut aboutir à un non-sens. A titre d'exemple, nous citerons la modélisation des pertes de charge. En appliquant en premier lieu la moyenne spatiale à l'équation de quantité de mouvement, Antohe et Lage [3] mettent en évidence un terme lié aux pertes de charge. Ce terme possède une modélisation connue pour les écoulements laminaires dans les milieux poreux. Cependant, il n'est pas clairement démontré que ce modèle puisse être étendu aux écoulements turbulents. Pourtant, ils appliquent alors la moyenne statistique à ce modèle et raisonnent ensuite sur le résultat. De notre point de vue, cette procédure n'a que peu de valeur. Pour se prémunir de ce type d'erreurs, l'étape de modélisation doit idéalement intervenir après l'application des deux moyennes. Si par nécessité, un modélisation intermédiaire doit s'intercaler, il faut s'assurer que celle-ci est valide dans le contexte où elle est utilisée.

La plupart des auteurs qui se sont intéressés à la modélisation à l'échelle macroscopique de la turbulence dans les milieux poreux s'accordent sur l'ordre d'application suivant : dans un premier temps la moyenne statistique, puis la moyenne spatiale. Ce consensus masque pourtant de réelles différences dans l'interprétation physique du processus de double moyenne, comme le montre la discussion par articles interposés entre Nield [72] et Travkin [109]. Ces deux auteurs opposent leurs points de vue alors que de notre point de vue ils sont complémentaires. Selon Nield [72], les petits tourbillons (*ie.* d'échelle caractéristique inférieure à l'échelle du filtre) doivent être modélisés en premier et c'est pour cela qu'il faut d'abord

appliquer la moyenne statistique. Pour Travkin [109], les fluctuations statistiques et les déviations spatiales ne doivent pas être considérées comme étant de même nature. Si elles sont considérées comme telles, de sérieuses erreurs de modélisation peuvent en découler. Pour relier ces deux points de vue, nous estimons effectivement que les fluctuations statistiques sont liées au caractère aléatoire de l'écoulement. Par contre, par rapport à la méthodologie d'étude des écoulements en milieu poreux, les déviations spatiales sont liées à une notion de répartition spatiale organisée du champ de vitesse. Pour conserver cette notion lorsque l'écoulement devient turbulent, la moyenne spatiale ne doit pas être appliquée sur des quantités fluctuantes, mais sur des quantités moyennées statistiquement. **C'est en effet la moyenne statistique qui permet de décrire une certaine organisation dans le mouvement turbulent.** Par ailleurs, Nield [72] suggère qu'il existe un désavantage lié à cet ordre d'utilisation des moyennes : il estime que les interactions entre les fluctuations de vitesse et la structure solide ne sont pas mis en évidence. Pourtant, nous affirmons que l'ordre opposé aboutit au même résultat puisque les deux moyennes commutent : le problème vient des approximations faites à chaque étape. La seule solution pour mettre en évidence ce type de phénomène est de procéder à une analyse à deux échelles de l'écoulement. Nous reviendrons plus amplement sur cette idée dans la suite de notre exposé.

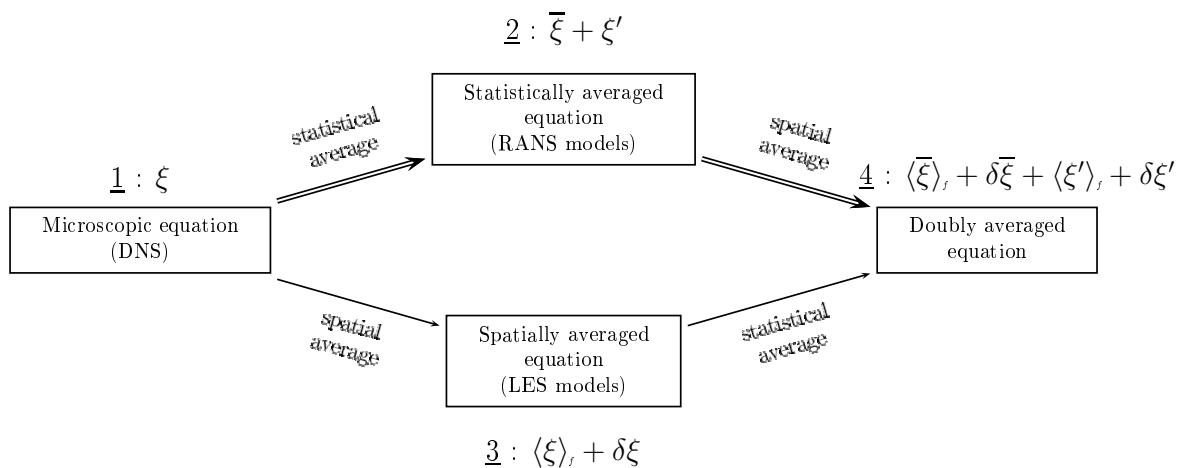


FIG. 1.9: Ordre d'application des moyennes statistique et spatiale. Notre choix est marqué d'une double flèche.

Le contexte théorique pour la modélisation des équations après l'application des moyennes statistique et spatiale a été présenté. Cette modélisation va à présent être abordée d'un point de vue pratique. Pour la validation des modèles macroscopiques de turbulence, il est nécessaire de disposer de résultats de référence. Le nombre de résultats expérimentaux décrivant l'évolution macroscopique de la turbulence dans un milieu poreux est extrêmement réduit de par la difficulté d'observation d'un écoulement confiné. Le seul recours est donc de procéder à des simulations numériques de ces écoulements. Revenons alors sur les conséquences pratiques de l'ordre d'application des moyennes. Sur la figure 1.9, simuler un écoulement turbulent au stade $\underline{1}$ revient à effectuer une Simulation Numérique Directe⁵ (DNS). Par rapport aux échelles de temps et d'espace des écoulements visés dans cette étude, la Simulation Numérique Directe ne peut être utilisée. Il faut donc s'appuyer sur l'application d'une première moyenne et sur une première modélisation de la turbulence. Le stade $\underline{3}$

⁵La description de ces catégories de simulation est donnée en introduction du chapitre 2.

correspond à la Simulation des Grandes Echelles (LES). Pour simuler des écoulements confinés, ces méthodes nécessitent encore à l'heure actuelle des améliorations et le temps de calcul associé est très important. Par contre, les modèles RANS (stade 2) sont employés depuis plusieurs décennies pour simuler des écoulements confinés et le temps de calcul associé est faible comparé aux autres méthodes. Pour obtenir des évolutions macroscopiques de référence, il est donc pertinent de moyennner spatialement les résultats provenant de simulations RANS.

Dans la suite de cette section, les équations hydrauliques doublement moyennées sont exposées.

1.4.2 Equation de continuité

A l'échelle locale, l'équation de continuité prend la forme suivante :

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \iff \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.114)$$

Nous appliquons ensuite l'opérateur de moyenne statistique à cette équation :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.115)$$

Puis, l'opération de moyenne spatiale fournit :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = 0. \quad (1.116)$$

En remarquant que nous imposons une condition d'adhérence à la paroi, la règle de permutation entre le filtre spatial et l'opérateur de dérivation spatiale (relation (1.45)) permet d'écrire l'équation de continuité doublement moyennée :

$$\phi \left\langle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} \right\rangle_f = \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (1.117)$$

1.4.3 Equation bilan d'un scalaire passif

Nous avons détaillé les applications séparées d'une moyenne statistique (à la section 1.1.2) et d'un filtre spatial (à la section 1.2.4) à l'équation bilan d'un scalaire passif. Nous allons à présent combiner ces deux moyennes pour un écoulement incompressible. En appliquant la moyenne statistique, nous écrivons :

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{c}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i c'}. \quad (1.118)$$

Nous moyennons ensuite spatialement cette dernière équation. Les règles de permutation avec les opérateurs de dérivation sont employées pour tous les termes exceptés celui de diffusion :

$$\phi \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{c} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}_i \bar{c} \rangle_f = \phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_i c'} \rangle_f. \quad (1.119)$$

En reprenant le même raisonnement que pour les relations (1.57) et (1.58), le terme de diffusion doublement moyenné prend la forme :

$$\phi \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi D \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D \delta \bar{c} n_i \delta_w \rangle_f) + \phi \langle D \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.120)$$

Par hypothèse, il n'y a pas de phénomène d'absorption à la paroi, ce qui implique que le dernier terme de cette relation est nulle. Quant au terme de convection moyenné spatialement, il est décomposé à l'aide de l'idempotence de l'opérateur de moyenne spatiale :

$$\langle \bar{u}_i \bar{c} \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{c} \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f. \quad (1.121)$$

L'équation bilan doublement moyennée d'un scalaire passif prend ainsi la forme :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{c} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{c} \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi D \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D \delta \bar{c} n_i \delta_w \rangle_f) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}'_i c' \rangle_f. \end{aligned} \quad (1.122)$$

Dans cette équation bilan, nous identifions trois termes qui nécessitent une modélisation. Comme pour le cas laminaire, nous retrouvons un terme de dispersion,

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f, \quad (1.123)$$

ainsi qu'un terme de tortuosité

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle D \delta \bar{c} n_i \delta_w \rangle_f). \quad (1.124)$$

Le terme de dispersion est à présent lié aux hétérogénéités des champs statistiquement moyennés de vitesse et de scalaire passif. Le troisième terme inconnu est le terme de dispersion turbulente, liée aux fluctuations statistiques des champs de vitesse et de scalaire passif, spatialement moyenné :

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \bar{u}'_i c' \rangle_f. \quad (1.125)$$

1.4.4 Equation bilan de quantité de mouvement

L'équation bilan de la quantité de mouvement d'un fluide incompressible s'écrit à l'échelle locale :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} [-P \delta_{ij} + \sigma_{ij}] + g_i, \quad (1.126)$$

où P est la pression statique et σ_{ij} est le tenseur des contraintes visqueuses. Il s'exprime en fonction de la viscosité cinématique du fluide μ et des gradients de vitesse :

$$\sigma_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right]. \quad (1.127)$$

La viscosité cinématique du fluide est le produit entre la viscosité dynamique et la densité :

$$\mu = \rho \nu. \quad (1.128)$$

Pour un fluide incompressible, nous soulignons que les dérivées du tenseur des contraintes visqueuses se réduisent à :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right). \quad (1.129)$$

L'application de la moyenne statistique fournit dans un premier temps :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i \bar{u}_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} [-\bar{P} \delta_{ij} + \bar{\sigma}_{ij}] + g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j}, \quad (1.130)$$

où le terme convectif a été décomposé par rapport à la moyenne statistique. Dans cette équation bilan, la corrélation statistique des fluctuations de vitesse représente une inconnue. L'application de la moyenne spatiale conduit ensuite à :

$$\phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f = -\frac{\phi}{\rho} \langle \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \rangle_f + \frac{\phi}{\rho} \langle \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \rangle_f + \phi g_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f. \quad (1.131)$$

En utilisant la relation (1.49) de permutation avec l'opérateur de dérivation spatiale, nous avons :

$$\frac{\phi}{\rho} \langle \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} \rangle_f = \frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\phi}{\rho} \langle \delta \bar{P} n_i \delta_w \rangle_f. \quad (1.132)$$

La viscosité du fluide est supposée constante. Il en découle :

$$\frac{\phi}{\rho} \langle \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \rangle_f = \phi \langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi \langle \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta_w \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \nu \langle \bar{u}_i n_j \delta_w \rangle_f. \quad (1.133)$$

La condition d'adhérence en paroi implique que le dernier terme de cette relation est identiquement nulle :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \nu \langle \bar{u}_i n_j \delta_w \rangle_f = 0. \quad (1.134)$$

Le terme convectif doublement moyenné est ensuite décomposé :

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f &= \langle \bar{u}_i \bar{u}_j \rangle_f + \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \\ &= \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f + \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f. \end{aligned} \quad (1.135)$$

L'équation bilan doublement moyennée de la quantité de mouvement s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_j \rangle_f &= -\frac{\phi}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \phi \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \phi g_i \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \\ &\quad + \phi \left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta_w \right\rangle_f. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Nous considérons la vitesse macroscopique $\langle \bar{u}_i \rangle_f$ et la pression moyenne $\langle \bar{P} \rangle_f$ comme nos inconnues principales. Seuls les trois derniers termes composant cette équation nécessitent une fermeture. Le terme

$$-\phi F_{\phi_i} = \phi \left\langle \left(-\frac{\delta \bar{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta_w \right\rangle_f \quad (1.137)$$

représente la force volumique spécifique exercée par la phase solide sur la phase fluide. Il correspond à l'opposée de la $i^{\text{ème}}$ composante de la force de trainée, pondérée par le volume de filtrage et la masse volumique du fluide que subissent les inclusions solides. Plus généralement, ce terme représente les pertes de charge de l'écoulement moyen. Puis, le terme

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \quad (1.138)$$

est associé à la dispersion de la quantité de mouvement due aux hétérogénéités du profil de vitesse moyenné statistiquement. Enfin, le terme

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \phi \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \quad (1.139)$$

correspond à la divergence des contraintes turbulentes homogénéisées.

1.4.5 Equation bilan de la température

Pour un fluide incompressible à propriétés physiques constantes, l'équation bilan à l'échelle microscopique de la température s'écrit :

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial u_i T_f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) + 2 \frac{\nu}{(\rho c_p)_f} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\mathcal{Q}_f}{(\rho c_p)_f}. \quad (1.140)$$

Dans cette équation, la diffusivité thermique est définie à partir de la conductivité thermique du fluide, de sa capacité calorifique, ainsi que de sa densité :

$$\alpha_f = \frac{k_f}{(\rho c_p)_f}. \quad (1.141)$$

La diffusivité thermique du fluide est aussi liée à la viscosité du fluide avec la définition du nombre de Prandtl :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_f}. \quad (1.142)$$

Le dernier terme \mathcal{Q}_f de l'équation (1.140) représente une source volumique de chaleur qui peut par exemple tenir compte du rayonnement. Il sera considéré constant. Le second terme du membre de droite,

$$2 \frac{\nu}{(\rho c_p)_f} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2 \alpha_f \times Pr \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (1.143)$$

représente l'échauffement visqueux. Le nombre d'Eckert,

$$E_c = U^2 / (c_p \Delta T_f), \quad (1.144)$$

où U est l'échelle caractéristique de la vitesse et ΔT_f est l'écart de température représentatif de l'échauffement du fluide, permet de comparer la dissipation d'énergie cinétique à la variation d'enthalpie. Sous la condition que le rapport entre le nombre d'Eckert et le nombre de Reynolds soit faible ($E_c/Re \ll 1$), l'échauffement visqueux peut être négligé dans cette équation bilan⁶. Sur l'interface A_f , la température respecte la condition limite suivant :

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i = \Phi. \quad (\text{CL } 1)$$

Le flux turbulent de chaleur apparaît lorsque la moyenne statistique est appliquée à l'équation (1.140), c'est à dire

$$\frac{\partial \overline{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u}_i \overline{T}_f}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\overline{u'_i T'_f}}_{\text{flux turbulent de chaleur}} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \overline{T}_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\overline{Q}_f}{(\rho c_p)_f}. \quad (1.145)$$

En appliquant à présent la moyenne spatiale à l'équation (1.145), nous obtenons l'équation bilan de la température doublement moyennée :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\langle \overline{Q}_f \rangle_f}{(\rho c_p)_f} \\ &+ \underbrace{\langle \alpha_f \frac{\partial \overline{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle}_{\text{Transfert thermique à la paroi}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta \overline{T}_f n_i \delta_w \rangle_f}_{\text{Tortuosité}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{T}_f \rangle_f}_{\text{Dispersion thermique}}. \end{aligned} \quad (1.146)$$

Le transfert thermique à la paroi, une fois spatialement moyenné, intervient dans l'équation bilan de $\langle \overline{T}_f \rangle_f$ comme un terme source volumique de chaleur. Nous noterons :

$$\langle k_f \frac{\partial \overline{T}_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle = \langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle = \phi \langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f. \quad (1.147)$$

Dans l'équation (1.146), trois termes sont inconnus et nécessitent une modélisation : le flux turbulent de chaleur moyenné spatialement, la tortuosité, et la dispersion thermique.

1.5 Problématique

Afin d'étudier les écoulements turbulents, l'utilisation d'une moyenne statistique a été préconisée. En appliquant cette moyenne aux équations bilans des variables thermohydrauliques, des corrélations de fluctuations, appelées flux turbulents, ont été mises en avant. Elles représentent des inconnues dans ces équations. Parallèlement à cela, la géométrie des systèmes physiques considérés présentent des échelles spatiales largement supérieures aux échelles spatiales caractérisant les écoulements traversant ces systèmes. Une homogénéisation spatiale a alors été proposée *via* l'utilisation d'une moyenne ou filtre spatial. L'application de ce filtre aux équations bilans des variables thermohydrauliques implique l'apparition de corrélations de déviations spatiales et de termes dûs à la tortuosité du milieu. Dans le domaine d'étude des milieux poreux, ces corrélations sont associées au phénomène

⁶Pour un écoulement typique d'un coeur de réacteur, les estimations fournissent (en unités S.I.) : $c_p \sim 10^3$, $\Delta T_f \sim 50$, $U \sim 1$, $Re \sim 10^5$, d'où $E_c/Re \sim 10^{-10}$.

de dispersion. Pour étudier ce phénomène, la méthodologie de Whitaker a été présentée et appliquée à des écoulements laminaires dans des configurations géométriques simples. Il a ainsi été montré que le flux dispersif dans la direction de l'écoulement pouvait dominer largement le flux diffusif moléculaire.

Le but de cette étude est d'analyser des écoulements turbulents dans des systèmes physiques pouvant être considérés comme des milieux macro-poreux, périodiques, ordonnés et anisotropes. Pour cela, il a été choisi d'utiliser à la fois la moyenne statistique et la moyenne spatiale. L'ordre d'application des moyennes a été choisi de façon à tirer profit des connaissances actuelles sur la modélisation locale de la turbulence. Ainsi, cette étude s'appuiera sur les modèles de turbulence décrits au chapitre 2.

Les deux moyennes ont été appliquées aux équations bilans des quantités thermohydrauliques et différents termes nécessitant une modélisation ont alors été mis en exergue. Dans cette étude, nous nous focaliserons notamment sur l'analyse de la dispersion pour des écoulements turbulents ainsi que sur celle des flux turbulents moyennés spatialement. La méthodologie de Whitaker, présentée en section 1.3.1, va être donc étendue aux écoulements turbulents dans le chapitre 3. Une meilleure compréhension de la dynamique de la turbulence existant dans les milieux poreux périodiques et ordonnés est nécessaire pour proposer une modélisation des flux turbulents à l'échelle macroscopique. Une analyse à deux échelles est ainsi proposée au chapitre 4. En se référant aux échanges existant au sein de la turbulence et en se basant sur l'étude d'évolutions macroscopiques de «référence», un modèle de turbulence macroscopique est dérivé au chapitre 5. Enfin, il est validé et exploité au chapitre 6.

Nous pouvons résumer notre problématique :

- nos inconnues principales sont $\langle c \rangle_f$, $\langle T_f \rangle_f$, et $\langle \bar{u} \rangle_f$;
- leurs équations bilans doivent être modélisées ;
- cette modélisation passe par la modélisation de la dispersion pour un écoulement turbulent (chapitre 3) ;
- elle passe aussi par la caractérisation de la turbulence à l'échelle macroscopique (chapitres 4 et 5).

Modélisation de la turbulence à l'échelle locale

L'étude de la turbulence par le biais de la simulation numérique présente deux objectifs distincts. D'un côté, le caractère fondamentale des phénomènes physiques peut être exploré pour améliorer leur compréhension. Ces études «amonts» nécessitent une grande précision des résultats. D'un autre côté, les analyses de type «ingénierie» requiert une précision moindre, mais elles doivent pouvoir s'adapter à une large gamme de paramètres caractérisant le système, sans toutefois modifier la méthodologie employée.

Dans le cadre de la mécanique des fluides, il existe deux niveaux majeurs d'approximation suivant l'échelle de réalité considérée [93]. En se plaçant à l'échelle des déplacements de molécules, l'équation de Boltzmann est utilisée. En se plaçant à une échelle de représentation beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des particules, ce sont les équations de Navier Stokes qui sont employées. Seuls les déplacements collectifs intéressent cette échelle : on entre alors dans le domaine de la mécanique des milieux continus. C'est cette échelle de représentation que nous aborderons dans notre travail. Par conséquent, la première hypothèse dans l'étude de la dynamique d'un fluide à l'échelle microscopique est que le mouvement instantané du fluide peut être décrit par les équations de Navier Stokes. Ces équations représentent le premier niveau de modélisation en mécanique des fluides.

Revenons à présent à l'introduction du phénomène de la turbulence. La turbulence est une propriété de l'écoulement, mais en aucun cas une propriété du fluide. Elle est en apparence désordonnée et imprévisible. Elle présente par essence un caractère tridimensionnel qui peut devenir bi-dimensionnel dans des situations très spécifiques et pour lesquelles les mécanismes qui la déterminent sont différents ([96], p.166). Pour des nombres de Reynolds élevés, les tourbillons sont caractérisés par une large gamme d'échelles spatiales. Les plus petits tourbillons sont déterminés par les forces visqueuses. Ils contribuent peu au transport des quantités hydrodynamiques. Ce sont les gros tourbillons qui remplissent ce rôle. Des couplages non-linéaires entre échelles turbulentes existent. La non-linéarité des équations de Navier-Stokes permet de rendre compte de ces couplages.

Il existe cinq approches majeures pour l'étude de la turbulence à l'échelle locale. La

première consiste à résoudre numériquement les équations de Navier Stokes, sans traitement spécifique. Il s'agit de la Simulation Numérique Directe (couramment appelée DNS ou SND). Cette méthode présente l'avantage de n'introduire aucun modèle physique supplémentaire dans les équations de Navier Stokes. Cependant, toutes les échelles spatio-temporelles de l'écoulement doivent être prises en compte dans la discrétisation des équations. Les schémas numériques associés à leur résolution doivent être par ailleurs d'une extrême précision. Une fois ces conditions remplies, les résultats du calcul peuvent être utilisés comme résultats de référence provenant d'une «expérience numérique». L'inconvénient majeur de la DNS reste le coût extrême qu'elle nécessite en terme de moyens de calcul. Pour représenter les plus petites échelles de la turbulence, le nombre de points \mathcal{N}^3 pour la discrétisation est de l'ordre [96] :

$$\mathcal{N}^3 = 64 Re_t^{9/4}, \quad (2.1)$$

où Re_t est un nombre de Reynolds turbulent

$$Re_t = \frac{u' l_I}{\nu}. \quad (2.2)$$

Dans cette définition, u' représente l'échelle de vitesse fluctuante alors que l_I est une échelle de longueur caractéristique des tourbillons porteurs d'énergie (échelle intégrale). Par ailleurs ce nombre de Reynolds peut aussi être exprimé en fonction de l'échelle de longueur intégrale l_I et de l'échelle de Kolmogorov l_κ (échelle des plus petits tourbillons) :

$$Re_t \propto \left(\frac{l_I}{l_\kappa} \right)^{4/3}. \quad (2.3)$$

Connaissant le nombre de Reynolds turbulent, on peut estimer l'extension spectrale de la turbulence et ainsi évaluer le nombre de points nécessaires à la DNS. Par conséquent, l'utilisation de la DNS est réduite aux calculs d'écoulements turbulents dans des géométries très simples, pour des nombres de Reynolds raisonnables. La DNS se situe du côté des études amonts et ne sera clairement pas un outil de calcul industriel dans un futur proche.

La seconde approche s'appuie sur l'utilisation d'une moyenne statistique, ou d'une moyenne d'ensemble, justifiée par le caractère aléatoire de la turbulence. Chaque quantité hydrodynamique est scindée en une partie moyenne et une fluctuation (voir section 1.1). L'application d'une moyenne statistique aux équations de Navier Stokes fait alors apparaître des moments statistiques qui représentent de nouvelles inconnues. Une équation de transport de ces moments d'ordre 2 peut être établie. Cependant elle fait intervenir des moments d'ordre 3 qui représentent à nouveau des inconnues. Si l'ensemble des grandeurs principales est limité aux valeurs moyennes des grandeurs hydrodynamiques alors on parle de modélisation au premier ordre. Si cet ensemble est étendu aux moments d'ordre 2, alors on parle de modélisation au second ordre. La catégorie des modèles RANS au premier ordre sera plus amplement détaillée par la suite. Dans ce contexte, l'ensemble des échelles turbulentes est modélisé. Cette approche est très utilisée dans l'industrie du fait du coût de calcul réduit associé à ces modèles.

La troisième approche, la simulation des grandes échelles (appelée par la suite LES¹), se situe en quelque sorte à mi-chemin entre la DNS et les méthodes RANS. De façon simplifiée,

¹LES pour *Large Eddy Simulation*.

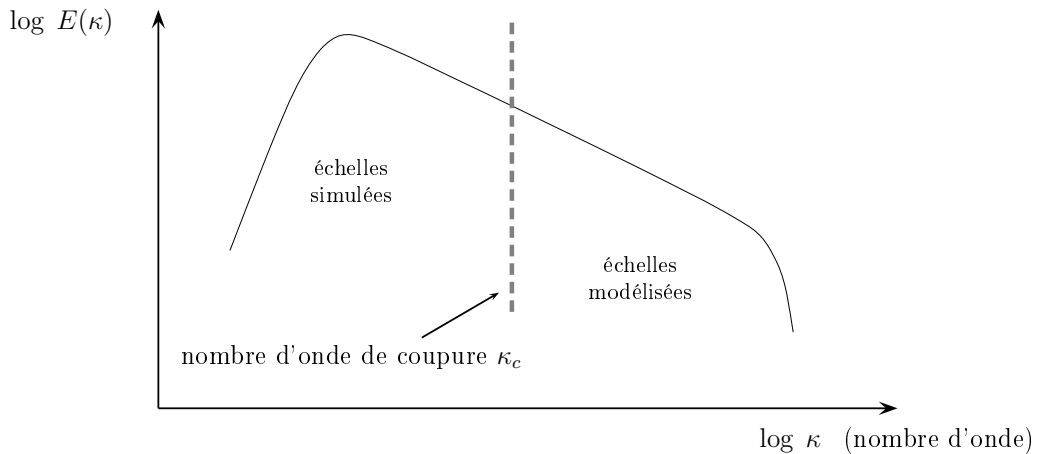


FIG. 2.1: Description schématique de la méthode LES à partir du spectre d'énergie de la turbulence. Dans le cadre de l'utilisation d'un filtre porte, la coupure dans l'espace spectral est franche.

elle repose sur la définition d'un nombre d'onde de coupure κ_c dans le spectre turbulent (voir Fig 2.1). Les petites échelles caractérisées par un nombre d'onde supérieur à κ_c sont modélisées *via* un modèle de sous-maille, et les autres échelles sont directement simulées. Cette coupure est généralement opérée par l'application d'un filtre spatial, généralement appelé filtre porte [93], sur les équations de Navier-Stokes. Le modèle de sous-maille permet alors de prendre en compte la dissipation d'énergie existant aux «petites» échelles et, pour les plus évolués, un éventuel retour d'énergie (*backscatter*) des «petites» vers les «grandes» échelles. Les modèles LES ont dans un premier temps été développés pour des applications météorologiques et se sont par la suite étendus à une large gamme d'écoulements, dont les écoulements confinés. Le coût de calcul plus élevé par rapport aux modèles RANS et le traitement délicat des zones proche-paroi en font un outil encore peu usité dans l'industrie, mais qui présente un fort potentiel de développement.

Les deux dernières approches sont d'utilisations plus marginales. Ce sont les méthodes probabilistes et spectrales [47]. Dans le cadre d'une méthode probabiliste, les variables hydrodynamiques sont considérées comme des variables statistiques définies par une fonction de densité de probabilité (PDF). Par exemple pour la vitesse, le moment d'ordre 1 est la vitesse moyenne, alors que le moment d'ordre 2 représente les contraintes de Reynolds. Une modélisation est ensuite opérée sur les moments d'ordre 2. Cette méthode est utilisée pour les écoulements réactifs et notamment les écoulements avec combustion [79] dont le traitement spécifique fait déjà appel à cette méthode². Enfin, la méthode spectrale opère sur les équations obtenues après transformation des coordonnées de l'espace physique (en général par une transformée de Fourier). Cette méthode est très utile pour comprendre les mécanismes de la turbulence. Cependant elle est restreinte aux écoulements isotropes ou homogènes. Il existe des extensions pour les écoulements faiblement inhomogènes, mais cette méthode n'a pour l'instant pas été étendue à des géométries d'intérêt pratique.

L'étude de la turbulence dans les milieux poreux devra s'appuyer sur des calculs de «référence» dans les motifs élémentaires constitutifs du milieu dans le but de valider les modèles macroscopiques. Les écoulements dans ces motifs sont alors des écoulements en

²Notamment en ce qui concerne les réactions à seuil pour lesquelles des PDF conditionnelles sont employées.

présence de parois. D'après le précédent descriptif des méthodes de modélisation de la turbulence à l'échelle locale et des considérations de la section 1.4.1, le choix de la méthode s'oriente naturellement vers la modélisation RANS au premier ordre. Quelques modèles appartenant à cette catégorie seront décrits dans la section 2.1. L'extension de ces modèles aux zones proche-paroi sera abordée dans la section 2.2. Enfin l'application de ces modèles sera présentée dans les sections 2.3 (code 1D), et 2.4 (code 2D-3D).

2.1 Modèles RANS au premier ordre

Dans le cadre de la modélisation RANS, une moyenne statistique est appliquée aux équations de Navier Stokes. Le fluide considéré est supposé incompressible et ses propriétés physiques (notamment sa viscosité) constantes. Les équations de continuité et de quantité de mouvement moyennées statistiquement s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} + g_i. \quad (2.5)$$

La présence des corrélations doubles $\overline{u'_i u'_j}$ implique que ce système n'est pas fermé. Ces corrélations représentent les contraintes par agitation turbulente, aussi appelées contraintes de Reynolds. La notation

$$\bar{R}_{ij} = \overline{u'_i u'_j} \quad (2.6)$$

est introduite. L'énergie cinétique du mouvement turbulent est aussi définie :

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \bar{R}_{ii} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}. \quad (2.7)$$

Différentes stratégies existent pour étudier les moments d'ordre deux de la vitesse (et plus généralement les corrélations entre deux fluctuations des quantités hydrodynamiques). D'une part, il est possible de considérer la corrélation des fluctuations définies au même point A et au même instant t

$$\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_i(A, t) u'_j(A, t)}. \quad (2.8)$$

Cette précision conduit aux «fermetures en un point». Par contre, en considérant les fluctuations en deux points A et B de l'espace, mais au même instant t ,

$$\overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_i(A, t) u'_j(B, t)}, \quad (2.9)$$

on parle alors de «fermetures en deux points». A cause de la complexité de l'analyse qui en découle, les fermetures en deux points sont essentiellement réduites à l'étude de la turbulence homogène isotrope. Par la suite, le propos sera focalisé sur les fermetures en un point.

Comme il a été décrit en introduction de ce chapitre, dans le cadre des modèles RANS au second ordre, l'ensemble des inconnues principales englobe le tenseur \bar{R}_{ij} . L'équation de transport des tensions de Reynolds est dérivée et fait intervenir les corrélations d'ordre trois des fluctuations de vitesse. La modélisation de ces équations de transport permet de tenir

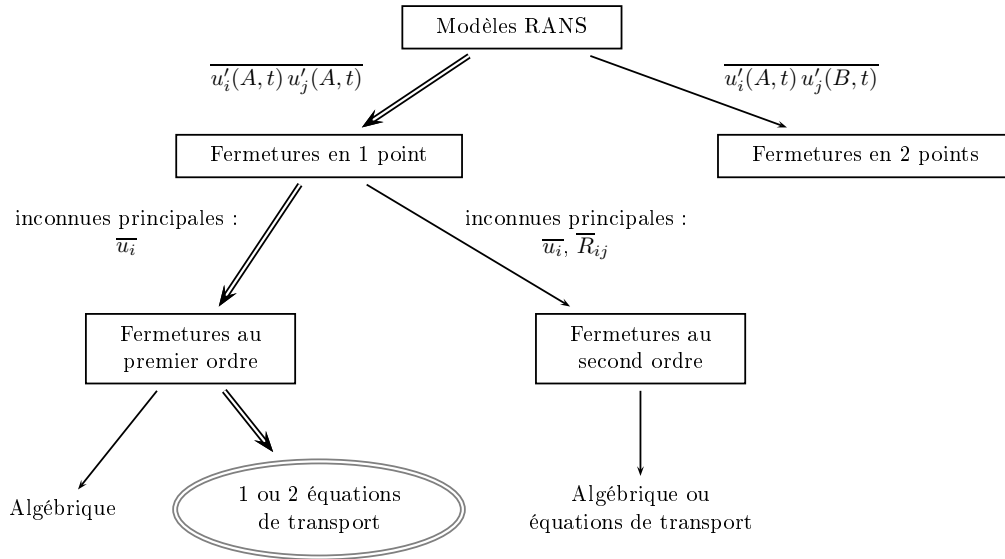


FIG. 2.2: Description schématique et partielle des méthodes RANS. Notre choix est marqué d'une double flèche.

compte des effets de mémoire spatio-temporelle de la turbulence et notamment la tendance du retour à l'isotropie d'une turbulence initialement anisotrope ou encore la redistribution des contraintes entre composantes du tenseur de Reynolds ([18], p. 486). Une description détaillée des fermetures au second ordre pourra être trouvée dans [18] et [56]. Par la suite, nous nous limiterons au cadre des fermetures au premier ordre pour lequel l'ensemble des inconnues principales est restreint aux moyennes statistiques des quantités hydrodynamiques.

Les propriétés dispersives de la turbulence font qu'elle a souvent été modélisée comme un processus diffusif. L'analogie avec le processus de diffusion moléculaire est souvent poursuivie. Les échelles de longueur associées à l'agitation moléculaire sont largement inférieures à celles du mouvement moyen. La séparation d'échelle permet alors de considérer que la viscosité moléculaire ν est une propriété du fluide³. Par contre, la séparation entre les échelles du mouvement moyen et du mouvement turbulent n'est pas vérifiée. La viscosité turbulente n'est donc pas une propriété du fluide, mais une propriété de l'écoulement. Dimensionnellement, pour construire une diffusivité turbulente, on peut se donner une échelle de longueur représentative des structures les plus actives à disperser et une échelle de vitesse fluctuante :

$$\nu_t \propto u' l_I. \quad (2.10)$$

En étudiant pour un écoulement cisailé simple le déplacement dû à l'agitation turbulente de deux particules fluides initialement infiniment proches, Prandtl [80] a construit cette viscosité turbulente à partir d'une longueur de mélange l_m et du cisaillement de l'écoulement moyen. Pour un écoulement unidirectionnel (suivant z) et cisailé suivant la direction y , la

³En outre, la température du fluide étant un indicateur de l'agitation moléculaire, la viscosité moléculaire dépend de la température.

viscosité ν_t est alors définie par :

$$\nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right|. \quad (2.11)$$

En reliant ν_t aux caractéristiques de l'écoulement moyen, Prandtl a ouvert la voie des modèles algébriques de viscosité turbulente. Ces modèles sont précis mais très spécialisés. En effet, la définition de la longueur de mélange doit être adaptée à la catégorie d'écoulements étudiés. En ce sens, ils présentent de faibles capacités prédictives.

Par la suite, nombre de modélisateurs ont choisi de prescrire l'échelle des fluctuations de la vitesse à partir de l'énergie cinétique du mouvement turbulent :

$$u' = \sqrt{\bar{k}}. \quad (2.12)$$

L'équation de transport de \bar{k} est alors dérivée et modélisée, tandis que la longueur l_l , présente dans la définition (2.10), est une nouvelle fois prescrite algébriquement. Cette classe de modèles est appelée «modèles à une équation de transport» et souffre une nouvelle fois de la restriction phénoménologique engendrée par la prescription d'une longueur caractéristique. En effet, dans un cadre plus générique, cette longueur peut être déduite de grandeurs turbulentes. Plus précisément, comme l'équation de transport de \bar{k} avait déjà fait l'objet de nombreux travaux, le choix d'une unique autre grandeur est suffisante. On accède ainsi à la famille des «modèles à deux équations de transport».

Notre succincte description des modèles RANS est résumée par la figure 2.2. Dans cette section, les fermetures au premier ordre, à une ou deux équations de transport, seront plus particulièrement abordées. Pour la description du coefficient ν_t , la dérivation et la modélisation de l'équation de transport de \bar{k} sont nécessaires. Elles seront exposées dans la section 2.1.2. L'équation bilan modèle de \bar{k} est ensuite communément utilisée dans le cadre des modèles à une équation de transport et à deux équations de transport. Nous décrirons enfin le choix de l'échelle de longueur l qui peut être définie algébriquement (section 2.1.2), ou qui peut être définie en fonction de variables caractéristiques de la turbulence (section 2.1.3).

2.1.1 Dérivation de l'équation de transport de \bar{k}

Nous dérivons dans un premier temps l'équation de transport de la fluctuation de vitesse u'_i , en soustrayant l'équation de la vitesse moyenne (Eq. 2.5) à celle décrivant la vitesse locale (Eq. 1.126) :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{R}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_j} u'_i u'_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{u}_i u'_j, \quad (2.13)$$

L'équation de transport des contraintes de Reynolds est obtenue en remarquant que :

$$\frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{R}_{ij} = \overline{u'_j \left[\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \right]} + \overline{u'_i \left[\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right]}. \quad (2.14)$$

En exploitant les expressions (2.13) et (2.14), nous déterminons l'équation bilan des contraintes de Reynolds :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial t} + \bar{u}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{R}_{ij} = & -\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{u'_i u'_j u'_l} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i P'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_j P'} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \bar{R}_{ij}}{\partial x_l} \right) \\ & + \frac{P'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) - \left[\bar{R}_{il} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} + \bar{R}_{jl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right] - 2 \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

La définition (2.7), reliant \bar{k} à \bar{R}_{ij} permet de dériver une première forme de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{k' u'_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i P'}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) \\ & + \frac{\overline{P' u'_i}}{\rho} - \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En remarquant ensuite que l'hypothèse d'incompressibilité du fluide permet d'écrire :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.17)$$

et en définissant la dissipation visqueuse $\bar{\varepsilon}$ par

$$\bar{\varepsilon} = \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}, \quad (2.18)$$

l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente est déduite :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right]}_{(a)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right)}_{(b)} - \underbrace{\bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{(c)} - \underbrace{\bar{\varepsilon}}_{(d)}. \quad (2.19)$$

Les quatre termes du membre de droite équilibrent la variation totale de \bar{k} dans le mouvement moyen. Il s'agit de la diffusion turbulente (a), la diffusion moléculaire (b), la production par cisaillement de l'écoulement moyen (c) et la dissipation visqueuse (d). Seul le terme de diffusion moléculaire ne nécessite pas de modélisation.

Le terme de corrélation pression-vitesse est présent dans l'expression du terme de diffusion turbulente. Pourtant, suivant [18], ce mécanisme n'est pas assimilable à un mécanisme de diffusion de l'énergie cinétique turbulente. Cette corrélation ne peut être mesurée expérimentalement par les moyens actuels [96]. Le regroupement opéré revient à négliger cette corrélation des fluctuations de pression et de vitesse. Des résultats de simulations numériques directes dans un canal plan [62] et des résultats expérimentaux [111] permettent de justifier cette simplification pour des écoulements dans des configurations simples. Puis, le flux de dispersion turbulente de \bar{k} est modélisé grâce à une fermeture au premier gradient :

$$-\overline{k' u'_i} = D_{tk} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i}. \quad (2.20)$$

où D_{tk} est le coefficient de diffusion turbulente. La définition d'un nombre de Schmidt de la turbulence, associé à \bar{k} ,

$$\sigma_k = \frac{\nu_t}{D_{tk}}, \quad (2.21)$$

permet d'écrire le terme (a) de l'équation (2.19) sous la forme d'un terme de diffusion lié à la viscosité turbulente :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right). \quad (2.22)$$

De la même façon que la viscosité du fluide est une représentation des contraintes moléculaires, les contraintes de Reynolds sont modélisées *via* l'utilisation de la viscosité turbulente ν_t :

$$-\rho \bar{R}_{ij} + \frac{2}{3} \rho \bar{k} \delta_{ij} = \rho \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right). \quad (2.23)$$

Cette relation est une forme générale qui peut être simplifiée pour le cas d'un écoulement incompressible. Cette fermeture du tenseur de Reynolds est aussi appelée hypothèse de Boussinesq et n'est qu'un cas particulier des modèles ASM (*Algebraic Stress Model*) [18]. Grâce à la relation (2.23), et en rappelant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, nous déduisons l'expression modèle du terme de production par cisaillement :

$$-\bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \left[\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (2.24)$$

Il reste alors à proposer une expression pour la dissipation visqueuse. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que le nombre de Reynolds de la turbulence

$$Re_t = \frac{u' l_I}{\nu} \quad (2.25)$$

est élevé. Cette hypothèse garantit la séparation d'échelle entre structures à grande échelle et structures dissipatives. Une zone spectrale dit «zone inertielle» existe. Le phénomène physique dominant cette zone inertielle est le transfert spectral d'énergie de proche en proche. Par une analyse dimensionnelle, Kolmogorov a montré que, dans cette région, la pente du spectre d'énergie cinétique vaut $-5/3$ en géométrie tridimensionnelle [33, 51]. Naturellement la pente du spectre caractérise le flux spectral d'énergie \mathcal{F} . De plus, Kolmogorov a montré que ce flux est intimement lié à $\bar{\varepsilon}$:

$$\mathcal{F} = \bar{\varepsilon}. \quad (2.26)$$

L'existence de la zone inertielle repose donc sur cette égalité⁴. Sous ces conditions, $\bar{\varepsilon}$ s'exprime en fonction d'une échelle de longueur représentative des structures porteuses d'énergie (échelle intégrale) et de l'énergie cinétique turbulente :

$$\bar{\varepsilon} = C_d \bar{k}^{3/2} / l_I, \quad (2.27)$$

où C_d est une constante. L'échelle de longueur l_I coïncide avec la longueur de mélange l_m .

2.1.2 Définition d'une échelle de longueur algébrique

Il faut ensuite compléter la fermeture en proposant une expression pour la variable l_I . Il est rappelé que, dans le cadre des modèles à une équation (*ie.* modèle $\bar{k} - l$), l'expression de la viscosité turbulente est donnée par :

$$\nu_t = C_\mu \sqrt{\bar{k}} l_I. \quad (2.28)$$

où C_μ est une constante du modèle. De nombreuses expressions empiriques pour définir l_I existent suivant l'écoulement considéré. Pour exprimer cette longueur de mélange, les

⁴C'est une hypothèse d'équilibre spectral.

écoulements de la famille des jets font par exemple appel à la demi-épaisseur du jet, $\delta_{1/2}$, qui représente la distance entre l'axe du jet et le point où la vitesse du fluide est égale à la moitié de la vitesse au centre [18]. Pour les écoulements avec paroi, c'est à dire la catégorie d'écoulements qui nous intéressent dans le cadre de ce travail, la longueur de mélange est fonction de la distance à la paroi y_w [18] :

$$l_I \sim y_w. \quad (2.29)$$

La définition d'une longueur de mélange pour les écoulements avec paroi sera plus amplement décrite dans la section 2.2.2.

2.1.3 Définition d'une échelle de longueur en utilisant $\bar{\varepsilon}$

Lors de l'utilisation d'un modèle de turbulence de type $\bar{k}-l$, il peut s'avérer peu pratique de devoir changer la formulation de la longueur de mélange en fonction de l'écoulement étudié. Cette quantité peut tout aussi bien être calculée en utilisant une deuxième variable décrivant la turbulence, cette deuxième variable devant alors être décrite par une équation de transport. Il existe différents choix possibles pouvant remplir le rôle de seconde inconnue turbulente. Une revue des différentes possibilités pourra être trouvée dans [58]. Cependant, le choix de la dissipation visqueuse comme seconde variable [25, 42] s'est rapidement imposée, certainement grâce à la présence explicite de $\bar{\varepsilon}$ dans l'équation de \bar{k} et par la simplicité de sa mise en oeuvre numérique. Les différentes étapes pour la dérivation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ vont être ici rappelées.

Equation de transport de $\bar{\varepsilon}$

Tout d'abord, nous revenons sur la relation (2.27) liant la dissipation visqueuse, l'énergie cinétique turbulente et l'échelle de longueur :

$$l_I \sim \bar{k}^{3/2} / \bar{\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Formellement, une échelle de longueur est recherchée. Sous la validité de l'hypothèse d'équilibre spectral, il s'avère que la dissipation visqueuse et l'échelle de longueur sont étroitement liées. L'estimation (2.30) est reportée dans la modélisation (2.10) de la viscosité turbulente :

$$\nu_t = C_\mu \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}. \quad (2.31)$$

Pour établir l'expression exacte de l'équation de transport de la dissipation visqueuse, il est possible d'utiliser la définition (2.18). La modélisation des termes composant cette équation s'avère alors fastidieuse. En général, l'équation de $\bar{\varepsilon}$ est postulée en supposant qu'elle est régie par les mêmes phénomènes que l'équation de transport de \bar{k} (Eq. (2.19)) :

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\varepsilon} \bar{u}_i = \text{Diffusion turbulente} + \text{Diffusion moléculaire} + \text{Production} - \text{Dissipation}. \quad (2.32)$$

Le terme de diffusion turbulente peut être écrit en conservant la structure de la modélisation adoptée pour \bar{k} :

$$\text{Diffusion turbulente} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right), \quad (2.33)$$

où σ_ε est le nombre de Schmidt de la turbulence, associé à $\bar{\varepsilon}$. De la même façon, le terme de diffusion moléculaire prend la forme simple :

$$\text{Diffusion moléculaire} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right). \quad (2.34)$$

Par analyse dimensionnelle, on constate que l'équation (2.32) est homogène à l'équation de transport de \bar{k} divisée par un temps. On associe alors aux termes de production et de dissipation un temps caractéristique qui est en l'occurrence le temps de retournement des gros tourbillons, à savoir

$$\tau_t = \bar{k} / \bar{\varepsilon}. \quad (2.35)$$

On adjoint à ces deux termes des constantes de modélisation C_{ε_1} et C_{ε_2} , pour obtenir :

$$\text{Production} = -\frac{C_{\varepsilon_1}}{\tau_t} \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (2.36)$$

$$\text{Dissipation} = \frac{C_{\varepsilon_2}}{\tau_t} \bar{\varepsilon}. \quad (2.37)$$

On en déduit l'équation de transport de la dissipation visqueuse, classiquement utilisée pour la modélisation $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$:

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{\varepsilon} \bar{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right] - C_{\varepsilon_1} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \quad (2.38)$$

Détermination du coefficient C_{ε_2} : décroissance d'une turbulence de grille

Le coefficient C_{ε_2} peut être déterminé par l'étude d'un écoulement turbulent stationnaire (statistiquement), caractérisé par une vitesse uniforme \bar{u}_z en aval d'une grille. Loin en aval, le terme de production par cisaillement est nul, et les gradients sont suffisamment faibles pour que les effets diffusifs soient négligeables. Sous ces contraintes, le système décrivant les variations de \bar{k} et $\bar{\varepsilon}$ se réduit à :

$$\begin{cases} \bar{u}_z \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} = -\bar{\varepsilon}, \\ \bar{u}_z \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial z} = -C_{\varepsilon_2} \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}}. \end{cases} \quad (2.39)$$

En définissant les conditions limites de ce système en $z = z_0$ ⁵,

$$\bar{k}(z_0) = \bar{k}_0, \quad \bar{\varepsilon}(z_0) = \bar{\varepsilon}_0, \quad (2.40)$$

nous écrivons la solution du système (2.39) :

$$\bar{k}(z) = \bar{k}_0 \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{(z - z_0)}{\bar{u}_z} \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{k}_0} \right]^{\frac{1}{1-C_{\varepsilon_2}}}, \quad (2.41)$$

$$\bar{\varepsilon}(z) = \bar{\varepsilon}_0 \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{(z - z_0)}{\bar{u}_z} \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{k}_0} \right]^{\frac{C_{\varepsilon_2}}{1-C_{\varepsilon_2}}}. \quad (2.42)$$

⁵L'abscisse z_0 doit être choisie judicieusement [67].

L'évolution de l'énergie cinétique turbulente obtenue expérimentalement est fréquemment décrite par une loi de décroissance en puissance

$$\bar{k}(z) \sim \bar{k}_0 (z - z_0)^{-n} . \quad (2.43)$$

En comparant la solution analytique (2.41) à la loi de décroissance (2.43), il vient :

$$C_{\varepsilon_2} \simeq \frac{n+1}{n} . \quad (2.44)$$

Dans [67], différents critères pour déterminer cet exposant sont établis. Cet exposant dépend notamment de l'abscisse par rapport à la grille. Batchelor [8] a montré que, dans la phase initiale (c'est à dire dans la zone proche de la grille), le paramètre n est égal à 1. En dehors de cette phase initiale, une moyenne des résultats regroupés dans [67] fournit :

$$n \simeq 1.237 . \quad (2.45)$$

La constante C_{ε_2} est alors déduite :

$$C_{\varepsilon_2} \simeq 1.81 . \quad (2.46)$$

Dans la pratique, les différents modèles de turbulence utilisent une valeur comprise dans l'intervalle [1.8 ; 1.92].

Détermination du coefficient C_μ : étude d'une couche limite en équilibre statistique

Des mesures de couches limites en équilibre statistique [13] ont montré que la relation

$$-\frac{\overline{u'_z u'_y}}{2\bar{k}} \simeq 0.15 , \quad (2.47)$$

où les vitesses u_y et u_z correspondent respectivement aux vitesses normales et tangentielles dans le repère local lié à la paroi, était vérifiée dans la zone logarithmique. En utilisant la modélisation (2.23) des contraintes turbulentes et en négligeant le gradient transverse de la vitesse \bar{u}_y , nous écrivons :

$$-\frac{\overline{u'_z u'_y}}{2\bar{k}} = C_\mu \frac{\bar{k}}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} . \quad (2.48)$$

Pour déterminer l'expression du gradient de vitesse, une hypothèse d'équilibre est généralement formulée, à savoir que, dans cette zone, les mécanismes de production et de dissipation s'équilibrent approximativement⁶ :

$$\text{Production} = -2\overline{u'_z u'_y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = \bar{\varepsilon} . \quad (2.49)$$

En remplaçant ce résultat dans la relation (2.48), C_μ est donnée par

$$C_\mu = \left(\frac{\overline{u'_z u'_y}}{\bar{k}} \right)^2 . \quad (2.50)$$

A partir de l'estimation fournie en (2.47), une valeur approchée de C_μ est déduite :

$$C_\mu \simeq 0.09 . \quad (2.51)$$

⁶Cette hypothèse d'équilibre conduit à définir la «zone logarithmique» d'une couche limite.

Relation liant les coefficients σ_ε et C_{ε_1} : étude de la zone logarithmique de la couche limite [96]

Dans une couche limite établie sur plaque plane, caractérisée par un gradient de pression nul, l'équation bilan de \bar{u}_z est réduite à :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.52)$$

La somme des cisaillements visqueux (σ_{zy}) et turbulent ($\rho \bar{R}_{zy}$) est donc conservée dans la couche limite :

$$\sigma_{zy} + \rho \bar{R}_{zy} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} + \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = \text{constante}. \quad (2.53)$$

Or, à la paroi, la contrainte turbulente est nulle car les fluctuations de vitesses sont identiquement nulles⁷. En définissant la vitesse de frottement u_f par

$$u_f = \sqrt{\frac{\sigma_{zy}}{\rho} \Big|_{\text{paroi}}} = \sqrt{\nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \Big|_{\text{paroi}}}, \quad (2.54)$$

et en se restreignant à la zone de couche limite, il vient

$$\sigma_{zy} + \rho \bar{R}_{zy} = \sigma_{zy} \Big|_{\text{paroi}} = \rho u_f^2. \quad (2.55)$$

Or, lorsque l'on s'éloigne de la paroi, les contraintes visqueuses deviennent rapidement négligeables devant les contraintes turbulentes (ce qui revient aussi à dire que la viscosité turbulente domine la viscosité moléculaire), d'où

$$\rho \bar{R}_{zy} = \rho u_f^2. \quad (2.56)$$

D'après ce qui précède concernant la détermination de la constante C_μ , l'énergie cinétique turbulente est alors estimée dans la zone logarithmique de la couche limite :

$$\bar{k} \simeq \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}}. \quad (2.57)$$

Pour estimer $\bar{\varepsilon}$, il est à nouveau souligné que la zone logarithmique est caractérisée par l'équilibre entre la production par cisaillement et la dissipation visqueuse :

$$\bar{R}_{zy} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = \bar{\varepsilon}. \quad (2.58)$$

D'après l'expression du profil de vitesse dans cette zone de la couche limite (voir section suivante, Eq. (2.70)) et la relation (2.56), il vient :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{u_f^3}{\kappa y_w}. \quad (2.59)$$

⁷Il est rappelé que l'expression $\rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}$ est une modélisation de la corrélation $\overline{\rho u'_y u'_z}$.

où κ est la constante de Von Kármán ($\kappa = 0.41$). En reportant l'égalité entre la production et la dissipation dans l'équation de transport (2.38) de la dissipation visqueuse, appliquée à la zone logarithmique d'une couche limite développée, on en déduit :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} (C_{\varepsilon_1} - C_{\varepsilon_2}) = 0. \quad (2.60)$$

En introduisant dans cette équation la modélisation (2.31) de la viscosité turbulente, on en conclut :

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\kappa^2}{\sqrt{C_\mu} (C_{\varepsilon_2} - C_{\varepsilon_1})}. \quad (2.61)$$

Par une optimisation numérique et sans plus de justification, la plupart des auteurs ont adopté la valeur suivante :

$$\sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (2.62)$$

Grâce à la relation (2.61), la valeur de C_{ε_1} peut être déduite de la valeur de C_{ε_2} . Par exemple,

$$C_{\varepsilon_2} = 1.8 \text{ implique } C_{\varepsilon_1} \simeq 1.37. \quad (2.63)$$

2.2 Traitement spécifique des zones proche-paroi

En s'approchant de la paroi, l'écoulement turbulent est caractérisé par des nombres de Reynolds locaux qui deviennent de plus en plus faibles. L'hypothèse de séparation d'échelle entre les tourbillons porteurs d'énergie et l'échelle dissipative est remise en cause. En outre, la diffusion par agitation turbulente n'est plus prépondérante sur la diffusion moléculaire. La modélisation d'un écoulement turbulent dans la zone proche-paroi doit donc faire l'objet d'une attention particulière.

L'une des difficultés majeures dans l'analyse du comportement des différentes grandeurs turbulentes près de la paroi est la très faible épaisseur de cette zone de couche limite, ce qui rend très compliquée toute tentative d'investigation expérimentale dans cette région. En se focalisant sur le cas de la couche limite sur plaque plane (dont la normale est colinéaire à la direction y), il est toutefois possible de dégager différentes caractéristiques de l'écoulement dans la zone proche-paroi (section 2.2.1). Ces caractéristiques seront ensuite prises en compte dans la modélisation de la turbulence (sections 2.2.2 et 2.2.3)

2.2.1 Description de l'écoulement moyen et de la turbulence

Dans un premier temps, nous nous intéressons au profil de vitesse moyenne. Pour étudier la couche limite, il est pratique d'utiliser la distance normalisée à la paroi, qui est définie par

$$y^+ = \frac{y_w u_f}{\nu}, \quad (2.64)$$

ainsi que la vitesse normalisée (par la vitesse de frottement) :

$$u^+ = \frac{\bar{u}_z}{u_f}. \quad (2.65)$$

La couche limite peut être ensuite décomposée en plusieurs régions aux propriétés distinctes. Tout d'abord, dans la sous-couche visqueuse, correspondant à la région $y^+ \lesssim 5$ [97], les contraintes turbulentes s'annulent pratiquement. La relation (2.55) conduit alors à :

$$\text{pour } y^+ \lesssim 5, \quad \sigma_{zy} = \rho \nu \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = \rho u_f^2 \quad (2.66)$$

$$\iff u^+ = y^+. \quad (2.67)$$

Puis vient la zone tampon, à l'intérieur de laquelle les contraintes visqueuses et turbulentes sont comparables. Cette région est caractérisée par $5 \lesssim y^+ \lesssim 30$. Enfin, la zone logarithmique ($30 \lesssim y^+ \lesssim 300$) correspond au «raccordement» entre les régions interne et externe de la couche limite. Dans cette région, les contraintes visqueuses sont négligeables devant les contraintes turbulentes, d'où d'après (2.53) :

$$\text{pour } 30 \lesssim y^+ \lesssim 300, \quad \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} = \rho u_f^2. \quad (2.68)$$

De plus, la taille des tourbillons responsables du transfert turbulent dans cette région varie linéairement avec la distance à la paroi. La diffusion turbulente est elle aussi proportionnelle à cette distance [97] :

$$\nu_t = \kappa u_f y_w. \quad (2.69)$$

Cela conduit à :

$$\text{pour } y^+ \gtrsim 30, \quad u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(1 + y^+) + \mathcal{C}, \quad (2.70)$$

où \mathcal{C} est une constante. Différentes fonctions ont été établies pour décrire par une unique expression le profil de vitesse moyenne à travers ces trois régions. Dans cette étude, nous nous reporterons à la loi de Reichardt [1, 59, 89] :

$$F_u(y^+) = u^+ = \frac{1}{0.41} \ln(1 + 0.41 y^+) + 7.8 \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{11}\right) - \frac{y^+}{11} \exp\left(-\frac{y^+}{3}\right) \right). \quad (2.71)$$

Parallèlement à ce descriptif du profil de vitesse moyenne dans la couche limite, l'analyse du comportement asymptotique des fluctuations de vitesse (et de la pression) permet de mettre en avant plusieurs comportements caractéristiques de la turbulence. Les développements asymptotiques suivant la distance à la paroi y_w peuvent s'écrire [18] :

$$u'_x = a_{x,1} y_w + a_{x,2} y_w^2 + a_{x,3} y_w^3 + o(y_w^3), \quad (2.72)$$

$$u'_y = a_{y,1} y_w + a_{y,2} y_w^2 + a_{y,3} y_w^3 + o(y_w^3), \quad (2.73)$$

$$u'_z = a_{z,1} y_w + a_{z,2} y_w^2 + a_{z,3} y_w^3 + o(y_w^3), \quad (2.74)$$

$$\frac{P'}{\rho} = a_{p,0} + a_{p,1} y_w + a_{p,2} y_w^2 + a_{p,3} y_w^3 + o(y_w^3). \quad (2.75)$$

Ces développements sont ensuite reportés dans l'équation de continuité des fluctuations ($\partial u'_i / \partial x_i = 0$). Par identification des différentes puissances de y_w , cela conduit à :

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} + \frac{\partial u'_y}{\partial y} + \frac{\partial u'_z}{\partial z} = 0 \iff \begin{cases} a_{y,1} = 0, \\ 2a_{y,2} = -\left(\frac{\partial a_{x,1}}{\partial x} + \frac{\partial a_{z,1}}{\partial z}\right), \\ 3a_{y,3} = -\left(\frac{\partial a_{x,2}}{\partial x} + \frac{\partial a_{z,2}}{\partial z}\right). \end{cases} \quad (2.76)$$

En introduisant les développements asymptotiques dans l'équation bilan de chaque fluctuation de vitesse⁸, de nouvelles relations sur les coefficients présents dans ces développements sont explicitées. Elles ne seront pas reproduites ici. Seuls les résultats sur l'énergie cinétique turbulente et la dissipation visqueuse sont décrits :

$$\bar{k} = \frac{1}{2} \left(\overline{a_{x,1}^2} + \overline{a_{z,1}^2} \right) y_w^2 + (\overline{a_{x,1} a_{x,2}} + \overline{a_{z,1} a_{z,2}}) y_w^3 + o(y_w^3), \quad (2.77)$$

$$\bar{\varepsilon} \simeq \nu \left(\frac{\partial u'_x}{\partial y_w} \frac{\partial u'_x}{\partial y_w} + \frac{\partial u'_y}{\partial y_w} \frac{\partial u'_y}{\partial y_w} + \frac{\partial u'_z}{\partial y_w} \frac{\partial u'_z}{\partial y_w} \right) \simeq \nu \left(\overline{a_{x,1}^2} + \overline{a_{z,1}^2} \right) + o(1). \quad (2.78)$$

Pour la zone proche-paroi, une propriété remarquable émerge de cette analyse :

$$\bar{\varepsilon} = \lim_{y_w \rightarrow 0} \frac{2\nu \bar{k}}{y_w^2} = \nu \frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial y_w^2}. \quad (2.79)$$

C'est une propriété essentielle que doit vérifier les modèles de turbulence en région proche-paroi.

Le comportement du coefficient de diffusion turbulente est ensuite étudié dans la sous-couche visqueuse. Dans cette région, le profil de vitesse étant linéaire par rapport à la distance à la paroi (voir Eq. (2.67)), la modélisation des contraintes turbulentes par l'hypothèse de Boussinesq fournit :

$$\nu_t = - \frac{\overline{u'_z u'_y}}{\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial y}} \sim y_w^3. \quad (2.80)$$

Or, dans le cadre du modèle à deux équations $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$, le coefficient de diffusion turbulente est défini par (2.31). Dans cette expression, la dissipation visqueuse est le résultat d'une équation de transport. Son comportement dans la zone proche-paroi est donné par :

$$\bar{\varepsilon} = C_\mu \frac{\bar{k}^2}{\nu_t} \sim y_w. \quad (2.81)$$

Ce comportement est en contradiction avec l'expression (2.78). Ce conflit n'est pas choquant puisque dans cette expression $\bar{\varepsilon}$ est déduite d'une équation de transport postulée. La dissipation décrite en (2.79) et présente dans l'équation bilan de \bar{k} (Eq. (2.19)) n'est qu'une dissipation modèle qui ne respecte pas le comportement de la véritable dissipation visqueuse [90]. Une correction doit donc être apportée dans la modélisation.

2.2.2 Influence d'une paroi sur l'échelle de longueur

Bien que le modèle $\bar{k} - l$ présenté dans la section 2.1.2 pour les écoulements avec parois présente de bons résultats pour les écoulements de couche limite, différents auteurs (voir [18], p.546) ont suggéré, pour plus de précisions, de distinguer l'échelle de longueur présente dans l'expression (2.28) de ν_t , de celle présente dans l'expression (2.27) de $\bar{\varepsilon}$. Ils proposent ainsi de différencier leur comportement près des parois. L'échelle de longueur présente dans la définition (2.28) s'exprime [110] :

$$l_I = C_l y_w (1 - \exp(-y_n/A_\mu)), \quad (2.82)$$

⁸Ces équations sont décrites dans la section 4.2.1.

où y_n est une distance normalisée à la paroi définie en fonction de l'énergie cinétique turbulente

$$y_n = \frac{y_w \sqrt{\bar{k}}}{\nu}. \quad (2.83)$$

En comparaison avec l'équation (2.27), la dissipation visqueuse est donnée par une autre échelle de longueur :

$$\bar{\varepsilon} = C_d \bar{k}^{3/2} / l_\varepsilon, \quad (2.84)$$

avec

$$l_\varepsilon = C_l y_w (1 - \exp(-y_n/A_\varepsilon)). \quad (2.85)$$

Il est souligné que les deux échelles de longueurs l et l_ε deviennent égales dès lors que l'on s'éloigne suffisamment de la paroi.

Le coefficient C_l a été optimisé pour que le modèle reproduise la loi logarithmique. Puis les constantes A_μ et A_ε ont été optimisées pour reproduire de manière satisfaisante le comportement de la turbulence en proche-paroi. Les valeurs des coefficients généralement utilisées pour ce modèle sont [18] :

$$C_\mu = 0.09, \sigma_k = 0.9, C_l = 2.44, A_\mu = 63, A_\varepsilon = 3.8. \quad (2.86)$$

2.2.3 Modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds

La dérivation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ standard repose sur l'hypothèse d'un nombre de Reynolds de la turbulence élevé. Or, pour les écoulements confinés, cette hypothèse devient d'autant plus fautive que l'on s'approche de la paroi. La séparation d'échelle n'est plus vérifiée. Différents travaux [48, 57] ont alors conduit à reproduire le comportement de la turbulence en proche-paroi dans la formulation du modèle, définissant par la même occasion la catégorie des modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds. La forme générique des équations de fermeture est décrite par :

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \bar{k}^2 / \bar{\varepsilon}, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right] - \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \right] - C_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\bar{k}} - \bar{E}_p. \quad (2.89)$$

Les fonctions f_1 , f_2 et f_μ sont des fonctions d'amortissement permettant de reproduire le bon comportement des termes associés dans les zones proche-paroi. Les fonctions $\bar{\varepsilon}_p$ et \bar{E}_p sont des termes supplémentaires de dissipation, intervenant respectivement dans les équations de transport de \bar{k} et de $\bar{\varepsilon}$. Ils permettent de reproduire un comportement satisfaisant de la dissipation visqueuse totale dans la sous-couche visqueuse (voir section 2.2.1). Il existe différentes stratégies pour déterminer les expressions de ces fonctions : certains auteurs se basent sur des simulations numériques directes pour des écoulements de couche limite sur plaque plane, alors que d'autres s'intéressent au comportement asymptotique analytique de la turbulence près de la paroi. On trouvera une revue détaillée de ces modèles dans [18] et [43]. Nous nous focaliserons ici sur le modèle de Launder et Sharma [57] et celui de

Chien [22]. Dans ces modèles, les fonctions d'amortissement sont définies dans le repère local à la paroi. La dérivée spatiale dans la direction normale à la paroi est noté $\partial./\partial n$. La vitesse utilisée dans ces fonctions est la vitesse suivant la direction tangentielle à la paroi. Nous définissons de plus un nombre de Reynolds turbulent qui fait référence à \bar{k} et $\bar{\varepsilon}$:

$$Re_T = \frac{\bar{k}^2}{\nu \bar{\varepsilon}}. \quad (2.90)$$

La définition (2.54) de la vitesse de frottement est étendue à une paroi de géométrie quelconque :

$$u_f = \sqrt{\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}}. \quad (2.91)$$

Les expressions et les valeurs des coefficients utilisées par les auteurs sont récapitulées :

- modèle bas-Reynolds de Launder et Sharma [57] :

$$f_\mu = \exp(-3.4/(1 + Re_T/50)), \quad (2.92)$$

$$f_1 = 1, \quad (2.93)$$

$$f_2 = 1 - 0.3 \exp(-Re_T^2), \quad (2.94)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\bar{k}}}{\partial n} \right)^2, \quad (2.95)$$

$$\bar{E}_p = 2\nu \nu_t \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} \right)^2, \quad (2.96)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (2.97)$$

- modèle bas-Reynolds de Chien [22] :

$$f_\mu = 1 - \exp(-0.0115y^+), \quad (2.98)$$

$$f_1 = 1, \quad (2.99)$$

$$f_2 = 1 - 0.22 \exp(-Re_T^2/36), \quad (2.100)$$

$$\bar{\varepsilon}_p = 2\nu \left(\frac{\bar{k}}{y_w^2} \right), \quad (2.101)$$

$$\bar{E}_p = 2\nu \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{y_w^2} \right) \exp(-y^+/2), \quad (2.102)$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\varepsilon_1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon_2} = 1.8, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (2.103)$$

Ces deux modèles préconisent que la valeur limite à la paroi de la dissipation visqueuse $\bar{\varepsilon}$ soit égale à zéro.

2.2.4 Simulations d'écoulements avec parois en utilisant la modélisation $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$

A présent, nous devons nous interroger sur la mise en œuvre pratique, dans un cadre général, des modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ qui ont été définis dans les sections précédentes. Une fois discrétisés, les modèles bas-Reynolds présentent une contrainte d'adéquation du maillage avec l'écoulement. En effet, la prise en compte des effets visqueux ne peut être réalisée que si au

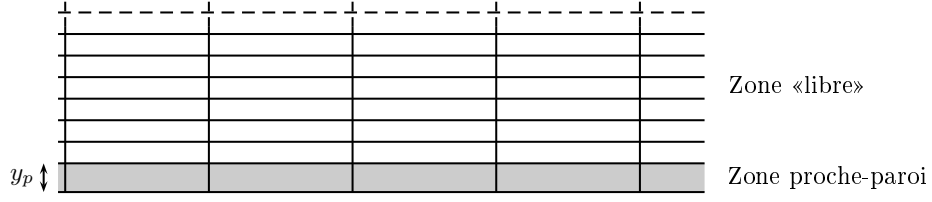


FIG. 2.3: Approche multi-zone pour un configuration de type plaque plane.

moins un ou deux nœuds du maillage sont inclus dans la sous-couche visqueuse. Il est rappelé que cette sous-partie de la couche limite est définie mathématiquement par les zones proche-paroi remplissant la condition $y^+ \leq 5$ [97]. Or l'épaisseur de couche limite devient d'autant plus faible que le nombre de Reynolds devient grand. La contrainte sur le maillage peut devenir extrêmement coûteuse pour des écoulements caractérisés par un nombre de Reynolds élevé, ou dans des géométries complexes. Pourtant, le maillage dans les zones relativement éloignées des parois peut être plus grossier en comparaison de ce qui vient d'être décrit. Pour réduire le coût du calcul, il apparaît alors pertinent de réaliser un traitement spécifique des zones proche-paroi par une approche multi-zone. La figure 2.3 décrit la distinction géométrique entre la zone proche-paroi et la zone «libre» pour une configuration de type plaque plane. Nous définissons une distance normale à la paroi y_p qui sépare ces deux zones. Dans la zone libre, la modélisation $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ standard peut être utilisée. Par contre, la zone proche-paroi nécessite un traitement spécifique. Nous ne décrivons succinctement ici que deux méthodes.

Une première méthode consiste à utiliser des fonctions de parois. L'écoulement n'est pas résolu dans la maille juxtaposant la paroi. Les conditions limites de l'écoulement sont imposées à la distance y_p de la paroi. Dans la zone proche-paroi, l'écoulement est supposé établi. Pour déterminer la vitesse moyenne au raccord entre les deux zones, la loi de Reichardt (2.71) est utilisée. Concernant les quantités turbulentes, ce sont les estimations (2.57) et (2.59) de \bar{k} et de $\bar{\varepsilon}$ dans la zone logarithmique, ici rappelées,

$$\bar{k}(y_p) \simeq \frac{u_f^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \bar{\varepsilon}(y_p) \simeq \frac{u_f^3}{\kappa y_p}, \quad (2.104)$$

qui sont employées en tant que conditions limites. Il est alors impératif que le raccord soit situé dans la couche logarithmique. Pour plus de précisions, il est possible d'utiliser des lois algébriques décrivant les évolutions de \bar{k} et de $\bar{\varepsilon}$ jusqu'à la paroi [59]. Le raccord est alors plus précis et la restriction sur la position du raccord est relaxée. Un descriptif de cette méthode pourra être trouvé dans [59].

Concernant la deuxième méthode, l'écoulement dans la zone proche-paroi est résolu à partir d'un modèle bas-Reynolds s'appuyant sur un maillage raffiné. Le raccord entre le calcul unidimensionnel et la zone «libre» peut se faire par continuité des grandeurs calculées ou de leur flux. Un descriptif plus précis de cette méthode pourra être trouvé dans [35].

2.3 Applications : code de calcul 1D

Pour déterminer les profils de vitesse, énergie cinétique turbulente et dissipation visqueuse à l'établissement dans des géométries simples, nous pouvons employer un code de calcul 1D. Les configurations visées sont des écoulements suivant une unique direction (suivant l'axe z) et pour lesquelles les profils à l'établissement peuvent être décrits sur l'axe transverse à la direction de l'écoulement (noté y). Il s'agit, entre autres, des écoulements dans des canaux bidimensionnels plans et dans des tubes à sections circulaire et annulaire. Nous n'exposerons dans cette section que le traitement numérique relatif à un écoulement dans un canal plan. L'extension à des géométries axisymétriques n'est pas ici présentée.

Nous ne résolvons que les équations différentielles correspondant à un écoulement établi. Toutes les dérivées spatiales suivant la direction z sont alors nulles, excepté le gradient de pression, qui constitue le terme source dans l'équation bilan de quantité de mouvement. Ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = 0, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \right] + \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}_p = 0, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \right] + C_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} - C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} - \bar{E}_p = 0. \quad (2.107)$$

Nous allons à présent décrire la discrétisation de ces équations et la méthode numérique employée. Par la suite, nous noterons le vecteur des variables thermohydrauliques par :

$$W = (\bar{u}_z), \quad (2.108)$$

et celui des variables turbulentes par :

$$W_t = \begin{pmatrix} \bar{k} \\ \bar{\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (2.109)$$

Les vecteurs des flux diffusifs seront quant à eux notés :

$$F_D(W) = \left((\nu + \nu_t) \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right), \quad F_D(W_t) = \begin{pmatrix} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial y} \\ \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial y} \end{pmatrix}. \quad (2.110)$$

Enfin les vecteurs des termes de production et de dissipation sont décrits par

$$S_0(W) = \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} \right), \quad (2.111)$$

et par

$$S_P(W_t) = \begin{pmatrix} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \\ C_{\varepsilon_1} f_1 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad S_\varepsilon(W_t) = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_p \\ C_{\varepsilon_2} f_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} + \bar{E}_p \end{pmatrix}. \quad (2.112)$$

A présent, le système composé par les équations (2.105) à (2.107) est réduit aux équations différentielles :

$$\frac{\partial}{\partial y} F_D(W) + S_0(W) = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} F_D(W_t) + S_P(W_t) - S_\varepsilon(W_t) = 0. \quad (2.113)$$

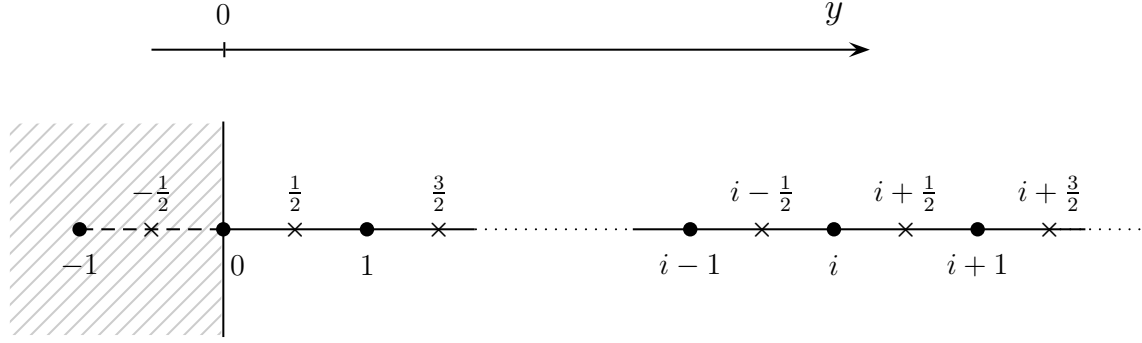


FIG. 2.4: Maillage utilisé pour la résolution des variables thermohydrauliques et turbulentes. Les variables thermohydrauliques sont calculées sur le maillage principal, coïncidant avec les noeuds repérés par le symbole •. Les variables turbulentes sont calculés sur le maillage décalé constitué des points signifiés par ×. Le solide est représenté par le domaine gris hachuré.

2.3.1 Principe de l'avancement en temps et méthode numérique

Méthode numérique utilisée

Pour résoudre numériquement les équations décrites par (2.113), il est plus aisé d'opérer par une marche en temps. Dans cette situation, la variable temps ne représente pas le temps physique mais un temps d'avancement numérique :

$$\frac{\partial}{\partial y} F_D(W) + S_0(W) = \frac{dW}{dt} , \quad \frac{\partial}{\partial y} F_D(W_t) + S_P(W_t) - S_\varepsilon(W_t) = \frac{dW_t}{dt} . \quad (2.114)$$

La solution qui vérifie

$$\frac{dW}{dt} \longrightarrow 0 , \quad \frac{dW_t}{dt} \longrightarrow 0 . \quad (2.115)$$

est alors recherchée.

La figure 2.4 décrit le maillage employé pour la discrétisation spatiale des vecteurs W et W_t . Par souci de simplicité, nous avons représenté le cas d'un maillage régulier, mais les développements qui vont suivre sont aussi adaptés au cas d'un maillage irrégulier. Le vecteur des variables thermohydrauliques W est discrétisé suivant un maillage principal, repéré par les symboles •. Ce maillage comporte un noeud coïncidant avec l'interface fluide-solide. Puis le vecteur des variables turbulentes est discrétisé suivant un maillage décalé, décrit par les symboles ×. Les indices i permettront d'identifier spatialement la valeur des vecteurs discrétisés aux noeuds, alors que les exposants n serviront à décrire temporellement (au sens numérique) ces vecteurs. Par la suite, nous noterons Δt le pas de temps séparant deux instants n et $n + 1$. Nous nous appuyons sur la méthode des volumes finies pour discrétiser les équations bilans. Les termes diffusifs sont implicites et les quantités turbulentes sont calculées dans une boucle interne au calcul de la vitesse (voir Fig. 2.5). Pour l'équation décrivant l'évolution du vecteur thermohydraulique, la discrétisation s'écrit :

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} = \frac{F_{D_{i+1/2}}^{n+1} - F_{D_{i-1/2}}^{n+1}}{y_{i+1/2} - y_{i-1/2}} + S_{0_i}^n . \quad (2.116)$$

A titre d'exemple, l'expression du flux diffusif de la vitesse au point $i + 1/2$ et à l'instant $n + 1$ est précisée :

$$F_{D_{i+1/2}}^{n+1}(\bar{u}_z) = (\nu + \nu_{t_{i+1/2}}^{q+1}) \frac{\bar{u}_{z_{i+1}}^{n+1} - \bar{u}_{z_i}^{n+1}}{y_{i+1} - y_i}. \quad (2.117)$$

Pour la discrétisation de l'équation de W_t , nous choisissons d'impliciter la partie dissipative des termes sources et de conserver la formulation explicite de la partie productive :

$$\frac{W_{t_{i+1/2}}^{n+1} - W_{t_{i+1/2}}^n}{\Delta t} = \frac{F_{D_{i+1}}^{n+1} - F_{D_i}^{n+1}}{y_{i+1} - y_i} + S_{P_{i+1/2}}^n - S_{\varepsilon_{i+1/2}}^{n+1}. \quad (2.118)$$

L'expression du flux diffusif de l'énergie cinétique turbulente au point i et à l'instant $n + 1$ est donnée par :

$$F_{D_i}^{n+1}(\bar{k}) = (\nu + \frac{\nu_{t_i}^{q+1}}{\sigma_k}) \frac{\bar{k}_{i+1/2}^{n+1} - \bar{k}_{i-1/2}^{n+1}}{y_{i+1/2} - y_{i-1/2}}. \quad (2.119)$$

Une expression similaire peut être écrite pour le flux diffusif de la dissipation visqueuse.

Nous rappelons que la viscosité turbulente, intervenant dans l'expression des flux diffusifs, est définie en fonction de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation visqueuse. Ces deux grandeurs sont discrétisées sur le maillage décalé, de telle façon que nous avons :

- pour la modélisation de type $\bar{k} - l$:

$$\nu_{t_{i+1/2}}^q = C_\mu \left(\bar{k}_{i+1/2}^q \right)^{\frac{1}{2}} l_{i+1/2}^q, \quad (2.120)$$

- et pour la modélisation de type $\bar{k} - \varepsilon$ bas-Reynolds :

$$\nu_{t_{i+1/2}}^{q+1} = C_\mu f_{\mu_{i+1/2}}^q \frac{\left(\bar{k}_{i+1/2}^q \right)^2}{\bar{\varepsilon}_{i+1/2}^q}. \quad (2.121)$$

Pour définir la viscosité turbulente sur le maillage principal, nous utilisons une moyenne harmonique :

$$\frac{1}{\nu_{t_i}^q} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_{t_{i+1/2}}^q} + \frac{1}{\nu_{t_{i-1/2}}^q} \right). \quad (2.122)$$

Traitement des conditions aux limites

Les conditions aux limites s'immiscent dans l'expression des flux diffusifs pour les points-frontières du domaine de calcul. Deux catégories de conditions limites ont été implantées numériquement. La condition limite de type Dirichlet stipule que la valeur à la frontière d'une grandeur est imposée, alors que la condition limite de type Neumann définit la valeur du flux d'une variable à la frontière. Le traitement numérique de ces deux conditions limites diffèrent suivant le maillage sur lequel elles s'appuient :

- pour la condition limite de type Dirichlet sur le maillage principal, la résolution de l'équation discrétisée ne s'effectue que sur les noeuds d'indice $i \geq 1$. Par exemple, pour la vitesse, nous pouvons écrire l'expression du flux diffusif au noeud $1/2$:

$$F_{D_{1/2}}^n(\bar{u}_z) = (\nu + \nu_{t_{1/2}}^q) \frac{\bar{u}_{z_1}^n - \bar{u}_{z_0}}{y_1 - y_0}, \quad (2.123)$$

où \bar{u}_{z_0} correspond à la valeur de la vitesse que nous souhaitons imposer à la paroi.

- Pour la condition limite de type Dirichlet sur le maillage décalé, la résolution de l'équation discrétisée ne s'effectue que sur les noeuds d'indice $i \geq 0$. Si nous souhaitons par exemple imposer la valeur \bar{k}_0 au noeud 0, alors il faut pour cela extrapoler une valeur de \bar{k} sur un point de maillage extérieur au domaine fluide. Nous choisissons d'utiliser une extrapolation linéaire :

$$\bar{k}_{-1/2}^n = 2\bar{k}_0 - \bar{k}_{1/2}^n. \quad (2.124)$$

L'expression du flux diffusif de l'énergie cinétique turbulente au noeud 0 est ensuite précisée :

$$F_{D_0}^n(\bar{k}) = (\nu + \nu_{t_0}^q) \frac{\bar{k}_{1/2}^n - \bar{k}_{-1/2}^n}{2(y_{1/2} - y_0)} = (\nu + \nu_{t_0}^q) \frac{\bar{k}_0}{y_{1/2} - y_0}. \quad (2.125)$$

- Pour la condition limite de type Neumann sur le maillage principal, la résolution de l'équation discrétisée s'effectue sur les noeuds d'indice $i \geq 0$. Le flux diffusif associé à ce maillage n'est pas intrinsèquement défini sur la frontière. Nous exprimons alors le flux au noeud $-1/2$ en fonction du flux imposé F_{D_0} et du flux au noeud $1/2$:

$$F_{D_{-1/2}}^n(\bar{u}_z) = 2F_{D_0}(\bar{u}_z) - F_{D_{1/2}}^n(\bar{u}_z). \quad (2.126)$$

- Pour la condition limite de type Neumann sur le maillage décalé, la résolution de l'équation discrétisée s'effectue sur les noeuds d'indice $i \geq 1/2$. Nous utilisons directement dans l'équation discrétisée (2.119) la valeur du flux à la frontière.

Termes sources des variables thermohydrauliques

En ce qui concerne l'équation de quantité de mouvement (2.105), la consigne que nous souhaitons imposer est une vitesse débitante U . Pour cela, il faut que le terme source de cette équation soit en conformité avec cette consigne. A l'établissement, le profil de pression à travers une section est auto-semblable. Sa valeur locale est déterminée en remarquant qu'elle est égale à sa valeur moyenne spatialement. En se reportant à la forme homogénéisée de l'équation bilan de quantité de mouvement (Eq. (1.136)), il vient [39] :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f}{\partial z} = -F_{\phi_z} = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{2D_H}. \quad (2.127)$$

Des corrélations existent dans la littérature, qui permettent de calculer, suivant la géométrie considérée, le coefficient de frottement à partir du nombre de Reynolds de l'écoulement. Ce résultat n'étant qu'une approximation, le terme source permet seulement d'approcher la vitesse de consigne. Nous choisissons alors de corriger le débit à chaque pas de temps :

$$\bar{u}_z^{n+1/2} = \frac{U}{\langle \bar{u}_z^n \rangle_f} \bar{u}_z^n. \quad (2.128)$$

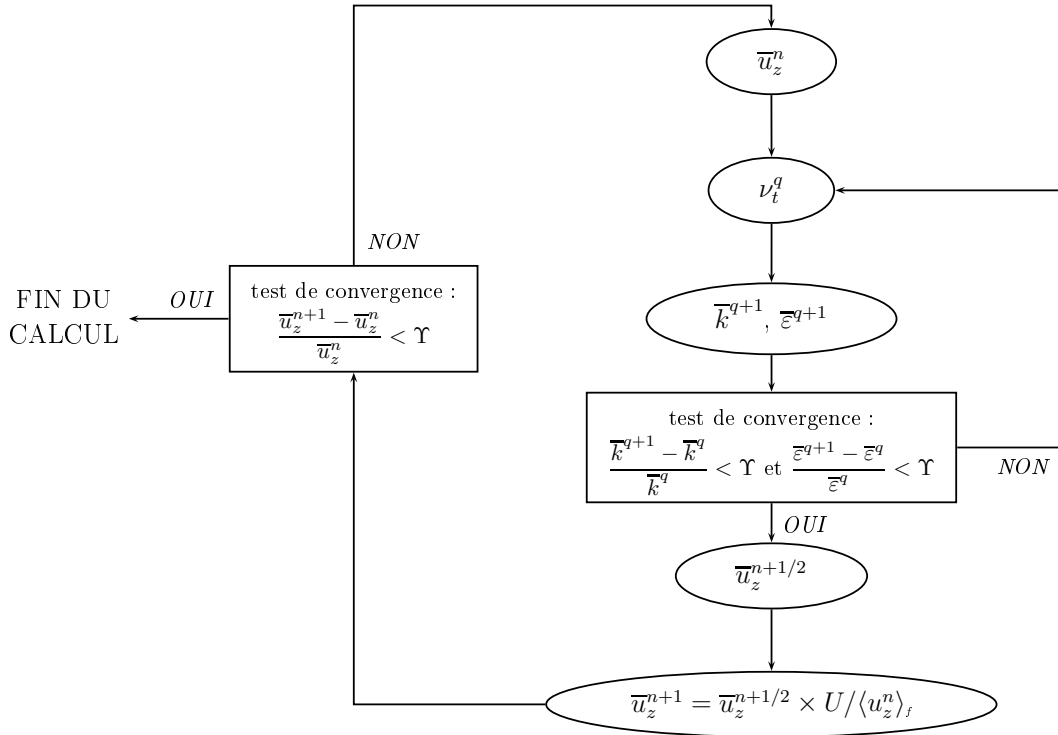


FIG. 2.5: Algorithme de calcul du code 1D.

L'algorithme de calcul employé dans le code de calcul unidimensionnel est résumé par la figure 2.5. Pour chaque itération sur le calcul du profil de vitesse, les variables turbulentes sont calculées par sous itérations (repérées par l'exposant q sur la figure) jusqu'à vérifier le test de convergence sur les résidus. Le niveau du profil de vitesse est ensuite ajusté au niveau de consigne. Un nouveau test de convergence sur le profil de vitesse intervient à cette étape. Si ce test est positif le calcul est fini, sinon une nouvelle itération est effectuée.

Maillage

Pour réaliser les simulations, nous nous appuyons sur un maillage gaussien, composé des points y_i pour i compris entre 0 et N_m . Pour obtenir cette grille de calcul, nous utilisons dans un premier temps un maillage régulier comportant N_m noeuds, compris entre les bornes $y_{reg,0} = -1$ et $y_{reg,N_m} = 1$. Puis, nous déduisons la longueur $(\Delta y)_i$ de la maille comprise entre les noeuds y_i et y_{i+1} en projetant le point $(y_{reg,i} + y_{reg,i+1})/2$ sur une fonction gaussienne. L'expression de cette fonction est donnée par :

$$f_{gauss}(y_{reg}) = \frac{1}{(2\pi\varsigma)^{1/2}} \exp\left(-\frac{y_{reg}^2}{2\varsigma^2}\right), \quad (2.129)$$

où ς représente la variance de la fonction. Le paramètre ς sera aussi appelé distorsion du maillage. La figure 2.6 résume la procédure employée pour déduire le maillage gaussien d'un maillage régulier.

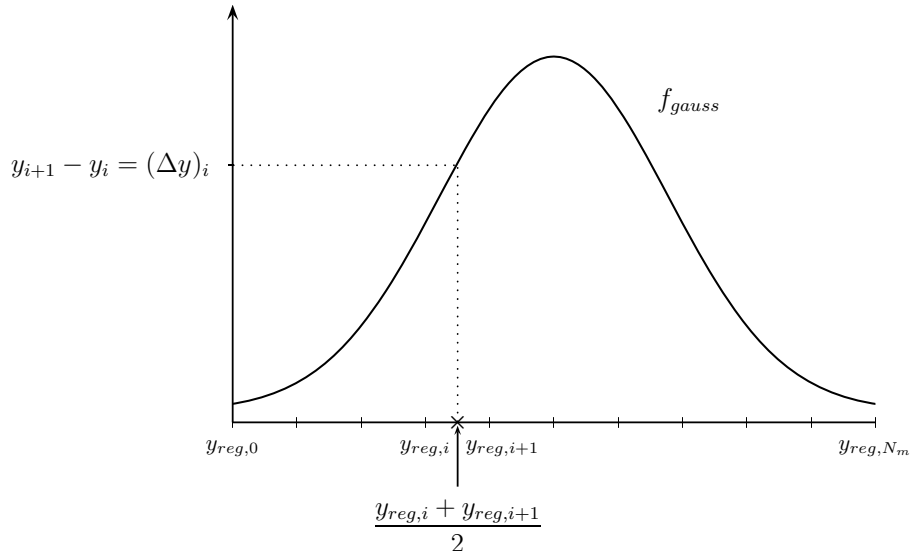


FIG. 2.6: Procédure permettant de déduire un maillage gaussien à partir d'un maillage régulier.

2.3.2 Validation pour un écoulement en canal plan

Comte-Bellot [24] a réalisé des mesures sur un écoulement en tunnel rectangulaire (voir figure 2.7). Le rapport entre largeur et épaisseur du tunnel est égal à 13, afin d'approcher au mieux l'écoulement bidimensionnel. L'écoulement d'air est obtenu grâce à une soufflerie et les mesures sont effectuées à l'aide de tubes de Pitot et de sondes à fil chaud. Les mesures représentent les profils de vitesse dans différentes sections de l'écoulement, ainsi que l'évolution des contraintes de Reynolds dans la largeur du canal. Trois nombres de Reynolds ont été étudiés : $Re = 2.28 \times 10^5$, 4.8×10^5 , 9.2×10^5 , où

$$Re = \frac{U \times 2e}{\nu} = \frac{U D_H}{\nu}, \quad (2.130)$$

U est la vitesse débitante de l'écoulement, e représente la largeur du canal plan et

$$D_H = 2e \quad (2.131)$$

constitue le diamètre hydraulique du canal plan.

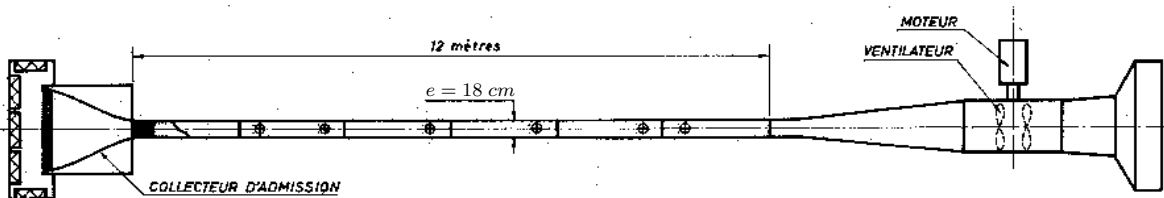


FIG. 2.7: Configuration de l'expérience de Comte-Bellot d'après [24].

Les profils obtenus dans la section $z/D_H = 59$ sont considérés comme représentatifs de l'établissement. La validation portera sur les profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente (à l'établissement) pour un nombre de Reynolds égal à 4.8×10^5 . Les valeurs de la

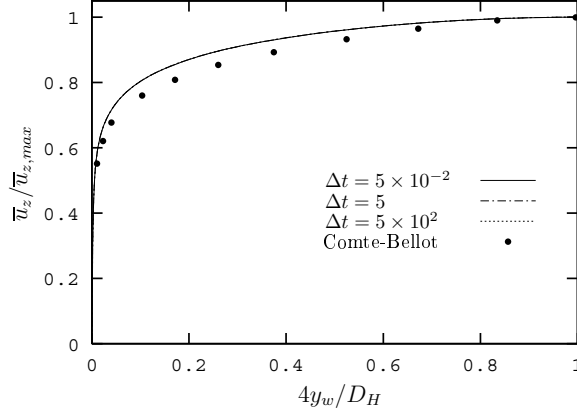


FIG. 2.8: Validation du modèle $\bar{k} - l$ pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse au choix du pas de temps Δt . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

demi-largeur du canal et de la viscosité de l'air correspondant à la configuration de Comte-Bellot sont utilisées comme données des simulations :

$$\nu = 1.565 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \quad (2.132)$$

$$D_H = 0.36 \text{ m}. \quad (2.133)$$

Nous précisons que, dans ce dispositif expérimental, la vitesse de frottement est déduite du gradient de pression mesuré dans la section $z/D_H = 59$. Différentes corrections sont effectuées pour tenir compte d'un effet de convergence dû à l'épaississement des couches limites relatives aux parois supérieure et inférieure, ainsi que des erreurs de mesures ([24], p. 29-30).

Pour valider plus finement les profils de vitesse dans la couche limite, suivant les différents modèles employés, nos résultats de simulation sont confrontés à la loi de Reichardt (2.71). De plus, la sensibilité des résultats au pas de temps, au nombre de noeuds du maillage et à la distorsion ς du maillage sera étudiée.

Validation du modèle $\bar{k} - l$

Pour tester la méthode numérique, le modèle $\bar{k} - l$ est dans un premier temps validé en reproduisant une décroissance de turbulence de grille. A présent, le cas de l'écoulement turbulent dans un canal plan bidimensionnel est considéré.

Le tableau 2.1 regroupe les paramètres des simulations numériques ainsi que deux résultats caractéristiques, à savoir la vitesse au centre du canal $\bar{u}_{z,max}$ et la vitesse de frottement u_f . Ces deux résultats sont essentiels pour comparer les profils obtenus à partir des simulations et les profils expérimentaux.

Tout d'abord, la figure 2.8 montre que le profil de vitesse n'est pas sensible au pas de temps utilisé. En effet, puisque aucun terme convectif n'est présent dans l'équation (2.105) et que nous recherchons un profil à l'établissement, le pas de temps ne doit avoir aucune incidence sur le résultat, sous réserve de contraintes de stabilité⁹.

⁹Ces contraintes ne seront pas ici explicitées.

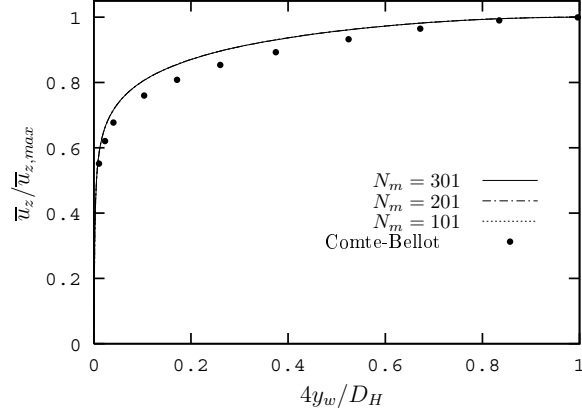


FIG. 2.9: Validation du modèle $\bar{k} - l$ pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse au nombre d'éléments N_m du maillage, sans modifier sa distorsion ($\varsigma = 0.03$). Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

| Δt | N_m | ς | $\bar{u}_{z,max}$ | u_f | Δy^+ |
|--------------------|-------|-------------|-------------------|--------|--------------|
| 5×10^{-2} | 301 | 0.03 | 22.596 | 0.8692 | 0.92 |
| 5 | 301 | 0.03 | 22.596 | 0.8691 | 0.92 |
| 5×10^2 | 301 | 0.03 | 22.596 | 0.8691 | 0.92 |
| 5×10^{-2} | 201 | 0.03 | 22.596 | 0.8695 | 1.40 |
| 5×10^{-2} | 101 | 0.03 | 22.599 | 0.8710 | 2.91 |
| 5×10^{-2} | 301 | 0.04 | 22.598 | 0.8677 | 4.98 |
| 5×10^{-2} | 301 | 0.048 | 22.567 | 0.8330 | 9.29 |

TAB. 2.1: Validation du modèle $\bar{k} - l$ pour $Re = 4.8 \times 10^5$: description des simulations effectuées pour un écoulement en canal plan.

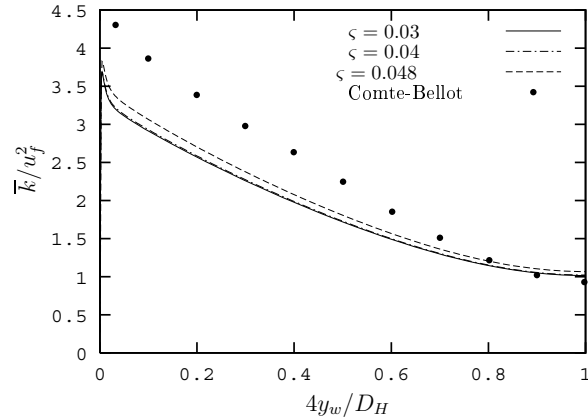


FIG. 2.11: Validation du modèle $\bar{k} - l$ pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil d'énergie cinétique turbulente à la distorsion ς du maillage, en conservant le même nombre de noeuds ($N_m = 301$). Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

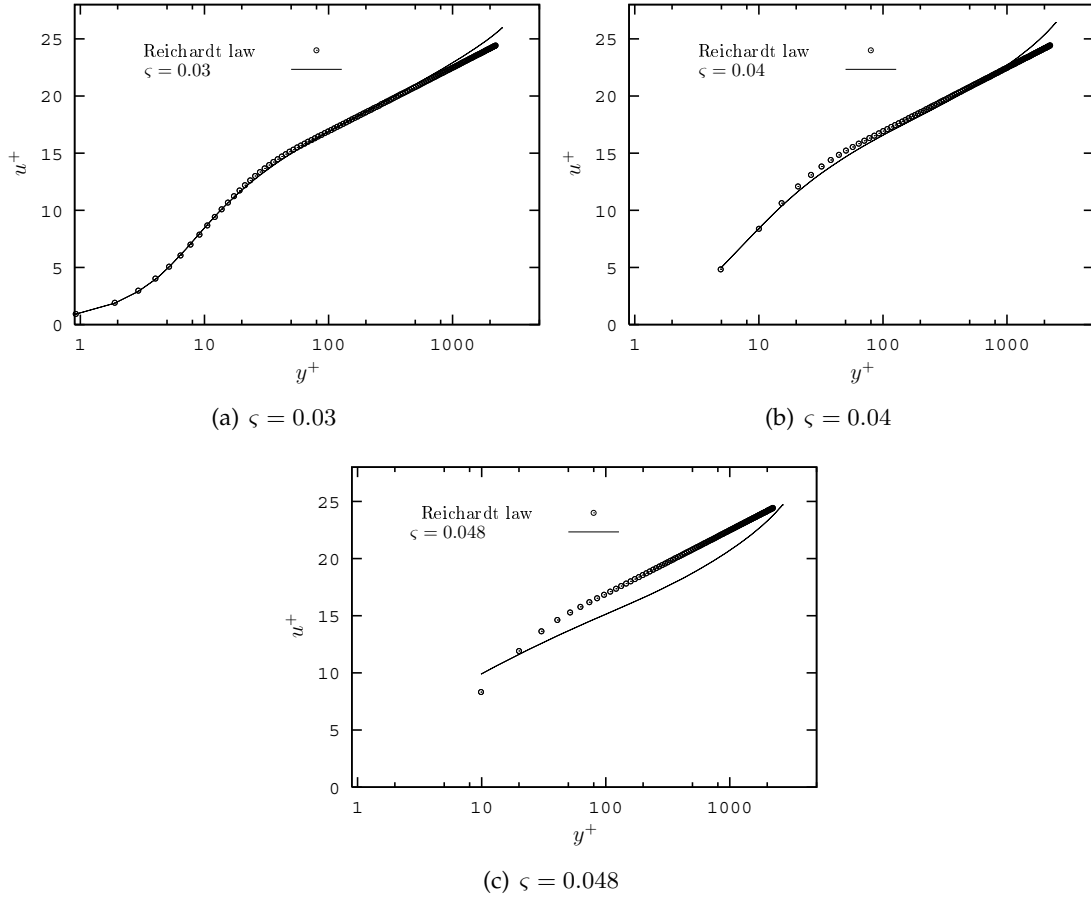


FIG. 2.10: Validation du modèle $\bar{k} - l$ pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse à la distorsion ς du maillage, en conservant le même nombre de noeuds ($N_m = 301$). Comparaison avec la loi de Reichardt [59].

Il a précédemment été souligné que le maillage devait être suffisamment raffiné dans les zones proche-paroi. Au moins un noeud du maillage doit être présent dans la sous-couche visqueuse. La distance normalisée à la paroi, correspondant au premier noeud du maillage, est calculée *a posteriori* en utilisant la valeur de la vitesse de frottement donnée par le code de calcul :

$$\Delta y^+ = (\Delta y)_0 u_f / \nu, \quad (2.134)$$

où $(\Delta y)_0$ est la longueur de la maille juxtaposant la paroi. Cette distance normalisée est reportée dans le tableau 2.1. Ainsi, en diminuant le nombre d'éléments du maillage de 301 à 101, sans modifier sa distorsion, le paramètre Δy^+ varie mais reste toujours inférieur à la valeur 5 caractérisant la limite supérieure de la sous-couche visqueuse. La figure 2.9 montre que les profils demeurent quasiment identiques lorsque le nombre d'éléments du maillage diminue. Par contre, si la distorsion du maillage est modifiée, en conservant constant le nombre d'éléments, la présence d'un noeud dans la sous-couche visqueuse n'est plus garantie. La comparaison avec la loi de Reichardt montre que le profil de vitesse commence à se déformer par rapport au profil de référence pour $\Delta y^+ = 4.98$. Il devient sensiblement déformé pour $\Delta y^+ = 9.29$ (Fig.2.10). Au delà de la déformation du profil, la valeur calculée

de la vitesse de frottement est sensiblement modifiée pour $\Delta y^+ = 9.29$ (environ 5 % d'écart avec la valeur obtenue pour $\Delta y^+ = 0.92$)

La sensibilité du profil d'énergie cinétique turbulente (normé par le carré de la vitesse de frottement) par rapport à la distorsion du maillage (Fig. 2.11) est aussi étudiée. Une faible variation de ce profil est observée lorsque la distorsion du maillage est augmentée. La valeur au centre du canal est convenablement retrouvée par simulation. Par contre, le pic d'énergie cinétique turbulente près de la paroi est sous-estimé.

Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds

Le tableau 2.2 regroupe les différents paramètres et résultats caractérisant les simulations numériques étudiées. La figure 2.12 permet de vérifier à nouveau que le pas de temps (numérique) employé n'a pas d'incidence sur les résultats des simulations.

| Δt | N_m | ς | $\bar{u}_{z,max}$ | u_f | Δy^+ |
|--------------------|-------|-------------|-------------------|--------|--------------|
| 5×10^{-2} | 301 | 0.03 | 22.896 | 0.8582 | 0.90 |
| 5 | 301 | 0.03 | 22.896 | 0.8582 | 0.90 |
| 5×10^2 | 301 | 0.03 | 22.896 | 0.8582 | 0.90 |
| 5×10^{-2} | 201 | 0.03 | 22.900 | 0.8596 | 1.37 |
| 5×10^{-2} | 101 | 0.03 | 22.915 | 0.8675 | 2.87 |
| 5×10^{-2} | 301 | 0.04 | 22.915 | 0.8658 | 4.92 |
| 5×10^{-2} | 301 | 0.048 | 23.039 | 0.9315 | 9.88 |

TAB. 2.2: Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour $Re = 4.8 \times 10^5$: description des simulations effectuées pour un écoulement en canal plan.

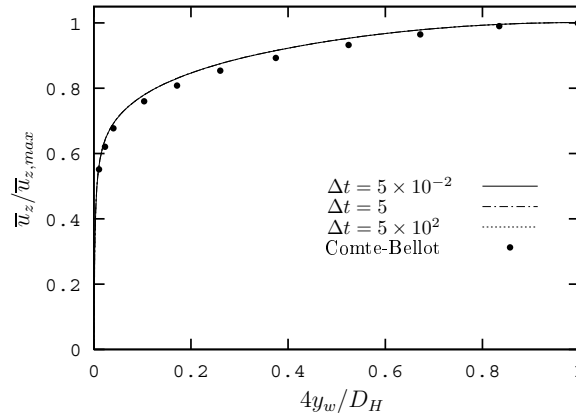


FIG. 2.12: Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse au pas de temps Δt . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

Puis, si le nombre d'éléments du maillage est diminué de 301 à 101 tout en conservant une distorsion ς égale à 0.03, il est constaté que les profils sont pratiquement insensibles à cette diminution (Fig. 2.13). En effet, les gradients dans la zone centrale du canal sont faibles

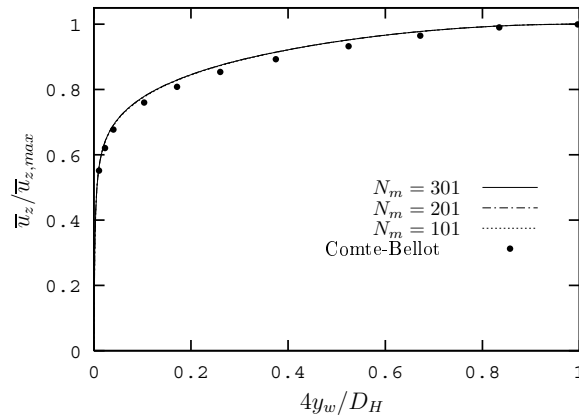


FIG. 2.13: Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse au nombre d'éléments N_m du maillage, sans modifier sa distorsion ($\zeta = 0.03$). Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

et il est donc possible de réduire sans conséquence le nombre d'éléments du maillage, sous la condition de conserver un noeud présent dans la sous-couche visqueuse. Cette affirmation peut être vérifiée grâce à la figure 2.14. En conservant un nombre élevé d'éléments, mais en diminuant le nombre de noeuds dans la sous-couche visqueuse (c'est à dire en augmentant la distorsion ζ), une déformation très nette du profil de vitesse est observée pour $\Delta y^+ > 5$. Cette déformation s'accompagne d'une variation sensible de la vitesse de frottement : pour $\Delta y^+ = 9.88$, la vitesse de frottement est environ 10 % plus élevée que celle obtenue pour $\Delta y^+ = 0.9$.

De plus, le profil d'énergie cinétique turbulente, normée par le carré de la vitesse de frottement, est très peu sensible à l'augmentation de la distorsion du maillage. Les valeurs simulées près de la paroi et au centre du canal sont convenablement prédites.

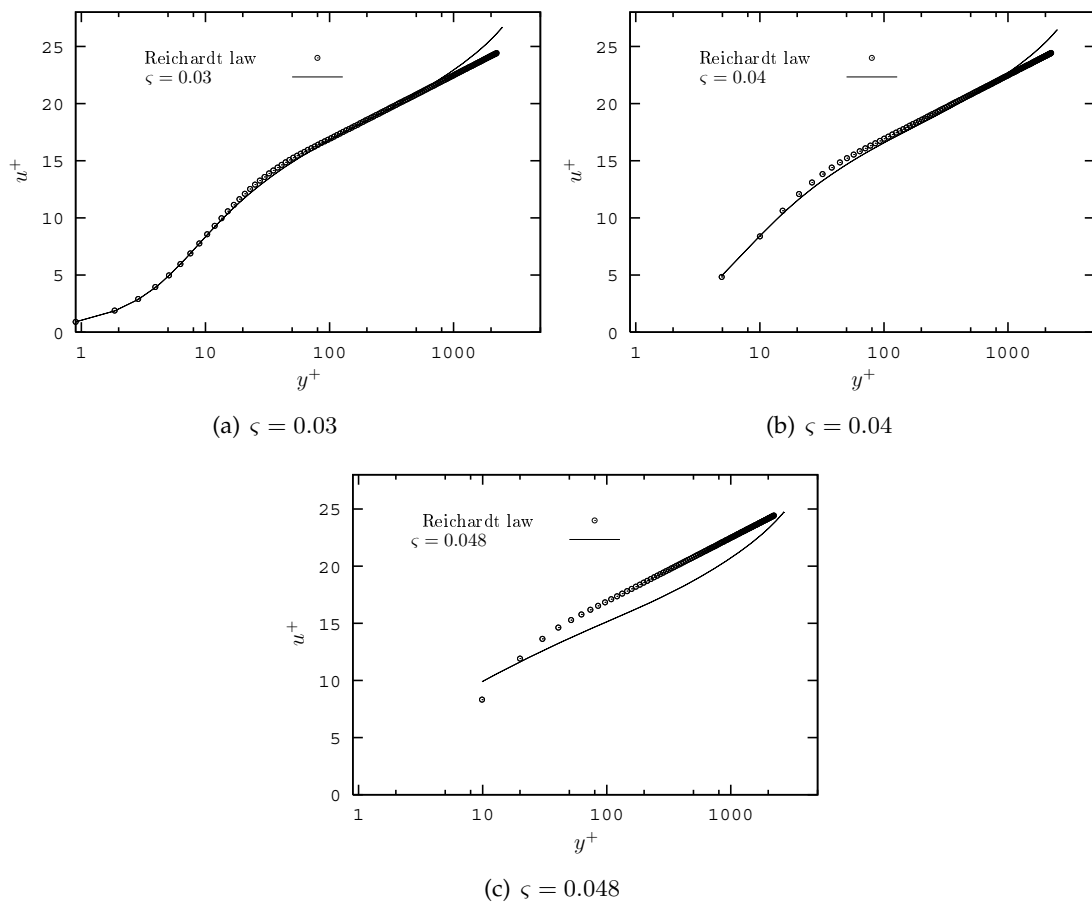


FIG. 2.14: Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil de vitesse à la distorsion ζ du maillage, en conservant le même nombre de noeuds ($N_m = 301$). Comparaison avec la loi de Reichardt [59].

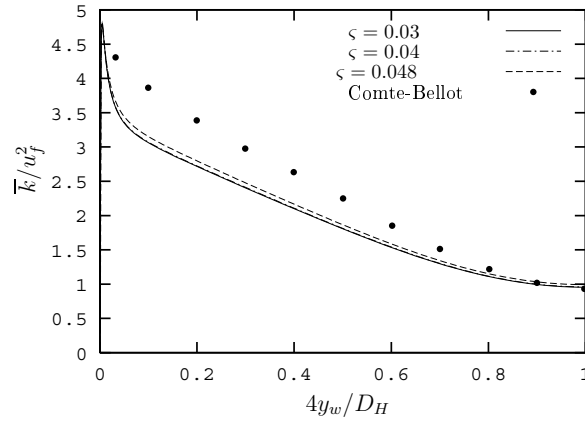


FIG. 2.15: Validation du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour $Re = 4.8 \times 10^5$: sensibilité du profil d'énergie cinétique turbulente à la distorsion ζ du maillage, en conservant le même nombre de noeuds ($N_m = 301$). Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].

Comparaison des modèles et conclusion

Les profils de vitesse obtenus grâce aux modèles $\bar{k} - l$ et $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien pour un nombre de Reynolds égal à 4.8×10^5 sont représentés sur la figure 2.16. Dans la couche limite, la différence entre les résultats est extrêmement faible. Par contre, cette différence est significative dans la zone de plus forte courbure du profil de vitesse. Elle provient des modélisations différentes de la viscosité turbulente. Nous reviendrons plus amplement sur la comparaison entre ces deux modèles dans le chapitre 3. Toutefois, nous soulignons que pour des écoulements **établis** dans une configuration simple (telle que celle ici étudiée), l'utilisation d'un modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds permet d'obtenir des résultats plus précis qu'un modèle $\bar{k} - l$ sous la condition que le maillage soit constitué d'un nombre suffisant d'éléments (dans la zone proche-paroi).

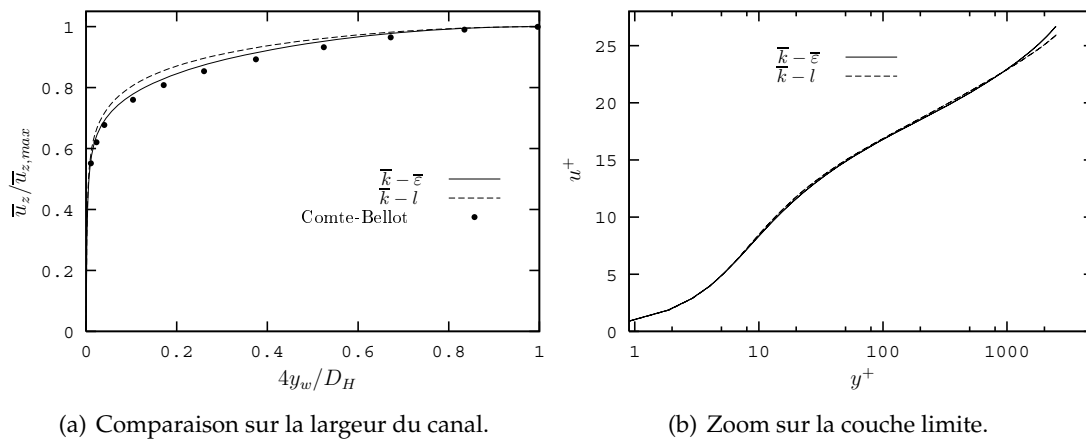


FIG. 2.16: Comparaison des profils de vitesse obtenus grâce au modèle $\bar{k} - l$ et au modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien. $Re = 4.8 \times 10^5$.

2.4 Application : code de calcul 2D-3D

L'avantage d'un code de calcul 1D est qu'il peut fournir des résultats très précis, notamment en utilisant des maillages extrêmement raffinés, pour des temps de calcul réduits. Par contre, il ne peut être employé que pour obtenir des profils correspondant à un écoulement établi et pour des géométries simples. Or dans le cadre de cette étude, les mécanismes d'établissement au sens macroscopique de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente vont être étudiés. Pour cela, le code de calcul CAST3M, pouvant résoudre des écoulements bidimensionnels et tridimensionnels, sera utilisé. Parallèlement, le code MELODIF, pouvant résoudre des écoulements bidimensionnels, sera aussi employé. Pour rester concis, seule la validation de CAST3M sera ici présentée.

2.4.1 Validation du code CAST3M pour un écoulement turbulent en canal plan

Dans l'étude de Comte-Bellot [24], l'évolution spatiale des quantités turbulentes moyennées spatialement n'a apparemment pas été étudiée. Par conséquent, la valeur de l'énergie cinétique turbulente moyenne à l'entrée du canal n'est pas précisée. Cette valeur est essentielle pour reproduire fidèlement l'expérience de Comte-Bellot car elle influe très certainement sur les profils de l'écoulement transitoire. Seuls les profils à l'établissement de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente vont être étudiés, en se limitant au nombre de Reynolds $Re = 4.8 \times 10^5$.

La configuration géométrique, ainsi que le maillage sur lequel s'appuie le calcul, sont décrits par la figure 2.17. Par souci de gain de temps de calcul, et en s'appuyant sur la condition de symétrie au centre du canal, seule une moitié du canal est simulée. Le domaine de calcul est de longueur L et de largeur $e/2$ où $e = 0.18 \text{ m}$. Il est rappelé que le diamètre hydraulique du canal est donné par $D_H = 2e$. Nous choisissons d'imposer pour longueur du domaine :

$$L = 55D_H . \quad (2.135)$$

Le maillage est constitué de N_h nœuds répartis régulièrement dans le sens de la longueur et de $(N_v + 1)$ nœuds, répartis suivant une progression géométrique, dans le sens de la largeur. Il est rappelé que le domaine de calcul n'est pas juxtaposé à la paroi, mais s'arrête à une distance y_p de l'interface fluide-solide. En faisant varier cette distance y_p , la largeur du domaine de calcul évolue aussi (Fig. 2.17). Pour conserver le même allongement maximum des mailles (*ie.* le rapport entre la longueur et la largeur des mailles pour un maillage structuré) lorsque le paramètre y_p varie, la progression géométrique décrivant le maillage transverse est ajustée. A l'entrée du domaine, des profils plats sont imposés que ce soit pour la vitesse, l'énergie cinétique turbulente ou la dissipation visqueuse. Afin de pouvoir calculer des moyennes spatiales sur la largeur du canal, comme le débit par exemple, ces profils sont alors complétés par des fonctions de paroi dans la zone non résolue. Nous souhaitons étudier un écoulement caractérisé par $Re = 4.8 \times 10^5$. Cependant, même en ajustant le niveau de vitesse initiale, les variations du paramètre y_p ne permettent pas de garantir un nombre de Reynolds constant¹⁰. Afin d'être cohérent dans la présentation des résultats, les résultats relatifs à la vitesse sont rapportés à la vitesse débitante.

Les paramètres influant sur la qualité des résultats numériques sont plus nombreux que dans le cas du code de calcul 1D. Ainsi, l'influence du paramètre y_p sera quantifiée. Nous nous intéresserons aussi à l'influence du nombre de CFL (Courant Friedrich Lewy)

$$CFL = \frac{U \Delta t}{\Delta z} , \quad (2.136)$$

où Δt et Δz représentent respectivement le pas de temps de la simulation et la longueur caractéristique des mailles dans la direction de l'écoulement. Enfin, les conséquences d'une variation des nombres de noeuds N_v et N_h seront observées. L'allongement des mailles ne devant pas excéder 10, les nombres de mailles N_v et N_h sont d'une certaine façon liés. Les différents paramètres des simulations effectuées sont reportés dans le tableau 2.3. Les profils obtenus à partir de CAST3M seront confrontés aux résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24] ainsi qu'aux résultats du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien [22] (code 1D).

¹⁰Pour la totalité des simulations effectuées, les variations du nombre de Reynolds par rapport à la valeur de référence (4.8×10^5) n'excède pas 4%.

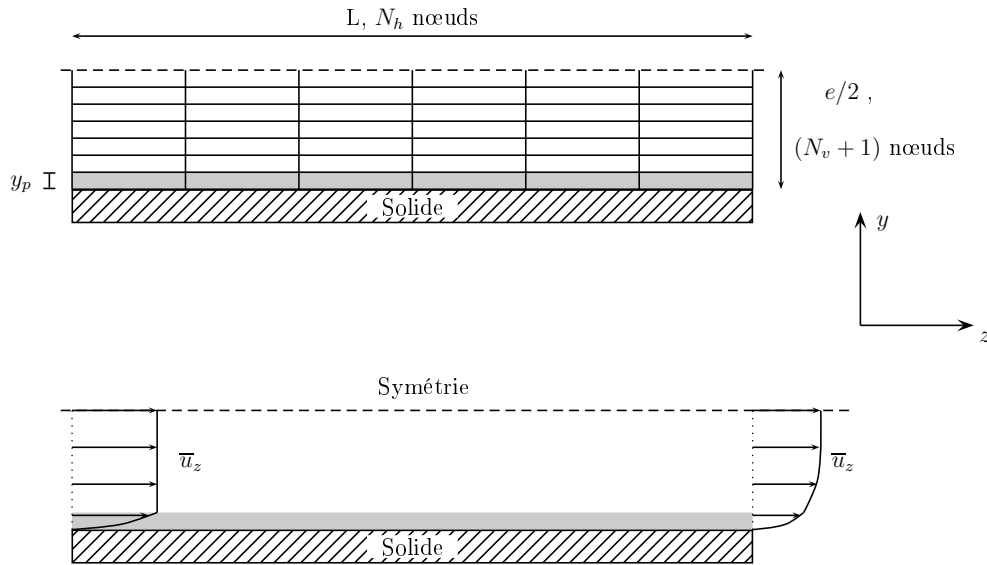


FIG. 2.17: Configuration géométrique et maillage correspondant aux simulations réalisées avec CAST3M.

Choix du y_p^+

La figure 2.18 permet de visualiser la précision des résultats obtenus pour différents valeurs du y_p^+ . Concernant les profils de vitesse, nous observons que les solutions ne se démarquent que très légèrement les unes des autres dans la zone de plus forte courbure du profil. Ainsi, pour la plus faible valeur de y_p^+ (environ 25), le profil de vitesse est détérioré dans la zone proche-paroi ($4y_w/D_H < 0.2$). Puis, plus la valeur de y_p^+ augmente, plus les résultats du calcul concordent avec les résultats du code 1D. Il apparaît grâce à la figure 2.18(b) que la valeur de raccord de l'énergie cinétique turbulente est souvent sous estimée par rapport aux résultats du modèle bas-Reynolds. Cette erreur est due à l'estimation trop approximative de \bar{k} dans la zone logarithmique de la couche limite. Il en découle une mauvaise estimation de la viscosité turbulente au raccord, ce qui explique alors le déficit de courbure dans la zone proche-paroi lorsque la valeur du y_p^+ diminue.

En choisissant un y_p^+ assez grand, le calcul gagne en précision et permet en général d'utiliser un maillage plus grossier. Le point y_p^+ devant rester dans la couche logarithmique, il est donc conseillé de privilégier des valeurs de y_p^+ comprises entre 100 et 200.

Influence du CFL

L'un des avantages du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ implicite est idéalement de pouvoir augmenter la valeur du pas du temps (et donc de diminuer théoriquement le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un calcul convergé). Le nombre de Courant, défini en (2.136), permet de contrôler la valeur du pas de temps choisi par rapport à l'écoulement étudié. En augmentant le nombre de Courant, les résultats perdent en précision et il faut donc trouver un compromis entre la précision désirée et le coût en temps de calcul. Différentes simulations sont réalisées en fixant à $2 \times 10^{-3} m$ la valeur du paramètre y_p^{11} . Nous faisons varier le nombre

¹¹Cette valeur de y_p correspond à différentes valeurs de y_p^+ car la vitesse de frottement à l'établissement diffère suivant les simulations (voir Fig. 2.20)

| N_v | N_h | Allong. max. | y_p | CFL | N_{it} | $\bar{u}_{z,max}/\langle\bar{u}\rangle_f$ | $u_f/\langle\bar{u}\rangle_f$ | y_p^+ |
|-------|-------|--------------|--------------------|-------|----------|---|-------------------------------|---------|
| 15 | 501 | 8.4 | 4×10^{-3} | 1.6 | 600 | 1.0971 | 4.08×10^{-2} | 205 |
| 15 | 501 | 8.4 | 2×10^{-3} | 1.6 | 600 | 1.0990 | 4.05×10^{-2} | 104 |
| 15 | 501 | 8.4 | 10^{-3} | 1.6 | 600 | 1.1004 | 4×10^{-2} | 52 |
| 15 | 501 | 8.4 | 5×10^{-5} | 1.6 | 600 | 1.1021 | 3.8×10^{-2} | 25 |
| 10 | 301 | 8.5 | 2×10^{-3} | 1.6 | 600 | 1.1024 | 4.01×10^{-2} | 104 |
| 5 | 151 | 7.8 | 2×10^{-3} | 1.6 | 600 | 1.1138 | 3.98×10^{-2} | 103 |
| 15 | 501 | 8.4 | 2×10^{-3} | 3.1 | 600 | 1.1019 | 3.97×10^{-2} | 103 |
| 15 | 501 | 8.4 | 2×10^{-3} | 9.3 | 600 | 1.1134 | 3.88×10^{-2} | 100 |
| 15 | 501 | 8.4 | 2×10^{-3} | 15.5 | 600 | 1.1213 | 3.8×10^{-2} | 98 |

TAB. 2.3: Tableau récapitulatif des différentes simulations réalisées pour la géométrie du canal plan avec le code de calcul CAST3M. $Re = 4.8 \times 10^5$. N_{it} désigne le nombre d'itérations du calcul.

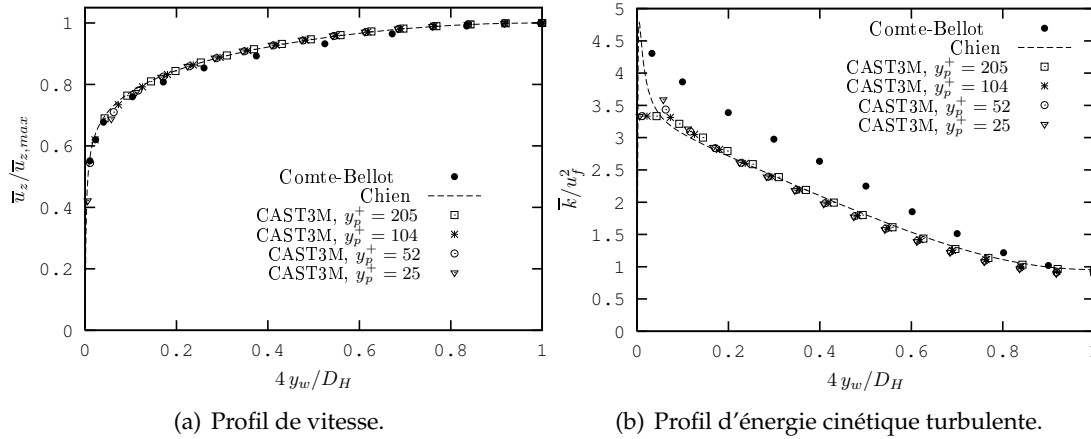


FIG. 2.18: Validation du code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec fonctions de paroi) pour un écoulement en canal plan ($Re = 4.8 \times 10^5$) : sensibilité des profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente à la valeur de y_p^+ . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24] et les simulations numériques obtenues grâce au modèle bas-Reynolds de Chien [22].

de Courant en changeant le pas de temps de la simulation. La figure 2.19 montrent que pour un nombre de Courant inférieur ou égal à 3.1, la perte de précision est relativement minime, alors que pour des CFL supérieures à 5, les résultats commencent à se détériorer sensiblement. La perte de précision est d'autant plus visible sur le profil de vitesse que sur le profil d'énergie cinétique turbulente pour un nombre de Courant égal à 15.5. Cette perte de précision est aussi liée à la valeur de la vitesse de frottement à l'établissement avec un écart de plus de 10 % entre le plus faible nombre de Courant et le plus fort. En outre, les évolutions longitudinales de la vitesse de frottement et de l'énergie cinétique turbulente moyennée sur la section du canal sont largement influencées par la valeur du nombre de Courant si celui ci est supérieur à 5.

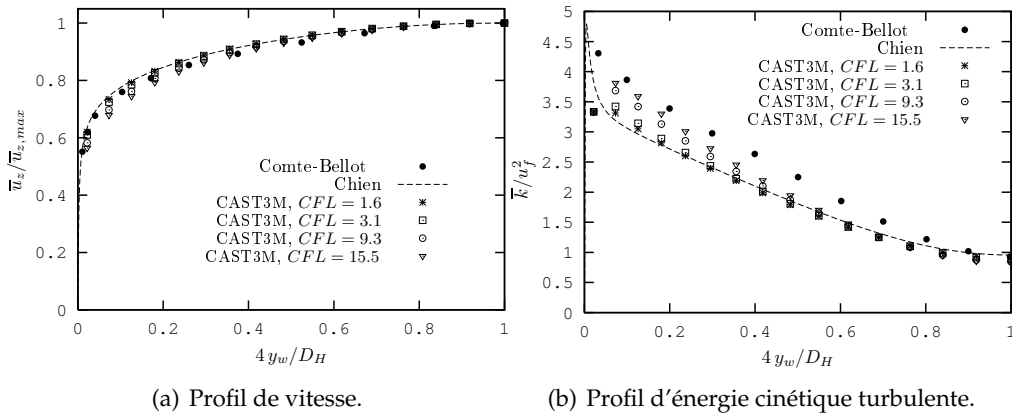


FIG. 2.19: Validation du code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec fonctions de paroi) pour un écoulement en canal plan ($Re = 4.8 \times 10^5$) : sensibilité des profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente au nombre de Courant CFL . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24] et les simulations numériques obtenues grâce au modèle bas-Reynolds de Chien [22].

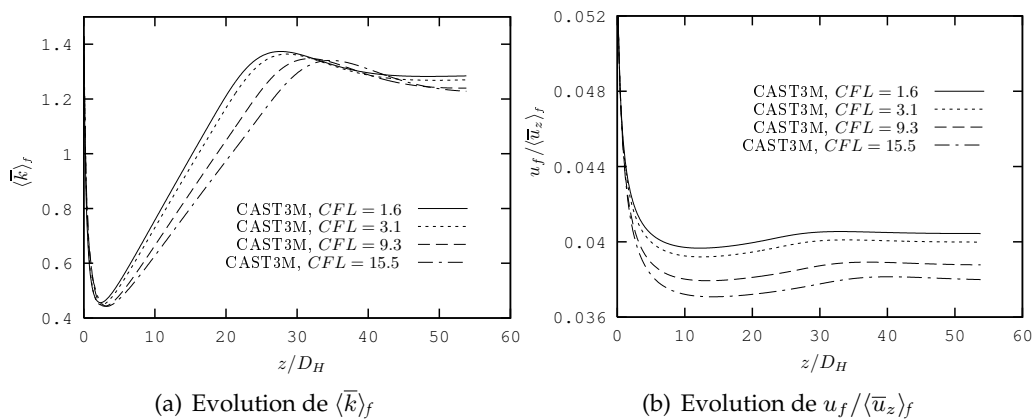


FIG. 2.20: Validation du code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec fonctions de paroi) pour un écoulement en canal plan ($Re = 4.8 \times 10^5$) : sensibilité de l'évolution longitudinale de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et de $u_f / \langle \bar{u}_z \rangle_f$ au nombre de Courant CFL .

Influence du nombre d'éléments du maillage

De la même façon que le nombre de Courant, le nombre d'éléments dont est constitué le maillage influe sur les résultats de la simulation numérique.

La figure 2.21 montre que l'utilisation de maillage relativement grossier permet d'obtenir des profils à l'établissement pertinents pour la vitesse. Quant à l'énergie cinétique turbulente, elle est de plus en plus surestimée par rapport aux résultats du modèle bas-Reynolds lorsque que le nombre d'éléments du maillage diminue. Cela résulte une nouvelle fois d'une mauvaise estimation de \bar{k} au raccord entre la zone proche-paroi et la zone libre. L'évolution longitudinale de l'énergie cinétique turbulent moyennée spatialement et de la vitesse de frottement (Fig. 2.22), montre que l'utilisation d'un maillage grossier entraîne des différences significatives par rapport au maillage le plus fin.

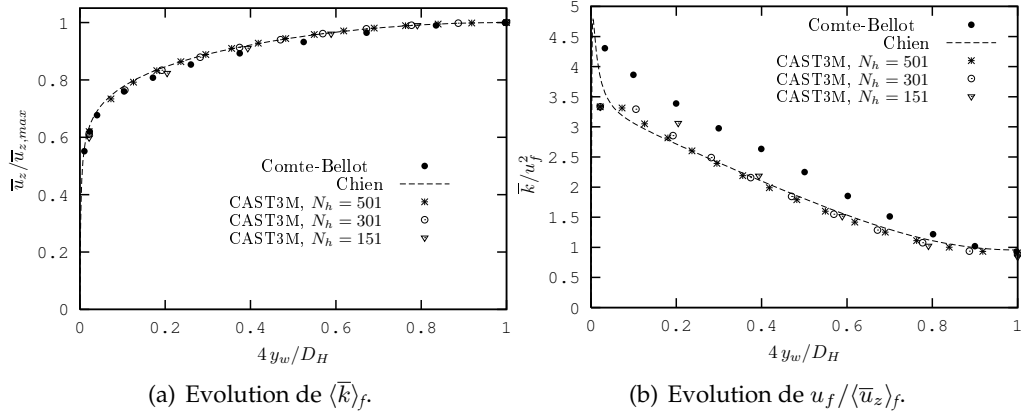


FIG. 2.21: Validation du code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec fonctions de paroi) pour un écoulement en canal plan ($Re = 4.8 \times 10^5$) : sensibilité des profils de vitesse et d'énergie cinétique turbulente au nombre d'éléments du maillage. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24] et les simulations numériques obtenues grâce au modèle bas-Reynolds de Chien [22].

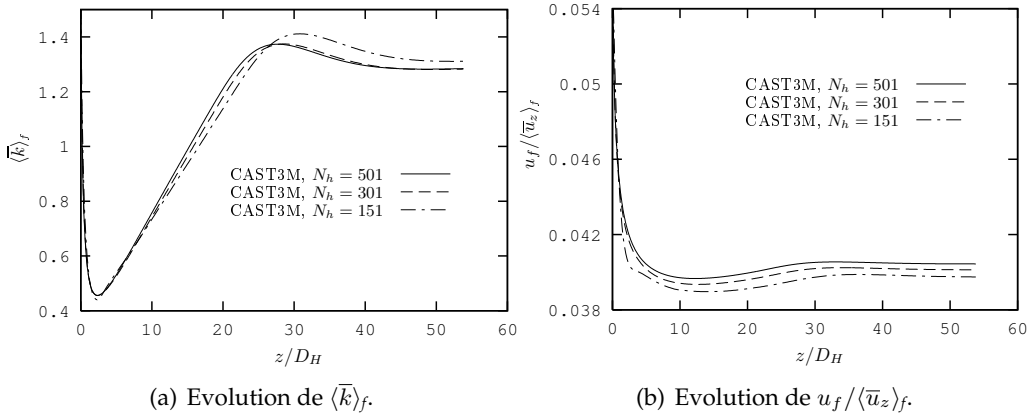


FIG. 2.22: Validation du code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec fonctions de paroi) pour un écoulement en canal plan ($Re = 4.8 \times 10^5$) : sensibilité de l'évolution longitudinale de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et de $u_f / \langle \bar{u}_z \rangle_f$ au nombre d'éléments du maillage.

2.4.2 Reconstruction des profils dans la zone proche-paroi

Pour étudier les mécanismes d'établissement au sens macroscopique de la vitesse et de l'énergie cinétique turbulente, l'évolution de la moyenne spatiale de l'énergie cinétique turbulente sera étudiée au chapitre 5. Or le code de calcul CAST3M ne résoud pas l'écoulement dans la zone proche-paroi. Les profils sont reconstruits dans cette zone à partir de fonctions algébriques. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Boyer et Laurence [59]. Le profil de vitesse est complété en se reportant à l'expression (2.71) décrivant la loi de Reichardt ainsi qu'en utilisant la vitesse de frottement fournie par le code de calcul. Deux autres fonctions sont utilisées [59] :

$$F_k(y^+) = \left[0.057 + 0.05 \sqrt{\frac{Re_\tau}{1600}} \right] y^{+2} \exp\left(-\frac{y^+}{7.3}\right) + \frac{4.6 \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{20}\right) \right] \left[1 - \exp\left(-\frac{y^{+2}}{9}\right) \right]}{4y^+ / Re_\tau + 1}, \quad (2.137)$$

$$F_\varepsilon(y^+) = \frac{1}{\kappa (y^{+4} + 15^4)^{1/4}}, \quad (2.138)$$

où

$$Re_\tau = \frac{D_H u_f}{4\nu}. \quad (2.139)$$

La fonction F_k dépend du nombre de Reynolds turbulent et donc du nombre de Reynolds de l'écoulement, alors que F_ε est indépendante de Re . Ces fonctions sont employées pour décrire les profils de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation visqueuse dans la zone proche-paroi :

$$\bar{k}(y^+) = u_f^2 F_k(y^+), \quad (2.140)$$

$$\bar{\varepsilon}(y^+) = \frac{u_f^4}{\nu} F_\varepsilon(y^+). \quad (2.141)$$

Les fonctions F_k et F_ε ont été déduites par optimisation, à partir des résultats de Simulations Numériques Directes de Mansour *et al.*, caractérisées par des nombres de Reynolds turbulents égaux à 180 et 395 [62]. Cela correspond à des nombres de Reynolds de l'écoulement respectivement proches de 1.2×10^4 et de 2.8×10^4 . La validité de ces fonctions doit être vérifiée pour des nombres de Reynolds plus élevés. Pour un écoulement établi, les profils obtenus à partir de ces fonctions sont confrontés aux profils fournis par le modèle bas-Reynolds de Chien (Fig. 2.23) pour deux nombres de Reynolds : $Re = 4.8 \times 10^4$ et $Re = 4.8 \times 10^5$.

Pour le nombre de Reynolds le plus élevé, une différence significative est constatée pour la valeur du pic d'énergie cinétique turbulente dans la couche limite. Cependant, lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'épaisseur de la couche limite diminue, ce qui implique que la zone spatiale où cette erreur est commise est de plus en plus réduite. Cette erreur va donc être étudiée en imposant $y_p^+ = 100$, puis en comparant le profil de \bar{k} fourni par la fonction (2.140) entre $y^+ = 0$ et $y^+ = y_p^+ = 100$ (avec la fonction (2.140)), au profil brut du modèle bas-Reynolds. Nous introduisons :

$$Err_k = \int_0^{y^+=100} \left| \frac{u_f^2 F_k(y^+) - \bar{k}_{bas-Reynolds}(y^+)}{\bar{k}_{bas-Reynolds}(y^+)} \right| dy^+. \quad (2.142)$$

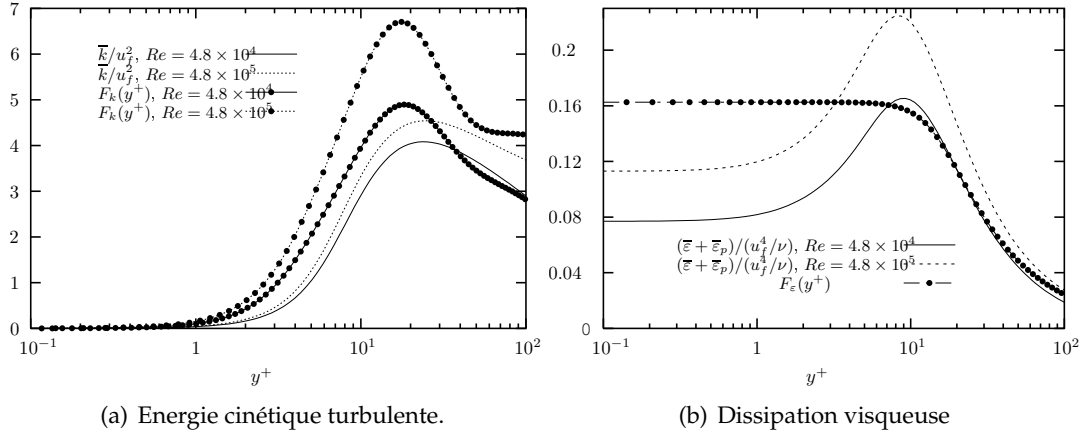


FIG. 2.23: Comparaison des fonctions de paroi F_k et F_ϵ avec les profils obtenus grâce au modèle bas-Reynolds de Chien.

La figure 2.24 permet de visualiser l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de Reynolds. Il est constaté qu'elle est maximale pour $Re = 10^4$. Lorsque le nombre de Reynolds augmente, elle reste alors toujours inférieure à 3 %. Le minimum d'erreur localisé autour de 2×10^4 correspond aux valeurs du nombre de Reynolds pour lequel la fonction F_k a été optimisée à partir des résultats de DNS.

Un niveau d'erreur similaire est constaté pour la reconstruction de la dissipation visqueuse dans la couche limite. Ces niveaux sont acceptables et la reconstruction des profils (dans la couche limite) à l'aide des fonctions F_k et F_ϵ sera par la suite utilisée.

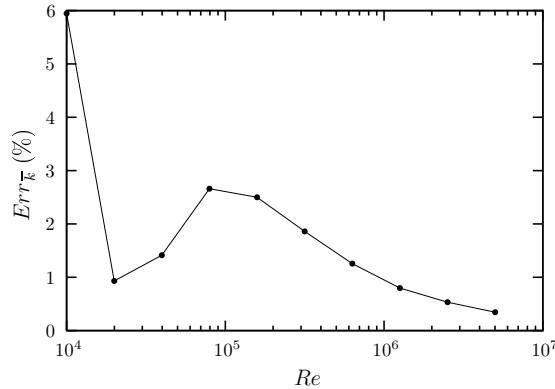


FIG. 2.24: Evolution de l'erreur commise sur le profil de \bar{k} en utilisant la fonction F_k entre $y^+ = 0$ et $y^+ = 100$ par rapport au profil de \bar{k} obtenu avec le modèle bas-Reynolds de Chien (Eq. (2.142)).

2.4.3 Présentation et validation des calculs de référence pour l'établissement d'un écoulement turbulent dans un canal plan

Nous nous intéresserons dans les chapitres 5 et 6 à la modélisation macroscopique de l'établissement d'un écoulement turbulent dans un milieu stratifié correspondant à un em-

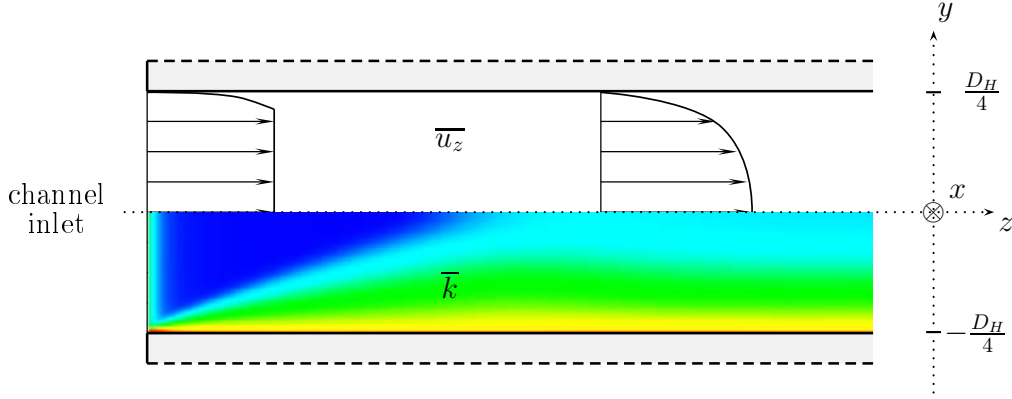


FIG. 2.25: Configuration du calcul CAST3M pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan.

pilement de plaques planes (voir Fig 1.7). Cette configuration géométrique représente la configuration la plus simple d'un milieu macro-poreux ordonné et périodique. La direction principale de l'écoulement est colinéaire à l'axe z . L'écoulement est supposé statistiquement homogène dans la direction x et statistiquement permanent. Par hypothèse, les gradients de la vitesse moyennée spatialement sont nuls. Sous ces conditions, l'étude macroscopique d'un écoulement dans ce milieu stratifié peut être réduite à l'étude de l'écoulement dans un unique canal bidimensionnel plan.

Nous rappelons qu'à l'entrée du canal, dans la zone de calcul, les profils imposés pour la vitesse, l'énergie cinétique turbulente et la dissipation visqueuse sont plats. Dans la zone de proche-paroi, non simulée, les profils sont décrits par les lois de paroi introduites dans la section 2.4.2 (Fig. 2.25). Cette zone s'étend de l'interface entre le fluide et le solide jusqu'à la distance normalisée $y_p^+ \simeq 100$. La vitesse débitante est conservée tout au long de l'établissement spatial de l'écoulement. Seule la forme du profil de vitesse est modifiée. Par contre, en ce qui concerne les quantités turbulentes, la forme du profil ainsi que le niveau moyen évoluent. Les perturbations engendrées par l'entrée du fluide dans un canal, comme par exemple d'éventuelles recirculations, ne sont pas prises en compte. Les résultats fins sont ensuite moyennés spatialement (suivant les sections transverses à l'écoulement) pour obtenir les évolutions macroscopiques des différentes grandeurs physiques. Après une certaine distance parcourue par l'écoulement, les niveaux $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ atteignent une valeur constante et l'écoulement est considéré macroscopiquement établi.

Au travers de la figure 2.26, l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est représentée pour un nombre de Reynolds égal à 10^5 . Cette évolution est caractérisée par une donnée à l'entrée du canal, à savoir la valeur moyenne de l'énergie cinétique turbulente $\langle \bar{k}_0 \rangle_f$. Cette donnée est fixée par l'utilisateur *via* l'imposition de la condition limite d'entrée du calcul CAST3M. Par contre, la valeur moyenne asymptotique atteinte, c'est à dire $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$, n'est pas une donnée mais un résultat du calcul. Le profil local de l'énergie cinétique turbulente s'établit au bout d'une certaine distance à partir de l'entrée du canal et la moyenne spatiale du profil établi correspond à la valeur asymptotique $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$. Entre l'état $\langle \bar{k}_0 \rangle_f$ et l'état $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$, une dynamique d'oscillation est constatée (Fig. 2.26). Pour valider cette dynamique, les résultats obtenus avec le code de calcul CAST3M (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec lois de parois) sont comparés à ceux provenant du code de calcul MELODIF (modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec traitement spécifique bas-Reynolds dans la zone proche-paroi). Les mêmes conditions d'entrée sont imposées, à savoir $\langle \bar{k}_0 \rangle_f \simeq \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ et

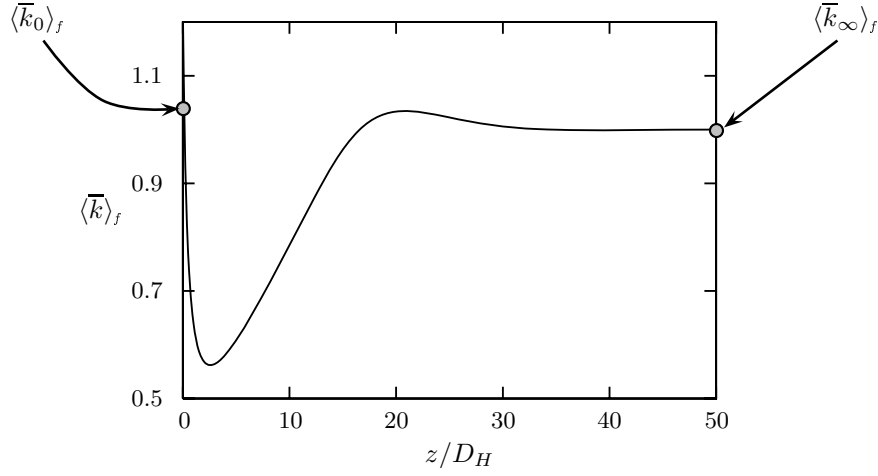


FIG. 2.26: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$ suivant z . Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec lois de paroi (code de calcul CAST3M). $Re = 10^5$. $\langle \bar{k}_0 \rangle_f \simeq \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f \simeq 2\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$.

$\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f \simeq 2\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$, pour un nombre de Reynolds encore une fois égal à 10^5 . La figure 2.27(a) permet en premier lieu de constater que les deux modèles ne fournissent pas la même valeur asymptotique $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$. Un écart relatif de 7.9% est constaté. L'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$, rapportée à sa valeur asymptotique, est ensuite étudiée (Fig. 2.27(b)). La dynamique exhibée par les deux modèles est similaire en ce qui concerne la localisation des extrema, mais les amplitudes diffèrent. Les résultats sont suffisamment similaires pour n'utiliser qu'un seul modèle de turbulence locale dans toute la phase de développement du modèle macroscopique. En l'occurrence le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec lois de paroi présent dans le code de calcul CAST3M est choisi¹².

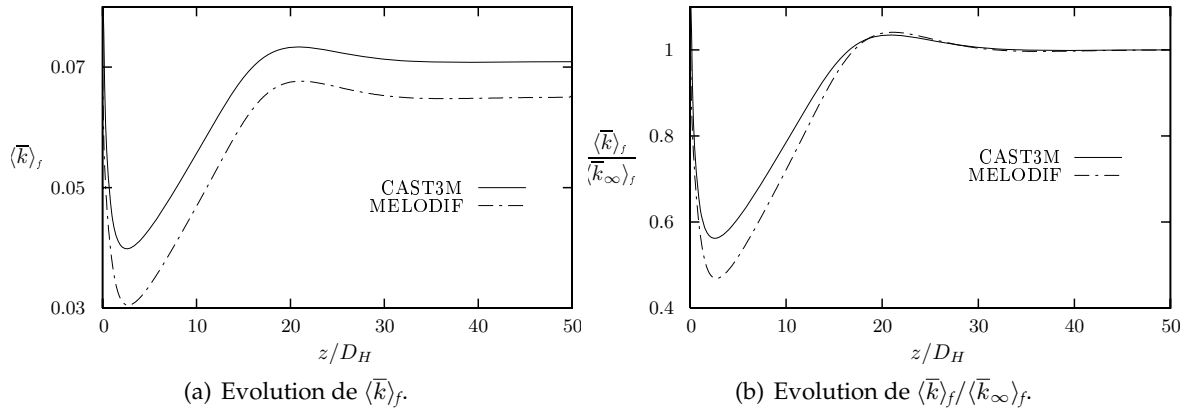


FIG. 2.27: Evolution suivant l'axe z de l'énergie cinétique turbulente moyennée spatialement : comparaison des résultats obtenus à partir de CAST3M et de MELODIF. $Re = 10^5$. $\langle \bar{k}_0 \rangle_f = \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f = 2\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$

¹²Le code de calcul MELODIF sera à nouveau employé lors de la validation des résultats fournis par le modèle macroscopique.

| $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H}$ \backslash $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}$ | 1 | 3 | 9 |
|---|--|--|--|
| $\frac{1}{10}$ | | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{25}$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{100}$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |

TAB. 2.4: Simulations d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : récapitulatif des calculs menés avec le code CAST3M.

Trois paramètres sont choisis pour classer les simulations d'écoulements turbulents dans un canal plan. Il s'agit du nombre de Reynolds de l'écoulement, de l'énergie cinétique turbulente moyennée à l'entrée du canal rapportée à sa valeur d'équilibre $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$, et d'une échelle de longueur caractéristique de la turbulence (à l'échelle macroscopique), rapportée au diamètre hydraulique du canal :

$$L_{tM_0}^* = \frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H}. \quad (2.143)$$

Chaque paramètre est décrit par trois valeurs, à savoir :

$$Re = 5 \times 10^4, 10^5, 10^6, \quad (2.144)$$

$$\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 1, 3, 9, \quad (2.145)$$

$$L_{tM_0}^* = \frac{1}{10}, \frac{1}{25}, \frac{1}{100}. \quad (2.146)$$

Cependant, les valeurs moyennes des quantités turbulentes à l'entrée du canal possèdent des minima. En effet, dans la zone s'étendant de la paroi à la distance normalisée $y_p^+ \simeq 100$, les profils de \bar{k} et de $\bar{\varepsilon}$ sont par hypothèse décrits par des lois de couche limite en équilibre (voir Eqs. (2.137) et (2.138)). Les moyennes spatiales de ces profils, qui dépendent aussi de la vitesse de frottement, représentent ces minima. Par exemple, pour le nombre de Reynolds égal à 5×10^4 , et pour $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 1$, la valeur de $\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f$ qui permettrait de considérer $L_{tM_0}^* = 1/10$ est inférieure à la valeur moyenne du profil de $\bar{\varepsilon}$ dans la zone proche-paroi. Ce cas ne peut donc être simulé. Le tableau 2.4 récapitule l'ensemble des calculs de référence qui seront utilisés pour dériver et valider le modèle macroscopique de turbulence respectivement dans les chapitres 5 et 6.

En tant que résultat du code de calcul, le coefficient de frottement f_p à la paroi fait partie des grandeurs qui seront étudiées. Pour le canal plan, sa définition tensorielle donnée au chapitre 1 est réduite à une définition scalaire :

$$\overline{F_{\phi_z}} = \frac{f_p}{2 D_H} \langle \bar{u}_z \rangle_f^2. \quad (2.147)$$

Ce coefficient dépend généralement des effets de pression et de viscosité à la paroi. Pour la configuration étudiée, la pression n'a pas d'influence sur f_p . Sous ces conditions, et en revenant à la définition (1.137) de $\overline{F_{\phi_z}}$, le coefficient de frottement est lié à la vitesse de frottement définie en (2.54) par l'expression [39] :

$$f_p = 8 \frac{u_f^2}{\langle \overline{u_z} \rangle_f^2}. \quad (2.148)$$

Le travail de la force de trainée dans le mouvement macroscopique moyen est aussi précisée :

$$\overline{F_{\phi_z}} \langle \overline{u_z} \rangle_f = \frac{f_p}{2 D_H} \langle \overline{u_z} \rangle_f^3. \quad (2.149)$$

Si la zone de calcul CAST3M s'étendait jusqu'à la paroi et que des profils plats pour \overline{k} , $\overline{\varepsilon}$ et \overline{u} étaient imposés en entrée du canal plan, les couches limites se développeraieent progressivement le long des parois. En supposant que leur épaisseur δ_{BL} augmente comme une couche limite sur plaque plane¹³, elle est donnée par [54] :

$$\delta_{BL} \simeq 0.3 z \sqrt{f_p}. \quad (2.150)$$

Cependant l'utilisation de lois de paroi ne permet pas d'effectuer le calcul jusqu'à la paroi. Les simulations effectuées avec CAST3M associent les profils plats en entrée du canal à des profils analytiques dans la zone proche-paroi. La distance normalisée y_p^+ pour laquelle est effectuée le raccord a été choisie proche de 100. Pour aboutir à une cohérence entre la zone calculée et la zone reconstituée, il faut que l'épaisseur de couche limite en développement (qui est en fait une couche limite virtuelle pour la simulation CAST3M) soit supérieure à l'épaisseur de la zone proche-paroi :

$$\delta_{BL}^+ > y_p^+ \iff z \gtrsim \frac{4\sqrt{2} y_p^+}{0.3 f_p Re} D_H. \quad (2.151)$$

Afin d'avoir un critère pratique pour définir la pertinence des évolutions étudiées à partir de CAST3M, le coefficient de frottement est supposé égal à sa valeur asymptotique. L'évolution de l'abscisse

$$z_c = \frac{4\sqrt{2} y_p^+}{0.3 f_{p\infty} Re} D_H \quad (2.152)$$

est reportée sur la figure 2.28. En conséquence, il apparaît que, pour la gamme de nombres de Reynolds considérés, la couche limite donnée par les lois de paroi est suffisamment développée lorsque $z > 2D_H$.

2.5 Conclusion

De la même façon que la simulation numérique directe permet de valider les modèles alimentant les méthodes RANS et les méthodes LES, les méthodes RANS vont servir à étudier les inconnus apparaissant dans les équations bilans doublement moyennées des quantités

¹³Cela revient à supposer que chaque couche limite n'est pas affectée par la présence de la paroi opposée.

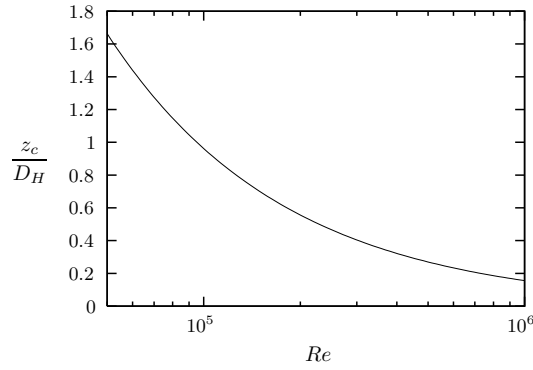


FIG. 2.28: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal plan : évolution de l'abscisse z_c pour laquelle l'épaisseur de couche limite (virtuelle) en développement est approximativement égale à l'épaisseur y_p de la zone proche-paroi.

thermohydrauliques. Dans ce chapitre, la modélisation de la turbulence à l'échelle locale à été introduite et plusieurs modèles RANS au premier ordre ont été décrits, notamment les modèles $\bar{k} - l$ et $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$. Dans le cadre de la fermeture au premier gradient, la modélisation des contraintes turbulentes est décrite par l'équation (2.23). De la même façon, dans l'équation bilan (1.145) de la température, la modélisation du flux turbulent est liée à la définition d'un coefficient de diffusivité thermique turbulente α_t . Le flux est alors donné par :

$$-\overline{u'_i T'_f} = \alpha_t \frac{\partial \overline{T_f}}{\partial x_i}. \quad (2.153)$$

Pour étudier les profils correspondant à un écoulement établi dans une configuration géométrique simple (comme un canal plan ou un tube à section circulaire), le modèle $\bar{k} - l$ et le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien ont été implantés dans un code de calcul unidimensionnel, puis validés par comparaison avec des résultats expérimentaux. Ces profils vont permettre d'étudier le phénomène de dispersion pour des écoulements en équilibre. Cette étude est l'objet du chapitre 3 (voir tableau récapitulatif 2.5). Pour analyser les mécanismes d'établissement de ces écoulements (dans les mêmes configurations géométriques) et plus particulièrement l'évolution moyenne, au sens spatial, des quantités turbulentes, l'utilisation de codes de simulation multi-dimensionnelle est nécessaire. Le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ disponible dans le code de calcul CAST3M a alors été validé en étudiant la configuration du canal bidimensionnel plan. Par la suite, nous nous appuyerons sur les résultats à l'échelle locale de ce code et du code MELODIF pour analyser, au chapitre 5, les évolutions macroscopiques des quantités turbulentes (voir tableau récapitulatif 2.5).

| application code | mise au point | problème de fermeture pour la dispersion | établissement des profils |
|---|---------------|--|------------------------------|
| 1D + modèle $\bar{k} - l$ | ✓ | ✓ | ○ |
| 1D + modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ | ✓ | ✓ | ○ |
| 2D CAST3M | ✓ | ○ | ✓ |
| 2D MELODIF | ✓ | ○ | ✓ |

TAB. 2.5: Tableau de synthèse : description des thèmes d'étude pour lesquels les modèles (et code de simulations) décrits dans ce chapitre vont être employés.

Etude de la dispersion dans un milieu poreux périodique pour un écoulement turbulent

EN prenant la moyenne spatiale des équations de Navier-Stokes décrivant le système fluide, le terme de dispersion a été mis en évidence. L'introduction qualitative de la dispersion a été menée au chapitre 1. A la section 1.2.4, il a été montré que le flux dispersif d'un scalaire passif s'écrivait :

$$-\langle \delta u_i \delta c \rangle_f. \quad (3.1)$$

Ce terme tient compte du transport par les hétérogénéités de vitesse des hétérogénéités de la grandeur considérée. L'équation bilan (1.8) du scalaire passif ne fait intervenir que des termes de transports convectif et diffusif. Aucun terme source n'intervient dans cette équation bilan. La condition limite associée correspond à un transport diffusif nul à l'interface fluide-solide. En se référant au principe de superposition, la dispersion d'un scalaire passif est commune aux autres problèmes de dispersion, notamment pour la température. Ce facteur commun est alors nommé dispersion **passive**. Plus particulièrement, l'équation bilan de la température du fluide diffère du scalaire passif de part la condition limite non nulle de flux à l'interface fluide-solide. Par superposition, ce flux de chaleur apporte une nouvelle contribution dans la modélisation de la dispersion. Nous nommerons cette contribution dispersion **active**.

Dans la section 1.3, le tenseur de dispersion (passive) pour un écoulement laminaire a été défini. Ce tenseur est lié à une fonction de dispersion qui est décrite par un problème de fermeture à l'intérieur d'un Volume Élémentaire Représentatif (VER). En utilisant la méthode de Whitaker [16, 112, 113], nous avons montré que ce problème de fermeture est composé des équations (1.85) et (1.86). Le profil de vitesse et le coefficient de diffusion du scalaire passif conditionnent alors la fonction de dispersion.

Dans le cas d'un écoulement turbulent, nous allons montrer que la définition du tenseur de dispersion à partir d'une fonction de dispersion et du profil des déviations de vitesse

(à présent moyennées statistiquement) reste globalement inchangée. Seul le problème de fermeture évolue pour deux raisons. La première est la modification du profil de vitesse due à la turbulence. La seconde provient de la modélisation de la dispersion turbulente dans le cadre des fermetures au premier gradient. En modélisation cette dispersion *via* un coefficient variable de diffusion supplémentaire (voir section 1.1.2), le problème de fermeture peut se ramener à celui défini pour une diffusivité variable de scalaire passif [115]¹.

Pour évaluer l'importance du terme de dispersion dans le bilan macroscopique de la grandeur considérée, le flux dispersif peut être comparé aux flux de diffusion moléculaire et turbulent. Pour un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire, Taylor [106] a montré que le flux dispersif était bien plus important que le flux diffusif effectif. Avec une modélisation très simple de la turbulence, le rapport entre ces deux flux est estimé à 193.

Enfin, nous soulignons que tous les résultats qui seront fournis dans ce chapitre sont relatifs à des écoulements qui sont supposés en équilibre à l'intérieur du VER. Nous ne souhaitons pas ici modéliser l'impact du déséquilibre de la turbulence sur le coefficient de dispersion, mais examiner l'influence, à l'établissement, de la turbulence sur la dispersion passive. Dans le contexte des fermetures au premier gradient, le problème de fermeture décrivant cette dispersion est établi dans la section 3.1. Dans la section 3.2, ce problème est ensuite appliqué aux milieux stratifiés décrits dans le chapitre 1 (Figs. 1.7 et 1.8). La méthodologie développée pour l'étude du scalaire passif est ensuite mise en oeuvre pour étudier la dispersion active de la température dans la section 3.3. Un problème de fermeture associé est notamment dérivé et appliqué en section 3.4 aux géométries académiques précédemment introduites. Les flux diffusifs et dispersifs sont comparés dans la section 3.5. Nous vérifierons particulièrement à la section 3.5.3 si la méthode introduite dans ce chapitre aboutit aux mêmes résultats que la méthode utilisée par Taylor [106].

3.1 Influence de la turbulence sur la dispersion d'un scalaire passif

En nous limitant au cas d'un fluide incompressible dans un milieu périodique à porosité constante, nous adaptons l'analyse de Whitaker à l'étude de la dispersion d'un scalaire passif pour un écoulement turbulent. Pour mener à bien cette étude, les deux hypothèses qui ont été formulées dans la section 1.3 sont transposées à l'étude d'un écoulement turbulent. Nous ajoutons à celles-ci une hypothèse concernant la modélisation du flux turbulent. Ces trois hypothèses principales sont ici résumées pour un scalaire passif.

- *H1 : Hypothèse de séparation des échelles.*

Nous définissons les échelles de longueurs caractéristiques $L_{\bar{\xi}}$ et $l_{\bar{\xi}}$ associées à la grandeur ξ moyennée statistiquement

$$\frac{1}{\langle \bar{\xi} \rangle_f} \|\nabla \langle \bar{\xi} \rangle_f\| = O\left(\frac{1}{L_{\bar{\xi}}}\right), \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{\bar{\xi}} \|\nabla \bar{\xi}\| = O\left(\frac{1}{l_{\bar{\xi}}}\right). \quad (3.3)$$

Nous désignons ensuite par L (respectivement l) un représentant de l'échelle de longueur des variations macroscopiques (respectivement microscopiques) des grandeurs

¹Ce travail a été soumis à *International Journal of Heat and Mass Transfers* [76].

moyennées statistiquement. L'hypothèse de séparation d'échelle stipule alors l'inégalité :

$$L \gg l. \quad (3.4)$$

Cette inégalité permet aussi d'écrire pour une grandeur ξ^2 :

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x_i} \gg \frac{\partial \langle \bar{\xi} \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (3.5)$$

Plus précisément, si ξ satisfait la propriété

$$\delta \bar{\xi} = O(\langle \bar{\xi} \rangle_f),$$

alors l'hypothèse *H1* implique :

$$\underbrace{\frac{\partial \delta \bar{\xi}}{\partial x_i}}_{O(\delta \bar{\xi}/l)} \gg \underbrace{\frac{\partial \langle \bar{\xi} \rangle_f}{\partial x_i}}_{O(\langle \bar{\xi} \rangle_f/L)}. \quad (3.6)$$

L'adaptation de cette hypothèse, déjà formulée pour le cas laminaire, au cas turbulent est rendu possible grâce à la structuration spatiale de l'écoulement moyennée statistiquement (voir section 1.4.1).

- *H2 : Hypothèse de quasi stationnarité (au sens de la moyenne statistique)*

Nous supposons que la convection et la diffusion moléculaire d'une grandeur moyennée statistiquement prédominent sur sa variation temporelle. En utilisant le temps caractéristique défini par

$$\frac{1}{\delta \bar{\xi}} \left| \frac{\partial \delta \bar{\xi}}{\partial t} \right| = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad (3.7)$$

dans le cas du scalaire passif, l'hypothèse *H2* est équivalente à

$$\theta = \frac{(D + D_t) \tau}{l^2} \gg 1, \quad (3.8)$$

$$\theta Pe \gg 1 \quad \text{où } Pe = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f l}{D}. \quad (3.9)$$

Dans le cas de la température fluide, l'hypothèse *H2* est identique. Seule la définition du nombre de Péclet diffère :

$$Pe = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f l}{\alpha_f}. \quad (3.10)$$

Pour un écoulement turbulent moyennée statistiquement, la condition (3.8) est d'autant plus remplie que le coefficient de diffusion turbulente peut devenir très grand devant le coefficient D , sans que le temps τ évolue³. De la même manière, en conservant un nombre de Schmidt du même ordre de grandeur, le nombre de Péclet d'un écoulement turbulent est supérieur (voire très supérieur) à celui d'un écoulement laminaire. La condition (3.9) est donc plus accessible pour un écoulement turbulent.

²Ce résultat est équivalent à considérer que c_0^* ne dépend que de la variable lente \check{X}^* dans la méthode d'homogénéisation (section 1.2.1)

³L'écoulement étant moyenné statistiquement, l'échelle de temps caractéristique τ est très grande devant l'échelle de temps des fluctuations.

- *H3 : Hypothèse de fermeture au premier gradient*

Nous supposons qu'un flux turbulent peut être modélisé par l'introduction d'un coefficient de diffusion turbulente (voir section 1.1.2). Par exemple, pour le scalaire passif, cette hypothèse se résume à :

$$-\overline{u'_i c'} = D_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = \frac{\nu_t}{\sigma_c} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i}, \quad (3.11)$$

où σ_c est le nombre de Schmidt turbulent associé au scalaire passif. Pour la température, elle s'écrit :

$$-\overline{u'_i T'_f} = \alpha_t \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i} = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial x_i}, \quad (3.12)$$

où Pr_t est le nombre de Prandtl turbulent associé à la température du fluide.

3.1.1 Prise en compte de la turbulence dans l'analyse de Whitaker

Tout d'abord, l'équation bilan de $\delta \bar{c}$ doit être établie. Pour cela, l'équation bilan (1.122) de $\langle \bar{c} \rangle_f$ est soustraite à l'équation bilan (1.12) de \bar{c} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{c} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle D \delta \bar{c} n_i \delta_w \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i c'} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_i c'} \rangle_f \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \langle \bar{c} \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \delta \bar{c}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

La condition limite associée à l'équation (3.13) est décrite par :

$$n_i \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -n_i \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} = n_i \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} \quad \text{sur } A_f. \quad (3.14)$$

La même méthode que pour le cas laminaire est employée. Afin de rester le plus général possible, l'application de l'hypothèse *H3* (introduction du modèle de turbulence) constitue la dernière étape simplificatrice. La figure 3.1 résume le raisonnement utilisé.

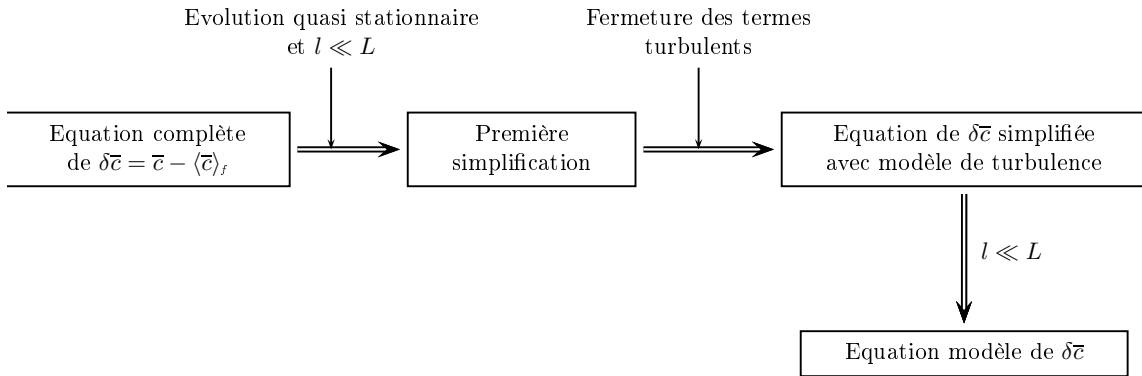


FIG. 3.1: Extension de la méthodologie de Whitaker au cas d'un écoulement turbulent.

| | Terme dans l'équation (3.13) | Ordre de grandeur | Négligé / Conservé |
|------|---|--|--------------------|
| I | $\frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial t}$ | $\frac{\delta \bar{c}}{\tau}$ | Négligé |
| II | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{c}$ | $\langle \bar{u} \rangle_f \frac{\delta \bar{c}}{l}$ | Conservé |
| III | $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right)$ | $D \frac{\delta \bar{c}}{l^2}$ | Conservé |
| IV | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle D \delta \bar{c} n_i \delta_w \rangle_f$ | $D \frac{\delta \bar{c}}{L^2}$ [69] | Négligé |
| V | $\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i c'}$ | $\frac{\overline{u' c'}}{L}$ | Conservé |
| VI | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_i c'} \rangle_f$ | $\frac{\langle \overline{u' c'} \rangle_f}{L}$ | Négligé |
| VII | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f$ | $\frac{\delta \bar{u} \delta \bar{c}}{L}$ | Négligé |
| VIII | $\frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \langle \bar{c} \rangle_f$ | $\frac{\delta \bar{u} \langle \bar{c} \rangle_f}{l}$ | Conservé |
| IX | $\frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \delta \bar{c}$ | $\frac{\delta \bar{u} \delta \bar{c}}{l}$ | Conservé |

TAB. 3.1: Ordre de grandeur des termes composant l'équation bilan (3.13).

En tenant compte de l'hypothèse *H1* (séparation des échelles), les ordres de grandeur respectifs des termes de flux dispersif sont caractérisés par :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{c} \rangle_f \ll \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \delta \bar{c}, \quad (3.15)$$

$$\text{et } \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_i c'} \rangle_f \ll \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i c'}. \quad (3.16)$$

Le terme de tortuosité est quant à lui négligé face au terme de diffusion de $\delta \bar{c}$ et face au terme convectif, en utilisant les estimations présentées dans la section 1.3.1. Le terme de variation temporelle est négligé sous l'hypothèse *H2* (évolution quasi stationnaire au sens statistique). Toutes ces considérations sont résumées par le tableau 3.1. Par conséquent, l'équation (3.13) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{c} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u'_i c'} - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \langle \bar{c} \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \delta \bar{c}. \quad (3.17)$$

A présent, l'hypothèse *H3* permet d'écrire une équation bilan modèle de $\delta \bar{c}$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \bar{u}_i \delta \bar{c} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \bar{u}_i \langle \bar{c} \rangle_f. \quad (3.18)$$

Le terme décrivant la dispersion turbulente sous forme d'un terme diffusif peut aussi être simplifié en faisant référence à *H1*. Nous développons la concentration de scalaire passif par

| | Terme dans l'équation (3.20) | Ordre de grandeur | Négligé / Conservé |
|---|---|---|--------------------|
| 1 | $\frac{\partial D_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i}$ | $\frac{D_t \langle \bar{c} \rangle_f}{l L}$ | Négligé |
| 2 | $D_t \frac{\partial^2 \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i \partial x_i}$ | $\frac{D_t \langle \bar{c} \rangle_f}{L^2}$ | Conservé |
| 3 | $\frac{\partial D_t}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i}$ | $\frac{D_t \delta \bar{c}}{l^2}$ | Conservé |
| 4 | $D_t \frac{\partial^2 \delta \bar{c}}{\partial x_i \partial x_i}$ | $\frac{D_t \delta \bar{c}}{l^2}$ | Conservé |

TAB. 3.2: Ordre de grandeur des termes composant le développement (3.20).

rapport à sa moyenne spatiale,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right), \quad (3.19)$$

puis les dérivées spatiales sont détaillées :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial D_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} + D_t \frac{\partial^2 \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i \partial x_i} + \frac{\partial D_t}{\partial x_i} \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} + D_t \frac{\partial^2 \delta \bar{c}}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (3.20)$$

Ce développement est simplifié en estimant l'ordre de grandeur de chacun des termes (voir tableau 3.2). Le terme 2 du tableau 3.2 est négligé face aux trois autres termes. Le terme 1 fait intervenir le gradient de concentration moyenne qui, de la même façon que dans le cas laminaire, constitue un terme source du problème local [106]. Ce terme est donc conservé, bien que son ordre de grandeur apparaisse inférieur au deux derniers termes. En appliquant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, l'équation bilan modèle de $\delta \bar{c}$ est obtenue :

$$\bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(D + D_t) \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial D_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} - \delta \bar{u}_i \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (3.21)$$

La condition limite aux parois associée à cette équation est une nouvelle fois décrite par l'équation (3.14), ici rappelée :

$$D \frac{\partial \delta \bar{c}}{\partial x_i} n_i = -D \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} n_i \quad \text{sur } A_f. \quad (3.22)$$

Un problème de même nature que dans le cas laminaire est retrouvé (voir Eq. (1.78)) et une solution dépendant linéairement du gradient macroscopique de scalaire passif est alors naturellement recherchée [15] :

$$\delta \bar{c} = \eta_i \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i} + \psi. \quad (3.23)$$

La fonction ψ est nulle car le milieu considéré est périodique [16]. En reprenant les simplifications de développement liées à la fonction η (voir section 1.3.2), le problème de fermeture associé à la fonction de dispersion s'écrit :

$$\text{dans le VER : } \quad \bar{u}_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left((D + D_t) \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial D_t}{\partial x_i} - \delta \bar{u}_i, \quad (3.24)$$

$$\text{sur } A_f : \quad -n_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} = n_i \quad \text{sur } A_f. \quad (3.25)$$

$$\text{périodicité : } \quad \eta_i(x_j + l_{p_j}) = \eta_i(x_j), \quad (3.26)$$

$$\text{relation additionnelle : } \quad \langle \eta_i \rangle_f = 0. \quad (3.27)$$

Dans le cadre des modèles RANS avec diffusivité turbulente, la dérivation du modèle de fermeture met en évidence deux contributions spécifiques à la turbulence dans l'équation bilan de la fonction de dispersion :

- une contribution diffusive supplémentaire,
- un terme source lié au gradient du coefficient de diffusion turbulente.

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds, le coefficient de diffusion turbulente est très supérieur au coefficient de diffusion moléculaire. C'est donc la contribution turbulente à la diffusion qui domine. Notons bien que dans le cas d'écoulements laminaires, lorsque $D_t \rightarrow 0$, (3.24) est bien identique à (1.85). Le terme source supplémentaire est analogue à celui mis en évidence dans les études de fluides à propriétés physiques variables s'écoulant dans un milieu poreux [115].

Pour obtenir l'équation bilan modèle de $\langle \bar{c} \rangle_f$, la relation de fermeture (3.23) est remplacée dans l'équation bilan (1.122). En utilisant l'idempotence supposée de la moyenne spatiale, il vient :

$$\phi \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi \langle \bar{c} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \phi [D(\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}^P) + \mathcal{D}_{ij}^P + D_{t_\phi} \delta_{ij}] \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_j} \right\}. \quad (3.28)$$

Dans cette équation, la fermeture au premier gradient a aussi été appliquée à la moyenne spatiale du flux turbulent de scalaire passif, en introduisant le coefficient de diffusion turbulente macroscopique D_{t_ϕ} :

$$-\langle \bar{u}_i' \bar{c}' \rangle_f = D_{t_\phi} \frac{\partial \langle \bar{c} \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (3.29)$$

Les définitions des tenseurs de tortuosité \mathcal{T}_{ij}^P (Eq. (1.90)) et de dispersion passive \mathcal{D}_{ij}^P (Eq. (1.89)) restent inchangées, excepté que la définition de \mathcal{D}_{ij}^P fait à présent appel aux déviations de la vitesse moyennée statistiquement :

$$\mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j n_i \delta_w \rangle_f, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{D}_{ij}^P = -\langle \delta \bar{u}_i \eta_j \rangle_f. \quad (3.31)$$

Un exposant P a été ajouté à la notation pour faire référence au caractère passif de ces tenseurs de dispersion et de tortuosité.

3.1.2 Mise sous forme adimensionnée

Pour plus de clarté dans l'analyse, nous proposons de mettre sous forme adimensionnée l'équation bilan macroscopique du scalaire passif, ainsi que le problème de fermeture permettant de déterminer la fonction de dispersion. Nous nous appuyons sur l'adimensionnalisation qui a déjà été réalisée dans le cas laminaire (section 1.3.3). Dans le cas turbulent, la vitesse débitante,

$$U = \sqrt{\langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f}, \quad (3.32)$$

est choisie comme vitesse de référence. Le temps caractéristique de diffusion τ_d reste inchangé :

$$\tau_d = \frac{D_H^2}{D}. \quad (3.33)$$

Les variables sans dimension suivantes sont alors définies :

$$\begin{aligned} t^* &\equiv \frac{t}{\tau_d}, & x_i^* &\equiv \frac{x_i}{D_H}, & \bar{u}_i^* &\equiv \frac{\bar{u}_i}{U}, & D^* &\equiv \frac{D}{D} = 1, \\ D_t^* &\equiv \frac{D_t}{D}, & D_{t_\phi}^* &\equiv \frac{D_{t_\phi}}{D}, & \eta^* &\equiv \frac{\eta}{D_H}, & \delta_w^* &\equiv \delta_w D_H. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le tenseur de dispersion intervient dans l'équation (3.28) comme un coefficient supplémentaire de diffusion. Il est donc lui aussi adimensionné par le coefficient de diffusion moléculaire :

$$\mathcal{D}_{ij}^{P*} = \frac{\mathcal{D}_{ij}^P}{D} = -Pe \langle \delta \bar{u}_i^* \eta_j^* \rangle_f. \quad (3.35)$$

Le tenseur de tortuosité passive est (par définition) sans dimension :

$$\mathcal{T}_{ij}^{P*} = \langle \eta_j^* n_i \delta_w^* \rangle_f. \quad (3.36)$$

En utilisant ces variables adimensionnées, l'équation bilan macroscopique du scalaire passif prend la forme :

$$\phi \frac{\partial \langle \bar{c}^* \rangle_f}{\partial t^*} + Pe \frac{\partial}{\partial x_i^*} (\phi \langle \bar{c}^* \rangle_f \langle \bar{u}_i^* \rangle_f) = \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left\{ \phi \left[\delta_{ij} + \mathcal{T}_{ij}^{P*} + \mathcal{D}_{ij}^{P*} + D_{t_\phi}^* \delta_{ij} \right] \frac{\partial \langle \bar{c}^* \rangle_f}{\partial x_j^*} \right\}. \quad (3.37)$$

De la même manière, le problème de fermeture peut, à nouveau, être formulé :

$$\text{dans le VER :} \quad Pe \bar{u}_j^* \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j^*} - \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left((1 + D_t^*) \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j^*} \right) = \frac{\partial D_t^*}{\partial x_i^*} - Pe \delta \bar{u}_i^*, \quad (3.38)$$

$$\text{sur } A_f : \quad -n_j \frac{\partial \eta_i^*}{\partial x_j^*} = n_i \quad \text{sur } A_f, \quad (3.39)$$

$$\text{périodicité :} \quad \eta_i^*(x_j^* + l_{p_j}^*) = \eta_i^*(x_j^*), \quad (3.40)$$

$$\text{relation additionnelle :} \quad \langle \eta_i^* \rangle_f = 0. \quad (3.41)$$

3.2 Dispersion passive : résultats

Afin de résoudre le problème de fermeture décrit par les équations (3.38) et (3.39), les champs de vitesse et de diffusivité turbulente du scalaire passif doivent être connus dans un VER. Or, il est encore plus délicat que pour un écoulement laminaire de déterminer ces champs dans une géométrie quelconque. Taylor s'est appuyé sur des profils de vitesse expérimentaux et un modèle de viscosité turbulente simple pour décrire le phénomène de dispersion passive pour un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire. Son analyse est récapitulée dans la section 3.2.1. Nous nous focaliserons ensuite sur les mêmes configurations géométriques que nous avons étudiées pour le régime laminaire (*ie.* canal plan et conduite à section circulaire). Pour ces géométries simples, les profils de vitesse peuvent être validés par comparaison avec des profils expérimentaux (voir section 2.3.2). Le problème de fermeture est alors discrétisé et résolu numériquement en utilisant une méthode identique à celle du code de calcul 1D (voir section 2.3). Cette démarche est validée en résolvant le problème de fermeture pour un écoulement laminaire dans un canal plan et en comparant les résultats aux expressions analytiques (1.107) et (1.113). Les résultats de dispersion passive, en utilisant le modèle bas-Reynolds de Chien, sont détaillés pour des écoulements turbulents dans un canal bidimensionnel plan (section 3.2.2), puis dans un tube à section circulaire (section 3.2.3). Enfin, la sensibilité des résultats fournis par le problème de fermeture, par rapport à la qualité des profils obtenus [94] grâce à la modélisation locale de la turbulence, est étudiée dans la section 3.2.4.

3.2.1 Analyse de Taylor

En introduction, nous avons précisé que Taylor [106] avait déduit, par une autre méthode que celle de la prise de moyenne volumique, une expression du coefficient \mathcal{D}_{zz}^{P*} pour un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire. Il s'est particulièrement intéressé au cas du scalaire passif. Un retour sur sa démarche permettra de comparer ses résultats à ceux présentés dans la section 3.2.3. Il a dans un premier temps supposé que le profil de vitesse pouvait être décrit par :

$$\frac{\bar{u}_{z,max} - \bar{u}_z(y)}{u_f} = \mathcal{H}(y), \quad (3.42)$$

où $\mathcal{H}(y)$ est une fonction qui a été déterminée à partir de résultats expérimentaux. Il suppose ensuite que la viscosité turbulente est notamment fonction de la vitesse de frottement et de la dérivée spatiale de la fonction \mathcal{H} :

$$\nu_t = \frac{y u_f D_H}{2 d\mathcal{H}/dy}. \quad (3.43)$$

Il calcule ensuite à partir de l'équation bilan moyennée statistiquement les flux de scalaire passif qui traversent une section donnée. Il met alors en avant un coefficient de dispersion passive exprimé en fonction de la vitesse de frottement :

$$\text{selon Taylor,} \quad \mathcal{D}_{zz}^P = 10.06 \frac{D_H}{2} u_f. \quad (3.44)$$

La relation (2.148) existant entre vitesse de frottement et coefficient de frottement permet d'en déduire :

$$\text{selon Taylor,} \quad \mathcal{D}_{zz}^P = \frac{10.06}{2\sqrt{8}} D_H \langle \bar{u}_z \rangle_f \sqrt{f_p}. \quad (3.45)$$

Nous écrivons alors la forme adimensionnée (par le coefficient de diffusion de scalaire passif) du coefficient de dispersion passive :

$$\text{selon Taylor,} \quad \mathcal{D}_{zz}^{P*} = 1.78 Pe \sqrt{f_p} \quad (3.46)$$

$$\iff \mathcal{D}_{zz}^{P*} = \mathcal{C}_{P,Taylor} Pe, \quad (3.47)$$

où

$$\mathcal{C}_{P,Taylor}(Re) = 1.78 \sqrt{f_p}. \quad (3.48)$$

Avec un profil de vitesse issu de résultats expérimentaux et un modèle de viscosité turbulente très simple, Taylor montre que, pour un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire, le coefficient de diffusion adimensionnée dépend du nombre de Péclet et de la racine carrée du coefficient de frottement .

3.2.2 Écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan

Dans un canal plan bidimensionnel (Fig. 1.7 (b)), le gradient de scalaire passif doublement moyenné est non nul seulement dans la direction de l'écoulement. De plus, la déviation de scalaire passif ne dépend que de la coordonnée transverse y^* . D'après (3.23), il en découle :

$$\delta \bar{c}^* = \eta_z^*(y^*) \frac{\partial \langle \bar{c}^* \rangle_f}{\partial z^*}. \quad (3.49)$$

Puisque seule la composante η_z^* est non nulle et qu'elle dépend de la variable y^* , nous simplifions le problème de fermeture pour obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left((1 + D_t^*) \frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right) = Pe \delta \bar{u}_z^* \quad \text{pour } y^* \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[, \quad (3.50)$$

$$\left. \frac{\partial \eta_z^*}{\partial y^*} \right|_{y^* = \pm \frac{1}{4}} = 0. \quad (3.51)$$

Dans la configuration étudiée, le gradient du coefficient de diffusion turbulente de scalaire passif n'est pas un terme source (voir Eqs. (3.38) et (3.50)). Son influence n'agit que pour des écoulements dans des configurations géométriques tridimensionnelles, ou réellement bidimensionnelles (comme pour un écoulement transverse dans un faisceau de crayons). Nous n'étudierons pour l'instant que l'impact de la modification du profil de vitesse et de la prise en compte d'un coefficient variable pour la diffusion de la fonction de dispersion η_z^* . De plus, comme nous souhaitons que le problème de dispersion demeure le plus général possible⁴, nous utilisons la définition du nombre de Schmidt turbulent,

$$Sc_t = \frac{\nu_t}{D_t} = Sc \frac{\nu_t^*}{D_t^*}, \quad (3.52)$$

pour décrire le coefficient de diffusivité turbulente du scalaire passif en fonction de la viscosité turbulente. Plus particulièrement, nous emploierons la valeur $Sc_t = 0.9$ [55].

Dans cette étude, les phénomènes de transition entre les régimes laminaire et turbulent ne sont pas reproduits. L'écoulement est considéré comme pleinement turbulent à partir de

⁴En particulier, nous ne souhaitons pas que chaque grandeur (que ce soit \bar{c}^* ou $\overline{T_f^*}$) ait un traitement spécifique pour la modélisation de leur flux turbulent en proche paroi.

la valeur $Re \simeq 5 \times 10^3$. L'évolution de \mathcal{D}_{zz}^{P*} est étudiée en fonction du nombre de Reynolds pour trois nombres de Schmidt ($Sc = 0.07$, $Sc = 0.7$ et $Sc = 7$), en utilisant le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Dans un premier temps, les profils de vitesse et de viscosité turbulente fournis par le modèle bas-Reynolds de Chien sont reportés dans le problème de fermeture. Le système composé des équations (3.50) et (3.51) est résolu numériquement. Ce système décrit en réalité l'évolution du gradient de la fonction de dispersion, de telle façon que η_z^* est ensuite définie à une constante additive près⁵. Puis, pour calculer le coefficient de dispersion \mathcal{D}_{zz}^{P*} , nous utilisons l'expression (3.35). D'après la propriété d'idempotence, la moyenne spatiale du produit entre cette constante et la déviation de vitesse est nulle et n'intervient donc pas dans le calcul de \mathcal{D}_{zz}^{P*} . Pour des milieux périodiques et ordonnés, dont les milieux stratifiés font partie, le tenseur de tortuosité est identiquement nul (voir p. 29). Nous choisissons donc arbitrairement de fixer la valeur de cette constante à zéro.

La figure 3.2 regroupe les résultats pour les régimes laminaire et turbulent. L'évolution en Pe^2 du coefficient de dispersion pour le régime laminaire est retrouvée très précisément. Nous avons constaté dans la section 1.3 que, pour la géométrie du canal plan et pour un écoulement laminaire, le nombre de Péclet suffisait seul à décrire l'évolution du coefficient de dispersion passive \mathcal{D}_{zz}^{P*} .

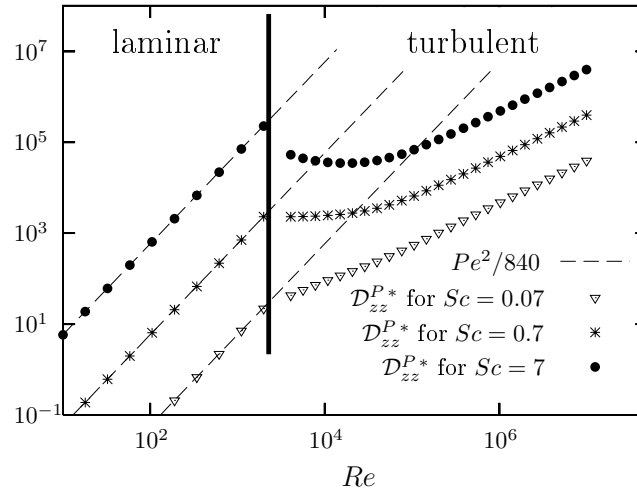


FIG. 3.2: Écoulement en canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du coefficient de dispersion passive \mathcal{D}_{zz}^{P*} en fonction du nombre de Reynolds. Trois nombres de Schmidt sont représentés, à savoir $Sc = 0.07$, $Sc = 0.7$ et $Sc = 7$. ($Sc_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Deux comportements bien distincts émergent entre les régimes laminaire et turbulent. Pour un écoulement turbulent dans un canal plan, la forme du profil de vitesse dépend du nombre de Reynolds. A travers l'hypothèse d'une fermeture au premier gradient pour le flux turbulent de scalaire passif, le profil de \bar{c}^* dépend de deux paramètres, à savoir le nombre de Schmidt, et le nombre de Schmidt turbulent. Une fois le nombre de Schmidt turbulent fixé, la valeur du nombre de Schmidt impacte significativement l'évolution du

⁵Cette constante dépend de la valeur de la déviation de scalaire passif en paroi et du gradient de scalaire passif doublement moyenné.

coefficient de dispersion \mathcal{D}_{zz}^{P*} pour des nombres de Reynolds compris entre 5×10^3 et 10^5 . Ce résultat peut s'expliquer en exprimant l'épaisseur de couche limite du scalaire passif δ_c en fonction de celle de la quantité de mouvement δ_ν [18, 97] :

$$\frac{\delta_c}{\delta_\nu} = \frac{1}{\sqrt{Sc}}. \quad (3.53)$$

Pour des nombres de Reynolds compris entre la transition turbulente et quelques 10^4 , l'épaisseur de couche limite δ_ν est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la zone déficitaire⁶. Dans cet intervalle, le nombre de Schmidt influence significativement la forme du profil de \bar{c}^* . Ce profil ne peut donc être uniquement décrit par la variable sans dimension $Pe = Sc \times Re$ puisque Sc et Re sont des variables intrinsèquement indépendantes⁷.

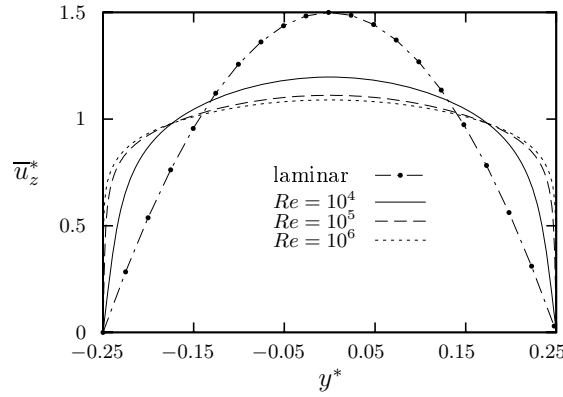


FIG. 3.3: Écoulement en canal plan : profils de vitesse. Comparaison du profil laminaire avec 3 profils turbulents ($Re = 10^4$, $Re = 10^5$ et $Re = 10^6$).

Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 , l'épaisseur de couche limite δ_ν devient négligeable devant l'épaisseur de la zone déficitaire et le nombre de Schmidt n'affecte que peu le profil de scalaire passif. D'après la relation (3.52), Sc ne représente alors (au même titre que Sc_t) qu'un indicateur du niveau de D_t . La forme du profil de vitesse n'évolue pas significativement pour $Re > 10^5$ (voir Fig. 3.3). Au regard des profils de u_z^* et η_z^* (Figs. 3.3 et 3.4), le produit $\langle \eta_z^* \delta \bar{u}_z^* \rangle_f$ demeure quasiment constant, de telle façon que l'évolution de \mathcal{D}_{zz}^{P*} est proche d'une évolution linéaire en fonction de Pe . Bien que la géométrie d'étude est différente, nous nous référons à l'analyse de Taylor, présentée en section 3.2.1, et exprimons le coefficient de dispersion passive par :

$$\text{pour } Re > 10^5, \quad \mathcal{D}_{zz}^{P*} = \mathcal{C}_P Pe. \quad (3.54)$$

Afin de préciser ce résultat, le rapport \mathcal{D}_{zz}^{P*}/Pe est reporté sur la figure 3.5. L'analyse de Taylor [106] en tube à section circulaire suggère que \mathcal{C}_P dépend du coefficient de frottement f_p . La méthode des moindres carrés est utilisée pour préciser cette dépendance. L'optimisation

⁶La zone déficitaire correspond à la zone centrale du canal où les gradients de vitesse sont faibles.

⁷Une même valeur de Pe peut aussi bien caractériser un écoulement laminaire que turbulent, suivant la valeur de Sc . Dans le régime laminaire, elle peut aussi caractériser un écoulement rampant ou un écoulement inertiel. Cette confusion est à l'origine de résultats totalement différents présentés dans [2] et [52], correspondant à la même configuration géométrique et au même intervalle de nombres de Péclet.

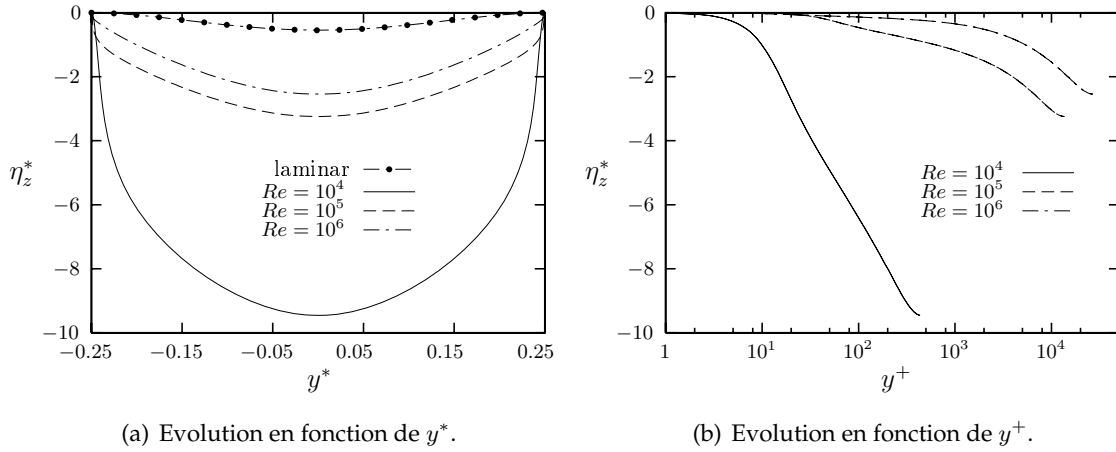


FIG. 3.4: Écoulement turbulent en canal plan : profils de la fonction de dispersion η_z^* . Ces profils correspondent aux trois nombres de Reynolds $Re = 10^4$, $Re = 10^5$ et $Re = 10^6$. Le profil de η_z^* pour $Re = 10^2$ est reporté sur la figure (a). ($Sc = 7$, $Sc_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

n'est réalisée que pour les valeurs correspondant à des nombres de Reynolds supérieurs à 5×10^5 . Il en découle :

$$\text{pour } Re > 5 \times 10^5, \quad C_P \simeq 0.62 \sqrt{f_p}. \quad (3.55)$$

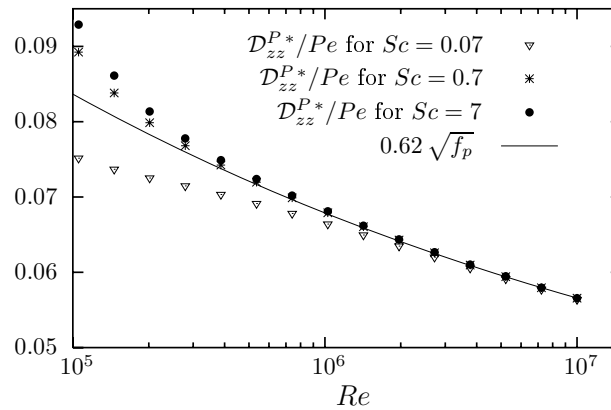


FIG. 3.5: Écoulement turbulent en canal plan : évolution de la fonction $C_P = \mathcal{D}_{zz}^{P*}/Pe$ en fonction du nombre de Reynolds. Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien. ($Sc_t = 0.9$).

3.2.3 Écoulement turbulent dans un tube à section circulaire

Pour une géométrie axisymétrique, le problème de fermeture est décrit en utilisant des coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* (1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \right) = Pe \delta \bar{u}_z^* \quad \text{pour } r^* \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[\text{ dans } V_f, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0, \quad \frac{\partial \eta_z^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1/2} = 0. \quad (3.57)$$

Dans cette configuration géométrique, les profils de la fonction de dispersion η_z^* ne seront

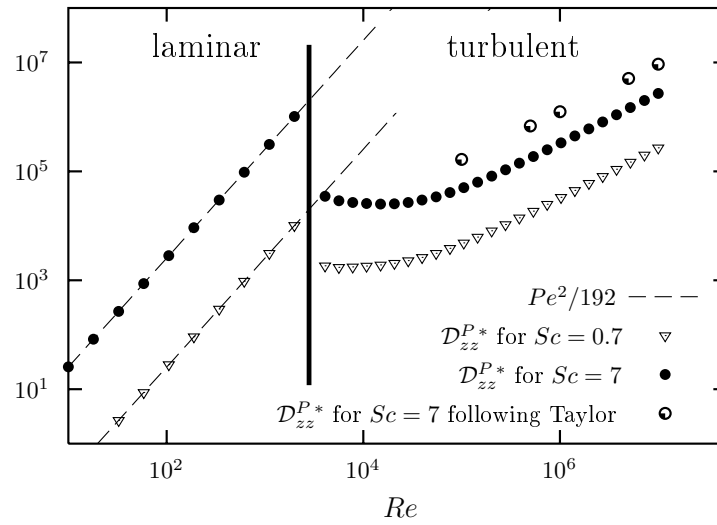


FIG. 3.6: Écoulement en tube à section circulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution du coefficient de dispersion passive D_{zz}^{P*} en fonction du nombre de Reynolds. Deux nombres de Schmidt sont représentés, à savoir $Sc = 0.7$ et $Sc = 7$. ($Sc_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

pas décrits. Le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas Reynolds de Chien est utilisé pour déterminer les champs de vitesse et de diffusivité turbulente. Nous montrons qualitativement que le comportement observé pour le canal plan est identique au cas du tube à section circulaire (voir Fig 3.6). La méthode des moindres des carrés est appliquée aux résultats correspondant à des nombres de Reynolds supérieurs à quelques 10^5 (voir Fig 3.7). Nous précisons alors :

$$\text{pour } Re > 5 \times 10^5, \quad D_{zz}^{P*} = C_P Pe, \quad (3.58)$$

$$\text{avec } C_P \simeq 0.39 \sqrt{f_p}. \quad (3.59)$$

La même dépendance par rapport à la racine carré du coefficient de frottement est observée, comme le suggérait l'analyse de Taylor (section 3.2.1). La figure 3.7 permet de comparer la fonction donnée par l'expression (3.48), la corrélation (3.59) ainsi que l'évolution du rapport D_{zz}^{P*}/Pe . Les différences observées justifient le fait que l'expression (3.47) procure des résultats significativement supérieurs aux résultats numériques qui ont été obtenus dans la présente étude (voir Fig 3.6). Le modèle de viscosité turbulente employé par Taylor est trop simple pour aboutir à des résultats précis.

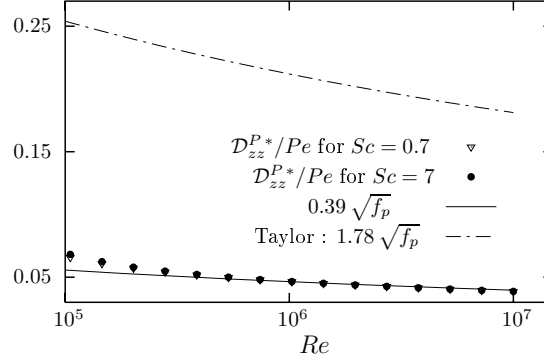


FIG. 3.7: Écoulement turbulent en tube à section circulaire : évolution de la fonction $C_P = \mathcal{D}_{zz}^{P*}/Pe$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison entre la présente étude (utilisant le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien) et l'analyse de Taylor.

3.2.4 Sensibilité au modèle de turbulence

La sensibilité des résultats par rapport au modèle de turbulence ne sera étudiée que pour la géométrie du canal plan. Les profils de vitesse et de viscosité turbulente sont à présent déterminés grâce au modèle $\bar{k} - l$, puis sont utilisés pour résoudre le problème de fermeture. Le nombre de Schmidt de l'écoulement est choisi égal à 7. Nous comparons l'évolution du rapport \mathcal{D}_{zz}^{P*}/Pe obtenue (en fonction du nombre de Reynolds) à celle décrite par (3.54) et (3.55). La figure 3.8 montre que la même tendance est retrouvée avec les deux modèles de

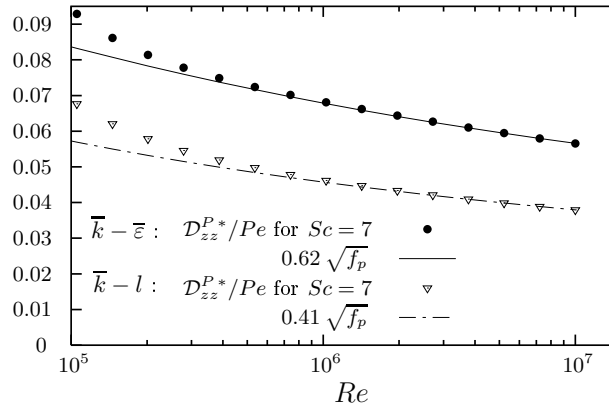


FIG. 3.8: Écoulement turbulent en canal plan : évolution de la fonction $C_P = \mathcal{D}_{zz}^{P*}/Pe$ en fonction du nombre de Reynolds. Résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien et le modèle $\bar{k} - l$. ($Sc_t = 0.9$).

turbulence. Les deux modèles produisent un comportement asymptotique analogue. Seule la fonction C_P diffère : $0.62\sqrt{f_p}$ pour le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ et $0.41\sqrt{f_p}$ pour le modèle $\bar{k} - l$. Une étude plus fine est menée concernant le cas $Re = 10^5$. Pour ce nombre de Reynolds, la figure 3.9 permet de comparer les profils de vitesse, de viscosité turbulente et de fonction de dispersion fournis par les deux modèles de turbulence. Il existe seulement une très faible différence de forme dans le profil de vitesse, et ils sont caractérisés par la même moyenne (car le même débit est imposé pour les deux calculs). Seuls les profils de viscosité turbulente

diffèrent significativement. Il en résulte des niveaux hétéroclites des profils de η_z^* . Cette différence de niveau est retrouvée en comparant les profils des produits $\delta\bar{u}_z^* \eta_z^*$.

Pour conclure, une cohérence certaine est constatée dans l'évolution du coefficient de dispersion passive, quel que soit le modèle de turbulence employé. L'évolution du coefficient de dispersion D_{zz}^{P*} en fonction de $Pe \times \sqrt{f_p}$, pour un écoulement turbulent dans un canal plan, ne dépend donc *a priori* du modèle de turbulence.

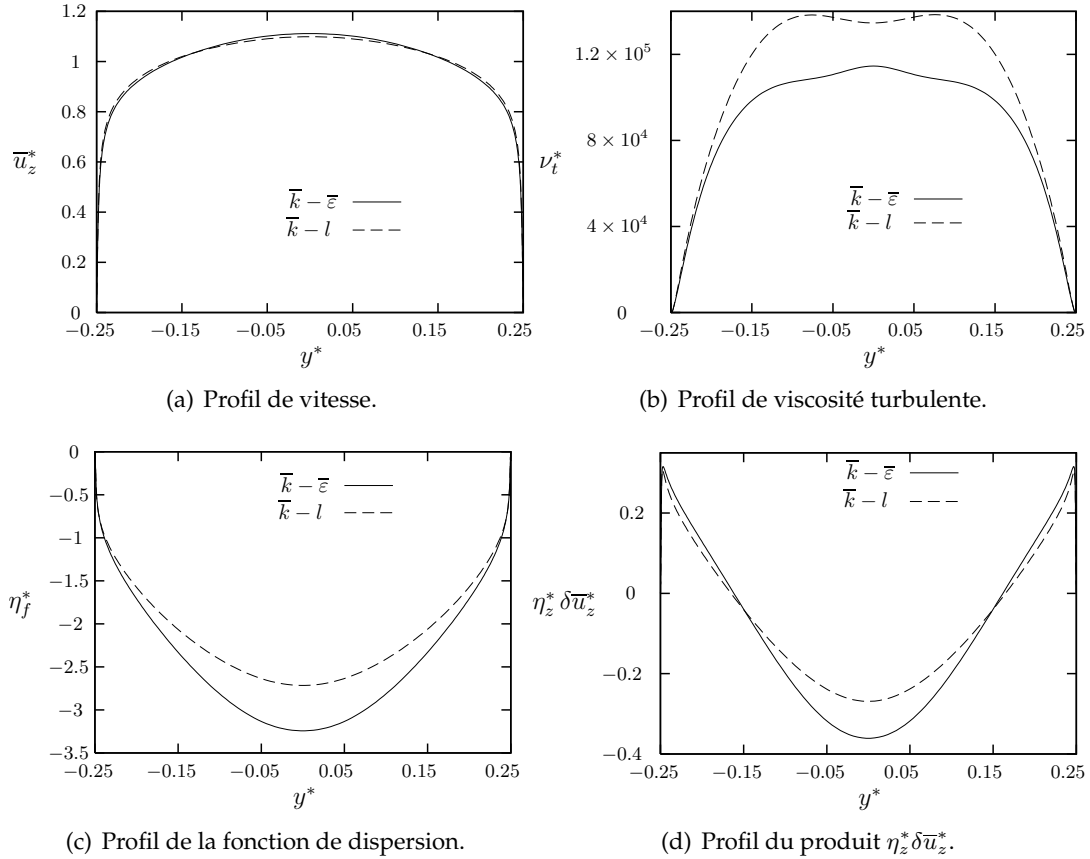


FIG. 3.9: Écoulement turbulent en canal plan : comparaison des profils de vitesse \bar{u}_z^* , de viscosité turbulente ν_t^* , de la fonction de dispersion η_z^* et du produit $\eta_z^* \delta\bar{u}_z^*$ obtenus à partir des modèles de turbulence $\bar{k} - l$ et $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien. $Re = 10^5$, $Sc = 7$, $Sc_t = 0.9$.

3.3 Dispersion thermique

La dispersion thermique diffère de la dispersion d'un scalaire passif à cause du flux de chaleur existant à l'interface fluide-solide, et, éventuellement, d'une source volumique externe (rayonnement). Si ce terme de rayonnement est constant, ou présente une échelle caractéristique de variation grande devant la taille du volume de moyenne, alors il n'influe pas sur le problème de dispersion. Sinon, il doit être pleinement pris en compte dans l'analyse. Par souci de simplicité, la source volumique externe est supposée nulle ($\mathcal{Q}_f = 0$). Par ailleurs, le flux en paroi intervient à la fois dans l'équation bilan doublement moyennée de la température et dans la condition limite associée (voir section 1.4.5). On parle alors de problème de dispersion active. Une autre différence fondamentale entre ces deux problèmes de

dispersion est que la température est une grandeur qui est à la fois définie dans la phase fluide et dans la phase solide. La prise en compte du flux à l'interface revient à coupler les deux équations bilans de température. En définissant la diffusivité thermique de la phase solide par $\alpha_s = k_s / (\rho c_p)_s$, et la source volumique de chaleur \mathcal{Q}_s , ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} \right) + \frac{\mathcal{Q}_s}{(\rho c_p)_s} \quad \text{dans la phase solide,} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial T_f}{\partial t} + \frac{\partial u_i T_f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} \right) \quad \text{dans la phase fluide.} \quad (3.61)$$

La condition limite à l'interface fluide - solide A_f traduit la continuité du flux thermique :

$$k_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i = k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i = \Phi \quad \text{sur } A_f. \quad (3.62)$$

Il est rappelé que, dans cette expression de la condition limite (3.62), n_i est la normale à l'interface fluide-solide orientée vers l'extérieur de la phase fluide (Fig. 1.1). La continuité de la température au voisinage de la paroi impose par ailleurs :

$$T_s = T_f = T_w \quad \text{sur } A_f. \quad (3.63)$$

Dans cette section, différents modèles thermiques macroscopiques seront décrits en précisant les conditions nécessaires à leur application. Nous montrerons que les possibilités du modèle mixte sont adaptées à l'étude des échangeurs de chaleur et des cœurs de réacteurs nucléaires. Sa mise en place correspond à la méthodologie généralement mise en oeuvre dans l'approche en sous-canaux [100]. L'adaptation de cette approche à l'étude macroscopique de la température sera explicitée pour un écoulement turbulent.

3.3.1 Les différents modèles macroscopiques thermiques

Tout d'abord, une moyenne intrinsèque de la phase solide est définie de la même façon que la moyenne intrinsèque fluide. Cette moyenne est associée à la définition de la fonction caractéristique de la phase solide (voir Fig. 1.1) :

$$\chi_s = \begin{cases} 1 & \text{si au point } \mathbf{x} \text{ et à l'instant } t, \text{ on est en présence de la phase solide,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.64)$$

La moyenne intrinsèque sur le solide d'une grandeur ξ est alors notée

$$\langle \xi \rangle_s. \quad (3.65)$$

La décomposition suivant la moyenne intrinsèque solide s'écrit :

$$\xi = \langle \xi \rangle_f + \delta^s \xi. \quad (3.66)$$

L'analyse des différentes contributions bibliographiques nous conduit à considérer quatre catégories de modèles thermiques macroscopiques :

1. les modèles à deux équations macroscopiques ;
2. les modèles hors équilibre thermique local à une équation macroscopique ;
3. les modèles à équilibre thermique local et à une équation macroscopique ;

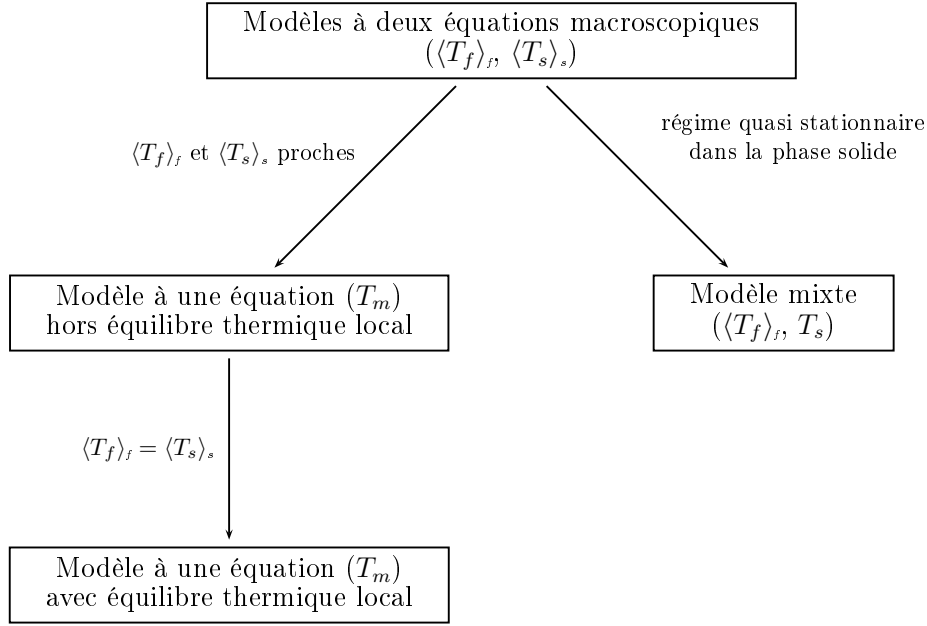


FIG. 3.10: Description des différents modèles macroscopiques thermiques.

4. les modèles mixtes.

Ces modèles vont être décrits dans le cas d'écoulements laminaires pour lesquels seule l'utilisation du filtre spatial est préconisée.

Les modèles à deux équations prennent en compte au niveau macroscopique les deux températures moyennes $\langle T_f \rangle_f$ et $\langle T_s \rangle_s$. Les équations bilans de T_f et T_s sont respectivement moyennées en utilisant les moyennes intrinsèques fluide et solide :

$$(1 - \phi) \frac{\partial \langle T_s \rangle_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((1 - \phi) \alpha_s \frac{\partial \langle T_s \rangle_s}{\partial x_i} \right) - \langle \alpha_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle \quad (3.67)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_i} [(1 - \phi) \langle \alpha_s \delta^s T_s n_i \delta_w \rangle_s] + (1 - \phi) \frac{\langle Q_s \rangle_s}{(\rho c_p)_s},$$

$$\phi \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi \langle u_i \rangle_f \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \alpha_f \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \langle \alpha_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle \quad (3.68)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \alpha_f \delta T_f n_i \delta_w \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \langle \delta u_i \delta T_f \rangle_f.$$

D'après la condition limite (3.62), l'échange de chaleur existant entre les deux phases apparaît clairement à l'échelle macroscopique à travers le terme

$$\langle \Phi \delta_w \rangle = \langle k_s \frac{\partial T_s}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle = \langle k_f \frac{\partial T_f}{\partial x_i} n_i \delta_w \rangle. \quad (3.69)$$

Dans le cadre des modèles à deux équations pour des écoulements quasi stationnaires, ce flux homogénéisé est modélisé suivant l'expression [84] :

$$\langle \Phi \delta_w \rangle = \langle \delta_w \rangle h_{fs} (\langle T_s \rangle_s - \langle T_f \rangle_f), \quad (3.70)$$

où h_{fs} est le coefficient macroscopique d'échange de chaleur, et $\langle \delta_w \rangle$ est la densité volumique d'interface solide (de dimension m^{-1}). La modélisation générique des équations bilans macroscopiques (3.67) et (3.68) prend la forme [16] :

$$(1 - \phi) \frac{\partial \langle T_s \rangle_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (1 - \phi) \mathcal{U}_i^{ss} \langle T_s \rangle_s + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{(1 - \phi)}{(\rho c_p)_s} \mathcal{U}_i^{sf} \langle T_f \rangle_f =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{(1 - \phi)}{(\rho c_p)_s} \mathcal{D}_{ij}^{ss} \frac{\partial \langle T_s \rangle_s}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left((1 - \phi) \mathcal{D}_{ij}^{sf} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} \right)$$

$$- \frac{\langle \delta_w \rangle h_{fs}}{(\rho c_p)_s} (\langle T_s \rangle_s - \langle T_f \rangle_f) + (1 - \phi) \frac{\langle Q_s \rangle_s}{(\rho c_p)_s}, \quad (3.71)$$

$$\phi \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \mathcal{U}_i^{fs} \langle T_s \rangle_s + \frac{\partial}{\partial x_i} \phi \mathcal{U}_i^{ff} \langle T_f \rangle_f =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi}{(\rho c_p)_f} \mathcal{D}_{ij}^{fs} \frac{\partial \langle T_s \rangle_s}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\phi}{(\rho c_p)_f} \mathcal{D}_{ij}^{ff} \frac{\partial \langle T_f \rangle_f}{\partial x_j} \right)$$

$$+ \frac{\langle \delta_w \rangle h_{fs}}{(\rho c_p)_f} (\langle T_s \rangle_s - \langle T_f \rangle_f). \quad (3.72)$$

Outre le coefficient d'échange h_{fs} , huit tenseurs ont été introduits pour la modélisation : il s'agit de $\mathcal{U}^{ss}, \mathcal{U}^{sf}, \mathcal{U}^{fs}, \mathcal{U}^{ff}, \mathcal{D}^{ss}, \mathcal{D}^{sf}, \mathcal{D}^{fs}, \mathcal{D}^{ff}$. La définition et une description des propriétés de ces tenseurs sont données dans [16]. Ces modèles sont particulièrement adaptés pour les écoulements où les températures macroscopiques fluide et solide sont très différentes. De part leur complexité, l'extension de leur dérivation à un écoulement turbulent est fastidieuse. Par ailleurs, le but de cette étude n'est pas d'étudier les champs de température des deux phases, mais de se focaliser sur la phase fluide. Pour ces deux raisons, les modèles à deux équations ne seront donc pas employés par la suite.

Si les températures macroscopiques fluide et solide sont suffisamment proches⁸, les modèles à une équation sont alors préconisés. Une seule température moyenne peut être considéré au niveau macroscopique [44] :

$$T_m = \frac{\omega_f \langle T_f \rangle_f + \omega_s \langle T_s \rangle_s}{\omega_f + \omega_s}. \quad (3.73)$$

Pour le modèle hors équilibre thermique local, la température moyenne $T_{m,h}$ construite à partir des enthalpies,

$$\omega_f = \phi (\rho c_p)_f, \quad \omega_s = (1 - \phi) (\rho c_p)_s$$

$$\implies T_{m,h} = \frac{\phi (\rho c_p)_f \langle T_f \rangle_f + (1 - \phi) (\rho c_p)_s \langle T_s \rangle_s}{\phi (\rho c_p)_f + (1 - \phi) (\rho c_p)_s}, \quad (3.74)$$

est choisie pour décrire l'évolution macroscopique du champ de température. Des déviations par rapport à cette moyenne sont introduites :

$$T_f = T_{m,h} + \underline{\delta} T_f, \quad (3.75)$$

$$T_s = T_{m,h} + \underline{\delta} T_s. \quad (3.76)$$

⁸Il a été montré que la différence entre les températures moyennes devait rester petite devant l'élévation de température à l'échelle du VER [84].

Nous soulignons que la déviation $\underline{\delta}T_f$ est différente de la déviation δT_f dans le sens où

$$\langle \underline{\delta}T_f \rangle_f \neq 0 \quad \text{alors que} \quad \langle \delta T_f \rangle_f = 0. \quad (3.77)$$

La définition (3.74) permet de dériver l'équation bilan de $T_{m,h}$ en manipulant les équations bilans (3.71) et (3.72). Un problème de fermeture peut ensuite être établi pour décrire les déviations $\underline{\delta}T_f$ et $\underline{\delta}T_s$ [69, 116]. Les moyennes intrinsèques des températures fluide et solide sont ensuite reconstituées à partir des relations :

$$\langle T_f \rangle_f = T_{m,h} + \langle \underline{\delta}T_f \rangle_f, \quad (3.78)$$

$$\langle T_s \rangle_s = T_{m,h} + \langle \underline{\delta}T_s \rangle_s. \quad (3.79)$$

Quant aux modèles à équilibre thermique local, ils sont en général associés à la température moyenne sur les phases $T_{m,p}$ [113, 84, 117] définie, à partir de (3.74), par [16]⁹

$$\omega_f = \phi, \quad \omega_s = 1 - \phi \quad \implies \quad T_{m,p} = \phi \langle T_f \rangle_f + (1 - \phi) \langle T_s \rangle_s. \quad (3.80)$$

La moyenne intrinsèque de la température dans la phase fluide est ensuite supposée égale à la moyenne intrinsèque de la température dans la phase solide :

$$\text{Hypothèse d'équilibre thermique local} \iff T_{m,p} = \langle T_f \rangle_f = \langle T_s \rangle_s. \quad (3.81)$$

L'équation bilan de $T_{m,p}$ est dérivée en utilisant la relation (3.80). En définissant des déviations par rapport à $T_{m,p}$, les températures du fluide et du solide sont exprimées sous la forme :

$$T_f = T_{m,p} + \delta T_f = \langle T_f \rangle_f + \delta T_f, \quad (3.82)$$

$$T_s = T_{m,p} + \delta^s T_s = \langle T_s \rangle_s + \delta^s T_s. \quad (3.83)$$

Le problème de fermeture associé à cette modélisation est alors équivalent à celui du scalaire passif. L'équilibre supposé entre le fluide et le solide implique un échange instantané entre ces phases à travers la paroi. En plus d'une faible différence entre les températures moyennes, les inerties thermiques des deux phases doivent être du même ordre de grandeur. Par contre, les temps caractéristiques de variations thermiques macroscopiques doivent être très grands devant les temps caractéristiques microscopiques [84]. Notons bien que cette hypothèse est difficilement envisageable si les deux phases présentent des propriétés thermiques sensiblement différentes, ou si le nombre de Péclet décrivant l'écoulement fluide est élevé [44].

La problématique de notre étude est relative à l'échauffement d'un fluide, provoqué par la phase solide. La différence de température entre les phases est importante et les propriétés thermiques des deux phases sont sensiblement différentes. Les modèles à une équation ne peuvent alors constituer une piste à explorer au cours de cette étude.

Une dernière alternative peut être envisagée. Il s'agit d'une approche mixte. Ce type d'approche est déjà largement utilisée dans les modèles se référant à l'analyse par sous-canaux [100, 108]. Le qualificatif «mixte» fait référence à l'association d'une approche locale (pour le solide) à une approche macroscopique (pour le fluide). Dans ce contexte, la phase solide est considérée comme un terme source (ou puits) par la phase fluide, alors que la

⁹Cette définition est identique à $T_m = \frac{1}{\Delta V(\mathbf{x})} \int_{\Delta V(\mathbf{x})} T(\mathbf{r}, t) dV_{\mathbf{r}}$.

phase fluide fournit les conditions limites pour le calcul à l'échelle microscopique de la température dans la phase solide. Plus précisément, le champ local de température dans le solide est donné par un calcul permettant de déduire le flux de chaleur cédé à la phase fluide. Un premier calcul de $\langle T_f \rangle_f$ est effectué en utilisant ce flux. Puis, en définissant un coefficient d'échange thermique local,

$$h = \frac{\Phi}{T_w - \langle T_f \rangle_f}. \quad (3.84)$$

La température de paroi T_w est ensuite déduite. Cette température est à nouveau employée pour le calcul thermique dans la phase solide (voir Fig. 3.11). Cette approche est particulièrement adaptée pour les écoulements où les temps caractéristiques associés à la phase solide sont très courts devant ceux de la phase fluide. Sur la figure 3.10, cette condition est résumée sous l'expression «régime quasi stationnaire dans la phase solide». C'est notamment le cas pour des réacteurs nucléaires en fonctionnement nominal où la source de chaleur provient de réactions nucléaires.

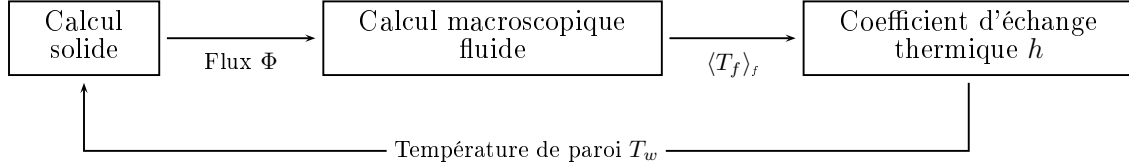


FIG. 3.11: Description des étapes composant l'approche mixte.

Le modèle mixte est approprié à l'étude spécifique de l'échauffement d'un fluide dans un milieu poreux. Cette approche sera ainsi développée pour des écoulements turbulents. Le flux thermique Φ sera par la suite considéré comme une donnée et non comme une inconnue. Il faut ajouter qu'en supposant que les propriétés thermiques du fluide sont constantes, les équations bilans de la température et de la quantité de mouvement sont découplées.

3.3.2 Le modèle mixte de dispersion thermique : dispersion active

Pour modéliser les termes de tortuosité et de dispersion thermique, nous adaptons la méthodologie appliquée dans le cas du scalaire passif afin de prendre en compte le flux en paroi.

Equation bilan de la déviation de température

Elle s'obtient classiquement en soustrayant l'équation bilan (1.146) de $\langle \overline{T_f} \rangle_f$ à celle de $\overline{T_f}$ (Eq. (1.145)) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \overline{u_i} \rangle_f \delta \overline{T_f}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f - \overline{u'_i T'_f} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \overline{u_i} \delta \overline{T_f}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \overline{u_i} \delta \overline{T_f} \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \overline{u_i} \langle \overline{T_f} \rangle_f) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \alpha_f \delta \overline{T_f} n_i \delta_w \rangle_f - \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

avec la condition limite suivante sur l'interface A_f :

$$\alpha_f \frac{\partial \overline{T_f}}{\partial x_i} n_i = \frac{\overline{\Phi}}{(\rho c_p)_f} \iff \alpha_f \left[\frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} \right] n_i = \frac{\overline{\Phi}}{(\rho c_p)_f}. \quad (3.86)$$

La démarche employée dans le cas du scalaire passif est à nouveau appliquée. L'hypothèse $H1$ fournit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{T_f} \rangle_f \ll \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \overline{u}_i \delta \overline{T_f}), \quad (3.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u}_i' \overline{T_f}' \rangle_f \ll \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{u}_i' \overline{T_f}'. \quad (3.88)$$

Dans l'équation (3.86), le terme de tortuosité est négligé devant le terme de convection macroscopique, et le terme de variation temporelle est négligé en suivant l'hypothèse $H2$. Le tableau 3.3 regroupe les ordres de grandeurs des termes composant l'équation bilan (3.85). En se référant à l'hypothèse $H3$ (hypothèse de fermeture au premier gradient), une forme modèle pour l'équation bilan de $\delta \overline{T_f}$ est déduite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \overline{u}_i \rangle_f \delta \overline{T_f}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \overline{T_f}}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \overline{u}_i \delta \overline{T_f}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \overline{u}_i \langle \overline{T_f} \rangle_f) - \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Dans l'équation (3.89), le terme faisant intervenir la température doublement moyennée $\langle \overline{T_f} \rangle_f$ ne doit pas être négligé car il représente le terme source de ce problème.

Le flux thermique turbulent modélisé, présent dans l'équation (3.85), est décomposé suivant sa contribution macroscopique et sa déviation. La contribution macroscopique est une nouvelle fois développée et l'hypothèse $H1$ de séparation des échelles fournit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_t \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} \right) &= \underbrace{\alpha_t \frac{\partial^2 \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i \partial x_i}}_{o\left(\frac{\alpha_t \langle \overline{T_f} \rangle_f}{L^2}\right)} + \underbrace{\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i}}_{o\left(\frac{\alpha_t \langle \overline{T_f} \rangle_f}{L}\right)} \simeq \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

En rappelant que le fluide est par hypothèse incompressible, l'équation modèle simplifiée de la déviation de température $\delta \overline{T_f}$ s'écrit :

$$\overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} \right) = \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial x_i} - \delta \overline{u}_i \right) \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}. \quad (3.91)$$

avec pour condition limite à l'interface A_f :

$$\alpha_f \frac{\partial \delta \overline{T_f}}{\partial x_i} n_i = \frac{\overline{\Phi}}{(\rho c_p)_f} - \alpha_f \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} n_i. \quad (3.92)$$

En comparant l'équation (3.91) avec l'équation modèle (3.21) de la déviation de scalaire passif, l'influence du flux en paroi se réduit à l'apport d'un terme source au problème. Cette contribution supplémentaire apparaît aussi explicitement dans la condition limite (3.92).

| | Terme dans l'équation (3.85) | ordre de grandeur | Négligé / Conservé |
|------|---|---|--------------------|
| I | $\frac{\partial \overline{\delta T_f}}{\partial t}$ | $\frac{\overline{\delta T_f}}{\tau}$ | Négligé |
| II | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \overline{u_i} \rangle_f \overline{\delta T_f})$ | $\langle \overline{u} \rangle_f \frac{\overline{\delta T_f}}{l}$ | Conservé |
| III | $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_f \frac{\partial \overline{\delta T_f}}{\partial x_i} \right)$ | $\alpha_f \frac{\overline{\delta T_f}}{l^2}$ | Conservé |
| IV | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_i T'_f} \rangle_f$ | $\frac{\langle \overline{u' T'_f} \rangle_f}{L}$ | Négligé |
| V | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u'_i T'_f})$ | $\frac{\overline{u' T'_f}}{l}$ | Conservé |
| VI | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{\delta u_i} \overline{\delta T_f} \rangle_f$ | $\frac{\overline{\delta u} \overline{\delta T_f}}{L}$ | Négligé |
| VII | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\delta u_i} \overline{\delta T_f})$ | $\frac{\overline{\delta u} \overline{\delta T_f}}{l}$ | Conservé |
| VIII | $\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{\delta u_i} \langle \overline{T_f} \rangle_f)$ | $\frac{\overline{\delta u} \langle \overline{T_f} \rangle_f}{L}$ | Conservé |
| IX | $\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{\alpha_f \delta T_f n_i \delta w} \rangle_f$ | $\alpha_f \frac{\overline{\delta T_f}}{L^2}$ [69] | Négligé |
| X | $\frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}$ | $\frac{\overline{\Phi} \langle \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}$ | Conservé |

TAB. 3.3: Ordre de grandeur des termes composant l'équation bilan (3.85).

Problème de fermeture

Dans l'équation (3.91), le membre de droite dépend linéairement du gradient macroscopique de température et du terme source de chaleur $\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f$ dû au flux en paroi. Ils constituent les termes sources de l'équation bilan de la déviation de température. Dans ce contexte, la relation de fermeture (3.23) est modifiée suivant le principe de superposition :

$$\overline{\delta T_f} = \eta_j \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_j} + \zeta \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} + \psi. \quad (3.93)$$

Nous utilisons la même notation pour la fonction de dispersion liée au gradient macroscopique, que ce soit dans le cas du scalaire passif ou celui de la température du fluide.

En se plaçant dans le cas d'un milieu périodique et ordonné, la fonction ψ est nulle [16]. La fonction de dispersion η_j est homogène à une longueur, alors que ζ est homogène à un temps. De plus, l'idempotence de la moyenne spatiale permet d'écrire une relation sur la moyenne de ces fonctions de dispersion, à savoir :

$$\langle \overline{\delta T_f} \rangle_f = 0 \iff \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} = 0. \quad (3.94)$$

Cette relation est une relation additionnelle dans le problème de fermeture.

La même simplification que celle présentée par le développement (3.90) peut à nouveau être appliquée pour écrire les dérivées successives de la déviation de température (sous sa

forme présentée en (3.93) :

$$\frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \simeq \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \delta \overline{T}_f}{\partial x_i} \right] \simeq \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f}. \quad (3.96)$$

En substituant le gradient de la déviation de température par son expression simplifiée (3.95) dans la condition limite (CL M1), la condition limite en paroi sur les fonctions de dispersion est obtenue :

$$k_f \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} n_i + k_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} n_i = \frac{\overline{\Phi}}{(\rho c_p)_f} \text{ sur } A_f. \quad (3.97)$$

De par la superposition des problèmes, le problème de fermeture du scalaire passif doit être retrouvé dans le cas limite où $\overline{\Phi} \rightarrow 0$. Afin que la fonction η coïncide avec celle définie dans l'étude de la dispersion d'un scalaire passif, les problèmes de fermeture décrivant les évolutions de η et ζ ne doivent pas être couplés. A l'interface A_f , le terme source de chaleur est alors uniquement lié au gradient de ζ :

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) n_i = 0 \\ \left(\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} \right) n_i = \frac{\overline{\Phi}}{(\rho c_p)_f} \end{array} \right| \text{ sur } A_f. \quad (3.98)$$

En substituant l'équation modèle de la déviation de température (3.93) dans l'équation (3.91) et en utilisant les simplifications présentées en (3.95) et (3.96), le problème de fermeture peut à présent être écrit :

$$\text{dans le VER : } \quad \overline{u}_i \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial \alpha_t}{\partial x_j} - \delta \overline{u}_j, \quad (3.99)$$

$$\overline{u}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(\alpha_f + \alpha_t) \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right] = -1, \quad (3.100)$$

$$\text{sur } A_f : \quad \frac{\partial \eta_j}{\partial x_i} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (3.101)$$

$$\alpha_f \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} n_i = \frac{\overline{\Phi}}{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}, \quad (3.102)$$

$$\text{périodicité : } \quad \eta_j(x_i + l_i) = \eta_j(x_i), \quad \zeta(x_i + l_i) = \zeta(x_i), \quad (3.103)$$

$$\text{relation additionnelle : } \quad \langle \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T}_f \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \zeta \rangle_f \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} = 0. \quad (3.104)$$

L'évolution de chaque fonction de dispersion est gouvernée par une équation de convection - diffusion comprenant différents termes sources. Il est aisé de vérifier que la fonction η est décrite par un problème de fermeture équivalent à celui du scalaire passif. Si la température est traitée comme un scalaire passif ou si l'on considère que la phase fluide est

en équilibre thermique avec la phase solide, on retrouve les modèles dit «à l'équilibre thermique». La fonction ζ permet d'obtenir une représentation macroscopique du transfert de chaleur en paroi. Cette seconde fonction de dispersion prend donc en compte le déséquilibre thermique à l'intérieur des pores. Pour la catégorie d'écoulements qui est ici étudiée, la déviation de température est en majorité provoquée par le flux en paroi. Cette remarque laisse à penser que la contribution du flux en paroi dans le phénomène de dispersion thermique sera prépondérante.

A ce stade de l'étude, nous avons établi une relation entre la déviation de température, le gradient de température doublement moyennée et le terme source de chaleur, en définissant deux fonctions de dispersion (Eq. (3.93)). Nous avons alors établi le problème de fermeture décrivant les évolutions de ces deux fonctions η et ζ (système (3.99)-(3.101)). A présent, en utilisant la relation de fermeture (3.93) dans l'équation (1.146), nous pouvons exprimer l'équation macroscopique modèle pour la température du fluide :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial \phi \langle \overline{u_i} \rangle_f \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi (\alpha_f + \alpha_{t\phi}) \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i} \right) + \phi \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} \\ & - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \delta \overline{u_i} \eta_j \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{(a)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \delta \overline{u_i} \zeta \rangle_f \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} \right)}_{(b)} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \alpha_f \eta_j n_i \delta_w \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi \langle \alpha_f \zeta n_i \delta_w \rangle_f \frac{\langle \overline{\Phi} \delta_w \rangle_f}{(\rho c_p)_f} \right)}_{(d)}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Dans cette équation, le flux turbulent de température moyenné spatialement a été modélisé par une fermeture au premier gradient, en introduisant le coefficient de diffusivité thermique turbulent macroscopique $\alpha_{t\phi}$:

$$-\langle \overline{u_i' T_f'} \rangle_f = \alpha_{t\phi} \frac{\partial \langle \overline{T_f} \rangle_f}{\partial x_i}. \quad (3.106)$$

Dans l'équation (3.105), la première contribution du modèle de dispersion (terme (a)) agit comme une diffusion à l'échelle macroscopique, alors que la seconde contribution (terme (b)) correspond à un transport du terme source de chaleur avec un coefficient de transport défini par $\langle \delta \overline{u_i} \zeta \rangle_f$. Sans source de chaleur en paroi et pour un fluide incompressible, la température peut être considérée comme un scalaire passif et seule la première contribution est non nulle. Le terme (a) est donc naturellement désigné comme une *dispersion passive*. De façon complémentaire, le terme (b) est appelé *dispersion active*. Nous notons :

$$\mathcal{D}_{ij}^P \equiv -\langle \delta \overline{u_i} \eta_j \rangle_f, \quad (3.107)$$

$$\mathcal{D}_i^A \equiv -\langle \delta \overline{u_i} \zeta \rangle_f. \quad (3.108)$$

La tortuosité est quant à elle modélisée par les termes (c) et (d). De la même manière que pour la dispersion, le terme (c) est équivalent à celui observé dans l'étude du scalaire passif. Le terme (d) est un terme supplémentaire prenant en compte la source de chaleur :

$$\mathcal{T}_{ij}^P \equiv \langle \eta_j n_i \delta_w \rangle_f, \quad (3.109)$$

$$\mathcal{T}_i^A \equiv \langle \zeta n_i \delta_w \rangle_f. \quad (3.110)$$

3.3.3 Mise sous forme adimensionnée

Pour adimensionner les équations liées au champ de température du fluide, la méthodologie est identique au cas du scalaire passif en utilisant l'analogie entre les deux coefficients de diffusion D et α_f . Nous définissons alors le temps caractéristique de diffusion thermique :

$$\tau_{d,T} = \frac{D_H^2}{\alpha_f}. \quad (3.111)$$

Le nombre de Prandtl permet de comparer les temps caractéristiques de diffusion thermique et de quantité de mouvement :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_f}. \quad (3.112)$$

Le nombre de Prandtl est l'analogie du nombre de Schmidt pour la diffusion thermique. Le nombre de Péclet permet de lier le temps caractéristique de convection macroscopique au temps caractéristique de diffusion thermique¹⁰ :

$$Pe = \frac{\langle \bar{u} \rangle_f D_H}{\alpha_f} = Re \times Pr. \quad (3.113)$$

De la même façon que le nombre de Schmidt turbulent, le nombre de Prandtl turbulent Pr_t introduit dans la relation (3.12) est donné par :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = Pr \frac{\nu_t^*}{\alpha_t^*}. \quad (3.114)$$

En introduisant arbitrairement une température fluide de référence T_f^r , nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} \overline{T_f^*} &\equiv \frac{\overline{T_f}}{T_f^r}, \quad t^* \equiv \frac{t}{\tau_{d,T}}, \quad \alpha_f^* \equiv \frac{\alpha_f}{\alpha_f} = 1, \quad \alpha_t^* \equiv \frac{\alpha_t}{\alpha_f}, \quad \alpha_{t_\phi}^* \equiv \frac{\alpha_{t_\phi}}{\alpha_f}, \\ \delta_w^* &\equiv \delta_w D_H, \quad (\rho c_p)_f^* \equiv \frac{(\rho c_p)_f}{(\rho c_p)_f} = 1, \quad \overline{\Phi}^* \equiv \overline{\Phi} \frac{D_H}{\alpha_f T_f^r}, \quad \eta_j^* \equiv \frac{\eta_j}{D_H}, \quad \zeta^* \equiv \frac{\zeta}{D_H^2 / \alpha_f}. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Les tenseurs de dispersion sont adimensionnés suivant les relations :

$$\mathcal{D}_{ij}^{P*} \equiv \frac{\mathcal{D}_{ij}^P}{\alpha_f} = -Pe \langle \delta \bar{u}_i^* \eta_j^* \rangle_f, \quad (3.116)$$

$$\mathcal{D}_i^{A*} \equiv \frac{\mathcal{D}_i^A}{D_H} = -Pe \langle \delta \bar{u}_i^* \zeta^* \rangle_f. \quad (3.117)$$

Le tenseur de tortuosité \mathcal{T}_{ij}^P est une quantité sans dimension, par contre le tenseur \mathcal{T}_i^A est homogène à l'inverse d'une vitesse :

$$\mathcal{T}_{ij}^{P*} \equiv \mathcal{T}_{ij}^P = \langle \eta_j^* n_i \delta_w^* \rangle_f, \quad (3.118)$$

$$\mathcal{T}_i^{A*} \equiv \langle \bar{u} \rangle_f \mathcal{T}_i^A = Pe \langle \zeta^* n_i \delta_w^* \rangle_f. \quad (3.119)$$

¹⁰Cette définition est commune aux cas de la température et du scalaire passif en permutant D et α_f , ou Sc et Pr .

En utilisant ces variables adimensionnées, l'équation bilan macroscopique de la température du fluide s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial t^*} + \frac{\partial \phi Pe \langle \overline{u_i^*} \rangle_f \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial x_i^*} &= \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[\phi (1 + \alpha_{t\phi}^*) \frac{\partial \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial x_i^*} \right] + \phi \langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\phi \mathcal{D}_{ij}^{P^*} \frac{\partial \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial x_j^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\phi \mathcal{D}_i^{A^*} \langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\phi \mathcal{T}_{ij}^{P^*} \frac{\partial \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial x_j^*} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left(\phi Pe^{-1} \mathcal{T}_i^{A^*} \langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f \right). \end{aligned} \quad (3.120)$$

De la même façon, nous dérivons le problème de fermeture adimensionné pour les fonctions de dispersion η et ζ :

$$\text{dans le VER :} \quad Pe \overline{u_i^*} \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} \right] = \left(\frac{\partial \alpha_t^*}{\partial x_j^*} - Pe \delta_{ij}^* \right), \quad (3.121)$$

$$Pe \overline{u_i^*} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} - \frac{\partial}{\partial x_i^*} \left[(1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} \right] = -1, \quad (3.122)$$

$$\text{sur } A_f : \quad \frac{\partial \eta_j^*}{\partial x_i^*} n_i = -\delta_{ij} n_i, \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial x_i^*} n_i = \frac{\overline{\Phi^*}}{\langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f}, \quad (3.124)$$

$$\text{périodicité :} \quad \eta_j^*(x_i^* + l_i^*) = \eta_j^*(x_i^*), \quad \zeta^*(x_i^* + l_i^*) = \zeta^*(x_i^*), \quad (3.125)$$

$$\text{relation additionnelle :} \quad \langle \eta_j^* \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f^*} \rangle_f}{\partial x_j^*} + \langle \zeta^* \rangle_f \langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f = 0. \quad (3.126)$$

3.4 Dispersion active : résultats

Nous étudierons tout d'abord le coefficient de dispersion active pour un écoulement laminaire dans un canal bidimensionnel plan et dans un tube à section circulaire. Puis, son évolution pour le régime turbulent sera analysée.

3.4.1 Écoulement laminaire dans un canal bidimensionnel plan et dans un tube à section circulaire

Pour le régime laminaire, seule la géométrie du VER influe sur le profil de la fonction de dispersion ζ^* . Dans un premier temps, nous explicitons le terme lié au Dirac de surface, intervenant dans la condition limite de la fonction ζ^* . En considérant que l'échelle caractéristique de variation du flux est grande devant l'échelle du VER, nous avons :

$$\langle \overline{\Phi^* \delta_w^*} \rangle_f = \overline{\Phi^*} \langle \delta_w^* \rangle_f. \quad (3.127)$$

Puis le calcul de la densité de surface adimensionnée $\langle \delta_w^* \rangle_f$ pour un canal plan fournit :

$$\langle \delta_w^* \rangle_f = 4. \quad (3.128)$$

Ainsi, pour un écoulement de Poiseuille dans un canal bidimensionnel plan, nous avons :

$$\frac{\partial^2 \zeta^*}{\partial z^{*2}} = 1 \quad \text{pour } y^* \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[, \quad (3.129)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=-1/4} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=1/4} = \frac{1}{4}. \quad (3.130)$$

Le signe des membres de droite provient de l'orientation de la normale à la paroi (qui est dirigée vers l'extérieur du domaine fluide, Fig 1.1). La fonction de dispersion qui satisfait les équations (3.129) et (3.130) est décrite par :

$$\zeta^*(y^*) = \frac{y^{*2}}{2} + C_\zeta, \quad (3.131)$$

où la constante C_ζ dépend de la valeur de la déviation de température $\overline{\delta T_f}$ à la paroi, du flux de chaleur $\overline{\Phi}$ et du gradient de la température doublement moyennée. Grâce à l'idempotence de la moyenne spatiale, cette valeur n'influe pas sur le calcul du coefficient de dispersion active :

$$\mathcal{D}_z^{A*} = -Pe \langle \delta \overline{u}_z^* \zeta^* \rangle_f = \frac{Pe}{240}. \quad (3.132)$$

Pour la géométrie du tube à section circulaire nous formulons à nouveau le problème de fermeture en utilisant des coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right) = 1 \quad \text{pour } r^* \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[, \quad (3.133)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=0} = 0, \quad \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1/2} = \frac{1}{4}. \quad (3.134)$$

La fonction de dispersion qui satisfait ces équations est donnée par :

$$\zeta^*(r^*) = \frac{y^{*2}}{4} + C_\zeta. \quad (3.135)$$

Nous en déduisons la valeur du coefficient de dispersion active :

$$\mathcal{D}_z^{A*} = -Pe \langle \delta \overline{u}_z^* \zeta^* \rangle_f = \frac{Pe}{96}. \quad (3.136)$$

3.4.2 Écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan

Nous étudions à présent le phénomène de dispersion active pour un écoulement turbulent en précisant le problème de fermeture pour la fonction ζ^* dans la configuration du canal bidimensionnel :

$$\frac{\partial}{\partial y^*} \left((1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \right) = 1 \quad \text{pour } y^* \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[, \quad (3.137)$$

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=-1/4} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{\partial \zeta^*}{\partial y^*} \Big|_{y^*=1/4} = \frac{1}{4}. \quad (3.138)$$

Le profil de diffusivité thermique turbulente est obtenu en utilisant le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien et la définition du nombre de Prandtl turbulent. Il est ensuite reporté dans l'équation bilan (3.137) pour calculer numériquement le profil de ζ^* . Cette fonction est définie à une constante additive près, qui, de la même façon que pour la fonction η_z , n'intervient pas dans le calcul de \mathcal{D}_z^{A*} . Nous choisissons arbitrairement de fixer la valeur de cette constante à 1.

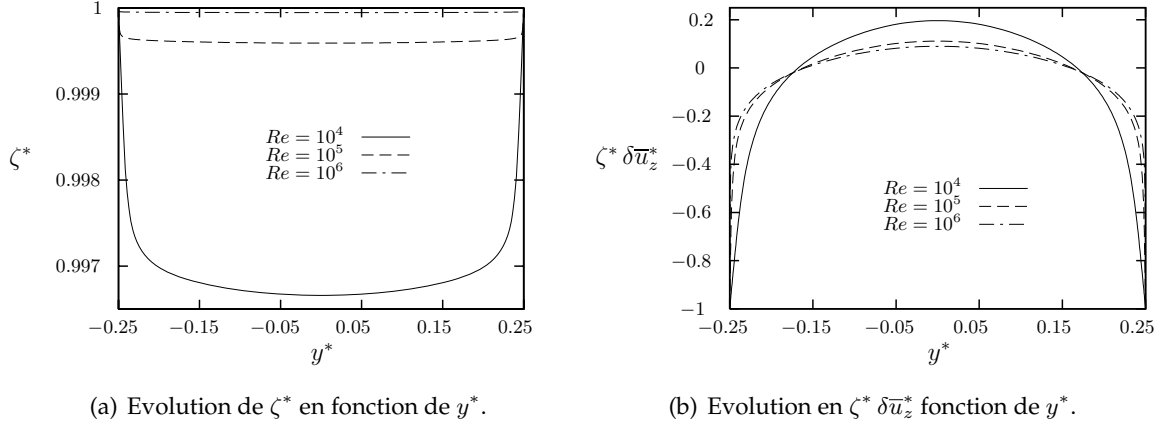


FIG. 3.12: *Écoulement turbulent dans un canal plan : profils de la fonction de dispersion ζ^* et du produit $\zeta^* \delta \bar{u}_z^*$. Ces profils correspondent aux trois nombres de Reynolds $Re = 10^4$, $Re = 10^5$ et $Re = 10^6$. ($Pr = 7$, $Pr_t = 0.9$). Utilisation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.*

Nous traçons ensuite les profils de ζ^* le long de la section transverse au canal, pour différents nombres de Reynolds (voir Fig. 3.12 (a)). L'amplitude des variations de ζ^* au voisinage de la paroi est faible. De plus, cette amplitude diminue lorsque le nombre de Reynolds augmente. En effet, le terme source de (3.137) étant constant, l'augmentation de la diffusivité thermique turbulente, avec celle du nombre de Reynolds, tend à aplatis progressivement le profil de ζ^* . Le produit $\zeta^* \delta \bar{u}_z^*$ est donc de moins en moins influencé par le profil de ζ^* . Le profil de vitesse tend aussi à s'aplatir de plus en plus.

La figure 3.13 représente l'évolution de \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Reynolds. Nous constatons que, pour le régime laminaire, le comportement déterminé analytiquement dans la section précédente est retrouvé. Puis, pour des nombres de Reynolds compris entre 5×10^3 et 10^5 , nous observons une différence de comportement suivant la valeur du nombre de Prandtl. De la même façon que pour la dispersion passive, la compétition entre l'épaisseur de la couche limite de quantité de mouvement et l'épaisseur de la couche limite thermique explique ces comportements. Pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 , la forme quasiment plate du profil de ζ^* n'influence plus l'évolution du coefficient de dispersion active. Nous constatons alors un comportement asymptotique décrit par la fonction :

$$\text{pour } Re > 10^5, \quad \mathcal{D}_z^{A*} = \mathcal{C}_A, \quad (3.139)$$

où \mathcal{C}_A est une constante égale à :

$$\mathcal{C}_A \simeq 1.6. \quad (3.140)$$

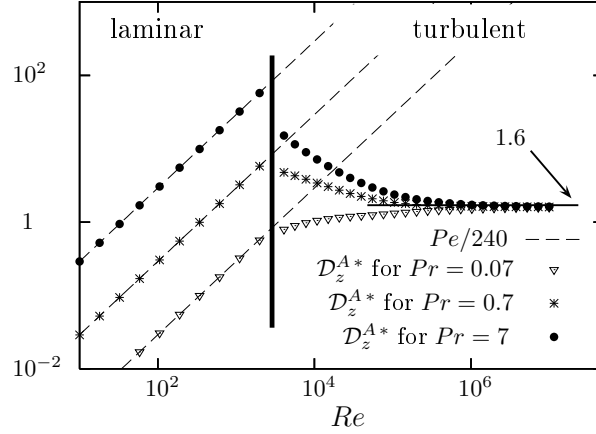


FIG. 3.13: Écoulement dans un canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du coefficient de dispersion active \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Reynolds. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Utilisation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

3.4.3 Écoulement turbulent dans un tube à section circulaire

Le problème de fermeture associé à la dispersion active, pour un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire est décrit par le système d'équations suivant :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* (1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right) = 1 \quad \text{pour } r^* \in \left] 0; \frac{1}{2} \right[, \quad (3.141)$$

$$\left. \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \zeta^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=1/2} = \frac{1}{4}. \quad (3.142)$$

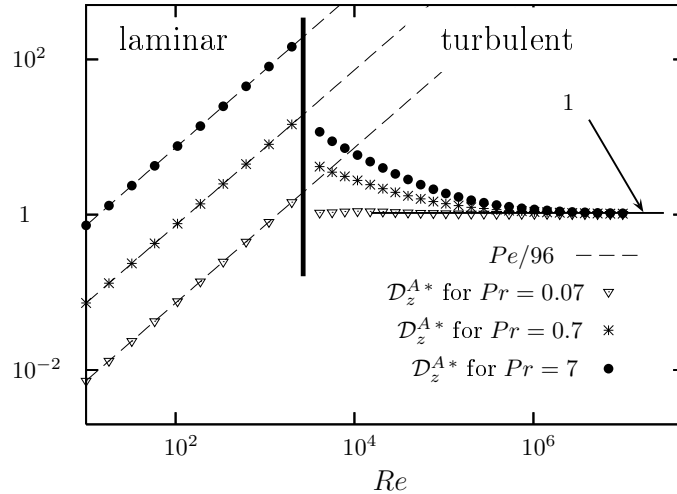


FIG. 3.14: Écoulement en tube à section circulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution du coefficient de dispersion active \mathcal{D}_z^{A*} en fonction du nombre de Reynolds. Deux nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Utilisation du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Ce système est résolu en reportant le profil de diffusivité thermique turbulente obtenu à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien. Les phénomènes régissant l'évolution du coefficient de dispersion active sont similaires à ceux décrits pour la géométrie du canal plan. Seule la valeur de \mathcal{C}_A est changée (voir Fig. 3.14) :

$$\text{pour } Re > 3 \times 10^5, \quad \mathcal{D}_z^{A*} = \mathcal{C}_A, \quad (3.143)$$

où \mathcal{C}_A est une constante égale à :

$$\mathcal{C}_A \simeq 1. \quad (3.144)$$

3.4.4 Sensibilité au modèle de turbulence

Dans la configuration du canal plan, la même étude est réalisée en utilisant les champs locaux obtenus grâce au modèle $\bar{k} - l$. La figure 3.15 montre une bonne concordance des résultats entre ceux obtenus grâce au modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien (section 3.4.2) et ceux obtenus à partir du modèle $\bar{k} - l$. Au sens qualitatif, les résultats présentés dans cette section ne dépendent donc pas du choix du modèle de turbulence.

Nous avons ainsi montré que le coefficient de dispersion active dépendait asymptotiquement du nombre de Péclet. A la différence du coefficient de dispersion passive, il ne dépend pas de la racine carré du coefficient de frottement. Cela s'explique par les termes sources présents dans les problèmes de fermeture de dispersion active et passive. Pour la dispersion passive, ce sont les déviations de vitesse qui constituent le terme source. Ces déviations sont le plus importantes près des parois. La forme de leur profil dans cette zone est liée à la vitesse de frottement, et donc à $\sqrt{f_p}$. Par contre, dans le problème de fermeture associé à la dispersion active, le second membre est constant.

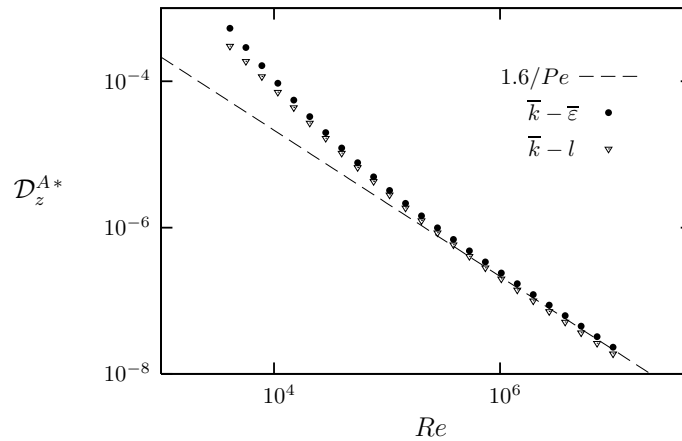


FIG. 3.15: Écoulement dans un canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du coefficient de dispersion active \mathcal{D}_z^{A*} . Comparaison des résultats obtenus à partir de deux modèles de turbulence : le modèle $\bar{k} - l$ et le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien. ($Pr = 7$, $Pr_t = 0.9$).

3.5 Dispersion et diffusion : éléments de comparaison

Nous désirons maintenant comparer les flux diffusifs et dispersifs dans la direction de l'écoulement. Une estimation de ces flux au sein du VER est alors effectuée. Les flux diffusifs

moléculaire et turbulent sont ainsi regroupés :

$$(1 + \alpha_{t\phi}^*) \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial z^*}. \quad (3.145)$$

A ce stade de l'étude, le coefficient $\alpha_{t\phi}^*$ ne peut être évalué grâce à un modèle de turbulence macroscopique. Pour la géométrie régulière du canal plan, à flux thermique variable à l'échelle macroscopique, l'écoulement étant établi au sein du VER, le profil de température est auto-semblable. Cela implique :

$$\forall y^*, r^* \quad \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial z^*} = \frac{\partial \overline{T_f}^*}{\partial z^*} = \text{constante}. \quad (3.146)$$

Le flux diffusif total peut donc être exprimé en fonction de la moyenne spatiale du coefficient local de diffusivité thermique turbulente :

$$(1 + \alpha_{t\phi}^*) \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial x_i^*} = \langle (1 + \alpha_t^*) \frac{\partial \overline{T_f}^*}{\partial x_i^*} \rangle_f = \langle 1 + \alpha_t^* \rangle_f \frac{\partial \overline{T_f}^*}{\partial x_i^*} = \langle 1 + \alpha_t^* \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial x_i^*}. \quad (3.147)$$

En effet, dans ce cas simple, la diffusivité thermique turbulente à l'échelle macroscopique correspond à la moyenne spatiale de la diffusivité thermique turbulente, c'est à dire :

$$\alpha_{t\phi}^* = \langle \alpha_t^* \rangle_f. \quad (3.148)$$

Par la suite, nous noterons

$$\alpha_e^* = \alpha_f^* + \alpha_t^* = 1 + \alpha_t^*, \quad (3.149)$$

le coefficient de diffusion effectif (incluant les diffusions laminaire et turbulente) adimensionné par α_f . Puis, au sein du VER, grâce à l'hypothèse de séparation d'échelles, l'équation (3.120) permet d'estimer le gradient de température macroscopique :

$$Pe \langle \overline{u_z}^* \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial x_i^*} = \langle \overline{\Phi}^* \delta_w^* \rangle_f = 4 \overline{\Phi}^*. \quad (3.150)$$

Nous soulignons que cette estimation n'est valable qu'à l'intérieur du VER. Elle ne peut en aucun cas être utilisée pour caractériser une évolution sur une distance supérieure à l'échelle caractéristique du VER, du fait notamment de la variabilité axiale du flux. En utilisant l'estimation (3.150) du gradient macroscopique de température en fonction du flux de chaleur, les flux diffusifs et dispersifs sont évalués à l'intérieur du VER :

$$\text{Flux de diffusion moléculaire et turbulent :} \quad \langle \alpha_e^* \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial z^*}; \quad (3.151)$$

$$\text{Flux de dispersion passive :} \quad \mathcal{D}_{zz}^{P*} \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial z^*}; \quad (3.152)$$

$$\text{Flux de dispersion active :} \quad 4 \overline{\Phi}^* \mathcal{D}_z^{A*} = Pe \mathcal{D}_z^{A*} \frac{\partial \langle \overline{T_f}^* \rangle_f}{\partial z^*}. \quad (3.153)$$

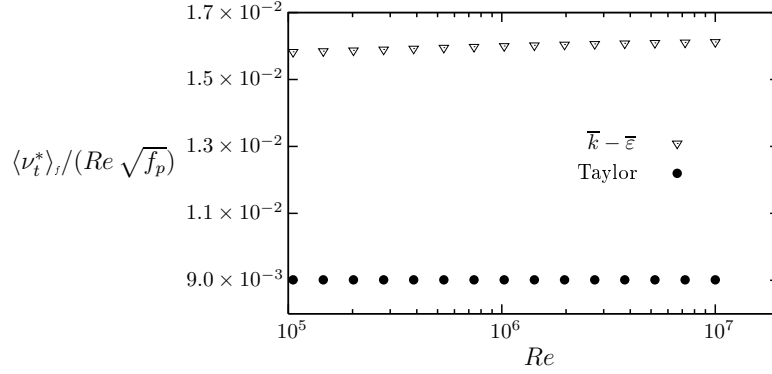


FIG. 3.16: *Écoulement turbulent en tube à section circulaire : évolution de la viscosité turbulente moyennée spatialement. Comparaison de l'estimation (3.155) proposée par Taylor et des résultats obtenus avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien.*

3.5.1 Coefficient de diffusion moléculaire et turbulent à l'échelle macroscopique

La définition (3.114) du nombre de Prandtl turbulent permet ensuite de relier la moyenne spatiale du coefficient de diffusivité thermique à celle de la viscosité turbulente :

$$\langle \alpha_t^* \rangle_f = \frac{Pr}{Pr_t} \langle \nu_t^* \rangle_f. \quad (3.154)$$

D'après l'analyse de Taylor présentée dans la section 3.2.1 pour un tube à section circulaire, l'évolution du coefficient $\langle \nu_t^* \rangle_f$ en fonction du nombre de Reynolds peut être obtenue en moyennant l'expression modèle (3.43) de la viscosité turbulente ν_t (ainsi qu'en l'adimensionnant) :

$$\langle \nu_t^* \rangle_f = 0.051 \frac{D_H}{2} \frac{u_f}{\nu}. \quad (3.155)$$

En utilisant la relation (2.148) liant u_f à f_p , il vient :

$$\langle \nu_t^* \rangle_f = \beta_{\nu,tube} Re \sqrt{f_p}. \quad (3.156)$$

La viscosité turbulente $\langle \nu_t^* \rangle_f$ est donc corrélée au produit $Re \times \sqrt{f_p}$. Ce produit est par ailleurs équivalent au nombre de Reynolds turbulent défini par (2.139). Plus précisément, cette analyse aboutit à :

$$\text{selon Taylor,} \quad \beta_{\nu,tube} = 9 \times 10^{-3}. \quad (3.157)$$

Dans notre étude, les résultats (pour $Re \gtrsim 10^5$) fournis par le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien conduit à la corrélation :

$$\langle \nu_t^* \rangle_f = \beta_{\nu,tube} Re \sqrt{f_p}, \quad (3.158)$$

où $\beta_{\nu,tube}$ est une constante égale à 1.6×10^{-2} (voir Fig. 3.16). Nous observons que (3.155) sous-estime le coefficient de viscosité turbulente moyennée par rapport au modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$.

Pour la géométrie du canal plan, une optimisation menée sur les résultats correspondant à des nombres de Reynolds supérieurs à 10^5 montre :

$$\langle \nu_t^* \rangle_f = \beta_{\nu} Re \sqrt{f_p}, \quad (3.159)$$

où β_ν est une constante égale à 6.65×10^{-3} pour le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien et à 7.9×10^{-3} pour le modèle $\bar{k} - l$ (Fig. 3.17). Nous prendrons le résultat obtenu avec le modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ pour référence.

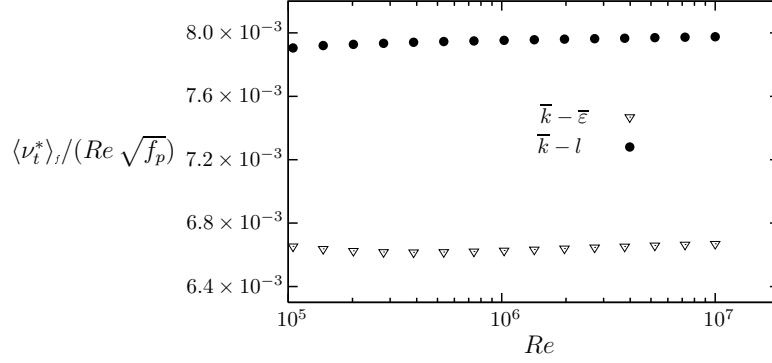


FIG. 3.17: Écoulement turbulent en canal plan : évolution du rapport $Re / \langle \nu_t^* \rangle_t$ par rapport au nombre de Reynolds. Comparaison des résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - l$ et du modèle $\bar{k} - \bar{\epsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

3.5.2 Comparaisons pour le canal bidimensionnel plan

Comparaison du flux de dispersion passive avec le flux diffusif total

Nous nous focalisons à présent sur la géométrie du canal plan. La figure 3.18 représente l'évolution du rapport entre le flux de dispersion passive et le flux diffusif effectif pour un écoulement turbulent dans un canal plan. Pour le régime laminaire, nous retrouvons le résultat analytique déduit de la relation (1.107) :

$$\frac{\text{Flux de dispersion passive}}{\text{Flux de diffusion moléculaire}} = \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\alpha_f^*} = \frac{Pe^2}{840} \quad \text{pour } Re < 2 \times 10^3. \quad (3.160)$$

Concernant le régime turbulent, il est constaté que, pour des nombres de Reynolds modérés (compris entre 5×10^3 et environ 10^5), l'évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*} / \langle \alpha_e^* \rangle_f$ dépend du nombre de Prandtl. Pour des valeurs supérieures du nombre de Reynolds, ce rapport semble atteindre une valeur limite asymptotique. En reportant la relation (3.54) dans l'expression du rapport des coefficients, nous écrivons :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Pe}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Re Pr}{(1 + \langle \alpha_t^* \rangle_f)}. \quad (3.161)$$

La définition (3.154) du nombre de Prandtl turbulent permet de relier le coefficient de diffusion α_t^* à la viscosité turbulente ν_t^* :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Re Pr}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \langle \nu_t^* \rangle_f\right)}. \quad (3.162)$$

Quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl, lorsque le nombre de Reynolds augmente et en se reportant à la relation (3.159), nous pouvons écrire :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = C_P \frac{Re}{\langle \nu_t^* \rangle_f} Pr_t. \quad (3.163)$$

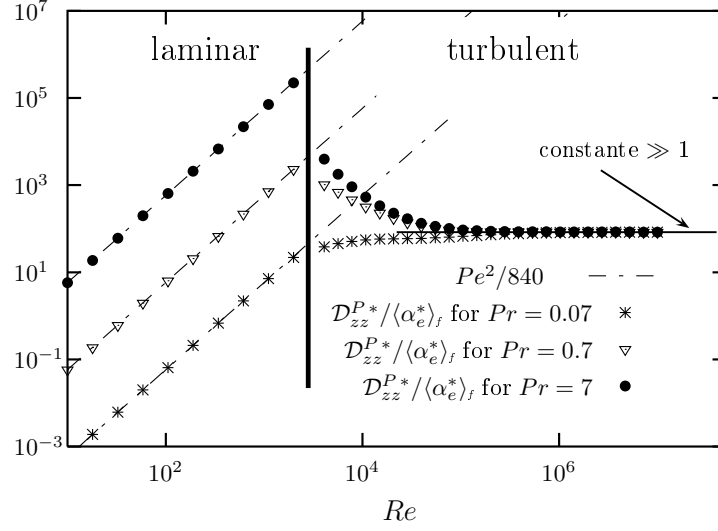


FIG. 3.18: Écoulement en canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*} / \langle \alpha_e^* \rangle_f$ des coefficients de diffusion effective et de dispersion passive en fonction du nombre de Reynolds. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

D'après les corrélations (3.55) et (3.159), il est précisé :

$$\text{pour } Re \gtrsim 5 \times 10^5, \quad C_P \frac{Re}{\langle v_t^* \rangle_f} = \frac{0.62}{\beta_\nu} \simeq 93. \quad (3.164)$$

Dans la configuration géométrique ici étudiée, nous constatons donc, que dans la direction de l'écoulement, le flux de dispersion passive est très supérieur au flux diffusif total (moléculaire et turbulent). Le rapport entre les flux dispersif (passif) et diffusif est proportionnel au nombre de Prandtl turbulent. Pour la valeur $Pr_t = 0.9$, nous obtenons :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{0.62}{\beta_\nu} Pr_t \simeq 83. \quad (3.165)$$

Comparaison du flux de dispersion active avec le flux diffusif total

L'évolution du rapport entre le coefficient de dispersion active et le coefficient de diffusion effective est présenté par la figure 3.19. Pour le régime laminaire, l'expression (3.132) permet de montrer :

$$\frac{\text{Flux de dispersion active}}{\text{Flux de diffusion moléculaire}} = \frac{Pe \mathcal{D}_z^{A*}}{\alpha_f^*} = \frac{Pe^2}{240} \quad \text{pour } Re < 2 \times 10^3. \quad (3.166)$$

Ainsi, lorsque le nombre de Reynolds augmente, le flux de dispersion active devient rapidement prépondérant devant le flux diffusif moléculaire. Pour le régime turbulent, après une période de transition pour $5 \times 10^3 \lesssim Re \lesssim 10^5$, ce rapport devient unique quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl. Il tend alors à augmenter lentement. Une analyse asymptotique

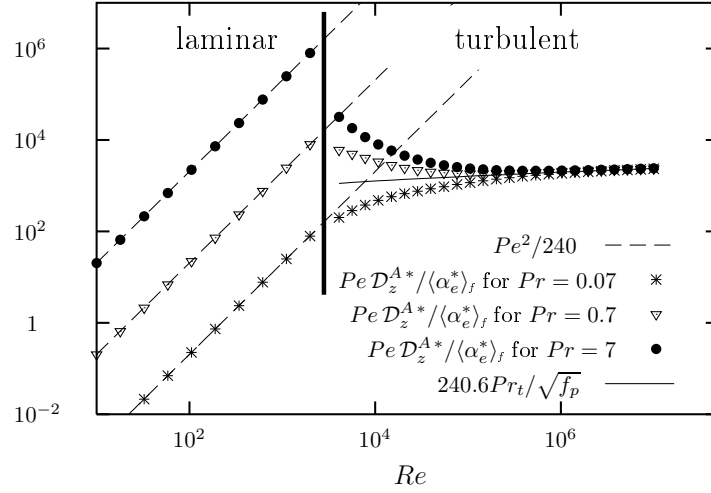


FIG. 3.19: Écoulement en canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $Pe \mathcal{D}_z^{A*} / \langle \alpha_e^* \rangle_f$. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

tique permet d'estimer ce rapport pour les grands nombres de Reynolds :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe \mathcal{D}_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_A Pe}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_A Re Pr}{(1 + \langle \alpha_t^* \rangle_f)}. \quad (3.167)$$

En reportant dans cette expression la relation (3.154) entre le coefficient de diffusivité thermique turbulente et la viscosité turbulente, nous avons :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe \mathcal{D}_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_A Re Pr}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \langle \nu_t^* \rangle_f\right)}. \quad (3.168)$$

La viscosité adimensionnée moyennée spatialement augmente avec le nombre de Reynolds. Il existe alors une valeur de Re telle que le terme $Pr \langle \nu_t^* \rangle_f / Pr_t$ devient très grand devant 1, ce qui implique :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe \mathcal{D}_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_A Re}{\langle \nu_t^* \rangle_f} Pr_t. \quad (3.169)$$

La corrélation (3.159) et l'expression (3.140) permettent de préciser cette expression :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe \mathcal{D}_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{1.6}{\beta_\nu \sqrt{f_p}} Pr_t \simeq 240.6 \frac{Pr_t}{\sqrt{f_p}}. \quad (3.170)$$

Le rapport entre le flux de dispersion active et le flux diffusif effectif possède un comportement asymptotique légèrement croissant avec le nombre de Reynolds (comportement relatif à l'évolution du coefficient de frottement en fonction de nombre de Reynolds), et qui dépend linéairement du nombre de Prandtl turbulent (voir Fig. 3.19). Pour la valeur $Pr_t = 0.9$, nous constatons que, pour des nombres de Reynolds supérieurs à quelques 10^5 , le flux dispersif actif est supérieur de trois ordres de grandeur au flux diffusif dans la direction de l'écoulement.

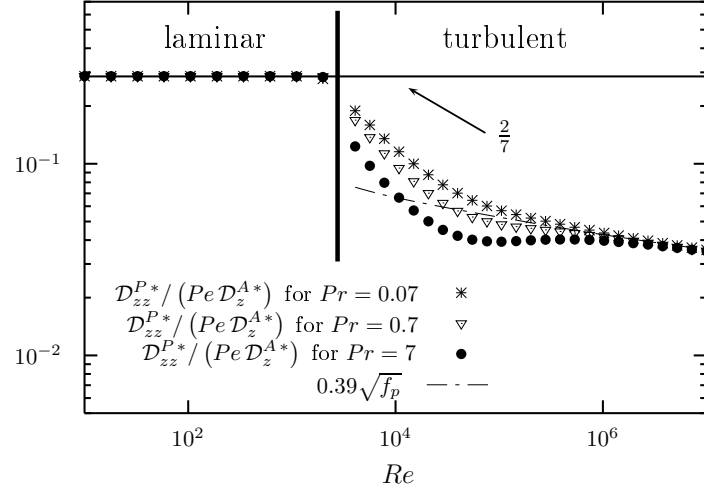


FIG. 3.20: Écoulement en canal plan en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*} / (Pe \mathcal{D}_z^{A*})$. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Comparaison des flux de dispersion active et passive

Pour finir, nous comparons les deux flux de dispersion. Pour le régime laminaire, nous montrons à partir des relations (1.107) et (3.132) que la dispersion passive est dominée par la dispersion active d'un rapport égal à :

$$\frac{\text{Flux de dispersion passive}}{\text{Flux de dispersion active}} = \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{Pe \mathcal{D}_z^{A*}} = \frac{2}{7} \quad \text{pour } Re < 2 \times 10^3. \quad (3.171)$$

Pour le régime turbulent, il est observé à partir de la figure 3.20 qu'au cours d'une période de transition, l'évolution du rapport des flux dispersifs dépend du nombre de Prandtl. Puis, pour des valeurs très élevées du nombre de Reynolds ($Re \gtrsim 10^6$), ce rapport ne dépend plus du nombre de Prandtl. Une analyse asymptotique fournit :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{Pe \mathcal{D}_z^{A*}} = \frac{C_P}{C_A} \simeq 0.39 \sqrt{f_p}. \quad (3.172)$$

Cette estimation est clairement retrouvée sur la figure 3.20.

3.5.3 Comparaisons pour le tube à section circulaire

Comparaison du flux de dispersion passive avec le flux diffusif total

Pour un écoulement dans un tube à section circulaire, la figure 3.21 illustre l'évolution du rapport entre le coefficient de dispersion passive et le coefficient de diffusion effective. Une nouvelle fois, l'évolution de ce rapport dépend du nombre de Prandtl pour des nombres de Reynolds compris entre le nombre de Reynolds de transition vers la turbulence et quelques 10^5 . Ce rapport atteint ensuite une limite asymptotique qui ne dépend pas du nombre de Prandtl. De la même manière que dans la section précédente, la relation (3.58) est exploitée

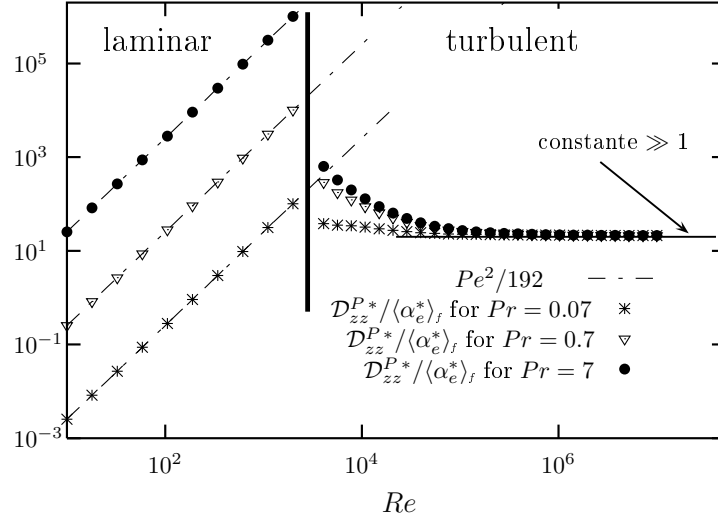


FIG. 3.21: Écoulement en tube à section circulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*}/\langle \alpha_e^* \rangle_f$ des coefficients de diffusion effective et de dispersion passive en fonction du nombre de Reynolds. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

pour écrire :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Pe}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Re Pr}{\left(1 + \frac{Pr}{Pr_t} \langle \nu_t^* \rangle_f\right)}. \quad (3.173)$$

Pour des valeurs suffisamment élevées du nombre de Reynolds, le terme $Pr \langle \nu_t^* \rangle_f / Pr_t$ est très grand devant 1, d'où :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_P Re}{\langle \nu_t^* \rangle_f} Pr_t. \quad (3.174)$$

Les corrélations (3.59) et (3.158) fournissent alors :

$$\text{pour } Re \gtrsim 5 \times 10^5, \quad C_P \frac{Re}{\langle \nu_t^* \rangle_f} = \frac{0.39}{\beta_{\nu, \text{tube}}} \simeq 24.4. \quad (3.175)$$

Pour la valeur $Pr_t = 0.9$, cela correspond à :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{0.39}{\beta_{\nu, \text{tube}}} Pr_t \simeq 22. \quad (3.176)$$

Ce résultat peut ensuite être comparé à celui obtenu par Taylor [106]. Selon celui-ci, d'après les expressions (3.44) et (3.155), le rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*}/\langle \alpha_e^* \rangle_f$ ne dépend pas du nombre de Reynolds. Il est égal à :

$$\text{selon Taylor,} \quad \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = 193.5. \quad (3.177)$$

Ce résultat est sensiblement supérieur à celui calculé en (3.176). Cependant, il confirme la domination du flux de dispersion passive en comparaison avec le flux diffusif total, dans la direction de l'écoulement.

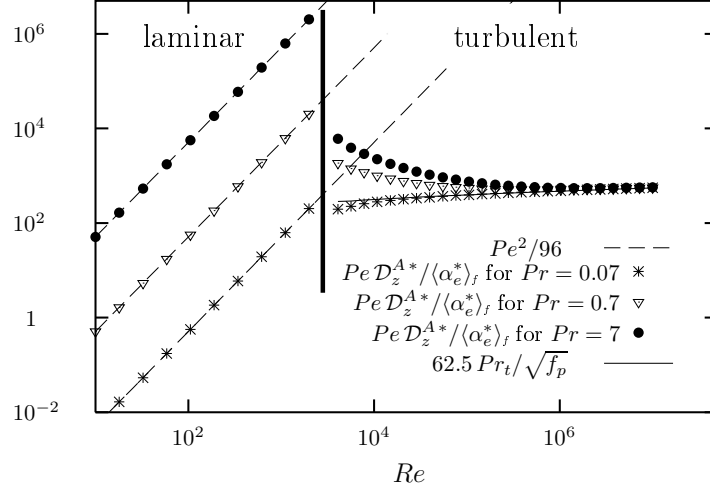


FIG. 3.22: Écoulement en tube à section circulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $Pe D_z^{A*} / \langle \alpha_e^* \rangle_f$. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Comparaison du flux de dispersion active avec le flux diffusif total

La figure 3.22 décrit l'évolution du rapport entre le coefficient de dispersion active et le coefficient de diffusion effectif. Pour le régime laminaire, nous déduisons de l'expression (3.136) :

$$\frac{\text{Flux de dispersion active}}{\text{Flux de diffusion moléculaire}} = \frac{Pe D_z^{A*}}{\alpha_f^*} = \frac{Pe^2}{96} \quad \text{pour } Re < 2 \times 10^3. \quad (3.178)$$

Pour le régime turbulent, après une période de transition pour $5 \times 10^3 \lesssim Re \lesssim 3 \times 10^5$, ce rapport devient unique quelle que soit la valeur du nombre de Prandtl. Il tend alors à augmenter lentement. En se reportant aux expressions (3.144) et (3.158), une analyse asymptotique permet d'estimer ce rapport pour les grands nombres de Reynolds :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe D_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} = \frac{C_A Re}{\langle v_t^* \rangle_f} Pr_t \simeq 62.5 \frac{Pr_t}{\sqrt{f_p}}. \quad (3.179)$$

Pour la valeur $Pr_t = 0.9$, la figure 3.22 permet de valider le comportement asymptotique :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{Pe D_z^{A*}}{\langle \alpha_e^* \rangle_f} \simeq \frac{56.25}{\sqrt{f_p}}. \quad (3.180)$$

Comparaison des flux de dispersion active et passive

Enfin, nous terminons notre étude en comparant le flux de dispersion passive au flux de dispersion active. Pour le régime laminaire, nous montrons à partir des relations (1.113) et (3.136) que la dispersion passive est dominée par la dispersion active d'un rapport égal à :

$$\frac{\text{Flux de dispersion passive}}{\text{Flux de dispersion active}} = \frac{D_{zz}^{P*}}{Pe D_z^{A*}} = \frac{1}{2} \quad \text{pour } Re < 2 \times 10^3. \quad (3.181)$$

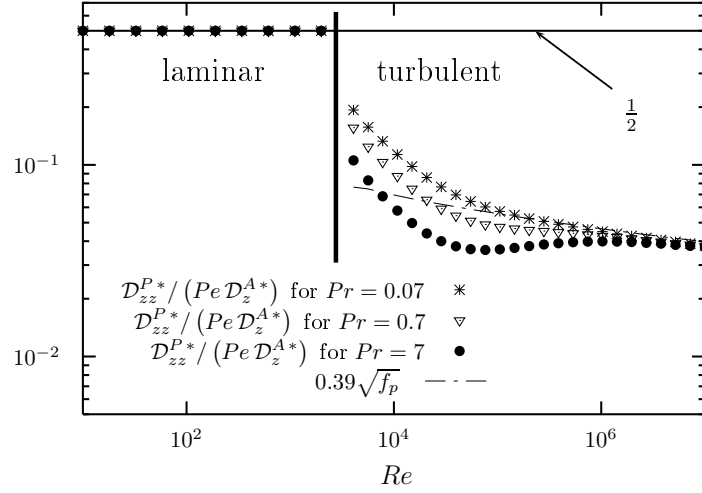


FIG. 3.23: Écoulement en tube à section circulaire en régimes laminaire et turbulent : évolution du rapport $\mathcal{D}_{zz}^{P*} / (Pe \mathcal{D}_z^{A*})$. Trois nombres de Prandtl de l'écoulement sont représentés, à savoir $Pr = 0.07$, $Pr = 0.7$ et $Pr = 7$. ($Pr_t = 0.9$). Résultats obtenus à partir du modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

Puis, pour le régime turbulent, un comportement similaire au cas du canal plan est observé. En utilisant à nouveau les expressions (3.58) et (3.143), l'analyse asymptotique fournit :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{Pe \mathcal{D}_z^{A*}} = \frac{\mathcal{C}_P}{\mathcal{C}_A}. \quad (3.182)$$

Les expressions (3.59) et (3.144) permettent de préciser :

$$\lim_{Re \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{D}_{zz}^{P*}}{Pe \mathcal{D}_z^{A*}} = \frac{\mathcal{C}_P}{\mathcal{C}_A} \simeq 0.39 \sqrt{f_p}. \quad (3.183)$$

La figure 3.23 concorde avec les analyses réalisées en régimes laminaire et turbulent.

3.6 Conclusion et perspectives

La méthodologie de Whitaker, qui s'appuie sur l'utilisation d'une moyenne spatiale aux équations de Navier-Stokes, a été étendue à l'étude d'écoulements turbulents dans des milieux poreux ordonnés et périodiques. Sous l'hypothèse d'une fermeture aux premier gradient pour les flux turbulents, la prise en compte de la turbulence dans le problème de dispersion passive revient à considérer un coefficient de diffusion du scalaire passif variable en espace. Le gradient de ce coefficient de diffusion est alors un terme source de l'équation bilan décrivant la fonction de dispersion.

Les raisons du choix du modèle mixte pour étudier, à l'échelle macroscopique, la température du fluide pour un écoulement turbulent ont ensuite été exposés. Cette approche correspond à la pratique de modélisation de nombreux types d'échangeurs. Ce modèle permet de considérer le flux en paroi, information provenant de la phase solide, comme une donnée pour le problème thermique macroscopique. La dérivation du modèle mixte s'appuie alors sur le principe de superposition, de telle façon que le phénomène de dispersion passive est

| | canal, écoulement laminaire | tube, écoulement laminaire | canal, comportement asymptotique | tube, comportement asymptotique |
|--|-----------------------------------|----------------------------------|--|---------------------------------------|
| \mathcal{D}_{zz}^{P*} | $Pe^2/840$ | $Pe^2/192$ | $0.62 \sqrt{f_p} Pe$ | $0.39 \sqrt{f_p} Pe$ |
| \mathcal{D}_z^{A*} | $Pe/240$ | $Pe/96$ | 1.6 | 1 |
| $\mathcal{D}_{zz}^{P*}/\langle\alpha_e^*\rangle_f$ | $Pe^2/840$ | $Pe^2/192$ | $93 Pr_t$ | $24.4 Pr_t$ |
| $Pe \mathcal{D}_z^{A*}/\langle\alpha_e^*\rangle_f$ | $Pe^2/840$ | $Pe^2/96$ | $240.6 Pr_t/\sqrt{f_p}$ | $56.25 Pr_t/\sqrt{f_p}$ |
| $\mathcal{D}_{zz}^{P*}/(Pe \mathcal{D}_z^{A*})$ | 2/7 | 1/2 | $0.39 \sqrt{f_p}$ | $0.39 \sqrt{f_p}$ |

TAB. 3.4: Récapitulatif des résultats obtenus au cours de ce chapitre avec le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ bas-Reynolds de Chien.

commun à l'étude du scalaire passif et de la température. La température présente en plus une contribution de dispersion active, entièrement liée au flux en paroi.

Le modèle mixte a été appliqué à l'étude de la dispersion thermique pour des milieux stratifiés fortement anisotropes : un empilement parallèles de plaques planes ainsi qu'un milieu percé de tubes parallèles à section circulaire. Le flux dispersif de la température dans la direction de l'écoulement a été étudié pour en déduire que **ses composantes passive et active dominaient fortement les flux diffusifs moléculaire et turbulent**. Pour ces écoulements, la diffusion joue un rôle dans les directions transverses à l'écoulement. Il a aussi été montré que **la contribution active est supérieure à la contribution passive**. Ces résultats sont récapitulés par le tableau 3.4. Dans les géométries étudiées et pour le régime laminaire, le mécanisme de mélange dominant est la diffusion moléculaire. Conformément à la remarque émise à la suite de l'équation (1.67), le coefficient de dispersion longitudinal évolue en fonction de Pe^2 . Puis, pour le régime turbulent, ce sont les hétérogénéités de vitesse qui domine le mécanisme de mélange. Le coefficient de dispersion longitudinal varie alors proportionnellement à Pe .

Les perspectives de cette étude de la dispersion sont d'étudier des configurations réellement bidimensionnelles, comme, par exemple, un écoulement transverse à un faisceau de cylindres, et de déterminer comment le déséquilibre de la turbulence peut influencer sur les coefficients de dispersion. Plus simplement, cela revient à considérer des profils de vitesse et de viscosité turbulent dont la forme est différente de celle à l'équilibre. Cela peut aussi passer par la remise en cause de l'hypothèse de quasi-stationnarité [102] et par la prise en compte de phénomène transitoire dans le problème de fermeture [5, 103]. Enfin, les systèmes physiques complètement périodiques n'existant pas, il faudra aussi s'intéresser aux effets de bord. Une approche s'appuyant sur la définition d'un longueur de mélange est proposée dans [19, 20, 21, 45].

Analyse à deux échelles de la turbulence en milieux poreux

Afin de caractériser l'évolution de la turbulence à l'échelle macroscopique, il existe, de la même façon que pour l'étude à l'échelle locale, différentes stratégies. Dans ce chapitre, nous nous appuyons sur une méthodologie similaire à celle qui permet d'aboutir aux modèles RANS au premier ordre. L'étude de la turbulence passe alors par l'analyse de l'équation bilan des contraintes de Reynolds homogénéisées $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$ ¹. Dans le contexte des modèles RANS au premier ordre, la modélisation des contraintes turbulentes est fréquemment associée à la modélisation de l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente $\langle \bar{k} \rangle_f$. Par souci de clarté, le cas d'un fluide incompressible s'écoulant dans un milieu à **porosité constante** est considéré. **Cette dernière hypothèse permet d'occulter la porosité des équations, mais nous sommes toujours dans une approche de type «milieux poreux»**. Le filtre spatial est alors appliqué à l'équation bilan (2.15) et les règles de permutation entre le filtre spatial et les opérateurs de dérivation sont utilisées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \langle \bar{u}_l \rangle_f &= - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{u'_i u'_j u'_l} \rangle_f - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u'_i P'} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{u'_j P'} \rangle_f \right) \\ &+ \left\langle \frac{P'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}{\partial x_l} \right) \\ &- \langle \bar{R}_{il} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} + \bar{R}_{jl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f - 2 \langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \rangle_f \\ &- \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_l \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.1)$$

¹Ce travail a été présenté à la conférence ETMM6 [74] et soumis à *International Journal of Heat and Fluid Flow* [77].

Dans cette équation apparaît le tenseur de dissipation visqueuse homogénéisé, défini par :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle_f = \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial u'_j}{\partial x_l} \right\rangle_f. \quad (4.2)$$

Remarquons que les contraintes de Reynolds ne sont pas soumises au mécanisme de tortuosité car elles sont identiquement nulles aux parois. Par contre, elles sont sujettes à la dispersion, représentée par le dernier terme de l'équation bilan (4.1). Dans cette équation, la production par couplage entre les tensions de Reynolds et le cisaillement de l'écoulement moyen est homogénéisée. Ce terme peut être développé pour faire clairement apparaître les contraintes de Reynolds homogénéisées :

$$\begin{aligned} -\langle \bar{R}_{il} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} + \bar{R}_{jl} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f &= - \underbrace{\left(\langle \bar{R}_{il} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{jl} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{(a)} \\ &\quad - \underbrace{\langle \delta \bar{R}_{il} \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) \rangle_f + \langle \delta \bar{R}_{jl} \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right) \rangle_f}_{(b)}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dans cette relation, on distingue un tenseur de production par cisaillement de l'écoulement macroscopique (terme (a)) et un tenseur de production par les hétérogénéités de cisaillement (terme (b)). Ce second terme représente la production de turbulence induit par les cisaillements internes au VER. Dans ce chapitre, les phénomènes caractérisés par des échelles supérieures à la taille du filtre seront qualifiés de «macroscopique». Inversement, la dénomination «de sous-filtre» sera employée concernant les phénomènes caractérisés par des échelles inférieures à la taille du filtre. Pour cette raison, le terme (b) de la relation (4.3) sera nommé **production de sous-filtre**.

A partir de l'équation (4.1), l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est déduite par contraction des indices i et j , puis en divisant par 2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f \\ &\quad - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f, \end{aligned} \quad (4.4)$$

où la dissipation visqueuse homogénéisée est égale à la trace du tenseur de dissipation visqueuse homogénéisé :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{ii} \rangle_f. \quad (4.5)$$

La production de sous-filtre apparaissant dans l'équation (4.4) est la corrélation spatiale entre les déviations du tenseur de Reynolds et du gradient de vitesse, c'est à dire :

$$P_{SF} = - \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f. \quad (4.6)$$

De par la condition d'adhérence à la paroi et l'hypothèse d'une porosité constante, d'après (1.50) le gradient spatial de la déviation de vitesse est égal à la déviation du gradient spatial de vitesse :

$$\frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} = \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.7)$$

La production de sous-filtre peut donc aussi s'écrire :

$$P_{SF} = -\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \quad (4.8)$$

Dans l'équation bilan (4.4), trois termes sont inconnus : les contraintes de Reynolds homogénéisées (qui sont aussi présentes dans l'équation bilan de la vitesse doublement moyennée), la production de sous-filtre ainsi que la dispersion de \bar{k} . Dans ce chapitre, nous nous focalisons sur la modélisation de la production de sous-filtre. Cette production est intuitivement liée aux interactions entre les fluctuations de vitesse et la paroi. De plus, pour reprendre une remarque formulée en section 1.4.1, les interactions entre les fluctuations de vitesse et la structure solide n'apparaissent pas explicitement dans cette équation. Leur compréhension est pourtant essentielle pour modéliser efficacement la turbulence à l'échelle macroscopique. La décomposition (4.3) suggère de procéder à une analyse à deux échelles des écoulements moyens et turbulents [38, 96]. Ce chapitre présente cette analyse.

4.1 Introduction de l'analyse à deux échelles

4.1.1 Analyse spectrale schématique de la turbulence en milieux poreux

Dans un milieu libre, le spectre d'énergie d'une turbulence isotrope peut être schématiquement représenté en se basant sur les deux hypothèses de Kolmogorov (voir [18], p. 292-300). L'équilibre universel aux échelles dissipatives (première hypothèse de Kolmogorov) et l'existence d'un sous-domaine inertiel (seconde hypothèse de Kolmogorov) proposent une vision des mécanismes de transfert d'énergie inter-échelle. Ainsi, dans ce sous-domaine inertiel, les structures turbulentes cèdent de proche en proche de l'énergie aux structures plus petites. Ce processus est communément appelé *cascade turbulente*. Au bout de cette cascade, les plus petits tourbillons, caractérisés par l'échelle de Kolmogorov, ne possèdent pas assez d'inertie pour subsister face aux effets de viscosité du fluide. Ils sont alors dissipés sous forme de chaleur. Cette représentation schématique est reportée sur la figure 4.1. Elle servira par la suite d'élément de comparaison avec le comportement supposé de la turbulence dans les milieux poreux.

L'analyse de la turbulence pour des écoulements au travers des canopées permet de se construire une première idée des transferts qui vont intervenir au sein d'un milieu poreux. Il est toutefois souligné que les canopées ne représentent pas un milieu poreux au sens strict où nous l'entendons dans cette étude. La mobilité relative du feuillage est en désaccord avec l'hypothèse d'immobilité de la phase solide. Toutefois, nous admettrons que les transferts énergétiques dans ces deux catégories de milieux sont de nature similaire. Ainsi, des études expérimentales dans des canopées [87, 99] ont montré l'existence d'un transfert d'énergie inter-échelle, qui ponctionne de l'énergie aux grandes échelles pour en fournir aux petites. Ici, les grandes (respectivement petites) échelles désignent les structures de taille caractéristique supérieure (respectivement inférieure) à la longueur caractéristique du filtre spatial. La figure 4.1 représente une interprétation schématique de ce résultat pour des écoulements

turbulents en milieux poreux. Tout d'abord, pour un milieu peu chargé en phase solide, les grosses structures sont amorties par la présence de la matrice solide. Cette destruction progressive des gros tourbillons fournit aux petites échelles un certain apport d'énergie. Pour un écoulement entrant dans un milieu très chargé en solide, les grosses structures sont très rapidement hachées par la matrice solide et le transfert inter-échelle est un mécanisme dominant. Puis, une fois les grosses structures fractionnées, il devient rapidement négligeable. Pourtant, les petites structures subsistent grâce au terme de production de sous-filtre. Sur la figure 4.1, une coupure d'échelles a schématiquement été définie, permettant de différencier grosses et petites structures dans l'espace spectral. Bien qu'elle ne puisse être déterminée de façon générique, l'échelle de longueur relative a cette coupure est très certainement du même ordre de grandeur que l'échelle de longueur représentative d'un VER [88]. Raupach [88] et Finnigan [30] ont interprété ce transfert comme étant dû au travail de la contribution de pression de la force de trainée (aussi appelé trainée de forme) dans l'écoulement moyen. Raupach [88] a alors précisé que le travail de la contribution visqueuse intervenait dans le mécanisme de destruction de la turbulence pour produire de la chaleur.

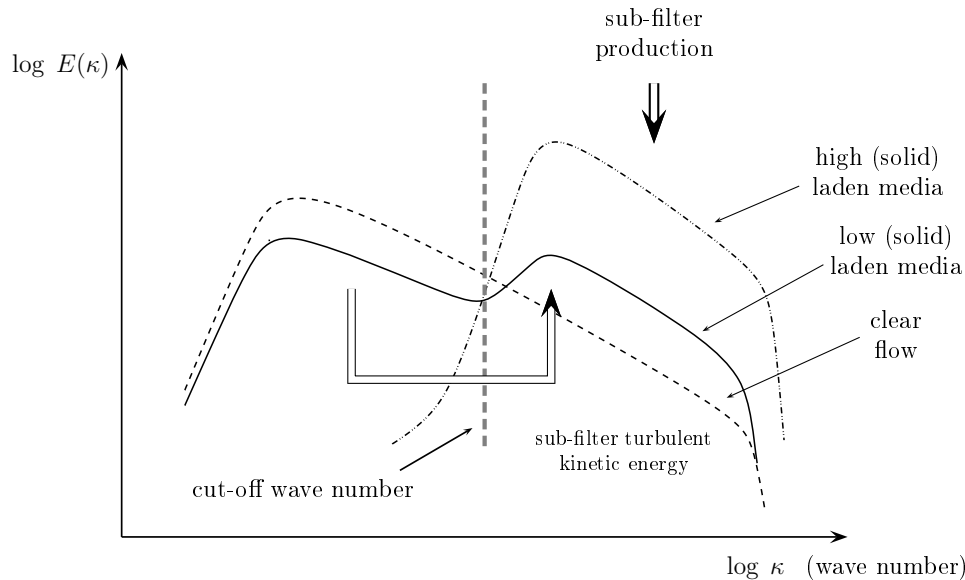


FIG. 4.1: Représentation spectrale schématique de la turbulence en milieu libre et milieux poreux.

A partir de ces considérations sur le comportement présumé de la turbulence en milieu poreux et pour vérifier les affirmations formulées par les auteurs [30, 88] concernant le rôle de la trainée de forme dans les transferts d'énergie inter-échelle, l'étude de ces transferts en différenciant deux catégories d'échelles est à nouveau justifiée.

4.1.2 Principe de double décomposition

La représentation à deux échelles spatiales peut être obtenue mathématiquement grâce au principe de double décomposition introduit pour les milieux poreux par Pedras et De Lemos [73] (voir Fig 4.2). La seconde décomposition suivant la moyenne spatiale devrait permettre une meilleure compréhension de la turbulence dans un milieu poreux et faciliter sa modélisation. Ainsi, la vitesse locale fluctuante est écrite comme la somme de quatre

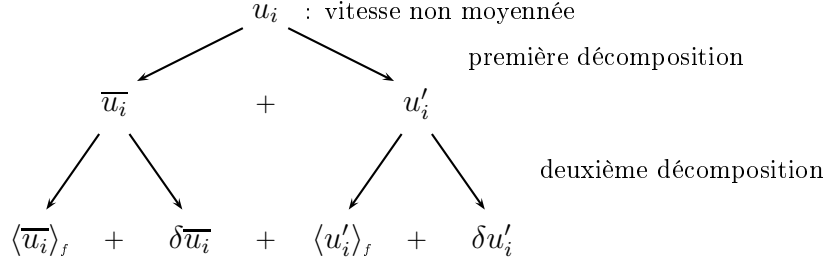


FIG. 4.2: Principe de double décomposition appliqué à la vitesse locale du fluide.

vitesse :

$$u_i = \langle \bar{u}_i \rangle_f + \delta \bar{u}_i + \langle u'_i \rangle_f + \delta u'_i. \quad (4.9)$$

Ce principe de double décomposition, reporté dans la définition de l'énergie cinétique totale du fluide permet de définir différentes énergies du système. Pour le mouvement moyen, nous obtenons

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \bar{u}_i \bar{u}_i = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f + \langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{u}_i + \frac{1}{2} \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i. \quad (4.10)$$

Ce développement permet d'introduire

- l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen

$$\bar{E}^M = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f, \quad (4.11)$$

- l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen

$$\bar{E}^m = \frac{1}{2} \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i, \quad (4.12)$$

- ainsi qu'un terme inter-échelle

$$\bar{E}^c = \langle \bar{u}_i \rangle_f \delta \bar{u}_i. \quad (4.13)$$

Ce dernier terme n'a de sens qu'à l'échelle microscopique car il est nul une fois moyenné spatialement.

Pour le mouvement fluctuant, le tenseur des contraintes turbulentes est développé suivant l'expression :

$$\bar{R}_{ij} = \overline{u'_i u'_j} = \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f + \delta u'_i \delta u'_j + \langle u'_i \rangle_f \delta u'_j + \langle u'_j \rangle_f \delta u'_i. \quad (4.14)$$

Nous définissons alors

- les contraintes turbulentes dans le mouvement macroscopique

$$\bar{R}_{ij}^M = \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f}, \quad (4.15)$$

- les contraintes turbulentes de sous-filtre :

$$\overline{R}_{ij}^m = \overline{\delta u'_i \delta u'_j}, \quad (4.16)$$

- ainsi que les corrélations croisées :

$$\overline{R}_{ij}^c = \overline{\langle u'_i \rangle_f \delta u'_j}. \quad (4.17)$$

Il est important de noter ici que les tenseurs \overline{R}_{ij}^M et \overline{R}_{ij}^m sont symétriques. **Cette propriété ne s'applique pas au tenseur \overline{R}_{ij}^c .**

Par contraction des indices i et j et en multipliant le résultat par $1/2$, deux énergies cinétiques turbulentes et un terme inter-échelle sont définis :

$$\overline{k} = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \underbrace{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_i \rangle_f}_{\overline{k}^M} + \frac{1}{2} \underbrace{\delta u'_i \delta u'_i}_{\overline{k}^m} + \underbrace{\delta u'_i \langle u'_i \rangle_f}_{\overline{k}^c}. \quad (4.18)$$

Le terme \overline{k}^c n'est pas une énergie car il n'est, *a priori*, pas inconditionnellement positif.

Dans l'équation (1.136), les contraintes de Reynolds moyennées spatialement $\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f$ doivent faire l'objet d'une modélisation. Or, en moyennant spatialement l'expression (4.14), ce tenseur est la somme de deux autres tenseurs moyennés spatialement :

$$\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f = \overline{R}_{ij}^M + \langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f. \quad (4.19)$$

Les équations d'évolution des quantités $\langle \overline{R}_{ij}^M \rangle_f$ et $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$ vont donc être établies. Les phénomènes physiques opérant un couplage entre les contraintes turbulentes macroscopiques et de sous-filtre vont ainsi être déterminés. Par contraction des indices i et j , les conclusions obtenues seront précisées pour les énergies cinétiques turbulentes macroscopique $\langle \overline{k}^M \rangle_f$ et de sous-filtre $\langle \overline{k}^m \rangle_f$. Le terme de production de sous-filtre nécessite aussi d'être modélisé. D'après le principe de double décomposition et les définitions introduites dans cette section, sa définition (4.6) peut être détaillée analytiquement :

$$\begin{aligned} P_{SF} &= -\langle (\overline{R}_{ij}^m - \langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f + \overline{R}_{ij}^c + \overline{R}_{ji}^c) \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f \\ &= -\langle \overline{R}_{ij}^m \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f - \langle (\overline{R}_{ij}^c + \overline{R}_{ji}^c) \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.2 Etude des tenseurs de contraintes turbulentes

Dans un premier temps, nous établissons les équations d'évolutions de $\langle u'_i \rangle_f$ et $\delta u'_i$. Les équations bilans des deux tenseurs de Reynolds \overline{R}_{ij}^M et $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$ pourront ensuite être déduites.

4.2.1 Equations bilans de $\langle u'_i \rangle_f$ et $\delta u'_i$

Après application du filtre spatial sur l'équation bilan (2.13) de u'_i , l'équation caractérisant l'évolution des fluctuations de vitesse homogénéisées s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i u'_j \rangle_f &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u'_i u'_j} \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u}_i u'_j \rangle_f + \left\langle \left(-\frac{\delta P'}{\rho} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta_w \right\rangle_f. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans (4.21), les simplifications dues à la condition d'adhérence à la paroi ont déjà été effectuées. Il est encore possible de développer le terme de convection homogénéisé en un terme de convection par le mouvement macroscopique et un terme de dispersion. De plus, le dernier terme de cette équation correspond à la force spécifique due au mouvement fluctuant, exercée par la phase solide sur la phase fluide. Il correspond à la $i^{\text{ème}}$ composante fluctuante spécifique (par unité de masse) de la force de traînée :

$$-F'_{\phi_i} = \left\langle \left(-\frac{\delta P'}{\rho} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta_w \right\rangle_f. \quad (4.22)$$

L'équation (4.21) prend alors la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u'_i \rangle_f \langle u_j \rangle_f &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\langle u'_i u'_j \rangle}_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{u}_i u'_j \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta u'_i \delta u_j \rangle_f - F'_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Puis, comme la porosité est supposée constante, l'équation d'évolution de $\delta u'_i$ se déduit par soustraction de l'équation (4.21) à celle de u'_i (Eq. (2.13)) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u_j - \langle u'_i u_j \rangle_f) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_j} \right) + F'_{\phi_i} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\langle u'_i u'_j \rangle}_f - \langle \bar{u}'_i \bar{u}'_j \rangle_f \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i u'_j - \langle \bar{u}_i u'_j \rangle_f). \end{aligned} \quad (4.24)$$

4.2.2 Equation bilan du tenseur de Reynolds macroscopique \bar{R}_{ij}^M

Grâce à la propriété d'idempotence du filtre spatial, ce tenseur de Reynolds respecte l'égalité :

$$\langle \bar{R}_{ij}^M \rangle_f = \bar{R}_{ij}^M. \quad (4.25)$$

Il est donc possible de raisonner indifféremment sur le tenseur \bar{R}_{ij}^M ou sur la moyenne spatiale de ce tenseur. En appliquant l'équation (4.23) à $\langle u'_i \rangle_f$ et à $\langle u'_j \rangle_f$, en procédant à la somme des produits croisés avec $\langle u'_j \rangle_f$ et $\langle u'_i \rangle_f$, puis en moyennant statistiquement le résultat, il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\langle u'_j \rangle_f \left[\frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_i \rangle_f \langle u_l \rangle_f \right]} &+ \overline{\langle u'_i \rangle_f \left[\frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_j \rangle_f \langle u_l \rangle_f \right]} = \\ &\frac{1}{\rho} \overline{\langle u'_j \rangle_f \left[\frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l} \right) - F'_{\phi_i} \right]} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u'_i u'_l \rangle}_f - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{u}_i u'_l \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u_l \rangle_f \\ &\frac{1}{\rho} \overline{\langle u'_i \rangle_f \left[\frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l} \right) - F'_{\phi_j} \right]} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u'_j u'_l \rangle}_f - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{u}_j u'_l \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_j \delta u_l \rangle_f. \end{aligned}$$

Cette relation nécessite quelques développements et simplifications pour interpréter physiquement les différents termes qui la composent. Les termes symétriques vont être examinés dans leur ordre d'apparition dans l'expression précédente :

- les termes temporels ne requièrent pas de manipulation particulière :

$$\overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial t}} + \overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{R_{ij}^M}}{\partial t}.$$

- En décomposant la vitesse de convection en sa valeur moyenne statistique et sa fluctuation, les termes convectifs s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u_l \rangle_f \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f} = \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{R_{ij}^M} \langle \bar{u}_l \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f \langle u'_l \rangle_f}. \quad (4.26)$$

Le terme de corrélation triple semble suggérer que le transport turbulent de $\overline{R_{ij}^M}$ est piloté par les seules échelles macroscopiques du spectre turbulent. Cependant, en rappelant ici l'égalité (4.25), les équations bilans de $\overline{R_{ij}^M}$ et $\overline{\langle R_{ij}^M \rangle_f}$ doivent être similaires. Cela permet de moyenner le développement (4.26) pour écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u_l \rangle_f \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f} = \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \langle u_l \rangle_f \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f \rangle_f} = \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{R_{ij}^M} \langle \bar{u}_l \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f \langle u'_l \rangle_f \rangle_f}.$$

- Les termes de corrélation vitesse-pression sont développés sous une forme plus classique :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle P' \rangle_f}{\partial x_i}} &= -\frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial \langle u'_i \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_j}} - \frac{1}{\rho} \overline{\frac{\partial \langle u'_j \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_i}} \\ &+ \frac{\overline{\langle P' \rangle_f} \overline{\frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j}}}{\rho} + \frac{\overline{\langle P' \rangle_f} \overline{\frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_i}}}{\rho}. \end{aligned}$$

- Les termes contenant le tenseur des contraintes visqueuses révèlent la diffusion moléculaire de $\overline{R_{ij}^M}$ ainsi que le tenseur de dissipation visqueuse macroscopique $\overline{\varepsilon_{ij}^M}$:

$$\overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l} \right)} + \overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l} \right)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{\text{diffusion visqueuse de } \overline{R_{ij}^M}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l} \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}}_{2 \overline{\varepsilon_{ij}^M}}.$$

- Le travail de la force de traînée dans le mouvement macroscopique fluctuant apparaît naturellement :

$$-\overline{\langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}} - \overline{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j}}.$$

- Due à l'idempotence de la moyenne statistique, les deux termes suivants sont nuls :

$$\overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_i u'_l \rangle_f} + \overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_j u'_l \rangle_f} = 0.$$

- Par décomposition des vitesses par rapport au filtre spatial, et en utilisant les hypothèses d'incompressibilité du fluide et d'un milieu à porosité constante ($\implies \partial \langle u'_l \rangle_f / \partial x_l = 0$ et $\partial \langle \bar{u}_l \rangle_f / \partial x_l = 0$), il est possible de faire apparaître la production par cisaillement de type macroscopique ainsi qu'une contribution à la production de sous-filtre :

$$\begin{aligned} \overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{u}_j u'_l \rangle_f} + \overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{u}_i u'_l \rangle_f} &= \left(\overline{R_{il}^M} \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} + \overline{R_{jl}^M} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l} \right) \\ &+ \left(\overline{\langle \overline{R}_{il}^c} \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f} + \overline{\langle \overline{R}_{jl}^c} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f} \right). \end{aligned}$$

- La signification des deux derniers termes sera étayée lors de la reconstitution de l'équation de $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$:

$$-\overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_j \delta u_l \rangle_f} - \overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u_l \rangle_f}.$$

Une première forme de l'équation d'évolution de \bar{R}_{ij}^M est déduite :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}_{ij}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \bar{R}_{ij}^M \langle \bar{u}_l \rangle_f &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f u'_l}}_{(a)} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle P' \rangle_f}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\langle u'_j \rangle_f \langle P' \rangle_f}}{\partial x_i} \right]}_{(b)} \\ &+ \underbrace{\left[\frac{\overline{\langle P' \rangle_f} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\overline{\langle P' \rangle_f} \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_i}}{\rho} \right]}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \bar{R}_{ij}^M}{\partial x_l} \right)}_{(d)} \\ &- \underbrace{2 \bar{\varepsilon}_{ij}^M}_{(e)} - \underbrace{\bar{R}_{il}^M \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} - \bar{R}_{jl}^M \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l}}_{(f)} \\ &- \underbrace{\left(\overline{\langle \bar{R}_{il}^c \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f} + \overline{\langle \bar{R}_{jl}^c \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f} \right)}_{(g)} - \underbrace{\left(\overline{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j}} + \overline{\langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}} \right)}_{(h)} \\ &- \overline{\langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u_l \delta u'_j \rangle_f} - \overline{\langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u_l \delta u'_i \rangle_f}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

La plupart des termes composant le membre de droite sont des termes déjà rencontrés dans l'analyse locale de la turbulence et plus précisément de l'équation de transport des contraintes de Reynolds \bar{R}_{ij} . Dans l'équation (4.27), les termes numérotés de (a) à (g) ont une signification identique mais transposée à l'échelle macroscopique :

- (a) le terme de corrélation triple est une diffusion turbulente (qui en réalité est une convection au niveau de l'agitation turbulente),
- (b) la corrélation vitesse - pression est une diffusion turbulente due aux fluctuations de pression à l'échelle macroscopique,
- (c) le terme de retour à l'isotropie (qui est en particulier responsable d'une redistribution sur les composantes du tenseur \bar{R}_{ij}^M),
- (d) la diffusion moléculaire du tenseur \bar{R}_{ij}^M ,
- (e) la dissipation visqueuse macroscopique,
- (f) la production résultant du couplage entre les tensions de Reynolds macroscopiques et le cisaillement de l'écoulement macroscopique,
- (g) la production résultant du couplage entre les tensions de Reynolds croisées et le cisaillement de l'écoulement de sous-filtre. Elle représente une contribution à la production de sous-filtre.

Le terme (h) représente le travail par le mouvement macroscopique fluctuant de F'_ϕ . Les termes restant dans le second membre n'ont à ce stade des développements aucune explication phénoménologique claire.

4.2.3 Equation bilan du tenseur de Reynolds de sous-filtre $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$

La même méthode que celle présentée dans le paragraphe précédant est appliquée en utilisant l'équation d'évolution de $\delta u'_i$ (4.24) :

$$\begin{aligned} \overline{\delta u'_j \left[\frac{\partial \delta u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_i u_l - \langle u'_i u_l \rangle_f) \right]} + \overline{\delta u'_i \left[\frac{\partial \delta u'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_j u_l - \langle u'_j u_l \rangle_f) \right]} = \\ \overline{\delta u'_j \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \right) + F'_{\phi_i} \right]} \\ + \overline{\frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u'_i u'_l} - \langle \overline{u'_i u'_l} \rangle_f) - \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_i u'_l} - \langle \overline{u_i u'_l} \rangle_f)} \\ + \overline{\delta u'_i \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_l} \right) + F'_{\phi_j} \right]} \\ + \overline{\frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u'_j u'_l} - \langle \overline{u'_j u'_l} \rangle_f) - \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_j u'_l} - \langle \overline{u_j u'_l} \rangle_f)}. \end{aligned}$$

L'idempotence de la moyenne spatiale permet de simplifier l'expression précédente :

$$\begin{aligned} \overline{\delta u'_j \left[\frac{\partial \delta u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_i u_l - \langle u'_i u_l \rangle_f) \right]} + \overline{\delta u'_i \left[\frac{\partial \delta u'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_j u_l - \langle u'_j u_l \rangle_f) \right]} = \\ \overline{\delta u'_j \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \right) + F'_{\phi_i} \right]} \\ - \overline{\frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_i u'_l} - \langle \overline{u_i u'_l} \rangle_f)} \\ + \overline{\delta u'_i \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_l} \right) + F'_{\phi_j} \right]} \\ - \overline{\frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_j u'_l} - \langle \overline{u_j u'_l} \rangle_f)}. \end{aligned}$$

Pour accéder à l'équation bilan de la moyenne spatiale des tensions de Reynolds de sous-filtre, il faut filtrer spatialement la dernière équation. En rappelant que la force de trainée est une grandeur qui est déjà filtrée, il vient après simplifications :

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta u'_j \left[\frac{\partial \delta u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_i u_l) \right]} \rangle_f + \langle \overline{\delta u'_i \left[\frac{\partial \delta u'_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_j u_l) \right]} \rangle_f = \\ \langle \overline{\delta u'_j \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_i u'_l}) \right]} \rangle_f \\ + \langle \overline{\delta u'_i \left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_l} \right) - \frac{\partial}{\partial x_l} (\overline{u_j u'_l}) \right]} \rangle_f. \quad (4.28) \end{aligned}$$

De la même manière que dans la section précédente, nous allons procéder à l'étude systématique des paires de termes symétriques.

- Les termes temporels ne nécessitent pas de manipulations particulières :

$$\langle \overline{\delta u'_j \frac{\partial \delta u'_i}{\partial t}} \rangle_f + \langle \overline{\delta u'_i \frac{\partial \delta u'_j}{\partial t}} \rangle_f = \frac{\partial \langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f}{\partial t}.$$

- Les termes convectifs nécessitent une étude plus approfondie. Dans un premier temps, la vitesse fluctuante est décomposée spatialement :

$$\overline{\langle \delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_i u_l) \rangle}_f + \overline{\langle \delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (u'_j u_l) \rangle}_f = \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \delta u'_i \delta u'_j u_l \rangle}_f + \overline{\langle \delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_i \rangle_f u_l) \rangle}_f + \overline{\langle \delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_j \rangle_f u_l) \rangle}_f,$$

puis le premier terme du membre de droite est développé en appliquant la double décomposition à la vitesse de convection :

$$u_l = \langle \bar{u}_l \rangle_f + \langle u'_l \rangle_f + \delta \bar{u}_l + \delta u'_l.$$

La convection par le mouvement macroscopique moyen est mise en évidence, ainsi qu'un terme de corrélation triple des déviations et le terme de dispersion de \bar{R}_{ij}^m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \delta u'_i \delta u'_j u_l \rangle}_f &= \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \langle \bar{u}_l \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \delta u'_i \delta u'_j \delta u'_l \rangle}_f \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m \delta \bar{u}_l \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \delta u'_i \delta u'_j \rangle}_f \langle u'_l \rangle_f. \end{aligned}$$

- L'étude des corrélations vitesse-pression permet de mettre en avant le travail de la trainée de forme par le mouvement macroscopique fluctuant. Seule l'une des deux corrélations sera développée tout en ayant à l'esprit que son équivalent symétrique s'obtient par simple permutation des indices i et j . En utilisant les règles de permutation du filtre spatial avec l'opérateur de dérivée spatiale, il vient :

$$-\overline{\langle \frac{\delta u'_j}{\rho} \frac{\partial \delta P'}{\partial x_i} \rangle}_f = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\langle \delta u'_j \delta P' \rangle}_f}{\partial x_i} - \overline{\langle \delta u'_j \frac{\delta P'}{\rho} n_i \delta_w \rangle}_f + \phi \overline{\langle \frac{\delta P'}{\rho} \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_i} \rangle}_f.$$

Par ailleurs, la condition d'adhérence à la paroi fournit :

$$\overline{\langle u'_j \frac{\delta P'}{\rho} n_i \delta_w \rangle}_f = 0 \quad \implies \quad -\overline{\langle \delta u'_j \frac{\delta P'}{\rho} n_i \delta_w \rangle}_f = \overline{\langle u'_j \rangle}_f \overline{\langle \frac{\delta P'}{\rho} n_i \delta_w \rangle}_f.$$

- Les corrélations vitesse-contraintes visqueuses nécessitent un travail similaire pour faire apparaître la diffusion visqueuse de \bar{R}_{ij}^m , le travail de la composante visqueuse de la force de trainée dans le mouvement macroscopique fluctuant ainsi que le tenseur de dissipation visqueuse de sous-filtre :

$$\overline{\langle \delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \right) \rangle}_f = \frac{\partial}{\partial x_l} \nu \overline{\langle \delta u'_j \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \rangle}_f + \overline{\langle \nu \delta u'_j \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} n_l \delta_w \rangle}_f - \nu \overline{\langle \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_l} \rangle}_f.$$

De la même façon que pour la corrélation vitesse-pression, la contribution à la paroi peut s'écrire :

$$\overline{\langle \nu \delta u'_j \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} n_l \delta_w \rangle}_f = -\overline{\langle u'_j \rangle}_f \overline{\langle \nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} n_l \delta_w \rangle}_f.$$

Le tenseur de dissipation visqueuse de sous-filtre est aussi précisé :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ij}^m \rangle_f = \overline{\langle \nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_l} \rangle}_f. \quad (4.29)$$

- La dernière paire de termes symétriques de la relation (4.28) permet notamment de retrouver différentes contributions à la production par cisaillement :

$$\begin{aligned}
 -\overline{\langle \delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{u}_j u'_l) \rangle}_f - \overline{\langle \delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\bar{u}_i u'_l) \rangle}_f = & \underbrace{- \left(\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{\text{production par cisaillement de l'écoulement macroscopique}} \\
 & - \underbrace{\left(\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{\text{contribution à la production de sous-filtre par cisaillement}} \\
 & - \left(\overline{\langle \delta u'_j \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)_f + \overline{\langle \delta u'_i \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right)_f .
 \end{aligned}$$

Les deux derniers termes de cette relation peuvent être modifiés en remarquant que la décomposition de la vitesse moyenne par rapport au filtre spatiale fait apparaître des termes nuls :

$$\begin{aligned}
 - \left(\overline{\langle \delta u'_j \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)_f + \overline{\langle \delta u'_i \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right)_f = & \underbrace{- \left(\overline{\langle \delta u'_j \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l} + \overline{\langle \delta u'_i \langle u'_l \rangle}_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{\text{termes nuls}} \\
 & - \underbrace{\left(\langle \bar{R}_{lj}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{li}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} \right)}_{\text{contribution à la production de sous-filtre par cisaillement}} .
 \end{aligned}$$

Tous ces développements sont récapitulés en proposant une première formulation de

l'équation bilan de $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \langle \bar{u}_l \rangle_f &= - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u'_j u'_l \rangle_f}_{(a)} - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial \langle \delta u'_i \delta P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \delta u'_j \delta P' \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{(b)} \\
 &+ \underbrace{\left\langle \frac{\delta P'}{\rho} \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \frac{\delta P'}{\rho} \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_i} \right\rangle_f}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{(d)} \\
 &\underbrace{- 2 \langle \bar{\varepsilon}_{ij}^m \rangle_f}_{(e)} - \underbrace{\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} - \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l}}_{(f)} \\
 &\underbrace{- \left(\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{(g)} \\
 &\underbrace{- \left(\langle \bar{R}_{li}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{lj}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{(h)} \\
 &\underbrace{- \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m \delta \bar{u}_l \rangle_f}_{(i)} + \underbrace{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j} + \langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}}_{(j)} \\
 &- \langle \delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_j \rangle_f u_l) \rangle_f - \langle \delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_i \rangle_f u_l) \rangle_f. \tag{4.30}
 \end{aligned}$$

De la même façon que pour l'équation bilan de \bar{R}_{ij}^M , les termes présents dans l'équation (4.30) représentent :

- (a) le terme de corrélation triple,
- (b) la corrélation vitesse-pression à l'échelle microscopique,
- (c) le terme de retour à l'isotropie,
- (d) la diffusion moléculaire de $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$,
- (e) la dissipation visqueuse de sous-filtre,
- (f) la production résultant du couplage entre les tensions de Reynolds de sous-filtre et le cisaillement de l'écoulement macroscopique,
- (g) la production résultant du couplage entre les tensions de Reynolds de sous-filtre et le cisaillement de l'écoulement de sous-filtre,
- (h) la production résultant du couplage entre les tensions de Reynolds croisées et le cisaillement de l'écoulement de sous-filtre,
- (i) la dispersion de \bar{R}_{ij}^m .

Ces neuf termes sont identiques à ceux déduits de l'analyse à deux échelles d'une turbulence libre. Par contre, le terme (j) est caractéristique de la présence d'une phase solide. Ce terme correspond au travail par le mouvement macroscopique fluctuant de F'_{ϕ} . Il apparaît dans l'équation bilan de $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$ avec un signe opposé par rapport à l'équation bilan de \bar{R}_{ij}^M .

4.2.4 Reconstitution de l'équation bilan du tenseur de Reynolds filtré $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$: étude des termes inconnus

Grâce à l'introduction de deux échelles de fluctuations, deux tenseurs de Reynolds ont été introduits. L'égalité reliant la moyenne spatiale du tenseur de Reynolds "classique" aux deux nouveaux tenseurs s'écrit :

$$\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f = \bar{R}_{ij}^M + \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f. \quad (4.31)$$

Cette égalité doit être retrouvée en ce qui concerne les équations bilans de \bar{R}_{ij}^M et $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$. La sommation des équations (4.27) et (4.30) doit permettre de retrouver l'équation (4.1) et d'interpréter les termes inconnus qui subsistaient. Encore une fois, à la vue de la complexité des calculs, nous allons procéder par étape et en regroupant astucieusement les termes.

- Les termes d'évolution temporelle et de convection macroscopique des deux équations s'ajoutent naturellement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{R}_{ij}^M + \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\bar{R}_{ij}^M + \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \right) \langle \bar{u}_l \rangle_f = \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \langle \bar{u}_l \rangle_f}{\partial x_l}.$$

- La somme des corrélations triples présentes dans les équations (4.27) et (4.30) ne fournit pas immédiatement les corrélations triples homogénéisées :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f \langle u'_l \rangle_f \rangle + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u'_j \langle u'_l \rangle_f \rangle \neq \frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_i u'_j \langle u'_l \rangle_f \rangle.$$

Pour les reconstituer, il faudra puiser dans les termes restés inconnus des équations (4.27) et (4.30).

- Les premiers termes de corrélation vitesse-pression forment :

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \langle u'_i \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial \langle \delta u'_i \delta P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \delta u'_j \delta P' \rangle_f}{\partial x_i} \right] = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \langle u'_i P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_j P' \rangle_f}{\partial x_i} \right),$$

- ensuite, les seconds peuvent aussi s'écrire :

$$\left[\frac{\langle P' \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\langle P' \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \left[\frac{\langle \delta P' \partial \delta u'_i \rangle_f}{\rho} + \frac{\langle \delta P' \partial \delta u'_j \rangle_f}{\rho} \right] = \left\langle \frac{P'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle_f.$$

- La somme des diffusions moléculaires donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \bar{R}_{ij}^M}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f}{\partial x_l} \right).$$

- La somme des dissipations visqueuses macroscopique et de sous-filtre fournit la dissipation visqueuse homogénéisée :

$$2 \bar{\varepsilon}_{ij}^M + 2 \langle \bar{\varepsilon}_{ij}^m \rangle_f = 2 \langle \bar{\varepsilon}_{ij} \rangle_f. \quad (4.32)$$

- Le travail de la force de traînée par le mouvement macroscopique fluctuant représente un terme de couplage entre \bar{R}_{ij}^M et $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$ car il disparaît lors de la sommation des deux équations.

- Tous les termes liés à la production par cisaillement, qui ont été identifiés dans les équations (4.27) et (4.30), permettent de reconstruire le terme de production homogénéisé (voir Eq. (4.1)) :

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-\overline{R}_{il}^M \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{u}_j \rangle_f - \overline{R}_{jl}^M \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{u}_i \rangle_f}_{\text{Terme présent dans Eq. (4.27)}} - \underbrace{\left(\langle \overline{R}_{il}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f + \langle \overline{R}_{jl}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f \right)}_{\text{Terme présent dans Eq. (4.27)}} \\
 & \underbrace{-\langle \overline{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} - \langle \overline{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_l}}_{\text{Terme présent dans Eq. (4.30)}} - \underbrace{\left(\langle \overline{R}_{jl}^m \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f + \langle \overline{R}_{il}^m \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f \right)}_{\text{Terme présent dans Eq. (4.30)}} \\
 & \underbrace{- \left(\langle \overline{R}_{lj}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f + \langle \overline{R}_{li}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f \right)}_{\text{Terme présent dans Eq. (4.30)}} \\
 & = - \left[\langle \overline{R}_{il} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f + \langle \overline{R}_{jl} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f \right].
 \end{aligned}$$

- Il est ici rappelé que la dispersion d'une quantité ζ est définie à travers la relation :

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \zeta \delta \overline{u}_l \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta \zeta \delta \overline{u}_l \rangle_f.$$

Donc, en utilisant l'idempotence du filtre spatial et la décomposition (4.14) de \overline{R}_{ij} , l'expression de sa dispersion est précisée :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ij} \delta \overline{u}_l \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_l} \langle (\overline{R}_{ij}^M + \overline{R}_{ij}^m + \overline{R}_{ij}^c + \overline{R}_{ji}^c) \delta \overline{u}_l \rangle_f \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_l} \langle (\overline{R}_{ij}^m + \overline{R}_{ij}^c + \overline{R}_{ji}^c) \delta \overline{u}_l \rangle_f.
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

La dispersion de \overline{R}_{ij}^m est explicite dans l'équation bilan (4.30). Par contre, la dispersion des tenseurs croisés \overline{R}_{ij}^c et \overline{R}_{ji}^c doit être reconstituée à partir des termes inconnus subsistant dans les équations (4.27) et (4.30).

Dans les deux dernières sections, les équations bilans de \overline{R}_{ij}^M et de $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$ ont été dérivées. Des termes de ces équations bilans n'ont pu être expliqués phénoménologiquement. Puis, en utilisant l'égalité (4.31) pour recouvrer l'équation bilan de $\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f$, il a été constaté que ces termes «inconnus» jouaient un rôle dans la reconstruction des corrélations triples des fluctuations de vitesse et de la dispersion. Ce rôle va à présent être précisé.

Dans un premier temps, l'attention est portée sur l'équation bilan (4.1) de $\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f$: la corrélation triple moyennée spatialement est développée :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x_l} \langle u'_i u'_j u'_l \rangle_f &= \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f \langle u'_l \rangle_f \rangle_f}_1 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u'_j \delta u'_l \rangle_f}_2 \\
 & \quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u'_j \rangle_f \langle u'_l \rangle_f}_3 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_i \delta u'_l \rangle_f \langle u'_j \rangle_f}_4 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta u'_j \delta u'_l \rangle_f \langle u'_i \rangle_f}_5,
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

| | Terme développé | Provenance du terme |
|------|--|---------------------|
| I | $-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle u'_j \rangle_f u'_l} \rangle_f$ | Eq. (4.27) |
| II | $-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_i \delta u'_j \delta u'_l} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| III | $-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_i \delta u'_j} \rangle_f \langle \overline{u'_l} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| IV | $-\langle \overline{\delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_i \rangle_f \delta u'_l)} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| V | $-\langle \overline{\delta u'_j \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_i \rangle_f \delta \bar{u}_l)} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| VI | $-\langle \overline{\delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_j \rangle_f \delta u'_l)} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| VII | $-\langle \overline{\delta u'_i \frac{\partial}{\partial x_l} (\langle u'_j \rangle_f \delta \bar{u}_l)} \rangle_f$ | Eq. (4.30) |
| VIII | $-\langle \overline{u'_i} \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta \bar{u}_l \delta u'_j} \rangle_f$ | Eq. (4.27) |
| IX | $-\langle \overline{u'_j} \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta \bar{u}_l \delta u'_i} \rangle_f$ | Eq. (4.27) |
| X | $-\langle \overline{u'_i} \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_l \delta u'_j} \rangle_f$ | Eq. (4.27) |
| XI | $-\langle \overline{u'_j} \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_l \delta u'_i} \rangle_f$ | Eq. (4.27) |

 TAB. 4.1: Récapitulatif des termes restant dans les équations bilans de $\overline{R_{ij}^M}$ et $\langle \overline{R_{ij}^m} \rangle_f$

ainsi que la dispersion du tenseur $\overline{R_{ij}^c} + \overline{R_{ji}^c}$:

$$-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle (\overline{R_{ij}^c} + \overline{R_{ji}^c}) \delta \bar{u}_l \rangle_f = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_i \langle u'_j \rangle_f \delta \bar{u}_l} \rangle_f}_6 - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{\delta u'_j \langle u'_i \rangle_f \delta \bar{u}_l} \rangle_f}_7. \quad (4.35)$$

Puis, les termes non identifiés des relations (4.27) et (4.30) sont à leur tour développés et regroupés dans le tableau récapitulatif Tab. 4.1.

Il est alors constaté que la somme de VI et XI donnent le terme 4 de la relation (4.34), de même que la somme de IV et X fournit 5. Les termes I, II et III correspondent directement aux termes 1, 2 et 3. De plus, la contribution 6 de la relation (4.35) provient de la somme de VII et IX. Enfin 7 découle de l'addition de V et VIII. La reconstitution de l'équation bilan de $\langle \overline{R_{ij}^m} \rangle_f$ est donc achevée.

L'utilisation de deux échelles de «fluctuations» doit nécessairement entraîner l'apparition du transfert «naturel» d'énergie spectral traduisant la cascade énergétique. Pour étudier la turbulence en milieu libre, Reynolds et al. [91] ont récemment employé une triple décomposition du champ de vitesse pour dissocier les gros tourbillons porteurs d'énergies des petits tourbillons. Ils identifient le terme de transfert entre échelles dans les équations des différentes énergies cinétiques turbulentes. Dans l'équation bilan des contraintes $\overline{R_{ij}^M}$ et en se reportant aux notations du présent document, il s'écrit :

$$T_{ij} = -\overline{\langle \delta u'_i \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}} - \overline{\langle \delta u'_j \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l}}. \quad (4.36)$$

Or ce transfert est déjà explicitement présent dans l'équation bilan de $\overline{R_{ij}^m}$ à travers les termes *IV* et *VI* (en faisant appel à l'hypothèse d'incompressibilité du fluide). Dans l'équation bilan de $\overline{R_{ij}^M}$, le terme T_{ij} apparaît en manipulant les termes *X* et *XI* (voir Tab. 4.1) :

$$\begin{aligned} -\overline{\langle \langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \delta u'_l \delta u'_j \rangle_f} - \overline{\langle \langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \delta u'_l \delta u'_i \rangle_f} &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle R_{ij}^c u'_l \rangle_f} - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle R_{ji}^c u'_l \rangle_f} \\ &+ \overline{\langle \delta u'_i \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}} + \overline{\langle \delta u'_j \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l}}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

De la même manière, en faisant apparaître la dispersion des tenseurs $\overline{R_{ij}^c}$ et $\overline{R_{ji}^c}$ à partir des termes *VIII* et *IX* de l'équation bilan de $\overline{R_{ij}^M}$ (voir Tab. 4.1), un autre transfert inter-échelle est révélé :

$$\begin{aligned} -\overline{\langle \langle u'_i \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \delta \bar{u}_l \delta u'_j \rangle_f} - \overline{\langle \langle u'_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_l} \delta \bar{u}_l \delta u'_i \rangle_f} &= -\frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \bar{R}_{ij}^c \delta \bar{u}_l \rangle_f} - \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{\langle \bar{R}_{ji}^c \delta \bar{u}_l \rangle_f} \\ &+ \overline{\langle \delta \bar{u}_l \delta u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}} + \overline{\langle \delta \bar{u}_l \delta u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l}}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

En effet, les deux derniers termes de cette expression correspondent aux termes *V* et *VII* présents dans l'équation bilan de $\overline{\langle R_{ij}^m \rangle_f}$ mais avec un signe opposé.

Les équations bilans des deux tenseurs $\overline{R_{ij}^M}$ et $\overline{\langle R_{ij}^m \rangle_f}$ ont été formellement établies. Différents phénomènes physiques aux échelles macroscopique et microscopique ont été notamment identifiés. En souhaitant formuler à nouveau l'équation bilan des contraintes de Reynolds homogénéisées $\overline{\langle R_{ij} \rangle_f}$ par la sommation des deux équations bilans précédentes, le rôle des termes inconnus qui subsistaient a été mis en évidence. Le couplage entre les deux échelles turbulentes a été identifié. Ces échanges correspondent :

- au travail de la force de trainée dans le mouvement macroscopique fluctuant :

$$\overline{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j}} + \overline{\langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}}, \quad (4.39)$$

- au transfert inter-échelle présent en turbulence libre identifié par Reynolds et *al.* [91] :

$$-\overline{\langle \delta u'_i \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}} - \overline{\langle \delta u'_j \delta u'_l \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l}}, \quad (4.40)$$

- ainsi qu'à un autre transfert inter-échelle, aussi présent en turbulence libre :

$$-\overline{\langle \delta \bar{u}_l \delta u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l}} - \overline{\langle \delta \bar{u}_l \delta u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l}}. \quad (4.41)$$

Les transferts qui ne sont pas dus à la force de trainée seront par la suite regroupés.

Les résultats sont récapitulés en présentant la forme finale des équation bilans de \overline{R}_{ij}^M et $\langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f$. Nous soulignons à cette occasion que le transport turbulent homogénéisé des trois tenseurs des contraintes turbulentes est alimenté par l'ensemble des échelles du spectre turbulent.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{R}_{ij}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{R}_{ij}^M \langle \overline{u}_l \rangle_f = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ij}^M u'_l \rangle_f}_{\substack{\text{diffusion turbulente} \\ \text{de } \overline{R}_{ij}^M}} \quad \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ij}^c u'_l \rangle_f}_{\substack{\text{diffusion turbulente} \\ \text{de } \overline{R}_{ij}^c}} \quad \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ji}^c u'_l \rangle_f}_{\substack{\text{diffusion turbulente} \\ \text{de } \overline{R}_{ji}^c}} \\
 & - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial \langle u'_i \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f \langle P' \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{corrélation vitesse - pression}} + \underbrace{\left[\frac{\langle P' \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\langle P' \rangle_f}{\rho} \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{retour à l'isotropie}} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \overline{R}_{ij}^M}{\partial x_l} \right)}_{\substack{\text{diffusion moléculaire de } \overline{R}_{ij}^M}} - \underbrace{2 \overline{\varepsilon}_{ij}^M}_{\substack{\text{dissipation visqueuse} \\ \text{macroscopique}}} \\
 & \underbrace{- \overline{R}_{il}^M \frac{\partial \langle \overline{u}_j \rangle_f}{\partial x_j} - \overline{R}_{jl}^M \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{\text{production par cisaillement de l'écoulement macroscopique}} \\
 & \underbrace{- \left(\langle \overline{R}_{il}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_j}{\partial x_l} \rangle_f + \langle \overline{R}_{jl}^c \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_l} \rangle_f \right)}_{\text{contribution à la production de sous-filtre}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ij}^c \delta \overline{u}_l \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \overline{R}_{ji}^c \delta \overline{u}_l \rangle_f}_{\text{dispersion de } \overline{R}_{ij}^c \text{ et } \overline{R}_{ji}^c} \\
 & \underbrace{- \langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j} - \langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}}_{\text{travail par le mouvement macroscopique fluctuant de } F'_\phi} \\
 & - \underbrace{\left(- \langle \delta u_l \delta u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l} - \langle \delta u_l \delta u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{\text{transfert vers les petites échelles}}. \tag{4.42}
 \end{aligned}$$

Dans [36], Getachew et *al.* ont dérivé une équation bilan pour \overline{R}_{ij}^M en utilisant l'équation bilan de $\langle u'_i \rangle_f$ dans laquelle ils négligent la corrélation des déviations de vitesse. En comparant l'équation bilan qu'ils établissent avec l'équation (4.42), nous remarquons qu'ils n'obtiennent que partiellement la diffusion turbulente de \overline{R}_{ij}^m . De plus, ils ne mettent pas en évidence la diffusion turbulente et la dispersion des tenseurs croisés \overline{R}_{ij}^c et \overline{R}_{ji}^c , la contribution de sous-filtre ainsi que le transfert vers les petites échelles.

Enfin, l'équation bilan de $\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \langle \bar{u}_l \rangle_f = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \bar{R}_{ij}^m u'_l \rangle_f}_{\text{diffusion turbulente de } \bar{R}_{ij}^m} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \langle \delta \bar{R}_{ij}^m \delta \bar{u}_l \rangle_f}_{\text{dispersion de } \bar{R}_{ij}^m} \\
& - \frac{1}{\rho} \underbrace{\left[\frac{\partial \langle \delta u'_i \delta P' \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \delta u'_j \delta P' \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{corrélation vitesse pression}} + \underbrace{\left\langle \frac{\delta P'}{\rho} \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_j} \right\rangle_f + \left\langle \frac{\delta P'}{\rho} \frac{\partial \delta u'_j}{\partial x_i} \right\rangle_f}_{\text{retour à l'isotropie}} \\
& + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \bar{R}_{ij}^m}{\partial x_l} \right)}_{\text{diffusion moléculaire de } \bar{R}_{ij}^m} - \underbrace{2 \bar{\varepsilon}_{ij}^m}_{\text{dissipation visqueuse de sous-filtre}} \\
& + \underbrace{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_j} + \langle u'_j \rangle_f F'_{\phi_i}}_{\text{travail par le mouvement macroscopique fluctuant de } F'_\phi} \\
& - \underbrace{\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_l} - \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_l}}_{\text{production par cisaillement de l'écoulement macroscopique}} \\
& - \underbrace{\left(\langle \bar{R}_{il}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{jl}^m \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{\text{contribution à la production de sous-filtre par cisaillement}} \\
& - \underbrace{\left(\langle \bar{R}_{li}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_j}{\partial x_l} + \langle \bar{R}_{lj}^c \rangle_f \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_l} \right)}_{\text{contribution à la production de sous-filtre par cisaillement}} \\
& + \underbrace{\left(-\langle \delta u_l \delta u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_j \rangle_f}{\partial x_l} - \langle \delta u_l \delta u'_j \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_l} \right)}_{\text{transfert provenant des grandes échelles}}. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Notons que la somme de (4.42) et (4.43) fournit bien l'équation bilan de $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$.

4.2.5 Equations bilans des énergies cinétiques turbulentes macroscopique et microscopique (respectivement \bar{k}^M et $\langle \bar{k}^m \rangle_f$) : étude des transferts

Les équations bilans des énergies cinétiques turbulentes macroscopiques et de sous-filtre peuvent à présent être établies en prenant la demi trace des équations (4.42) et (4.43). Au regard des hypothèses d'incompressibilité du fluide et de porosité constante du milieu, les corrélations pression-déformation sont nulles.

Ainsi, l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente macroscopique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{k}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{k}^M \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\langle k^M u'_i \rangle_f}}_{(a)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\langle k^c u'_i \rangle_f}}_{(b)} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\langle u'_i \rangle_f \langle P' \rangle_f}}{\partial x_i}}_{(c)} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}^M}{\partial x_i} \right)}_{(d)} - \underbrace{\bar{\varepsilon}^M}_{(e)} - \underbrace{\bar{R}_{ij} \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{(f)} \\
 & - \underbrace{\overline{\langle \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f}}_{(g)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\langle \bar{k}^c \delta \bar{u}_i \rangle_f}}_{(h)} \\
 & - \underbrace{\overline{\langle u'_i \rangle_f F'_{\phi_i}}}_{(i)} - \underbrace{\left(-\overline{\langle \delta u_j \delta u'_i \rangle_f} \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{(j)}. \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

L'interprétation physique des termes composant cette équation bilan est déduite de l'analyse effectuée pour \bar{R}_{ij}^M . Le second membre est donc composé de :

- (a) la diffusion turbulente de \bar{k}^M ,
- (b) la diffusion turbulente de \bar{k}^c ,
- (c) la diffusion turbulente due aux fluctuations de pression,
- (d) la diffusion moléculaire de \bar{k}^M ,
- (e) la dissipation visqueuse macroscopique,
- (f) la production par couplage entre le tenseur des contraintes \bar{R}_{ij}^M et le cisaillement de l'écoulement macroscopique,
- (g) une contribution à la production de sous-filtre,
- (h) la dispersion de \bar{k}^c ,
- (i) le transfert d'énergie vers $\langle \bar{k}^m \rangle_f$ dû au travail de la force de trainée dans le mouvement macroscopique fluctuant,
- (j) le transfert «classique» d'énergie vers $\langle \bar{k}^m \rangle_f$ (via la cascade turbulente).

La dissipation visqueuse macroscopique correspond à la trace du tenseur de dissipation visqueuse macroscopique :

$$\bar{\varepsilon}^M = \bar{\varepsilon}_{ii}^M = \nu \frac{\partial \overline{\langle u'_i \rangle_f}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{\langle u'_i \rangle_f}}{\partial x_j}. \tag{4.45}$$

A présent, l'équation bilan de l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{k}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k}^m \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k}^m u'_i \rangle_f}_{(a)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f}_{(b)} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta u'_i \delta P' \rangle_f}{\partial x_i}}_{(c)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{k}^m}{\partial x_i} \right)}_{(d)} \underbrace{-\bar{\varepsilon}^m}_{(e)} \\
 & - \underbrace{\langle \bar{R}_{ij}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{(f)} - \underbrace{\langle (\bar{R}_{ij}^m + \bar{R}_{ji}^c) \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f}_{(g)} \\
 & + \underbrace{\langle u'_i \rangle_f \frac{F'_i}{\phi_i}}_{(h)} + \underbrace{\left(-\langle \delta u_j \delta u'_i \rangle_f \frac{\partial \langle u'_i \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{(i)}, \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

où les termes composant le membre de droite représentent :

- (a) la diffusion turbulente de \bar{k}^m ,
- (b) la dispersion de \bar{k}^m ,
- (c) la diffusion turbulente due aux fluctuations de pression,
- (d) la diffusion moléculaire de \bar{k}^m ,
- (e) la dissipation visqueuse de sous-filtre,
- (f) la production par couplage entre le tenseur des contraintes \bar{R}_{ij}^m et le cisaillement de l'écoulement macroscopique,
- (g) une contribution à la production de sous-filtre,
- (h) le transfert d'énergie provenant de \bar{k}^M dû au travail de la force de traînée dans le mouvement macroscopique fluctuant,
- (i) le transfert «classique» d'énergie provenant de \bar{k}^M (via la cascade turbulente).

La dissipation visqueuse de sous-filtre est la trace du tenseur $\bar{\varepsilon}_{ij}^m$:

$$\langle \bar{\varepsilon}^m \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{ii}^m \rangle_f = \left\langle \nu \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta u'_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \tag{4.47}$$

L'analyse des équations (4.44) et (4.46) montre une nouvelle fois le couplage qui existe entre les deux échelles de la turbulence. L'utilisation d'un filtre spatiale, correspondant à une coupure dans l'espace spectrale entraîne irrémédiablement l'apparition d'un terme de transfert. Ce transfert existe aussi bien dans un milieu libre que dans un milieu poreux (voir l'étude pour un milieu libre de Reynolds et *al.* [91, 95]). Par contre, pour le cas particulier d'un milieu poreux, les tourbillons de taille caractéristique supérieure au diamètre des pores vont être «brisés» par les inclusions solides et alimenter la turbulence à petite échelle. Le travail de la force de traînée par le mouvement macroscopique fluctuant représente cet autre transfert d'énergie. Pour Raupach [88] et Finnigan [30], ce transfert n'était dû qu'à la traînée de forme. L'analyse présentée dans ce chapitre montre que c'est la totalité de la force de

trainée (c'est à dire trainée de forme et trainée visqueuse) qui joue un rôle dans le couplage inter-échelle.

Dans les équations bilans (4.44) et (4.46), il faut noter que les diffusions turbulentes de k^M , k^c et k^m , sont pilotées par l'ensemble du spectre turbulent. Les dispersions de \bar{k}^c et \bar{k}^m sont aussi retrouvées. Ces termes de dispersion sont semblables aux termes de diffusion turbulente induits par l'utilisation du filtre statistique. Ils restent alors dans ces relations les termes de production par cisaillement de l'écoulement moyen, les corrélations vitesse-pression, la diffusion moléculaire et les dissipations visqueuses.

Lors de l'écriture de l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$, la nécessité de mieux comprendre le rôle et la signification du terme de production de sous-filtre avait été soulignée. Grâce à la définition de deux échelles de fluctuations, nous avons pu identifier son rôle dans l'évolution des deux énergies cinétiques \bar{k}^M et $\langle \bar{k}^m \rangle_f$. Pourtant, il n'apparaît pas encore dans les équations bilans (4.44) et (4.46) de réelle voie de modélisation pour ce terme. Il semble alors pertinent de déterminer comment l'énergie cinétique du mouvement moyen alimente le mouvement turbulent. Notons que la somme de (4.44) et (4.46) donne bien l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$.

4.3 Energies cinétiques du mouvement moyen

Dans un premier temps, la forme de l'équation bilan de l'énergie cinétique du mouvement moyen pour un écoulement de fluide **incompressible** est rappelée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{E} \bar{u}_i) = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P} \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \bar{E}}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{R}_{ij} \bar{u}_i) + \bar{R}_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

où \bar{E} est définie par (4.10). Cette équation bilan peut ensuite être moyennée spatialement. Le terme de convection est dissocié en un terme de convection par le mouvement macroscopique moyen et un terme de dispersion.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \bar{E} \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{E} \rangle_f}{\partial x_j} \right) - \langle \nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f \\ & - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \bar{R}_{ij} \bar{u}_i \rangle_f + \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f \\ & - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E} \delta \bar{u}_i \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.49)$$

L'équation bilan (4.49) permet de noter que la production de turbulence par cisaillement (notamment la production de sous-filtre) provient de l'énergie cinétique homogénéisée du mouvement moyen. Pour autant, cette équation ne fournit pas d'indices sur la relation éventuelle existant entre la production de sous-filtre et la force de trainée. Cette investigation peut être menée plus en avant en décomposant l'énergie cinétique moyennée spatialement en une contribution macroscopique et une contribution de sous-filtre :

$$\langle \bar{E} \rangle_f = \frac{1}{2} \langle \bar{u}_i \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f + \frac{1}{2} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_i \rangle_f. \quad (4.50)$$

Les équations de conservation de ces deux énergies cinétiques vont être établies pour faire apparaître les termes d'échange. Ces énergies seront notées :

$$\overline{E}^M = \langle \overline{E}^M \rangle_f = \frac{1}{2} \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \overline{u}_i \rangle_f, \quad (4.51)$$

$$\langle \overline{E}^m \rangle_f = \frac{1}{2} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_i \rangle_f. \quad (4.52)$$

4.3.1 Equations bilans de $\langle \overline{u}_i \rangle_f$ et $\delta \overline{u}_i$

L'équation bilan de la vitesse macroscopique moyenne est obtenue en appliquant successivement les opérateurs de moyenne statistique et spatiale (voir section 1.4.4) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \overline{u}_j \rangle_f &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P} \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f + \underbrace{\left\langle \left(-\frac{\delta \overline{P}}{\rho} \delta_{ij} + \nu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) n_j \delta_w \right\rangle_f}_{F_{\phi_i}}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Puis l'équation bilan de $\delta \overline{u}_i$ est établie en soustrayant la relation (4.53) à l'équation bilan (1.130) de \overline{u}_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \overline{u}_i \overline{u}_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \overline{u}_i \rangle_f \delta \overline{u}_j) &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \overline{R}_{ij} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f + \overline{F}_{\phi_i}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.3.2 Equation bilan de l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen \overline{E}^M

L'équation bilan (4.53) est multipliée par la vitesse moyenne macroscopique et en manipulant cette expression, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{E}^M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{E}^M \langle \overline{u}_i \rangle_f &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \overline{P} \rangle_f \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{E}^M \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \nu \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \langle \overline{u}_i \rangle_f + \langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \langle \overline{u}_i \rangle_f \overline{F}_{\phi_i} \\ &\quad + \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Dans l'équation (4.55), nous identifions notamment la puissance des forces de pression dans l'écoulement macroscopique moyen et la diffusion moléculaire de \overline{E}^M . Le troisième terme est une dissipation visqueuse dans l'écoulement macroscopique moyenne, et le terme suivant représente la puissance des contraintes turbulentes. Le cinquième terme du second membre est le terme de production de turbulence par cisaillement macroscopique. Ce terme peut encore être développé en se référant à (4.31) :

$$\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} = \overline{R}_{ij}^M \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \overline{R}_{ij}^m \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (4.56)$$

Puis le sixième terme est lié à la dispersion de la vitesse. Enfin, le travail de la force de traînée modifiée $\overline{F_{\phi_i}}$ par la vitesse macroscopique moyenne apparaît être un terme puit. La signification des derniers termes sera fournie lors de la reconstruction de l'équation bilan de $\langle \overline{E} \rangle_f$.

4.3.3 Equation bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen $\langle \overline{E}^m \rangle_f$

De la même manière, afin d'écrire l'équation bilan de $\langle \overline{E}^m \rangle_f$, la relation (4.54) est multipliée par la déviation de vitesse moyenne puis filtrée spatialement :

$$\begin{aligned} \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial t} \rangle_f + \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \overline{u}_i \overline{u}_j) \rangle_f &= - \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \overline{u}_i \rangle_f \delta \overline{u}_j) \rangle_f - \langle \frac{\delta \overline{u}_i}{\rho} \frac{\partial \delta \overline{P}}{\partial x_i} \rangle_f \\ &+ \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f - \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{R}_{ij}}{\partial x_j} \rangle_f \\ &+ \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f \rangle_f + \langle \delta \overline{u}_i \overline{F_{\phi_i}} \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Plusieurs termes nécessitent une analyse détaillée :

- une fois le terme convectif de la relation (4.54) multiplié par la déviation de la vitesse moyenne et filtré spatialement, la convection de \overline{K}^m par le mouvement macroscopique et une dispersion sont mises en évidence :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{E}^m \overline{u}_i \rangle_f = \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \overline{E}^m \rangle_f \langle \overline{u}_i \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \overline{E}^m \delta \overline{u}_i \rangle_f. \quad (4.58)$$

- Le premier terme du membre de droite peut aussi s'écrire

$$- \langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \overline{u}_i \rangle_f \delta \overline{u}_j) \rangle_f = - \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (4.59)$$

- Le terme de couplage avec la pression est développé pour faire apparaître la contribution due à la paroi :

$$- \langle \frac{\delta \overline{u}_i}{\rho} \frac{\partial \delta \overline{P}}{\partial x_i} \rangle_f = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \overline{P} \delta \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{P} n_i \delta_w \rangle + \langle \frac{\delta \overline{P}}{\rho} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_i} \rangle_f. \quad (4.60)$$

Or d'après l'hypothèse d'incompressibilité du fluide, le dernier terme du second membre de (4.60) est nul. De plus, le deuxième terme peut être modifié grâce à la condition d'adhérence à la paroi :

$$\frac{1}{\rho} \langle \overline{u}_i \delta \overline{P} n_i \delta_w \rangle = 0 \implies \frac{1}{\rho} \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{P} n_i \delta_w \rangle = - \frac{\langle \overline{u}_i \rangle_f}{\rho} \langle \delta \overline{P} n_i \delta_w \rangle.$$

- Le couplage avec les contraintes visqueuses subit une décomposition analogue :

$$\langle \delta \overline{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f = \langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \delta \overline{u}_i \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \right) \rangle_f + \langle \delta \overline{u}_i \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta_w \rangle_f - \langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \quad (4.61)$$

Le terme de paroi peut être transformé à partir de la condition d'adhérence :

$$\langle \delta \overline{u}_i \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta_w \rangle_f = - \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} n_j \delta_w \rangle_f. \quad (4.62)$$

- Concernant le couplage avec les contraintes turbulentes, il est possible de faire apparaître la production de sous-filtre par cisaillement ainsi que la moyenne spatiale de la puissance par le mouvement microscopique des contraintes turbulentes :

$$-\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial \delta \bar{R}_{ij}}{\partial x_j} \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f + \langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \quad (4.63)$$

- Due à l'idempotence du filtre spatial, les deux derniers termes de la relation (4.57) sont nuls.

$$\langle \delta \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \rangle_f + \langle \delta \bar{u}_i \overline{F_{\phi_i}} \rangle_f = 0.$$

L'équation bilan de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ prend à présent la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E}^m \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \langle \nu \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f \\ &- \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \bar{R}_{ij} \delta \bar{u}_i \rangle_f + \langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f + \langle \bar{u}_i \rangle_f \overline{F_{\phi_i}} \\ &- \langle \delta \bar{u}_i \delta \bar{u}_j \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_i \rangle_f. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Le travail de la force de trainée est ici un terme source pour l'énergie cinétique moyenne de sous-filtre \bar{E}^m . Nous retrouvons aussi le terme de production de sous-filtre qui est présent dans l'équation bilan de $\langle \bar{k}^m \rangle_f$. Il est développé en s'appuyant sur la relation (4.14), afin de préciser quelle énergie cinétique turbulente est alimentée par ce transfert :

$$\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f = \langle \bar{R}_{ij}^m \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f + \langle (\bar{R}_{ij}^c + \bar{R}_{ji}^c) \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \quad (4.65)$$

4.3.4 Reconstitution de l'équation bilan de $\langle \bar{E} \rangle_f$

De la même façon que pour les énergies cinétiques du mouvement turbulent, il existe des transferts d'énergies au sein du mouvement moyen. Ces transferts sont, pour partie, existants pour tous types d'écoulements dont les écoulements libres. L'autre partie est spécifique aux écoulements dans les milieux poreux et est liée à la force de trainée. Ils sont mis en évidence lors de la reconstruction de l'équation bilan de $\langle \bar{E} \rangle_f$.

- Les termes d'évolutions temporelles et de convections macroscopiques des deux équations bilans s'ajoutent naturellement :

$$\frac{\partial \bar{E}^M}{\partial t} + \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{E}^M \langle \bar{u}_i \rangle_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{E}^m \langle \bar{u}_i \rangle_f = \frac{\partial \langle \bar{E} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{E} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f.$$

- La somme des termes de puissance des forces de pression forment :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \bar{P} \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_i}.$$

- La somme des diffusions moléculaires donne :

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \overline{E}^M}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{E}^m \rangle_f}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\nu \frac{\partial \langle \overline{E} \rangle_f}{\partial x_l} \right) .$$

- Les dissipations visqueuses dans le mouvement moyen s'ajoutent :

$$\nu \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f = \langle \nu \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f .$$

- La somme des termes de puissance des contraintes turbulentes fournit :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \langle \overline{u}_i \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \delta \overline{R}_{ij} \delta \overline{u}_i \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{R}_{ij} \overline{u}_i \rangle_f . \quad (4.66)$$

- La somme des productions par cisaillement (macroscopique et de sous-filtre) permet d'écrire :

$$\langle \overline{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \overline{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \langle \delta \overline{R}_{ij} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f = \langle \overline{R}_{ij} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f . \quad (4.67)$$

- Le travail de la force de traînée par le mouvement macroscopique moyen représente un terme de couplage entre \overline{E}^M et $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ car il disparaît lors de la sommation des deux équations.

- Le terme

$$\langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u}_i \rangle_f$$

représente un échange d'énergie entre \overline{E}^M et $\langle \overline{E}^m \rangle_f$.

- Les deux derniers termes subsistants permettent de reconstruire la dispersion de l'énergie cinétique du mouvement moyen :

$$-\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \overline{u}_i \rangle_f \langle \delta \overline{u}_i \delta \overline{u}_j \rangle_f - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \overline{E}^m \delta \overline{u}_i \rangle_f = -\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \overline{E} \delta \overline{u}_i \rangle_f . \quad (4.68)$$

La somme des équations bilans de \overline{E}^M et $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ fournit bien l'équation bilan de $\langle \overline{E} \rangle_f$.

4.4 Analyse des transferts

Les équations bilans des quatre énergies cinétiques du fluide ont été établies. Les transferts d'énergies qui ont alors été mis en évidence, vont être, dans cette section, récapitulés. Le rôle de la production de sous-filtre dans ces transferts sera analysé et interprété. Une modélisation de ce terme sera notamment proposée en fonction de la force de traînée des structures solides.

4.4.1 Récapitulatif des transferts

Comme pour tout écoulement turbulent, le mouvement moyen (au sens statistique) cède de l'énergie au mouvement turbulent par le biais de la production par cisaillement. Dans cette étude, il a été choisi de décomposer cette production en deux contributions (voir Eq. (4.20) et Fig. 4.3) : la production par cisaillement macroscopique et la production de sous-filtre. Afin d'établir plus précisément le rôle de la production de sous-filtre dans le mouvement du fluide, une analyse à deux échelles a été réalisée. Les transferts au sein de l'écoulement se décomposent en deux catégories : les transferts «verticaux» entre les mouvements moyen et turbulent et les transferts «horizontaux» inter-échelle au sein du mouvement moyen et du mouvement turbulent. Toute cette analyse est résumée par la figure 4.4.

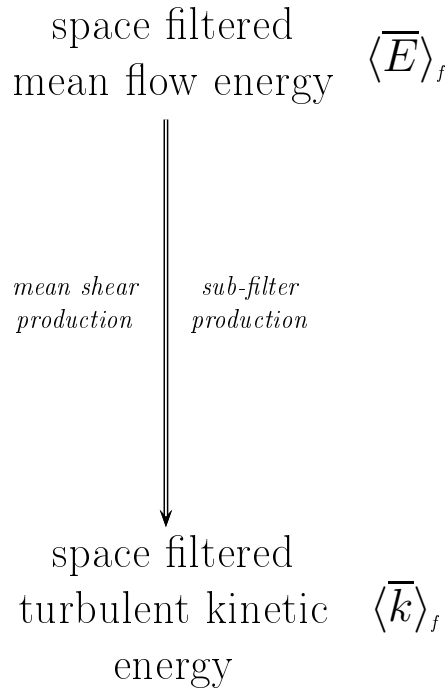


FIG. 4.3: Analyse monoéchelle des transferts entre les mouvements moyen et turbulent [74].

Dans un premier temps, les transferts qui existent indifféremment pour des écoulements libres et pour des écoulements au travers de milieux poreux sont décrits. Ainsi, le transfert 3 correspond au transfert d'énergie par le biais de la cascade turbulente au travers de la coupure qui a été définie tandis que le transfert 4 est le transfert classique entre les mouvements moyens macroscopique et de sous-filtre. Puis l'énergie \bar{E}^M alimente la turbulence à grande échelle *via* le transfert 5 et la turbulence de sous-filtre *via* le transfert 6. La somme de ces deux transferts représente la production par cisaillement macroscopique. Ensuite, l'énergie $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ alimente la turbulence à grande échelle *via* le transfert 7 et la turbulence de sous-filtre *via* le transfert 8. La somme de ces deux transferts représente la production de sous-filtre. Nous soulignons la présence de termes de corrélations croisées de vitesse dans l'expression de ces deux transferts. De plus, l'énergie cinétique de sous filtre du mouvement moyen peut alimenter la turbulence macroscopique.

La présence de la matrice solide provoque l'apparition de deux autres transferts horizontaux (*ie.* inter-échelle). Le mouvement moyen macroscopique cède de l'énergie au mou-

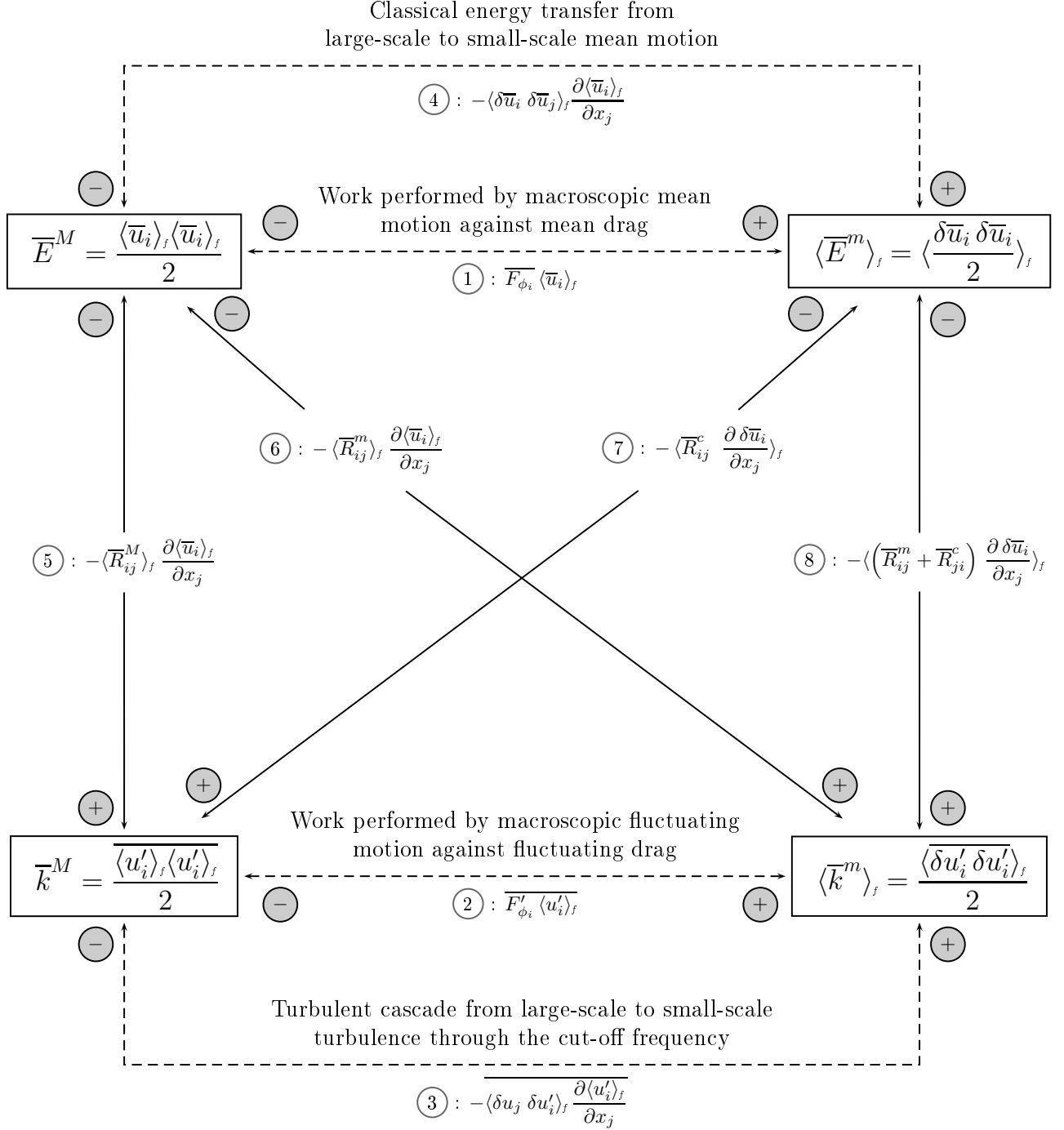


FIG. 4.4: Analyse détaillée des transferts verticaux (entre les mouvements moyen et turbulent) et des transferts horizontaux (inter-échelle au sein des mouvements moyen et turbulent) [74].

vement moyen de sous filtre *via* le transfert 1, qui est lié à la force de traînée moyenne et à la vitesse moyenne macroscopique. De plus, le mouvement turbulent macroscopique fournit de l'énergie au mouvement turbulent de sous filtre par le transfert 2. Ce phénomène avait déjà été identifié dans la partie introductive de l'analyse à deux échelles (Sec. 4.1.1), en remarquant que l'amortissement des grosses structures turbulentes par le solide fournissait de l'énergie aux petites échelles. Ce transfert a, à présent, été déterminé analytiquement : il est donc lié à la corrélation statistique entre les fluctuations de la force de traînée et de la vitesse macroscopique.

Pour un écoulement dans un milieu poreux, nous pouvons formuler une hypothèse de séparation d'échelle entre les mouvements turbulents macroscopique et de sous-filtre, en supposant que les tourbillons d'échelle caractéristique proche de l'échelle de coupure possèdent peu d'énergie. Les corrélations croisées \overline{R}_{ij}^c sont alors nulles. Par cette hypothèse, nous interdisons que l'énergie cinétique de sous filtre du mouvement moyen alimente la turbulence macroscopique. Différents scénarii schématisés, suivant le chargement en solide du milieu poreux, peuvent alors être envisagés. Les deux situations extrêmes sont :

- pour un milieu faiblement chargé en solide (ϕ proche de un), le scenario est proche d'un écoulement libre. Le mouvement moyen fournit de l'énergie à l'écoulement turbulent pour alimenter les grandes et les petites structures turbulentes. Le transfert d'énergie des grosses structures vers les petites structures est majoritairement dû au mécanisme classique de cascade turbulente. Une petite partie de ce transfert est causée par l'interaction entre les fluctuations de vitesse macroscopique et la structure solide.
- Pour un milieu fortement chargé en solide (ϕ proche de zéro), si une turbulence à grande échelle existe, elle est rapidement hachée par les structures solides pour alimenter le mouvement turbulent à petites échelles². Il est alors peu probable que le mouvement moyen crée de la turbulence à grande échelle et les transferts entre \overline{E}^M et $\langle \overline{k}^m \rangle_f$ ainsi qu'entre $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ et $\langle \overline{k}^m \rangle_f$ sont privilégiés.

Ces deux scénarii ne peuvent ici être justifiés quantitativement. Il faudrait pour cela avoir des données de Simulation Numérique Directe ou d'expériences pour pouvoir conclure précisément sur les transferts entrant en jeu. Pour des milieux modérément chargés, des scénarii intermédiaires existent.

4.4.2 Rôle du terme de production de sous-filtre

Nous nous focalisons à présent sur le rôle de la production de sous-filtre. Pour cela, le comportement de la turbulence pour un écoulement libre est comparé à celui de la turbulence à l'échelle macroscopique pour un écoulement en milieu poreux. Considérons par exemple un écoulement turbulent libre suivant une unique direction z et pour lequel les cisaillements sont nuls. Il est caractérisé par une vitesse statistiquement constante. Cela correspond au cas classique de la décroissance de turbulence de grille (voir p. 48). L'état d'équilibre (repéré par l'indice ∞) de cet écoulement est donné par :

$$\langle \overline{k}_\infty \rangle_f = 0. \quad (4.69)$$

Considérons à présent l'écoulement turbulent unidirectionnel (statistiquement) traversant un milieu poreux. A l'équilibre, l'équation bilan (4.4) se réduit à :

$$P_{SF_\infty} = \langle \overline{\varepsilon}_\infty \rangle_f \neq 0. \quad (4.70)$$

²«A further consequence of our physical argument is that true turbulence, in which there is a cascade of energy from large eddies to smaller eddies, does not occur on a macroscopic scale in a dense porous media» [72].

La dissipation visqueuse moyennée spatialement s'équilibre donc avec la production de sous-filtre. Puisque la vitesse débitante de l'écoulement est constante, la valeur à l'équilibre de ces deux grandeurs est non nulle. Le cisaillement existant aux parois assure que dans la zone proche-paroi l'énergie cinétique turbulente est non nulle. Il apparaît alors que les petites structures turbulentes sont alimentées par le frottement visqueux aux interfaces fluide-solide. Cette source d'énergie correspond au terme de production de sous-filtre. Une fois moyennée spatialement, il est aussi déduit :

$$\langle \bar{k}_\infty \rangle_f \neq 0. \quad (4.71)$$

A partir de ces considérations, nous affirmons que la production de sous-filtre est, au sens mathématique et physique, un mécanisme qui impose que l'état d'équilibre de la turbulence en milieu poreux soit caractérisé par des valeurs des quantités turbulentes moyennées spatialement non nulles. Par rapport à la modélisation de la turbulence en milieu libre, cette propriété est **primordiale** pour la modélisation de la turbulence en milieu poreux.

4.4.3 Analyse du terme de production de sous-filtre

De la même manière que dans les modèles locaux de turbulence où le terme source par cisaillement est un terme d'échange depuis l'énergie cinétique du mouvement moyen vers le mouvement fluctuant, la production de sous-filtre peut être modélisée en fonction de la traînée des inclusions solides. Dans un premier temps, Wilson [114] supposa que la production de sous-filtre était égale au produit entre la force de trainée et la vitesse moyenne macroscopique. Par la suite, Green [37] suggéra que cette production était trop importante et qu'il fallait donc retrancher un terme pour prendre en compte l'accélération de la cascade turbulente due à la présence de la phase solide. Ce terme était proportionnel à la vitesse moyenne macroscopique et à l'énergie cinétique turbulente moyennée spatialement. Comme il a été précisé précédemment, Raupach [88] et Finnigan [30] ont interprété la production de sous-filtre comme étant égale au travail de la traînée de forme dans l'écoulement moyen. Ces différentes propositions ne sont pas en accord avec les transferts qui ont été mis en évidence. D'une part la production de sous-filtre, qui est un transfert entre les écoulements moyen et turbulent, **n'est pas liée à l'accélération de la cascade turbulente** (si elle a effectivement lieu) qui est un transfert inter-échelle au sein du mouvement turbulent. De plus, dans les transferts d'énergie, **la traînée de forme ne revêt en outre aucun rôle particulier par rapport à la traînée visqueuse**.

En revenant à l'équation bilan (4.64) de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$, il est constaté que la production de sous-filtre et le produit scalaire entre la force de traînée et la vitesse de l'écoulement apparaissent conjointement. Pour l'écoulement macroscopiquement homogène, pour lequel les gradients des quantités doublement moyennées sont tous nuls, exceptés celui de la pression, l'équation bilan (4.64) se réduit à :

$$P_{SF} = -\langle \delta \bar{R}_{ij} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f = \langle \bar{u}_i \rangle_f \bar{F}_{\phi_i} - \langle \nu \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \rangle_f. \quad (4.72)$$

Cette relation rejoint en partie la proposition de Green [37] : la production de sous-filtre est égale au travail de la force de traînée auquel est soustrait un terme puits. Ce terme tient compte de la dissipation en chaleur dans l'écoulement microscopique de l'énergie cinétique moyenne. La figure 4.5 représente schématiquement le bilan de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$. Ainsi l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen transmet à $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ un certain montant d'énergie sous la forme du travail de la force de traînée. Puis $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ ne retransmet pas intégralement

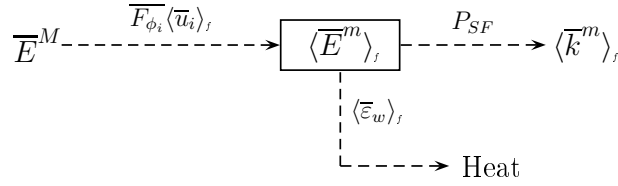


FIG. 4.5: Bilan schématique de l'énergie cinétique du mouvement moyen pour un écoulement macroscopiquement homogène [77].

cette énergie au mouvement turbulent. Une partie est directement dissipée en chaleur. Le reste, qui constitue la production de sous-filtre, alimente ensuite l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre.

Le terme de dissipation en chaleur est lié à la viscosité du fluide et aux gradients des déviations de vitesse. Ces gradients sont en grande partie créés par la présence des parois solides. Ils sont le plus importants dans les couches limites ou les sillages attachés à la structure solide. Pour cette raison, ce terme peut être appelé dissipation (visqueuse) de sillage et noté :

$$\langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f = \left\langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \overline{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (4.73)$$

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'analyse à deux échelles de la turbulence a été introduite en se basant sur le concept de double décomposition par rapport aux moyennes statistique et spatiale. Après calculs, tous les transferts se produisant au sein d'un écoulement dans un milieu poreux ont été mis en évidence. Il a été montré que la force de trainée jouait un rôle de premier plan dans ces échanges d'énergie. Ainsi, sous l'hypothèse de séparation des échelles turbulentes macroscopique et de sous-filtre, il est montré que la production de sous-filtre provient de l'énergie cinétique moyenne de sous-filtre et qu'elle alimente l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre. Elle résulte du bilan entre le travail de la force de trainée dans le mouvement moyen macroscopique et de la dissipation de sillage.

Etablissement d'un modèle de turbulence pour un milieu stratifié

LA dérivation d'un modèle de turbulence en milieu poreux doit nécessairement être le résultat d'étapes progressives de modélisation. Dans le chapitre 4, les transferts existant au sein de l'écoulement ont été analysés afin de mieux appréhender le terme de production de sous-filtre. Dans le présent chapitre, nous considérons des milieux stratifiés. Par conséquent, la turbulence à grande échelle est peu importante, voire inexistante.

Nous proposons tout d'abord de cerner les difficultés inhérentes à la modélisation de la turbulence (à l'échelle macroscopique) dans un milieu poreux en réalisant une étude bibliographique (section 5.1). Puis, dans la section 5.2, l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est modélisée, en remarquant que trois autres termes nécessitent aussi d'être modélisés. Ainsi, ce travail de modélisation est effectué pour la dissipation visqueuse moyennée spatialement dans la section 5.3, pour le coefficient de frottement dans la section 5.4 et enfin pour la dissipation de sillage dans la section 5.5. Dans une dernière partie (section 5.7), nous analysons succinctement les états asymptotiques de ces différentes grandeurs en proposant des modèles pour la configuration géométrique du canal plan.

5.1 Etude bibliographique

Avant de détailler les développements, nous nous intéressons tout d'abord à quatre modèles de turbulence en milieu poreux, à savoir le modèle de Liu et *al.* [60], celui de Flick et *al.* [31], celui de Nakayama et Kuwahara [70] ainsi que celui de Pedras et De Lemos [73]. Les domaines d'application pour lesquels ces modèles ont été dérivés sont différents les uns des autres. Ils couvrent les écoulements dans les canopées, les écoulements dans des empilements de sphères ainsi que les écoulements transverses à des faisceaux de crayons (sections carrée et circulaire). Les principales caractéristiques (nombre d'équations, domaine d'application) de ces différents modèles ont été reportées dans le tableau 5.1 et leurs différences suivant le domaine d'application seront exposées.

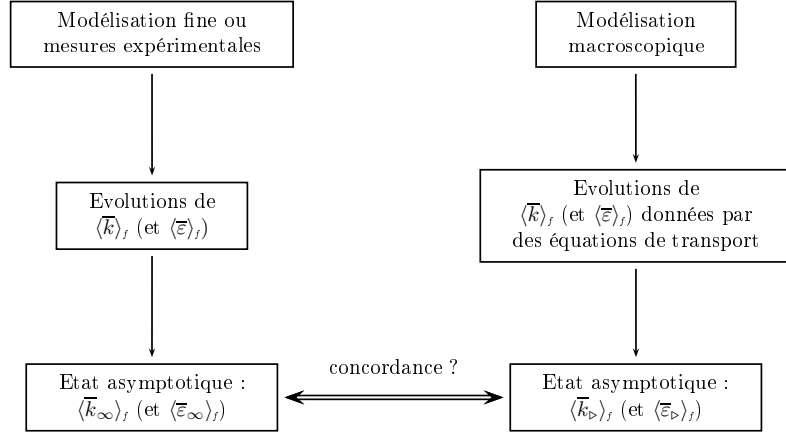


FIG. 5.1: Problématique de la modélisation à l'échelle macroscopique d'un écoulement turbulent en milieu chargé. La modélisation porte sur les équations de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, mais elle peut s'étendre aux états asymptotiques de référence $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$.

La contrainte la plus importante dans la simulation de la turbulence en milieu poreux est, à notre sens, de retrouver l'état asymptotique (ou d'équilibre) de cet écoulement. La figure 5.1 synthétise cette problématique. D'un côté, les mesures expérimentales [31] ou les simulations fines [70] d'écoulements peuvent être moyennées pour décrire les évolutions macroscopiques de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ dans une géométrie donnée. Ces évolutions atteignent un état d'équilibre de référence qui sera par la suite indiqué par le symbole ∞ . D'un autre côté, la modélisation macroscopique décrit les évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ au moyen généralement d'équations de transport. Ces équations atteignent, elles aussi, un état d'équilibre, par la suite repéré par l'indice \triangleright . Cette notation est choisie par souci de clarté. Au sens strict, nous pourrions utiliser le symbole ∞ pour caractériser aussi l'état asymptotique du modèle macroscopique pour avoir :

Etat asymptotique des évolutions locales moyennées spatialement : $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$;

Etat asymptotique des évolutions macroscopiques : $\langle \bar{k} \rangle_{f,\infty} = \langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f$.

Pour que la modélisation macroscopique soit au plus proche des évolutions de référence, la concordance entre les deux états asymptotiques ∞ et \triangleright est requise. Une fois cette condition remplie, on cherchera alors à reproduire la dynamique d'établissement.

5.1.1 Equation de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$

En reprenant l'équation (4.4) ainsi que la définition (4.6), l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{\left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i}_f + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f \\ & - \langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + P_{SF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Dans cette équation bilan, cinq termes nécessitent d'être modélisés.

| Modèle | Domaine d'application initial | Nombre d'équation(s) |
|---------------------------|--|---|
| Liu et al. [60] | canopées | 2 : $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ |
| Flick et al. [31] | empilement d'objets (sphères) | 1 : $\langle \bar{k} \rangle_f$ |
| Nakayama et Kuwahara [70] | écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section carré | 2 : $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ |
| Pedras et De Lemos [73] | écoulement transverse dans un faisceau de crayons à section circulaire | 2 : $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ |

TAB. 5.1: Modèles de turbulence en milieux poreux : présentation de quatre modèles suivant leur domaine d'application, et leur nombre d'équations de transport.

1. Tout d'abord, la **diffusion turbulente** de \bar{k} s'écrit

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \left(\frac{P'}{\rho} + k' \right) u'_i \right\rangle_f. \quad (5.2)$$

Les auteurs, par exemple dans les références [31, 60, 70, 73], font unanimement appel à une fermeture au premier gradient pour modéliser ce terme suivant l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_{t_\phi}}{\sigma_k} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right). \quad (5.3)$$

Nous soulignons que la viscosité turbulente macroscopique ν_{t_ϕ} n'est pas *a priori* égale à la moyenne spatiale de la viscosité turbulente locale ($\nu_{t_\phi} \neq \langle \nu_t \rangle_f$)

2. Ensuite, la **dispersion** de l'énergie cinétique turbulente correspond au terme

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_i \rangle_f. \quad (5.4)$$

Cette dispersion n'est pas prise en compte dans le modèle de Flick et al. [31]. Or il n'existe aucune justification permettant d'affirmer qu'elle puisse être négligée suivant l'un ou l'autre des domaines d'application cités [88]. Pedras et De Lemos [73] proposent de modéliser cette dispersion conjointement avec la production de sous-filtre. Néanmoins, la dispersion est un terme de transport. Dispersion et production sont de natures différentes et ne peuvent être réunies dans un seul terme modèle. Dans le modèle de Liu et al. [60], la dispersion est modélisée conjointement avec la diffusion turbulente. Cependant, l'expression qu'ils proposent pour le coefficient de diffusion turbulente (voir l'item 3) ne fait aucunement référence à la dispersion. Quant à Nakayama et Kuwahara [70], ils suggèrent de faire une analogie entre dispersion thermique et dispersion de l'énergie cinétique turbulente. Par la définition d'un nombre de Lewis, ils utilisent les résultats de dispersion obtenus dans la référence [53] pour décrire la dispersion de \bar{k} . Cette proposition sera discutée dans la section 5.2.1.

3. La **production par cisaillement macroscopique** est donnée par

$$P_M = -\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}. \quad (5.5)$$

La modélisation de cette production dépend de la modélisation des contraintes de Reynolds moyennées spatialement. Dans ce but, Antohe et Lage [3], ainsi que Getachew et al. [36] ont dérivé une équation de transport pour les contraintes de Reynolds macroscopiques, et plus précisément pour $\overline{R_{ij}^M}$. Cette approche est complexe et le plupart des auteurs choisissent de modéliser le terme $\langle \overline{R_{ij}} \rangle_f$ grâce à une fermeture au premier gradient¹. Ainsi, ils s'inspirent de la modélisation locale de la turbulence et écrivent pour un écoulement incompressible dans un milieu à porosité constante :

$$-\langle \overline{R_{ij}} \rangle_f = \nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \overline{u_i} \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \overline{u_j} \rangle_f}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \langle \overline{k} \rangle_f \delta_{ij}. \quad (5.6)$$

Ils définissent parallèlement le coefficient de diffusion turbulente de manière analogue à la modélisation locale de la turbulence :

$$\nu_{t\phi} = C'_\mu \frac{\langle \overline{k} \rangle_f^2}{\langle \overline{\varepsilon} \rangle_f}. \quad (5.7)$$

Selon [60, 70, 73], C'_μ est une constante égale à 0.09. Nous ne pouvons statuer concernant la pertinence de cette modélisation. Par contre, l'expression (3.147) du flux macroscopique de diffusion thermique apportent certains éléments de réflexion. Pour un écoulement longitudinal établi dans un canal de section quelconque, nous avons montré :

$$\alpha_{t\phi} = \langle \alpha_t \rangle_f. \quad (5.8)$$

D'après la modélisation «classique» de la diffusivité thermique turbulente, nous avons aussi :

$$\langle \alpha_t \rangle_f = \frac{\langle \nu_t \rangle_f}{Pr_t}. \quad (5.9)$$

En poursuivant l'analogie entre la modélisation microscopique et la modélisation macroscopique (dont l'expression (5.7) fait partie, l'expression

$$\alpha_{t1} = \frac{\langle \nu_{t\phi} \rangle_f}{Pr_t} = \frac{C'_\mu \langle \overline{k} \rangle_f^2}{Pr_t \langle \overline{\varepsilon} \rangle_f} \quad (5.10)$$

est une proposition pour la modélisation de $\langle \alpha_{t\phi} \rangle_f$. Or, dans le cas d'un milieu stratifié composé de plaques planes ou de tubes à section circulaire, la figure 5.2 indique nettement que la proposition (5.2) ne peut être retenue.

4. La production de sous-filtre,

$$P_{SF} = \langle \delta \overline{R_{ij}} \frac{\partial \delta \overline{u_i}}{\partial x_j} \rangle_f, \quad (5.11)$$

fait l'objet de différentes propositions de modélisation. Flick et al. [31] suggèrent l'expression modèle :

$$P_{SF, \text{Flick}} = \frac{c_k ||\langle \mathbf{u} \rangle_f||^3}{\sqrt{K}}, \quad (5.12)$$

¹Nous précisons que Flick et al. [31] n'émettent aucune proposition pour ce terme.

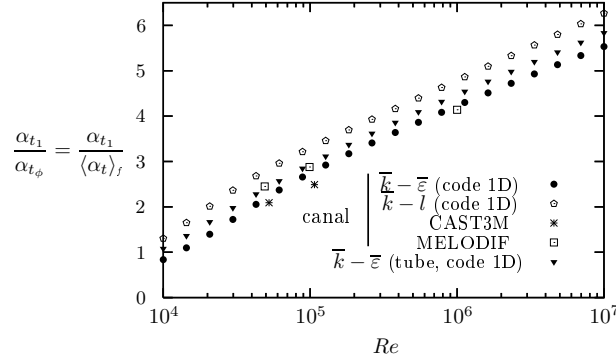


FIG. 5.2: Evolution du rapport $\alpha_{t_1}/\alpha_{t_{phi}}$ en fonction du nombre de Reynolds, pour un écoulement longitudinal établi dans un milieu stratifié.

où c_k est une constante (sans dimension) de modélisation et K (m^2) est la perméabilité du milieu considéré. Nous exposons succinctement la définition de la perméabilité. Pour un écoulement stationnaire caractérisé par un nombre de Reynolds inférieur à 1, Darcy [26] modélise les pertes de charges grâce à l'expression :

$$F_{\phi_i} = -\nu \frac{\phi \langle u_i \rangle_f}{K}, \quad (5.13)$$

Cette loi est en fait une analogie avec la loi d'Ohm en électricité où la perméabilité du milieu se substitue à la résistance électrique. Dans le cas d'un milieu isotrope, la variable K est un scalaire, mais sa définition peut être étendue à un milieu anisotrope en employant une formulation matricielle. Deux propriétés essentielles caractérisant la perméabilité sont :

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} K = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\phi \rightarrow 1} K = \infty.$$

Flick *et al.* [31] supposent donc que pour une géométrie donnée (K et ϕ fixées) et un débit donné ($\|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|$ fixée), la production de sous-filtre est constante. La racine carrée de la perméabilité est alors utilisée comme une échelle de longueur caractérisant le milieu poreux. En se focalisant plus précisément sur un faisceau de crayons, Nakayama et Kuwahara [70] suggèrent :

$$P_{SF, NK} = 39 \phi^2 (1 - \phi)^{5/2} \frac{\|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3}{L_r}, \quad (5.14)$$

où L_r est la largeur de la section des crayons composant le faisceau². L'une des propriétés remarquables des expressions (5.12) et (5.14) est qu'elles sont indépendantes de la turbulence. Elles ne s'annulent donc pas lorsque l'écoulement tend vers un régime laminaire, ce qui pose un problème de cohérence du modèle. Partant de ce constat, Pedras et De Lemos [73] choisissent de prendre en compte l'énergie cinétique turbulente moyennée spatialement dans l'expression modèle de P_{SF} :

$$P_{SF, PdL} = c_k \phi^2 \frac{\langle \bar{k} \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|}{\sqrt{K}}. \quad (5.15)$$

²L'inconvénient de cette expression modèle est qu'elle est dédiée à la géométrie considérée.

Pour déterminer la constante de modélisation c_k , ils moyennent spatialement des calculs fins représentant un écoulement à l'équilibre et déduisent de l'expression (5.15) la valeur de c_k . Ils affirment ensuite que cette valeur est aussi valable pour les écoulements hors équilibre sans toutefois effectuer de vérification.

La modélisation la plus aboutie provient très certainement de la proposition faite par Liu et *al.* [60] qui se réfèrent en l'occurrence aux travaux de Green [37] et Wilson [114]. La production de sous-filtre inclut en particulier le produit entre la vitesse moyenne et la force de traînée. Selon [32, 60], «le processus de la cascade énergétique de Kolmogorov des larges échelles vers les petites échelles est accéléré par la présence des éléments végétaux, qui active la dissipation de l'énergie par frottement visqueux»³. Un terme puits, appelé dissipation de sillage et proportionnel à la vitesse moyenne et à $\langle \bar{k} \rangle_f$ [37, 114], est inclus dans la modélisation de la production de sous-filtre. Suite à ces remarques, l'expression modèle de cette production prend la forme :

$$P_{SF, \text{Liu}} = C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3 - 4C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\| \langle \bar{k} \rangle_f, \quad (5.16)$$

où C_d est un coefficient de frottement correspondant à

$$C_d = f_p/4, \quad (5.17)$$

et $\langle \delta_w \rangle_f$ est la densité volumique d'interface fluide-solide (voir section 3.4.1).

5. Il reste alors la **dissipation visqueuse moyennée spatialement**

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \quad (5.18)$$

Une étude bibliographique de sa modélisation est discutée dans la section suivante.

Suivant les différents modèles décrits, l'équation bilan modèle de $\langle \bar{k} \rangle_f$ prend finalement la forme générique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{\substack{\text{dispersion} \\ \text{(si prise en compte)}}} \\ &+ \underbrace{\nu_{t\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{\substack{\text{production par cisaillement} \\ \text{macroscopique } P_M}} + \underbrace{P_{SF}}_{\text{production de sous-filtre}} \\ &- \underbrace{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}_{\substack{\text{dissipation visqueuse} \\ \text{homogénéisée}}}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

³Cette affirmation a déjà été critiquée au cours du chapitre 4.

5.1.2 Modélisation de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$

Dans les quatre modèles présentés, deux stratégies sont adoptées pour décrire la dissipation visqueuse moyennée spatialement. D'une part, Flick et *al.* [31] choisissent de décrire $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ à partir de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et de la vitesse débitante :

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_{f,\text{Flick}} = c_4 \langle \bar{k} \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|, \quad (5.20)$$

où c_4 est une constante de modélisation⁴. D'autre part, pour rester plus général dans l'analyse, les autres auteurs préfèrent postuler une équation bilan pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ⁵ en la déduisant de l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ (Eq. (5.19)), en y ajoutant l'influence de temps caractéristiques liés à chaque phénomène (production ou dissipation) et en y adjoignant des constantes de modélisation. L'équation bilan postulée de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ peut être écrite sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial x_j} \right) \\ &+ C_{\varepsilon_1} \frac{P_M}{\tau_t} + C_{\varepsilon_s} \frac{P_{SF}}{\tau_s} - C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

La diffusion turbulente de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est décrite par un terme de même structure que la diffusion turbulente de $\langle \bar{k} \rangle_f$. Seul le nombre de Prandtl-Schmidt turbulent associé (σ_ε) diffère. Faute de description précise de ce phénomène pour la dissipation visqueuse de la turbulence, elle est supposée n'être soumise qu'au mécanisme de dispersion passive [70]. Cela implique qu'une fois ramené sous sa forme adimensionnée, le tenseur $\mathcal{D}_{ij}^{\bar{\varepsilon}}$ est identique au tenseur de dispersion passive étudié au chapitre 3. Puis, selon [60, 70, 73], le temps τ_t est donné par :

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}. \quad (5.22)$$

L'originalité des différents modèles s'opèrent sur le choix du temps caractéristique τ_s et de la constante C_{ε_s} associée. Pedras et de Lemos considèrent que le temps τ_s doit être identique à τ_t :

$$\tau_{s,\text{PdL}} = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad (5.23)$$

et que $C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}$. En partant de l'hypothèse que l'échelle caractéristique de la turbulence

$$L_M \propto \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} \quad (5.24)$$

est presque constante, Liu et *al.* [60] proposent un premier temps proportionnel au temps τ_t . Des expériences numériques les poussent ensuite à définir deux temps suivant les contributions du terme de production de sous-filtre (voir Eq. (5.16)) pour obtenir :

$$\frac{P_{SF,\text{Liu}}}{\tau_{s,\text{Liu}}} = \frac{3}{2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{k} \rangle_f} C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3 - 2.4 C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\| \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \quad (5.25)$$

⁴Cette constante possède une dimension (m^{-1}).

⁵Pedras et de Lemos [73] établissent formellement l'équation de transport de la dissipation visqueuse homogénéisée spatialement, mais la modélisation qu'ils proposent par la suite n'est pas déduite de cette équation «exacte».

A cette définition, ils adjoignent la valeur $C_{\varepsilon_s} = 1$. Enfin, Nakayama et Kuwahara [70] suggèrent d'utiliser un temps constant, qui fait appel à l'état asymptotique de référence :

$$\tau_{s,NK} = \frac{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f}, \quad (5.26)$$

avec $C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}$. En réalité, le choix de ce temps influe directement sur l'état asymptotique que le modèle macroscopique va atteindre.

5.1.3 Etat asymptotique

Il existe deux problématiques distinctes concernant l'état asymptotique (ou d'équilibre) de la turbulence. Il s'agit de la modélisation de l'état asymptotique de référence ($\langle \bar{k}_\infty \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$) ainsi que de la concordance entre l'état asymptotique ($\langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f$) atteint par le modèle macroscopique et l'état asymptotique de référence.

L'état asymptotique de référence peut se déduire de simulations fines ou de mesures expérimentales moyennées. Cependant, même en considérant un milieu d'une géométrie donnée, cet état doit être renseigné pour une large gamme de nombre de Reynolds et de porosité. Nakayama et Kuwahara [70] proposent alors de décrire l'état asymptotique de référence à travers des corrélations. Ils effectuent différentes simulations fines pour un écoulement transverse à un faisceau de cylindres (à section carrée) disposés en quinconces et en déduisent les expressions :

$$\langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 3.7 (1 - \phi)^2 \phi^{3/2} \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^2, \quad (5.27)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f = 39 (1 - \phi)^{5/2} \phi^2 \frac{\|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3}{L_r}. \quad (5.28)$$

Dans les autres modèles, ces valeurs ne sont pas renseignées : les auteurs considèrent que les valeurs asymptotiques atteintes par le modèle macroscopique correspondent aux valeurs de référence. Nous insistons sur le fait que l'établissement d'un modèle macroscopique de turbulence est **indépendant** de l'éventuel modèle employé pour renseigner les valeurs asymptotiques de référence.

Pour déterminer le couple ($\langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f$), il suffit de considérer un écoulement homogène macroscopiquement et décrire l'état asymptotique des équations bilans de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$:

$$P_{SF_\triangleright} = \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f, \quad (5.29)$$

$$C_{\varepsilon_s} \frac{P_{SF_\triangleright}}{\tau_{s,\triangleright}} = C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f}{\tau_{t,\triangleright}}. \quad (5.30)$$

En introduisant les différentes propositions de modélisation pour la production de sous-filtre (et pour la dissipation visqueuse homogénéisée pour le modèle de Flick et *al.* [31]), les états asymptotiques sont déterminés.

- Pour le modèle de Flick et *al.* [31]), on trouve

$$\langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f = \frac{c_k \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^2}{c_4 \sqrt{K}}, \quad \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f = \frac{c_k \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3}{\sqrt{K}}. \quad (5.31)$$

Ils se servent ensuite de mesures expérimentales pour déterminer les constantes c_k et c_4 .

- Pour le modèle de Liu et *al.* [60], il existe deux couples solutions au système (5.29)-(5.30)

$$\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f = \frac{\|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^2}{4}, \quad (5.32)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f = 0, \quad (5.33)$$

et

$$\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f = \left(\frac{C_{\varepsilon_2} - 3/2}{4C_{\varepsilon_2} - 2.4} \right) \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^2, \quad (5.34)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f = C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3 - 4C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\| \langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f. \quad (5.35)$$

En considérant la valeur $C_{\varepsilon_2} = 1.9$, l'application numérique fournit :

$$\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f = 0.08 \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^2, \quad (5.36)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f = C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3 - 0.32C_d \langle \delta_w \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|^3. \quad (5.37)$$

La solution 1 ne correspond pas à l'état asymptotique de référence. En ce qui concerne la solution 2, il n'est pas possible de montrer qu'elle est équivalente à la solution de référence. Il y a donc un **problème de cohérence du modèle**.

- Pour le modèle de Nakayama et Kuwahara [70], il y a automatiquement concordance entre les états asymptotiques de référence et les états asymptotiques atteint par le modèle macroscopiques :

$$\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f = \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f, \quad \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f. \quad (5.38)$$

- Pour le modèle de Pedras et De Lemos [73], le système (5.29)-(5.30) s'écrit :

$$c_k \phi^2 \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f \|\langle \mathbf{u} \rangle_f\|}{\sqrt{K}} = \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f, \quad (5.39)$$

$$C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f^2}{\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f} = C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f^2}{\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f}. \quad (5.40)$$

La deuxième relation étant inexploitable, nous sommes en présence d'une seule équation pour deux inconnues. La valeur des états asymptotiques dépend alors d'un paramètre extérieur. Pour préciser cette remarque, nous considérons l'établissement d'un écoulement turbulent, statistiquement permanent, dans un milieu stratifié composé de plaques planes. Si cet écoulement ne présente pas de gradient macroscopique de la vitesse et en supposant négligeables la diffusion et la dispersion, les équations de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ s'écrivent :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = P_{SF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (5.41)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = C_{\varepsilon_s} \frac{P_{SF}}{\tau_s} - C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t}. \quad (5.42)$$

En utilisant la proposition (5.23) dans le système (5.41)-(5.42), et l'égalité $C_{\varepsilon_s} = C_{\varepsilon_2}$, il vient :

$$\frac{C_{\varepsilon_2}}{\langle \bar{k} \rangle_f} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = \frac{1}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z}. \quad (5.43)$$

Cette relation différentielle est identique à celle décrivant la décroissance d'une turbulence de grille (voir Eq. (2.41), p. 48). Elle permet notamment de relier les conditions d'équilibre aux conditions initiales :

$$\left(\frac{\langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f}{\langle \bar{k}_0 \rangle_f} \right)^{C_{\varepsilon_2}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f} \right). \quad (5.44)$$

Dans le cas de la décroissance de turbulence de grille en milieu libre, cette relation n'a pas de conséquence sur la modélisation puisque l'état d'équilibre est l'état nul. Dans ce cas, les valeurs à l'équilibre sont *a fortiori* indépendantes des conditions initiales. Par contre, pour l'établissement de la turbulence dans un milieu poreux, les valeurs à l'équilibre dépendent de la géométrie du milieu (et plus précisément de la géométrie du motif élémentaire pour un milieu poreux périodique) et du nombre de Reynolds. Puisqu'elles sont non nulles, la relation (5.44) indique que, pour ce modèle, les valeurs à l'équilibre dépendent aussi des conditions initiales⁶. **Cette conséquence disqualifie automatiquement le choix décrit en (5.23).**

5.1.4 Problématique

A travers l'étude de quatre modèles de turbulence en milieu poreux, plusieurs points essentiels pour aboutir à une modélisation cohérente ont été mis en avant.

1. La modélisation de la production de sous-filtre reste un problème ouvert. Il a notamment été souligné que la production de sous-filtre devait être nulle pour un écoulement laminaire.
2. La modélisation du coefficient de diffusion turbulente résulte pour l'instant d'une simple analogie avec la modélisation locale de la turbulence. Ce modèle nécessite très certainement une amélioration.
3. Si une équation de transport est utilisée pour modéliser $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, la définition du temps τ_t doit être justifiée. Nous avons aussi montré que le choix du temps τ_s (le temps caractéristique associé à la production de sous-filtre) conditionne l'aptitude du modèle à atteindre un état asymptotique fixé.
4. La manière dont est renseigné l'état asymptotique de référence, que ce soit grâce à des mesures expérimentales, des simulations fines ou des corrélations, ne possède pas d'influence sur l'établissement du modèle macroscopique de turbulence en milieu chargé.

Dans ce chapitre, des solutions seront proposées concernant les points 1, 3 et 4. Par contre, le point 2 ne sera pas traité.

5.2 Modélisation de l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$

L'étude bibliographique concernant la modélisation de l'équation de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$, menée en section 5.1.1, a mis en avant les principales difficultés liées à cet exercice. Dans cette section, nous décrivons dans un premier temps notre proposition de modèle pour l'équation de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$, pour un écoulement de fluide incompressible dans un milieu à porosité

⁶Voici un exemple de modèle macroscopique qui atteint un équilibre différent de l'équilibre de référence.

constante. Puis, afin de réaliser une étude plus fine du bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$, les écoulements turbulents dans un milieu stratifié composé de plaques planes sont analysés. Une première étape vers la modélisation de la production de sous-filtre est ensuite proposée.

5.2.1 Forme générale de l'équation bilan modèle de $\langle \bar{k} \rangle_f$

En nous appuyant sur l'étude bibliographique réalisée en section 5.1.1, nous proposons différentes modélisations pour les termes composant l'équation (5.1).

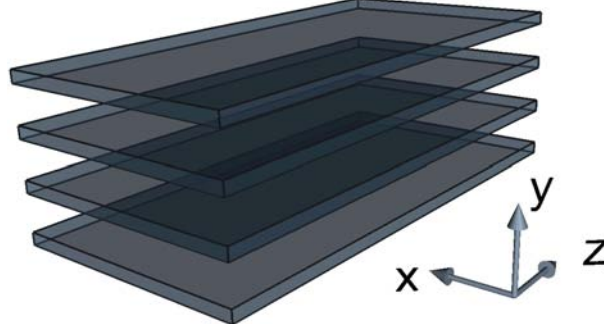
1. La diffusion turbulente de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est modélisée par une fermeture au premier gradient (Eq. (5.3)). Le coefficient de diffusion $\nu_{t,\phi}$ doit être calculé en fonction des caractéristiques macroscopiques de la turbulence et de la géométrie.
2. La dispersion de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est un terme plus complexe. D'après l'étude qui a été menée au chapitre 3, nous pouvons affirmer que \bar{k} est soumis à un mécanisme de dispersion passive lié aux hétérogénéités de vitesse et aux gradients de viscosité turbulente. Par un processus d'adimensionnalisation, les résultats du chapitre 3 peuvent être partiellement extrapolés pour le cas de l'énergie cinétique turbulente. Par contre, \bar{k} est aussi assujettie au mécanisme de dispersion active qui est induit par les termes sources présents dans l'équation de $\delta \bar{k}$, c'est à dire par un terme de production par cisaillement et par un terme de dissipation visqueuse. Ces termes sont plus délicats à traiter que le flux de chaleur pris en compte au chapitre 3, car ils sont extrêmement dépendants de l'écoulement considéré. Dans un cadre général, une conclusion concernant l'importance que revêt ces termes dans le mécanisme de dispersion ne peut être émise. Dans l'équation bilan modèle proposée, **nous ne tiendrons compte que de la dispersion passive et nous négligerons la dispersion active.**
3. La production par cisaillement macroscopique peut être explicitée en modélisant les contraintes de Reynolds moyennées spatialement. A l'instar des modèles présentés dans la section 5.1, **nous proposons d'exprimer ce tenseur par la relation (5.6).**
4. La modélisation de la production de sous-filtre ne sera empruntée à aucune des références bibliographiques qui ont été présentées. Ce terme est pour l'instant conservé tel quel.
5. Pour la dissipation visqueuse homogénéisée, nous choisissons de postuler une équation de transport.

Une forme générale pour l'équation bilan modèle de l'énergie cinétique turbulente moyennée spatialement est ainsi proposée :

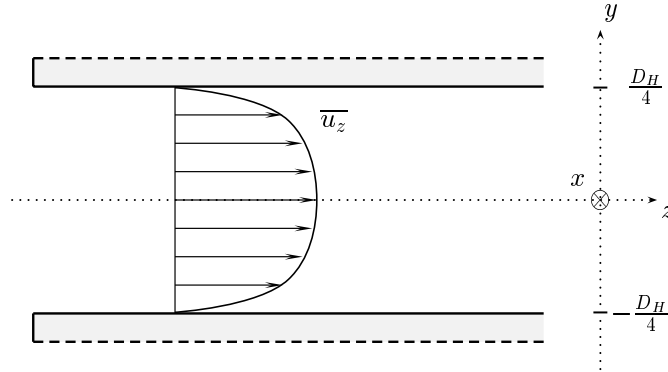
$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{k} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t,\phi}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{k}} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{\text{dispersion (passive)}} \\
 &+ \underbrace{\nu_{t,\phi} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{\text{production par cisaillement macroscopique}} + \underbrace{P_{SF}}_{\text{production de sous-filtre}} \\
 &- \underbrace{\langle \bar{\epsilon} \rangle_f}_{\text{dissipation visqueuse homogénéisée}}.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

5.2.2 Modélisation de la production de sous-filtre P_{SF}

Pour étudier plus particulièrement le terme de production de sous-filtre, nous nous concentrons maintenant sur l'établissement d'un écoulement turbulent dans un milieu stratifié. L'écoulement est supposé statistiquement permanent et homogène dans la direction x .



(a) Description tridimensionnelle d'un milieu stratifié composé de canaux plans.



(b) Description bidimensionnelle d'un canal plan.

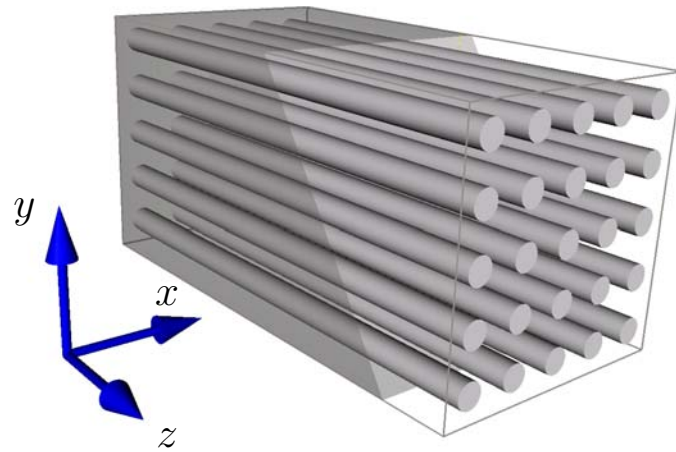
FIG. 5.3: Description d'un milieu stratifié composé de canaux plans.

Par hypothèse, les gradients de la vitesse moyennée spatialement sont nuls. Sous ces conditions, l'écoulement ne présente donc pas de production de turbulence à l'échelle macroscopique, ni de transfert d'énergie entre échelles macroscopiques et microscopiques. L'énergie turbulente \bar{k}^M est nulle, ce qui implique d'après (4.18) :

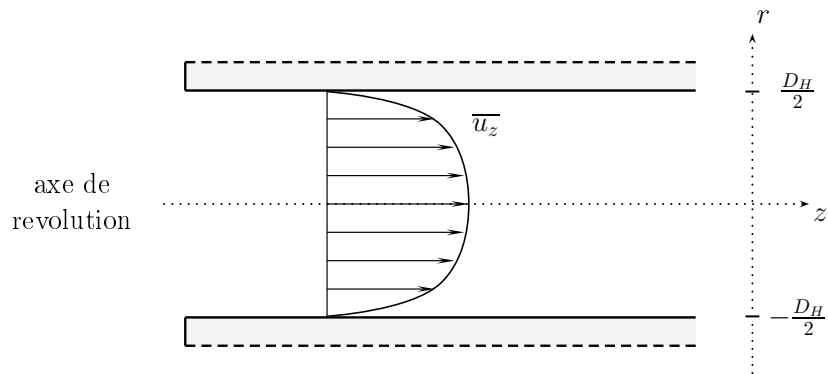
$$\langle \bar{k} \rangle_f = \langle \bar{k}^m \rangle_f. \quad (5.46)$$

Enfin, la production de sous-filtre alimente exclusivement les échelles microscopiques. Dans ces conditions, l'étude macroscopique d'un écoulement dans le milieu stratifié décrit par la figure (5.3) peut être réduite à l'étude de l'écoulement dans un unique canal bidimensionnel plan. De la même façon, celle d'un écoulement dans le milieu décrit par la figure (5.4) peut être réduit à l'étude de l'écoulement dans un unique tube à section circulaire.

L'étude du comportement à l'échelle macroscopique de la turbulence s'appuiera principalement sur quatre calculs de référence (voir section 2.4.3). Tout d'abord, pour le nombre



(a) Description tridimensionnelle d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire.



(b) Description bidimensionnelle d'un tube à section circulaire.

FIG. 5.4: Description d'un milieu stratifié composé de tubes à section circulaire. Le diamètre hydraulique est égale au diamètre des tubes.

| Indicatif du calcul | Re | $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ | $L_{tM_0}^*$ |
|---------------------|-----------------|--|--------------|
| SIM_REF_1 | 10^5 | 3 | 1/10 |
| SIM_REF_2 | 10^5 | 3 | 1/25 |
| SIM_REF_3 | 10^5 | 3 | 1/100 |
| SIM_REF_4 | 5×10^4 | 3 | 1/10 |

TAB. 5.2: Description des écoulements turbulents dans un canal plan constituant les calculs de références.

de Reynolds égal à 10^5 et pour la condition d'entrée $\langle \bar{k}_0 \rangle_f = 3 \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$, les résultats de simulations correspondant aux trois valeurs de $L_{tM_0}^*$ ⁷ seront plus particulièrement étudiés. Puis, pour étudier l'influence du nombre de Reynolds, tous les autres paramètres étant conservés par ailleurs, la configuration correspondant à $Re = 5 \times 10^4$, $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 3$, $L_{tM_0}^* = 1/10$ sera aussi analysée. Tous les résultats qui seront énoncés par la suite pour le canal plan ont été validés sur chacune des simulations composant le tableau 2.4, mais ne seront exposés que pour les quatre cas décrits par le tableau 5.2. De plus, nous indiquons que les quatre calculs de référence ont été réalisés à la fois dans la géométrie du canal plan et dans celle du tube à section circulaire. Dans les étapes clés de modélisation, nous nous servirons des résultats concernant le tube pour appuyer les observations obtenues à partir de l'étude du canal plan.

Comme nous le verrons plus précisément sur la figure 5.7 (p. 175), l'évolution longitudinale de $\langle \bar{k} \rangle_f$ dans un canal plan s'approche d'une oscillation, rapidement amortie, autour de la valeur asymptotique. Afin de mieux comprendre cette dynamique d'oscillation, le bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est étudié. D'après les hypothèses qui ont été formulées dans la section 5.2.1, l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ se réduit schématiquement à :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = \text{Diffusion} + \text{Dispersion} + P_{SF} - \text{Dissipation} . \quad (5.47)$$

Les différents termes composant le membre de droite sont des moyennes spatiales de grandeurs locales. Conformément à la modélisation locale de l'équation bilan de \bar{k} , présentée au chapitre 2, les résultats des simulations fines sont moyennés suivant les expressions :

$$\begin{aligned} \text{Diffusion} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\langle \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial z} \right\rangle_f , \\ \text{Dispersion} &= - \frac{\partial}{\partial z} \langle \delta \bar{k} \delta \bar{u}_z \rangle_f , \\ P_{SF} &= \langle \delta \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right) \delta \left(\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right) \rangle_f , \\ \text{Dissipation} &= \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f . \end{aligned}$$

Ainsi, pour un écoulement turbulent dans un canal plan, il est constaté (Fig. 5.5) que la dispersion et la diffusion moyennée spatialement dans la direction de l'écoulement sont

⁷La définition (2.143) de ce paramètre est rappelée : $L_{tM_0}^* = \langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2} / (\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H)$.

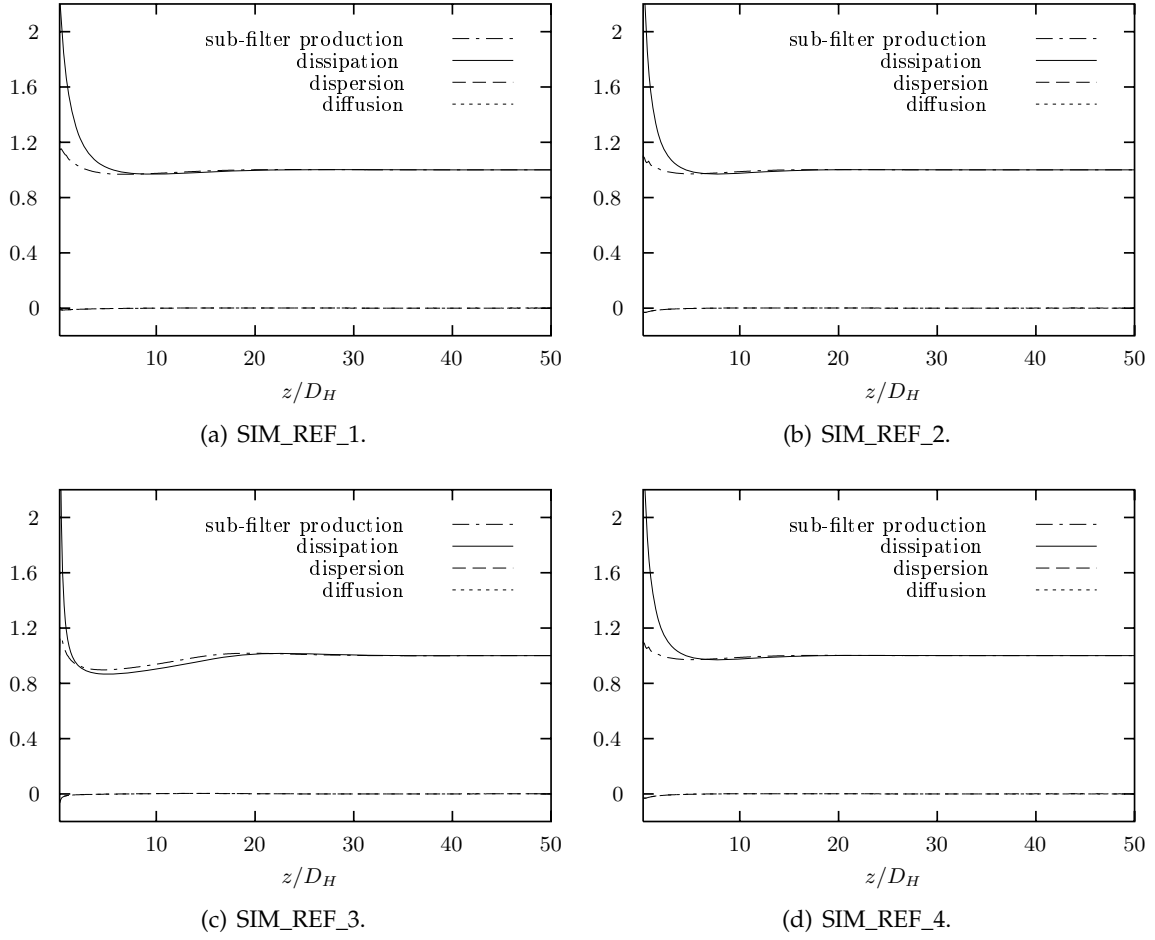


FIG. 5.5: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude du bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ décrit par l'équation (5.47) à partir des résultats CAST3M. Evolutions adimensionnées par $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$.

négligeables devant la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse homogénéisée. Par la suite, le bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ dans un canal sera donc réduit à :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = P_{SF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \quad (5.48)$$

La dynamique d'oscillation de $\langle \bar{k} \rangle_f$ résulte de la compétition entre la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse homogénéisée (Eq. (5.48)). Même si ils n'étaient pas négligeables, les mécanismes de diffusion et de dispersion ne peuvent pas provoquer cette oscillation, mais seulement l'atténuer. Dans le voisinage immédiat de l'entrée, la dissipation visqueuse est uniformément répartie sur la largeur du canal alors que la production de turbulence est localisée dans la très fine couche limite (Fig. 2.25). En remarquant que la production de sous-filtre est la moyenne spatiale de cette production, cela implique :

$$\text{près de l'entrée, } P_{SF} < \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f. \quad (5.49)$$

Pour caractériser la compétition entre P_{SF} et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, nous considérons deux types de déséquilibre.

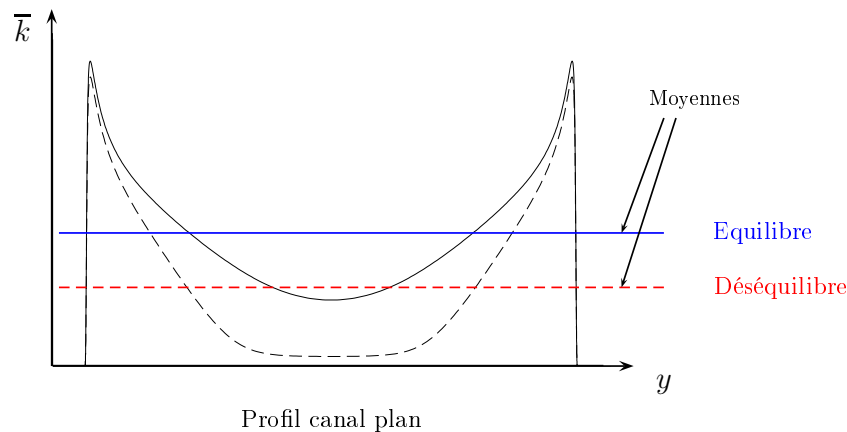


FIG. 5.6: Illustration des déséquilibres de niveau et de forme sur le profil de l'énergie cinétique turbulente dans un canal plan.

1. Lorsque la moyenne spatiale d'une quantité est différente de sa valeur à l'équilibre, il s'agit d'un **déséquilibre de niveau**. Cette notion est donc liée à l'établissement macroscopique.
2. Le **déséquilibre de forme** est lié à l'établissement microscopique : bien qu'une quantité ait atteint sa valeur moyenne d'équilibre, si son profil local ne correspond pas au profil local à l'équilibre, cette quantité n'est toujours pas établie.

La figure 5.6 illustre un profil à l'équilibre ainsi qu'un profil à la fois en déséquilibre de niveau et de forme. Naturellement, les deux catégories de déséquilibre interagissent. Ainsi, une grandeur qui atteint l'équilibre de niveau sans atteindre l'équilibre de forme peut évoluer à nouveau vers un déséquilibre de niveau. Dans le cas du canal plan, les profils de \overline{u}_z , \overline{k} et $\overline{\varepsilon}$ ont, près de l'entrée, une forme très différente de leur forme à l'équilibre. Après que l'intensité de la turbulence ait diminué, les larges gradients de vitesse en paroi produisent de l'énergie cinétique turbulente qui est diffusée vers le centre du canal. Plus la couche limite s'épaissit, moins la production de turbulence est concentrée dans la zone proche-paroi. La production de sous-filtre devient alors plus importante que la dissipation visqueuse moyennée spatialement et, par conséquent, $\langle \overline{k} \rangle_f$ augmente. Puis, à partir d'une certaine distance de l'entrée, toutes les quantités atteignent leur équilibre de niveau et de forme.

L'influence du nombre de Reynolds et des conditions d'entrée sur cette dynamique d'oscillation va à présent être examinée. La localisation du premier minimum local de $\langle \overline{k} \rangle_f$ correspond à l'abscisse z pour laquelle la production de sous-filtre s'équilibre une première fois avec la dissipation visqueuse homogénéisée. Grâce à la figure 5.7, en observant les courbes (1), (2) et (3), il est noté que cette abscisse diminue lorsque le paramètre $L_{tM_0}^*$ diminue, tous les autres paramètres étant égaux par ailleurs. La décroissance de $\langle \overline{k} \rangle_f$ peut être très rapide près de l'entrée du canal comme l'indique la courbe (3). Puis la comparaison des courbes (1) et (4) montre que ce premier minimum local s'approche de l'entrée du canal lorsque le nombre de Reynolds diminue, les conditions turbulentes d'entrée étant conservées. Les modélisations proposées devront reproduire ce comportement.

Au chapitre 4, une voie de modélisation pour la production de sous-filtre a été proposée. Elle repose sur une hypothèse d'homogénéité macroscopique dans l'équation bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen. Cette hypothèse va à présent être

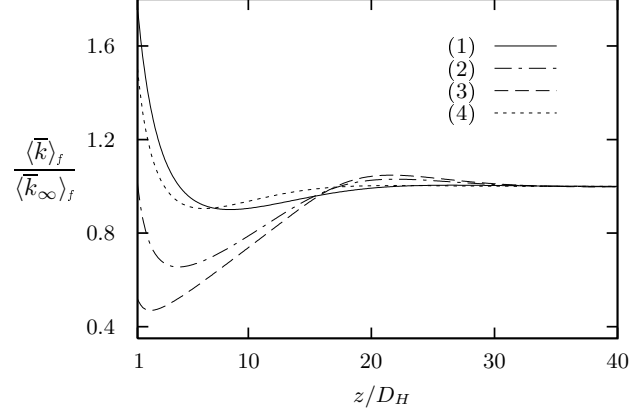


FIG. 5.7: Evolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$ pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4. Ces quatre cas sont décrits par le tableau (5.2) : ils ont en commun la condition d'entrée $\langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 3$.

évaluée pour un écoulement dans un canal. Pour la configuration étudiée, l'équation bilan de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ se réduit à :

$$\underbrace{\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial z}}_I = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \delta \bar{P} \delta \bar{u}_z \rangle_f}{\partial z} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial \langle \bar{E}^m \rangle_f}{\partial z} \right)}_{II} - \frac{\partial}{\partial z} \langle \delta \bar{R}_{zz} \delta \bar{u}_z \rangle_f \quad (5.50)$$

$$\underbrace{- \frac{\partial}{\partial z} \langle \delta \bar{E}^m \delta \bar{u}_z \rangle_f}_{III} - \underbrace{P_{SF}}_{IV} - \underbrace{\left\langle \nu \frac{\partial \delta \bar{u}_z}{\partial y} \frac{\partial \delta \bar{u}_z}{\partial y} \right\rangle_f}_{V} + \underbrace{\langle \bar{u}_z \rangle_f \bar{F}_{\phi_z}}_{VI}.$$

Nous précisons que le terme *II* est composé de deux contributions : elles s'apparentent toutes les deux à un mécanisme de diffusion. Pour preuve, en utilisant l'idempotence du filtre spatial, on montre :

$$- \frac{\partial}{\partial z} \langle \delta \bar{R}_{zz} \delta \bar{u}_z \rangle_f = - \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{R}_{zz} \delta \bar{u}_z \rangle_f. \quad (5.51)$$

En modélisant au premier gradient le tenseur des contraintes turbulentes, on précise :

$$- \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{R}_{zz} \delta \bar{u}_z \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \langle \nu_t \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} \delta \bar{u}_z \rangle_f. \quad (5.52)$$

D'après la conservation du débit dans le canal, le gradient longitudinal de vitesse est égale au gradient longitudinal de sa déviation :

$$- \frac{\partial}{\partial z} \langle \bar{R}_{zz} \delta \bar{u}_z \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \langle \nu_t \frac{\partial \delta \bar{u}_z}{\partial z} \delta \bar{u}_z \rangle_f = \frac{\partial}{\partial z} \langle \nu_t \frac{\partial (\delta \bar{u}_z \delta \bar{u}_z / 2)}{\partial z} \rangle_f. \quad (5.53)$$

Le terme *II* de l'équation de transport (5.50) correspond donc à une diffusion (moléculaire et turbulente) dans la direction de l'écoulement, moyennée spatialement.

Pour les quatre simulations principalement étudiées, les évolutions des différents termes composant l'équation de transport (5.50), excepté le terme lié à la pression, sont reportées sur la figure 5.8. Pour des abscisses z supérieures à $10 D_H$, la production de sous-filtre, la

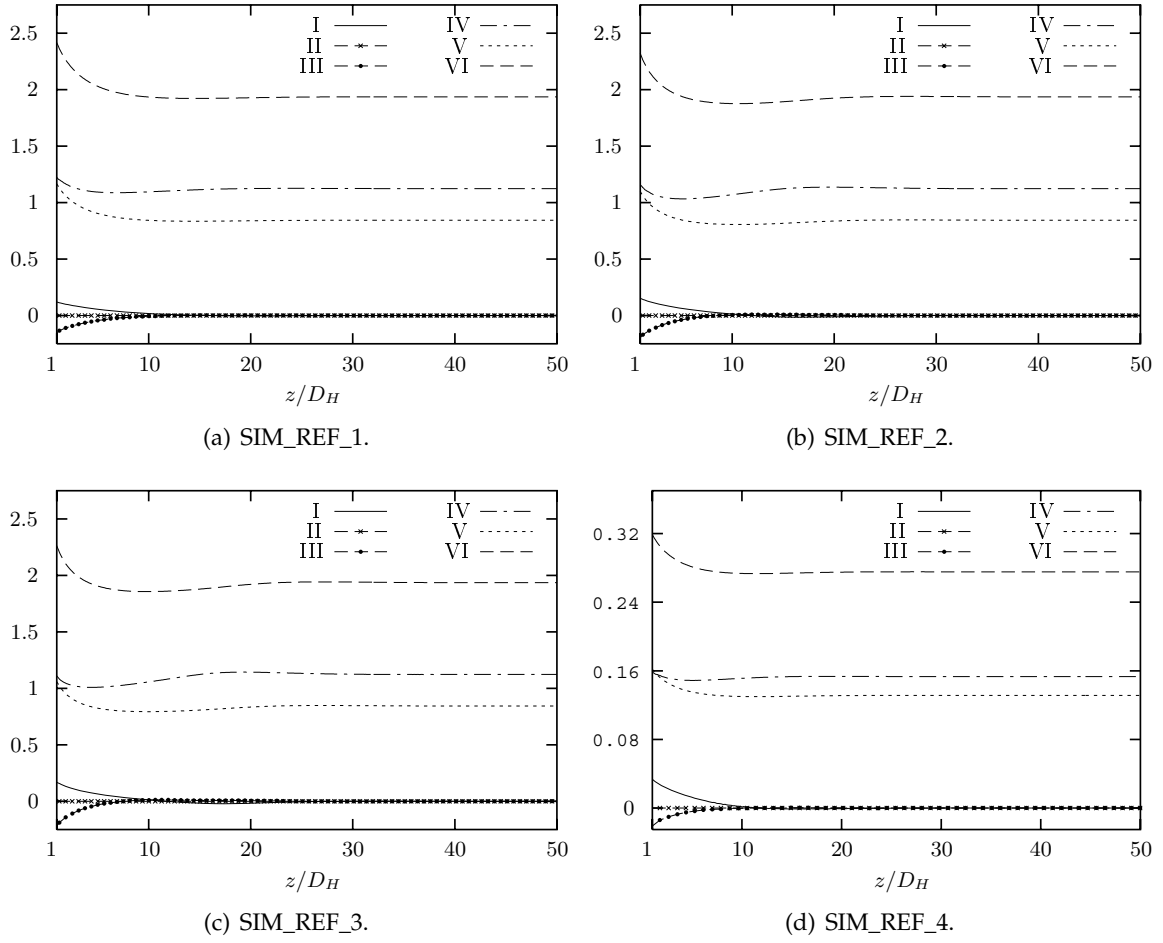


FIG. 5.8: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude du bilan de $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ décrit par l'équation (5.50) à partir des résultats CAST3M.

dissipation de sillage et le travail de la force de trainée sont clairement très grands devant les autres termes de l'équation bilan (5.50). Ce constat est à nuancer pour $z/D_H \lesssim 10$: pour le nombre de Reynolds le plus faible, le rapport entre la production de sous-filtre et la contribution convective dans le bilan de $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ est proche de 5 en $z = D_H$. D'après la figure 5.8, nous dirons que, à partir de l'abscisse $z = 2D_H$, les trois contributions dominantes dans le bilan de $\langle \overline{E}^m \rangle_f$ sont la production de sous-filtre, le travail de la force de trainée et la dissipation de sillage. En conséquence, il vient :

$$P_{SF} = \overline{F_{\phi_z}} \langle \overline{u}_z \rangle_f - \langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f \quad \text{avec} \quad \langle \overline{\varepsilon}_w \rangle_f = \left\langle \nu \frac{\partial \delta \overline{u}_z}{\partial z} \frac{\partial \delta \overline{u}_z}{\partial z} \right\rangle_f. \quad (5.54)$$

Cette expression n'est pas à proprement parler une modélisation de la production de sous-filtre car la dissipation de sillage et la force de trainée (*via* le coefficient de frottement f_p , voir Eq. (2.149)) sont aussi des inconnues du problème. Cette expression est utile dans le sens où elle donne un signification à cette production et la relie à une quantité qui est connue pour l'état d'équilibre, à savoir la force de trainée. La modélisation de la production de sous-filtre passe alors par la modélisation du coefficient de frottement f_p et de la dissipation de sillage. Ce travail est effectué dans les sections 5.4 et 5.5.2.

5.3 Proposition d'une équation bilan modèle pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$

5.3.1 Proposition d'une forme générale pour l'équation bilan modèle de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$

Au chapitre 2, la méthodologie pour établir le modèle local de turbulence $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ et notamment l'équation de transport de $\bar{\varepsilon}$ a été décrite. Il avait été souligné que cette équation bilan était postulée à partir de l'équation de \bar{k} en supposant qu'elle était régie par les mêmes phénomènes. Des temps caractéristiques sont introduits pour définir les termes sources et puits de l'équation bilan de $\bar{\varepsilon}$ à partir de leurs homologues dans l'équation bilan de \bar{k} . En nous appuyant sur l'étude bibliographique réalisée dans la section 5.1.2, une méthodologie similaire est employée pour postuler une équation de transport de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ à partir de l'équation (5.45) :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f \langle \bar{u}_i \rangle_f = & \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_{t\phi}}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial x_i} \right]}_{\text{diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mathcal{D}_{ij}^{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial x_j} \right)}_{\text{dispersion (passive)}} \\
 & + \underbrace{C_{\varepsilon_1} \frac{\nu_{t\phi}}{\tau_t} \left(\frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \bar{u}_j \rangle_f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle \bar{u}_i \rangle_f}{\partial x_j}}_{\text{production par cisaillement macroscopique}} + \underbrace{C_{\varepsilon_2} \frac{P_{SF}}{\tau_s}}_{\text{production de sous-filtre}} \\
 & - \underbrace{C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t}}_{\text{dissipation}} .
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Dans cette équation, la constante de modélisation associée à la production de sous-filtre est choisie égale à la constante associée à la dissipation visqueuse (sans perte de généralité, voir section 5.1.2).

Pour préciser cette proposition, les écoulements turbulents dans des canaux sont considérés. Dans cette configuration, l'équation bilan de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ se réduit à

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = C_{\varepsilon_2} \frac{P_{SF}}{\tau_s} - C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t} . \tag{5.56}$$

5.3.2 Identification du temps caractéristique τ_t et valeur de C_{ε_s}

Pour déterminer le temps τ_t , le raisonnement le plus simple est de considérer que le modèle de turbulence en milieu poreux doit rester cohérent avec la modélisation locale de la turbulence. Dans ce cadre, et comme les travaux référencés en [60, 70, 73], nous proposons :

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} . \tag{5.57}$$

Cependant, la forme (5.56) de l'équation bilan de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est la plus simple qui puisse exister pour un milieu poreux. Aucune indication n'est disponible concernant τ_s et il est donc impossible de vérifier la proposition (5.57) en restant dans la configuration d'un milieu chargé en structures solides. Nous revenons alors à l'étude de la décroissance d'une turbulence de grille en milieu libre (voir le paragraphe «Détermination du coefficient C_{ε_2} : décroissance d'une turbulence de grille» au chapitre 2, p.48) pour vérifier la pertinence de l'expression (5.57) et pour déterminer la valeur de la constante C_{ε_2} .

Considérons un écoulement orienté dans la direction z et statistiquement homogène dans les directions x et y . La décroissance locale de la turbulence est décrite par les évolutions (2.41) et (2.42). A présent, ces évolutions peuvent être filtrées spatialement. L'écoulement étant statistiquement homogène dans les directions x et y , il n'est pas nécessaire de moyenner l'écoulement dans ces directions. Par contre, dans la direction z , le REV est décrit par la taille caractéristique r_{0z} . L'opérateur de moyenne spatiale, appliqué à une quantité ξ , est alors précisé :

$$\langle \xi \rangle_f(z) = \frac{1}{r_{0z}} \int_{z - \frac{r_{0z}}{2}}^{z + \frac{r_{0z}}{2}} \xi(z') dz'. \quad (5.58)$$

En appliquant cet opérateur aux évolutions locales (2.41) et (2.42) des quantités turbulentes, les évolutions macroscopiques de référence sont obtenues :

$$\langle \bar{k}_{ref} \rangle_f(z) = \frac{\bar{k}_0}{r_{0z}} \frac{\left[1 + a \left(z + \frac{r_{0z}}{2} - z_0\right)\right]^{-\frac{C_{\varepsilon_2}}{1-C_{\varepsilon_2}}} - \left[1 + a \left(z - \frac{r_{0z}}{2} - z_0\right)\right]^{-\frac{C_{\varepsilon_2}}{1-C_{\varepsilon_2}}}}{-aC_{\varepsilon_2}/(1-C_{\varepsilon_2})}, \quad (5.59)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{ref} \rangle_f(z) = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{r_{0z}} \frac{\left[1 + a \left(z + \frac{r_{0z}}{2} - z_0\right)\right]^{\frac{1}{1-C_{\varepsilon_2}}} - \left[1 + a \left(z - \frac{r_{0z}}{2} - z_0\right)\right]^{\frac{1}{1-C_{\varepsilon_2}}}}{a/(1-C_{\varepsilon_2})}, \quad (5.60)$$

où

$$a = (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\bar{k}_0} \frac{1}{\bar{u}_z}. \quad (5.61)$$

Pour l'écoulement étudié, la vitesse étant constante spatialement, nous avons $\bar{u}_z = \langle \bar{u}_z \rangle_f$. Les expressions (5.59) et (5.60) ne sont définies qu'à partir de l'abscisse $z = r_{0z}/2$.

Le modèle macroscopique de turbulence est ensuite considéré. Pour la décroissance d'une turbulence de grille, il prend la forme :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = -\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (5.62)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = -C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t}. \quad (5.63)$$

En utilisant l'expression (5.57) pour le temps τ_t , la solution du système précédent s'écrit :

$$\langle \bar{k} \rangle_f(z) = \langle \bar{k}'_0 \rangle_f \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{\left(z - \frac{r_{0z}}{2}\right)}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \frac{\langle \bar{\varepsilon}'_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}'_0 \rangle_f} \right]^{\frac{1}{1-C_{\varepsilon_2}}}, \quad (5.64)$$

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f(z) = \langle \bar{\varepsilon}'_0 \rangle_f \left[1 + (C_{\varepsilon_2} - 1) \frac{\left(z - \frac{r_{0z}}{2}\right)}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \frac{\langle \bar{\varepsilon}'_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}'_0 \rangle_f} \right]^{\frac{C_{\varepsilon_2}}{1-C_{\varepsilon_2}}}. \quad (5.65)$$

Pour rester cohérent entre les deux approches, les expressions (5.64) et (5.65) ne sont définies qu'à partir de l'abscisse $z = r_{0z}/2$. De plus, les valeurs initiales des évolutions macroscopiques sont données par :

$$\langle \bar{k}'_0 \rangle_f = \langle \bar{k} \rangle_f\left(\frac{r_{0z}}{2}\right) = \langle \bar{k}_{ref} \rangle_f\left(\frac{r_{0z}}{2}\right), \quad (5.66)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}'_0 \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f\left(\frac{r_{0z}}{2}\right) = \langle \bar{\varepsilon}_{ref} \rangle_f\left(\frac{r_{0z}}{2}\right). \quad (5.67)$$

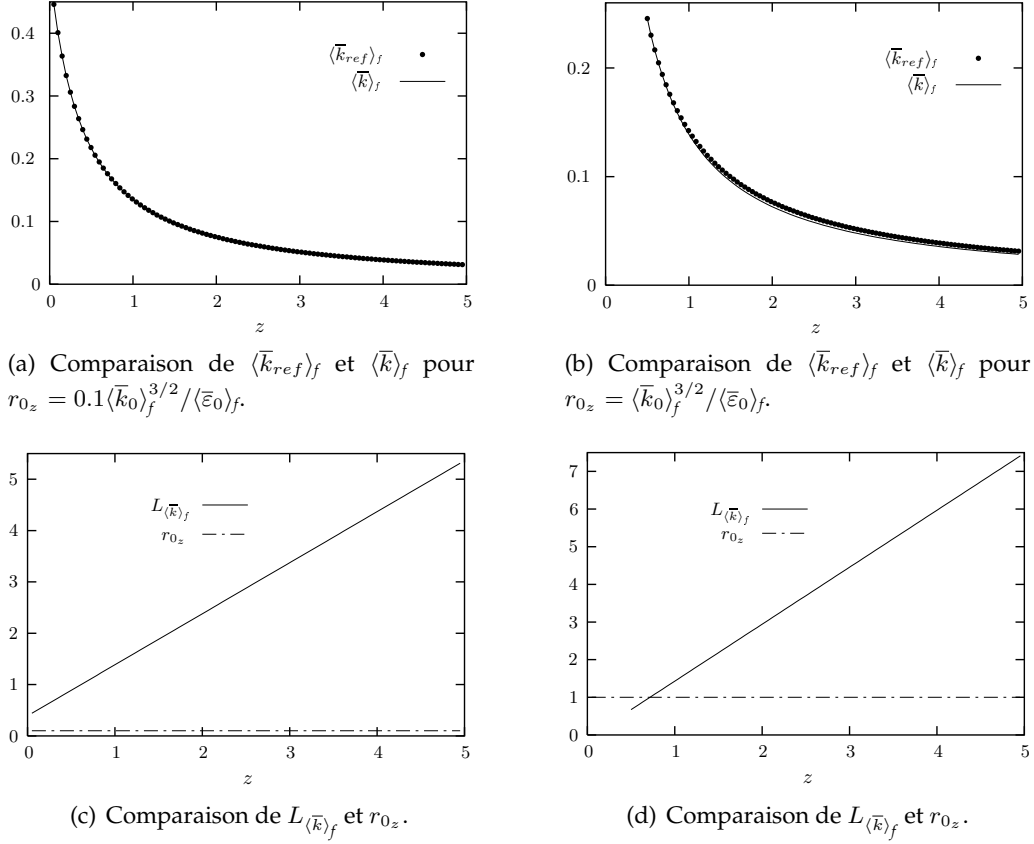


FIG. 5.9: Étude macroscopique de la décroissance de turbulence de grille. Comparaison de l'évolution de référence de l'énergie cinétique turbulente avec celle fournie par le modèle, en fonction des échelles caractéristiques du problème.

La taille r_{0z} du filtre doit être choisie en fonction des échelles de longueur caractéristiques des évolutions des grandeurs macroscopiques définies par :

$$L_{\langle \bar{k} \rangle_f} = \left[\frac{1}{\langle \bar{k} \rangle_f} \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} \right]^{-1}, \quad L_{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} = \left[\frac{1}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} \right]^{-1}. \quad (5.68)$$

La figure 5.9 montre deux comparaisons entre l'évolution macroscopique de référence (5.59) et l'évolution (5.64) fournie par le modèle macroscopique pour l'énergie cinétique turbulente. La valeur de la constante C_{ε_2} est choisie identique pour les modèles microscopique et macroscopique. Pour un taille de filtre r_{0z} égale à $0.1 \langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2} / \langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f$, les deux évolutions sont quasiment identiques (Fig. 5.9 (a)). Par contre, pour une taille de filtre r_{0z} égale à $\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2} / \langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f$, une petite différence est notée entre les deux évolutions (Fig. 5.9 (b)). Ces comportements sont expliqués en comparant la valeur de $L_{\langle \bar{k} \rangle_f}$ à la taille du REV dans la direction z . Ainsi, si la condition $r_{0z} < L_{\langle \bar{k} \rangle_f}$ est remplie quelle que soit l'abscisse z , la solution du modèle est identique à l'évolution de référence. Si cette condition n'est pas satisfaite alors des différences peuvent être constatées entre la solution du modèle et l'évolution de référence. L'idempotence de la moyenne spatiale étant associée à une hypothèse sur les échelles de longueur caractéristique des quantités filtrées, ces échelles doivent être supérieures à la taille

du filtre (voir section 1.2.3). Dans ce cadre de travail, la condition $r_{0_z} < L_{\langle \bar{k} \rangle_f}$ est requise. La proposition (5.57) de définition du temps τ_t et la valeur $C_{\varepsilon_2} = 1.9$ sont ainsi retenues.

5.3.3 Identification du temps caractéristique τ_s

Le temps caractéristique τ_t étant identifié, il reste à présent à déterminer τ_s . D'après les estimations exposées dans la section 5.2.2, les équations bilans de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, pour l'établissement d'un écoulement dans un canal, peuvent se réduire au système :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = P_{SF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (5.69)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = C_{\varepsilon_2} \frac{P_{SF}}{\tau_s} - C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t}. \quad (5.70)$$

Le temps τ_s doit respecter deux contraintes :

1. la première est que l'état asymptotique fournit par le modèle macroscopique, composé des équations (5.69) et (5.70), doit correspondre aux valeurs de référence $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$;
2. la seconde est que le choix du temps τ_s doit permettre de reproduire l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$.

Nous rappelons que l'état d'équilibre décrit par le modèle macroscopique est noté par l'indice \triangleright . En reprenant les équations (5.69) et (5.70), cet état d'équilibre est décrit par

$$P_{SF_\triangleright} - \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f = 0, \quad (5.71)$$

$$C_{\varepsilon_2} \frac{P_{SF_\triangleright}}{\tau_{s_\triangleright}} - C_{\varepsilon_2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f}{\tau_{t_\triangleright}} = 0. \quad (5.72)$$

La combinaison de ces deux relations fournit l'égalité :

$$\tau_{s_\triangleright} = \tau_{t_\triangleright} = \frac{\langle \bar{k}_\triangleright \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f}. \quad (5.73)$$

A partir de l'égalité (5.73), différents choix s'offrent aux modélisateurs pour définir le temps τ_s . Le choix le plus simple est de considérer que ce temps est constant. Il suffit alors (comme dans [17, 70]) de le définir par rapport aux valeurs turbulentes de référence à l'équilibre :

$$\text{Première proposition : } \tau_s = \tau_{t_\infty} = \frac{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f}. \quad (5.74)$$

Cependant ce choix ne garantit pas une bonne reproduction du comportement dynamique de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et, par couplage, de $\langle \bar{k} \rangle_f$. Pedras et De Lemos [73] proposent alors de considérer l'égalité des temps τ_s et τ_t en tous points :

$$\text{Deuxième proposition : } \tau_s = \tau_t. \quad (5.75)$$

Nous avons montré dans la section 5.1.3 que ce choix conduisait à un modèle mal posé. Nous proposons alors de rechercher le temps τ_s sous la forme du produit entre τ_t et une fonction \mathcal{G} :

$$\tau_s = \tau_t \times \mathcal{G}, \quad (5.76)$$

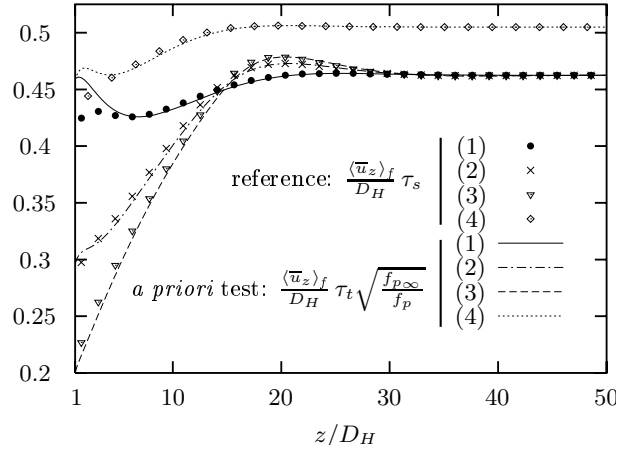


FIG. 5.10: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : comparaison entre le temps τ_s de référence et le temps proposé dans l'équation (5.80). Les temps sont adimensionnés par l'échelle de temps convective : $D_H / \langle \bar{u}_z \rangle_f$. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

où

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &\neq 1 \text{ si la turbulence est hors équilibre,} \\ \mathcal{G} &= 1 \text{ si la turbulence est en équilibre.} \end{aligned} \quad (5.77)$$

A partir des calculs de référence, il est possible de procéder à des tests *a priori*. On étudie l'évolution du temps τ_s en exprimant l'équation (5.70) sous la forme :

$$\tau_s = P_{SF} \left[\frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{C_{\varepsilon_2}} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} + \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t} \right]^{-1}. \quad (5.78)$$

Les évolutions de référence de ce temps permettent de rechercher la fonction \mathcal{G} en fonction de tous les paramètres du problème. Les tests *a priori*⁸ indiquent que la fonction

$$\mathcal{G} = \sqrt{\frac{f_{p\infty}}{f_p}} \quad (5.79)$$

et donc

$$\tau_s \equiv \tau_t \sqrt{\frac{f_{p\infty}}{f_p}}, \quad (5.80)$$

est la fonction qui reproduit au mieux le comportement observé dans les simulations de référence. La figure 5.10 illustre les résultats remarquables obtenus avec ce modèle lors des tests *a priori* effectués en canal plan⁹. La figure 5.11, décrivant la même comparaison pour des écoulements en tube à section circulaire, conforte la relative généralité du temps qui a été proposé.

⁸en utilisant les évolutions de référence de τ_t et de f_p pour décrire le temps τ_s défini en (5.78).

⁹Ce résultat a été soumis pour publication dans les COMptes Rendus de l'Académie des Sciences [75].

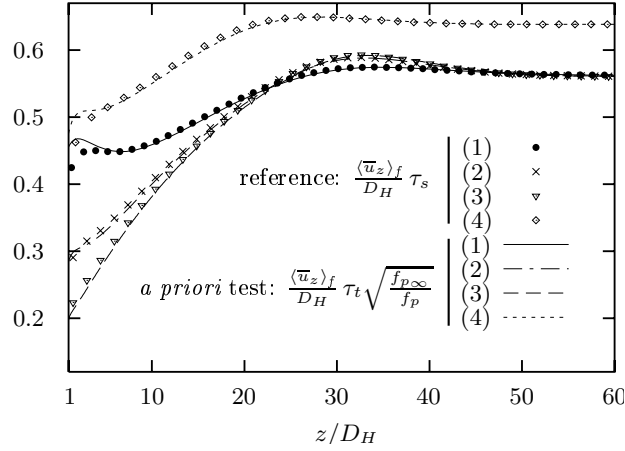


FIG. 5.11: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : comparaison entre le temps τ_s de référence et le temps proposé par l'équation (5.80). Les temps sont adimensionnés par l'échelle de temps convective : $D_H / \langle \bar{u}_z \rangle_f$. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

Le temps τ_s dépend donc des quantités turbulentes *via* τ_t , mais aussi du déséquilibre du coefficient de frottement. Si ce déséquilibre n'est pas pris en compte, alors les défauts de la modélisation proposée par Pedras et De Lemos sont retrouvés.

5.4 Etablissement d'une expression modèle pour le coefficient de frottement

En s'affranchissant de la zone proche de l'entrée, caractérisée par $z/D_H \lesssim 1$, l'écoulement dans un canal présente une particularité : le frottement en paroi est en totalité dû aux effets de viscosité. Plus précisément, le frottement est lié à la valeur du gradient de vitesse en paroi. Pour un écoulement en équilibre dans un canal plan, $f_{p\infty}$ peut être déduit de résultats expérimentaux, de corrélations dépendant du nombre de Reynolds de l'écoulement [46], ou de simulations fines de l'écoulement. La corrélation de Mac Adams est par exemple citée :

$$f_{p\infty} = 0.184 Re^{-0.2}, \quad (5.81)$$

qui est valable pour des nombres de Reynolds compris entre 3×10^4 et 10^6 [49]. Les simulations fines permettent de décrire assez précisément ce coefficient à l'équilibre pour des configurations géométriques simples. Ici, il sera déduit à partir des résultats CAST3M. Le but de cette section est d'étudier l'évolution du coefficient de frottement en la comparant aux évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ and $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Le modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ avec lois de paroi n'est certainement pas le meilleur modèle pour obtenir une évolution précise du coefficient de frottement lors de l'établissement de l'écoulement, mais il permet de fournir une bonne idée des paramètres dont il dépend. Dans cette section, des expressions analytiques du coefficient de frottement vont être proposées. Il sera montré qu'une seule d'entre elles autorise le modèle macroscopique à atteindre un état d'équilibre correspondant à l'état de référence.

5.4.1 Vers une expression modèle du coefficient de frottement

Le coefficient de frottement est intimement lié au gradient de la vitesse à la paroi. Or la dissipation de sillage, de par la définition (5.54) est un indicateur de la valeur de ce gradient. Pour établir une relation entre f_p et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$, nous supposons la couche limite en équilibre. Le profil de vitesse peut ainsi être décrit dans cette zone de l'écoulement par :

$$\bar{u}_z(y_w) = u_{f\infty} F_u(y^+),$$

où F_u est la loi de Reichardt donnée par (2.71). En utilisant cette dernière relation et la relation (2.148) reliant la vitesse de frottement u_f et le coefficient de frottement f_p , dans la définition (5.54) de la dissipation de sillage, il vient :

$$f_{p\infty} = \left[\frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f} \times \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{Re_\tau} \left(\frac{dF_u}{dy^+} \right)^2 dy^+ \right]^{-2/3}, \quad (5.82)$$

où Re_τ a été défini par (Eq. (2.139))

$$Re_\tau = \frac{u_f D_H}{4\nu} \quad (5.83)$$

La fonction

$$C_w(Re_\tau) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{Re_\tau} \left(\frac{dF_u}{dy^+} \right)^2 dy^+ \quad (5.84)$$

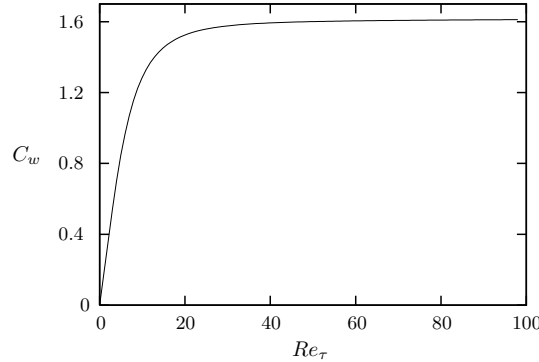


FIG. 5.12: Etude de la dissipation de sillage : évolution du coefficient C_w défini par l'expression (5.84) en fonction du nombre de Reynolds de frottement Re_τ .

est liée au gradient de la fonction F_u , dont les plus grandes valeurs sont concentrées dans la zone proche-paroi. L'intégrande dans la définition de C_w est alors très petite pour les grandes valeurs de y^+ . Nous montrons numériquement que, pour $Re_\tau \gtrsim 50$, C_w atteint une valeur constante proche de 1.6 (Fig 5.12). Or, pour le canal plan, un nombre de Reynolds de frottement $Re_\tau = 50$ correspond à un nombre de Reynolds proche de 2.8×10^3 . En régime pleinement turbulent ($Re \gtrsim 10^4$), et en supposant que la loi de Reichardt décrit de façon satisfaisante le profil de vitesse dans la couche limite en équilibre, il est alors possible de considérer que C_w est une constante. Partant de ce constat, l'équation (5.82) évoque une relation de proportionnalité entre $f_{p\infty}$ et $\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$:

$$f_{p\infty} \propto \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f^{2/3}. \quad (5.85)$$

Cette relation peut être examinée en dehors de l'équilibre. Pourtant, comme l'indique la figure 5.13, cette extension à des situations hors équilibre ne fonctionne pas. La cause provient en partie de la validité réduite de la loi de Reichardt pour de telles situations.

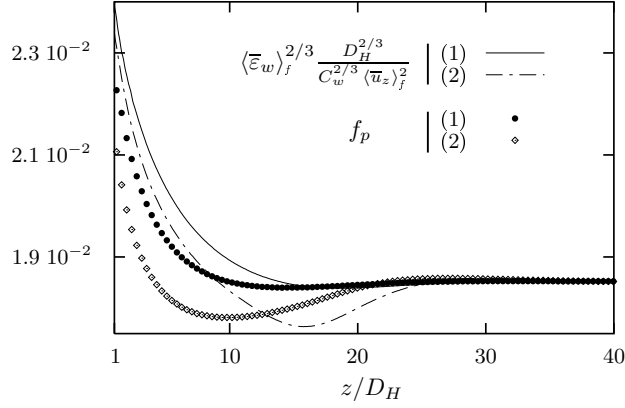


FIG. 5.13: Étude de la dissipation de sillage : étude de la validité de l'expression (5.82) en dehors de l'équilibre. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_3.

Revenons alors au rôle de la dissipation de sillage. Dans l'équation bilan (5.69) de $\langle \bar{k} \rangle_f$, elle intervient dans la modélisation de la production de sous-filtre (voir Eq. (5.54)) et agit comme une dissipation supplémentaire. Elle est donc un équivalent de la dissipation visqueuse. Ces deux dissipations sont très liées à la forme du profil de vitesse dans la zone proche-paroi. Comme le coefficient de frottement résulte du gradient de vitesse à la paroi, il est alors rattaché au montant total de dissipation :

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} \equiv \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3}. \quad (5.86)$$

La figure 5.14 permet de vérifier la pertinence de l'expression proposée (5.86) à partir des évolutions de référence. La somme des deux dissipations est un bon indicateur de l'évolution du coefficient de frottement.

5.4.2 Étude de l'équilibre du modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ en fonction de l'expression modèle du coefficient de frottement

Le modèle macroscopique de turbulence est à présent constitué de deux équations de transport (5.69) et (5.70) pour $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, et d'une expression modèle (5.86) pour le coefficient de frottement. Cette expression modèle fait notamment appel à la dissipation de sillage. Pour l'instant, l'évolution de cette grandeur n'est pas modélisée : elle est fournie par les calculs de référence. On a donc $\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$. Dans cette section, nous proposons de vérifier si le modèle macroscopique atteint un équilibre correspondant à l'état d'équilibre de référence.

En se reportant à la décomposition (5.54) de la production de sous-filtre et à l'expression modèle (5.80) du temps τ_s , les équations de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ atteignent l'état

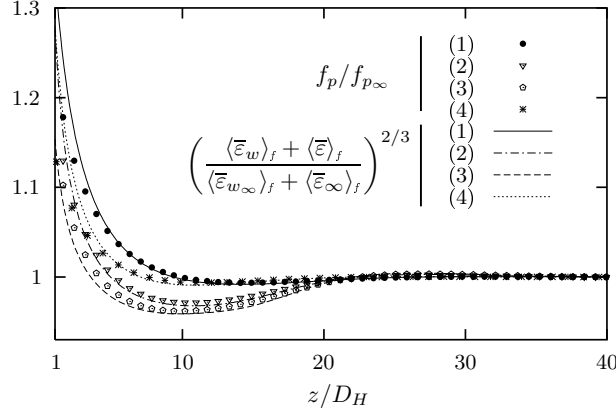


FIG. 5.14: Etude du coefficient de frottement : modélisation (décrite par l'expression (5.86)) de son évolution (hors équilibre) en fonction du montant total de dissipation. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

d'équilibre décrit par les relations :

$$\frac{f_{p_\triangleright} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f = 0, \quad (5.87)$$

$$C_{\varepsilon 2} \frac{f_{p_\triangleright} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / (2D_H) - \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{\tau_{t_\triangleright} \sqrt{f_{p_\infty} / f_{p_\triangleright}}} - C_{\varepsilon 2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_\triangleright \rangle_f}{\tau_{t_\triangleright}} = 0. \quad (5.88)$$

En multipliant l'équation (5.87) par $C_{\varepsilon 2}$ et en retranchant le résultat à l'équation (5.88), il vient :

$$\left(\frac{f_{p_\triangleright} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f \right) \left(\sqrt{\frac{f_{p_\infty}}{f_{p_\triangleright}}} - 1 \right) \frac{C_{\varepsilon 2}}{\tau_{t_\triangleright}} = 0, \quad (5.89)$$

Cette équation possède trois solutions (repérées par les indices 1, 2 et 3) caractérisées par :

$$\text{solution 1 : } f_{p_\triangleright,1} = \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f \frac{2D_H}{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \neq f_{p_\infty}, \quad (5.90)$$

$$\text{solution 2 : } f_{p_\triangleright,2} = f_{p_\infty}, \quad (5.91)$$

$$\text{solution 3 : } \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,3} \rangle_f = 0 \quad (\Leftrightarrow \tau_{t_\triangleright} \rightarrow \infty). \quad (5.92)$$

En remplaçant la solution (5.92) dans l'équation (5.87), on montre que les solutions 1 et 3 (correspondant à (5.90) et (5.92)) sont identiques. Les deux équations composant le modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ possèdent donc uniquement deux solutions asymptotiques qui sont pour l'instant décrites à l'aide du coefficient de frottement. Ces solutions doivent être cohérentes avec l'expression modèle du coefficient de frottement. Les deux solutions vont donc être vérifiées l'une après l'autre.

- Solution 1 : d'après l'équation (5.87), la solution donnée par $f_{p_\triangleright,1}$ implique

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f = 0. \quad (5.93)$$

Le coefficient de frottement $\check{f}_{p_\triangleright,1}$ donné par l'expression (5.86) va être calculé en considérant comme donnée l'égalité (5.93). Le résultat est alors confronté à la valeur du

coefficient de frottement $f_{p_{\triangleright,1}}$ procurée par l'expression (5.86). Si les deux résultats sont égaux, la solution repérée par $(\triangleright, 1)$ est solution du système (5.86)-(5.87)-(5.88). En rappelant que la dissipation de sillage est fournie par le calcul de référence, la relation (5.86) à l'équilibre s'écrit :

$$\frac{\check{f}_{p_{\triangleright,1}}}{f_{p_{\infty}}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3}. \quad (5.94)$$

D'après l'équation bilan (5.69) de $\langle \bar{k} \rangle_f$ exprimée pour l'état d'équilibre de référence, la somme des dissipations est égale au travail de la force de trainée :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f = \frac{f_{p_{\infty}} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H}. \quad (5.95)$$

La relation (5.94) prend donc la forme :

$$\check{f}_{p_{\triangleright,1}} = f_{p_{\infty}}^{1/3} \left(\frac{2D_H \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f}{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \right)^{2/3} = f_{p_{\infty}}^{1/3} f_{p_{\triangleright,1}}^{2/3}. \quad (5.96)$$

Or, d'après (5.90),

$$f_{p_{\infty}} \neq f_{p_{\triangleright,1}}, \quad (5.97)$$

ce qui implique que les deux valeurs du coefficient de frottement sont incompatibles :

$$\check{f}_{p_{\triangleright,1}} \neq f_{p_{\triangleright,1}}. \quad (5.98)$$

La solution 1 est donc solution du système à deux équations (5.87)-(5.88), mais elle n'est pas solution du système à trois équations (5.86)-(5.87)-(5.88).

- Solution 2 : la solution (5.91), introduite dans la relation (5.87), permet d'écrire :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f = \frac{f_{p_{\infty}} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f. \quad (5.99)$$

La relation (5.86) à l'équilibre procure alors :

$$\frac{\check{f}_{p_{\triangleright,2}}}{f_{p_{\infty}}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3} = 1. \quad (5.100)$$

Les deux valeurs du coefficient de frottement concordent, puisque

$$\check{f}_{p_{\triangleright,2}} = f_{p_{\triangleright,2}} = f_{p_{\infty}}. \quad (5.101)$$

La solution 2 est donc solution du système à trois équations (5.86)-(5.87)-(5.88) et correspond de plus à l'état d'équilibre de référence pour la dissipation visqueuse homogénéisée (Eq. (5.99)) et pour le coefficient de frottement (Eq. (5.101)). Par contre la valeur de $\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f$ reste indéterminée.

Le modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ complété par l'expression modèle (5.86) permet de retrouver seulement partiellement l'état d'équilibre de référence : la valeur asymptotique de $\langle \bar{k} \rangle_f$ est non définie. Les équations de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ne pouvant être modifiées, **l'expression modèle du coefficient de frottement doit être améliorée.**

5.4.3 Modification de l'expression modèle de f_p

Dans la section 5.4.2, l'équilibre du modèle macroscopique à deux équations a été étudié en fonction de l'expression modèle (5.86) du coefficient de frottement. Il a été montré que cette association ne permettait pas de déterminer la valeur asymptotique de l'énergie cinétique turbulente homogénéisée. Pour ce faire, une possibilité est de faire intervenir $\langle \bar{k} \rangle_f$ dans l'expression modèle de f_p .

L'influence de la turbulence sur une couche limite sur plaque plane a été étudiée par différents auteurs pour déterminer son impact sur le coefficient de frottement. Les paramètres entrant en jeu sont complexes et font intervenir l'intensité de la turbulence ($\sqrt{\bar{k}}/U$), l'échelle de longueur caractéristique de la dissipation et l'épaisseur de la couche limite [7, 104, 107]. Ces études amonts ne sont pas directement exploitables dans une modélisation $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$. Ciofalo et Collins [23] proposent une approche plus pratique en intégrant, dans la modélisation locale de la turbulence en proche-paroi, la simple prise en compte de l'intensité locale de la turbulence. Elle influe alors directement sur l'épaisseur de la sous-couche visqueuse et sur le coefficient de frottement. Dans une approche plus macroscopique, et cette fois-ci concernant les échanges thermiques, le nombre de Nusselt Nu (qui possède un rôle semblable au coefficient de frottement, mais dans le contexte des échanges thermiques) est modifié par rapport à sa valeur à l'équilibre à l'aide d'un facteur lié à l'intensité de la turbulence [68] :

$$Nu = Nu_\infty \left(1 + c_N \frac{\sqrt{\langle \bar{k} \rangle_f}}{\|\langle \bar{u} \rangle_f\|} \right), \quad (5.102)$$

ou encore à l'aide d'un facteur lié à l'intensité de la turbulence et au nombre de Reynolds [61] :

$$Nu = Nu_\infty \left(1 + c_N Re^{1/2} \frac{\sqrt{\langle \bar{k} \rangle_f}}{\|\langle \bar{u} \rangle_f\|} \right), \quad (5.103)$$

et c_N est un coefficient du modèle. Les termes correctifs proposés dans les expressions (5.102) et (5.103) ont été testés dans cet étude, mais conduisent à des résultats erronés¹⁰. Nous proposons plutôt d'ajouter un facteur correctif tenant compte du déséquilibre de la vitesse caractéristique de la turbulence à l'échelle macroscopique par rapport à la vitesse macroscopique moyenne de l'écoulement. L'expression modèle pour le coefficient de frottement s'écrit :

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} \equiv \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right), \quad (5.104)$$

où β est une constante non nulle du modèle. Pour que le coefficient de frottement reste positif, il faut que :

$$\beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \geq -1. \quad (5.105)$$

Deux cas de figure se présentent selon le signe du terme $\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f^{1/2}$.

¹⁰ car ils ne permettent pas au modèle macroscopique d'atteindre l'état asymptotique de référence.

- Si le terme $\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}$ est positif, il vient

$$\beta \geq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k} \rangle_f^{1/2}}. \quad (5.106)$$

Dans un cadre mathématique, l'énergie cinétique turbulente homogénéisée peut dans cette expression prendre des valeurs très supérieures à $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$. La condition (5.106) doit donc être imposée dans son sens le plus strict (pour $\langle \bar{k} \rangle_f \rightarrow +\infty$) :

$$\beta \geq 0. \quad (5.107)$$

- Si le terme $\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}$ est négatif, alors la condition sur β prend la forme :

$$\beta \leq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k} \rangle_f^{1/2}}. \quad (5.108)$$

La valeur $\langle \bar{k} \rangle_f = 0$ représente la situation la plus contraignante pour cette inégalité, c'est à dire

$$\beta \leq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}. \quad (5.109)$$

Les solutions asymptotiques (5.90) et (5.91) du modèle macroscopique doivent à présent être confrontées à la nouvelle expression modèle de f_p .

- Solution 1 : cette solution correspond à l'état asymptotique décrit par

$$f_{p_{\triangleright,1}} = \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f \frac{2D_H}{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \neq f_{p_\infty}, \quad \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f = 0, \quad (5.110)$$

et une valeur $\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f$ indéterminée. En introduisant la valeur de $\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f = 0$, et en conservant $\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f$ dans l'expression modèle (5.104), il vient :

$$\check{f}_{p_{\triangleright,1}} = f_{p_\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (5.111)$$

Cette solution n'est réalisable que sous la condition $\check{f}_{p_{\triangleright,1}} = f_{p_{\triangleright,1}}$, c'est à dire

$$f_{p_\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right) = \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f \frac{2D_H}{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}. \quad (5.112)$$

Dans cette relation, l'inconnue est $\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f^{1/2}$. L'équation (5.112) ne possède de solution que si cette inconnue reste positive. Cela fournit une condition sur la constante β . La solution s'écrit alors :

$$\text{si } \beta \geq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{2D_H \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{f_{p_\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \right)^{1/3} \right], \quad (5.113)$$

$$\text{alors } \langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f = \left\{ \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2} + \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}} \left[\left(\frac{2D_H \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{f_{p_\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}^2. \quad (5.114)$$

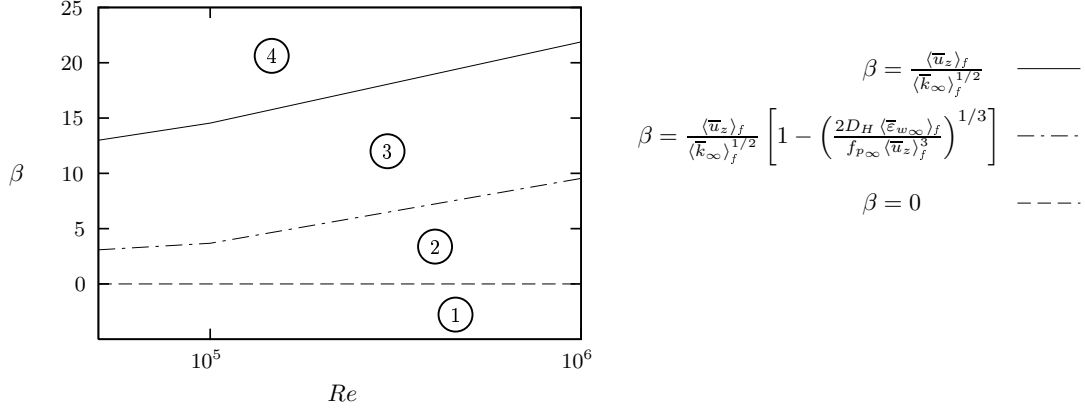


FIG. 5.15: Cartographie de la constante β . La positivité du coefficient de frottement n'est pas assurée dans les domaines 1 et 4. L'équilibre du modèle macroscopique, couplé avec l'expression modèle (5.104) du coefficient de frottement, possède deux solutions dans le domaine 3 et seulement une unique solution dans le domaine 2.

Pour résumer, la solution 1 est totalement déterminée sous la condition (5.113) sur β . Cependant, cette solution fournit irrémédiablement de mauvaises valeurs du coefficient de frottement et de la dissipation visqueuse homogénéisée pour l'état d'équilibre. La condition (5.113) sur β servira donc par la suite à disqualifier cette solution.

- Solution 2 : cette solution correspond à l'état asymptotique décrit par

$$f_{p_{\triangleright},2} = f_{p_\infty}, \quad \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f, \quad (5.115)$$

et une valeur $\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f$ indéterminée. En introduisant la valeur de $\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f$ et en conservant $\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f$ dans l'expression modèle (5.104), il vient :

$$\check{f}_{p_{\triangleright},2} = f_{p_\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right), \quad (5.116)$$

ce qui est équivalent à

$$\beta \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} = 0. \quad (5.117)$$

Quelque soit la valeur de β (non nulle par définition), la solution 2 est totalement déterminée et correspond à l'état asymptotique de référence.

5.4.4 Synthèse de la modélisation dynamique du coefficient de frottement

Dans cette partie, une nouvelle expression modèle pour le coefficient de frottement, dépendant d'une constante β , est proposée :

$$\frac{f_p}{f_{p_\infty}} \equiv \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right), \quad (5.118)$$

Son association avec le modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ permet la définition des trois valeurs asymptotiques $\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f, f_{p_{\triangleright}}$. Différentes conditions sur β sont évoquées :

- pour garantir la positivité du coefficient de frottement,

$$0 \leq \beta \leq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}, \quad (5.119)$$

- et pour garantir la pertinence des valeurs asymptotiques obtenues :

$$\beta \leq \frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}} \left[1 - \left(\frac{2D_H \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f}{f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3} \right)^{1/3} \right]. \quad (5.120)$$

La figure 5.15 résume ces analyses. Ainsi les domaines 1 et 4 correspondent aux valeurs de β (en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement) pour lesquelles la positivité de f_p n'est pas garantie. Le domaine 3 regroupe les valeurs de β pour lesquelles le système à trois équations (5.87)-(5.88)-(5.104) possède deux états asymptotiques solutions, dont un seul coïncide avec l'état de référence. Le domaine idéal est donc le domaine 2, pour lequel une unique solution existe, qui est de plus équivalente à l'état de référence.

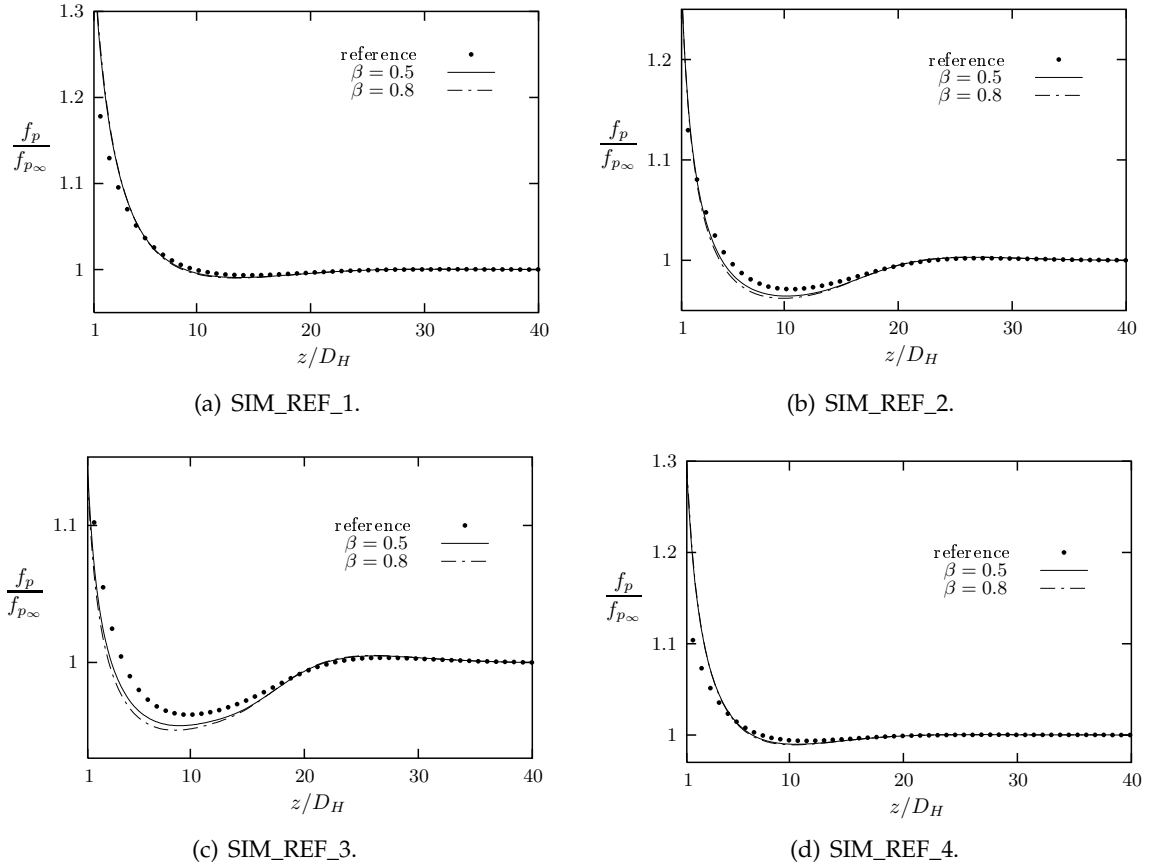


FIG. 5.16: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : comparaison entre l'évolution de référence du coefficient de frottement et l'expression modèle (5.104) pour deux valeurs du paramètre β , à savoir $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.8$.

A présent, l'évolution modèle du coefficient de frottement est calculée à partir de la relation (5.104) en utilisant les évolutions de référence pour $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Deux valeurs du

paramètre β , inconditionnellement incluses dans le domaine 2 (voir Fig. 5.15) sont choisies, à savoir $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.8$. L'évolution modèle de f_p est juxtaposée à l'évolution de référence. La figure 5.16 montre cette comparaison pour les quatres cas décrits par le tableau (5.2). L'évolution du coefficient f_p est qualitativement bien reproduite. L'influence du paramètre β est relativement faible sur les évolutions modèles, en soulignant que l'augmentation de β détériore légèrement la pertinence de la modélisation pour $3 \lesssim z/D_H \lesssim 20$ (voir Figs. 5.16 (b) et (c)). Enfin, pour $z/D_H \lesssim 3$ et quelque soit la valeur de β , l'expression modèle est de plus de 10% supérieure à la référence pour les simulations dont le paramètre $L_{tM_0}^*$ est la plus faible (voir Figs. 5.16 (a) et (d)).

5.5 Etablissement d'une équation bilan modèle pour $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ dans un canal

En introduisant la relation (5.54), la modélisation de la production de sous-filtre est reportée sur celles du coefficient de frottement et de la dissipation de sillage. Une proposition pour le coefficient de frottement a été exposée dans la section précédente. L'analyse porte maintenant sur la dissipation de sillage dont la définition est ici rappelée :

$$\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = \left\langle \nu \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \delta \bar{u}_i}{\partial x_j} \right\rangle_f. \quad (5.121)$$

Devant le peu d'informations dont nous disposons à propos de cette dissipation supplémentaire, nous ne proposerons pas d'équation bilan de la dissipation de sillage applicable dans un cadre général. Nous nous focalisons dès à présent sur les écoulements dans des canaux. Cette dissipation supplémentaire est présentée succinctement dans la section 5.5.1 puis une voie de modélisation est proposée dans la section 5.5.2.

5.5.1 Etude de la dissipation de sillage

Dans un milieu poreux, les plus importants gradients de vitesse sont localisés près des parois. La présence de ces parois est donc la cause majeure de l'existence de la dissipation de sillage. Cependant, cette dissipation existe aussi dans un écoulement libre qui serait filtré spatialement. Son intensité y serait néanmoins moindre. Pour un écoulement turbulent dans un canal plan, l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ adimensionnée par $\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / D_H$ a été reportée sur la figure 5.17 pour les quatres principales simulations de référence. Pour la simulation SIM_REF_1 (courbe (1)), la dissipation de sillage exhibe une simple décroissance de son niveau initial à sa valeur asymptotique. Lorsque le paramètre $L_{tM_0}^*$ diminue, toutes les autres données étant égales par ailleurs, l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ fait apparaître une oscillation autour de sa valeur d'équilibre. Plus précisément, l'amplitude de cette oscillation augmente bien lorsque $L_{tM_0}^*$ diminue. Enfin, la comparaison des courbes (1) et (4) montre que lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement diminue, la valeur asymptotique de la dissipation de sillage rapportée à $\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / D_H$ augmente.

Il a été montré dans la section 5.4.1 que, pour un écoulement en équilibre dans un canal plan, nous avons :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f = \frac{f_p^{3/2} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H} \times C_w(Re_\tau), \quad (5.122)$$

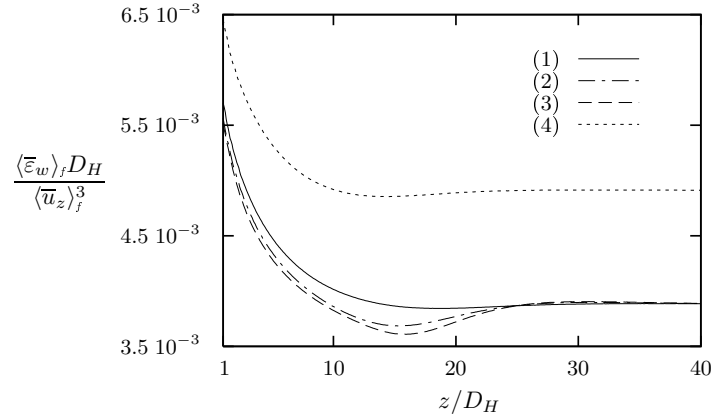


FIG. 5.17: Evolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f D_H / \langle \bar{u}_z \rangle_f^3$ pour un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

où la fonction $C_w(Re_\tau)$ est définie par (5.84). Dans la même section, il a été souligné que, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^4 , cette fonction pouvait être considérée constante. Or, lorsque le nombre de Reynolds augmente, la valeur du coefficient de frottement diminue. Ainsi, pour un écoulement établi dans un canal plan, la valeur asymptotique de la dissipation de sillage rapportée à $\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / D_H$ augmente lorsque le nombre de Reynolds diminue.

5.5.2 Equation bilan modèle pour $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$

L'équation de transport de la dissipation de sillage ne va pas être dérivée de façon analytique. La construction de l'équation bilan modèle pour $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ est inspirée de l'équation de la dissipation visqueuse homogénéisée dans un canal. Il faut alors identifier un terme source, un terme puits, chaque terme devant être associé à un temps caractéristique. Le terme puits est classiquement lié à la dissipation visqueuse. Dans la section précédente, il a été noté que la dissipation de sillage était en majorité causée par la présence des parois, ou autrement dit par la trainée des structures solides. Le travail de la force de trainée est alors relié au terme source dans l'équation de transport de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Partant de ces éléments, nous proposons :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} = C_{\varepsilon_w} \frac{\bar{F}_{\phi_z} \langle \bar{u}_z \rangle_f}{\tau_p} - C_{\varepsilon_w} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\tau_w}, \quad (5.123)$$

où τ_p est le temps caractéristique associé au travail de la force de trainée et τ_w est associé à la dissipation de sillage. Il reste à présent à identifier ces deux temps.

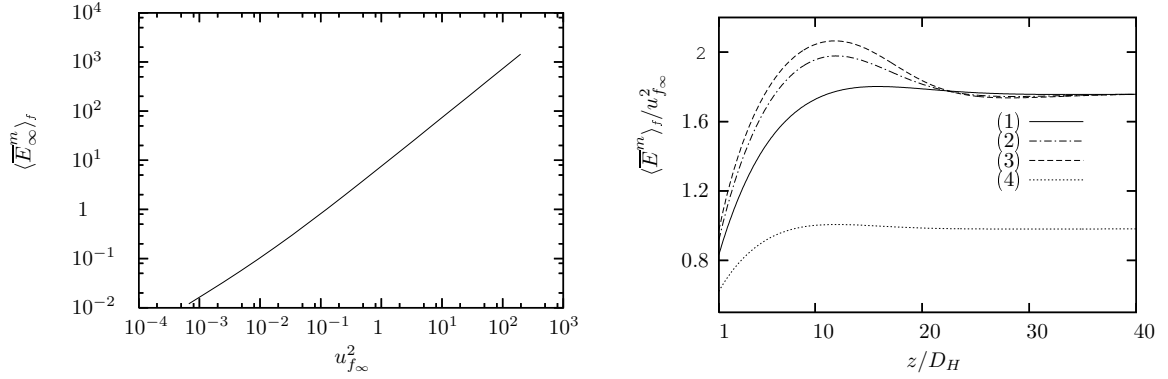
La dissipation de sillage est une grandeur qui existe aussi bien en régime turbulent qu'en régime laminaire. Deux solutions s'offrent à nous : soit l'influence de la turbulence sur ces temps devient inexistante lorsque l'écoulement est laminaire, soit les deux temps intervenant dans l'équation (5.123) ne sont pas uniquement liés à la turbulence. Par souci de simplicité, la seconde possibilité est choisie. Il est ensuite possible de raisonner par analogie avec la construction de l'équation de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$. Le temps associé à la dissipation de sillage est construit à l'aide d'une échelle de vitesse U_{SF} et d'une échelle de longueur l_{SF} . La dissipation de sillage intervient dans l'équation bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement

moyen. L'échelle de vitesse est donc liée à la racine carré de cette énergie cinétique :

$$U_{SF} \propto \sqrt{\langle \bar{E}^m \rangle_f}. \quad (5.124)$$

Il a déjà été remarqué au chapitre 3 que les valeurs des déviations de vitesse sont les plus importantes dans la zone de couche limite et que leur amplitude est intimement liée à la vitesse de frottement. En s'appuyant sur la figure 5.18, nous proposons l'estimation :

$$\langle \bar{E}^m \rangle_f \sim u_f^2. \quad (5.125)$$



(a) Relation entre l'énergie cinétique moyenne de sous-filtre et le vitesse de frottement à l'équilibre.

(b) Relation entre l'énergie cinétique moyenne de sous-filtre et le vitesse de frottement lors de l'établissement. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

FIG. 5.18: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de la relation entre l'énergie cinétique moyenne de sous-filtre et le vitesse de frottement.

D'après (5.124), et en exprimant la vitesse de frottement grâce au coefficient de frottement, l'estimation de l'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement de sous-filtre est précisée pour la géométrie du canal plan :

$$U_{SF} \sim \sqrt{f_p} \langle \bar{u}_z \rangle_f. \quad (5.126)$$

Quant à l'échelle de longueur associée à l'écoulement de sous-filtre, elle est construite à partir de l'énergie de sous-filtre et de la dissipation de sillage :

$$l_{SF} \propto \frac{\langle \bar{E}^m \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}. \quad (5.127)$$

L'estimation (5.125) permet de clarifier cette échelle de longueur :

$$l_{SF} \sim \frac{f_p^{3/2} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}. \quad (5.128)$$

Le temps caractéristique associé à la dissipation de sillage est le rapport entre l'échelle de longueur décrite par (5.128) et l'échelle de vitesse donnée par (5.126) :

$$\tau_w \equiv \frac{l_{SF}}{U_{SF}} = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}. \quad (5.129)$$

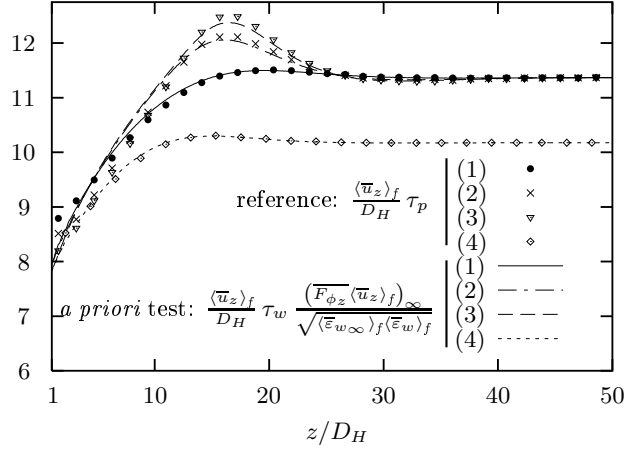


FIG. 5.19: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : comparaison entre le temps τ_p de référence et le temps proposé dans l'équation (5.131). Les temps sont adimensionnés par l'échelle de temps convective : $D_H / \langle \bar{u}_z \rangle_f$. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

Pour déterminer le temps caractéristique τ_p associé au travail de la force de trainée, nous procédons de la même manière que dans la section 5.3.3. Des tests *a priori* sont opérés à partir des résultats de référence. De l'équation (5.123), il est déduit :

$$\tau_p = \bar{F}_{\phi_z} \langle \bar{u}_z \rangle_f \left[\frac{\langle \bar{u}_z \rangle_f}{C_{\varepsilon_w}} \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} + \frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\tau_w} \right]^{-1}. \quad (5.130)$$

En supposant que C_{ε_w} est égal à 8¹¹, l'évolution de référence du temps caractéristique τ_p est reportée sur la figure 5.19. Le comportement observé est alors relié aux évolutions de référence des autres grandeurs. La figure 5.19 indique que la modélisation du temps τ_p par l'expression

$$\tau_p \equiv \tau_w \sqrt{\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}} \frac{(\bar{F}_{\phi_z} \langle \bar{u}_z \rangle_f)_\infty}{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f} = \tau_w \frac{(\bar{F}_{\phi_z} \langle \bar{u}_z \rangle_f)_\infty}{\sqrt{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}}, \quad (5.131)$$

permet de retrouver le comportement de l'évolution de référence. Nous soulignons que la construction du temps τ_p correspond à une correction effectuée à partir du temps τ_w . La multiplication du temps τ_w par le rapport $(\bar{F}_{\phi_z} \langle \bar{u}_z \rangle_f)_\infty / \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$ assure que l'état $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$ est une solution asymptotique de l'équation de transport de la dissipation de sillage et que cette solution est unique. L'utilisation du facteur correcteur $\sqrt{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}$ permet ensuite d'approcher au mieux la forme des évolutions de référence. Par ailleurs, l'hypothèse arbitraire portant sur la valeur du coefficient C_{ε_w} ne possède pas d'impact qualitatif sur ce résultat, seulement un impact quantitatif.

Pour la géométrie du tube à section circulaire, la figure 5.20 confirme la modélisation (5.131) du temps τ_p .

¹¹Cette valeur permet de faire référence à la vitesse de frottement dans la définition du rapport $\tau_w / C_{\varepsilon_w} = f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2 / (8 \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f) = u_f^2 / \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$.

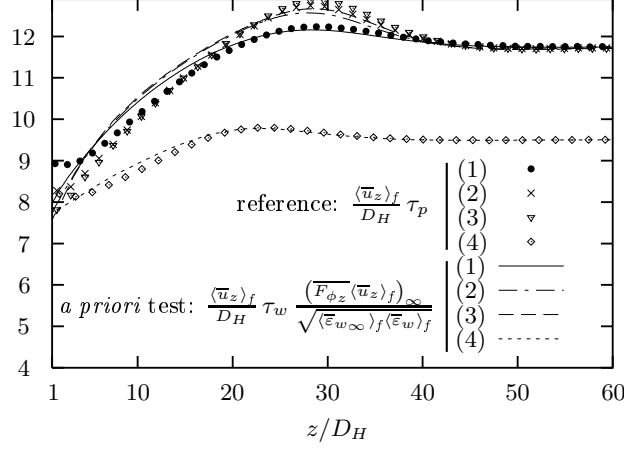


FIG. 5.20: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : comparaison entre le temps τ_p de référence et le temps proposé dans l'équation (5.131). Les temps sont adimensionnés par l'échelle de temps convective : $D_H / \langle \bar{u}_z \rangle_f$. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

5.5.3 Etude de l'équilibre du modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ en fonction de l'expression modèle du coefficient de frottement

L'état asymptotique du modèle macroscopique à trois équations (5.69), (5.70), et (5.123) est décrit par les relations :

$$\frac{f_{p_D} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_D} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_D \rangle_f = 0, \quad (5.132)$$

$$C_{\varepsilon 2} \frac{f_{p_D} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / (2D_H) - \langle \bar{\varepsilon}_{w_D} \rangle_f}{\tau_{t_D}} \sqrt{f_{p_\infty} / f_{p_D}} - C_{\varepsilon 2} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_D \rangle_f}{\tau_{t_D}} = 0, \quad (5.133)$$

$$C_{\varepsilon_w} \frac{f_{p_D} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / (2D_H)}{\tau_{p_D}} - C_{\varepsilon_w} \frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_D} \rangle_f}{\tau_{w_D}} = 0. \quad (5.134)$$

Ces trois équations sont associées à l'expression modèle (5.104) du coefficient de frottement qui s'écrit pour l'état asymptotique :

$$f_{p_D} = f_{p_\infty} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_D} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_D \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k}_D \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_\infty \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (5.135)$$

Les quatre équations (5.132), (5.133), (5.134) et (5.135) forment un système de quatre équations à quatre inconnues. Pour établir un système simplifié, une nouvelle équation est obtenue en multipliant l'équation (5.132) par $C_{\varepsilon 2}$ et en retranchant le résultat à l'équation (5.133). Puis les définitions (5.129) et (5.131) des temps τ_w et τ_p sont introduites dans l'équation (5.134), ce qui permet ainsi différentes simplifications. Le système simplifié à quatre équations s'écrit alors :

$$\frac{f_{p_{\triangleright}} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright}} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f = 0, \quad (5.136)$$

$$\left(\frac{f_{p_{\triangleright}} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright}} \rangle_f \right) \left(\sqrt{\frac{f_{p_{\infty}}}{f_{p_{\triangleright}}}} - 1 \right) \frac{C_{\varepsilon 2}}{\tau_{t_{\triangleright}}} = 0, \quad (5.137)$$

$$\frac{f_{p_{\triangleright}}}{f_{p_{\infty}}} = \sqrt{\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright}} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f}}, \quad (5.138)$$

$$f_{p_{\triangleright}} = f_{p_{\infty}} \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k}_{\triangleright} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (5.139)$$

En se rapportant à la section 5.4.2, l'équation (5.137) possède trois solutions, mais l'équation (5.136) permet de montrer que deux des trois solutions sont identiques. Il reste alors les deux solutions suivantes :

$$\text{solution 1 : } f_{p_{\triangleright,1}} = \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright,1}} \rangle_f \frac{2D_H}{\langle \bar{u}_z \rangle_f^3}; \quad (5.140)$$

$$\text{solution 2 : } f_{p_{\triangleright,2}} = f_{p_{\infty}}. \quad (5.141)$$

La réalisabilité de ces deux solutions en fonction de l'expression modèle (5.139) du coefficient de frottement et de l'équation (5.138) va être vérifiée.

- *Solution 1* : l'équation (5.138) permet d'avoir une autre description (notée avec le symbole $\check{\cdot}$) de la solution asymptotique du coefficient de frottement, à savoir

$$\frac{\check{f}_{p_{\triangleright,1}}}{f_{p_{\infty}}} = \sqrt{\frac{\langle \check{\bar{\varepsilon}}_{w_{\triangleright,1}} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f}}. \quad (5.142)$$

Il faut alors que les deux couples $(f_{p_{\triangleright,1}}, \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright,1}} \rangle_f)$ et $(\check{f}_{p_{\triangleright,1}}, \langle \check{\bar{\varepsilon}}_{w_{\triangleright,1}} \rangle_f)$ soient égaux pour que ce couple soit solution. Or, en considérant (5.122) et (5.140), pour qu'ils soient identiques, l'unique solution est :

$$f_{p_{\triangleright,1}} = 0, \text{ et } \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright,1}} \rangle_f = 0. \quad (5.143)$$

D'après les équations (5.132) et (5.140), cette solution correspond aussi à

$$\bar{\varepsilon}_{\triangleright,1} = 0, \quad (5.144)$$

La solution 1 est donc décrite par des valeurs asymptotiques nulles pour le coefficient de frottement, la dissipation visqueuse homogénéisée et la dissipation de sillage. Quant à la valeur de $\langle \bar{k}_{\triangleright,1} \rangle_f$, elle reste indéterminée.

- *Solution 2* : de la même manière, l'équation (5.138) permet d'écrire

$$\frac{\check{f}_{p_{\triangleright,2}}}{f_{p_{\infty}}} = \sqrt{\frac{\langle \check{\bar{\varepsilon}}_{w_{\triangleright,2}} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f}}. \quad (5.145)$$

Comme $\langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright,2}} \rangle_f$ n'est pas décrit par la solution 2, il suffit que $f_{p_{\triangleright,2}}$ soit égal à $\check{f}_{p_{\triangleright,2}}$ pour que ce couple soit solution. Cela implique alors

$$\check{f}_{p_{\triangleright,2}} = f_{p_{\triangleright,2}} = f_{p_{\infty}} \text{ et } \langle \check{\bar{\varepsilon}}_{w_{\triangleright,2}} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\triangleright,2}} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{w_{\infty}} \rangle_f. \quad (5.146)$$

D'après (5.136), on en déduit :

$$\langle \bar{\varepsilon}_{\triangleright,2} \rangle_f = \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f, \quad (5.147)$$

et, en utilisant la relation (5.139), il vient ensuite :

$$\langle \bar{k}_{\triangleright,2} \rangle_f = \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f. \quad (5.148)$$

Du point de vue mathématique, l'état d'équilibre du modèle macroscopique à trois équations de transport peut donc être décrit par deux solutions. La première solution n'est pas physique car elle correspond à une indétermination de l'énergie cinétique turbulente homogénéisée et à des valeurs nulles de toutes les autres variables. La deuxième solution est quant à elle équivalente à l'état d'équilibre de référence. Concernant la positivité du coefficient de frottement, les conditions sur le paramètre β restent inchangées (voir Fig. 5.15). Par contre pour le modèle à trois équations de transport, la frontière existant entre les domaines 2 et 3 n'existe plus car, pour toute valeur de β garantissant la positivité du coefficient de frottement, les deux solutions asymptotiques peuvent être théoriquement atteintes par le système d'équations différentielles. Cependant, le traitement numérique des équations différentielles interdit d'atteindre l'état nul pour toutes les variables transportées, cette solution n'étant pas physique dans ce contexte.

5.6 Sensibilité des modèles partiels aux paramètres β et C_{ε_w}

Dans cette section, différents modèles partiels vont être étudiés. Dans un premier temps, le modèle composé des équations bilans de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ainsi que l'expression analytique du coefficient de frottement (c'est à dire des équations (5.69), (5.70) et (5.104)), est considéré dans la section 5.6.1. Pour ce modèle, l'évolution (de référence) de la dissipation de sillage, fournie par les calculs fins, se substitue à l'équation bilan (5.123). Cette analyse permettra de caractériser l'influence de la constante β sur la dynamique d'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et f_p . Dans un second temps, c'est à dire dans la section 5.6.2, nous ne simulons que l'équation bilan de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ afin d'étudier l'impact de la constante C_{ε_w} . Seule l'évolution de référence du coefficient de frottement est nécessaire pour analyser de façon indépendante l'équation bilan (5.123) de la dissipation de sillage, car les temps caractéristiques présents dans cette équation ne dépendent pas explicitement des quantités turbulentes.

5.6.1 Sensibilité du modèle macroscopique à deux équations au paramètre β

Les résultats du modèle macroscopique de turbulence $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ vont être évalués par comparaison avec les évolutions de référence. Ils vont aussi être juxtaposés aux résultats du modèle de Nakayama et Kuwahara [70] (qui sera par la suite nommé modèle N&K). Il est rappelé que le modèle N&K a été établi pour des milieux macro-poreux. Les valeurs asymptotiques $\langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f$ sont décrites pour le cas particulier d'un écoulement turbulent transverse à un faisceau de crayons (à section carrée) disposés en quinconce. Pour l'écoulement dans un canal plan, cette modélisation de $\langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f$ est erronée. Cependant, leur

| | P_{SF} | τ_s | f_p |
|----------------|--|--|---------------|
| Modèle N&K | $P_{SF\infty} = \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$ | $\tau_{s\infty} = \langle \bar{k}_\infty \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$ | $f_{p\infty}$ |
| Présent modèle | $f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / 2D_H - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ | $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f \times (f_{p\infty} / f_p)^{1/2}$ | Eq. (5.104) |

TAB. 5.3: Description de deux modèles macroscopiques de turbulence (de type $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$) pour un écoulement turbulent dans un milieu stratifié, à partir du système d'équations (5.149)-(5.150) : le modèle de Nakayama et Kuwahara [70], noté N&K, et le présent modèle.

modélisation des équations de transport est indépendante de la manière dont sont obtenues les valeurs asymptotiques. Les valeurs provenant de la présente étude sont donc utilisées. Pour un écoulement statistiquement permanent dans un canal plan¹², le modèle N&K et notre modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ peuvent être formalisés par :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = P_{SF} - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (5.149)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = C_{\varepsilon_2} \left(\frac{P_{SF}}{\tau_s} - \frac{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\tau_t} \right), \quad (5.150)$$

où τ_t correspond à la définition donnée en introduction de ce chapitre (et aussi par l'équation 5.57). En réduisant le canal plan à un milieu homogène, grâce à l'application de la moyenne spatiale, la formulation du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est comparable, dans sa simplicité, à la formulation d'un modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ local appliqué à la décroissance d'une turbulence de grille. Des termes supplémentaires, apparaissant dans le modèle macroscopique, et liés à la production de sous-filtre, prennent en compte l'action des structures solides sur la turbulence. Nakayama et Kuwahara [70] font l'hypothèse que ces termes sont constants et égaux à leur valeur asymptotique. Cette supposition implique que la turbulence soit proche de l'équilibre dans tout le domaine spatial. Dans le présent modèle, ces termes varient et une modélisation a été proposée. Le tableau 5.3 récapitule les différences entre les deux modèles, en s'appuyant sur la formulation (5.149)-(5.150).

Les simulations des évolutions macroscopiques sont effectuées en utilisant un code 1D de type volumes finis. Le schéma convectif est un schéma amont. Les termes sources sont traités explicitement. Afin de procéder par étapes et de discerner l'impact des différents coefficients du modèle, l'évolution de la dissipation de sillage $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ est dans un premier temps une donnée provenant des simulations CAST3M moyennées spatialement. Ainsi, les comparaisons présentées constituent une validation *a priori*. Le coefficient de frottement est déduit de l'équation (5.104). La simulation débute à l'abscisse $z_{M_0}/D_H = 2$ et s'arrête en $z_{M_s}/D_H = 60$. Un maillage régulier composé de 200 éléments est utilisé. Il garantit un calcul pleinement convergé. A l'entrée du domaine, une condition limite de type Dirichlet (sur $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$) est appliquée en s'appuyant sur la valeur de référence en ce point. A la sortie du domaine, l'état asymptotique est supposé atteint, ce qui permet d'imposer une condition limite de type Neumann. Des tests de convergence sur le maillage et sur le pas de temps ont été réalisés. Les résultats présentés sont entièrement convergés. Les comparaisons entre le présent modèle, le modèle N&K et les évolutions de référence sont menées en étudiant les évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$ et $f_p / f_{p\infty}$. Pour cela, nous nous reportons une nouvelle fois aux quatre cas décrits par le tableau (5.2).

¹²Il est rappelé que le canal plan est une vision simplifiée d'un milieu stratifié composé de plaques planes.

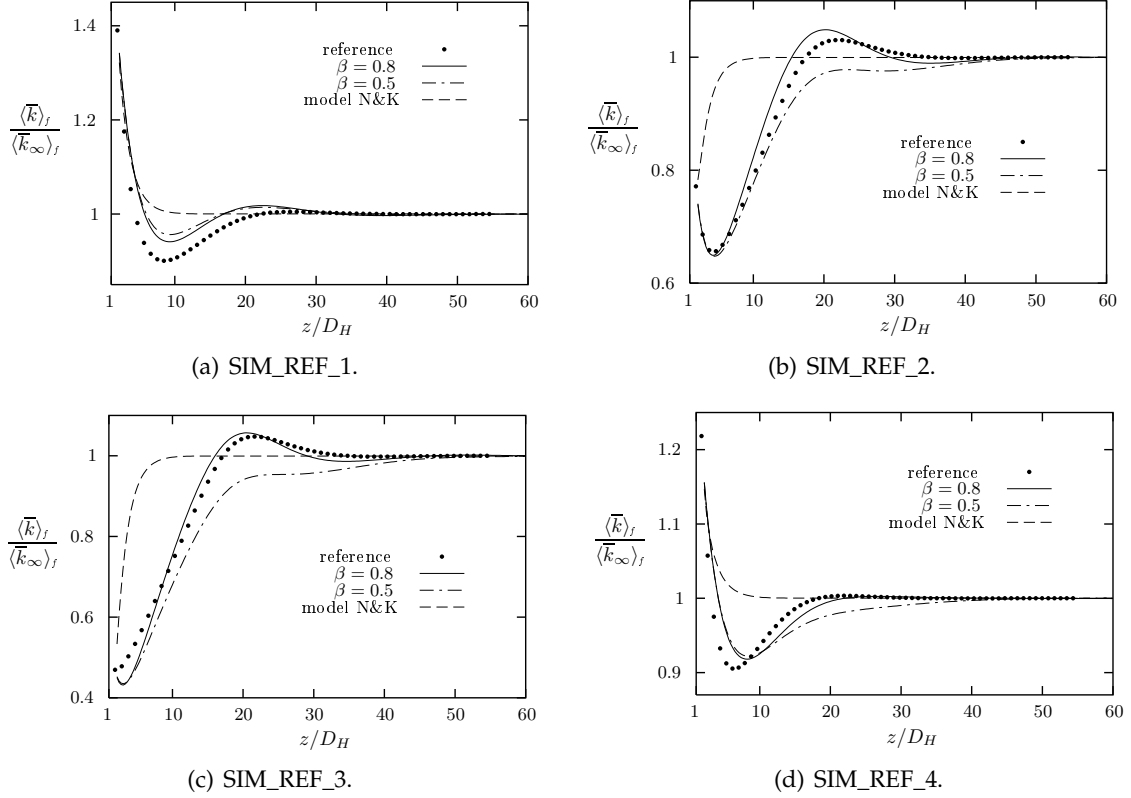


FIG. 5.21: *Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$. Comparaisons a priori entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ pour deux valeurs du paramètre β , à savoir $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.8$. Les résultats du modèle N&K sont aussi reportés.*

Dans chaque cas étudié, le comportement du modèle N&K est équivalent à une simple et rapide relaxation vers l'état asymptotique. En imposant que les termes modélisant l'action du solide soient constants, la compétition entre la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse homogénéisée est très simplifiée. D'après la décomposition (5.54) de la production de sous-filtre ainsi que la définition du coefficient de frottement et de la dissipation de sillage, supposer P_{SF} constant (et égal à sa valeur asymptotique) revient grossièrement à considérer un profil de vitesse dont la forme est proche de sa forme à l'équilibre. Cette hypothèse est clairement fautive dans les premiers diamètres hydrauliques après l'entrée du canal. De plus, en choisissant un temps τ_s constant, Nakayama et Kuwahara garantissent que leur modèle retrouve les valeurs correctes à l'équilibre. Mais, en comparant leur proposition pour le temps τ_s avec la notre (Tab 5.3), cette démarche suppose aussi que le rapport $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ reste proche de sa valeur d'équilibre. Cette hypothèse n'est pas non plus justifiée.

A présent, l'analyse est focalisée sur les résultats fournis par notre modèle. Le choix du temps τ_s décrit en introduction (et aussi par l'équation (5.80)) associé à la modélisation (5.104) du coefficient de frottement permet au modèle de retrouver le comportement dynamique des évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$. A l'abscisse $z = z_{M_0}$, les valeurs de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ (et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$) correspondent aux valeurs de référence de par la condition limite imposée. Par contre, c'est l'expression modèle du coefficient de frottement qui fournit la valeur de f_p en ce point.

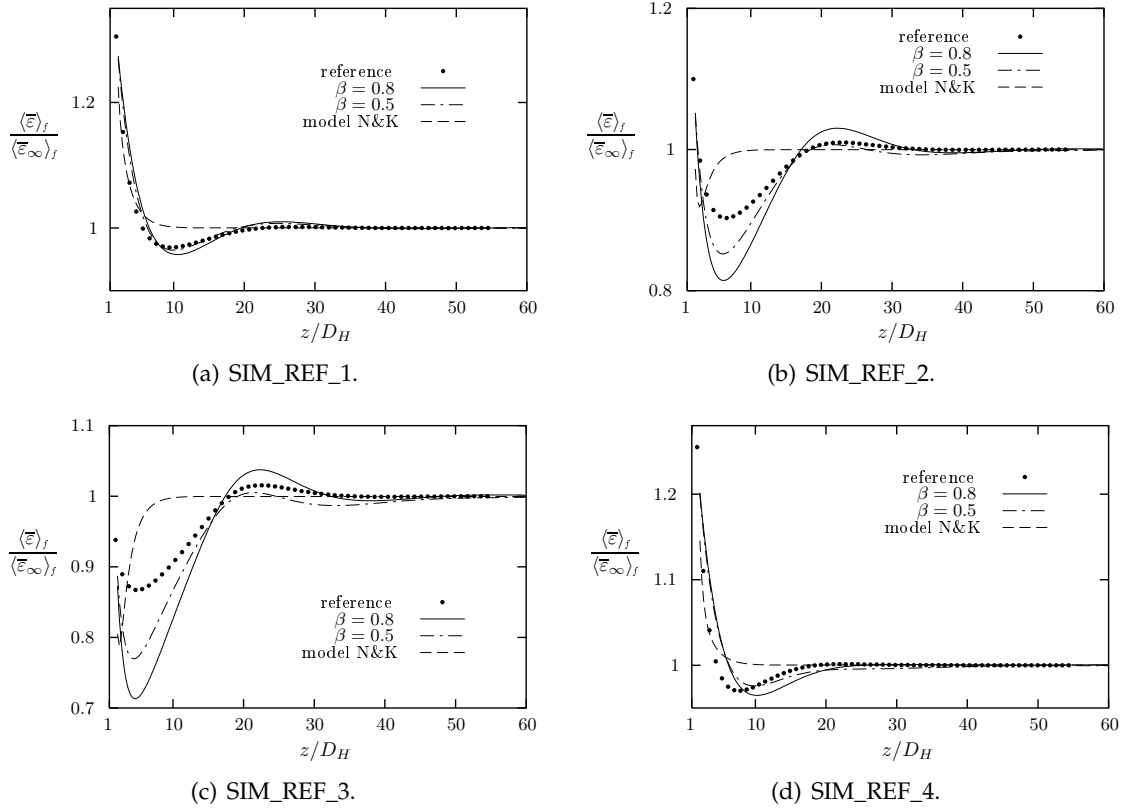


FIG. 5.22: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ pour deux valeurs du paramètre β , à savoir $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.8$. Les résultats du modèle N&K sont aussi reportés.

Trois cas vont alors être distingués suivant que f_p est surestimé, sous-estimé ou en bon accord avec la valeur de référence en $z = z_{M_0}$.

- Comme il a été souligné dans la section précédente, pour les valeurs les plus faibles de $L_{tM_0}^*$, la valeur de f_p en $z = z_{M_0}$ est sensiblement plus grande que la valeur de référence (Figs. 5.23 (a) et (d)). Ainsi, au point de départ de la simulation macroscopique, pour les cas SIM_REF_1 et SIM_REF_4, le terme de production dans l'équation bilan de la dissipation visqueuse est lui aussi surestimé, ce qui explique une décroissance de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ plus faible que celle observée dans l'évolution de référence (Figs. 5.22 (a) et (d)). Le premier minimum local de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est alors déplacé en aval par rapport à la référence. Ce déplacement est aussi perçu sur l'évolution modèle de $\langle \bar{k} \rangle_f$.
- Inversement, pour le cas SIM_REF_3, le coefficient de frottement est sous-estimé en $z = z_{M_0}$ par rapport à la référence. Par conséquent, le terme de production dans l'équation de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est lui aussi sous-estimé. La dissipation visqueuse diminue alors plus rapidement par rapport à l'évolution de référence et son premier minimum est largement inférieur à la référence. En effet, d'après l'expression modèle (5.104), une sous-estimation de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ entraîne une sous-estimation de f_p . Dans l'équation bilan de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, le terme de production est désavantagé par rapport au terme de dissipation, jusqu'à ce que ces deux termes deviennent égaux. Les extrema locaux des évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ sont par

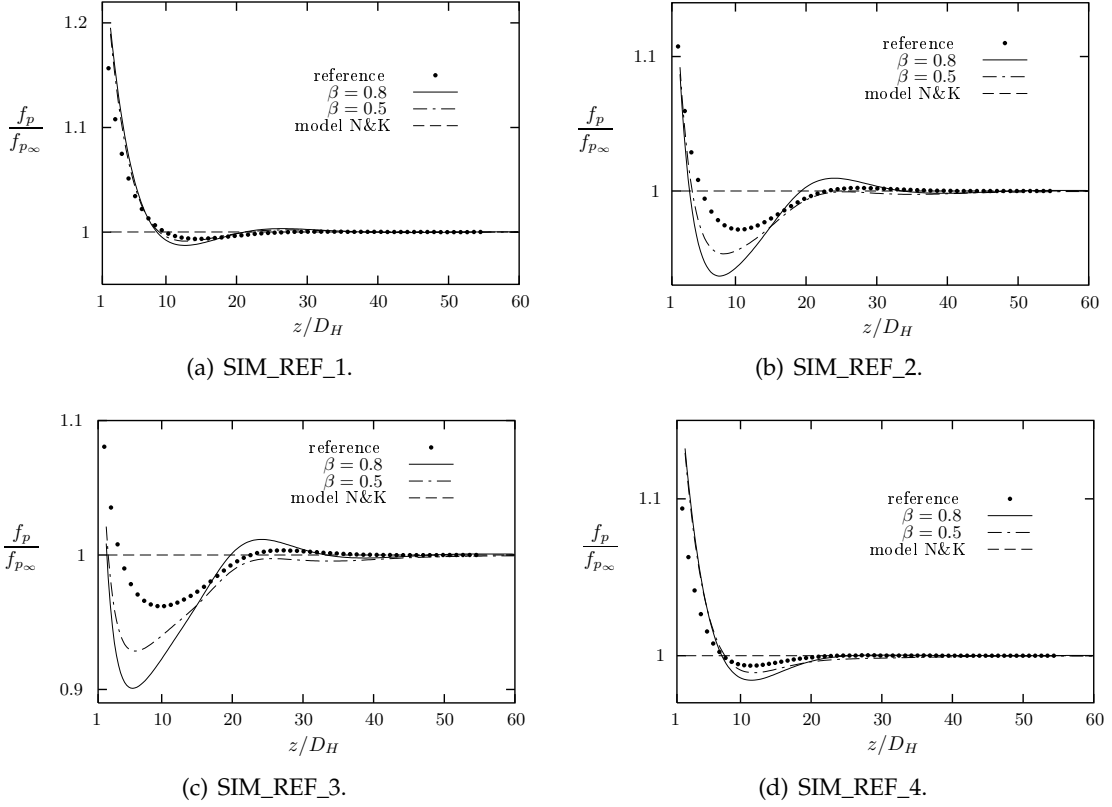


FIG. 5.23: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de f_p/f_{p_∞} . Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ pour deux valeurs du paramètre β , à savoir $\beta = 0.5$ et $\beta = 0.8$. Les résultats du modèle N&K sont aussi reportés.

contre convenablement localisés. Le premier minimum local de f_p est quant à lui en amont par rapport à la référence.

- Enfin, pour le cas SIM_REF_2, le coefficient de frottement est en bon accord avec la valeur de référence en $z = z_{M_0}$. Cependant, il avait été souligné dans la section précédente que quelque soit la valeur de β , f_p est sous-estimé par rapport à la référence dans la zone caractérisée par $3 \lesssim z/D_H \lesssim 20$. L'évolution de la dissipation visqueuse est donc à nouveau décrite par le scénario exposé dans le cas précédent.

La description de ces différents cas de figure montre le degré de sensibilité du modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ par rapport à la précision de l'expression modèle du coefficient de frottement. Les deux cas SIM_REF_2 et SIM_REF_3 montrent que l'augmentation de β détériore légèrement la pertinence de l'expression modèle de f_p dans la zone $3 \lesssim z/D_H \lesssim 20$. Les figures 5.23 (b) et (c) indiquent que cette tendance est largement amplifiée une fois que le modèle macroscopique de turbulence $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est couplé à l'expression modèle de f_p .

Pour résumer, le comportement général du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$ révèle trois caractéristiques :

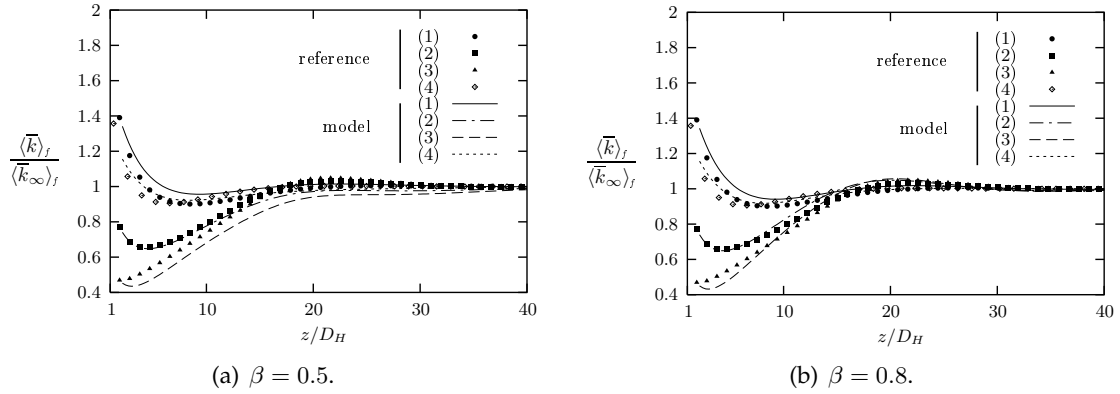


FIG. 5.24: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : Comportement global du modèle lorsque le nombre de Reynolds ou le paramètre $L_{tM_0}^*$ de l'écoulement changent. Tests a priori. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

1. l'augmentation du paramètre β amplifie les oscillations sur chacune des évolutions, que ce soit $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ ou f_p ;
2. si f_p est sous-estimé, les oscillations présentes sur les évolutions modèles de la dissipation visqueuse homogénéisée et du coefficient de frottement sont amplifiées ;
3. si f_p est surestimé, les oscillations présentent sur les évolutions modèles de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ sont légèrement déplacées en aval, l'évolution modèle du coefficient de frottement restant quant à elle très proche de l'évolution de référence.

Dans la section 5.2.2, il a été observé à l'aide de la figure 5.7 que le premier minimum local sur l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f$ se rapprochait de l'entrée lorsque le paramètre $L_{tM_0}^*$ diminuait. La figure 5.24 montre que ce comportement est retrouvé par le modèle, quel que soit la valeur de β . Par contre, pour une valeur de β fixée, le modèle ne reproduit pas quantitativement le déplacement de ce minimum lorsque le nombre de Reynolds change, tous les autres paramètres à l'entrée étant conservés par ailleurs.

5.6.2 Sensibilité de l'équation bilan modèle de la dissipation de sillage au paramètre C_{ε_w}

Dans cette section, l'équation de transport (5.123) de la dissipation de sillage va être évaluée **individuellement**. En utilisant l'évolution de référence du coefficient de frottement dans cette équation de transport, il est possible d'évaluer l'influence du coefficient C_{ε_w} sur l'évolution modèle de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et de valider cette évolution indépendamment des évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$. Les simulations sont effectuées sur le domaine s'étendant de $z_{M_0}/D_H = 2$ à $z_{M_s}/D_H = 60$. La condition de Dirichlet à l'entrée du domaine est imposée en accord avec la valeur de référence de la dissipation de sillage en ce point. Trois valeurs du coefficient C_{ε_w} sont étudiées, à savoir $C_{\varepsilon_w} = 2$, $C_{\varepsilon_w} = 4$ et $C_{\varepsilon_w} = 8$.

La figure 5.25 montre que pour les quatre cas d'étude, l'évolution de la dissipation de sillage est qualitativement reproduite. Les conditions à l'entrée du domaine étant imposées suivant les valeurs de référence, la valeur du coefficient C_{ε_w} décrit le gradient de la dissipation de sillage au premier noeud du maillage. En aval de l'écoulement, cette valeur impacte

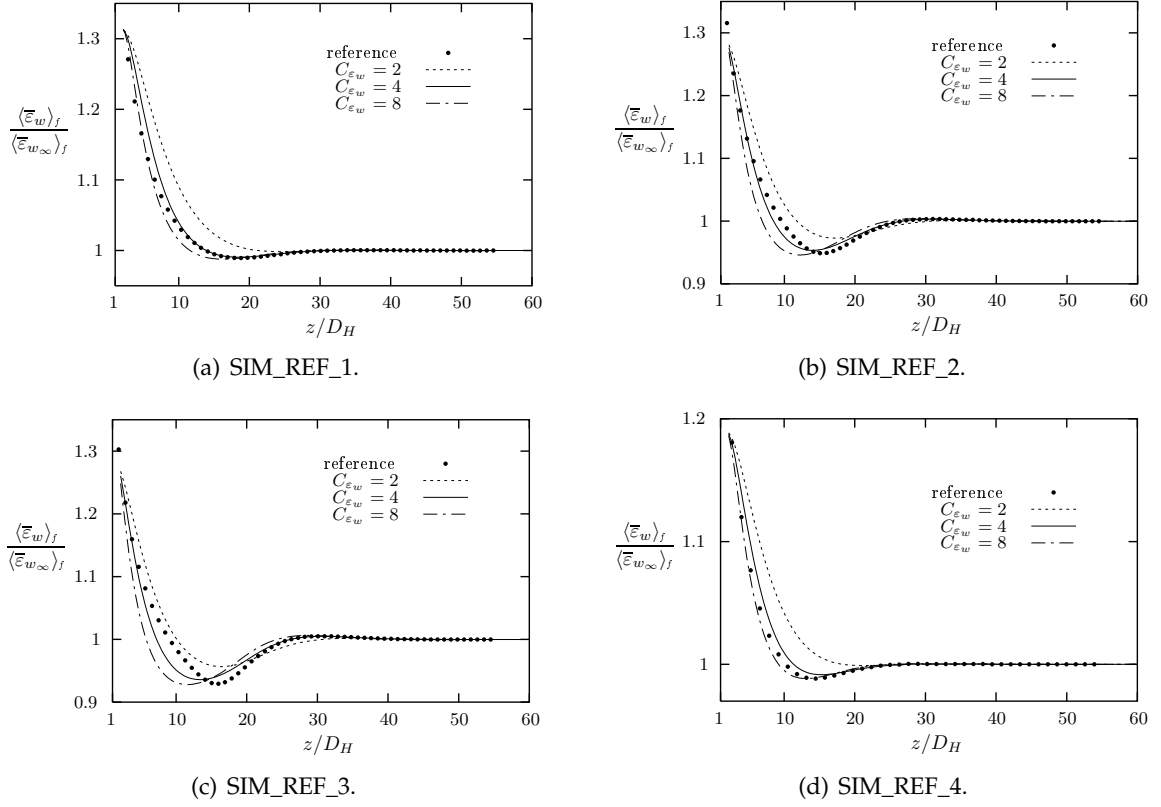


FIG. 5.25: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f$. Comparaison *a priori* entre les évolutions de référence et les résultats de son équation de transport en se référant à l'évolution de référence de f_p . Trois valeurs du coefficient C_{ε_w} sont étudiées, à savoir $C_{\varepsilon_w} = 2$, $C_{\varepsilon_w} = 4$ et $C_{\varepsilon_w} = 8$.

sur la compétition entre les termes de production et de dissipation de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Ainsi, le premier minimum local de l'évolution de la dissipation de sillage est déplacé en amont lorsque le coefficient C_{ε_w} est augmenté. Pour les différents cas étudiés, et pour la validation *a priori* de l'équation de transport de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$, la valeur $C_{\varepsilon_w} = 4$ représente un bon compromis. Nous soulignons que la valeur de C_{ε_w} ici donnée ne représente pas un résultat pour le calibrage des coefficients du modèle macroscopique.

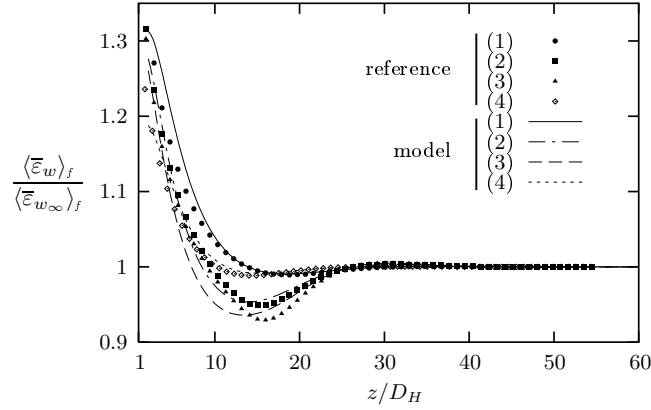


FIG. 5.26: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude a priori de l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f$. Comportement de l'équation de transport de la dissipation de sillage lorsque le nombre de Reynolds ou le paramètre $L_{tM_0}^*$ de l'écoulement changent. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats de son équation de transport en se référant à l'évolution de référence de f_p . Le coefficient C_{ε_w} est égal à 4. (1) : SIM_REF_1. (2) : SIM_REF_2. (3) : SIM_REF_3. (4) : SIM_REF_4.

En conservant le coefficient C_{ε_w} égal à 4, nous étudions maintenant l'évolution modèle de la dissipation de sillage pour les quatre cas d'étude (Fig. 5.26). Nous constatons que pour les cas SIM_REF_1 et SIM_REF_4, pour lesquels le paramètre $L_{tM_0}^*$ est égal à $1/10$, le modèle reproduit de façon pertinente l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Cela démontre que le modèle décrit un comportement adéquat lorsque le nombre de Reynolds évolue. Par contre, en comparant les cas SIM_REF_1, SIM_REF_2 et SIM_REF_3, il est constaté que le décalage spatial entre le premier minimum local de l'évolution de référence et celui de l'évolution modèle est accentué lorsque le paramètre $L_{tM_0}^*$ diminue. Dans l'équation de transport modèle (5.123) de la dissipation de sillage, l'influence de la turbulence est indirecte car elle modifie l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ via son action sur le coefficient de frottement. Pour accroître la précision avec laquelle le premier minimum local est décrit, il faudrait très certainement inclure dans la définition des temps caractéristiques τ_w et τ_p un facteur lié aux quantités turbulentes. Toutefois, nous considérons que la précision observée est suffisante pour vérifier la validité du modèle macroscopique complet (dans la section 6.1.1) en conservant les définitions des temps caractéristiques τ_p et τ_w indépendantes de la turbulence.

5.7 Modélisation de l'état asymptotique de référence

Dans les sections précédentes, l'approche qui a été proposée sous-entend que l'état asymptotique de référence de l'écoulement est connu. Or, pour que la modélisation revête un caractère pleinement prédictif, il faut que cet état d'équilibre soit lui aussi modélisé. Nous soulignons une nouvelle fois que cette modélisation est indépendante de celle de la dynamique d'évolution des différentes grandeurs.

5.7.1 Etude de l'état asymptotique : f_{p_∞}

La modélisation de l'état asymptotique de référence f_{p_∞} est très bien renseignée dans la littérature (par exemple dans [46]). Elle dépend de la géométrie du milieu considéré et du

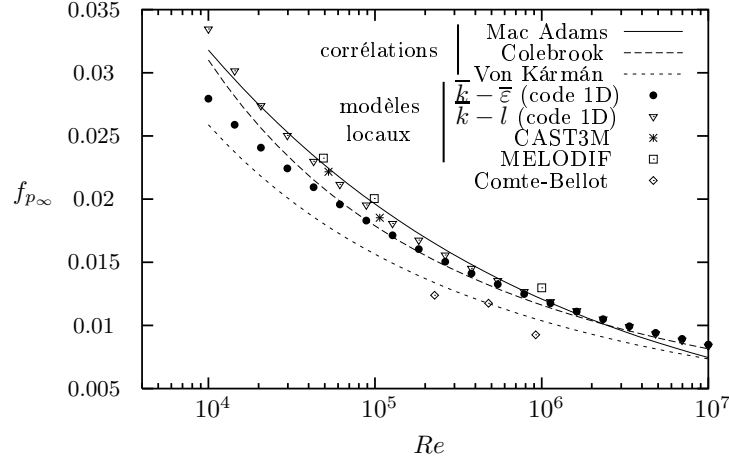


FIG. 5.27: *Écoulement turbulent dans un canal plan : évolution du coefficient de frottement $f_{p\infty}$ en fonction du nombre de Reynolds. Comparaison des corrélations (5.151), (5.152), (5.153) avec les résultats issus de la modélisation locale de la turbulence et les résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24].*

nombre de Reynolds. Dans cette section, nous nous concentrons sur la géométrie du canal plan. Nous proposons une comparaison des résultats expérimentaux de Comte-Bellot [24] et des résultats obtenues à partir de la modélisation locale de la turbulence (voir chapitre 2) avec trois corrélations :

- la corrélation de Colebrook (dont le domaine de validité est $Re \in [4 \times 10^3; 10^7]$) :

$$f_{p_{\text{Colebrook}}} = 4 \left[1.5635 \log \left(\frac{Re}{7} \right) \right]^{-2} ; \quad (5.151)$$

- la corrélation de Von Kármán (dont le domaine de validité est $Re \in [4 \times 10^3; 10^7]$) :

$$f_{p_{\text{VK}}} = \frac{4}{[1.7372 \log (Re \sqrt{f_{p_{\text{VK}}}} - 0.3946)]^2} ; \quad (5.152)$$

- la corrélation Mac Adams (dont le domaine de validité est $Re \in [4 \times 10^3; 10^6]$) :

$$f_{p_{\text{McA}}} = 0.184 Re^{-0.2} . \quad (5.153)$$

Bien que la géométrie soit simple, la figure 5.27 indique qu'il existe une certaine disparité entre les modélisations avec des écarts relatifs qui peuvent être supérieurs à 10%. Pour une configuration plus complexe, comme par exemple un écoulement turbulent transverse à un faisceau de cylindres, les disparités entre les différentes modélisations sont accrues.

5.7.2 Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$

Au cours des sections 5.4 et 5.5.1, nous avons montré qu'à l'équilibre, la dissipation de sillage pouvait être exprimée en fonction du coefficient de frottement, de la vitesse débitante, du diamètre hydraulique et de la fonction $C_w(Re_\tau)$ (Eq. (5.122)). Nous avons aussi prouvé

numériquement que, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^4 , la fonction C_w reste proche de 1.6 :

$$\text{pour } Re > 10^4, \quad \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f \simeq C_w \frac{f_{p\infty}^{3/2} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H}, \quad (5.154)$$

avec $C_w \simeq 1.6$.

Cette expression peut très certainement être généralisée à d'autres géométries. Seule la fonction $C_w(Re_\tau)$ nécessite alors d'être redéfinie.

5.7.3 Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$

Pour un écoulement en équilibre, la dissipation visqueuse moyennée spatialement s'équilibre avec la production de sous-filtre. D'après la décomposition (5.54), nous pouvons écrire :

$$\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f = \frac{f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f. \quad (5.155)$$

Or la dissipation de sillage est modélisée dans la section précédente par la relation (5.154). L'état asymptotique $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$ peut donc être décrit par :

$$\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f \simeq \frac{f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - C_w \frac{f_{p\infty}^{3/2} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H} = \frac{f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H} \left(\frac{1}{2} - C_w f_{p\infty}^{1/2} \right). \quad (5.156)$$

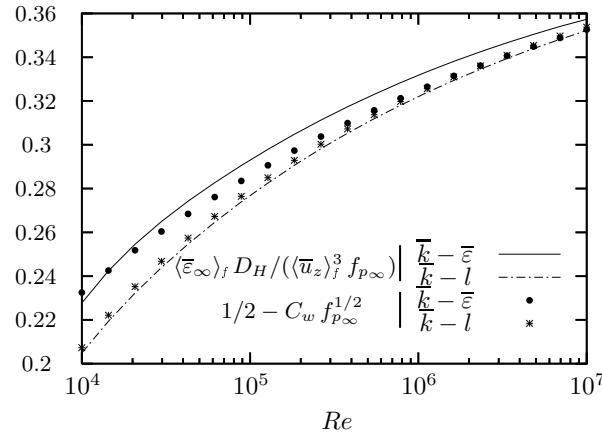


FIG. 5.28: Écoulement turbulent dans un canal plan : évolutions respectives du rapport $\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f D_H / (\langle \bar{u}_z \rangle_f^3 f_{p\infty})$ et de l'expression $(1/2 - C_w f_{p\infty}^{1/2})$ en fonction du nombre de Reynolds. Validation de l'expression (5.156) à partir des résultats du code de calcul 1D.

A parti des résultats provenant du code de calcul 1D, la figure 5.28 permet de vérifier la pertinence de l'expression (5.156).

5.7.4 Etude de l'état asymptotique : $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$

Les différents développements qui ont été réalisés au cours des chapitres 4 et 5 ne permettent pas de proposer un modèle pour la valeur à l'équilibre $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$. Par contre, d'après

l'expression (2.137), l'énergie cinétique turbulente est liée au carré de la vitesse de frottement (qui est équivalent au produit $f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2$) dans la couche limite. Or, à l'échelle microscopique dans un canal, \bar{k} trouve ses plus grandes valeurs dans la couche limite. Nous proposons alors de décrire l'état asymptotique $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ par l'expression :

$$\langle \bar{k}_\infty \rangle_f = \gamma_k f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^2. \quad (5.157)$$

où γ_k est une constante qui, par optimisation, est définie égale à $1/4$.

Parallèlement à cette proposition, nous citons deux propositions provenant de la littérature qui convergent sur la même expression [17, 71], à savoir :

$$\langle \bar{k}_\infty \rangle_f = \gamma'_k f_{p\infty}^{2/3} \langle \bar{u}_z \rangle_f^2. \quad (5.158)$$

Pour aboutir à cette expression, les auteurs raisonnent sur l'échelle de longueur caractéristique de la turbulence à l'échelle macroscopique. Par rapport aux résultats obtenus dans un canal plan, nous considérons que la constante γ'_k pour cette configuration est proche de $1/20$. La figure 5.29 indique que, au sens qualitatif et pour le canal plan, l'évolution de $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ est mieux reproduite avec l'expression (5.157) qu'avec l'expression (5.158). Nous restons toutefois très prudent sur la possibilité de généraliser l'expression (5.157) à d'autres géométries.

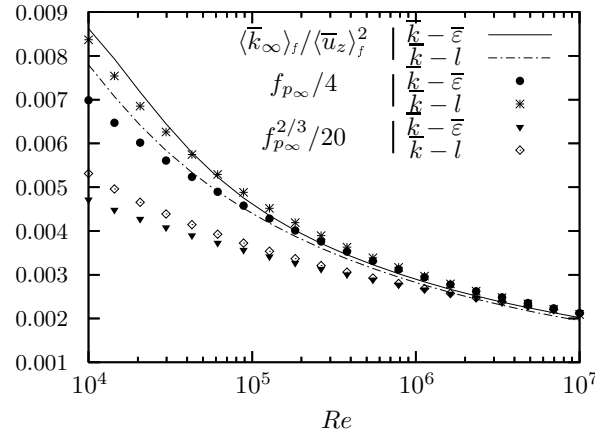


FIG. 5.29: Écoulement turbulent dans un canal plan : évolution du rapport $\langle \bar{k}_\infty \rangle_f / \langle \bar{u}_z \rangle_f^2$ et des expressions $f_{p\infty}/4$ et $f_{p\infty}^{2/3}/20$ en fonction du nombre de Reynolds. Etude des expressions (5.157) et (5.158) à partir des résultats du code de calcul 1D.

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé la modélisation macroscopique de la turbulence. Une étude bibliographique succincte a permis de mettre en avant les difficultés inhérentes à ce type de modélisation, la principale difficulté étant d'atteindre l'état d'équilibre de la turbulence. Il a été souligné que la modélisation de cet état asymptotique était indépendante de la modélisation de la dynamique d'établissement. Nous nous sommes ensuite focalisés sur des écoulements traversant des milieux stratifiés (fortement anisotropes), la direction de l'écoulement étant identique à la direction principale du milieu. Les gradients macroscopiques de vitesse ont par ailleurs été supposés nuls. Des calculs fins ont été menés

en utilisant le code de calcul CAST3M et ont été moyennés spatialement. Les évolutions déduites sont alors considérées comme des évolutions de «référence» sur lesquelles nous appuions notre réflexion.

Nous avons ensuite étudié l'évolution de l'énergie cinétique turbulente homogénéisée. L'étude du bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ dans la géométrie considérée a permis de réduire son bilan à la compétition entre la production de sous-filtre et la dissipation visqueuse homogénéisée. Deux natures de déséquilibres provoquent cette compétition. Il s'agit des déséquilibres de formes et de niveaux, le premier étant lié principalement à des phénomènes de sous-filtre, alors que le second s'apparente à des phénomènes macroscopiques. En validant ensuite l'hypothèse d'homogénéité macroscopique de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen, nous avons exprimé la production de sous-filtre en fonction de la dissipation de sillage et du travail de la force de trainée. Cette décomposition augmente le nombre de quantité à modéliser, mais permet une meilleure compréhension du processus d'établissement. Dans l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$, trois termes nécessitent alors d'être modélisés à savoir f_p , $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$.

Des équations de transport permettent de reproduire les évolutions de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Ces équations ne sont pas obtenues analytiquement mais postulées. Pour l'équation de la dissipation visqueuse homogénéisée, nous nous sommes référés à l'équation bilan de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et nous avons identifié les temps caractéristiques associés aux termes de production / dissipation. Il a été montré que le temps caractéristique associé à la production de sous-filtre dépend du déséquilibre du coefficient de frottement, c'est à dire $f_p/f_{p\infty}$. De plus, un unique coefficient de modélisation, C_{ε_2} , intervient dans cette équation. Pour rester cohérent avec la modélisation de la turbulence à l'échelle microscopique, C_{ε_2} est choisie égale à 1.9. L'équation de transport de la dissipation de sillage est elle aussi postulée. Elle fait appel à un terme source qui est lié au travail de la force de trainée et à un terme puits qui est associé à $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$. Des temps caractéristiques associés ont été proposés. Ils font une nouvelle fois référence au coefficient de frottement. Une unique constante de modélisation apparaît dans cette équation de transport, à savoir C_{ε_w} .

La modélisation du coefficient de frottement est réalisée au moyen d'une expression analytique. Elle doit être pertinente pour que les équations de transport de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ permettent de retrouver l'état asymptotique. Elle doit aussi être précise car ce coefficient joue un rôle de premier plan dans chacune des équations de transport. Nous avons ainsi montré que f_p dépend principalement de la somme des dissipations de sillage et visqueuse homogénéisée. L'ajout dans sa modélisation d'un terme correctif lié à $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{u}_z \rangle_f$ détermine totalement l'état asymptotique atteint par l'ensemble des équations de transport. L'expression de f_p fait intervenir un coefficient β .

Un modèle de turbulence macroscopique a été établi puis extensivement étudié pour un milieu stratifié, composé de plaques planes parallèles ou de tubes à sections circulaires. La méthodologie mise en oeuvre dans ce chapitre peut permettre d'adapter le modèle à des géométries plus compliquées, en conservant toutefois l'hypothèse de gradients macroscopiques de vitesse nuls. Au cours des développements précédents, quatre étapes majeures ont été identifiées. Il s'agit de

1. la vérification dans l'équation bilan de l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen (*ie.* $\langle \bar{E}^m \rangle_f$) que les trois termes dominants sont la production de sous-filtre, la dissipation de sillage et le travail de la force de trainée.

2. l'identification du temps τ_s ,
3. l'identification du temps τ_p ,
4. la proposition d'une expression modèle pour le coefficient de frottement f_p .

En premier lieu, il conviendra de vérifier la validité des propositions effectuées dans ce chapitre. Parallèlement, une modélisation de l'état asymptotique de référence peut être menée. De notre point de vue, les expressions modèles pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ proposées dans ce chapitre sont très certainement généralisable à d'autres géométries de type «canaux». Seule la fonction $C_w(Re_\tau)$ nécessite alors d'être redéfinie. Par contre, il semble peu probable que ce soit aussi le cas pour $\langle \bar{k} \rangle_f$.

Optimisation et évaluation du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements en canaux

Dans le chapitre 5, différentes modélisations ont été proposées pour décrire les équations bilans de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$, ainsi qu'une fermeture algébrique pour le coefficient de frottement, pour les écoulements turbulents en canaux. Ces équations, constituant le modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$, sont récapitulées :

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{k} \rangle_f}{\partial z} = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (6.1)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_{\varepsilon 2}}{\tau_s} \left(\frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f \right) - \frac{C_{\varepsilon 2}}{\tau_t} \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \quad (6.2)$$

$$\langle \bar{u}_z \rangle_f \frac{\partial \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}{\partial z} = \frac{C_{\varepsilon w}}{\tau_p} \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{2D_H} - \frac{C_{\varepsilon w}}{\tau_w} \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, \quad (6.3)$$

$$\frac{f_p}{f_{p\infty}} = \left(\frac{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f + \langle \bar{\varepsilon}_{\infty} \rangle_f} \right)^{2/3} \left(1 + \beta \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^{1/2} - \langle \bar{k}_{\infty} \rangle_f^{1/2}}{\langle \bar{u}_z \rangle_f} \right). \quad (6.4)$$

Dans les équations (6.2) et (6.3), les temps caractéristiques sont définies par :

$$\tau_t = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f}, \quad \tau_s = \frac{\langle \bar{k} \rangle_f}{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} \sqrt{\frac{f_{p\infty}}{f_p}}, \quad \tau_w = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}, \quad \tau_p = \frac{f_p \langle \bar{u}_z \rangle_f^2}{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f} \frac{(f_{p\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3 / (2D_H))}{\sqrt{\langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f}}. \quad (6.5)$$

Nous avons souligné dans le chapitre 5 que la valeur 1.9 était retenue pour la constante C_{ε_2} afin de rester cohérent avec la modélisation locale de la turbulence. Ainsi, seules les deux constantes C_{ε_w} et β restent à déterminer pour reproduire l'établissement d'écoulements turbulents dans des canaux. De plus, pour un canal plan, l'état d'équilibre peut être décrit à travers les modèles :

$$\text{pour } Re > 10^4, \quad f_{p_{McA}} = 0.184Re^{-0.2}, \quad (6.6)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_{w_\infty} \rangle_f = C_w \frac{f_{p_\infty}^{3/2} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H}, \quad (6.7)$$

$$\langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f = \frac{f_{p_\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^3}{D_H} \left(\frac{1}{2} - C_w f_{p_\infty}^{1/2} \right), \quad (6.8)$$

$$\langle \bar{k}_\infty \rangle_f = \gamma_k f_{p_\infty} \langle \bar{u}_z \rangle_f^2, \quad (6.9)$$

où les constantes C_w et γ_k sont respectivement égale à 1.6 et 0.25. Cependant la modélisation de l'état d'équilibre ne sera pas employée car elle dépend de la géométrie du canal. Nous ne pouvons donc optimiser le modèle correctement si l'optimisation dépend de cette modélisation. Nous utiliserons les valeurs fournies par les simulations de référence, ce qui permet de se concentrer sur l'optimisation des coefficients β et C_{ε_w} .

Dans la section 6.1, l'influence de ces deux constantes sera analysée puis elles seront optimisées à partir d'un ensemble de calcul de référence. Nous montrerons ensuite la capacité de prédiction du modèle dans la section 6.2.

6.1 Optimisation des coefficients du modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$

6.1.1 Sensibilité du modèle macroscopique aux paramètres β et C_{ε_w}

En introduction de ce chapitre, le modèle macroscopique a été décrit : il est composé des équations (6.1), (6.2), (6.3) et (6.4). L'influence des paramètres β et C_{ε_w} a été étudiée dans le contexte de modèles partiels (voir section 5.6), ce qui a permis de mieux cibler leurs influences respectives. A présent, le modèle complet est considéré. Les simulations sont effectuées en utilisant les paramètres suivants :

- le domaine de calcul s'étend de $z_{M_0}/D_H = 2$ à $z_{M_s}/D_H = 60$,
 - il est décomposé suivant un maillage régulier de 200 éléments,
 - les conditions limites d'entrée sur $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ correspondent aux valeurs issues des évolutions de référence,
 - le coefficient de frottement est déterminé à partir de l'expression (6.4) (sa valeur à l'entrée peut différer de la valeur de référence).
- (6.10)

Pour chaque coefficient β et C_{ε_w} , deux valeurs sont considérées, à savoir 0.5 et 0.8 pour β ainsi que 2 et 8 pour C_{ε_w} . Les résultats de simulations sont ensuite comparés aux évolutions de référence pour les quatres cas principaux décrits par le tableau (5.2).

D'une manière générale, la dynamique oscillatoire est qualitativement retrouvée (voir Fig. 6.1 par exemple). Pour montrer clairement l'influence du coefficient C_{ε_w} sur les évolutions modèles, les valeurs de ce coefficient ont été délibérément choisies très éloignées l'une

de l'autre. Ainsi, en augmentant le coefficient C_{ε_w} , les extrema locaux de chaque évolution sont déplacés en aval de l'écoulement. En ce qui concerne le coefficient β , son augmentation provoque un accroissement de l'amplitude des oscillations. Cette augmentation provoque aussi un léger déplacement des extrema locaux de chaque évolution vers l'amont de l'écoulement.

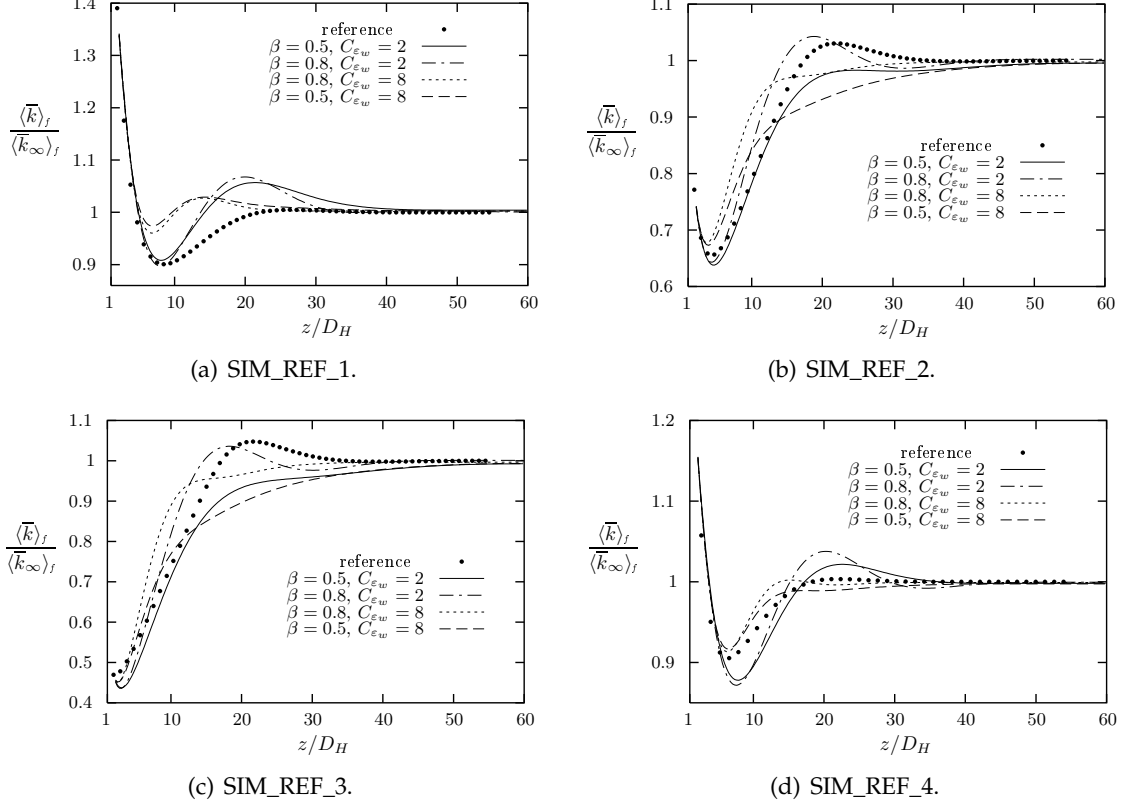


FIG. 6.1: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_t / \langle \bar{k}_\infty \rangle_t$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_t - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_t - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_t - f_p$ pour quatre couples $(\beta, C_{\varepsilon_w})$, à savoir $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 2), (0.8, 2), (0.8, 8), (0.5, 8)$.

Plus précisément, pour les cas SIM_REF_2 et SIM_REF_3, les évolutions obtenues grâce au modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ sont proches des résultats de la section 5.6.1 (validation du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$). Pour preuve, nous citons l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ correspondant au couple de valeurs $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 2)$, exhibée sur la figure 6.1(b), par rapport à l'évolution présentée sur la figure 5.21(b) en prenant $\beta = 0.5$. Elles sont pratiquement identiques car l'évolution de la dissipation de sillage est très proche de l'évolution de référence (Fig. 6.3(b)). Par contre, nous notons une légère détérioration des résultats pour les cas SIM_REF_1 et SIM_REF_4. A titre d'exemple, considérons l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ pour le cas SIM_REF_4 et pour $\beta = 0.8$. Avec le modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$, l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ est très proche de l'évolution de référence (Fig. 5.21(d)). Avec le modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ et quelque soit la valeur de C_{ε_w} considérée, l'évolution de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ présente des oscillations amplifiées. Le minimum de $\langle \bar{k} \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f$ est par ailleurs sous-estimé de presque 10% par rapport au

minimum de référence. L'explication de cette différence de comportement provient de l'évolution de la dissipation de sillage. A partir des figures 6.3(a) et (d), nous constatons que, pour $C_{\varepsilon_w} = 2$ ou $C_{\varepsilon_w} = 8$, la dissipation de sillage est surestimée pour $z/D_H \lesssim 15$. Cette surestimation est induite par une dérivée positive de la dissipation de sillage en $z = z_{M_0}$ alors que, pour la référence, elle est négative. Par conséquent, l'équilibre production - dissipation dans les bilans de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ est retardé, et la valeur du premier minimum local de ces quantités est sensiblement diminuée. Les constatations sont identiques pour le cas SIM_REF_1. Deux causes peuvent être avancées pour expliquer la positivité de la dérivée de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ en $z = z_{M_0}$:

1. l'expression modèle du coefficient de frottement fournit en $z = z_{M_0}$ une valeur surestimée par rapport à l'évolution de référence (comme cela a été souligné dans la section 5.6.1) ;
2. les temps caractéristiques τ_p et τ_w ne sont pas indépendants des quantités turbulentes $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$.

Ces deux remarques fournissent des pistes pour améliorer le modèle macroscopique de turbulence. En conclusion, lorsque l'équation modèle pour la dissipation de sillage est adjointe aux trois autres équations (du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - f_p$), le manque (relatif) de précision sur les évolutions modèles de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et/ou f_p entraîne la faible dégradation constatée des résultats.

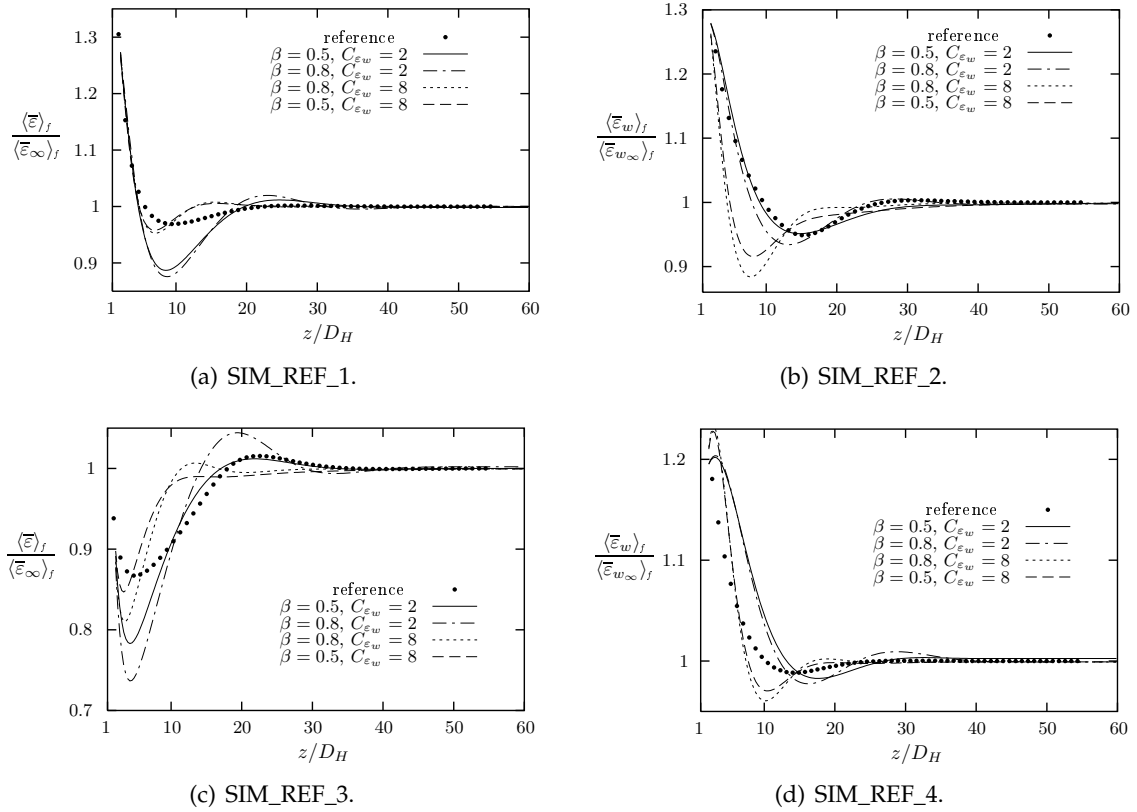


FIG. 6.2: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_\infty \rangle_f$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ pour quatre couples $(\beta, C_{\varepsilon_w})$, à savoir $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 2), (0.8, 2), (0.8, 8), (0.5, 8)$.

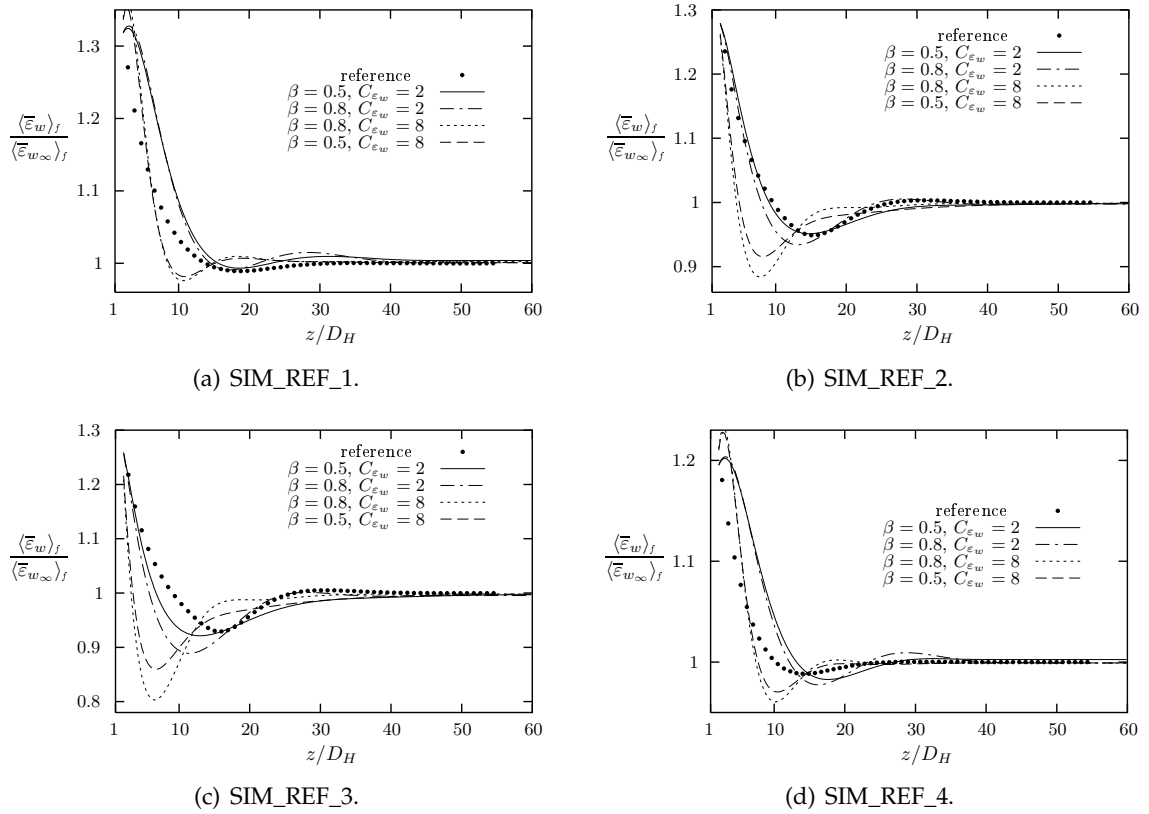


FIG. 6.3: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f / \langle \bar{\varepsilon}_{w\infty} \rangle_f$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ pour quatre couples $(\beta, C_{\varepsilon_w})$, à savoir $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 2), (0.8, 2), (0.8, 8), (0.5, 8)$.

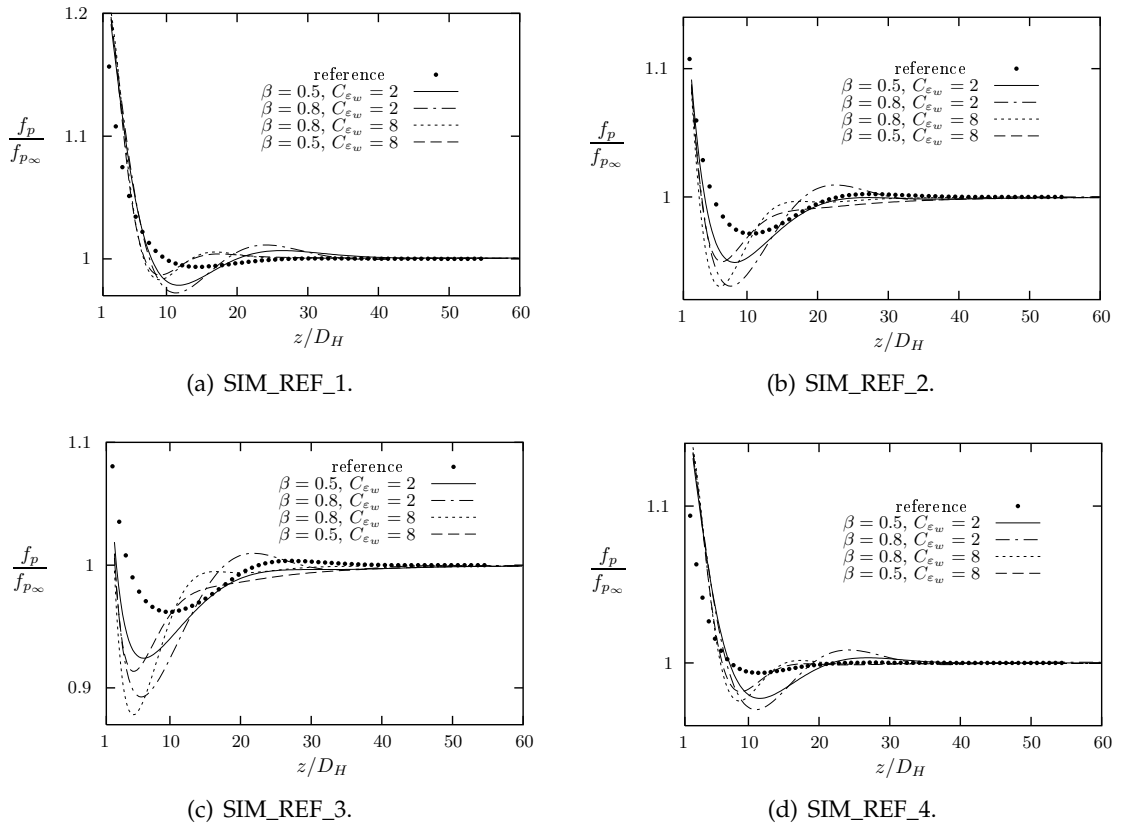


FIG. 6.4: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de l'évolution de $f_p/f_{p\infty}$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle $\langle \bar{k} \rangle_t - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_t - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_t - f_p$ pour quatre couples $(\beta, C_{\varepsilon_w})$, à savoir $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 2), (0.8, 2), (0.8, 8), (0.5, 8)$.

6.1.2 Optimisation des coefficients du modèle macroscopique pour les écoulements turbulents en canal plan

Dans la section 6.1.1, l'impact des coefficients β et C_{ε_w} sur le comportement du modèle a été analysé. Leurs valeurs vont à présent être optimisées pour que les évolutions modèles soient au plus proche des évolutions de référence. Pour cela, nous nous appuyons sur une matrice de simulations composée de 23 calculs de référence obtenus grâce au code de calcul CAST3M (récapitulés par le tableau 6.1.2) et sur 19 calculs de référence obtenus grâce au code de calcul MELODIF (récapitulés par le tableau 6.1.2). L'ensemble de ces écoulements de référence constitue une base d'optimisation pour les coefficients β et C_{ε_w} . Cette base sera par la suite notée SIM_REF et ces éléments SIM_REF_i.

| $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H}$ \diagdown $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}$ | 1 | 3 | 9 |
|--|--|--|--|
| $\frac{1}{10}$ | | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{25}$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{100}$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |

TAB. 6.1: Simulations d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : récapitulatif des calculs menés avec le code CAST3M.

| $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2}}{\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H}$ \diagdown $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}$ | 1 | 3 | 9 |
|--|-------------------------------------|--|--|
| $\frac{1}{10}$ | | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{25}$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{100}$ | $Re = 10^5$ | $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |

TAB. 6.2: Simulations d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : récapitulatif des calculs menés avec le code MELODIF.

Un critère doit être introduit afin d'évaluer l'écart entre l'évolution de référence et l'évolution modèle. Schématiquement, quatre types de fonctions d'erreur peuvent être considé-

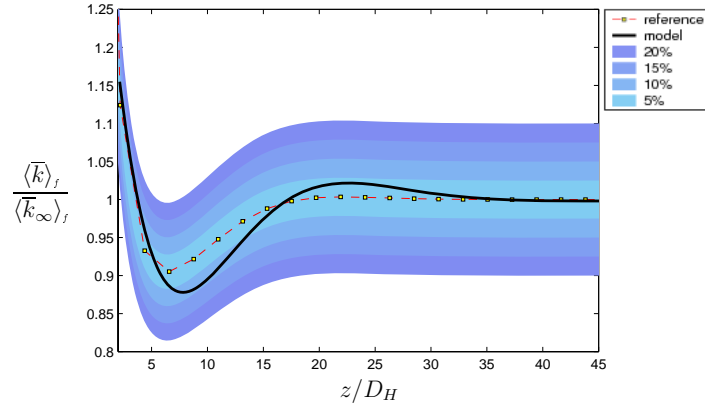


FIG. 6.5: Introduction de la fonction d'erreur ponctuelle. Elle est représentée par les intervalles de couleur autour d'une évolution de référence (ici $\langle \bar{k} \rangle_t / \langle \bar{k}_\infty \rangle_t$).

rés à savoir la fonction d'erreur ponctuelle, la fonction d'erreur intégrée, la fonction d'erreur multi-cas ainsi que la fonction d'erreur globale.

- La **fonction d'erreur ponctuelle** correspond à la définition en un point z d'un écart entre la valeur modèle et la valeur référence. Cette erreur dépend donc de la variable z , mais elle dépend aussi de l'écoulement et de la grandeur considérée, ainsi que des coefficients β et C_{ε_w} . Nous utilisons la définition suivante de la fonction d'erreur ponctuelle pour une grandeur ξ :

$$\mathbb{E}_1(\text{SIM_REF_i}, \xi, z, \beta, C_{\varepsilon_w}) = \left| \frac{\xi(z)}{\xi_{ref}(z)} - 1 \right|. \quad (6.11)$$

A titre d'exemple, la figure 6.5 permet d'estimer en tout point z l'erreur induite par le modèle sur l'évolution de l'énergie cinétique turbulente homogénéisée pour le cas SIM_REF_4 en utilisant les paramètres $\beta = 0.5$ et $C_{\varepsilon_w} = 2$. Cependant, optimiser les coefficients β et C_{ε_w} pour chaque point z , pour chaque grandeur et pour chaque écoulement n'a aucun sens, car il serait dans ce cas impossible de converger vers une unique valeur pour ces coefficients. Ce niveau d'erreur est simplement utile pour s'assurer qu'une fois l'optimisation des coefficients effectuée, il n'existe pas localement d'écart trop important avec la référence.

- La **fonction d'erreur intégrée** tient compte de l'erreur sur l'ensemble du domaine spatial. Pour décrire cette erreur, nous utilisons la norme $\mathcal{L}1$ dans l'espace des fonctions qui est définie pour une fonction ξ par :

$$\|\xi\|_1 = \int_{\mathcal{D}_\xi} |\xi(z)| dz, \quad (6.12)$$

où \mathcal{D}_ξ correspond au domaine de définition de la fonction ξ . Ainsi, pour une grandeur et un écoulement donnés, la fonction d'erreur intégrée est calculée selon l'expression :

$$\mathbb{E}_2(\text{SIM_REF_i}, \xi, \beta, C_{\varepsilon_w}) = \left\| \frac{\xi}{\xi_{ref}} - 1 \right\|_1. \quad (6.13)$$

- La **fonction d'erreur multi-cas** tient compte de l'erreur sur chacun des écoulements de référence étudiés. Elle est définie comme la somme des fonctions d'erreur intégrées

pondérée par le nombre N_{SIM} de simulations de la base d'optimisation SIM_REF :

$$\mathbb{E}_3(\xi, \beta, C_{\varepsilon_w}) = \frac{1}{N_{SIM}} \sum_{SIM_REF_i \in SIM_REF} \mathbb{E}_2(SIM_REF_i, \xi, \beta, C_{\varepsilon_w}). \quad (6.14)$$

- La **fonction d'erreur globale** rassemble les fonctions d'erreur multi-cas. La spécificité de cette fonction est qu'il est possible de définir des facteurs de pondération p_ξ permettant d'introduire une hiérarchie dans l'ensemble des grandeurs suivant si nous souhaitons privilégier l'optimisation par rapport à l'évolution d'une des grandeurs étudiées. Cette fonction d'erreur s'écrit :

$$\mathbb{E}_4(\beta, C_{\varepsilon_w}) = \frac{\sum_{\xi \in \{\langle \bar{k} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, f_p\}} p_\xi \times \mathbb{E}_3(\xi, \beta, C_{\varepsilon_w})}{\sum_{\xi \in \{\langle \bar{k} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, f_p\}} p_\xi}. \quad (6.15)$$

Pour décrire ces quatre fonctions d'erreur, nous faisons appel au superviseur de code *Kalif* [64]. Ce superviseur modifie automatiquement les fichiers de données et conserve les résultats pour chaque calcul. Le choix des paramètres composant les fichiers de données peut être effectué suivant un plan d'expérience ou suivant plusieurs méthodes d'optimisation (Simplexe, etc). Nous utilisons par ailleurs les paramètres généraux de calculs décrits par (6.10).

Dans le but de choisir les facteurs de pondération dans la définition de la fonction d'erreur globale, nous étudions dans un premier temps la fonction d'erreur multi-cas. Le domaine de définition de cette fonction est restreint aux valeurs de β comprises entre 0.4 et 2, ainsi qu'aux valeurs de C_{ε_w} comprises entre 0.5 et 8. Quatre-vingt calculs sont menés suivant un plan d'expérience s'appuyant sur un maillage cartésien du domaine défini pour le couple $(\beta, C_{\varepsilon_w})$. Les résultats sont reportés sur la figure 6.6.

Ainsi, il est montré que l'erreur \mathbb{E}_3 sur l'énergie cinétique turbulente homogénéisée dépend fortement de β et peu de C_{ε_w} . La surface de réponse présente une vallée pour des valeurs de β grossièrement comprise entre 0.5 et 1. Dans l'intervalle d'étude choisi, l'erreur \mathbb{E}_3 sur le coefficient de frottement augmente avec β et ne dépend pratiquement pas de C_{ε_w} . Ce comportement par rapport au coefficient β était attendu : à la section 5.4.3, l'étude de l'expression modèle du coefficient de frottement à partir des évolutions de référence a démontré la détérioration de l'évolution modèle lorsque β augmente (Fig. 5.16). Cette tendance a aussi été constatée lors de validation du modèle macroscopique $\langle k \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ (Fig. 6.4). Puis, pour C_{ε_w} compris entre 0.5 et 2, l'erreur \mathbb{E}_3 sur la dissipation visqueuse homogénéisée ne dépend quasiment pas de β et elle croît lorsque C_{ε_w} s'approche de 0.5. En effet, l'évolution de référence de la dissipation de sillage est sensiblement décroissante dans les dix premiers diamètres hydrauliques à partir de l'entrée du canal. Or la constante C_{ε_w} influe directement sur la pente de l'évolution modèle de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ ¹. Plus C_{ε_w} est proche de 0, plus l'erreur est prononcée dans la zone d'entrée du canal. Pour $C_{\varepsilon_w} > 2$, l'erreur \mathbb{E}_3 sur la dissipation de sillage augmente avec C_{ε_w} et β (Fig. 6.6(d)).

L'optimisation des coefficients de modèle est effectuée en recherchant le minimum de la fonction d'erreur globale \mathbb{E}_4 . Comme les niveaux d'erreur \mathbb{E}_3 sont tous approximativement inclus dans le même intervalle, nous imposons des facteurs de pondération tous égaux à 1.

¹La condition $C_{\varepsilon_w} = 0$ implique que la pente de l'évolution modèle de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ au point z_{M_0} est nulle.

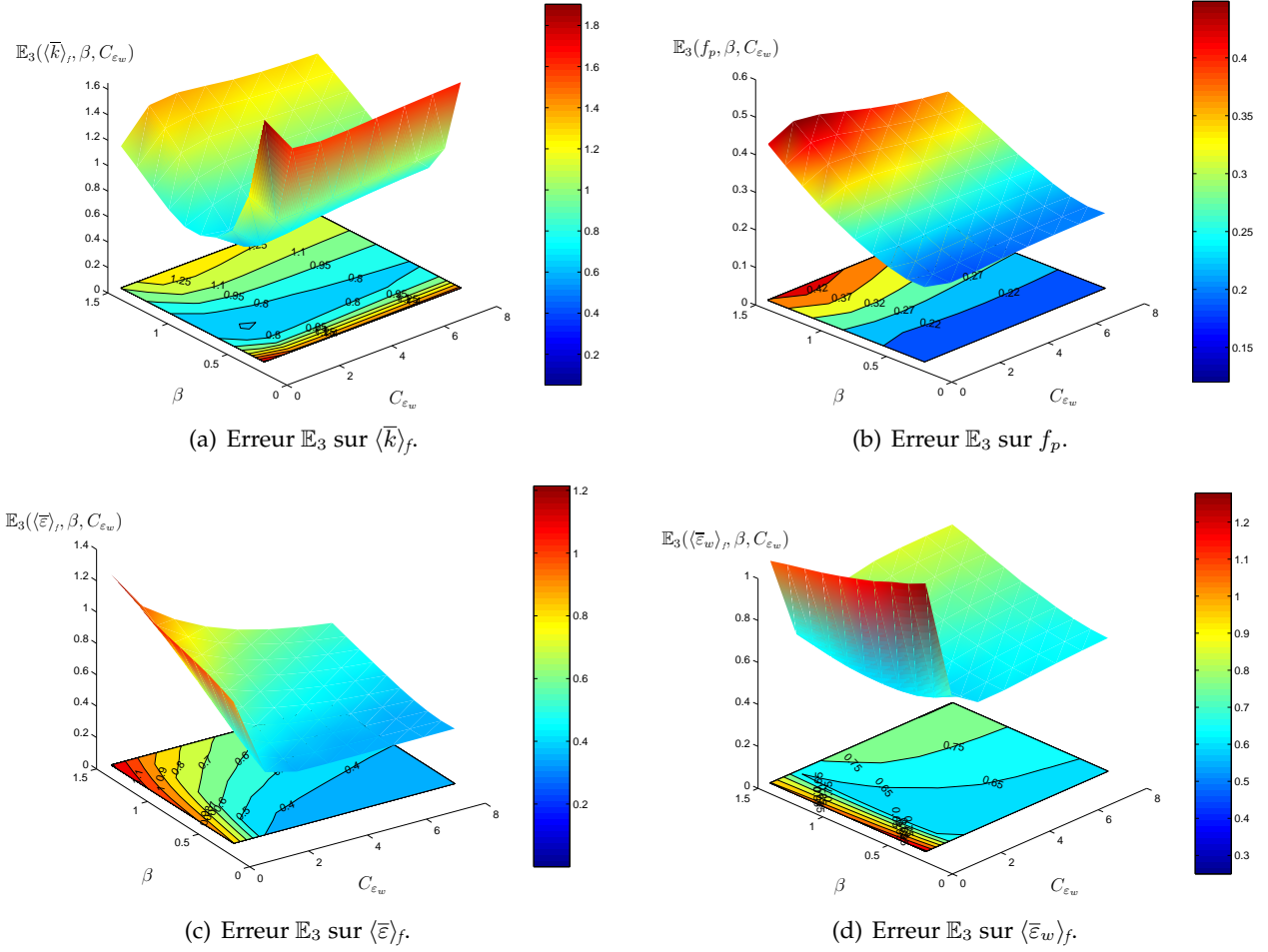


FIG. 6.6: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de la fonction d'erreur multi-cas \mathbb{E}_3 pour $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.4; 2] \times [0.5; 8]$.

L'optimisation de l'erreur globale ne privilégie alors pas l'optimisation de l'erreur \mathbb{E}_3 sur une quantité plutôt qu'une autre

$$p_{\langle \bar{k} \rangle_f} = p_{f_p} = p_{\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f} = p_{\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f} = 1. \quad (6.16)$$

La figure 6.7 indique que la fonction \mathbb{E}_4 est très grande pour les faibles valeurs de C_{ε_w} (c'est à dire $C_{\varepsilon_w} \lesssim 1$) ainsi que pour les fortes valeurs de β (ie. $\beta \gtrsim 1$). Le minimum de cette fonction est clairement identifié. Il correspond au couple de coefficients :

$$(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.6, 2.4). \quad (6.17)$$

6.1.3 Optimisation des paramètres du modèle macroscopique pour les écoulements turbulents en tube à section circulaire

Nous reprenons l'optimisation précédente en changeant la géométrie de référence. Nous travaillons maintenant sur la base de calculs en tubes à section circulaire. Les calculs de référence sont décrits dans le tableau 6.3.

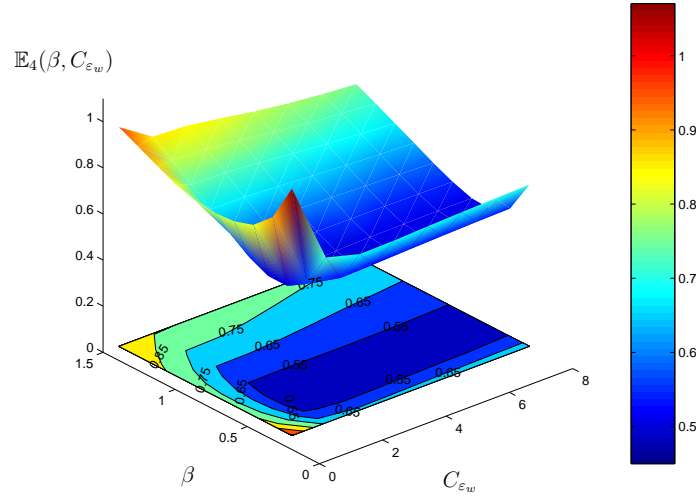


FIG. 6.7: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : étude de la fonction d'erreur globale \mathbb{E}_4 pour $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.4; 2] \times [0.5; 8]$.

| $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f^{3/2}}{(\langle \bar{\varepsilon}_0 \rangle_f D_H)}$ | $\frac{\langle \bar{k}_0 \rangle_f}{\langle \bar{k}_\infty \rangle_f}$ | 1 | 3 | 9 |
|---|--|--|--|--|
| | $\frac{1}{10}$ | | | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ |
| $\frac{1}{25}$ | | $Re = 5 \times 10^4$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |
| $\frac{1}{100}$ | | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ | $Re = 5 \times 10^4$ $Re = 10^5$ $Re = 10^6$ |

TAB. 6.3: Simulations d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : récapitulatif des calculs menés avec le code CAST3M.

De plus, nous employons les paramètres de calculs suivant :

- le domaine de calcul s'étend de $z_{M_0}/D_H = 2$ à $z_{M_s}/D_H = 70$,
 - il est décomposé suivant un maillage régulier de 200 éléments,
 - les conditions limites d'entrée sur $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ correspondent aux valeurs issues des évolutions de référence,
 - le coefficient de frottement est déterminé à partir de l'expression (6.4) (sa valeur à l'entrée diffère de la valeur de référence).
- (6.18)

La fonction d'erreur multi-cas \mathbb{E}_3 est tracée en se limitant au domaine² $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.3; 1.2] \times$

²Cette limitation de domaine correspond en fait à une mauvaise convergence des calculs pour des valeurs de

[0.5; 8] (Fig. 6.8). Les comportements observés sont qualitativement identiques à ceux précédemment décrits pour la géométrie du canal plan.

1. La surface décrite par $\mathbb{E}_3(\langle \bar{k} \rangle_f, \beta, C_{\varepsilon_w})$ sur le domaine $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.3; 1.2] \times [0.5; 8]$ décrit une vallée pour des valeurs de β proches de 0.6 lorsque C_{ε_w} est petit (*ie.* proche de 0.5) et pour des valeurs de β proches de 0.4 lorsque C_{ε_w} est grand (*ie.* proche de 8).
2. L'erreur multi-cas sur le coefficient de frottement dépend peu de C_{ε_w} . Par contre, elle augmente avec β .
3. L'erreur \mathbb{E}_3 sur $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ présente une vallée très localisée autour de la valeur $C_{\varepsilon_w} = 1.8$. Nous soulignons aussi que cette erreur est croissante par rapport à β .
4. Enfin, pour la dissipation de sillage, la vallée est plus étendue : elle correspond à des valeurs de C_{ε_w} comprises entre 1.5 et 3.5 approximativement. Pour cette grandeur, l'erreur dépend peu de β .

Pour rester cohérent avec l'analyse précédente, les coefficients de pondération dans la définition de la fonction d'erreur globale sont définis égaux à 1. A partir de la figure 6.9, nous remarquons que la forme de la surface de réponse de la fonction \mathbb{E}_4 est grossièrement identique à celle décrite dans l'étude du canal plan. Par contre, la localisation de son minimum ne coïncide pas exactement avec le couple de valeurs donné par (6.17). L'optimisation «brute» à partir de la base d'écoulements turbulents dans un tube à section circulaire conduit à :

$$(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.35, 1.8). \quad (6.19)$$

Cependant, de notre point de vue, deux grandeurs sont d'un intérêt plus important au sens physique, à savoir $\langle \bar{k} \rangle_f$ ainsi que f_p . Nous soulignons que pour la géométrie du canal plan, le couple de valeurs déduit de l'optimisation correspondait approximativement au couple de valeurs qui minimisait aussi l'erreur sur $\langle \bar{k} \rangle_f$ et sur f_p (Figs 6.6(a)-(b) et 6.7). Pour la géométrie du tube, le couple de valeurs introduit en (6.20) ne se situe pas dans la vallée décrite par l'erreur $\mathbb{E}_3(\langle \bar{k} \rangle_f, \beta, C_{\varepsilon_w})$. Nous suggérons alors d'augmenter la valeur du coefficient β à 0.5, tout en conservant l'autre valeur $C_{\varepsilon_w} = 1.8$. L'erreur multi-cas sur la dissipation de sillage est pratiquement insensible à ce changement (Fig.6.8(d)). Les erreurs multi-cas sur $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et sur f_p sont aggravées : elles augmentent respectivement d'environ 14% et 20%. Par contre l'erreur multi-cas sur $\langle \bar{k} \rangle_f$ diminue d'environ 10%. L'erreur sur f_p restant faible, cette réduction de l'erreur multi-cas sur $\langle \bar{k} \rangle_f$ nous incite à utiliser le couple de valeur :

$$(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 1.8). \quad (6.20)$$

β inférieures à 0.3.

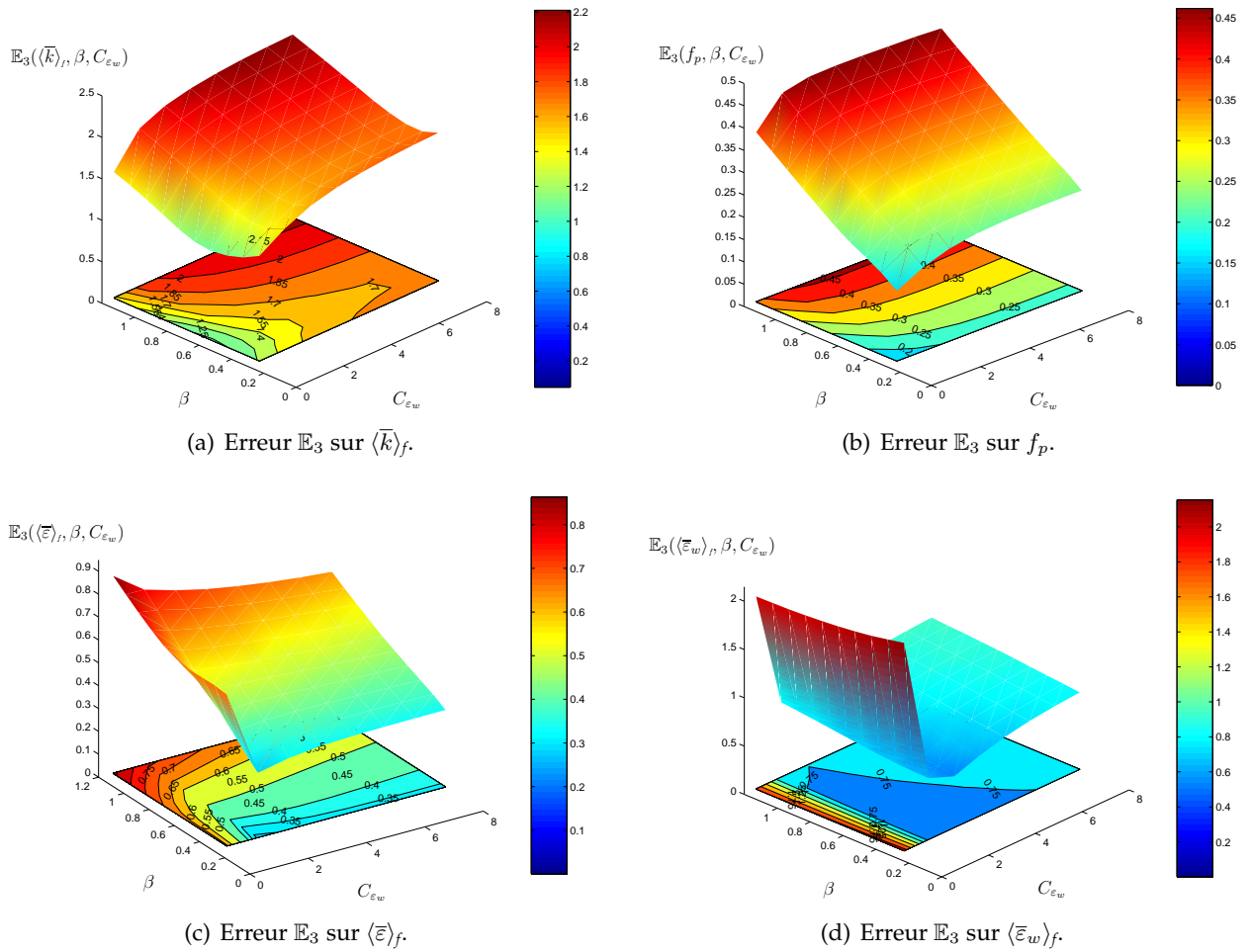


FIG. 6.8: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : étude de la fonction d'erreur multi-cas \mathbb{E}_3 pour $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.3; 1.2] \times [0.5; 8]$.

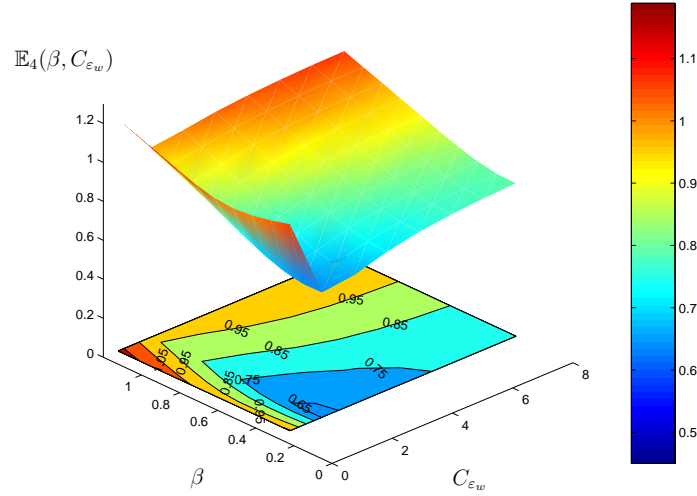


FIG. 6.9: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : étude de la fonction d'erreur globale \mathbb{E}_4 pour $(\beta, C_{\varepsilon_w}) \in [0.3; 1.2] \times [0.5; 8]$.

6.1.4 Discussion sur les variations des coefficients du modèle macroscopique

Nous avons montré au cours de l'étude de sensibilité que les paramètres β et C_{ε_w} influent sur la longueur d'établissement de l'écoulement, longueur pour laquelle les équilibres de niveaux et de formes sont atteints. Cette longueur d'établissement dépend de plusieurs paramètres comme le nombre de Reynolds de l'écoulement et la géométrie du milieu stratifié considéré. En étudiant deux géométries différentes, il a été constaté que les paramètres β et C_{ε_w} devaient être légèrement modifiés pour reproduire au mieux des écoulements turbulents caractérisés par le même nombre de Reynolds, mais intervenant dans des géométries différentes :

- pour un canal plan : $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.6, 2.4)$; (6.21)

- pour un tube à section circulaire : $(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 1.8)$. (6.22)

De notre point de vue, cette variation est en très grande partie liée à la variation de la longueur d'établissement entre les deux géométries étudiées. De plus cette longueur d'établissement est liée à une échelle de longueur du milieu étudié. De la même façon que Flick et *al.* [31] ainsi que Pedras et De Lemos [73] utilisent la racine carrée de la perméabilité (en tant qu'échelle de longueur du milieu poreux) pour modéliser la production de sous-filtre (voir section 5.1.1), nous pensons que ce paramètre pourrait intervenir dans la définition des coefficients β et C_{ε_w} . Pour les deux géométries considérées, nous comparons cette échelle de longueur. La perméabilité d'un canal plan est donnée par

$$K_{\text{canal plan}} = \frac{D_H^2}{96}, \quad (6.23)$$

et celle d'un tube à section circulaire par

$$K_{\text{tube}} = \frac{D_H^2}{64}. \quad (6.24)$$

Le rapport des échelles de longueurs définies à partir des perméabilités fournit :

$$\sqrt{\frac{K_{\text{tube}}}{K_{\text{canal plan}}}} = \sqrt{\frac{96}{64}} \simeq 1.2. \quad (6.25)$$

D'après les résultats exhibés en (6.21) et (6.22), nous constatons :

$$\frac{\beta_{\text{canal plan}}}{\beta_{\text{tube}}} = 1.2 \simeq \sqrt{\frac{K_{\text{tube}}}{K_{\text{canal plan}}}}. \quad (6.26)$$

Cette observation constitue une piste pour poursuivre la généralisation du modèle macroscopique de turbulence.

6.2 Exploitation du modèle macroscopique de turbulence

Dans cette section, nous souhaitons vérifier la capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ dans les deux géométries qui ont été considérées au cours de cette étude.

6.2.1 Capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements turbulents en canal plan

Nous considérons arbitrairement trois écoulements en canal plan n'appartenant pas à la base d'optimisation décrite par les tableaux 6.1.2 et 6.1.2. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{SIM_TEST_1} : Re = 7 \times 10^4, \quad \langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 2.7, \quad L_{tM_0}^* = 2 \times 10^{-3}; \\ \text{SIM_TEST_2} : Re = 4.8 \times 10^5, \quad \langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 4, \quad L_{tM_0}^* = 0.03; \\ \text{SIM_TEST_3} : Re = 7 \times 10^5, \quad \langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 6.4, \quad L_{tM_0}^* = 0.14. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nous utilisons à nouveau les paramètres généraux de calculs décrits par (6.10) et nous considérons le couple de coefficients issu de l'optimisation, à savoir

$$(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.6, 2.4). \quad (6.28)$$

Les erreurs intégrées \mathbb{E}_2 et leur somme (pondérée par 4) sont ensuite calculées en comparant les résultats fournis par le modèle aux résultats de référence. Cette somme est plus particulièrement calculée à partir de l'expression :

$$S(\mathbb{E}_2) = \frac{1}{4} \sum_{\xi \in (\langle \bar{k} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, f_p)} \mathbb{E}_2(\xi, 0.6, 2.4). \quad (6.29)$$

Ces différents indicateurs d'erreurs sont réunis dans le tableau 6.4. Tout d'abord, la somme pondérée $S(\mathbb{E}_2)$ est équivalente à une erreur globale \mathbb{E}_4 restreinte à un unique écoulement. Ainsi, pour le cas SIM_TEST_1, le niveau d'erreur décrit par cette somme pondérée est proche du minimum d'erreur \mathbb{E}_4 obtenu à partir de la base d'optimisation. Pour les cas SIM_TEST_2 et SIM_TEST_3, ce niveau d'erreur «moyenne» se dégrade. Plus précisément, en osculant les erreurs intégrées, nous remarquons que le maximum d'erreur intégrée est unanimement pour chaque cas obtenu pour l'évolution de l'énergie cinétique turbulente

| | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{k} \rangle_f, 0.6, 2.4)$ | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, 0.6, 2.4)$ | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, 0.6, 2.4)$ | $\mathbb{E}_2(f_p, 0.6, 2.4)$ | $S(\mathbb{E}_2)$ |
|------------|---|---|---|-------------------------------|-------------------|
| SIM_TEST_1 | 0.7 | 0.16 | 0.41 | 0.21 | 0.37 |
| SIM_TEST_2 | 1.36 | 0.43 | 0.44 | 0.26 | 0.62 |
| SIM_TEST_3 | 1.18 | 0.56 | 0.81 | 0.36 | 0.72 |
| SIM_REF_1 | 0.49 | 0.27 | 0.13 | 0.3 | 0.3 |
| SIM_REF_2 | 0.33 | 0.21 | 0.17 | 0.13 | 0.21 |
| SIM_REF_3 | 0.63 | 0.3 | 0.41 | 0.24 | 0.39 |
| SIM_REF_4 | 0.18 | 0.21 | 0.23 | 0.11 | 0.18 |

TAB. 6.4: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : description des erreurs intégrées et de leur somme pondérée (Eq. (6.29)) pour les trois écoulements «tests» SIM_TEST_1, SIM_TEST_2, SIM_TEST_3 et pour les quatre écoulements de référence SIM_REF_1, SIM_REF_2, SIM_REF_3, SIM_REF_4.

(Tab. 6.4). Par contre, le minimum d'erreur intégrée est atteint pour le coefficient de frottement pour les cas SIM_TEST_2 et SIM_TEST_3, alors qu'il est atteint pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ pour le cas SIM_TEST_1.

Dans cette description progressive des erreurs, du niveau le plus global au niveau le plus local, nous nous intéressons en dernier lieu à l'erreur local \mathbb{E}_1 . Pour les cas SIM_TEST_1, SIM_TEST_2, SIM_TEST_3, elle est respectivement représentée par les figures 6.10, 6.11 et 6.12. A partir de la juxtaposition des évolutions de référence et de celles fournies par le modèle, nous observons que les évolutions de $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et f_p sont en majorité bien reproduites. Plus précisément, l'erreur \mathbb{E}_1 est toujours incluse dans l'intervalle 0% – 5% pour $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et f_p et dans l'intervalle 0% – 10% pour $\langle \bar{k} \rangle_f$. L'étude de l'erreur locale pour les cas SIM_TEST_2 et SIM_TEST_3 confirme la dégradation des résultats constatée à partir de l'étude de l'erreur intégrée. Dans le cas SIM_TEST_2, le déplacement en amont du minimum de la dissipation de sillage est associé au déplacement en amont du maximum de $\langle \bar{k} \rangle_f$. Dans le cas SIM_TEST_3, la surestimation du coefficient de frottement au point z_{M_0} entraîne un mauvaise reproduction du comportement de la dissipation de sillage dans les premiers diamètres hydrauliques à partir de l'entrée du canal. Cela induit une erreur locale importante, proche, à son maximum, de 15%, sur $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$. L'évolution de l'énergie cinétique turbulente homogénéisée n'est alors pas qualitativement reproduite.

Nous avons montré la capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ à partir de trois écoulements n'appartenant pas à la base d'optimisation des coefficients du modèle.

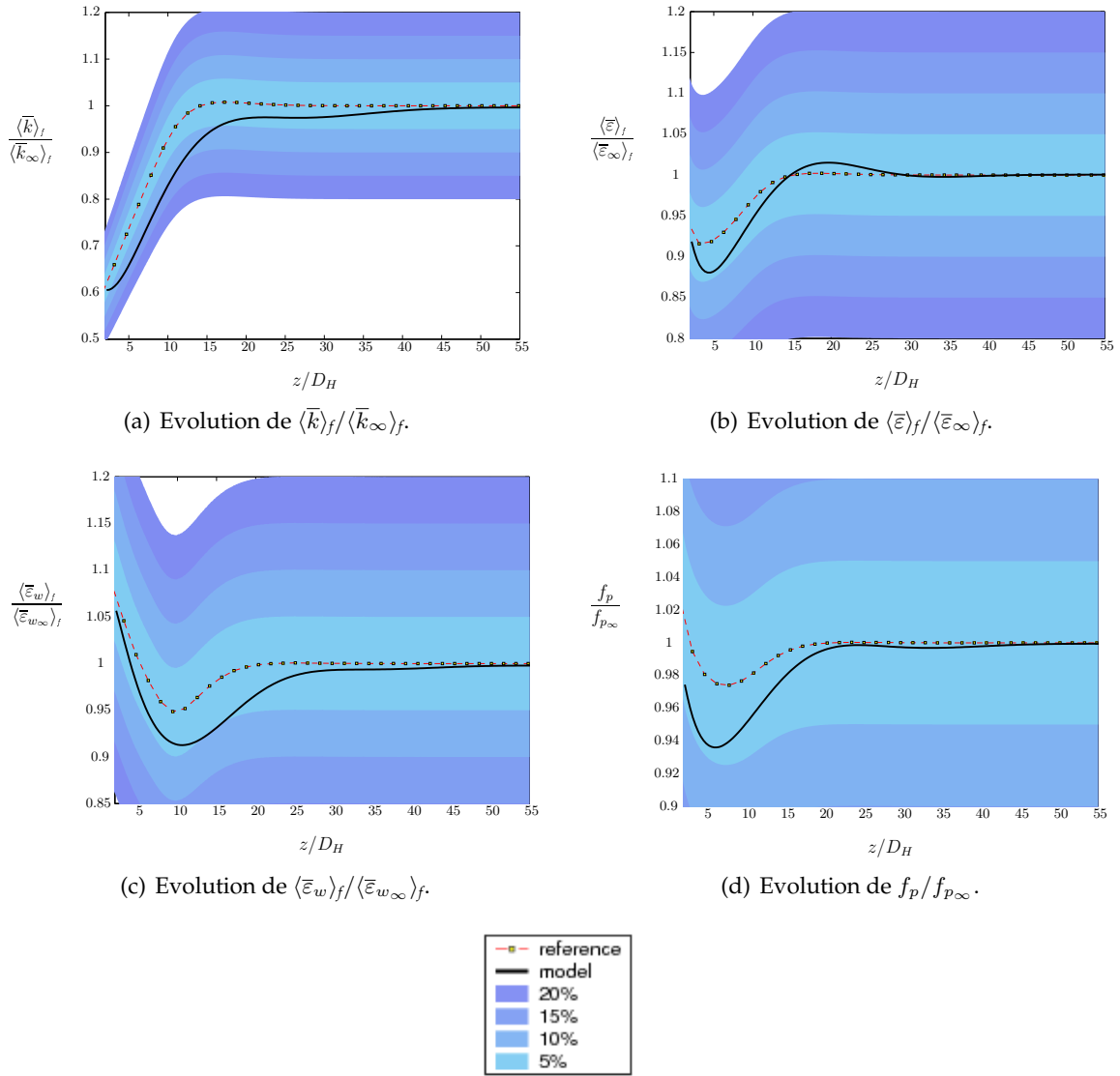


FIG. 6.10: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle pour le cas test SIM_TEST_1. Visualisation de l'erreur ponctuelle \mathbb{E}_1 suivant différents intervalles : 5%, 10%, 15%, 20%.

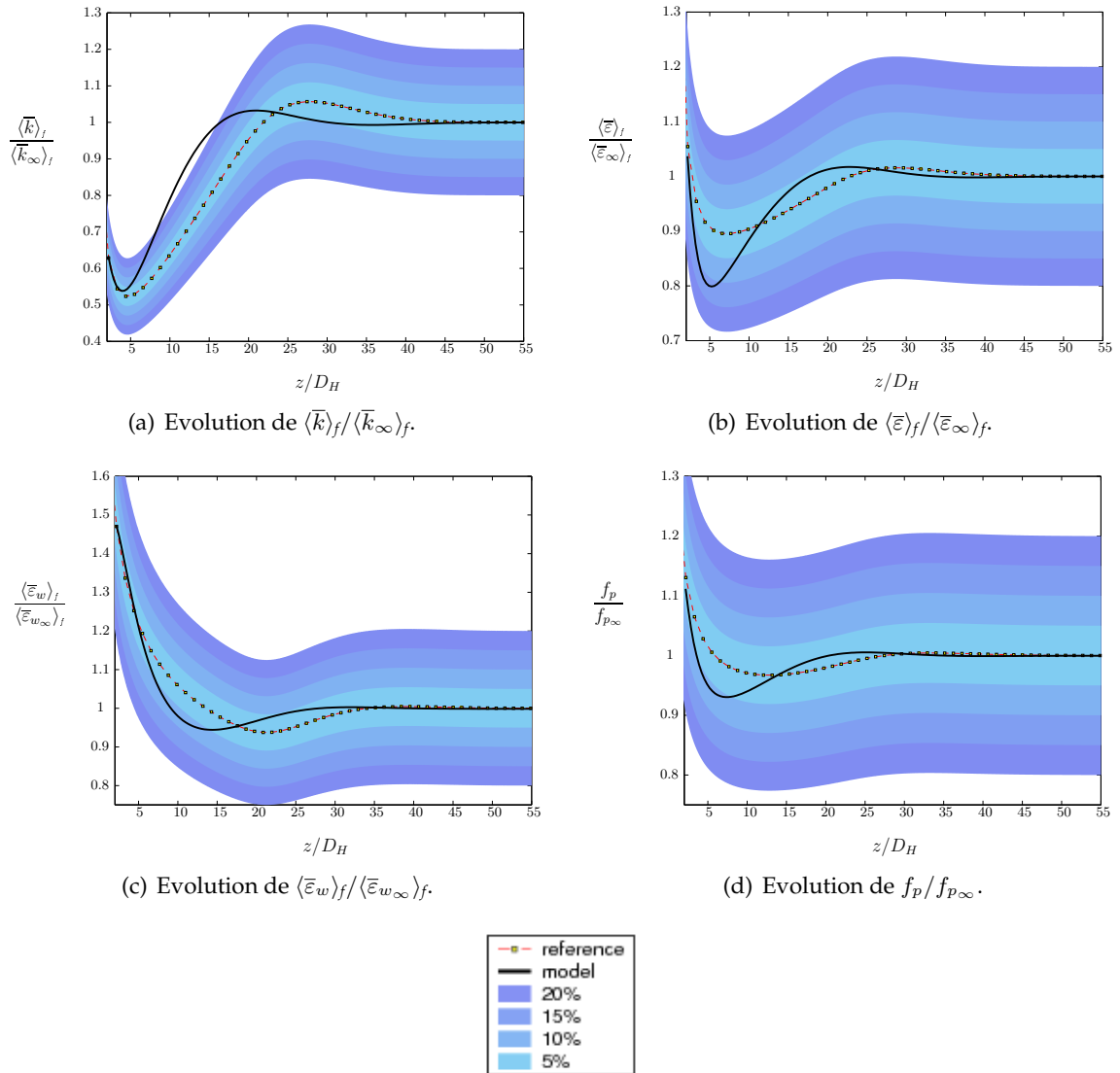


FIG. 6.11: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle pour le cas test *SIM_TEST_2*. Visualisation de l'erreur ponctuelle \mathbb{E}_1 suivant différents intervalles : 5%, 10%, 15%, 20%.

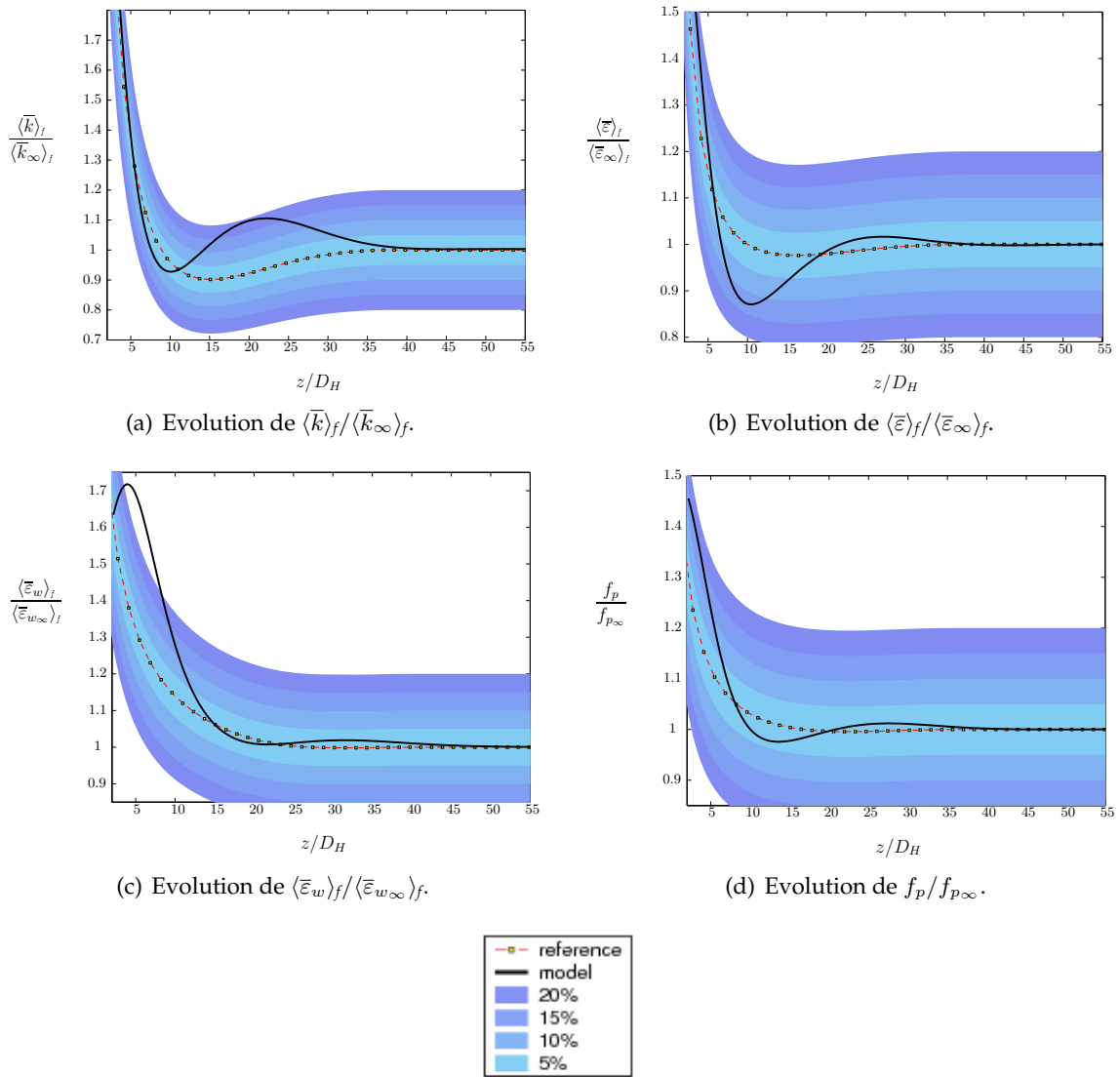


FIG. 6.12: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un canal bidimensionnel plan : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle pour le cas test *SIM_TEST_3*. Visualisation de l'erreur ponctuelle \mathbb{E}_1 suivant différents intervalles : 5%, 10%, 15%, 20%.

| | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{k} \rangle_f, 0.5, 1.8)$ | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f, 0.5, 1.8)$ | $\mathbb{E}_2(\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f, 0.5, 1.8)$ | $\mathbb{E}_2(f_p, 0.5, 1.8)$ | $S(\mathbb{E}_2)$ |
|------------|---|---|---|-------------------------------|-------------------|
| SIM_TEST_4 | 0.31 | 0.17 | 0.35 | 0.16 | 0.25 |
| SIM_TEST_5 | 1.14 | 0.36 | 0.41 | 0.13 | 0.51 |
| SIM_REF_1 | 0.44 | 0.24 | 0.22 | 0.1 | 0.25 |
| SIM_REF_2 | 0.62 | 0.3 | 0.26 | 0.15 | 0.33 |
| SIM_REF_3 | 0.71 | 0.35 | 0.37 | 0.2 | 0.41 |
| SIM_REF_4 | 0.78 | 0.14 | 0.15 | 0.08 | 0.29 |

TAB. 6.5: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : description des erreurs intégrées et de leur somme pondérée (Eq. (6.29)) pour les deux écoulements «tests» SIM_TEST_4 et SIM_TEST_5 ainsi que pour les quatre écoulements de référence SIM_REF_1, SIM_REF_2, SIM_REF_3, SIM_REF_4.

6.2.2 Capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence pour les écoulements turbulents en tube à section circulaire

Pour la géométrie du tube à section circulaire, nous allons aussi vérifier la capacité de prédiction du modèle macroscopique de turbulence. Pour cela nous choisissons arbitrairement deux écoulements qui ne font pas partie de la base d'optimisation décrite par le tableau 6.3. Ils sont définis par :

$$\begin{aligned} \text{SIM_TEST_4} : Re = 4 \times 10^4, \langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 4.8, L_{tM_0}^* = 2 \times 10^{-2}; \\ \text{SIM_TEST_5} : Re = 2 \times 10^5, \langle \bar{k}_0 \rangle_f / \langle \bar{k}_\infty \rangle_f = 2.6, L_{tM_0}^* = 0.2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Nous utilisons à nouveau les paramètres de calculs décrits pas (6.18) et nous considérons le couple de coefficients issu de l'optimisation, à savoir

$$(\beta, C_{\varepsilon_w}) = (0.5, 1.8). \quad (6.31)$$

Les erreurs intégrées \mathbb{E}_2 et leur somme (Eq. (6.29)) sont calculées en comparant les résultats fournis par le modèle aux résultats de référence. Ces différents indicateurs d'erreurs sont réunis dans le tableau 6.5. Nous constatons ainsi à partir des valeurs de la somme $S(\mathbb{E}_2)$ que l'erreur totale commise sur les deux écoulements considérés est inférieure au minimum d'erreur que nous avons obtenu sur la base d'optimisation (Fig 6.9). Les erreurs intégrées sur $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ et f_p sont faibles. Par contre l'erreur sur $\langle \bar{k} \rangle_f$ est assez conséquente pour le cas SIM_TEST_5. En analysant l'erreur locale sur chaque grandeur, nous retrouvons pour ce cas (Fig. 6.14) un comportement proche de celui observé pour la géométrie du canal plan (cas SIM_TEST_3, voir Fig. 6.12), à savoir que la dissipation de sillage augmente dans les premiers diamètres hydrauliques de la simulation. Pour l'autre géométrie, nous avons expliqué ce comportement par la surestimation du coefficient de frottement au point d'entrée de la simulation macroscopique. Pour le cas SIM_TEST_5, f_p n'est pas surestimé. Toutes les grandeurs (sauf la dissipation de sillage) présente un comportement pertinent dans les premiers diamètres hydrauliques. Un seul point peut expliquer le comportement de $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$: il s'agit de l'indépendance du temps caractéristique τ_p à la turbulence.

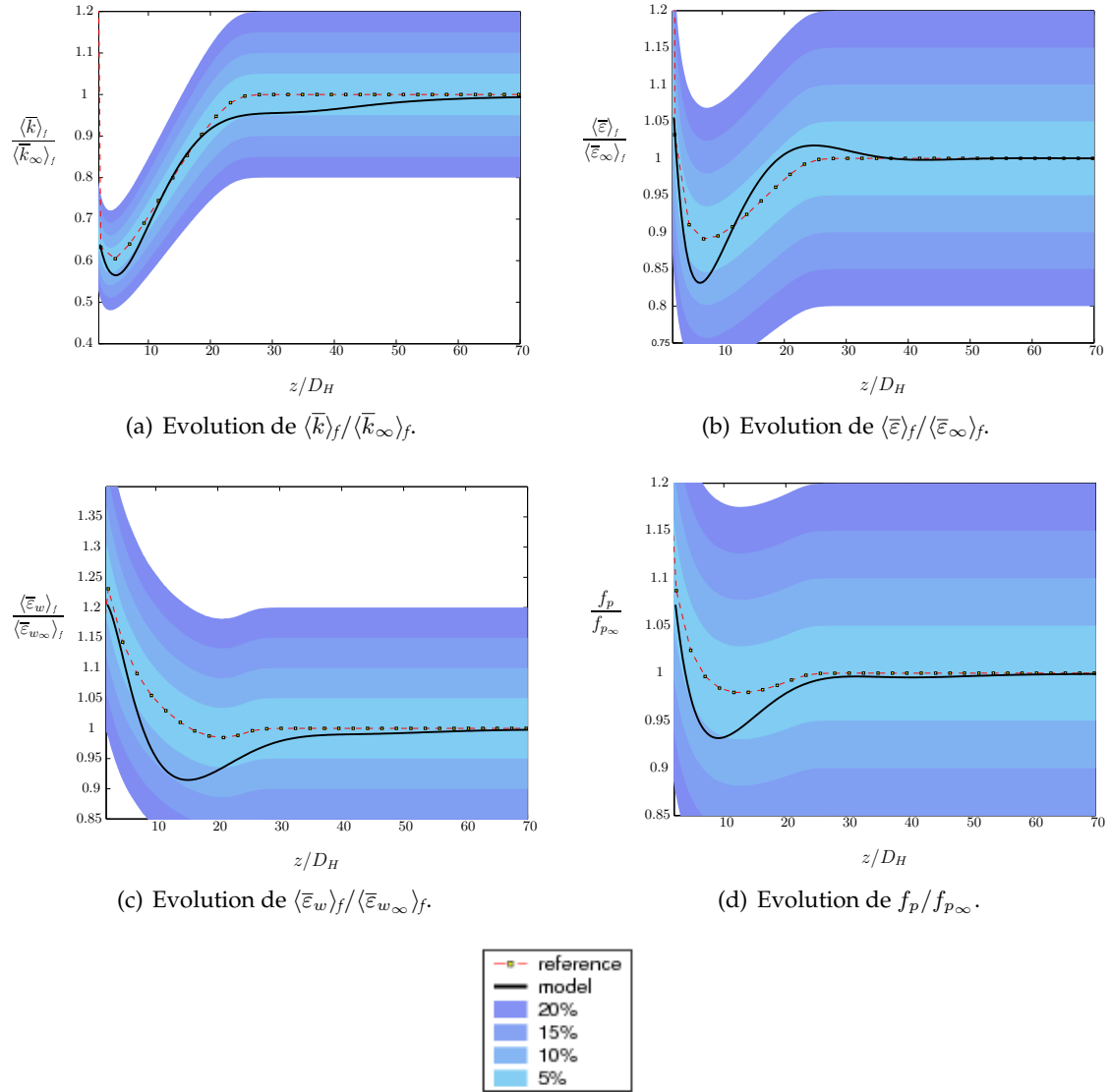


FIG. 6.13: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle pour le cas test *SIM_TEST_4*. Visualisation de l'erreur ponctuelle \mathbb{E}_1 suivant différents interalles : 5%, 10%, 15%, 20%.

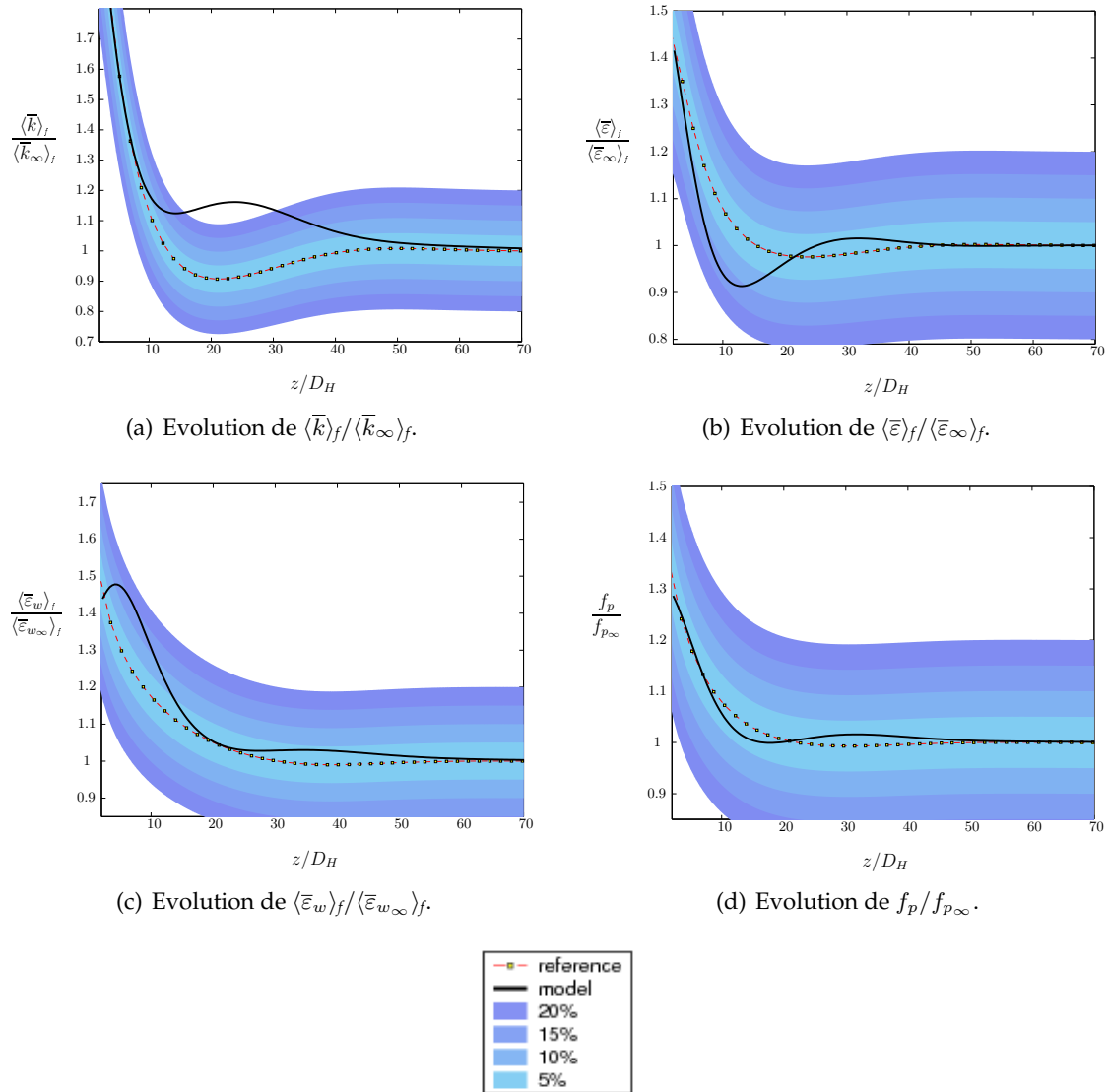


FIG. 6.14: Etablissement d'un écoulement turbulent dans un tube à section circulaire : capacité de prédiction du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$. Comparaison entre les évolutions de référence et les résultats du modèle pour le cas test *SIM_TEST_5*. Visualisation de l'erreur ponctuelle \mathbb{E}_1 suivant différents interalles : 5%, 10%, 15%, 20%.

6.3 Conclusion

Le modèle macroscopique complet a été évalué en suivant différentes étapes. Il a été montré que les paramètres β et C_{ε_w} permettaient de contrôler l'amplitude des oscillations et la localisation des extrema que présentent les différentes évolutions. En se basant sur un ensemble de calculs de référence, une optimisation globale a été réalisée pour déterminer le meilleur couple de coefficients $(\beta, C_{\varepsilon_w})$ pour des écoulements en canal plan et en tube à section circulaire. Nous avons constaté que le couple $(\beta, C_{\varepsilon_w})$ n'est pas universel et doit être quelque peu adapté lorsque l'on change de géométrie. Les «avantages» et «inconvénients» du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ sont récapitulés dans l'encadré suivant :

Avantages

- Modélisation du déséquilibre de la turbulence en prenant compte les déséquilibres de forme et de niveau.
- Modélisation de l'impact de la turbulence sur le coefficient de frottement f_p .

Inconvénients

- Résultats du modèle sensibles à la modélisation du coefficient de frottement dans les premiers diamètres hydrauliques de la simulation.
- Variabilité des coefficients du modèle $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f - f_p$ en fonction de la géométrie du VER.

Une voie d'amélioration du modèle a été suggérée concernant la variabilité constatée des coefficients β et C_{ε_w} suivant la géométrie du milieu considéré. L'utilisation d'une échelle de longueur caractéristique du milieu poreux semble être pertinente. Nous proposons en l'occurrence la racine carrée de la perméabilité du milieu.

Le travail présenté dans ce chapitre ne représente que les premiers pas vers une modélisation macroscopique complète de la turbulence dans un milieu chargé. Nous soulignons à cette occasion que la forme du modèle macroscopique établi pour un milieu chargé ne dégénère pas vers la forme d'un modèle macroscopique pour un milieu libre. Différents points essentiels demeurent à éclaircir pour améliorer la modélisation. Nous en proposons ici une liste non exhaustive, mais qui nous semble rassembler les étapes essentielles pour poursuivre ce travail.

1. **Extension à des géométries d'intérêt pratique.** Le travail d'extension à d'autres géométries doit être poursuivi. Notre étude a entièrement porté sur des milieux dont les pores ne communiquaient pas entre eux. Il faut alors vérifier que la modélisation proposée s'applique pour des milieux dont les pores communiquent. L'étude d'un écoulement longitudinal dans un faisceau de crayon à pas carré devrait à ce titre constituer une bonne évaluation de la pertinence de ce modèle (Fig 6.15). Par contre, l'étude d'un écoulement transverse, pour lequel la pression joue un rôle important dans le frottement, nécessite sûrement un enrichissement conséquent de la modélisation.
2. **Etude d'un écoulement présentant un cisaillement macroscopique constant.** En supposant que les gradients macroscopiques de vitesse étaient nuls, nous n'avons pas eu à étudier la modélisation du tenseur de Reynolds moyenné spatialement (voir Eq. (5.6)).

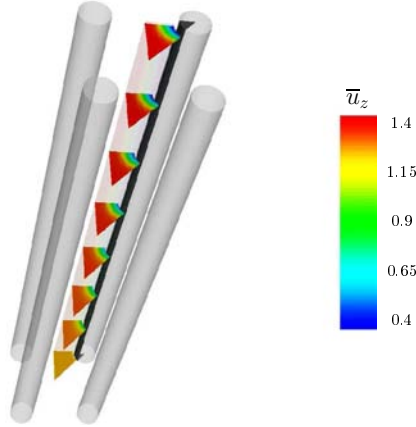


FIG. 6.15: Etablissement d'un écoulement turbulent longitudinal dans un faisceau de crayons à pas carré.

De la même manière, l'hypothèse d'homogénéité macroscopique dans l'équation de $\langle \bar{E}^m \rangle_f$ est en partie liée à l'absence de gradients macroscopiques de vitesse. Pour remédier à cela, l'ajout d'un terme source faisant intervenir ce gradient dans l'équation de transport de la dissipation de sillage semble être une solution pertinente. La figure 6.16 décrit le cas d'un écoulement entre deux plaques avec un cisaillement macroscopique constant. Les profils en entrée sont plats et l'établissement de l'écoulement est analysé. Cette étude permettra d'améliorer l'équation de transport de la dissipation de sillage. Elle permettra aussi d'évaluer l'expression de la viscosité turbulente macro-

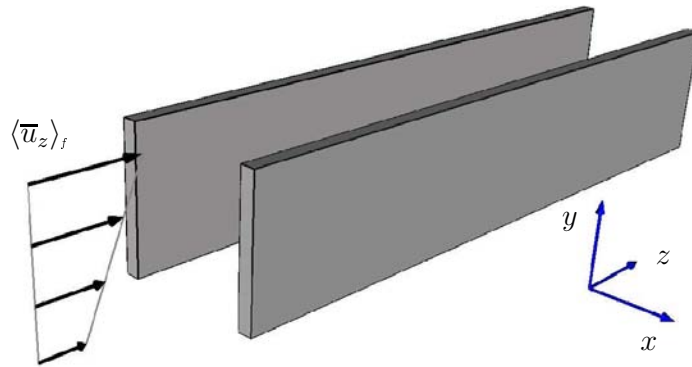


FIG. 6.16: Configuration d'un écoulement turbulent dans un canal plan bidimensionnel présentant un cisaillement macroscopique constant.

scopique ν_{t_ϕ} dans l'expression modèle de $\langle \bar{R}_{ij} \rangle_f$. La plupart des auteurs proposent par analogie avec la modélisation de la turbulence en milieu libre d'exprimer la viscosité turbulente en fonction de $\langle \bar{k} \rangle_f$ et $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ via l'expression :

$$\nu_{t_\phi} = C_\mu \frac{\langle \bar{k} \rangle_f^2}{\langle \bar{\epsilon} \rangle_f}. \quad (6.32)$$

Il convient de vérifier cette formulation

3. **Condition limite pour la dissipation de sillage.** Le rôle de la dissipation de sillage a été interprété dans la section 5.5. Cependant, de la même façon qu'il est difficile

d'imposer numériquement une valeur ou un profil pertinents pour la dissipation visqueuse à l'entrée d'un milieu, le même problème existe pour la dissipation de sillage. Une réflexion sur ce sujet devra être menée.

4. **Etude de singularité** Dans l'étude d'écoulements traversant un milieu chargé, la présence d'éléments singuliers du milieu doit pouvoir être prise en compte. Pour cela, nous proposons d'introduire des coefficients de perte de charge singulière qui peuvent naturellement être ajoutés au coefficient f_p . Par contre les temps caractéristiques associés aux phénomènes localisés de production doivent faire l'objet d'une attention toute particulière.

Conclusion

Pour étudier les écoulements turbulents traversant une structure solide, nous avons considéré le système comme étant un milieu poreux. Deux moyennes ont été utilisées : la moyenne spatiale permet d'établir un modèle de type poreux du milieu en opérant une homogénéisation spatiale du système, et la moyenne statistique permet d'étudier la turbulence en s'affranchissant de son caractère chaotique. Chaque opérateur de moyenne, une fois appliqué aux équations de Navier-Stokes, met en évidence des termes inconnus. Dans les deux cas, un terme de corrélation (respectivement statistique et spatiale) des fluctuations (respectivement statistiques et spatiales) est obtenu : il est couramment associé à la «diffusion» turbulente lorsqu'il est associé à la moyenne statistique et à la «dispersion» lorsqu'il est consécutif à l'emploi de la moyenne spatiale. Il tient compte des pertes d'informations dû au lissage statistique ou spatiale des variables caractérisant l'écoulement et notamment sa vitesse. Dans le cas spécifique de la moyenne spatiale, un autre terme est mis en avant, représentant les effets de tortuosité du milieu poreux. Il correspond au déficit d'informations imputable au processus de diffusion moléculaire suite à l'homogénéisation spatiale. Des modélisations pour chacun de ces termes inconnus existent, mais la problématique de cette étude requiert l'application conjointe des deux moyennes. La fin de ce chapitre a alors permis de clarifier cette problématique en justifiant notamment l'ordre d'application des moyennes : statistique puis spatiale.

L'étude a ensuite été orientée vers un niveau intermédiaire de modélisation, à savoir la modélisation locale de la turbulence. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à la classe des modèles $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ pour deux raisons. La première est que ces modèles sont très largement utilisés, faciles à mettre en oeuvre et ils sont capables de fournir de bons résultats dans des configurations géométriques simples. Ils permettent ainsi par exemple de restituer les mécanismes d'établissement d'un écoulement turbulent dans un canal. La seconde est que la méthodologie éprouvée pour élaborer ces modèles à l'échelle microscopique est par la suite utilisée pour établir un modèle de turbulence macroscopique.

Une méthodologie d'étude de la dispersion (spatiale) d'un scalaire passif au sein d'écoulements turbulents traversant des milieux poreux périodiques a été établie. Elle comprend notamment la résolution d'un problème de fermeture, à l'échelle microscopique, décrivant une fonction de dispersion. Il s'agit d'une généralisation de la méthode de Whitaker [16, 112]. Ainsi, cette dispersion est modélisée par un processus diffusif et le coefficient associé est déduit de calculs locaux restreints à un unique Volume Élémentaire Représentatif du milieu poreux. Cette méthodologie a ensuite été appliquée à l'étude de la dispersion thermique dans le cadre d'une approche découplée, ce qui permet de considérer, du point de vue de l'hydraulique, le flux thermique en paroi comme une condition limite imposée.

Deux modes distincts de dispersion ont alors été mis en évidence : la dispersion thermique passive, analogue à celle déduite de l'étude d'un scalaire passif, et la dispersion thermique active résultant de la prise en compte du flux thermique en paroi. Les problèmes de fermeture ont ensuite été résolus pour deux milieux stratifiés dont le VER correspond à une géométrie simple. Il a été montré que, suivant la direction longitudinale, les flux thermiques diffusifs (moléculaire et turbulent) à l'échelle macroscopique sont négligeables devant les flux thermiques dispersifs passif et actif. Ce résultat confirme ce qui avait été précédemment montré par Taylor [106]. De nombreuses perspectives peuvent être envisagées suite au travail réalisé dans ce chapitre. Tout d'abord une perspective en terme d'application du problème de fermeture en résolvant le problème de fermeture pour des écoulements plus complexes comme par exemple un écoulement transverse à un faisceau de crayons. Ensuite, il est, de notre point de vue, possible d'appliquer cette méthodologie pour étudier la dispersion de la quantité de mouvement dans un milieu poreux. Plusieurs précautions doivent être prises pour effectuer un traitement mathématique rigoureux des non-linéarités convectives. Mais le résultat permettrait par la même occasion de proposer une modélisation des pertes de charge par une approche similaire à la modélisation d'Ergun [28].

Pour modéliser à l'échelle macroscopique la turbulence, il est nécessaire d'identifier et d'interpréter les transferts d'énergie qui interviennent au sein de l'écoulement. Or la simple application de la moyenne spatiale à l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente ne permet pas de comprendre ces mécanismes. Nous avons alors proposé une analyse à deux échelles de la turbulence. Les équations de transport des contraintes de Reynolds macroscopique et de sous-filtre ont été formellement établies pour en déduire ensuite les équations de transports des énergies cinétiques turbulentes macroscopique et de sous-filtre. Un travail similaire a été réalisé pour les énergies associées au mouvement moyen. Tous les transferts ont ainsi pu être clairement mis en évidence. Plusieurs auteurs [30, 88] avaient précédemment avancé que seule la composante liée à la pression de la force de traînée jouait un rôle dans les transferts d'énergie. Or notre travail montre que c'est la totalité de la force de traînée qui entre en jeu dans les transferts entre les échelles macroscopique et de sous-filtre. Les transferts entre les écoulements moyen et turbulent sont par ailleurs classiquement régis par les mécanismes de production de la turbulence par cisaillement de l'écoulement moyen (en l'absence d'autres mécanismes). Différents scénarii ont été exposés pour commenter l'ensemble de ces transferts, mais seules des Simulations Numériques Directes ou des Simulations aux Grandes Echelles permettraient de statuer sur leur pertinence. Sous l'hypothèse que, dans un milieu stratifié, les échelles turbulentes de taille supérieures ou égales à l'échelle hydraulique ne peuvent subsister et que les gradients macroscopiques de vitesse sont nuls, il a été montré que l'énergie cinétique macroscopique du mouvement moyen transmettait à l'énergie cinétique de sous-filtre du mouvement moyen un montant d'énergie correspondant au produit entre la force de traînée et la vitesse macroscopique. Puis une partie de ce montant, que nous avons désignée par production de sous-filtre, est transmise à l'énergie cinétique turbulente de sous-filtre alors que l'autre partie, appelée dissipation de sillage, est dissipée en chaleur.

Une étude bibliographique a ensuite permis de poser les contraintes mathématiques et phénoménologiques liées à la modélisation macroscopique de la turbulence. Ainsi, et contrairement au milieu libre, l'état d'équilibre macroscopique de la turbulence correspond à un niveau non nul de l'énergie cinétique turbulente. Tout modèle doit pouvoir atteindre cet état. Pour cela, dans la construction d'un modèle macroscopique $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\epsilon} \rangle_f$, chaque étape correspondant aux choix de temps caractéristiques dans l'équation de transport de $\langle \bar{\epsilon} \rangle_f$ se doit d'aller dans ce sens. Nous nous sommes appuyés sur l'étude d'écoulements locaux si-

mulés puis moyennés spatialement pour justifier nos propositions. Suite à l'analyse détaillée des transferts d'énergie, nous avons choisi de modéliser deux termes supplémentaires : le coefficient de frottement et la dissipation de sillage. Ainsi, l'impact de la turbulence sur le coefficient de frottement est majoritairement représenté par la somme des dissipations visqueuse et de sillage. Un terme correctif, rendant compte du déséquilibre de l'énergie cinétique turbulente par rapport à son état d'équilibre a été ajouté. Il permet notamment de satisfaire à la contrainte mathématique précédemment décrite. L'expression proposée fournit de bons résultats dans des géométries simples. Cependant elle reste à évaluer dans un cadre plus général. Devant le peu d'informations dont nous disposions à propos de la dissipation de sillage, une équation de transport a été proposée. Cette équation modèle est introduite seulement dans le cadre d'écoulements en canaux. Pour qu'elle soit pertinente dans un cadre plus général, plusieurs améliorations sont nécessaires, notamment la prise en compte de gradients de vitesse macroscopique si ils existent et la prescription de conditions limites. Enfin, une expression pour le coefficient de diffusion turbulente a été proposée par analogie avec la littérature.

Le modèle de turbulence macroscopique établi comporte trois équations de transport (pour $\langle \bar{k} \rangle_f$, $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_f$ et $\langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$), un prédicteur dynamique pour le coefficient de frottement et deux coefficients de modélisation. Ces deux coefficients ont été optimisés pour des écoulements en canaux à partir d'une base de plus de 20 écoulements pour chaque configuration. Il a ainsi été montré que le jeu de coefficients n'était pas indépendant de la géométrie. Nous avons toutefois suggéré que l'utilisation de la perméabilité des milieux devrait permettre de trouver une correspondance entre les différents coefficients. Les bonnes capacités de prédiction du modèle proposé ont enfin été démontrées sur trois écoulements turbulents dans un canal plan et sur deux écoulements turbulents dans un tube à section circulaire. Pour les écoulements présentant des nombres de Prandtl peu différents de 1, l'extension de la modélisation dynamique du coefficient de frottement à celle du coefficient d'échange thermique devrait se faire simplement au travers des corrélations classiques de la littérature.

Les différentes perspectives pour l'amélioration du modèle de turbulence macroscopique ont été décrites dans les conclusions des chapitres 5 et 6. Toutefois une perspective plus globale apparaît évidente, à savoir la réalisation d'un dispositif expérimental qui permettrait non seulement d'étudier le comportement de la turbulence au sein d'un milieu poreux, de valider **à partir de résultats expérimentaux** le modèle macroscopique (ce qui passe en particulier par l'étude des longueurs d'établissement de la turbulence), mais aussi d'étudier les mécanismes de dispersion spatiale. Ce dispositif expérimental, sous la forme d'un faisceau de crayons, a déjà été imaginé et décrit dans la note technique [40] mais n'a pour l'instant pas pu voir le jour.

CONCLUSION

Bibliographie

- [1] I. Abalakin and B. Koobus. The behavior of two near-wall models for $k - \epsilon$ prediction of stall. Technical Report 4075, INRIA, November 2000.
- [2] H. P. Amaral Souto and C. Moyne. Dispersion in two-dimensionnal periodic porous media. part 2. dispersion tensor. *Phys. Fluids*, 9(8) :2253–2263, 1997.
- [3] B. V. Antohe and J. L. Lage. A general two-equation macroscopic turbulence model for incompressible flow in porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 40 :3013–3024, 1997.
- [4] R. Aris. On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 235 :67–77, 1956.
- [5] K. Azer. Taylor diffusion in time-dependant flow. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 48 :2735–2740, 2005.
- [6] M. J. Barrett and D. K. Hollingsworth. On the calculation of length scales for turbulent heat transfer correlation. *J. Heat Transf.*, 123 :878–883, 2001.
- [7] M. J. Barrett and D. K. Hollingsworth. Correlating friction velocity in turbulent boundary layers subjected to freestream turbulence. *AIAA J.*, 41(8) :1444–1451, 2003.
- [8] G. K. Batchelor. *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge University Press, 1953.
- [9] A. Bensoussan, J.L. Lions, and G. Papanicolaou. *Asymptotic analysis for periodic structures*. North-Holland Pub. Co, 1978.
- [10] M. F. Blair. Influence of free-stream turbulence on turbulent boundary layer heat transfer and mean profile development, Part I - Experimental data. *J. Heat Transf.*, 105 :33–40, 1983.
- [11] M. F. Blair. Influence of free-stream turbulence on turbulent boundary layer heat transfer and mean profile development, Part II - Analysis of results. *J. Heat Transf.*, 105 :41–47, 1983.
- [12] A. Bourgeat, M. Quintard, and S. Whitaker. Eléments de comparaison entre la méthode d’homogénéisation et la méthode de prise de moyenne avec fermeture. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 306 :463–466, 1988.

- [13] P. Bradshaw, D. H. Ferriss, and N. P. Atwell. Calculation of boundary layer development using the turbulent kinetic energy. *J. Fluid Mech.*, 28(3) :593–616, 1967.
- [14] H. Brenner. Dispersion resulting from flow through spatially periodic porous media. *Philos. Trans. R. Soc.*, 297(1430) :81–133, 1980.
- [15] R. G. Carbonell and S. Whitaker. Dispersion in pulsed system, part 2 : theoretical developments for passive dispersion in porous media. *Chem. Eng. Sci.*, 38(11) :1795–1802, 1983.
- [16] R. G. Carbonell and S. Whitaker. Heat and mass transfer in porous media. In J. Bear and M. Y. Corapcioglu, editors, *Fundamentals of transport phenomena in porous media*. M. Nijhoff Publishers, 1984.
- [17] M. Chandesris, G. Serre, and P. Sagault. A macroscopic turbulence model for flow in porous media suited for channel, pipe and rod bundle flows. In Rachid Bennacer, editor, *Progress in Computational Heat and Mass Transfer*, volume I, pages 357–362. ICHMT, 2005.
- [18] P. Chassaing. *Turbulence en mécanique de fluides : analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l’usage de l’ingénieur*. CEPADUES EDITIONS, 2000.
- [19] P. Cheng and C. T. Hsu. Application of Van Driest’s mixing length theory to transverse thermal dispersion in forced convective flow through a packed bed. *Int. Commun. Heat Mass Tran.*, 13 :613–625, 1986.
- [20] P. Cheng and D. Vortmeyer. Transverse thermal dispersion and wall channelling in a packed bed with forced convective flow. *Chem. Eng. Sci.*, 9 :2523–2532, 1988.
- [21] P. Cheng and H. Zhu. Effects of radial thermal dispersion on fully-developped forced convection in cylindrical packed tubes. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 30(11) :2373–2383, 1987.
- [22] K. Y. Chien. Predictions of channel and boundary layer flows with a low reynolds number turbulence model. *AAIA J.*, 20(1) :33–38, January 1982.
- [23] M. Ciofalo and M. W. Collins. $k - \epsilon$ predictions of heat transfer in turbulent recirculating flows using an improved wall treatment. *Numer. Heat Tr. B-Fund.*, 15 :21–47, 1989.
- [24] G. Comte-Bellot. *Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles*. Publications scientifiques et techniques du Ministère de l’Air, 1965.
- [25] B. J. Daly and F. H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 13(11) :2634–2649, 1970.
- [26] H. Darcy. *Les fontaines publiques de Dijon*. Dalmont, Paris, 1856.
- [27] G. De Marsily. *Hydrogéologie quantitative*. Masson, 1981.
- [28] S. Ergun. Fluid flow through packed column. *Chem. Eng. Prog.*, 48(2) :89–94, 1952.
- [29] A. J. A. Favre. The statistical equations of turbulent flows. In C.G. SPEZIALE T.B. GATSKI, S. SARKAR, editor, *Studies in Turbulence*. Springer-Verlag New York, 1991.

- [30] J. Finnigan. Turbulence in plant canopies. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :519–571, 2000.
- [31] D. Flick, A. Leslous, and G. Alvarez. Modélisation semi-empirique des écoulements et des transferts dans un milieu poreux en régime turbulent. *Int. J. of Refrigeration*, 26 :349–359, 2003.
- [32] H. Foudhil. *Développement d'un modèle numérique de dispersion atmosphérique de particules à l'échelle d'un paysage hétérogène*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2002.
- [33] U. Frisch. *The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1995.
- [34] K. Fukagata, K. Iwamoto, and N. Kasagi. Contribution of reynolds stress distribution to the skin friction in wall-bounded flows. *Phys. Fluids*, 14(11) :L73–L76, 2002.
- [35] S. Gant. *Development and application of a new wall function for complex turbulent flows*. PhD thesis, University of Manchester, Institute of Science and Technology, November 2002.
- [36] D. Getachew, W. J. Minkowycz, and J. L. Lage. A modified form of the $k - \epsilon$ model for turbulent flows of an incompressible fluid in porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 43 :2909–2915, 2000.
- [37] S. R. Green. Modelling turbulent air flow in a stand of widely-spaced trees. *PHOENICS J. Comp. Fluid Dyn. and Applic.*, 5 :294–312, 1992.
- [38] O. Grégoire. *Modèle multi-échelle pour des écoulements turbulents et compressibles en présence de forts gradients de densité*. PhD thesis, Université Aix-Marseille, 1997.
- [39] O. Grégoire. Remarques sur la turbulence permettant de retrouver quantitativement et qualitativement un certain nombre de résultats expérimentaux : le point de vue en 2003. Technical report, CEA/DEN/DM2S/SFME/LETR/RF/03-013/A, 2003.
- [40] O. Grégoire and F. Pinson. Expérience analytique de caractérisation des écoulements en faisceaux : expression du besoin. Technical Report SFME/LETR/PT/03-027/A, CEA, 2003.
- [41] P. E. Hancock and P. Bradshaw. The effect of free-stream turbulence on turbulent boundary layer. *J. Heat Transf.*, 105 :284–289, 1983.
- [42] F. H. Harlow and P. I. Nakayama. Turbulence transport equations. *Phys. Fluids*, 10(11) :2323–2332, 1967.
- [43] J. Herrero, F. X. Grau, J. Grifoll, and F. Giralt. A near wall $k - \epsilon$ formulation for high Prandtl number heat transfer. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 34(3) :711–721, 1991.
- [44] K. T. Hsiao and S. G. Advani. A theory to describe heat transfer during laminar incompressible flow of a fluid in periodic porous media. *Phys. Fluids*, 11(7) :1738–1748, July 1999.
- [45] C. T. Hsu and P. Cheng. Thermal dispersion in a porous medium. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 33(8) :1587–1597, 1990.
- [46] I. E. Idel'cik. *Memento des pertes de charge*. Eyrolles, 1969.

- [47] D. Jeandel, J. F. Brison, and J. Mathieu. Modeling methods in physical and spectral space. *Phys. Fluids*, 21(2) :169–182, 1978.
- [48] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 15 :301–314, 1972.
- [49] S. Kakac, R. K. Shah, and W. Aung, editors. *Handbook of single-phase convective heat transfer*. John Wiley and Sons, 1987.
- [50] D. L. Koch and J. F. Brady. Dispersion in fixed beds. *J. Fluid Mech.*, 154 :399–427, 1985.
- [51] A. N. Kolmogorov. On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 31(6) :538–540, 1941.
- [52] F. Kuwahara and A. Nakayama. Numerical determination of thermal dispersion coefficients using a periodic porous structure. *J. Heat Transf.*, 121 :160–163, 1999.
- [53] F. Kuwahara, A. Nakayama, and H. Koyama. A numerical study of thermal dispersion in porous media. *J. Heat Transf.*, 118 :756–761, 1996.
- [54] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique 6 : Mécanique des Fluides*. éditions MIR, 1971.
- [55] B. E. Launder. Heat and mass transport. In P. BRADSHAW, editor, *Topics in applied physics : Turbulence*, volume 12, pages 232–289. Springer Verlag, 1976.
- [56] B. E. Launder and N. D. Sandham, editors. *Closure strategies for turbulent and transitional flows*. Cambridge University Press, 2002.
- [57] B. E. Launder and B. I. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1 :131–138, 1974.
- [58] B. E. Launder and D. B. Spalding. *Lectures on mathematical models of turbulence*. Academic Press, London, 1972.
- [59] D. Laurence and V. Boyer. A shape function approach for high- and low-reynolds near-wall turbulence model. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 40 :241–251, 2002.
- [60] J. Liu, J. M. Chen, T. A. Black, and M. D. Novak. E - ϵ modelling of turbulent air flow downwind of a model forest edge. *Bound.-Layer Meteorol.*, pages 21–44, 1996.
- [61] G. W. Lowery and R. I. Vachon. The effect of turbulence on heat transfer from heat cylinders. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 18 :1229–1242, 1975.
- [62] N. N. Mansour, J. Kim, and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194 :15–44, 1988.
- [63] C. M. Marle. On macroscopic equations governing multiphase flow with diffusion and chemical reactions in porous media. *Int. J. Eng. Sci.*, 20(5) :643–662, 1982.
- [64] J.-M. Martinez, G. Arnaud, and F. Gaudier. Kalif : outils d'aide à la qualification et à l'optimisation des codes. rapport DM2S SFME/LETR/01-016/B, CEA, 2003.

- [65] T. Masaoka and Y. Takatsu. Turbulence model for flow through porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 39(13) :2803–2809, 1996.
- [66] R. Mauri. Dispersion, convection, and reaction in porous media. *Phys. Fluids A-Fluid*, 3(5) :743–756, 1991.
- [67] M. S. Mohamed and J. C. Larue. The decay power law in grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.*, 219 :195–214, 1990.
- [68] V. Morgan. The overall convection heat transfer from smooth circular cylinders. *Advances in Heat Transfer*, 11 :199–225, 1975.
- [69] C. Moyne, S. Didierjean, H. P. Amaral Souto, and O. T. Da Silveira. Thermal dispersion in porous media : one-equation model. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 43 :3853–3867, 2000.
- [70] A. Nakayama and F. Kuwahara. A macroscopic turbulence model for flow in a porous medium. *J. Fluid Eng.-T ASME*, 121 :427–433, 1996.
- [71] H. M. Nepf. Drag, turbulence, and diffusion in flow through emergent vegetation. *Water Resour. Res.*, 35(2) :479–489, 1999.
- [72] D. A. Nield. Alternative models of turbulence in a porous medium, and related matters. *J. Fluid Eng.-T ASME*, 123 :928–931, 2001.
- [73] M. H. J. Pedras and M. J. S. De Lemos. Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 44 :1081–1093, 2001.
- [74] F. Pinson, O. Grégoire, and O. Simonin. $k - \varepsilon$ modeling of turbulence in porous media based on a two-scale analysis. In Elsiever, editor, *International Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Measurements - ETMM6*. ERCOFTAC, 2005.
- [75] F. Pinson, O. Grégoire, and O. Simonin. Macroscale turbulence modeling for flows in media laden with solid structures. *submitted to C. R. Acad. Sci. Paris, Série II*, 2005.
- [76] F. Pinson, O. Grégoire, M. Quintard, M. Prat, and O. Simonin. Thermal dispersion mixed model in porous media : extension to turbulent flows and application to a stratified medium. *submitted to Int. J. Heat Mass Tran.*, 2004.
- [77] F. Pinson, O. Grégoire, and O. Simonin. $k - \varepsilon$ macro-scale modeling of turbulence based on two scale analysis in porous media. *submitted to Int. J. Heat Fluid Flow*, 2005.
- [78] O.A. Plumb and S. Whitaker. Dispersion in heterogeneous porous media. 1. local volume averaging and large scale averaging. *Water Resour. Res.*, 24(7) :913–926, 1988.
- [79] T. Poinsoot and D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. RT Edwards, 2001.
- [80] L. Prandtl. Über die ausgebildete turbulenz. *ZAMM*, 5(2) :136–139, 1925.
- [81] M. Quintard and S. Whitaker. One- and two-equation models for transient diffusion processes in two-phase systems. *Advances in Heat Transfer*, 23 :369–464, 1993.
- [82] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media : Volume-averaged equations, closure problems and comparison with experiment. *Chem. Eng. Sci.*, 48 :2537–2564, 1993.

- [83] M. Quintard and S. Whitaker. Convection, dispersion, and interfacial transport of contaminants : Homogeneous porous media. *Adv. Water Resour.*, 17 :221–239, 1994.
- [84] M. Quintard and S. Whitaker. Local thermal equilibrium for transient heat conduction : theory and comparison with numerical experiments. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 38(15) :2779–2796, 1994.
- [85] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media I : the cellular average and the use of weighting functions. *Transport Porous Med.*, 14 :163–177, 1994.
- [86] M. Quintard and S. Whitaker. Transport in ordered and disordered porous media II : generalized volume averaging. *Transport Porous Med.*, 14 :179–206, 1994.
- [87] M. R. Raupach, P. A. Coppin, and B. J. Legg. Experiments on scalar dispersion within a model plant canopy, part 1 : the turbulence structure. *Bound.-Layer Meteorol.*, 35 :21–52, 1986.
- [88] M. R. Raupach and A. S. Thom. Turbulence in and above plant canopies. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 13 :97–129, 1981.
- [89] H. Reichardt. Vollständige darstellung der turbulenten geschwindigkeitsverteilung in glatten leitungen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 31 :208–219, 1951.
- [90] W. C. Reynolds. Computation of turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 8 :183–208, 1976.
- [91] W. C. Reynolds, C. A. Langer, and S. C. Kassinos. Structure and scales in turbulence modeling. *Phys. Fluids*, 14(7) :2485–2492, 2002.
- [92] J. Rubinstein and R. Mauri. Dispersion and convection in porous media. *SIAM J. Appl. Math.*, 46(6) :1018–1022, 1986.
- [93] P. Sagaut. *Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluides incompressibles*. Springer, 1998.
- [94] J. Salles, J.-F. Thovert, R. Delannay, L. Prevors, J.-L. Auriault, and P. M. Adler. Taylor dispersion in porous media, determination of the dispersion tensor. *Phys. Fluids A-Fluid*, 5(10), October 1993.
- [95] R. Schiestel. Multiple-time-scale modeling of turbulent flows in one-point closure. *Phys. Fluids A-Fluid*, 30(3) :722–731, 1987.
- [96] R. Schiestel. *Les écoulements turbulents : modélisation et simulation*. Hermes, 2nd edition, 1998.
- [97] H. Schlichting and K. Gersten. *Boundary layer theory*. Springer, 8th revised and enlarged edition, 2000.
- [98] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Hermann, Paris, 1965.
- [99] I. Seginer, P. J. Mulhearn, E. F. Bradley, and J. J. Finnigan. Turbulent flow in a model plant canopy. *Bound.-Layer Meteorol.*, 10 :423–453, 1976.

- [100] W. T. Sha. An overview on rod-bundle thermal-hydraulic analysis. *Nucl. Eng. Des.*, 62 :1–24, 1980.
- [101] O. Simonin. Modélisation numérique des écoulements turbulents diphasiques à inclusions dispersées. Ecole de Printemps de Mécanique des Fluides Numériques, Aussois, 1991.
- [102] R. Smith. Diffusion in shear flows made easy : the Taylor limit. *J. Fluid Mech.*, 175 :201–214, 1987.
- [103] A. Soudnia, S. Didierjean, and C. Moyne. Transient dispersion in porous media : a comparison between exact and approximate solutions in a case study. *Transport Porous Med.*, 47 :245–277, 2002.
- [104] B. Stejes and Fernholz H.-H. Skin friction and turbulence measurements in a boundary layer with zero-pressure-gradient under the influence of high intensity free-stream turbulence. *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 23 :303–318, 2004.
- [105] G. Taylor. Dispersion of solute matter in solvent flowing slowly through a tube. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 219 :186–203, 1953.
- [106] G. Taylor. The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 223 :446–468, 1954.
- [107] K. A. Thole and D. G. Bogard. High freestream turbulence effects on turbulent boundary layers. *J. Fluid Eng.-T ASME*, 118 :276–284, 1996.
- [108] I. Toumi, A. Bergeron, D. Gallo, E. Royer, and D. Caruge. Flica-4 : a three-dimensional two-phase flow computer code with advanced numerical methods for nuclear applications. *Nucl. Eng. Des.*, 200 :139–155, 2000.
- [109] V. S. Travkin. Discussion : "Alternative models of turbulence in a porous medium, and related matters (D.A. Nield, 2001, *J. Fluid Eng.-T ASME* 123, pp. 928-931)". *J. Fluid Eng.-T ASME*, 123 :931–934, 2001.
- [110] E. R. Van Driest. On turbulent flow near a wall. *Journal of the aeronautical sciences*, pages 1007–1036, november 1956.
- [111] D. Vandromme. Turbulence modelling for compressible flows and implementation in Navier-Stokes solvers. *lecture series 1993-02, Von Kármán Institute for Fluid Dynamics*, 1993.
- [112] S. Whitaker. Diffusion and dispersion in porous media. *AIChE*, 13(3) :420–427, 1967.
- [113] S. Whitaker. *Theory and applications of transport in porous media : the method of volume averaging*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [114] J. D. Wilson. A second-order closure model for flow through vegetation. *Bound.-Layer Meteorol.*, 42 :371–392, 1988.
- [115] B. Wood, F. Cherblanc, M. Quintard, and S. Whitaker. Volume averaging for determining the effective dispersion tensor : closure using periodic unit cells and comparison with ensemble averaging. *Water Resour. Res.*, 39 :1154–1173, 2005.

- [116] Z.-G. Yuan, H. S. Wilbur, and K. S. Udell. Thermal dispersion in thick-walled tubes as a model of porous media. *Int. J. Heat Mass Tran.*, 34(11) :2715–2726, 1991.
- [117] F. Zanotti and R. G. Carbonell. Development of transport equations for multiphase systems 3 : application to heat transfer in packed beds. *Chem. Eng. Sci.*, 39(2) :299–311, 1984.

Résumé

Ce travail porte sur la modélisation à l'échelle macroscopique de la turbulence dans des milieux poreux. Cette problématique touche aussi bien le domaine des échangeurs de chaleur, des réacteurs nucléaires, ou celui des écoulements urbains, etc. Nous nous fixons pour objectif de ne décrire que de façon homogénéisée, en appliquant un opérateur de moyenne spatiale, des écoulements turbulents traversant une structure solide. Outre ce premier opérateur, l'utilisation de la moyenne statistique permet de s'affranchir du caractère pseudo-aléatoire de la turbulence. Ainsi, l'application successive de ces deux opérateurs de moyenne permet d'établir les équations bilan décrivant les écoulements considérés. Elle fait par ailleurs émerger deux problématiques majeures, à savoir la modélisation des effets de dispersion dus à la présence de la structure solide et la modélisation de la turbulence à l'échelle macroscopique (contraintes de Reynolds et dispersion turbulente). Dans ce but, nous nous appuyons notamment sur la modélisation à l'échelle locale de la turbulence et plus précisément sur les modèles RANS de type $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$. La méthodologie d'étude de la dispersion engendrée par la présence de la structure solide, obtenue dans le cadre de la «méthode de prise de moyenne spatiale», est généralisée aux écoulements turbulents. Son application inclut la simulation à l'échelle locale des écoulements turbulents dans un motif élémentaire de la structure solide. Appliquée aux écoulements en canaux, cette analyse montre que, même en présence de turbulence, la dispersion reste l'un des phénomènes dominants dans le contexte de la modélisation des écoulements à l'échelle macroscopique.

Une analyse selon deux échelles spatiales de l'écoulement nous a permis de comprendre le rôle prépondérant de la force de traînée dans les transferts d'énergie cinétiques inter-échelles. Les transferts s'opérant entre l'écoulement moyen et l'écoulement turbulent sont eux aussi formellement dérivés. Cette description multi-échelle permet de mieux appréhender la modélisation macroscopique de la turbulence et nous conduit à introduire les notions de production de sous-filtre et de dissipation de sillage. Un modèle de type $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ est alors établi : il est composé de trois équations bilan pour l'énergie cinétique turbulente, la dissipation visqueuse de la turbulence et la dissipation de sillage. De plus, un prédicteur dynamique pour le coefficient de frottement est proposé. Ce modèle a ensuite été appliqué avec succès à l'étude d'écoulements turbulents en canaux.

Mots clés : milieux poreux, turbulence, coefficient de frottement, dispersion, déséquilibre, modèle $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$, modèle macroscopique, prise de moyenne volumique, production de sous-filtre, dissipation de sillage, analyse multi-échelle.

Abstract

This work deals with the macroscopic modeling of turbulence in porous media. It concerns heat exchangers, nuclear reactors as well as urban flows, etc. The objective of this study is to describe in an homogenized way, by the mean of a spatial average operator, turbulent flows in a solid matrix. In addition to this first operator, the use of a statistical average operator permits to handle the pseudo-aleatory character of turbulence. The successive application of both operators allows us to derive the balance equations of the kind of flows under study. Two major issues are then highlighted, the modeling of dispersion induced by the solid matrix and the turbulence modeling at a macroscopic scale (Reynolds tensor and turbulent dispersion). To this aim, we lean on the local modeling of turbulence and more precisely on the $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ RANS models. The methodology of dispersion study, derived thanks to the volume averaging theory, is extended to turbulent flows. Its application includes the simulation, at a microscopic scale, of turbulent flows within a representative elementary volume of the porous media. Applied to channel flows, this analysis shows that even within the turbulent regime, dispersion remains one of the dominating phenomena within the macroscale modeling framework.

A two-scale analysis of the flow allows us to understand the dominating role of the drag force in the kinetic energy transfers between scales. Transfers between the mean part and the turbulent part of the flow are formally derived. This description significantly improves our understanding of the issue of macroscopic modeling of turbulence and leads us to define the sub-filter production and the wake dissipation. A $\langle \bar{k} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon} \rangle_f - \langle \bar{\varepsilon}_w \rangle_f$ model is derived. It is based on three balance equations for the turbulent kinetic energy, the viscous dissipation and the wake dissipation. Furthermore, a dynamical predictor for the friction coefficient is proposed. This model is then successfully applied to the study of turbulent channel flows.

Keywords : porous media, turbulence, friction coefficient, dispersion, non-equilibrium, $\bar{k} - \bar{\varepsilon}$ model, macroscopic model, volume averaging theory, sub-filter production, wake dissipation, multi-scale analysis