

THÈSE

*présentée
pour obtenir le titre de*

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Ecole Doctorale d'Informatique et de Télécommunications

Spécialité : Réseaux et Télécommunications

par

Wilfried Chauvet

ETUDE DES FILTRES LPTV NUMÉRIQUES APPLICATIONS AUX COMMUNICATIONS NUMÉRIQUES

Soutenue le 30 novembre 2004 devant le jury composé de :

M. Pierre DUHAMEL	Directeur de Recherche C.N.R.S au L.S.S, Gif sur Yvette	Rapporteur
M. Patrick FLANDRIN	Directeur de Recherche C.N.R.S à l'E.N.S Lyon	Rapporteur
M. Miguel A.LAGUNAS	Professeur Université Polytechnique de Catalogne	Rapporteur
M. Alban DUVERDIER	C.N.E.S Toulouse	Examineur
M. Bernard LACAZE (*)	Professeur I.N.S.A Toulouse	Examineur
M. Daniel ROVIRAS (*)	Professeur E.N.S.E.E.I.H.T Toulouse	Examineur
(*) Directeur de thèse		

Remerciements

Préambule : *Messieurs les membres du jury.*

En ouverture, avant toute autre considération subjective, je tiens à remercier très chaleureusement les membres du jury. Merci à vous Pierre DUHAMEL, Patrick FLANDRIN et Miguel LAGUNAS pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ce travail.

Monsieur LAGUNAS, je glisse sur l'occasion pour m'excuser du malheureux quiproquo qui nous a privé de votre présence lors du repas de thèse. J'aimerais aussi louer votre gentillesse particulièrement touchante et insister sur l'effort que vous avez accepté de faire en rapportant ce travail qui n'était pas dans votre langue maternelle.

Monsieur DUHAMEL, je tiens à vous remercier d'avoir accepté de présider le jury. J'aimerais vous confesser que malgré le contexte un tantinet stressant de l'attente de la soutenance, le court instant passé au restaurant à vos côtés m'a dévoilé une personnalité originale, intéressée et nourrissant des passions si diverses. Si rares sont les gens dont la rencontre, aussi éphémère soit-elle, nous invite à continuer de croire que l'univers professionnel peut se révéler être le berceau d'un réel épanouissement.

Monsieur FLANDRIN, à mon grand regret, votre présence à la soutenance a été sacrifiée au nom du réalisme administratif, mais je voudrais vous dire combien j'ai apprécié votre disponibilité par mail ainsi que vos efforts pour trouver une date convenant à l'ensemble des membres du jury.

Je tiens aussi à remercier le CNES pour avoir financé ces trois années de thèse ainsi que le laboratoire TéSA pour m'avoir accueilli durant tout ce temps.

Scène 1 : *Docteur vous dites ? La genèse d'un être nouveau ? Se laver les dents me semble toujours aussi nécessaire. Merci popa et moman.*

Une douleur lancinante me rappelle à la réalité. L'évidence est sans appel. J'ai dû boire bien plus que de raison. Mon premier réveil doctoral se gravera à tout jamais dans un esprit trouble et souffreteux. Oui, c'est bien cela, me voilà docteur. Noble raison pour justifier cet abus

de la veille ? Que de chemin parcouru depuis ces premiers élans oniriques ressurgissant du plus profond de ma mémoire. J'y ai troqué mille costumes. Vétérinaire un soir au chevet d'une brebis moribonde, instituteur sous le regard d'une classe intéressée et conquise, psychologue, acteur, joueur de tennis... Le temps a tout balayé, le destin a tranché. Les méandres de la vie m'ont promené. Les envies ont suivi l'ombre de mes pas. Maman, je ne serai jamais médecin. Tu peux toujours te consoler du titre de docteur. Papa, je ne serai jamais marin. Je m'aventure ici sur le sentier de vos silences, mais j'ignore à vrai dire quelles furent vos rêves cachés. Ressemblent ils seulement à ça ? Qu'il est bien lointain ce temps confortable où la simple présentation du carnet de notes suffisait à voir se dessiner un sourire satisfait gommant vos soucis passagers. Je sens déjà me menacer l'écueil du "sans vous je ne serais rien" et pourtant cette formule ne porte-t-elle pas une vérité troublante ? Les invitations à la confession sont si rares qu'il serait dommage de les boudier.

Sans fard, sans ambages, je vous adresse un profond merci. Merci pour votre dévouement sans limite. Merci pour votre soutien inconditionnel. Merci pour tous ces sacrifices qui ont permis de colorer notre enfance d'un quotidien confortable. Merci pour votre confiance éclairée. Merci pour toutes ces années de cours de tennis malgré mon évidente inaptitude à ce sport. Merci pour votre présence en ce 30 novembre. Merci pour avoir eu l'air heureux d'être à mes côtés ce jour là. Félicitations pour vos talents de comédiens si jamais vous vous y êtes ennuyés. Merci à vous Nancy et Romain d'avoir grandi à mes côtés et n'avoir jamais refusé notre lien fraternel. Merci à toi grand mère pour ces mètres de laine que tu as tricotés pour me protéger des caprices du temps. Je me permets de signaler que le CD de Radiohead qui accompagne l'écriture de ces remerciements achève sa dernière relance en Dm-G. Changement de musique, changement de ton. Que les éclats de rires résonnent à en briser les verres les plus fragiles.

Scène 2 : *Quel bel endroit que le Tésa. Le soleil y brille en été, la neige y tombe en hiver. Je m'y arrêteraï bien quelques instants.*

Et bien oui, parce que ces trois années, c'est surtout bon nombre de gens dont j'ai eu la chance de croiser la route. Echange éphémère parfois d'un simple clin d'oeil à un carrefour ou vraie complicité épluchant une à une les couches superficielles de la routine relationnelle. Je décroche un instant, avant de me plonger dans l'exercice césarien des remerciements personnalisés, pour vous remercier vous tous Tésaiens, Tésaiennes (il faut le lire en chantant, les partitions de ce désormais célèbre chant sont enterrées au panthéon du bureau 106 de P.Marthon) pour tous ces souvenirs passés à vos côtés que j'ai soigneusement installés dans un petit coin de ma tête, et

ils sont nombreux malgré mon inassiduité au rendez-vous séculaire de la cafèt. Daniel, Bernard ? Que diriez vous d'ouvrir le bal ? Ce fut un plaisir de travailler avec vous. Dans le grand éventail des possibles philosophies de l'encadrement, la vôtre me sied parfaitement. Une pincée de rigueur, une bonne dose de disponibilité et un grand soupçon de liberté. Vous avez su éclairer mon travail de votre esprit critique m'évitant toute noyade, tout en me laissant la liberté de me laisser porter par les courants de mon choix. Au delà même du plaisir scientifique, je voudrais louer votre gentillesse qui a participé à faire de ces trois années un quotidien agréable bien loin de ce stress qui attend traditionnellement les premières expériences professionnelles. Alban, pour le suivant tu t'y colles ? Je voudrais te remercier pour m'avoir proposé cette thèse pratiquement sur un plateau en cet âge d'or de l'industrie où la recherche laissait insensible le coeur des jeunes diplômés. Nul doute que sans ce coup de pouce, mon destin aurait pris toute autre forme et peut être le coeur lourd, aurais-je grossi les rangs d'une impersonnelle entreprise bien loin de mes aspirations profondes. Merci pour ton suivi régulier et l'intérêt que tu as porté à mon travail.

Vers où tourner les projecteurs à présent ? Il me faut décider d'une méthode. Par ordre alphabétique ? Par âge ? Bien mauvaise idée : je ne saurais que me risquer à un petit jeu imprécis des estimations d'âges ce qui ne manquerait pas de froisser qui j'aurais malencontreusement vieilli. Je vais épingle mes colocataires riquétiens. Un gros bisou à toi Olivier, mon contemporain. Nous y avons posé le pied ensemble sur cette embarcation parfois cahoteuse. Trois ans de face à face, les yeux dans les yeux à recenser avec application chaque jeudi matin chacune de tes nouvelles cicatrices de rugby. Trois ans de réflexion intense pour mettre au point la meilleure activité de détente : tantôt terriblement physique lorsque nous transformions le bureau en terrain géant de BookBall (the game that has to be played with a book and a ball), tantôt affreusement intellectuel lorsque nous lançons les campagnes géantes de risk. Un gros bisou à toi Virginie. Membre fondatrice du BookBall, à la dextérité redoutable armée de ton "SAR bleu 290 pages", comme ta volée haute de revers a pu nous faire souffrir. Ta sensibilité féminine a su vaporiser un peu de fraîcheur et d'ouverture d'esprit dans les préoccupations de notre bureau. Un gros bisou à toi Vincent. Quel plaisir de partager cette même passion obsessionnelle, déchirante et exclusive (j'espère que tu te reconnais Vincent) pour les filtres LPTV. Toi qui m'as demandé un exemplaire du manuscrit... Quelle ne fut pas ma surprise de voir que ce n'était pas pour caler un quelconque placard et que tu l'avais réellement lue. Je te remercie d'avoir été l'instigateur du concept de l'anglaise (allez juste une) au retour d'une escapade outremanche initiatique. Un gros bisou à toi Ana. Tu as su briser la routine parfois menaçante par tes apparitions imprévisibles

et nous inviter à relativiser lorsque tu nous contais avec tant d'émotions l'histoire tragique d'un guppy frappé par la main du destin. Et aussi, gros bisou à toi Hasan. Je ne saurais rendre compte avec quelques mots que d'un pâle aperçu de ta générosité et de ta gentillesse.

Je sors un instant du bureau et je vous propose une ballade dans les couloirs du TêSA. Là c'est le bureau 14, le bureau international. Il y règne une ambiance digne d'un plateau d'une émission de Christine Bravo. Mon dieu, je rougis de mes références culturelles parfois. En dignes représentants de la culture française, Mathieu et Fred. Mathieu, tu portes avec dignité l'étendard du patrimoine français. Depuis tant d'années, la liste est bien longue de tous ces moments passés ensemble. Je t'ai connu, tu n'étais pas plus grand que ça. Combien de fois avons nous repeint un nouveau monde barriolé de si belles intentions ? Faute de temps, le coeur serré, les paupières lourdes, il nous a parfois fallu sonner la retraite rejoindre un lit pressant et abandonner le monde à sa triste réalité. Fred, élégant homme du futur dont le téléphone a fleuri comme un prolongement naturel de la main et séducteur redoutable quand tombe la nuit. Tunisie, rougir tu ne dois point : Ridha est parfait en ambassadeur, tantôt conteur d'anecdotes exotiques, tantôt dépanneur de cigarettes tunisiennes au goût parfois très particulier parfumant la pièce d'effluves provençales et barbecuesques. Milena, merci pour ta bonne humeur, ton enthousiasme, ton attention, ta gentillesse, ton originalité (et pas que vestimentaire) et tout et tout et tout. Jung Pil, tu n'as pas épargné mes abdominaux considérant le nombre de fous rires dont tu peux te targuer d'être responsable. Garmy, paisible et nonchalante qui souffre d'un mal terrible : l'addiction au dessert. Enfin, Laurent Franck, notre GO, pourfendeur du tout sérieux, tu as su te faire entendre de l'enfant sommeillant en nous.

Alors là, c'est le bureau 15. Audrey, drôle, maladroite et si gentille dont la foi en l'humanité a coûté quelques désillusions parfois cruelles. Merci pour cette escapade canadienne entre safari à l'écureuil et psychologie d'apaisement d'un scientifique presque aussi froissé que ses posters. Puis il y a Patrice, passionné et poète moderne sachant manier l'allusion avec une dextérité inégalable. David, avec qui j'ai bravé les conditions sibériennes pour le plaisir d'une cigarette (quelle triste condition que celle du fumeur dans ce monde moderne, le culte de l'homme propre et sans vice aura raison de nous un jour). Florent, aux airs de guitariste écorché, nouvel adepte du quart d'heure londonien. Merci pour ton logiciel aux possibilités qui me laissent rêveur. Rêveur parce qu'un jour, au diable mon amour propre, il faudra bien que j'arrive à t'avouer que je ne sais toujours pas m'en servir. Et puis Jérôme, que l'autocensure d'une image propre n'a jamais effleuré, je m'émerveille de ce modèle d'intégrité.

Nous continuons la ballade dans ce dédale de couloirs. Nous y croisons Farf, le luron des pots du TêSA, dont l'éclat de rire en ces circonstances est pareil au chant des sirènes. Et aussi Vincent, dit Vincent H pour ne pas le confondre avec Vincent M (souvenez vous, Vincent M, c'est l'amoureux des LPTV). Vincent, mon préparateur scientifique et mental pour l'arène ENACienne, mon créancier qui m'a soutenu sans retenue dans mes délires capitalistes les plus fous, mon équipier de couinche qui a nous offert une place dans l'histoire en faisant déposer les armes de JYT (JYT je laisse tes initiales pour conserver ton anonymat et ne pas entacher ton amour propre) et Aron impuissants au cours d'une partie mémorable (enfin au moins pour nous). Puis, il y a JP, avec qui nous partageons les rêves les plus osés d'une nouvelle vie sportive et saine. Renaissance des phénix animés de la même volonté de mettre un terme au palmarès immaculé d'André Luc. Et oui, je vous présente André Luc, le joueur de tennis le plus fort du labo depuis plus de 4 ans. AL, tu n'as jamais tremblé. Cette accalmie est de courte durée, le jour est proche où le temps de cette domination sera révolue (le pire c'est que j'arrive presque à m'en convaincre). Surtout si tu ne sais décliner nos invitations du vendredi à la décompression autour d'une pétillante boisson houblonnée. Le copain d'André Luc, c'est Manu. Manu, c'est un peu la mémoire de la chanson française, un Hughes Aufray moderne et rajeuni, un Georges Brassens sans la moustache. Là, c'est Bogdan qui m'a intronisé aux charmes de la musique roumaine. Je voudrais te dire que ce fut un réel plaisir de participer à ton stage de DEA. Jamais, je n'aurais pensé à cette époque pouvoir parler de filtres LPTV pendant des heures avec quelqu'un hors de son sommeil.

Si vous acceptez de me suivre à l'étage, nous y croiserons sûrement Marie. Le tissu qui l'habille a quelques années d'avance et fait d'elle une visionnaire vestimentaire (tout au moins au sein du labo). Attention particulière pour toi Marie qui fut la première à m'accorder ta confiance en me laissant porter ma première casquette d'enseignant. Puis, il y a Nathalie, là juste en face de Marie. Nathalie préfigure l'idée qu'un autre monde est possible. Tu as l'air si détachée, attentive et si protégée des affres quotidiens du monde professionnel. Le jeune homme fringant, c'est Jean Yves, le Gérard Majax du labo. Il ne se déplace jamais sans un paquet de cartes dans sa poche. Très attentif et animé d'une réelle curiosité scientifique, il n'hésite pas à surmonter l'intimidation d'une salle comble afin de poser des questions essentielles. La jeune femme à coté, c'est Corinne. Je dois vous faire une confidence : je crois que la nature de leurs liens dépasse le cadre professionnel. Nulle certitude sur ce point, mais mon enquête progresse. Corinne, je te dois d'avoir réveillé mon sens critique me détournant de mes réunions hebdomadaires en des lieux quelque peu ésotériques. Vient ensuite Martial, le palais le plus raffiné du labo. Il

m'a appris deux choses essentielles. Premièrement, l'utilisation de la fonction Kron relève d'une démarche artistique. Deuxièmement, méfiez vous des vins californiens. Ils sont fourbes et tentent d'endormir votre palais à la première gorgée. Là-bas, c'est Benoît. Il vient du lundi au mercredi et il est toujours de bonne humeur. Il fut un temps, nous aurions pu croiser Christophe qui s'en est allé guidé par des aspirations bien plus exotiques. Puis, il y a Nicolas. Il n'est pas insensible aux instants londoniens. Il connaît une fille qui connaît un mec qui connaît Bertrand Cantat. Puis il y a Farid, qui sévit en ces lieux sous le sobriquet de Jedi. Je crois que c'est parce qu'il a succombé aux charmes du côté obscur des couches hautes. Enfin, à côté de lui, Julien, le dandy nonchalant de ces couches hautes.

Voilà dépeints les acteurs de mon quotidien pendant ces trois années. Ce petit microcosme évolue lentement au gré des cours, des conférences ou des projets résistant encore à l'envahisseur capitaliste. Je dois dire qu'il y règne comme un parfum de fraîche tranquillité. Mais pour donner vie à ce paisible tableau, il me faut enfin vous présenter Sylvie, sans quoi je garderais un fade sentiment d'inachevé. Sylvie, tu es le souffle de ce microcosme. Tu veilles avec diligence sur ce petit monde avec des attentions parfois maternelles. Prévenante, concernée, empathique, drôle, généreuse, disponible, charismatique, extravertie, théâtrale, parfois exhubérante dans tes accès délirants, as-tu seulement une infime conscience de l'élan affectif que ta présence peut susciter ? Merci pour toutes ces pauses cigarette qui furent autant d'invitations à futiliser les préoccupations du moment.

Scène 3 : *Quand la lumière s'éteint, il faut savoir laisser derrière soi la porte bleue.*

Sitôt retenti le claquement sourd de la porte bleue, selon l'humeur du vent, il faut savoir se laisser porter vers d'autres lieux. Et parmi ces lieux, notre havre de paix : le Petit London. Lieu de repos atemporel, de culte de la chaleur humaine, à l'abri des remous quotidiens, abrités derrière le double vitrage très artisanal, les oreilles bercées par une musique familière et le ronronnement de la tireuse, nous y flanons des heures. D'heureuses heures. Merci à toi Yannick d'avoir mis au monde ce lieu particulier où la bière est à 2 euros.

Catimini, vous ne pensiez quand même pas que j'eusse pu faire l'affront de vous oublier. Dans les plus durs moments d'une rédaction parfois laborieuse, vous étiez présents pour me dérober à une réalité un tantinet usante. Demain, les projecteurs, la frénésie d'un public incontrôlable, des cris, des hurlements, des évanouissements. Je dis ça, bien sûr, je ne dis rien. Je profite de l'accalmie de l'anonymat, avant que les grosses têtes nous prenions, pour vous confesser le plaisir que j'éprouve à chacun de nos rassemblements. L'excitation baignée de magie lorsque vrombit la

grosse caisse et que fusent les guitares dans un chaos harmonieux. Merci de laisser la place pour une basse hésitante dans ce paysage sonore. Ces instants où nous partons de rien et dans un processus créatif mystérieux, ce rien se magnifie pour donner vie à un sentiment audible. Merci à vous AJA pour m'avoir accompagné dans ce rêve d'enfant.

Merci à vous Cyrille et Fred pour la perpétuation cette belle idée qu'est la bière du jeudi. Merci à vous on the air (frog on the rock?) pour ces rendez vous musicaux où l'on caresse la double croche. Merci à vous Katia et Laurent pour toutes ces soirées au royaume du jeu. Merci à vous Titi, Pete, Christian et Stéphane. Merci à vous Mike, Clyde, Stef, Marie d'avoir englouti tous ces kilomètres pour vous joindre à nous en ce 30 novembre. Clyde, see you on the next "barroud". Merci à toi Dodu pour ces kilomètres que tu aurais souhaité engloutir. Merci à vous Béné et Giresse.

Mon dernier mot est pour toi Hélène. Merci pour cette patience de l'ombre qui m'a permis d'ouvrir la porte chaque soir toujours avec le même sourire.

Résumé

Les filtres linéaires périodiques (**LPTV**) ont fait l'objet de divers travaux au sein du laboratoire TéSA. Cette famille de filtres n'y a cependant été envisagée que sous la forme analogique. Ce travail de thèse propose en premier lieu une étude théorique des filtres LPTV numériques. Dans un second temps, l'intérêt de l'utilisation des filtres LPTV numériques pour les communications numériques est considéré. Après avoir recensé les applications existantes, nous proposons alors plusieurs applications des filtres LPTV.

La partie théorique formalise les différentes représentations LPTV et propose d'établir un rapprochement entre le domaine du traitement multiscadence et les filtres LPTV. A cet effet, une relation d'équivalence entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale est définie. Le problème de l'inversibilité des filtres LPTV est ensuite abordé. La littérature étant pauvre en méthodes de construction de filtres LPTV inversibles, nous définissons deux familles de filtres LPTV ayant cette propriété. La dernière partie théorique s'intéresse à un cas particulier de filtres LPTV que sont les changements d'horloge périodiques (**PCC**). Il y est montré que l'ensemble de ces transformations est confondu avec l'ensemble des entrelaceurs périodiques. S'il est vrai que les PCC constituent un sujet somme toute marginal, ce dernier résultat permet de proposer une nouvelle approche et de nouveaux outils pour l'étude des entrelaceurs, outil largement utilisé dans les communications numériques.

Dans le deuxième volet, nous proposons plusieurs applications de filtres LPTV pour les communications numériques. Les filtres LPTV sont tout d'abord proposés comme outil pour la réduction du Peak Average Power Ratio (**PAPR**) pour les systèmes OFDM (**Orthogonal Frequency Division Multiplexing**). Les performances théoriques en Taux d'Erreur Binaire (**TEB**) sont dans ce contexte étudiées dans le cas d'un canal sélectif en fréquence pour les filtres LPTV utilisés. Nous proposons aussi l'utilisation des filtres LPTV pour réaliser de l'étalement de spectre. Dans cette optique, un système d'accès multiple est décrit reposant sur une méthode

de construction d'une famille de filtres LPTV orthogonaux à partir d'un filtre LPTV générateur.

Mots clefs : filtres linéaires périodiques variant dans le temps, changements d'horloges, entrelaceurs, bancs de filtres à décimation maximale, OFDM, réduction de PAPR, étalement spectral, accès multiple.

Glossaire

- **LTV** : Linear Time Varying, qualifie un système linéaire variant dans le temps.
- **LPTV** : Linear Periodical Time Varying, qualifie un système linéaire variant périodiquement dans le temps.
- **LIT** : Linéaire Invariant par rapport au Temps.
- **MIMO** : Multiple Input Multiple Output.
- **SIMO** : Single Input Multiple Output.
- **MISO** : Multiple Input Single Output.
- **QMF** : Quadrature Mirror Filter.
- **TFD** : Transformée de Fourier Discrète.
- **TFDI** : Transformée de Fourier Discrète Inverse.
- **RIF** : Réponse Impulsionnelle Finie.
- **RII** : Réponse Impulsionnelle Infinie.
- **PPCM** : Plus Petit Commun Multiple.
- **PGCD** : Plus Grand Commun Diviseur.
- **PAPR** : Peak to Average Power Ratio.
- **OFDM** : Orthogonal Frequency Division Multiplexing.
- **FDMA** : Frequency Division Multiplex Access.
- **TDMA** : Time Division Multiplex Access.
- **CDMA** : Code Division Multiplex Access.
- **PCC** : Periodical Clock Change.
- **TEB** : Taux d'Erreur Binaire.
- **DSP** : Densité Spectrale de Puissance.
- **AWGN** : Additif White Gaussian Noise.
- **RCF** : Racine de Cosinus Surélevé.

- **CNS** : Condition nécessaire et suffisante.
- **SM** : Selected Mapping.
- **LPTV-LL** : Filtres LPTV LossLess

Notations

- N est réservé à la désignation par défaut de la période des filtres LPTV.
- W_N : Racine n -ième de l'unité, $W_N = \exp(\frac{-2i\pi}{N})$.
- $n = N\bar{n}^N + \underline{n}_N$ désigne la division euclidienne de l'entier n par l'entier N .
- \mathbf{F}^+ est la matrice des coefficients de la TFD. L'élément (i, j) est défini par $[\mathbf{F}^+]_{i,j} = W_N^{ij}$.
- \mathbf{F}^- est la matrice des coefficients de la TFD inverse. L'élément (i, j) est défini par $[\mathbf{F}^-]_{i,j} = W_N^{-ij}$.
- δ est le symbole de Kronecker défini par $\delta(i) = 1$ si $i = 0$ et $\delta(i) = 0$ sinon.
- \mathbf{I}_N est la matrice identité de taille N définie par $[\mathbf{I}_N]_{i,j} = \delta(i - j)$.
- \mathbf{I}'_N est la matrice à diagonale opposée définie par $[\mathbf{I}'_N]_{i,j} = \delta(N - 1 - (j - i))$.
- $X(z)$ représente la transformée en z d'un signal $x(n)$ et elle est définie par $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$.
- $[i : j]$ représente l'intervalle des entiers compris entre i et j .
- $[i; j]$ représente l'intervalle des réels compris entre i et j .
- 0_{N-1} représente une suite de $N - 1$ zéros.
- $\tilde{\mathbf{X}}_N(z)$ est un vecteur colonne de longueur N qui représente les composantes modulateurs d'un signal de transformée en z , $X(z)$ dont le i -ième élément vaut $X(zW_N^i)$. En l'absence d'indice, celui ci vaut par défaut N .
- \mathbf{A}^t désigne la transposée de la matrice \mathbf{A} .
- \mathbf{A}_* désigne la matrice conjuguée de \mathbf{A} .
- $\boldsymbol{\pi}$ représente la matrice de permutation circulaire unité définie par $[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(\underline{i - j - 1}_N)$.
- $\mathbf{D}_{W_N^-}$ est une matrice diagonale définie par $[\mathbf{D}_{W_N^-}]_{i,j} = \delta(i - j)W_N^{-i}$.
- $\mathbf{D}_{W_N^+}$ est une matrice diagonale définie par $[\mathbf{D}_{W_N^+}]_{i,j} = \delta(i - j)W_N^i$.
- \mathbf{D}_z est une matrice diagonale définie par $[\mathbf{D}_z]_{i,j} = \delta(i - j)z^i$.

- $PPCM(P, Q)$ désigne le plus petit commun multiple des entiers P et Q .
- $PGCD(P, Q)$ désigne le plus grand diviseur commun des entiers P et Q .
- PCC_f désigne le PCC de fonction PCC f .
- $PCC_f \bullet PCC_h$ désigne la cascade des deux PCC de fonctions f et h .
- $\Theta(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques.
- $\tilde{\Theta}(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques inversibles.
- $B(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques blocs.
- $\tilde{B}(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques blocs et inversibles.
- $C(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques convolutionnels.
- $\tilde{C}(N)$ désigne l'ensemble des PCC N périodiques convolutionnels inversibles.
- $P \wedge Q = 1$ signifie que les deux entiers P et Q sont premiers entre eux.
- $[x]_\alpha$ représente la valeur du réel x modulo α où α est un réel.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	xi
Glossaire	xiii
Notations	xv
Introduction	1
1 Les filtres LPTV en numérique	5
1.1 Introduction	5
1.2 Définitions et représentations des filtres LPTV numériques	6
1.2.1 Décomposition polyphase d'un signal numérique	6
1.2.2 Caractérisation des filtres LPTV	9
1.2.3 Représentation des filtres LPTV	12
1.3 Relations entre les représentations des filtres LPTV	17
1.3.1 Décimation et interpolation	18
1.3.2 Transformations unificatrices des représentations des filtres LPTV numériques	19
1.4 Liens entre filtres LPTV numériques et bancs de filtres	23
1.4.1 Bancs de filtres à décimation maximale	24
1.4.2 Relation entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale	25
1.5 Conclusions	28

2	Inversibilité des filtres LPTV numériques	31
2.1	Introduction	31
2.2	Inversibilité d'un filtre LPTV numérique	32
2.2.1	Caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LPTV numérique	32
2.2.2	Illustration de l'inversibilité d'un filtre LPTV	34
2.3	Proposition d'une famille de filtres LPTV inversibles	36
2.3.1	Caractérisation d'une famille de filtres inversibles par la matrice modulateurs	37
2.3.2	Simulations	43
2.4	Banc de filtres et inversibilité de filtres LPTV	45
2.4.1	Caractérisation de la reconstruction parfaite d'un banc de filtres	47
2.4.2	Méthode de construction de banc de filtres à reconstruction parfaite basée sur les matrices de transfert sans perte	48
2.4.3	Application à la construction de filtres LPTV inversibles	49
2.4.4	Exemple numérique	50
2.4.5	Simulations	52
2.5	Conclusion	53
3	Changements d'horloges et entrelaceurs	57
3.1	Introduction	57
3.2	Les changements d'horloges périodiques	58
3.2.1	Définitions et notations	59
3.2.2	Nature LPTV des changements d'horloges périodiques	60
3.2.3	Equivalence entre PCC numériques et entrelaceurs	60
3.3	Structure de groupe de l'ensemble des PCC	63
3.3.1	Définition d'une loi interne	64
3.3.2	Inversibilité d'un PCC	65
3.3.3	Structures de groupe des PCC et sous ensembles de PCC	68
3.4	Décompositions de PCC	73
3.4.1	Décomposition de tout PCC en la cascade d'un PCC bloc et d'un PCC convolutionnel de même période	73
3.4.2	Décomposition d'un PCC en la cascade de deux PCC de périodes inférieures	80
3.5	Effets de bords dans le traitement bloc	84

3.5.1	Mise en évidence de l'effet de bords	84
3.5.2	Les PCC modulo	86
3.6	Conclusion	88
4	Filtres LPTV et communications numériques	91
4.1	Introduction	91
4.2	Filtres LPTV et propriétés spectrales	93
4.2.1	Présentation des applications recensées	93
4.2.2	Contributions personnelles	99
4.3	Filtres LPTV et propriétés temporelles	111
4.3.1	Présentation des applications recensées	111
4.3.2	Contributions personnelles	113
4.4	Filtres LPTV et propriétés temps/fréquences	134
4.5	Conclusion	134
5	Filtres LPTV pour l'accès multiple	137
5.1	Introduction	137
5.2	Les systèmes d'accès multiutilisateurs à spectre étalé	138
5.2.1	Présentation des différents types d'accès multiple	138
5.2.2	Présentation des systèmes traditionnels de CDMA	141
5.3	Proposition d'une famille de filtres LPTV orthogonaux	147
5.3.1	Définition d'un système orthogonal	147
5.3.2	Proposition d'une famille de filtres LPTV orthogonaux	148
5.4	Réalisation d'un système d'accès multiutilisateurs	149
5.4.1	Présentation du système d'accès	150
5.4.2	Sensibilité du système à une désynchronisation	152
5.4.3	Choix d'un filtre LPTV générateur	153
5.4.4	Performances de notre système	157
5.5	Conclusion	169
Conclusion		173

A	Annexes relatives au chapitre 1	177
A.1	Détermination de la matrice MIMO d'un filtre LPTV	177
A.2	Obtention des composantes polyphases $X'_k(z)$	179
A.3	Relations entre les représentations d'un filtre LPTV : Méthode 1	180
A.4	Relations entre les représentations d'un filtre LPTV : Méthode 2	184
A.4.1	Relations entre les matrices LPTV et les filtres LIT définissant les filtres LPTV	184
A.4.2	Détermination des relations entre les grandeurs en z des filtres LPTV grâce aux relations matricielles	186
A.5	Filtres LPTV et bancs de filtres	188
A.5.1	Cas d'un filtre LPTV et du banc d'analyse équivalent	188
A.5.2	Cas d'un filtre LPTV et du banc de synthèse équivalent	189
B	Annexes relatives au chapitre 2	191
B.1	Condition d'inversibilité d'un filtre LPTV	191
B.1.1	Première propriété :	191
B.1.2	Seconde propriété :	192
B.2	Filtres LPTV à matrice modulateurs circulaire	193
B.3	Reconstruction parfaite et inversibilité	194
C	Annexes relatives au chapitre 3	199
C.1	Filtres modulateurs de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes	199
C.2	CNS sur F pour l'inversibilité d'un PCC	200
C.3	CNS sur \underline{F} pour l'inversibilité d'un PCC	201
C.4	Structure de groupe de $\tilde{\Theta}(N)$	202
C.5	Relations entre q et N pour un PCC q - <i>bloc</i> et N périodique	204
C.6	Structure de groupe de $\tilde{B}(N)$	206
C.7	Structure de groupe de $\tilde{C}(N)$	206
C.8	Intersection de $\tilde{C}(N)$ et $\tilde{B}(N)$	207
C.9	Décomposition Bloc/Convolutionnel de tout PCC	207
C.10	Décomposition d'un PCC en la cascade de deux PCC	208
C.11	Décomposition de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes	213
C.12	Annexe 3.12 : CS d'inversibilité d'un PCC modulo	216

D	Annexes relatives au chapitre 4	217
D.1	Calcul théorique du TEB pour un canal sélectif en fréquence	217
D.1.1	Cas d'une QPSK sur un canal AWGN	217
D.1.2	Cas d'un signal OFDM à N porteuses sur un canal sélectif en fréquence .	217
D.1.3	Cas d'un signal OFDM à N porteuses sur un canal sélectif en fréquence avec filtre LPTV-LL	218
D.2	Utilisation de filtres LPTV-LL dans un contexte déterministe	218
D.2.1	Principe du fenêtrage déterministe	218
D.2.2	Performances des fenêtres pour la réduction du PAPR	219
D.2.3	Considération de TEB	220
E	Annexes relatives au chapitre 5	225
E.1	Construction d'une famille de filtres LPTV orthogonaux	225
E.2	Expression du PCC équivalent pour l'entrelaceur lignes/colonnes	226
E.3	Expression du PCC équivalent pour le PCC linéaire	230
	Bibliographie	231

Introduction générale

Les Filtres Linéaires Périodiques Variant dans le Temps (**LPTV**) ont fait l'objet de précédents travaux de thèses au sein du laboratoire TéSA. Cependant, ces filtres y ont été uniquement envisagés et étudiés sous une forme analogique. La motivation originelle de ce travail fut donc de proposer une étude théorique des filtres LPTV sous forme numérique et de proposer des utilisations possibles de ces filtres pour les communications numériques après avoir recherché celles existantes. Cette étude a été menée dans le cadre du contrat CNES 714/CNES/00/8193 "Utilisation des filtres LPTV dans les communications numériques".

Le premier chapitre propose une présentation générale des filtres LPTV en numérique. Les différentes représentations d'un filtre LPTV numérique sont ainsi, dans un premier temps, rappelées. Il apparaît alors que ces filtres LPTV sont assez étroitement liés au domaine de traitement multicaudence. Nous proposons d'emprunter les outils fondamentaux de ce dernier que sont l'interpolation et la décimation afin d'uniformiser les susdites représentations. Cette formalisation nous permet de proposer une méthode matricielle établissant les relations entre les différentes représentations. Nous établissons ensuite un parallèle entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale qui sont une application particulière du traitement multicaudence et nous définissons à ce propos une relation d'équivalence entre filtres LPTV et bancs de filtres.

Dans le second chapitre, notre attention se porte sur l'inversibilité des filtres LPTV. Dans un contexte de communications numériques, l'introduction volontaire d'un filtre LPTV dans une chaîne de transmission nécessite que l'on soit capable d'inverser cette transformation afin de récupérer le signal en réception. Le problème de l'inversibilité d'un filtre LPTV est ainsi discuté dans le cas général. La condition d'inversibilité d'un tel filtre peut être rapprochée de celle d'un filtre Linéaire Invariant dans le Temps (**LIT**), le déterminant d'une matrice en z de taille égale à la période du filtre LPTV remplaçant la transformée en z du filtre LIT. Si cette condition permet de vérifier l'inversibilité d'un filtre LPTV parfaitement connu, elle n'offre en

aucun cas une méthode de construction a priori de tels filtres. Des recherches bibliographiques nous ont montré que la construction de filtres LPTV inversibles restait un problème ouvert. Nous proposons alors deux méthodes différentes permettant une telle construction. La première, originale, permet de réduire le problème d'inversibilité de complexité matricielle à un problème d'inversibilité de N filtres LIT, si N est la période du filtre. La seconde méthode exploite, quant à elle, la relation d'équivalence introduite précédemment entre filtres LPTV et bancs de filtres. Nous montrons que la propriété de reconstruction parfaite d'un banc de filtres est équivalente à la propriété d'inversibilité du filtre LPTV équivalent. Cette propriété nous permet de généraliser une méthode de construction de bancs de filtres sans pertes à la construction de filtres LPTV inversibles, appelés filtres LPTV-LossLess (**LPTV-LL**). La particularité de cette méthode est que, dans ce cas, le filtre LPTV inverse est RIF alors que le filtre initial est RIF.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à un sous ensemble particulier de filtres LPTV que sont les changements d'horloges périodiques (**PCC**). L'inversibilité des changements d'horloges est discutée, certains sous ensembles sont définis et leur structure de groupe est démontrée. Des considérations de décomposition des PCC sont aussi abordées. La propriété intéressante réside dans le fait que les PCC numériques constituent une classe de filtres LPTV confondue avec la famille des entrelaceurs périodiques. Ainsi, s'il est vrai que les PCC demeurent un outil somme toute marginal aujourd'hui, les entrelaceurs sont largement répandus dans les communications numériques. Ce rapprochement offre ainsi une nouvelle approche originale des entrelaceurs par le biais d'un formalisme LPTV. Parallèlement, cette équivalence a pour conséquence que certaines propriétés démontrées dans cette partie pour les PCC l'ont déjà été auparavant pour les entrelaceurs.

Suite aux considérations plutôt théoriques des trois premiers chapitres, nous proposons dans le quatrième chapitre certaines applications des filtres LPTV pour les communications numériques. Les applications existantes des filtres LPTV pour les communications numériques sont tout d'abord rappelées. Nous adoptons dans ce chapitre une classification de ces applications selon qu'elles relèvent d'une approche temporelle ou fréquentielle. Ainsi, notre contribution personnelle dans le domaine fréquentiel est double. Tout d'abord, nous proposons un système d'étalement permettant un étalement dans une bande continue à l'exception d'une sous bande à définir. Ce système, en cours de brevet par le CNES, permet de se prémunir d'interférences à bandes étroites. Nous envisageons ensuite l'utilisation des deux familles de filtres inversibles définies dans le second chapitre afin de réaliser de l'étalement spectral. A cet effet, le comportement de chacune

de ces deux familles est évalué lorsque le canal est modélisé par un bruit blanc additif. Ensuite, nous nous intéressons aux applications des filtres LPTV relevant d'une approche temporelle et nous choisissons de traiter le problème de réduction de **PAPR** (Peak to Average Power Ratio) dans les systèmes **OFDM** (Orthogonal Frequency Division Multiplex). Une méthode utilisant les filtres LPTV-LL est proposée permettant de réduire le PAPR. La capacité de réduction de PAPR de cette méthode est comparée à celle de deux techniques courantes que sont le Selected Mapping et l'entrelacement. En outre, les conséquences de l'ajout d'un filtre LPTV-LL sur les performances en TEB du système OFDM dans le cas d'un canal sélectif en fréquence à bruit additif blanc gaussien sont discutées et évaluées théoriquement. Enfin, en remarquant que la plupart des solutions courantes de réduction de PAPR sont équivalentes à l'utilisation d'un filtre LPTV, nous proposons une reformulation LPTV de ces méthodes.

Dans le cinquième et dernier chapitre, nous nous intéressons à la possibilité de réaliser un système d'accès multiple à l'aide de filtres LPTV. Dans un premier temps, nous présentons les techniques actuelles d'accès multiple à étalement de spectre. Celles ci reposent toutes sur l'utilisation de codes binaires (CDMA, Code Division Multiple Access). Nous proposons alors une méthode pour construire une famille de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux numériques suréchantillonnés par rapport à la fréquence de Shannon. Cette technique nécessite la définition d'un filtre LPTV inversible initial, l'ensemble complet des filtres LPTV orthogonaux étant construit à partir de ce filtre LPTV générateur. Cette famille de filtres LPTV est ensuite utilisée pour réaliser un système d'accès multiple par étalement de spectre. En l'absence de désynchronisation en réception, le système réalisé est parfaitement orthogonal. L'interférence multiutilisateurs apparaît lorsqu'il existe une désynchronisation entre les différents utilisateurs en réception. Nous proposons deux types de PCC comme choix de filtre LPTV initial et nous évaluons théoriquement leur sensibilité à la désynchronisation. La robustesse du système multiutilisateurs résultant est ensuite évaluée en terme de taux d'erreur binaire en fonction du nombre d'utilisateurs. Ces performances sont finalement comparées avec celles d'un système classique de **DS-CDMA** (Direct Sequence Code Division Multiple Access) avec séquences de Gold.

Chapitre 1

Les filtres LPTV en numérique

1.1 Introduction

Les filtres LPTV analogiques ont constitué le sujet de nombreuses études théoriques et les formes que peuvent prendre ces filtres analogiques y sont assez largement identifiées [8], [4], [3]. Pourtant, dès lors que l'on s'intéresse à la famille des filtres LPTV en numérique, on constate un enrichissement des représentations possibles. Le propos de ce premier chapitre est ainsi de passer en revue l'ensemble des représentations rencontrées dans la littérature dans le but de recenser ensuite les domaines d'applications actuels des filtres LPTV dans les communications numériques. Sur ce sujet, un travail de synthèse intéressant a été réalisé par [1]. Ce papier décline les différentes formes de représentations possibles de filtres LPTV numériques.

Si certains travaux traitent explicitement des filtres LPTV numériques, beaucoup d'autres utilisent des filtres LPTV de façon implicite. On peut citer par exemple les techniques de réduction du **PAPR** (Peak to Average Power Ratio) dans l'**OFDM** (Orthogonal Frequency Division Multiplexing), l'étalement spectral par utilisation de codes périodiques, les bancs de filtres, ou bien, encore, l'entrelacement. Concernant ces utilisations implicites de filtres LPTV, il est alors intéressant de formaliser le problème en utilisant les outils LPTV. Dans la plupart des cas, ce rapprochement n'enrichit pas la recherche de représentations des filtres LPTV numériques. Il est pourtant une exception avec le traitement multicadence. Dans ce cas, l'intérêt d'un parallèle entre ce domaine et les filtres LPTV est alors d'emprunter les outils de traitement multicadence [9], [10], [11], [12] (interpolation, décimation, décomposition polyphase, représentation matricielle) pour formaliser dans une même écriture les représentations possibles des filtres LPTV proposées

dans [1].

Le premier paragraphe, fortement inspiré de [1], recense les différentes représentations numériques pour un filtre LPTV. Ensuite, les relations mathématiques entre ces différentes représentations sont établies dans le paragraphe 2. Même si ces résultats ont été établis dans [1], nous présentons deux méthodes originales empruntées au domaine multicausalité qui permettent une uniformisation des écritures de [1] et qui nous conduisent aux mêmes résultats. Enfin, pour illustrer le lien entre filtres LPTV et traitement multicausalité, le paragraphe 3 présente une vision unificatrice des filtres LPTV et des bancs de filtres uniformes qui sont une application particulière du traitement multicausalité. Une notion d'équivalence entre bancs de filtres et filtres LPTV y est notamment proposée.

1.2 Définitions et représentations des filtres LPTV numériques

Les filtres LPTV appartiennent à une classe plus générale de filtres que sont les filtres linéaires variant dans le temps (**LTV**) et s'y distinguent par des propriétés de périodicité. Leur utilisation recouvre une large étendue d'applications, et en ce qui concerne le domaine particulier des communications numériques, il existe couramment deux modèles mathématiques temporels équivalents permettant de les caractériser. Le premier est l'équation aux différences linéaire périodique qui est une généralisation de l'équation aux différences linéaire pour un filtre invariant dans le temps (**LIT**). La seconde caractérisation possible d'un filtre LPTV se fait par la définition des fonctions de Green. Ces fonctions de Green permettent alors une forme d'écriture analogue à la relation de filtrage dans le cas d'un filtrage LIT.

Après avoir présenté la décomposition polyphase ([9], [10], [11], [12]) d'un signal qui est un outil utile pour la représentation des filtres LPTV, nous précisons les deux caractérisations équivalentes possibles d'un filtre LPTV puis nous abordons le problème de leur représentation, c'est à dire les différentes façons d'implémenter un filtre LPTV numérique.

1.2.1 Décomposition polyphase d'un signal numérique

Nous considérons un signal $x(n)$ de transformée en z , $X(z)$. La décomposition polyphase d'ordre N du signal $x(n)$ consiste à découper le signal temporel en N sous signaux $x_k(n)$ définis par (1.1) et illustrés par la figure 1.1. A chacune de ces composantes polyphases $x_k(n)$, nous associons la transformée en z , $X_k(z)$, définie par (1.2). La composante polyphase $x_k(n)$ correspond

au signal $x(n)$ avancé de k et décimé par N .

$$x_k(n) = x(nN + k), \quad \forall k \in [0 : N - 1] \quad (1.1)$$

$$X_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_k(n) z^{-n} \quad (1.2)$$

La transformée en z , $X(z)$, du signal original peut alors s'écrire selon (1.3) en fonction des $X_k(z)$.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} X_k(z^N) \quad (1.3)$$

Il est pratique, pour la suite, d'introduire une seconde famille de composantes polyphases $x'_k(n)$ définies temporellement par (1.4) et illustrées par la figure 1.2. La transformée en z de $x'_k(n)$ s'écrit alors (1.5).

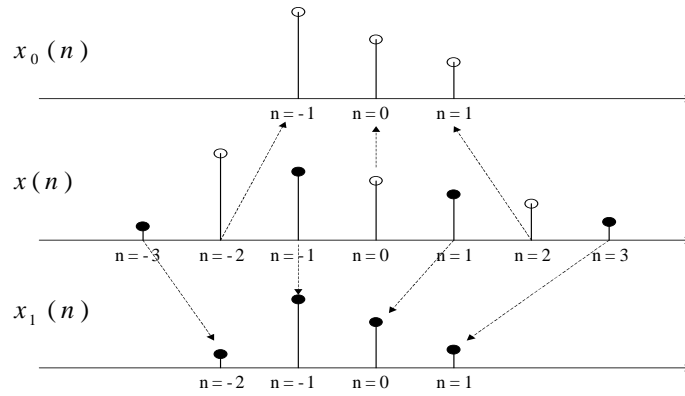
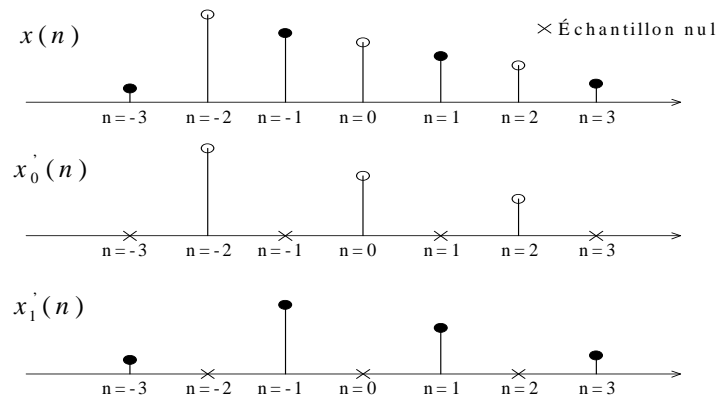
$$x'_k(n) = \delta(\underline{n - k}_N) x(n) = \dots x(k - N) \overbrace{00\dots0}^{0_{N-1}} x(k) \overbrace{00\dots0}^{0_{N-1}} x(k + N) \quad (1.4)$$

$$X'_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'_k(n) z^{-n} = z^{-k} X_k(z^N) \quad (1.5)$$

Il est intéressant de remarquer que cette seconde famille de composantes polyphases est obtenue à partir du signal $x(n)$ par une mise à zéro N périodique de $N - 1$ échantillons. La transformée en z , $X(z)$, peut s'écrire sous la forme (1.6).

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X'_k(z) \quad (1.6)$$

Les deux décompositions polyphases que nous venons de définir sont équivalentes. Dans la littérature ([10], [11], [12], [20]), la notion de décomposition polyphase fait référence à la première de ces deux décompositions. Si nous avons introduit la seconde famille, c'est parce que ces composantes sont échantillonnées à la même fréquence que le signal et cela allège bon nombre d'écritures pour la description des filtres LPTV. Nous notons $\widehat{\mathbf{X}}(z)$ et $\widehat{\mathbf{X}}'(z)$ les vecteurs colonnes (1.7, 1.8) de longueur N composés respectivement des $X_k(z)$ et des $X'_k(z)$. La relation précédente (1.5) nous permet d'écrire que ces deux vecteurs polyphases sont liés entre eux par la relation matricielle (1.9) où \mathbf{D}_z est la matrice diagonale carrée de taille N constituée des puissances croissantes de z (i.e $[\mathbf{D}_z]_{i,j} = \delta(i - j)z^i$).

FIG. 1.1 – Illustration des composantes polyphases $x_k(n)$ pour $N = 2$.FIG. 1.2 – Illustration des composantes polyphases $x'_k(n)$ pour $N = 2$.

$$\widehat{\mathbf{X}}(z) = \begin{bmatrix} X_0(z) & X_1(z) & X_2(z) & \dots & X_{N-1}(z) \end{bmatrix}^t \quad (1.7)$$

$$\widehat{\mathbf{X}}'(z) = \begin{bmatrix} X'_0(z) & X'_1(z) & X'_2(z) & \dots & X'_{N-1}(z) \end{bmatrix}^t \quad (1.8)$$

$$\widehat{\mathbf{X}}'(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \widehat{\mathbf{X}}(z^N) \quad (1.9)$$

Il est utile, enfin, de noter que la décomposition polyphase (1.3) peut aussi être utilisée pour un filtre LIT de transformée en z $H(z)$. On obtient alors la décomposition (1.10) à l'aide des filtres $H_k(z)$. Une décomposition symétrique (1.11) est souvent utilisée, notamment, nous le verrons, pour l'étude des bancs de filtres à l'aide de filtres $G_i(z)$. On vérifie alors facilement que ces deux familles équivalentes de filtres polyphases sont liées par la relation (1.12).

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} H_k(z^N) \quad (1.10)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} z^{-(N-1-k)} G_k(z^N) \quad (1.11)$$

$$H_k(z) = G_{N-1-k}(z) \quad (1.12)$$

1.2.2 Caractérisation des filtres LPTV

1.2.2.1 Equation aux différences linéaire périodique

Une équation aux différences **LTV** (linear time varying) est une relation linéaire récursive définie par deux ensembles de coefficients variant au cours du temps $\{a_i(n)\}_{0 \leq i \leq M_1}$ et $\{b_j(n)\}_{1 \leq j \leq M_2}$. L'entrée $x(n)$ et la sortie $y(n)$ de ce système linéaire sont alors fonctions l'une de l'autre selon la relation (1.13).

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M_1} a_i(n)x(n-i) + \sum_{j=1}^{M_2} b_j(n)y(n-j) \quad (1.13)$$

Une telle équation aux différences est dite LPTV de période N si les coefficients du système sont N périodiques en n et vérifient alors les égalités (1.14) et (1.15). Le cas particulier d'un filtre LIT s'obtient lorsque les coefficients précédents sont indépendants du temps n . Dans ce cas, on obtient un filtre LPTV de période un. On retrouve alors l'équation aux différences linéaire

classique d'un filtre LIT.

$$a_i(n + N) = a_i(n), \quad \forall i \in [0 : M_1] \quad (1.14)$$

$$b_j(n + N) = b_j(n), \quad \forall j \in [1 : M_2] \quad (1.15)$$

1.2.2.2 Fonctions de Green

Une seconde caractérisation courante d'un système LTV peut se faire à l'aide des fonctions de Green. La relation (1.16) liant l'entrée et la sortie du filtre LTV se présente alors sous la forme d'une relation de filtrage où les fonctions de Green représentent des réponses impulsionnelles variant dans le temps.

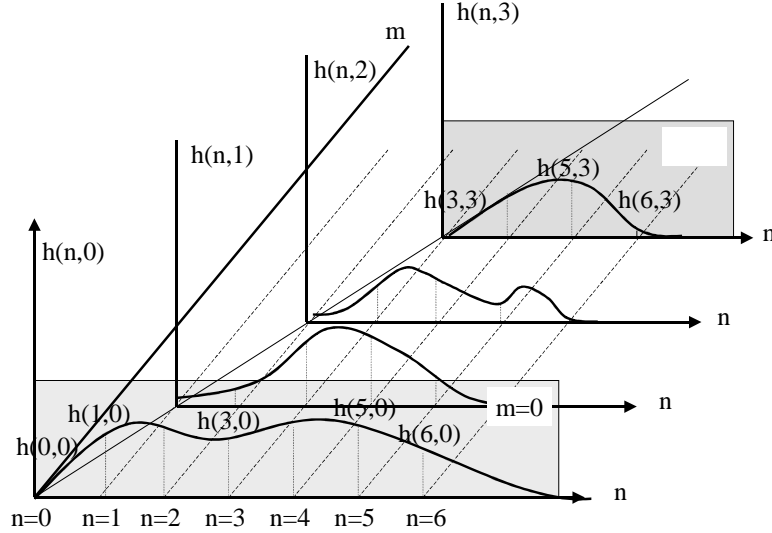
$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n, m)x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n(n - m)x(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_m(n - m)x(m) \quad (1.16)$$

Dans la relation (1.16), nous avons introduit trois fonctions de Green. Ces trois fonctions sont équivalentes grâce aux relations (1.17) et (1.18) et diffèrent par l'interprétation physique qu'elles fournissent.

$$c_n(m) = h(n, n - m) \quad (1.17)$$

$$r_m(n) = h(n + m, m) \quad (1.18)$$

Selon le phénomène physique que le système LTV modélise ou bien selon l'application si l'on se place dans le domaine des communications numériques, il est possible que l'une de ces fonctions de Green soit plus pratique ou plus explicite que les autres. En effet, $h(n, m)$ représente la réponse du système LTV à l'instant n pour un Dirac émis à l'instant m , alors que $c_n(m)$ représente la réponse du système LTV à l'instant n pour un Dirac émis à l'instant $n - m$ ou bien, encore, $r_m(n)$ représente la réponse du système LTV à l'instant $n + m$ pour un Dirac émis à l'instant m . De plus, les effets ne pouvant précéder la cause si l'on suppose que le filtre LTV est causal, ces fonctions de Green vérifient les égalités (1.19), (1.20) et (1.21). La figure 1.3 propose un exemple de représentation de la fonction $h(n, m)$ pour un filtre LTV. La causalité du filtre LTV se traduit par des fonctions $h(n, m)$ qui sont nulles à gauche de la diagonale d'équation $m = n$. Remarquons que sur cette figure, nous avons choisi de représenter la fonction numérique $h(n, m)$ comme étant


 FIG. 1.3 – Représentation de la fonction $h(n, m)$ pour un filtre LTV

l'échantillonnage d'un phénomène physique continu dans le souci d'une bonne visibilité.

$$h(n, m) = 0, \quad \forall n < m \quad (1.19)$$

$$r_m(n) = 0, \quad \forall n < 0 \quad (1.20)$$

$$c_n(m) = 0, \quad \forall m < 0 \quad (1.21)$$

Un filtre LTV est dit périodique de période N si les fonctions de Green associées vérifient les propriétés de N périodicité (1.22), (1.23) et (1.24). La figure 1.4 propose une représentation particulière de la fonction $h(n, m)$ pour un filtre LPTV de période 2. La périodicité se traduit par une périodicité de la forme de la fonction de Green $h(n, m)$ le long de la diagonale $m = n$.

$$h(n, m) = h(n + N, m + N) \quad (1.22)$$

$$r_m(n) = r_{m+N}(n) \quad (1.23)$$

$$c_n(m) = c_{n+N}(m) \quad (1.24)$$

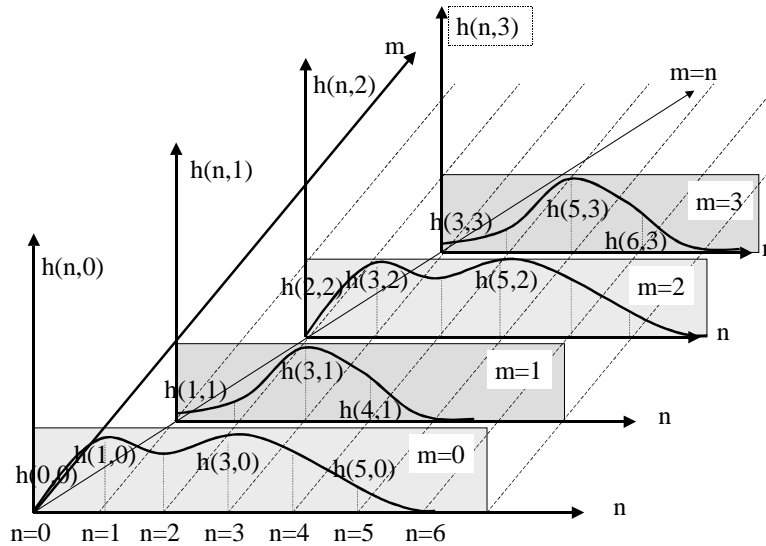


FIG. 1.4 – Représentation de la fonction $h(n, m)$ pour un filtre LPTV de période 2

1.2.3 Représentation des filtres LPTV

Nous avons vu qu'il était possible de caractériser un filtre LPTV par une équation aux différences ou bien par l'utilisation des fonctions de Green. Ces deux modèles mathématiques équivalents permettent alors de déduire différentes représentations numériques d'un filtre LPTV. Deux familles apparaissent alors : les représentations commutées et les représentations modulateurs. Les représentations de la première famille reposent sur l'opération de commutation et diffèrent entre elles selon que l'on commute l'entrée (structure Multiple Input Single Output ou **MISO**), la sortie (structure Single Input Multiple Output ou **SIMO**) ou bien les deux (structure Multiple Input Multiple Output ou **MIMO**). Quant à la seconde famille de représentations, les commutations temporelles sont transformées en opérations de modulations fréquentielles et c'est la raison pour laquelle on qualifie de modulateurs ces représentations.

1.2.3.1 Les structures commutées : SIMO, MISO, MIMO

Nous présentons ici les trois structures commutées d'un filtre LPTV.

1.2.3.1-a Représentation SIMO

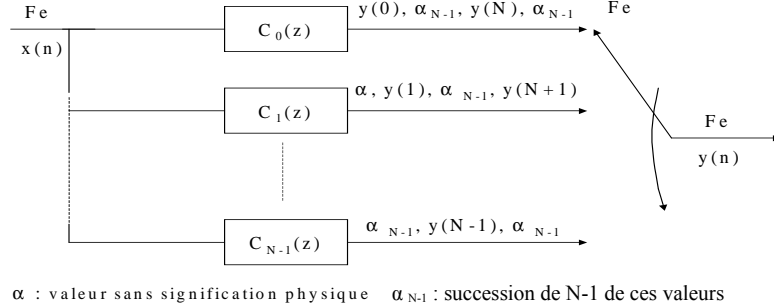


FIG. 1.5 – Représentation SIMO d'un filtre LPTV

Cette représentation est la plus intuitive et s'obtient à partir de la relation de filtrage (1.16) faisant apparaître la fonction de Green $c_n(m)$. Cette relation signifie que si l'on fige le filtre LPTV à un instant n , tout se passe, à cet instant, comme si le signal d'entrée était filtré par le filtre LIT de réponse impulsionnelle $c_n(m)$ et de transformée en z $C_n(z)$ (1.25). Ainsi, pour avoir la valeur de $y(n)$, il suffit de regarder la sortie du $n - ième$ filtre $C_n(z)$ à l'instant n . Grâce à la périodicité (1.24), on obtient alors la représentation SIMO de la figure 1.5 où F_e désigne la fréquence d'échantillonnage du signal d'entrée.

$$C_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n(m)z^{-m} \tag{1.25}$$

1.2.3.1-b Représentation MISO

La seconde représentation s'obtient à partir de la relation de filtrage (1.16) faisant apparaître la fonction de Green $r_m(n)$. Dans ce cas, l'explication est symétrique au cas précédent en observant l'entrée du filtre. En effet, si l'on choisit un instant n , le filtre LPTV étant causal, l'échantillon $x(n)$ intervient la première fois pour calculer $y(n)$. D'après la définition de la réponse impulsionnelle $r_m(n)$, la contribution de $x(n)$ dans le calcul de $y(n)$ est $r_n(0)x(n)$. Ensuite, à l'instant suivant, ce même échantillon intervient dans le calcul de $y(n+1)$ en étant multiplié par $r_n(1)$ et ainsi de suite, $x(n)$ intervient dans le calcul de $y(n+k)$ en étant multiplié par $r_n(k)$. La périodicité (1.23) implique que ce raisonnement est identique pour deux échantillons d'une même sous famille polyphase définie en (1.4). En définissant alors N filtres LIT par leur transformée

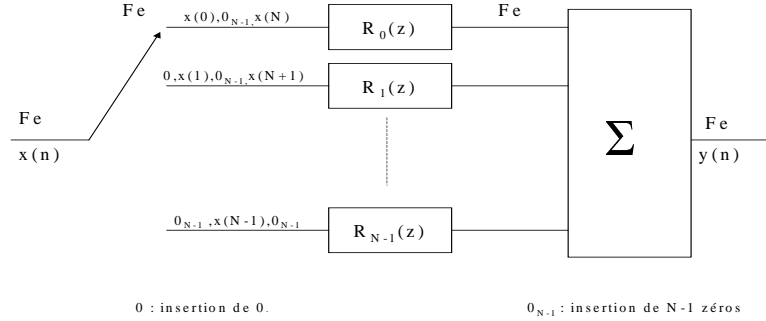


FIG. 1.6 – Représentation MISO d’un filtre LPTV

en z , $R_n(z)$ (1.26), on obtient la représentation MISO de la figure 1.6.

$$R_n(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_n(m)z^{-m} \quad (1.26)$$

1.2.3.1-c Représentation MIMO

La dernière représentation commutée correspond au cas de la commutation à la fois de l’entrée et de la sortie. La façon la plus simple de l’obtenir est de revenir à la définition d’un filtre LPTV par l’équation aux différences linéaire périodique (1.13). En faisant apparaître les composantes polyphases (1.4) pour les signaux $x(n)$ et $y(n)$, puis en prenant les transformées en z de part et d’autre de l’égalité, on obtient une relation matricielle (1.27) entre les vecteurs polyphases définis en (1.8).

$$\widehat{\mathbf{Y}}'(z) = \mathbf{H}'(z)\widehat{\mathbf{X}}'(z) \quad (1.27)$$

Cette relation matricielle nous permet de déduire la représentation MIMO de la figure 1.7. La détermination de la matrice $\mathbf{H}'(z)$ ainsi que sa forme particulière sont détaillées dans l’annexe A.1. Il est cependant utile de remarquer que les éléments de la matrice $\mathbf{H}'(z)$ sont de la forme (1.28) où les $H_{ij}(z)$ sont des filtres LIT.

$$[\mathbf{H}'(z)]_{i,j} = z^{j-i}H_{i,j}(z^N) \quad (1.28)$$

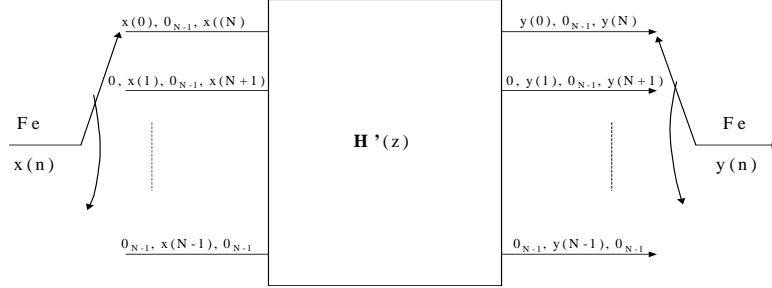


FIG. 1.7 – Représentation MIMO d’un filtre LPTV

1.2.3.2 Les structures modulateurs

Les structures modulateurs correspondent à la seconde famille de représentations d’un filtre LPTV. Leur intérêt est riche puisqu’elles permettent une approche fréquentielle de l’effet d’un filtre LPTV. Cette description bifréquentielle d’un filtre LPTV sera abordée dans le quatrième chapitre.

Pour obtenir ces structures, il suffit d’exploiter les propriétés de périodicité (1.23) et (1.24). Ainsi, pour m fixé, on peut décomposer $c_n(m)$ selon la relation (1.29) où les $t_p(m)$ sont les coefficients de la Transformée de Fourier Discrète (**TFD**) des $c_n(m)$. De la même façon, pour n fixé, on peut décomposer $r_m(n)$ selon la relation (1.30) où les $t'_p(n)$ sont les coefficients de la TFD des $r_m(n)$.

$$c_n(m) = \sum_{p=0}^{N-1} t_p(m) W_N^{-pn} \tag{1.29}$$

$$r_m(n) = \sum_{p=0}^{N-1} t'_p(n) W_N^{-pm} \tag{1.30}$$

En utilisant ces deux décompositions, on peut alors réécrire les relations de filtrage (1.16) en (1.31) et (1.32).

$$y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{-pn} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_p(n-m)x(m) \tag{1.31}$$

$$y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} t'_p(n-m) W_N^{-pm} x(m) \tag{1.32}$$

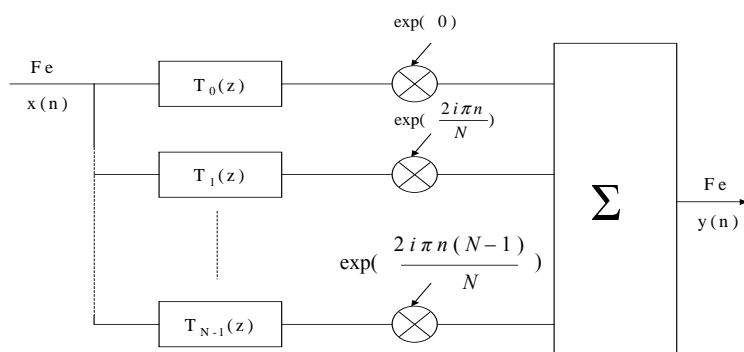


FIG. 1.8 – Première représentation modulateurs pour un filtre LPTV

En définissant N filtres $T_p(z)$ et $T'_p(z)$ par (1.33) et (1.34), on obtient finalement les deux représentations modulateurs des figures 1.8 et 1.9.

$$T_p(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} t_p(l)z^{-l} \quad (1.33)$$

$$T'_p(z) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} t'_p(l)z^{-l} \quad (1.34)$$

Ces représentations modulateurs nous permettent d'obtenir une expression fréquentielle (1.35) de l'effet d'un filtre LPTV. En effet, en évaluant en $z = \exp(i2\pi f)$ où f est la fréquence normalisée, nous obtenons la relation (1.36) où $f_0 = \frac{1}{N}$.

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} T_p(zW_N^p)X(zW_N^p) \quad (1.35)$$

$$Y(f) = \sum_{p=0}^{N-1} T_p(f - pf_0)X(f - pf_0) \quad (1.36)$$

Pour conclure la présentation des différentes représentations possibles pour un filtre LPTV, notons que toutes les représentations présentées dans ce paragraphe sont équivalentes pour un filtre LPTV donné. Les relations entre ces représentations vont être établies dans le paragraphe suivant. Concernant l'implantation, tous les filtres LIT définis peuvent être des filtres **RIF** (à Réponse Impulsionnelle Finie) ou bien **RII** (à Réponse Impulsionnelle Infinie) selon que les

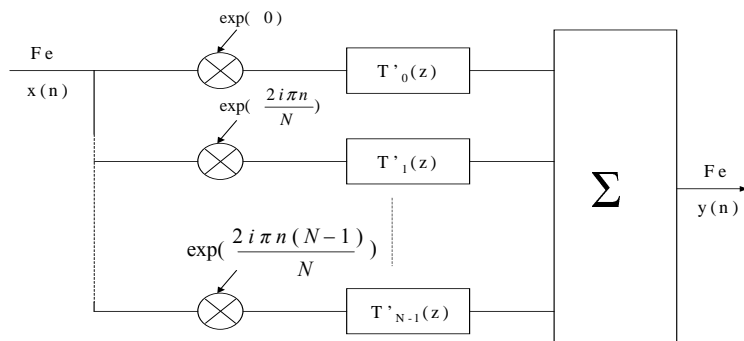


FIG. 1.9 – Seconde représentation modulateurs pour un filtre LPTV

coefficients $b_i(n)$ sont tous nuls dans l'équation (1.13). Nous appellerons filtres LPTV RIF un filtre LPTV dont tous les filtres LIT qui le définissent sont des filtres RIF et RII dans le cas contraire. Dans le cas de filtres LPTV RII, il existe de nombreuses méthodes d'implantation directe ou par approximation, certaines empruntées aux filtres LIT [16], d'autres plus spécifiques ([13], [14], [15]) proposées pour les filtres LPTV.

1.3 Relations entre les représentations des filtres LPTV

Ce paragraphe propose d'établir les relations entre les différentes familles de filtres LIT définies pour chacune des représentations précédentes. Ce travail a déjà été réalisé dans [1]. Néanmoins, la méthode proposée dans ce papier ne permet pas une vue unificatrice. Nous proposons deux méthodes originales systématiques pour établir les relations entre les représentations précédentes. Ces deux méthodes empruntent au domaine multicadence les outils de décimation et d'interpolation. La première utilise la décimation et l'interpolation afin de transformer les représentations précédentes et les uniformiser. La seconde est une approche matricielle qui utilise la relation entre les composantes polyphases et modulateurs d'un signal. Il s'agit d'écrire sous forme matricielle chacune des représentations LPTV précédentes. Ainsi, après un rappel sur la décimation et l'interpolation, les deux méthodes qui ont en commun d'uniformiser les représentations précédentes sont présentées.

1.3.1 Décimation et interpolation

Le traitement multiscalaire est une discipline récente qui propose le traitement de signaux numériques avec des changements de fréquence d'échantillonnage. La propriété fondamentale de cette discipline est que les traitements sont intégralement numériques et celle-ci est rendue possible grâce aux opérations d'interpolation et de décimation qui permettent respectivement d'augmenter ou de diminuer numériquement la fréquence d'échantillonnage d'un signal.

1.3.1.1 Effet d'un interpolateur sur un signal numérique échantillonné à F_e

Temporellement, une interpolation d'ordre I sur un signal $x(n)$ consiste à insérer $I - 1$ zéros entre chaque échantillon de $x(n)$. Le signal $y(n)$ obtenu possède alors une fréquence d'échantillonnage IF_e et sa transformée en z , $Y(z)$, est donnée [9] par la relation (1.37) en fonction de $X(z)$.

$$Y(z) = X(z^I) \quad (1.37)$$

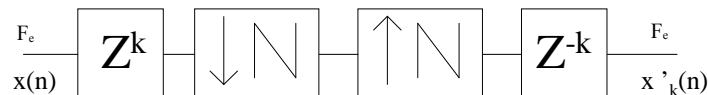
Fréquentiellement, la relation (1.37) signifie que le spectre du signal $y(n)$, calculé en fonction de la nouvelle fréquence normalisée par IF_e , est obtenu par I répétitions du spectre de $x(n)$ tous les $\frac{1}{I}$. Bien souvent, l'interpolation est suivie d'un filtre LIT passe bas de fréquences de coupure normalisées $\{-\frac{1}{2I}, \frac{1}{2I}\}$. Ce filtre permet de supprimer les $I - 1$ versions redondantes du spectre de $x(n)$ appelées images.

1.3.1.2 Effet d'un décimateur sur un signal numérique échantillonné à F_e

Temporellement, une décimation d'ordre I sur un signal $x(n)$ consiste à ne conserver qu'un échantillon sur I de $x(n)$. Le signal $y(n)$ obtenu possède alors une fréquence d'échantillonnage $\frac{F_e}{I}$ et sa transformée en z , $Y(z)$, est donnée [9] par la relation (1.38) en fonction de $X(z)$.

$$Y(z) = \frac{1}{I} \sum_{k=0}^{I-1} X(z^{\frac{1}{I}} W_I^k) \quad (1.38)$$

Fréquentiellement, la relation (1.38) signifie que le spectre du signal $y(n)$, calculé en fonction de la nouvelle fréquence normalisée par $\frac{F_e}{I}$, est obtenu par la somme de I versions comprimées par I du spectre de $x(n)$ et décalées fréquentiellement tous les multiples de $f_0 = \frac{1}{I}$. Les termes dans la somme (1.38) pour $k \neq 0$ constituent un terme parasite appelé repliement. Bien souvent, pour éviter le repliement, le décimateur est précédé d'un filtre LIT passe bas de fréquences de coupure normalisées par $F_e \{-\frac{1}{2I}, \frac{1}{2I}\}$.

FIG. 1.10 – Traitement pour obtenir les composantes polyphases $x'_k(n)$

1.3.2 Transformations unificatrices des représentations des filtres LPTV numériques

Pour faire le lien entre les différentes représentations précédentes d'un filtre LPTV, il est possible d'adopter différentes approches. Par exemple, une approche temporelle où l'on relierait les différentes grandeurs temporelles entre elles, est possible. Nous choisissons de rapprocher les grandeurs en z , c'est à dire que nous travaillons dans le domaine fréquentiel.

1.3.2.1 Première méthode : unification par utilisation des outils de traitement multirésolution

Les différentes représentations présentées dans le premier paragraphe ne sont pas homogènes car elles font apparaître des commutations. Il est nécessaire d'homogénéiser ces représentations sous la forme de cascades de transformations connues du point de vue des transformées en z . En observant les représentations précédentes, on observe que les commutations sont utilisées afin d'obtenir les composantes polyphases définies en (1.4) pour le signal d'entrée ou bien de sortie. Or, en utilisant les outils de décimation et interpolation, l'opération qui permet d'obtenir les composantes polyphases (1.4) à partir d'un signal $x(n)$ peut être réalisée par le traitement de la figure 1.10.

Les résultats sur la décimation et l'interpolation permettent de montrer que la transformée en z de l'entrée et la sortie de la figure 1.10 sont liées par la relation (1.39). Le détail de cette démonstration figure dans l'annexe A.2.

$$X'_k(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(W_N^p z) W_N^{pk} \quad (1.39)$$

En utilisant la structure récurrente de la figure 1.10, il est alors possible de réécrire les

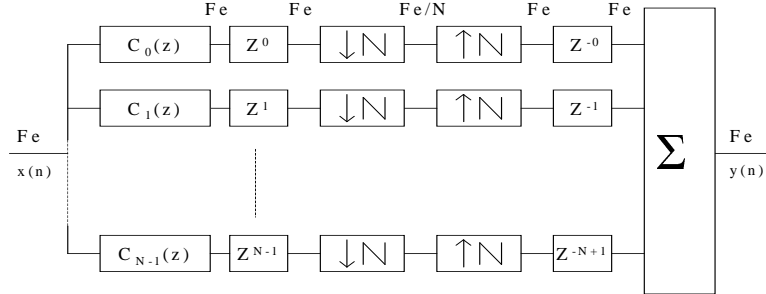


FIG. 1.11 – Réécriture de la structure SIMO à l'aide de décimations et interpolations

représentations précédentes (Figures 1.5, 1.6 et 1.7) sans commutation temporelle. On obtient ainsi les figures 1.11, 1.12 et 1.13. Dans chacune des figures 1.8, 1.9, 1.11, 1.12 et 1.13 on connaît parfaitement le comportement de chacun des blocs constitutifs du point de vue des transformées en z . Il est alors facile d'exprimer la sortie $Y(z)$ en fonction de l'entrée $X(z)$ pour chacune de ces figures. Les expressions obtenues permettent alors, par identification, d'établir les relations entre les transformées en z de ces filtres. Ces calculs et leurs résultats sont établis dans l'annexe A.3.

Parmi les résultats intéressants, notons que les $T_p(z)$ sont obtenus par TFD des $C_n(z)$ et que les $H_{ij}(z)$ (i ème ligne de $\mathbf{H}'(z)$) définis en (1.28) correspondent à la décomposition polyphase (1.11) des filtres $C_i(z)$ à une puissance de z près.

Symétriquement, les $T'_p(z)$ sont obtenus par TFD des $R_n(z)$ et les $H_{ij}(z)$ (j ème colonne de $\mathbf{H}'(z)$) définis en (1.28) correspondent à la décomposition polyphase (1.10) des filtres $R_j(z)$ à une puissance de z près.

1.3.2.2 Seconde méthode : unification par écriture matricielle

Une seconde approche permettant de retrouver les relations entre les grandeurs en z des différentes représentations LPTV est l'écriture matricielle. On remarque que les représentations précédentes sont caractérisées par des commutations en entrée (représentation MISO), en sortie (représentation SIMO), en entrée et en sortie (représentation MIMO) ou par aucune commutation (représentations avec filtres modulateurs).

Dans le cas d'une commutation, un signal $x(n)$ est entièrement défini par le vecteur polyphase

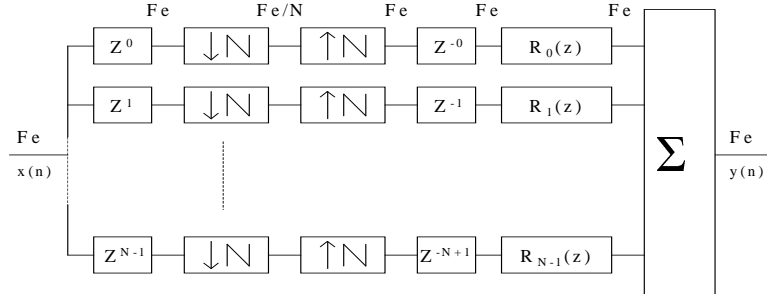


FIG. 1.12 – Réécriture de la structure MISO à l'aide de décimations et interpolations

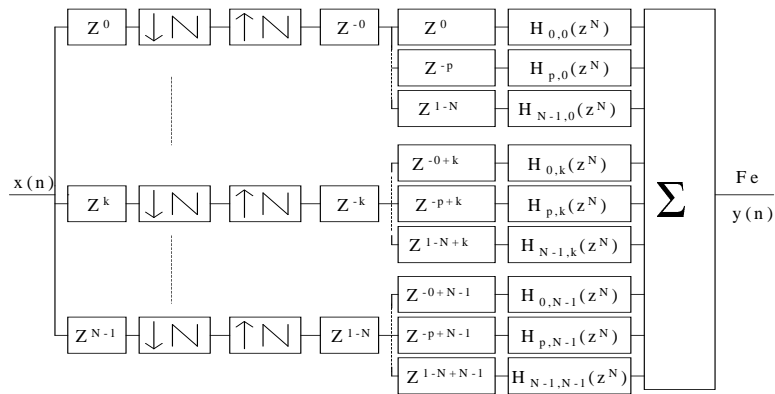


FIG. 1.13 – Réécriture de la structure MIMO à l'aide de décimations et interpolations

$\widehat{\mathbf{X}}'(z)$ (1.8). Dans le cas d'une non commutation, un signal est parfaitement déterminé par sa transformée en z $X(z)$. Pour des raisons d'homogénéité matricielle, nous caractérisons alors un signal non commuté par un vecteur colonne $\widetilde{\mathbf{X}}(z)$ (1.40) de longueur N . Nous appelons vecteur modulateurs ce vecteur qui définit de façon redondante le signal.

$$\widetilde{\mathbf{X}}(z) = \begin{bmatrix} X(z) & X(zW_N^1) & X(zW_N^2) & \dots & X(zW_N^{N-1}) \end{bmatrix}^t \quad (1.40)$$

Il est alors possible de montrer, la démonstration se trouvant dans l'annexe A.2, que quelque soit le signal $x(n)$, les vecteurs polyphases et modulateurs sont fonctions l'un de l'autre par les relations (1.41) où \mathbf{F}^- et \mathbf{F}^+ sont respectivement les matrices des coefficients de la TFD et la TFDI (TFD inverse).

$$\widetilde{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{F}^- \widehat{\mathbf{X}}'(z) \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{X}}'(z) = \frac{1}{N} \mathbf{F}^+ \widetilde{\mathbf{X}}(z) \quad (1.41)$$

Les quatre représentations possibles d'un filtre LPTV correspondent alors à une écriture de l'entrée et de la sortie soit par le vecteur polyphase, soit par le vecteur modulateurs. Ainsi, le filtre LPTV peut être caractérisé par l'une des quatre matrices (1.42), (1.43), (1.44) ou (1.45). Nous appellerons par la suite ces matrices les matrices LPTV. Il est à remarquer que $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ est identique à la matrice $\mathbf{H}'(z)$ définie en (1.27).

Structure filtres modulateurs

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{A}^{1,1}(z) \widetilde{\mathbf{X}}(z) \quad (1.42)$$

Structure MISO

$$\widetilde{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{A}^{1,2}(z) \widehat{\mathbf{X}}'(z) \quad (1.43)$$

Structure SIMO

$$\widehat{\mathbf{Y}}'(z) = \mathbf{A}^{2,1}(z) \widetilde{\mathbf{X}}(z) \quad (1.44)$$

Structure MIMO

$$\widehat{\mathbf{Y}}'(z) = \mathbf{A}^{2,2}(z) \widehat{\mathbf{X}}'(z) \quad (1.45)$$

Ensuite, la méthode pour établir les relations entre les filtres LIT définissant les filtres LPTV se déroule en trois étapes. Tout d'abord, on utilise les résultats (1.46) et (1.41) qui nous permettent, à partir des relations (1.42, 1.43, 1.44 et 1.45), d'obtenir les relations (1.47, 1.48, 1.49 et 1.50) entre les matrices LPTV.

$$\mathbf{F}^- \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^+ \mathbf{F}^- = N \mathbf{I}_N \quad (1.46)$$

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \frac{1}{N} \mathbf{A}^{1,2}(z) \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^- \mathbf{A}^{2,1}(z) = \frac{1}{N} \mathbf{F}^- \mathbf{A}^{2,2}(z) \mathbf{F}^+ \quad (1.47)$$

$$\mathbf{A}^{1,2}(z) = \mathbf{A}^{1,1}(z) \mathbf{F}^- = \mathbf{F}^- \mathbf{A}^{2,1}(z) \mathbf{F}^- = \mathbf{F}^- \mathbf{A}^{2,2}(z) \quad (1.48)$$

$$\mathbf{A}^{2,1}(z) = \frac{1}{N} \mathbf{F}^+ \mathbf{A}^{1,1}(z) = \frac{1}{N^2} \mathbf{F}^+ \mathbf{A}^{1,2}(z) \mathbf{F}^+ = \frac{1}{N} \mathbf{A}^{2,2}(z) \mathbf{F}^+ \quad (1.49)$$

$$\mathbf{A}^{2,2}(z) = \frac{1}{N} \mathbf{F}^+ \mathbf{A}^{1,1}(z) \mathbf{F}^- = \frac{1}{N} \mathbf{F}^+ \mathbf{A}^{1,2}(z) = \mathbf{A}^{2,1}(z) \mathbf{F}^- \quad (1.50)$$

Ensuite, par identification avec les représentations précédentes des filtres LPTV, on obtient les liens suivants entre les filtres LIT et les matrices LPTV.

$$[\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{i,j} = T_{\underline{j-i}_N}(zW^j) = T'_{\underline{j-i}_N}(zW^i) \quad (1.51)$$

$$[\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{i,j} = W^{-ij} R_j(zW^i) \quad (1.52)$$

$$[\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,j} = \frac{1}{N} W^{ij} C_i(zW^j) \quad (1.53)$$

$$[\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,j} = z^{j-i} H_{i,j}(z^N) \quad (1.54)$$

On en déduit les valeurs des filtres LIT (1.55, 1.56, 1.57, 1.58 et 1.59) en fonction des matrices LPTV. En utilisant les expressions (1.47, 1.48, 1.49 et 1.50), on obtient les relations entre les différents filtres LIT. Ces calculs et leurs résultats sont établis dans l'annexe A.4. Cette seconde méthode s'avère plus systématique que la première.

$$T_i(z) = [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{N-i,0} \quad (1.55)$$

$$T'_j(z) = [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{0,j} \quad (1.56)$$

$$R_j(z) = [\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{0,j} \quad (1.57)$$

$$C_i(z) = N [\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,0} \quad (1.58)$$

$$H_{i,j}(z^N) = z^{i-j} [\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,j} \quad (1.59)$$

1.4 Liens entre filtres LPTV numériques et bancs de filtres

Parmi les sujets liés au traitement multicadence, l'étude des bancs de filtres est un domaine qui bénéficie d'une très riche littérature ([9], [10], [11], [12]). Or, il se trouve qu'un banc de filtres constitue un système LPTV. Considérer un banc de filtres comme un système LPTV n'est pas nouveau, certains travaux unificateurs faisant date [22]. Néanmoins, il est intéressant pour nous d'établir clairement le lien exact entre ces systèmes LPTV de bancs de filtres et les filtres LPTV tels que nous les avons définis dans le premier paragraphe de ce chapitre. L'intérêt est alors

la possibilité d'appliquer certains résultats, fruits de l'étude des bancs de filtres, au cas de nos filtres LPTV. Ce parallèle sera intéressant notamment dans le second chapitre où nous abordons le problème de l'inversibilité d'un filtre LPTV. Ce paragraphe présente, dans un premier temps, les bancs de filtres ainsi que les grandeurs traditionnellement utilisées pour les définir, puis dans un second temps, nous définissons une notion d'équivalence entre les filtres LPTV définis dans le premier paragraphe et les bancs de filtres.

1.4.1 Bancs de filtres à décimation maximale

1.4.1.1 Présentation des bancs de filtres à décimation maximale

Un banc de filtres à décimation maximale est un système défini par deux familles de N filtres LIT, $F_i(z)$ et $G_i(z)$, et se présente sous la forme de la figure 1.14. En traitement du signal, les applications liées à cette structure sont très nombreuses et notamment l'analyse spectrale en sous bande.

Le principe d'un banc de filtres est d'extraire des sous bandes du signal initial grâce aux filtres $F_i(z)$ appelés filtres d'analyse. Chaque sous bande peut alors être soumise à un traitement particulier à préciser selon l'application, puis le signal est reconstruit grâce aux filtres $G_i(z)$, appelés filtres de synthèse. Le choix du facteur de décimation dans chaque sous bande de la figure 1.14 est libre. Nous nous intéressons au cas où ce facteur est égal au nombre de filtres d'analyse. Nous parlons alors de banc de filtres à décimation maximale. Cela signifie que le facteur de décimation est maximal dans l'hypothèse où l'on veut pouvoir reconstruire le signal initial ensuite. D'autre part, nous n'avons besoin d'aucune hypothèse sur la forme des filtres d'analyse dans ce paragraphe. Bien souvent, dans les applications classiques de bancs de filtres, il faut noter que l'on demande aux filtres $F_i(z)$ de réaliser un partitionnement fréquentiel régulier. C'est par exemple le cas d'une grande famille de ces bancs de filtres que sont les filtres QMF (Quadrature Mirror Filters), [30].

1.4.1.2 Caractérisation polyphase d'un banc de filtres à décimation maximale

Un banc de filtres à décimation maximale est défini entièrement par les filtres d'analyse $F_i(z)$ et les filtres de synthèse $G_i(z)$. Une structure courante ([11]) pour représenter un banc de filtres consiste à décomposer les filtres d'analyse et de synthèse à l'aide de leurs composantes polyphases. Pour cela, nous utilisons la décomposition polyphase (1.60) conformément à (1.10) pour chacun

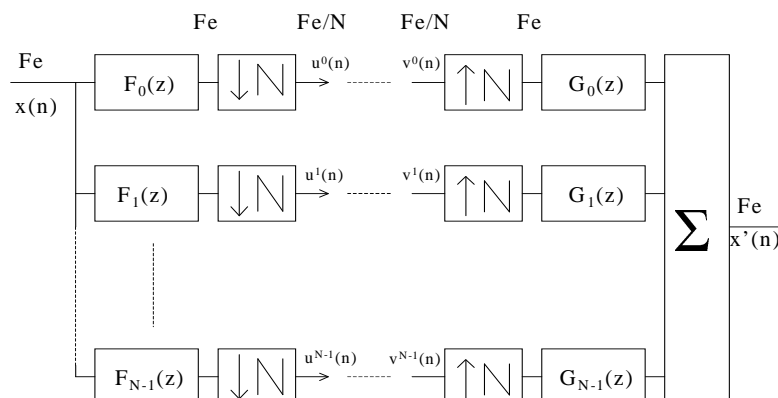


FIG. 1.14 – Structure d'un banc de filtres à décimation maximale

des filtres d'analyse $F_i(z)$ ainsi qu'une décomposition polyphase (1.61) conformément à (1.11) pour chacun des filtres de synthèse $G_i(z)$.

$$F_i(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} F_{i,k}(z^N) \quad (1.60)$$

$$G_i(z) = \sum_{k=0}^{N-1} z^{-(N-1-k)} G_{k,i}(z^N) \quad (1.61)$$

On obtient alors la structure polyphase de la figure 1.15 où les matrices $\mathbf{F}(z)$ et $\mathbf{G}(z)$ sont définies par $[\mathbf{F}(z)]_{i,k} = F_{i,k}(z)$ et $[\mathbf{G}(z)]_{i,k} = G_{k,i}(z)$.

1.4.2 Relation entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale

Il y a différentes façons de lier un filtre LPTV défini dans le premier paragraphe et un banc de filtres à décimation maximale. On peut, par exemple, montrer que l'intégralité d'un banc de filtres est un filtre LPTV particulier [22]. En ce qui nous concerne, l'intérêt du rapprochement est de pouvoir appliquer les résultats sur les bancs de filtres au cas des filtres LPTV et notamment pour l'étude de l'inversibilité d'un filtre LPTV. Ainsi, nous avons choisi de mettre en lumière une équivalence entre un filtre LPTV et la partie analyse ou la partie de synthèse d'un banc de filtres, bien que ces deux transformations ne soient pas rigoureusement de même nature. En effet, un filtre LPTV transforme un signal d'entrée en un signal de sortie ayant la même fréquence

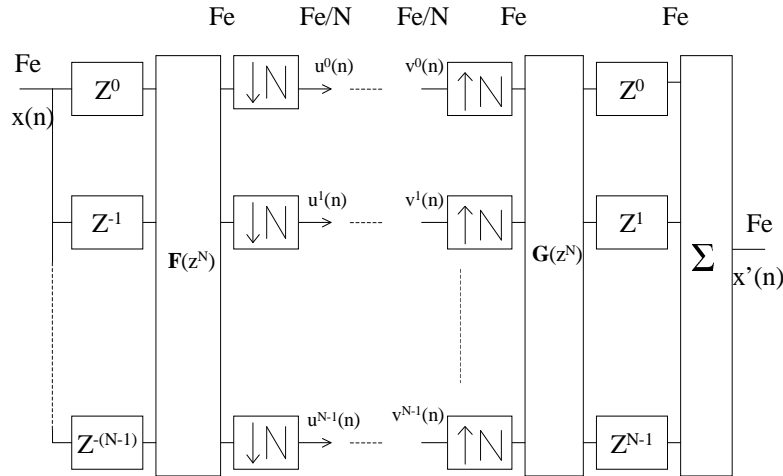


FIG. 1.15 – Structure polyphase d'un banc de filtres à décimation maximale

d'échantillonnage. Le banc d'analyse transforme un signal d'entrée en N signaux sous échantillonnés par N et le banc de synthèse transforme N signaux en un signal unique suréchantillonné par N . Malgré cette différence, nous allons définir deux notions d'équivalence, la première entre un filtre LPTV et un banc d'analyse, la seconde entre un filtre LPTV et un banc de synthèse.

Etant donné un filtre LPTV défini par l'une des représentations du premier paragraphe, nous considérons $x(n)$ l'entrée de ce filtre LPTV et appelons $y(n)$ la sortie de ce filtre. Parallèlement, nous considérons un banc d'analyse défini par les N filtres d'analyse $F_i(z)$. Nous appliquons le même signal $x(n)$ à l'entrée de ce banc d'analyse et appelons $u^i(n)$ les sorties des différentes branches conformément à la figure 1.14. Nous dirons que ce banc d'analyse et le filtre LPTV sont équivalents si quelque soit le signal d'entrée $x(n)$, nous avons la relation : $u^i(n) = y_i(n)$ où $y_i(n)$ est la i -ème composante polyphase de $y(n)$ définie en (1.1). Autrement dit, un banc d'analyse et un filtre LPTV sont équivalents si les sorties du banc d'analyse sont égales aux composantes polyphases définies en (1.1) de la sortie du filtre LPTV.

De la même façon, étant donné un filtre LPTV défini par l'une des représentations du premier paragraphe, nous considérons $x(n)$ l'entrée de ce filtre LPTV et appelons $y(n)$ la sortie de ce filtre. Parallèlement, nous considérons un banc de synthèse défini par les N filtres de synthèse $G_i(z)$. D'après les notations de la figure 1.14, nous appliquons au banc de synthèse les entrées

$v^i(n)$ définies par $v^i(n) = x_i(n)$ où les $x_i(n)$ sont les composantes polyphases de $x(n)$ définies en (1.1). Nous dirons alors que ce banc de synthèse et le filtre LPTV sont équivalents si leurs sorties sont identiques quelque soit le signal d'entrée $x(n)$.

Il est facile de vérifier qu'avec ces deux définitions d'équivalence, un banc d'analyse, défini par ses N filtres d'analyse $F_i(z)$, est équivalent à un filtre LPTV défini par ses filtres SIMO $C_i(z)$ (Figure 1.5) si et seulement si la relation (1.62) est vérifiée. De la même façon, un banc de synthèse, défini par ses N filtres de synthèse $G_i(z)$, est équivalent à un filtre LPTV défini par ses filtres MISO $R_i(z)$ (Figure 1.6) si et seulement si la relation (1.63) est vérifiée

$$C_i(z) = z^{-i}F_i(z) \quad (1.62)$$

$$R_i(z) = z^iG_i(z) \quad (1.63)$$

Puisque toutes les représentations des filtres LPTV sont équivalentes, il est possible, grâce aux résultats du deuxième paragraphe, de déduire de (1.62) (resp. de (1.63)) les relations entre les filtres d'analyse $F_i(z)$ (resp. les filtres de synthèse $G_i(z)$) et les filtres LIT qui caractérisent les autres représentations d'un filtre LPTV.

Parmi celles ci, une relation utile pour le second chapitre est celle qui lie les filtres MIMO $H_{i,j}^{an}(z)$ (resp. $H_{i,j}^{sy}(z)$) et les composantes polyphases des filtres d'analyse $F_i(z)$ (resp. les composantes polyphases des filtres de synthèse $G_i(z)$). On montre ainsi dans l'annexe A.5 que la relation (1.62) (resp. (1.63)) se traduit par la relation (1.64) (resp. (1.65)) entre les filtres MIMO et les composantes polyphases $F_{i,j}(z)$ des filtres d'analyse du banc d'analyse équivalent (resp. les composantes polyphases $G_{i,j}(z)$ des filtres de synthèse du banc de synthèse équivalent). Ces relations peuvent aussi s'écrire matriciellement (1.66) et (1.67). Dans cette relation, les matrices $\mathbf{H}^{an}(z)$ et $\mathbf{H}^{sy}(z)$ correspondent à la matrice MIMO définie en (1.27), $\boldsymbol{\theta}(z)$ est la matrice définie en (1.68) et \mathbf{I}'_N est la matrice avec la diagonale opposée (i.e $[\mathbf{I}'_N]_{i,j} = \delta(N-1-(j-i))$).

$$\begin{cases} H_{i,0}^{an}(z) = F_{i,0}(z) \\ H_{i,j}^{an}(z) = z^{-1}F_{i,N-j}(z) \text{ pour } j \in [1 : N-1] \end{cases} \quad (1.64)$$

$$H_{j,i}^{sy}(z) = G_{N-j-1,i}(z) \text{ pour } j \in [0 : N-1] \quad (1.65)$$

$$\mathbf{H}^{an}(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{F}(z^N) \boldsymbol{\theta}(z^N) \mathbf{D}_z \quad (1.66)$$

$$\mathbf{H}^{sy}(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{I}'_N \mathbf{G}(z^N) \mathbf{D}_z \quad (1.67)$$

$$\boldsymbol{\theta}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & z^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & z^{-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & z^{-1} & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & z^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

1.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons présenté les filtres LPTV. Nous sommes partis des modélisations classiques d'un filtre LPTV numérique. La première, l'équation aux différences linéaires périodique, est une généralisation de l'équation linéaire aux différences dans le cas d'un filtre invariant par rapport au temps. La seconde, quant à elle, introduit les fonctions de Green. Ces fonctions qui s'apparentent à des réponses impulsionnelles offrent un modèle de filtre LPTV qui est une généralisation de la relation de filtrage dans le cas d'un filtre invariant par rapport au temps. A partir de ces deux modèles de filtres LPTV, nous avons cherché à représenter pratiquement un filtre LPTV. Deux familles de représentations sont alors apparues. Une première famille regroupe les représentations utilisant une commutation temporelle. Les représentations de cette famille diffèrent alors selon que l'on utilise une commutation en entrée (MISO), en sortie (SIMO) ou bien les deux (MIMO). Dans la seconde famille de représentations, les commutations temporelles sont transformées en opérations de modulations fréquentielles.

Ensuite, deux méthodes ont été présentées afin d'uniformiser ces représentations et permettre d'établir les relations mathématiques entre les différentes grandeurs en z qui caractérisent chacune des précédentes représentations d'un filtre LPTV. Ces deux méthodes empruntent des résultats de traitement multiscadence. Un lien fort entre traitement multiscadence et filtres LPTV peut être, en effet, établi et nous avons choisi, dans un dernier temps, de rapprocher les bancs de filtres et les filtres LPTV. Nous avons alors défini ce que nous appelons l'équivalence entre un filtre LPTV et un banc d'analyse ainsi que l'équivalence entre un filtre LPTV et un banc de synthèse. Ce choix n'est pas anodin. En effet, les bancs de filtres bénéficient d'une très riche littérature. Les résultats y sont de ce fait nombreux et notamment ceux concernant les conditions sur un banc de filtres afin qu'il permette une reconstruction parfaite du signal. Or, nous montrerons, dans le chapitre suivant, que l'inversibilité d'un filtre LPTV est équivalente à la propriété de reconstruction

parfaite pour un banc de filtres équivalent. Ce résultat sera exploité dans le prochain chapitre qui traite de l'inversibilité d'un filtre LPTV.

Pour clore ce premier chapitre, notons qu'en plus de l'équation aux différences linéaire périodique et des fonctions de Green, il existe une troisième modélisation pour un filtre LPTV qui est la modélisation par matrices d'états. Nous avons volontairement occulté cette description car son utilisation est peu courante dans le traitement du signal et parce que sa prise en compte théorique n'a semblé apporter aucun enrichissement dans notre recherche de représentations de filtres LPTV numériques. D'autre part, nous n'avons pas abordé les systèmes LPTV avec un changement de fréquence d'échantillonnage entre l'entrée et la sortie. A ce propos, un travail de généralisation a été proposé par [21].

Chapitre 2

Inversibilité des filtres LPTV numériques

2.1 Introduction

Ce second chapitre aborde une question essentielle dès lors que l'on souhaite utiliser des filtres LPTV en communications numériques, à savoir à quelles conditions un filtre LPTV est inversible. En effet, si l'on admet qu'un filtre LPTV soit un élément d'une chaîne de communications numériques, et cela quelque soit le lieu dans la chaîne d'émission où est inséré le filtre, le problème de la récupération du signal en réception se pose. La capacité à récupérer le signal en réception est alors dans ce contexte liée à la possibilité d'inverser la transformation occasionnée par le filtre LPTV.

Dans le cas général, et quelque soit la forme envisagée du filtre LPTV parmi celles décrites dans le premier chapitre, l'inversibilité d'un filtre LPTV nous conduit à un problème d'inversibilité matricielle ([25], [24]). Ainsi, pour un filtre LPTV parfaitement connu, la prise en compte de cette condition matricielle permet de vérifier si ce filtre est inversible ou ne l'est pas. Il est important de souligner que cette condition ne fournit en aucun cas une condition a priori sur la construction d'un filtre LPTV pour que celui ci soit inversible. Or ce travail de thèse ayant pour objectif de trouver des applications des filtres LPTV dans le domaine des communications numériques, il nous a semblé qu'une étape importante était d'être capable de générer des filtres LPTV inversibles. Il est apparu que ce problème de construction de filtres LPTV inversibles souffrait d'un manque de travaux puisque selon nos recherches, seul [23] propose explicitement une

méthode de construction de filtres LPTV inversibles basée sur une forme particulière des filtres modulateurs. Ainsi, à notre tour, nous proposons une classe de filtres LPTV inversibles définis par une forme particulière de la matrice modulateurs [27]. Nous abordons ensuite le problème de l'inversibilité par le biais des bancs de filtres. A la lumière de l'équivalence introduite au premier chapitre entre filtres LPTV et bancs de filtres, nous verrons que la propriété d'inversibilité d'un filtre LPTV est équivalente à la propriété de reconstruction parfaite pour le banc de filtres équivalent. Or, il existe parmi les nombreux travaux sur les bancs de filtres une méthode de construction d'une famille de bancs de filtres à reconstruction parfaite basée sur l'utilisation de matrices unitaires ([12], [33]). Nous proposons ainsi, grâce aux relations d'équivalences définies dans le premier chapitre entre filtres LPTV et bancs de filtres, de généraliser cette méthode à la synthèse de filtres LPTV inversibles.

Le premier paragraphe présente l'écriture matricielle équivalente à l'inversibilité d'un filtre LPTV et énonce une condition nécessaire et suffisante générale pour l'inversibilité d'un tel filtre. Dans le deuxième paragraphe, nous proposons une classe de filtres LPTV inversibles. La caractérisation de cette famille particulière de filtres LPTV est basée sur une structure particulière de la matrice modulateurs dont la forme assure l'inversibilité. Enfin, dans le troisième paragraphe, le parallèle entre inversibilité d'un filtre LPTV et reconstruction parfaite pour un banc de filtres est présenté. Nous proposons alors une généralisation aux filtres LPTV d'une méthode de synthèse de bancs de filtres à reconstruction parfaite basée sur les matrices unitaires.

2.2 Inversibilité d'un filtre LPTV numérique

Dans le cas d'un filtre LIT, la condition d'inversibilité est bien connue et se caractérise par l'absence de racines pour la transformée en z sur le cercle unité. Le filtre inverse est alors stable si de plus aucune racine ne se trouve à l'extérieur de ce cercle. Dans le cas d'un filtre LPTV, nous allons voir que cette condition scalaire se transforme en une condition matricielle ([25], [24]).

2.2.1 Caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LPTV numérique

Nous choisissons de présenter le problème de l'inversibilité d'un filtre LPTV en utilisant sa représentation modulateurs (Figure 1.9), puis nous généraliserons le résultat obtenu aux autres représentations définies dans le premier chapitre. Rappelons que nous avons vu dans le premier chapitre que les composantes modulateurs des entrées et sorties d'un filtre LPTV étaient liées par

l'équation matricielle (2.1). De plus, l'expression de la matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ en fonction des filtres modulateurs (1.51) se traduit par la forme particulière (2.2) de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$.

$$\tilde{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{A}^{1,1}(z) \tilde{\mathbf{X}}(z) \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \begin{bmatrix} T'_0(z) & T'_1(z) & \dots & T'_{N-1}(z) \\ T'_{N-1}(zW_N) & T'_0(zW_N) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T'_1(zW_N^{N-1}) & T'_2(zW_N^{N-1}) & \dots & T'_0(zW_N^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Un filtre LPTV est inversible s'il est possible de récupérer les composantes modulateurs $\tilde{\mathbf{X}}(z)$ à partir de $\tilde{\mathbf{Y}}(z)$ quelque soit $\tilde{\mathbf{X}}(z)$. Une telle propriété est donc liée à l'existence d'un second filtre LPTV tel que la cascade de ces deux filtres résulte en la matrice identité. Ainsi, nous obtenons la caractérisation suivante pour l'inversibilité d'un filtre LPTV dont une démonstration peut se trouver, par exemple, dans [25].

Un filtre LPTV défini par sa matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est inversible si et seulement si l'ensemble des racines du déterminant de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ sont strictement incluses à l'intérieur du cercle unité. Une expression de la matrice modulateurs $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ du filtre inverse est donnée par l'inverse (2.3) de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ où t représente l'opération transposé et $\text{com}(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ désigne la matrice des cofacteurs de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$.

$$\mathbf{B}^{1,1}(z) = (\mathbf{A}^{1,1}(z))^{-1} = \frac{\mathbf{I}_N}{\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))} [\text{com}(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^t \quad (2.3)$$

Il est utile ici de commenter le résultat (2.3). Tout d'abord, on montre dans l'annexe B.1 que si $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ existe alors cette matrice possède aussi la forme particulière d'une matrice modulateurs (2.2) et représente donc bien un filtre LPTV. De plus, il est intéressant de remarquer que la matrice $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ est constituée par le produit de deux termes. Concernant le premier terme, on montre, toujours dans l'annexe B.1, que $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ est nécessairement une fonction de z^N et qu'ainsi ce premier facteur s'avère être la représentation modulateurs d'un filtre LIT de transformée en $z [\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1}$. Quant au second facteur, on montre aussi qu'il représente la matrice modulateurs d'un filtre LPTV. Une particularité de ce second filtre LPTV est qu'il est RIF si le filtre LPTV initial est RIF. Ainsi, dans le cas général où un filtre LPTV RIF est inversible, le filtre LPTV inverse est un filtre LPTV RII à cause de $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1}$. Ainsi, le filtre LPTV inverse peut être synthétisé par la cascade d'un filtre LIT et d'un filtre LPTV.

Nous avons choisi ici de présenter l'inversibilité d'un filtre LPTV en utilisant la représentation modulateurs. Tout autre choix de représentations parmi celles présentées dans le premier chapitre conduit à l'énoncé d'une même caractérisation matricielle de l'inversibilité d'un filtre LPTV. Ces conditions sont toutes équivalentes car les matrices (1.47, 1.48, 1.49 et 1.50) sont liées entre elles par des transformations de TFD ou TFDI inversibles. On vérifie ainsi facilement que les déterminants de ces matrices LPTV sont donc des fonctions de z égales les unes aux autres à une constante multiplicative près.

2.2.2 Illustration de l'inversibilité d'un filtre LPTV

Nous allons illustrer la caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LPTV par deux exemples simples de filtres LPTV RIF de période 2. Dans le premier cas, nous choisissons deux filtres modulateurs $T'_0(z)$ et $T'_1(z)$ RIF de degré 1. Dans le second cas, nous choisissons deux filtres modulateurs $T'_0(z)$ et $T'_1(z)$ RIF de degré 2. Nous évaluons ensuite dans ces deux cas l'expression analytique du déterminant de la matrice modulateurs. Dans le cas 2 périodique, le calcul du déterminant reste simple et les expressions obtenues permettent d'établir des conditions sur le choix des filtres afin que le filtre LPTV soit inversible.

2.2.2.1 Filtres modulateurs RIF de degré 1

Nous choisissons les filtres modulateurs de la forme $T'_0(z) = 1 + az^{-1}$ et $T'_1(z) = 1 + bz^{-1}$. La matrice modulateurs prend alors la forme (2.4) et l'évaluation du déterminant nous donne (2.5).

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \begin{bmatrix} 1 + az^{-1} & 1 + bz^{-1} \\ 1 - bz^{-1} & 1 - az^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$\det(\mathbf{A}^{1,1}(z)) = z^{-2}(b^2 - a^2) \quad (2.5)$$

Nous vérifions ici que le déterminant de ce filtre LPTV 2 périodique est bien une fonction de z^2 . De plus, ce déterminant est un simple retard. Ainsi, d'après la caractérisation précédente, ce filtre LPTV est inversible si et seulement si $b^2 \neq a^2$. Le filtre LPTV inverse a alors la matrice

modulateurs $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ (2.6).

$$\mathbf{B}^{1,1}(z) = \frac{z^2}{b^2 - a^2} \begin{bmatrix} 1 - az^{-1} & -1 - bz^{-1} \\ -1 + bz^{-1} & 1 + az^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Il est très intéressant de remarquer que le filtre initial est défini par deux filtres modulateurs RIF et que le filtre LPTV inverse résulte en un filtre LPTV RIF aussi. Ce résultat surprenant vient du fait que le déterminant de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est, dans ce cas, un retard pur.

2.2.2.2 Filtrés modulateurs RIF de degré 2

Nous illustrons l'inversibilité d'un filtre LPTV, à nouveau de période 2, mais de filtres modulateurs RIF de degré 2, c'est à dire que les filtres modulateurs sont de la forme $T_0'(z) = (1 + az^{-1})(1 + a'z^{-1})$ et $T_1'(z) = (1 + bz^{-1})(1 + b'z^{-1})$. Nous obtenons alors pour la matrice modulateurs l'expression (2.7) et le calcul du déterminant nous conduit à l'expression analytique (2.8).

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \begin{bmatrix} (1 + az^{-1})(1 + a'z^{-1}) & (1 + bz^{-1})(1 + b'z^{-1}) \\ (1 - bz^{-1})(1 - b'z^{-1}) & (1 - az^{-1})(1 - a'z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\det(\mathbf{A}^{1,1}(z)) = z^{-2} [(a^2 a'^2 - b^2 b'^2) z^{-2} + b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2] \quad (2.8)$$

On vérifie à nouveau que le déterminant de ce filtre LPTV de période 2 est une fonction de z^2 . La discussion sur l'inversibilité devient déjà plus fastidieuse pour ce filtre LPTV RIF d'ordre 2. Si $a^2 a'^2 - b^2 b'^2 = 0$, le filtre LPTV est inversible si et seulement si $b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2 \neq 0$. Sinon, $a^2 a'^2 - b^2 b'^2 \neq 0$ et dans ce cas, le filtre LPTV est inversible si et seulement si $|b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2| > |a^2 a'^2 - b^2 b'^2|$. La matrice modulateurs du filtre LPTV inverse est alors donnée par (2.9).

$$\mathbf{B}^{1,1}(z) = \frac{1}{\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))} \begin{bmatrix} (1 - az^{-1})(1 - a'z^{-1}) & (-1 - bz^{-1})(1 + b'z^{-1}) \\ (-1 + bz^{-1})(1 - b'z^{-1}) & (1 + az^{-1})(1 + a'z^{-1}) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Nous remarquons que dans le cas particulier où $a^2 a'^2 - b^2 b'^2 = 0$ et $b^2 + b'^2 - a^2 - a'^2 \neq 0$, le filtre LPTV inverse est à nouveau un filtre LPTV RIF.

Ces deux exemples illustrent bien la complexité d'une méthode pour construire un filtre LPTV inversible. Même pour un cas trivial de filtre LPTV RIF de période 2 et de degré 2, la discussion sur le choix des filtres modulateurs pour assurer l'inversibilité du filtre LPTV devient assez complexe. Nous proposons alors dans le paragraphe suivant une caractérisation de filtres LPTV inversibles basée sur une forme particulière de la matrice modulateurs.

2.3 Proposition d'une famille de filtres LPTV inversibles

Nous venons de voir, dans le premier paragraphe de ce chapitre, une caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LPTV de période N . Cette caractérisation matricielle est une généralisation de la caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LIT. La transformée en z du filtre LIT se trouve alors remplacée par le déterminant d'une matrice de taille N , la matrice considérée dépendant de la représentation adoptée pour le filtre LPTV étudié. Etant donné un filtre LPTV parfaitement connu, il est alors facile de vérifier si ce filtre LPTV est inversible par le calcul d'un déterminant. Malheureusement, cette condition matricielle ne nous éclaire en rien sur la façon de construire un filtre LPTV afin que celui ci soit inversible. Un tel problème de construction de filtres LPTV inversible n'a été traité selon nos recherches bibliographiques que dans [23]. Le problème y est abordé par l'étude de la matrice modulateurs des filtres LPTV. En effet, [23] propose de choisir des filtres modulateurs dont la réponse fréquentielle est constante sur des intervalles de longueur $\frac{1}{N}$ en fréquence normalisée. La génération d'un tel filtre LPTV inversible nécessite alors seulement la génération d'une matrice de constantes inversible. Nous proposons une nouvelle famille de filtres LPTV [27] caractérisée par une forme particulière de la matrice modulateurs. L'appartenance d'un filtre LPTV à cette famille se traduit par des filtres modulateurs dont le module de la réponse fréquentielle est périodique de période $\frac{1}{N}$. L'inversibilité de complexité matricielle en général pour un filtre LPTV se réduit alors pour de tels filtres à un problème d'inversibilité de N filtres LIT. La synthèse d'un tel filtre nécessite finalement, dans ce cas, la génération de seulement N filtres LIT inversibles.

Nous présentons un bref rappel sur les matrices circulaires [26], puis nous proposons la décomposition de n'importe quelle matrice modulateurs en une somme faisant apparaître N matrices circulaires. Ensuite, à partir de cette décomposition, nous définissons une famille de filtres LPTV inversibles ainsi qu'une méthode pour construire des filtres appartenant à cette famille.

2.3.1 Caractérisation d'une famille de filtres inversibles par la matrice modulateurs

2.3.1.1 Rappel sur les matrices circulaires

Etant donnée une matrice carrée \mathbf{V} de taille $N \times N$, cette matrice est circulaire si elle vérifie $[\mathbf{V}]_{i,j} = [V]_{0,j-i_N}$. Une telle matrice est ainsi entièrement définie par la connaissance de la première ligne $(v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$, les autres lignes étant obtenues à partir de celle-ci par permutation circulaire. La forme de \mathbf{V} est alors donnée par (2.10).

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \dots & v_{N-1} \\ v_{N-1} & v_0 & \dots & v_{N-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1 & v_2 & \dots & v_0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Une propriété intéressante pour la suite, concernant les matrices circulaires [26], est qu'une telle matrice est diagonalisable. Une matrice des vecteurs propres est alors constituée de la matrice \mathbf{F}^- des coefficients de TFD inverse et les valeurs propres sont données par les N valeurs de TFD inverse des N valeurs $(v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$. On obtient ainsi l'écriture (2.11) de \mathbf{V} par diagonalisation où \mathbf{A} est une matrice diagonale définie par $[\mathbf{A}]_{i,j} = \delta(i-j) \sum_{k=0}^{N-1} v_k W_N^{-ki}$.

$$\mathbf{V} = \frac{1}{N} \mathbf{F}^- \mathbf{A} \mathbf{F}^+ \quad (2.11)$$

2.3.1.2 Décomposition de toute matrice modulateurs à l'aide de matrices circulaires

Nous considérons $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ la matrice modulateurs d'un filtre LPTV quelconque. A l'image de la décomposition polyphase de n'importe quel filtre LIT (1.10), il est possible de décomposer la matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ en utilisant les composantes polyphases de chacun des N filtres modulateurs $\{T'_p(z)\}_{0 \leq p \leq N-1}$. Cette opération se traduit alors par une décomposition de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ en une somme faisant apparaître N matrices circulaires et nous avons le résultat suivant.

Toute matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ d'un filtre LPTV est décomposable selon N matrices circulaires $\mathbf{circu}_l(z^N)$ (2.12) où $\mathbf{D}_{W_N^-}$ est la matrice diagonale composée des N racines N ième de l'unité (i.e $[D_{W_N^-}]_{i,j} = \delta(i-j) W_N^{-i}$).

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} (\mathbf{D}_{W_N^-})^l \mathbf{circu}_l(z^N) \quad (2.12)$$

Pour parvenir à ce résultat, nous considérons la décomposition polyphase (1.10) de chacun des filtres modulateurs et nous notons $T'_{p,l}(z)$ la l ième composante polyphase du p ième filtre modulateur $T'_p(z)$. Avec cette notation, nous obtenons pour $T'_p(z)$ l'écriture polyphase (2.13).

$$T'_p(z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} T'_{p,l}(z^N) \quad (2.13)$$

Ensuite, en décomposant chacun des termes (1.51) de la matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ selon (2.13), nous parvenons au résultat annoncé (2.12) où l'expression des matrices circulaires $\mathbf{circu}_l(z^N)$ en fonction des composantes polyphases est donnée par (2.14).

$$[\mathbf{circu}_l(z^N)]_{i,j} = T'_{\underline{j-i}_N, l}(z^N) \quad (2.14)$$

2.3.1.3 Caractérisation d'une famille de filtres LPTV inversibles par leur matrice modulateurs

Nous avons vu dans les propriétés des matrices circulaires que celles ci sont diagonalisables. L'inversibilité d'une telle matrice est alors équivalente à l'inversibilité de la matrice diagonale. Les éléments de la matrice diagonale sont dans ce cas faciles à calculer comme TFD inverse de la première ligne de la matrice circulaire. Ainsi, le problème de l'inversibilité d'une matrice modulateurs qui est de complexité matricielle dans le cas général est transformé en un problème d'inversibilité de N filtres LIT si cette matrice modulateurs a la propriété d'être circulaire.

Dans le cas général d'un filtre LPTV, nous venons de voir que la matrice modulateurs se décompose en la somme de N matrices circulaires pondérées. Afin de pouvoir exploiter les propriétés des matrices circulaires, notre question est alors : à quelle condition nécessaire et suffisante la matrice modulateurs d'un filtre LPTV est elle circulaire? La réponse à cette question nous permet de caractériser un ensemble particulier de filtres LPTV. Nous généralisons alors ce résultat pour définir une famille de filtres LPTV dont l'inversibilité est équivalente à l'inversibilité d'une matrice circulaire. Pour cette famille de filtres LPTV, la condition générale matricielle d'inversibilité se trouve alors réduite à la condition d'inversibilité de N filtres LIT. Ce résultat fournit dans le même temps une méthode de construction de filtres LPTV inversibles.

2.3.1.3-a Caractérisation des filtres LPTV à matrice modulateurs circulaire : définition de l'ensemble Δ_0

Nous désirons caractériser les filtres LPTV dont la matrice modulateurs est circulaire et nous établissons la proposition suivante dont la démonstration se trouve dans l'annexe B.2.

Etant donné un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$, cette matrice est circulaire si et seulement si chaque filtre modulateur ne possède que la première composante polyphase non nulle, c'est à dire $T'_{p,l}(z) = 0$ pour $l \neq 0$.

Ainsi, l'ensemble des filtres LPTV à matrice modulateurs circulaire est constitué de l'ensemble des filtres LPTV tels que les filtres modulateurs LIT $T'_p(z)$ sont tous des fonctions de z^N . Nous appelons Δ_0 cet ensemble. Il est facile de vérifier, en utilisant la décomposition (2.12), que cette décomposition est réduite au premier terme de la somme pour un filtre LPTV de Δ_0 . Pour les filtres LPTV de cet ensemble Δ_0 caractérisés par $\mathbf{A}^{1,1}(z) = \mathbf{circu}_0(z^N)$, l'inversibilité est alors réduite à l'inversibilité d'une matrice circulaire.

2.3.1.3-b Généralisation de Δ_0 : définition de l'ensemble Δ_{l_0}

A la lumière du résultat précédent où nous avons vu que l'ensemble Δ_0 était caractérisé par une décomposition (2.12) où seul le terme pour $l = 0$ était non nul, nous proposons de généraliser ce résultat en posant la question : quelle est la caractérisation des filtres LPTV dont seul le terme correspondant à $l = l_0$ est non nul dans la décomposition (2.12) ? Nous appelons Δ_{l_0} cet ensemble de filtres LPTV.

Il est facile de vérifier que cette caractérisation de Δ_{l_0} est équivalente au fait que les filtres modulateurs n'ont que la composante polyphase l_0 non nulle (c'est à dire $T'_{p,l}(z) = 0$ pour $l \neq l_0$). L'intérêt de cette généralisation est que, pour un filtre LPTV de Δ_{l_0} (pour $l_0 \in [0 : N - 1]$), l'inversibilité est alors, comme pour Δ_0 , réduite à l'inversibilité d'une matrice circulaire puisque la matrice $\mathbf{D}_{W_N^-}$ dans la décomposition (2.12) est inversible. Nous allons à présent discuter l'inversibilité des filtres LPTV de Δ_{l_0} .

2.3.1.3-c Caractérisation de l'inversibilité des filtres LPTV de Δ_{l_0}

Soit $\{T'_0(z), T'_1(z) \dots T'_{N-1}(z)\}$ les filtres modulateurs LIT d'un filtre LPTV de Δ_{l_0} , la condition d'inversibilité de ce filtre est équivalente à la condition d'inversibilité des N filtres LIT $A_k(z^N) = z^{l_0} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-mk} T'_m(z)$.

Ce résultat repose sur la décomposition (2.12) de toute matrice modulateurs. L'hypothèse que le filtre LPTV appartient à Δ_{l_0} implique que seul le terme pour $l = l_0$ est non nul dans cette décomposition. Nous utilisons alors le résultat (2.11) sur la diagonalisabilité de la matrice circulaire $\mathbf{circu}_{l_0}(z^N)$. La matrice modulateurs s'écrit ainsi (2.15) où $\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)$ est la matrice

diagonale des TFD inverses.

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = z^{-l_0} (\mathbf{D}_{W_N^-})^{l_0} \overbrace{\frac{1}{N} \mathbf{F}^- \mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N) \mathbf{F}^+}^{\text{circu}_{l_0}} \quad (2.15)$$

La matrice modulateurs se trouve alors être constituée du produit de $\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)$ et de plusieurs matrices inversibles et indépendantes de z . On vérifie facilement que le déterminant de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ a l'expression analytique (2.16).

$$\det(\mathbf{A}^{1,1}(z)) = (-1)^{l_0(N-1)} z^{-Nl_0} \det(\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)) \quad (2.16)$$

D'après l'expression précédente, on en déduit que les racines de $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ sont les racines de $\det(\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N))$. Ainsi, si nous appliquons la caractérisation de l'inversibilité d'un filtre LPTV établie au premier paragraphe, nous en déduisons qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité de ce filtre LPTV est l'absence de racines à l'extérieur du cercle unité et sur le cercle unité pour $\det(\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N))$. Le déterminant d'une matrice diagonale étant égal au produit des éléments sur la diagonale, il nous reste à évaluer l'expression précise des éléments de $\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)$. Nous savons, d'après les résultats sur les matrices circulaires, que ces éléments sont égaux à la TFD inverse de la première ligne de $\mathbf{circu}_{l_0}(z^N)$ (2.17). D'où en utilisant (2.14), nous obtenons finalement (2.18).

$$[\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)]_{i,i} = \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{circu}_{l_0}]_{0,k} W_N^{-ki} \quad (2.17)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} T'_{k,l_0}(z^N) W_N^{-ki} = z^{l_0} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{-ki} T'_k(z) \quad (2.18)$$

Si nous notons alors $A_i(z^N)$ le *i*ème élément de la diagonale de la matrice $\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)$, le déterminant de $\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)$ est finalement donné par (2.19).

$$\det(\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N)) = \prod_{i=0}^{N-1} A_i(z^N) \quad (2.19)$$

Le résultat 2.19 nous permet de déduire le résultat annoncé. En effet, si chacun des filtres LIT, $A_i(z^N)$, est inversible, alors chacune de ces transformées en z ne contient aucune racine à l'extérieur du cercle unité ou sur le cercle unité. Cela provient de la caractérisation d'un filtre LIT inversible. Ainsi, $\det(\mathbf{\Lambda}_{l_0}(z^N))$, comme produit de ces fonctions contient des racines strictement à

l'intérieur du cercle unité. D'après la caractérisation d'inversibilité d'un filtre LPTV et la relation (2.16), le filtre LPTV est inversible.

Inversement, si le filtre LPTV est inversible alors on sait que toutes les racines de $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ sont contenues strictement dans le cercle unité. D'après la relation (2.16), cela implique que toutes les racines de $\det(\Lambda_{l_0}(z^N))$ sont également contenues strictement dans le cercle unité. On en déduit que chacune des fonctions $A_i(z^N)$ a ses racines à l'intérieur strictement du cercle unité. En effet, s'il existe un $A_i(z^N)$ ayant une racine z_0 à l'extérieur du cercle, il existe nécessairement un entier i' tel que z_0 est un pôle de $A_{i'}(z^N)$ afin que cette racine soit annulée dans le produit (2.19). Dans ce cas alors, d'après l'équation (2.15), on en déduit que le filtre LPTV initial n'est pas réalisable.

Nous avons donc montré qu'étant donné un filtre LPTV appartenant à Δ_{l_0} , ce filtre est inversible si et seulement si chacun des N filtres LIT $A_i(z^N)$ est inversible. La condition matricielle d'inversibilité est dans ce cas réduite à N conditions scalaires. De plus, la matrice modulateurs du filtre inverse est exprimée par (2.20) dont la première ligne, d'après la relation (1.51), nous donne les valeurs des filtres modulateurs du filtre LPTV inverse où $D_{W_N^+}$ est la matrice diagonale définie par $[D_{W_N^+}]_{i,j} = \delta(i-j)W_N^i$.

$$\mathbf{B}^{1,1}(z) = \frac{1}{N} z^{l_0} \mathbf{F}^- \Lambda_{l_0}^{-1}(z^N) \mathbf{F}^+ (\mathbf{D}_{W_N^+})^{l_0} \quad (2.20)$$

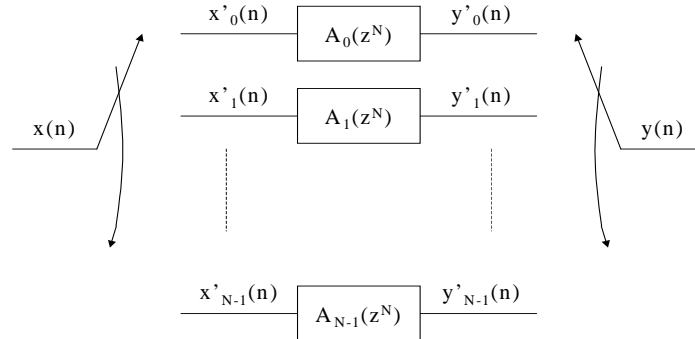
Il est intéressant de remarquer également que cette caractérisation d'un filtre LPTV de Δ_{l_0} nous fournit en même temps une méthode pour construire un filtre LPTV inversible. En effet, il suffit de construire N filtres LIT $A_i(z^N)$ inversibles et la relation (2.15) nous permet d'en déduire l'expression d'un filtre LPTV inversible de Δ_{l_0} .

2.3.1.3-d Caractérisation de Δ_{l_0} dans les représentations commutées

Nous savons que l'appartenance à Δ_{l_0} est caractérisée par des filtres modulateurs n'ayant que la composante polyphase l_0 non nulle. Il est intéressant de chercher à caractériser cet ensemble Δ_{l_0} dans les représentations commutées définies dans le premier chapitre.

Nous avons caractérisé la représentation MIMO dans le premier chapitre par la matrice $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ qui est liée à la matrice $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ par la relation (1.50). Si nous appliquons cette relation à l'expression (2.15) de la matrice modulateurs d'un filtre LPTV de Δ_{l_0} , nous obtenons l'expression (2.21) pour $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ en utilisant $\mathbf{F}^+ \mathbf{F}^- = N \mathbf{I}_N$.

$$\mathbf{A}^{2,2}(z) = \frac{z^{-l_0}}{N} \mathbf{F}^+ (\mathbf{D}_{W_N^-})^{l_0} \mathbf{F}^- \Lambda_{l_0}(z^N) \quad (2.21)$$

FIG. 2.1 – Représentation MIMO de la classe Δ_0 des filtres LPTV

Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{F}^+ \mathbf{D}_{W_N^-} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^+$ où la matrice $\boldsymbol{\pi}$ est définie par $[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(i - j - 1_N)$. Nous obtenons ainsi le résultat final (2.22).

$$\mathbf{A}^{2,2}(z) = z^{-l_0} \boldsymbol{\pi}^{l_0} \mathbf{A}_{l_0} \quad (2.22)$$

Il suffit alors de remarquer que la multiplication d'une matrice à gauche par la matrice $\boldsymbol{\pi}$ est équivalente à une permutation circulaire des lignes d'une unité vers le bas de cette matrice. Ainsi, d'après les relations (2.22) et (1.28), nous en déduisons que l'ensemble Δ_{l_0} est caractérisé par une matrice MIMO $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ que nous qualifierons de l_0 sous diagonale, c'est à dire une matrice dont les seules valeurs non nulles sont celles situées sur la l_0 ième sous diagonale. La représentation MIMO simple de la classe particulière Δ_0 est présentée sur la figure 2.1. Appartenant à cette classe particulière caractérisée par une matrice MIMO diagonale, nous pouvons citer par exemple l'entrelaceur convolutionnel, défini par [29], et caractérisé dans Δ_0 par des filtres LIT $A_i(z^N)$ qui sont de simples retards multiples de N . Cet entrelaceur convolutionnel est utilisé dans de nombreuses normes comme par exemple dans la norme **DVB-T** (Digital Video Broadcasting Terrestrial). Par analogie et généralisation, nous appellerons filtres LPTV convolutionnels les filtres appartenant à Δ_{l_0} .

En utilisant les résultats du premier chapitre, il est également possible de montrer que concernant les deux autres représentations commutées SIMO et MISO, l'ensemble Δ_{l_0} est caractérisé par des filtres $C_k(z)$ et $R_k(z)$ n'ayant qu'une seule composante polyphase non nulle.

2.3.2 Simulations

Nous illustrons dans cette dernière sous partie les résultats précédents. Pour cela, nous choisissons de générer un filtre LPTV appartenant à Δ_5 de période $N = 80$. Nous avons montré précédemment que pour générer un filtre LPTV de Δ_5 inversible, il suffit de générer N filtres LIT $A_i(z^N)$ inversibles. Nous faisons le choix de prendre ces filtres RII et d'ordre $p = 3$. Ainsi, les $A_i(z)$ synthétisés sont de la forme (2.23). L'inversibilité et la stabilité de ces filtres LIT sont assurées si les pôles $z_{i,j}$ sont choisis tels que $|z_{i,j}^i| < 1$. Nous choisissons de générer aléatoirement ces pôles dans le cercle complexe de rayon 0.2. Nous discuterons l'influence, pour un filtre LPTV convolutionnel, de la position des pôles à l'intérieur du cercle unité dans le quatrième chapitre. Enfin, K_i est un coefficient de normalisation qui assure que le signal n'est pas amplifié par le filtre.

$$A_i(z) = \prod_{j=1}^p \frac{K_i}{(1 - z^{-1}z_{i,j})} \quad (2.23)$$

2.3.2.1 Inversibilité du filtre LPTV de Δ_5

Le choix des $A_i(z^N)$ nous assure l'inversibilité du filtre LPTV. Pour illustrer cette propriété, nous générons un signal avec une modulation binaire. Ce signal est ensuite suréchantillonné par un facteur $S = 8$ par répétition. Le but recherché ici est d'illustrer la reconstruction parfaite par filtrage LPTV inverse en l'absence de bruit sur le canal. Nous choisissons donc volontairement de n'utiliser aucune mise en forme spectrale dans le souci d'une meilleure visualisation en réception. Le signal NRZ suréchantillonné est alors filtré par le filtre LPTV de Δ_5 . Après passage dans le canal, le signal est récupéré en réception et filtré par le filtre LPTV inverse. La figure 2.2 illustre le signal temporel récupéré en absence de bruit sur le canal ainsi que le signal temporel récupéré dans le cas d'un bruit blanc Gaussien additif dans le canal avec un rapport signal à bruit $\frac{Eb}{No} = 12$ dB. Sur cette figure, nous constatons la reconstruction parfaite du signal NRZ en l'absence de bruit.

2.3.2.2 Propriétés d'étalement de Δ_5

Le sous ensemble des filtres LPTV que nous avons définis précédemment est un sous ensemble particulier des filtres LPTV. Nous avons vu que ce sous ensemble présentait comme propriété avantageuse de fournir une méthode simple de construction de filtres LPTV inversibles. Une des applications intéressantes des filtres LPTV est leur utilisation comme méthode d'accès multiple

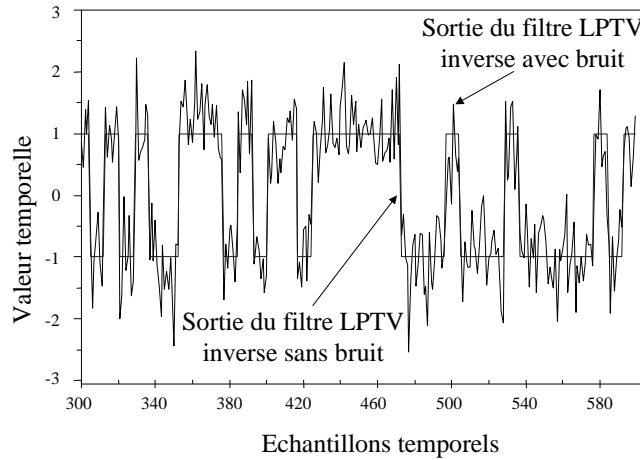


FIG. 2.2 – Allure du signal temporel en sortie du filtre LPTV inverse

grâce à leur propriété d'étalement lorsqu'ils sont appliqués à un signal suréchantillonné. Nous reviendrons sur ces propriétés dans les chapitres 4 et 5. Le sous ensemble des filtres LPTV que nous avons définis précédemment étant un sous ensemble particulier des filtres LPTV, il est intéressant de vérifier que cette restriction à cette sous famille n'implique pas une trop forte dégradation des propriétés d'étalement. La figure 2.3 présente la Densité Spectrale de Puissance (DSP) simulée du signal en entrée et en sortie du filtrage LPTV et illustre le fait que les propriétés d'étalement restent notables malgré la restriction à Δ_5 . Le spectre étalé n'est toutefois pas régulier dans toute la bande et présente une allure particulière oscillante. Nous supposons que cette allure vient de la périodicité fréquentielle des filtres modulateurs associés au filtre LPTV convolutionnel. Le lien entre les filtres modulateurs et l'étalement par le filtre LPTV associé sera présenté dans le quatrième chapitre. Précisons que les DSP ont été calculées au moyen de TFD sur des blocs de taille 1024. Puisque 1024 n'est pas multiple de la période, cela est équivalent pour le signal cyclostationnaire en sortie du filtre LPTV, à calculer la DSP du signal stationnarisé. La technique consiste en un périodogramme cumulé sur 100 itérations.

Les filtres LPTV que nous avons proposés fournissent donc une méthode simple de synthèse de filtres LPTV inversibles tout en assurant une notable capacité d'étalement. Cette remarque fait de cette famille de filtres un outil potentiel pour réaliser de l'étalement de spectre. Nous

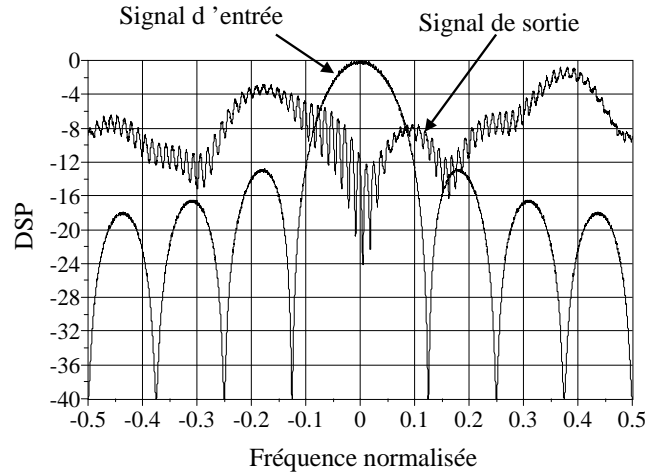


FIG. 2.3 – Spectre en entrée et en sortie du filtre LPTV de Δ_0 avec $p = 3$ et $N = 80$

reviendrons sur ce point dans le quatrième chapitre.

2.3.2.3 Forme des filtres modulateurs

Nous avons défini les filtres LPTV précédents par une forme particulière de la matrice modulateurs équivalente à l'existence pour chacun de ces filtres modulateurs d'une seule composante polyphase l_0 ($l_0 = 5$ dans notre exemple). Les filtres modulateurs sont alors de la forme $T'_p(z) = z^{-l_0} T_{p,l_0}^{l_0}(z^N)$. Une conséquence pour ces filtres est que le module de la réponse fréquentielle en fréquence normalisée est périodique en fréquence de période $\frac{1}{N} = 0.0125$. La phase ne l'est pas sauf pour le cas particulier de Δ_0 ($l_0 = 0$). La figure 2.4 illustre cette propriété en proposant les modules des réponses fréquentielles des filtres modulateurs $T'_p(z)$ (pour $p \in \{0, 20, 40, 60\}$) pour un intervalle de fréquence normalisée $[0, 0.25]$. La figure 2.5 propose un zoom de ces modules de réponses fréquentielles sur une période fréquentielle $[0, 0.0125]$.

2.4 Banc de filtres et inversibilité de filtres LPTV

Nous avons abordé depuis le début de ce chapitre l'inversibilité des filtres LPTV à l'aide des outils et représentations introduits dans le premier chapitre, à savoir les matrices modulateurs et les matrices commutées (MISO, SIMO, MIMO). Nous avons vu que l'inversibilité d'un filtre

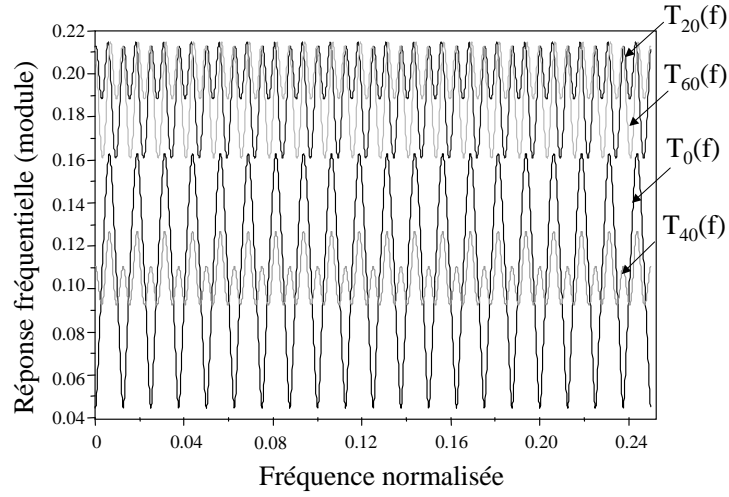


FIG. 2.4 – Représentation des modules des réponses fréquentielles des filtres modulateurs (pour $p \in \{0, 20, 40, 60\}$)

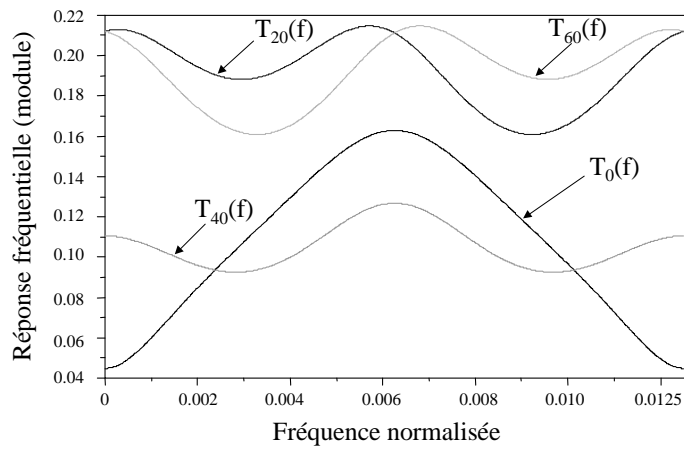


FIG. 2.5 – Représentation des modules des réponses fréquentielles des filtres modulateurs (pour $p \in \{0, 20, 40, 60\}$)

LPTV se traduisait par une propriété matricielle pour l'ensemble de ces matrices. Les travaux sur la construction explicite de filtres LPTV inversibles étant rares [23], nous avons proposé un sous ensemble de filtres LPTV inversibles caractérisé par une forme particulière de la matrice modulateurs. Parallèlement, les bancs de filtres uniformes constituent un sujet de recherche largement étudié. Parmi les caractéristiques intéressantes de ces bancs de filtres, leur capacité à reformer en sortie du banc de synthèse le même signal que le signal injecté en entrée du banc d'analyse est une préoccupation qui a motivé une majeure partie des travaux sur ces bancs de filtres. Un banc de filtres qui présente une telle propriété est appelé banc de filtres à reconstruction parfaite. Ainsi, de nombreuses techniques sont proposées pour construire de tels bancs de filtres ([12], [33], [30], [28], [31], [32]).

Dans le premier chapitre, nous avons établi une relation d'équivalence entre filtre LPTV et banc d'analyse. Or, nous allons montrer qu'étant donné un banc d'analyse et le filtre LPTV équivalent, la propriété de reconstruction parfaite du premier est équivalente à l'inversibilité du second. Grâce à l'équivalence définie dans le premier chapitre entre bancs de filtres et filtres LPTV, il est alors possible d'utiliser les méthodes de construction de bancs de filtres à reconstruction parfaite afin d'obtenir une méthode de synthèse de filtres LPTV inversibles.

Nous définissons, dans un premier temps, la notion de reconstruction parfaite d'un banc de filtres ainsi qu'une condition nécessaire et suffisante sur la matrice polyphase du banc de filtres pour avoir cette propriété de reconstruction parfaite. Puis, nous utilisons une méthode de construction de bancs de filtres à reconstruction parfaite ([12], [33]), basée sur les matrices unitaires, dans le but de construire une famille de filtres LPTV inversibles. Cette technique présente la particularité de fournir un filtre LPTV inverse RIF si le filtre LPTV initial est RIF.

2.4.1 Caractérisation de la reconstruction parfaite d'un banc de filtres

Nous considérons un banc de filtres à décimation maximale défini par la figure 1.14. Une caractéristique intéressante pour un tel banc de filtres est sa capacité à redonner un signal de sortie $x'(n)$ le "plus semblable possible" au signal d'entrée $x(n)$. En utilisant les propriétés de décimation et d'interpolation, on montre que les transformées en z , $X'(z)$ et $X(z)$, respectivement de l'entrée et la sortie de ce banc sont reliées par l'expression (2.24).

$$X'(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(zW_N^{-n}) \sum_{k=0}^{N-1} F_k(zW_N^{-n}) G_k(z) \quad (2.24)$$

Dans cette expression, la somme des termes pour $n \neq 0$ représente le repliement introduit par le banc de filtres. Lorsque ce terme est nul, on parle alors de bancs de filtres sans repliement. Dans un tel cas, le banc de synthèse a la propriété d'annuler la dépendance temporelle introduite par le banc d'analyse. Les entrées et sorties se trouvent alors liées par un simple filtrage LIT de transformée en z $L(z)$ (2.25). Une condition nécessaire et suffisante sur la nature algébrique pseudocirculaire de la matrice $\mathbf{P}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{F}(z)$ (Figure 1.15) pour qu'un banc de filtres soit sans repliement est donnée dans [22].

$$X'(z) = X(z) \overbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k(z)G_k(z)}^{L(z)} \quad (2.25)$$

Dans le cas où $L(z)$ est réduit à un simple retard z^{-r} , le banc de synthèse permet alors de reconstruire le signal $x(n)$ sans distorsion d'amplitude ni de phase, introduisant un simple retard. Dans un tel cas, on dit que le banc de filtres est à reconstruction parfaite. Une condition nécessaire et suffisante sur la forme de la matrice $\mathbf{P}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{F}(z)$ (Figure 1.15) pour qu'un banc de filtres soit à reconstruction parfaite est donnée dans [33] et est rappelée dans l'annexe B.3. Nous avons alors la propriété suivante entre filtres LPTV inversibles et bancs de filtres à reconstruction parfaite.

Etant donné un banc de filtres, ce banc est à reconstruction parfaite si et seulement si le filtre LPTV équivalent (1.62) au banc d'analyse est inversible. De plus, le filtre LPTV inverse est équivalent au banc de synthèse. La preuve se trouve dans l'annexe B.3.

2.4.2 Méthode de construction de banc de filtres à reconstruction parfaite basée sur les matrices de transfert sans perte

Parmi les bancs de filtres à reconstruction parfaite [33], il existe un sous ensemble caractérisé par une matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$ du banc d'analyse sans perte. Après avoir introduit la définition de matrices sans perte, nous présentons la caractérisation de ce sous ensemble de bancs de filtres.

Une matrice \mathbf{A} est unitaire si elle vérifie $\mathbf{A}\mathbf{A}_*^t = \mathbf{I}$ où t et $*$ représentent respectivement l'opération de transposition et de conjugaison. Si la matrice est réelle, on parle alors de matrice orthogonale.

Une matrice de transfert $\mathbf{A}(z)$ est dite sans perte si elle est stable et si elle vérifie $\mathbf{A}(e^{j\omega})\mathbf{A}_*^t(e^{j\omega}) = \mathbf{I}$. Autrement dit, la matrice de transfert $\mathbf{A}(z)$ est unitaire sur le cercle unité et par continuité,

cette relation est valable pour tout z : $\mathbf{A}(z)\mathbf{A}_*^t(z^{-1}) = \mathbf{I}$.

Etant donné un banc d'analyse défini par sa matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$, une condition suffisante pour avoir une reconstruction parfaite est que la matrice $\mathbf{F}(z)$ soit une matrice de transfert sans perte. La matrice polyphase du banc de synthèse est alors donnée par $\mathbf{G}(z) = z^{-r}\mathbf{F}_*^t(z^{-1})$ où r est un retard introduit pour rendre causaux les filtres de synthèse. Une particularité de cette sous famille de bancs de filtres à reconstruction parfaite est que si $\mathbf{F}(z)$ est constitué de filtres RIF alors $\mathbf{G}(z)$ est aussi constitué de filtres RIF.

Ainsi, pour construire un banc de filtres RIF à reconstruction parfaite, il suffit de savoir construire des matrices de transfert sans perte. Or, il est montré dans [33] que toute matrice de transfert RIF causale d'ordre p (i.e chaque élément de la matrice de transfert est une transformée en z causale de degré p) est sans perte si et seulement si elle s'écrit sous la forme (2.26) où \mathbf{U} est une matrice unitaire et $\mathbf{A}_j(z)$ est de la forme (2.27) où \mathbf{v}_j est un vecteur colonne normé ($\mathbf{v}_{j*}^t \mathbf{v}_j = 1$)

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{A}_p(z)\mathbf{A}_{p-1}\dots\mathbf{A}_1(z)\mathbf{U} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{A}_j(z) = [\mathbf{I} - \mathbf{v}_j\mathbf{v}_{j*}^t + z^{-1}\mathbf{v}_j\mathbf{v}_{j*}^t] \quad (2.27)$$

2.4.3 Application à la construction de filtres LPTV inversibles

Nous avons présenté une méthode de construction d'une sous famille de bancs de filtres à reconstruction parfaite développée dans [33]. Grâce à l'équivalence définie au premier chapitre entre LPTV et bancs de filtres, nous allons utiliser cette méthode pour proposer une méthode de construction de filtres LPTV inversibles appelés filtres LPTV-LossLess (LPTV-LL). Pour générer un filtre LPTV N périodique d'ordre p , il suffit de générer une matrice $\mathbf{F}(z)$ sans perte grâce à l'équation (2.26). La matrice unitaire \mathbf{U} peut être obtenue par génération aléatoire d'une matrice complexe inversible de taille $N \times N$ puis orthonormalisation de Gram Schmidt dans \mathbb{C} . Les vecteurs unitaires \mathbf{v}_j sont générés aléatoirement. La matrice MIMO, $\mathbf{H}'_{em}(z)$, du filtre LPTV équivalent à ce banc d'analyse de matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$ est calculée grâce à la relation établie dans le premier chapitre et que nous rappelons ici (2.28) où $\boldsymbol{\theta}(z^N)$ est la matrice définie en (1.68).

$$\mathbf{H}'_{em}(z) = \mathbf{D}_z^{-1}\mathbf{F}(z^N)\boldsymbol{\theta}(z^N)\mathbf{D}_z \quad (2.28)$$

En utilisant alors la relation (1.67), on en déduit que la matrice MIMO, $\mathbf{H}'_{re}(z)$, du filtre LPTV inverse équivalent au banc de synthèse de matrice polyphase $\mathbf{G}(z)=z^{-r}\mathbf{F}_*^t(z^{-1})$ est donnée par la relation (2.29).

$$\mathbf{H}'_{re}(z) = z^{-Nr}\mathbf{D}_z^{-1}\mathbf{I}'_N\mathbf{F}_*^t(z^{-N})\mathbf{D}_z \quad (2.29)$$

Il est utile de faire ici quelques remarques. Selon l'application souhaitée, les générations de la matrice unitaire \mathbf{U} et des vecteurs normés \mathbf{v}_j peuvent être contraintes. Par exemple, dans le cas des bancs de filtres, elles le sont par le fait que les réponses fréquentielles des filtres d'analyse doivent réaliser un partitionnement du domaine fréquentiel. Dans ce chapitre, nous ne présentons que des méthodes pour synthétiser des filtres LPTV inversibles sans autre contrainte sur les filtres LPTV générés. C'est pourquoi, nous choisissons pour la simulation de générer ces grandeurs aléatoirement.

Remarquons enfin que si le filtre LPTV initial ainsi construit est RIF alors le filtre LPTV inverse est lui aussi RIF. Ce résultat original vient du fait que dans (2.3), le déterminant de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est un retard pur. Remarquons à titre de comparaison, que pour un filtre LIT, cette propriété n'est vérifiée que si le filtre LIT à inverser est un simple retard. La classe des filtres LPTV RIF dont l'inverse est aussi un filtre LPTV RIF est donc une classe bien plus riche que la classe des filtres LIT qui possèdent la même propriété.

2.4.4 Exemple numérique

Pour illustrer la méthode de construction de filtres LPTV inversibles à l'aide de matrices sans perte, nous appliquons la méthode précédente pour une période $N = 3$ et un ordre $p = 1$ pour la matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$. Nous nous plaçons dans le cas réel, c'est à dire que la matrice \mathbf{U} (2.26) est orthogonale et le vecteur \mathbf{v}_1 (2.27) est à valeurs réelles. Pour cet exemple numérique, nous arrondissons les résultats à 3 chiffres après la virgule, mais à chaque étape de calcul, nous utilisons les matrices non arrondies pour le logiciel de calcul. Nous avons les applications numériques suivantes (2.30) pour \mathbf{U} et \mathbf{v}_1 .

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.857 & -0.506 & 0.100 \\ 0.365 & 0.732 & 0.575 \\ 0.364 & 0.456 & -0.812 \end{bmatrix} \text{ et } v_1 = \begin{bmatrix} 0.548 \\ 0.645 \\ 0.522 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

On en déduit la matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$ grâce à la relation (2.26).

$$\mathbf{F}(z) = \begin{bmatrix} 0.352 + 0.504z^{-1} & -0.745 + 0.239z^{-1} & 0.098 + 0.002z^{-1} \\ -0.218 + 0.583z^{-1} & 0.456 + 0.276z^{-1} & 0.573 + 0.002z^{-1} \\ -0.107 + 0.471z^{-1} & 0.233 + 0.223z^{-1} & -0.814 + 0.002z^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

De l'équation (2.28), on en déduit alors la matrice MIMO $\mathbf{H}'_{em}(z)$ du filtre LPTV équivalent (2.32).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{em}(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2} \end{bmatrix} \mathbf{F}(z^3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-3} \\ 0 & z^{-3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.352 + 0.504z^{-3} & 0.098z^{-2} + 0.002z^{-5} & -0.745z^{-1} + 0.239z^{-4} \\ -0.218z^{-1} + 0.583z^{-4} & 0.573z^{-3} + 0.002z^{-6} & 0.456z^{-2} + 0.276z^{-5} \\ -0.107z^{-2} + 0.471z^{-5} & -0.814z^{-4} + 0.002z^{-7} & 0.233z^{-3} + 0.223z^{-6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

D'après la relation (A.37) en annexe A.3 et la relation (1.28), on a finalement l'expression (2.33) des filtres SIMO pour le filtre d'émission.

$$\begin{aligned} C_0(z) &= 0.352 - 0.745z^{-1} + 0.098z^{-2} + 0.504z^{-3} + 0.239z^{-4} + 0.002z^{-5} \\ C_1(z) &= -0.218z^{-1} + 0.456z^{-2} + 0.573z^{-3} + 0.583z^{-4} + 0.276z^{-5} + 0.002z^{-6} \\ C_2(z) &= -0.107z^{-2} + 0.233z^{-3} - 0.814z^{-4} + 0.471z^{-5} + 0.223z^{-6} + 0.002z^{-7} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Pour ce qui est du filtre inverse, on a la matrice $\mathbf{G}(z) = z^{-r} \mathbf{F}_*^t(z^{-1})$ donnée par (2.34). Le retard z^{-r} est juste introduit pour que les filtres polyphases $\mathbf{G}(z)$ soient causaux et réalisables.

$$\mathbf{G}(z) = z^{-r} \begin{bmatrix} 0.504z + 0.352 & 0.583z - 0.218 & 0.471z - 0.107 \\ 0.239z - 0.745 & 0.276z + 0.456 & 0.223z + 0.233 \\ 0.002z + 0.098 & 0.002z + 0.573 & 0.002z - 0.814 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

De l'équation (2.29), on en déduit la matrice MIMO $\mathbf{H}'_{re}(z)$ du filtre LPTV inverse (2.35).

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{re}(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{G}(z^3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{bmatrix} \\ &= z^{-3r} \begin{bmatrix} 0.02z^3 + 0.98 & 0.002z^4 + 0.573z & 0.002z^5 - 0.814z^2 \\ 0.239z^2 - 0.745z^{-1} & 0.276z^3 + 0.456 & 0.223z^4 + 0.233z \\ 0.504z + 0.352z^{-2} & 0.583z^2 - 0.218z^{-1} & 0.471z^3 - 0.107 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Enfin, en utilisant la relation (A.34), on en déduit les filtres MISO du filtre LPTV de réception (2.36).

$$\begin{aligned}
R_0(z) &= z^{-3r} [0.02z^3 + 0.239z^2 + 0.504z + 0.98 - 0.745z^{-1} + 0.352z^{-2}] \\
R_1(z) &= z^{-3r} [0.002z^4 + 0.276z^3 + 0.583z^2 + 0.573z + 0.456 - 0.218z^{-1}] \\
R_2(z) &= z^{-3r} [0.002z^5 + 0.223z^4 + 0.471z^3 - 0.814z^2 + 0.233z - 0.107] \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Dans l'équation (2.36), on se rend compte que pour rendre les filtres MISO causaux, il suffit de prendre $r = 2$.

2.4.5 Simulations

Pour illustrer cette méthode de construction de filtres LPTV inversibles, nous réalisons une simulation avec une période $N = 40$ et un degré $p = 2$. Notons que contrairement à la famille de filtres LPTV convolutionnels, les filtres modulateurs (ainsi que chaque filtre SIMO ou MISO) ont toutes les composantes polyphases non nulles. Ainsi, pour un degré p choisi, chaque filtre modulateur (ainsi que chaque filtre SIMO ou MISO) possède $(p + 1) * N$ coefficients contre seulement $p + 1$ dans le cas précédent d'où une complexité plus grande pour les filtres LPTV-LL. Un avantage est que dans le cas des filtres LPTV-LL, les filtres modulateurs (ou SIMO ou MISO) sont RIF en émission et en réception contrairement à la famille des filtres LPTV convolutionnels. Nous verrons l'intérêt de cette propriété dans le chapitre 4.

Concernant la simulation, le signal émis est identique à celui des simulations précédentes. Nous utilisons une matrice \mathbf{U} unitaire (à coefficients complexes). La figure 2.6 présente à nouveau le signal reconstruit en sortie du filtre LPTV inverse dans le cas d'un canal non bruité et dans le cas d'un canal à bruit additif blanc gaussien avec $\frac{Eb}{No} = 12$ dB. On remarque à nouveau la reconstruction parfaite du signal en l'absence de bruit.

La figure 2.7 illustre la capacité d'étalement de ce filtre LPTV par la représentation de la DSP de l'entrée et de la sortie du filtre LPTV d'émission. Les DSP sont obtenues par simulation par l'utilisation à nouveau d'un périodogramme cumulé sur des blocs de taille 1024. Le nombre d'itérations est égal à 100. Nous pouvons remarquer, en comparant les figures 2.3 et 2.7 que les filtres LPTV-LL réalisent un étalement plus régulier dans la bande d'étalement que les filtres LPTV convolutionnels. Nous avons vérifié que ce résultat était vrai quelque soit le filtre LPTV généré aléatoirement. Il semble donc qualitativement que les filtres LPTV-LL offrent une meilleure capacité d'étalement de spectre que les filtres LPTV convolutionnels. Nous verrons

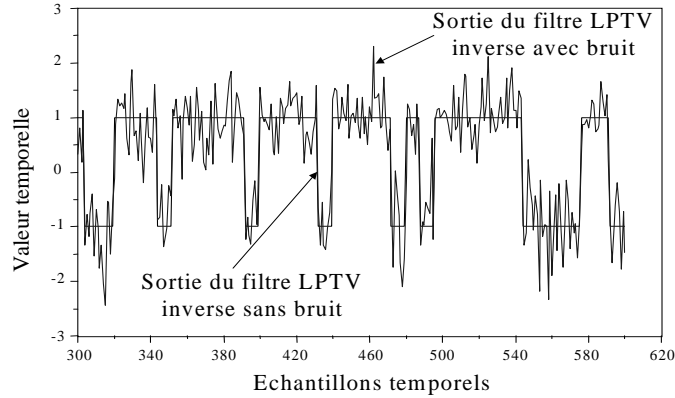


FIG. 2.6 – Allure du signal temporel en sortie du filtre LPTV inverse avec $N = 40$ et $p = 2$ (cas d'un canal sans bruit et cas d'un bruit additif Gaussien avec $\frac{Eb}{No} = 12$ dB)

dans le quatrième chapitre que ce n'est pas le seul avantage des filtres LPTV-LL par rapport aux filtres LPTV convolutionnels.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème de l'inversibilité des filtres LPTV qui constitue un point essentiel et incontournable dès lors que l'on a pour dessein d'utiliser des filtres LPTV dans une chaîne de communications numériques. Nous avons vu que sous l'angle des représentations des filtres LPTV introduites au premier chapitre, cette inversibilité se caractérisait par une condition matricielle. Plus précisément, par analogie avec les filtres LIT, la condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'un filtre LPTV est identique à celle d'un filtre LIT à la différence près que la réponse fréquentielle dans le cas d'un filtre LIT est remplacée par le déterminant de la matrice LPTV. Cette loi reste valable quelque soit la matrice choisie pour la représentation du filtre LPTV : matrice modulateurs ou matrice commutée (MIMO, SIMO, MISO). Dans le cas général, vérifier l'inversibilité d'un filtre LPTV nécessite ainsi de calculer le déterminant d'une matrice en z . Si cette caractérisation permet pour un filtre LPTV parfaitement connu de vérifier l'inversibilité de ce filtre, elle n'offre pas de méthode pour la construction de filtres

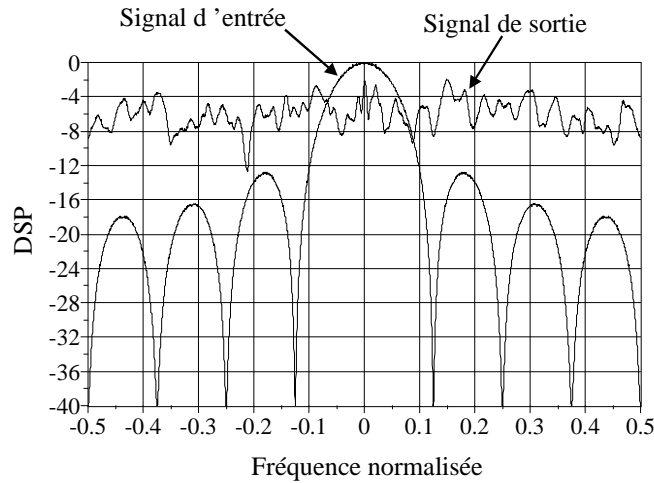


FIG. 2.7 – Spectre en entrée et en sortie du filtre LPTV avec $N = 40$ et $p = 2$

LPTV inversibles. Peu de travaux ont abordé directement ce problème de construction de filtres LPTV inversibles. C'est pourquoi, il nous a semblé être intéressant et utile d'être en mesure de trouver des méthodes de construction de filtres LPTV inversibles. Ainsi, nous avons proposé une sous famille des filtres LPTV caractérisée par une forme particulière de la matrice modulateurs dont nous avons montré qu'elle était équivalente au fait que les filtres modulateurs ne possèdent qu'une seule composante polyphase non nulle. Le problème de l'inversibilité d'un filtre LPTV N périodique qui est matriciel dans le cas général est alors réduit à un problème d'inversibilité de N filtres LIT. Enfin, le lien étroit entre filtres LPTV et bancs de filtres nous a fait nous intéresser à la littérature, riche au demeurant, associée à ces derniers. Grâce à l'équivalence que nous avons introduite dans le premier chapitre entre bancs de filtres et filtres LPTV, nous avons montré que la propriété de reconstruction parfaite d'un banc de filtre est équivalente à l'inversibilité du filtre LPTV équivalent au banc d'analyse. Or, les travaux sur la capacité de reconstruction parfaite des bancs de filtres sont nombreux. Parmi ces travaux, il existe notamment une méthode de construction de bancs de filtres à reconstruction parfaite basée sur les matrices de transfert sans perte. Ainsi, en exploitant l'équivalence entre filtres LPTV et bancs de filtres uniformes, nous avons utilisé cette méthode pour proposer une généralisation à la construction de filtres LPTV inversibles. L'originalité de la sous famille de filtres LPTV obtenue est que si un filtre LPTV de ce sous ensemble est RIF alors son filtre inverse l'est aussi. Nous disposons alors, à l'issue de ce

second chapitre, de deux méthodes de construction de filtres LPTV inversibles : les filtres LPTV convolutionnels et les filtres LPTV-LL.

Chapitre 3

Changements d'horloges et entrelaceurs

3.1 Introduction

Les changements d'horloges périodiques ou **PCC** (Periodical Clock Change), introduits par [8] sous une forme analogique, définissent un sous ensemble particulier des filtres LPTV. Quelques travaux ont par ailleurs utilisé cet outil analogique : [6] propose la génération de filtres LPTV analogiques par la somme de PCC, [7] décrit un système d'accès pour deux utilisateurs basé sur l'utilisation de PCC analogiques ou encore [5] présente une formalisation PCC des accès multiples traditionnels **TDMA** (Time Division Multiplex Access), **FDMA** (Frequency Division Multiple Access), **CDMA** (Code Division Multiplex Access). Cependant, les propriétés de ces PCC une fois numérisés sont jusqu'à présent mal connues. Ce chapitre propose donc une étude théorique de cette famille de transformations numériques. Les conditions d'inversibilité d'un PCC numérique sont notamment discutées. Cette caractérisation de l'inversibilité permet entre autres de proposer une méthode générale pour la construction de PCC inversibles. D'autre part, il est établi qu'une structure de groupe peut être définie sur l'ensemble des PCC inversibles si l'on munit ce dernier d'une loi interne définie par la loi de cascade. On montre de plus qu'il est possible de définir deux sous ensembles qui ont la propriété d'engendrer la famille des PCC grâce à la loi interne. Ensuite, étant donné un PCC, différents types de décompositions sont discutés. Ce chapitre se termine par la considération du cas pratique des traitements blocs. Les effets de bords induits par ce type de traitements sont ainsi présentés et une solution pour

les contrecarrer est proposée.

Un résultat fondamental de ce chapitre est que l'ensemble des PCC numériques se confond en réalité avec l'ensemble des entrelaceurs. Ainsi, outre l'intérêt de mieux connaître l'ensemble des PCC, ce chapitre offre une nouvelle approche de la famille des entrelaceurs qui n'ont jamais été étudiés avec le formalisme LPTV. S'il est vrai que les PCC, utilisés en tant que tels, demeurent un outil encore somme toute marginal, les entrelaceurs quant à eux sont utilisés dans un large éventail d'applications (dispersion temporelle lorsqu'un entrelaceur est associé à un codage convolutionnel, dispersion fréquentielle dans le cas par exemple de l'OFDM de la norme DVBT et surtout récemment dans les turbo codes). En appliquant les résultats de ce chapitre aux entrelaceurs, on retrouve certaines propriétés déjà démontrées auparavant dans l'étude d'entrelaceurs comme la décomposition bloc/convolutionnel d'un entrelaceur [34]. Les autres résultats, par contre, sont nouveaux comme par exemple l'étude de la décomposition d'un entrelaceur en la cascade de deux entrelaceurs de plus petites périodes.

Le premier paragraphe présente les PCC numériques ainsi que l'équivalence entre PCC numériques et entrelaceurs. Dans le second paragraphe, une structure de groupe de l'ensemble des PCC numériques muni d'une loi interne est proposée et deux sous groupes particuliers sont définis : les PCC blocs et les PCC convolutionnels. Dans le troisième paragraphe, il est montré dans un premier temps que les sous groupes précédemment définis engendrent l'ensemble des PCC avec la loi de cascade. Dans un second temps, le problème de la décomposition d'un PCC en la cascade de deux PCC de périodes inférieures est discuté à l'aide de la représentation modulateurs des PCC. Enfin, le dernier paragraphe aborde le problème des effets de bord induits par un PCC dans le cas d'un traitement bloc et propose une solution pour remédier à ce phénomène.

3.2 Les changements d'horloges périodiques

Les changements d'horloges périodiques ont été introduits par [8] sous forme initialement analogique. Leur étude sous forme numérique faisant défaut, nous présentons ici la définition d'un PCC numérique. Puis, l'appartenance des changements d'horloges périodiques à la famille des filtres LPTV est mise en évidence ainsi que la caractérisation de ces PCC sous les différentes représentations LPTV introduites dans le premier chapitre. Nous montrons ensuite que la famille des PCC numériques se confond avec un ensemble bien connu en communications numériques qui est l'ensemble des entrelaceurs périodiques. Nous illustrons enfin cette équivalence par la

description LPTV de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes.

3.2.1 Définitions et notations

Un changement d'horloge numérique est une transformation définie par une fonction f de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} telle que la sortie temporelle $y(n)$ s'obtient en fonction de l'entrée $x(n)$ selon la relation (3.1).

$$y(n) = x(n - f(n)) \quad (3.1)$$

Un changement d'horloge est dit N périodique si de plus la fonction $f(n)$ est N périodique (3.2). La fonction f sera alors appelée fonction PCC et nous noterons PCC_f le PCC associé à cette fonction.

$$f(n + N) = f(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Un changement d'horloge PCC_f de période N est entièrement défini par la connaissance de sa fonction f . Néanmoins, pour la suite, il est utile de définir les fonctions F , \overline{F} et \underline{F} définies par (3.3) en fonction de f .

$$F(n) = n - f(n) \quad \overline{F}(n) = \overline{F(n)}^N \quad \underline{F}(n) = \underline{F(n)}_N \quad (3.3)$$

La N périodicité (3.2) de la fonction f se traduit alors par les relations (3.4), (3.5) et (3.6) respectivement pour les fonctions F , \overline{F} et \underline{F} .

$$F(n + N) = F(n) + N \quad (3.4)$$

$$\overline{F}(n + N) = \overline{F}(n) + 1 \quad (3.5)$$

$$\underline{F}(n + N) = \underline{F}(n) \quad (3.6)$$

Ces propriétés liées à la périodicité de f nous permettent finalement d'écrire $F(n)$ sous la forme suivante (3.7) pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

$$F(n) = N\overline{n}^N + N\overline{F}(\underline{n}_N) + \underline{F}(\underline{n}_N) \quad (3.7)$$

A l'observation de ces différentes fonctions introduites, il est facile de vérifier qu'un PCC est entièrement déterminé par la connaissance de f , ou bien de F ou encore du couple $(\overline{F}, \underline{F})$ sur un intervalle de longueur N .

3.2.2 Nature LPTV des changements d'horloges périodiques

Par identification des relations de filtrages (1.16) pour un filtre LPTV et la relation (3.1) qui définit l'effet d'un changement d'horloge sur un signal $x(n)$, il est facile de vérifier qu'un PCC de fonction f est un filtre LPTV dont les fonctions de Green associées sont données par (3.8), (3.9) et (3.10).

$$h(n, m) = \delta(n - f(n) - m) \quad (3.8)$$

$$c_n(m) = \delta(m - f(n)) \quad (3.9)$$

$$r_m(n) = \delta(n - f(n + m)) \quad (3.10)$$

Il est donc possible de représenter un changement d'horloge périodique par toutes les représentations commutées ou modulateurs introduites dans le premier chapitre. Parmi celles ci, il est utile pour la suite de remarquer que les filtres SIMO (Figure 1.5) associés à un PCC de fonction f sont donnés par (3.11). Ce résultat s'obtient en utilisant les expressions (3.9) et (1.25).

$$C_n(z) = z^{-f(n)} \quad (3.11)$$

Parmi les représentations modulateurs du premier chapitre, il est alors possible de représenter un changement d'horloge d'après la figure 1.8. Les filtres $T_p(z)$, comme TFD des filtres SIMO d'après la relation (A.24), sont alors donnés par la relation (3.12).

$$T_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{pn} z^{-f(n)} \quad (3.12)$$

Il est intéressant, enfin, de remarquer d'après la relation (3.12) que les filtres modulateurs sont nécessairement des filtres RIF ayant un nombre de coefficients non nuls égal au nombre de valeurs distinctes de $f(n)$.

3.2.3 Equivalence entre PCC numériques et entrelaceurs

3.2.3.1 Mise en évidence de l'équivalence entre entrelaceurs et PCC numériques

Un entrelaceur est une transformation qui, à un signal d'entrée $x(n)$, associe le signal de sortie $y(n)$ selon la relation (3.13) où la fonction π , appelée fonction d'entrelacement, est une fonction de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} .

$$y(n) = x(\pi(n)) \quad (3.13)$$

Un entrelaceur est dit N périodique si la fonction d'entrelacement π vérifie la relation suivante (3.14).

$$\pi(n + N) = \pi(n) + N \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (3.14)$$

A partir des relations (3.13) et (3.1), il est évident qu'un entrelaceur de fonction d'entrelacement π est équivalent à un PCC de fonction f . Ces deux fonctions sont alors liées l'une à l'autre par la relation (3.15).

$$\pi(n) = F(n) = n - f(n) \quad (3.15)$$

Ainsi, grâce à cette équivalence, un entrelaceur peut être représenté par n'importe quelle représentation introduite dans le premier chapitre. Ce résultat permet une approche originale d'un entrelaceur en tant que filtre LPTV particulier. Notamment, l'entrelacement d'un signal $x(n)$ peut être réalisé par N filtrages suivis de modulations fréquentielles selon la figure 1.8. Ce résultat permet d'envisager une approche fréquentielle de l'étude des entrelaceurs puisque l'effet d'un entrelaceur peut être fréquentiellement exprimé par la relation (1.36).

3.2.3.2 Exemple de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

Nous allons illustrer l'équivalence précédente entre PCC numériques et entrelaceurs périodiques en étudiant l'entrelaceur lignes/colonnes.

3.2.3.2-a Présentation de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

L'entrelacement d'un signal $x(n)$ par l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes consiste à écrire le signal $x(n)$ dans une matrice de dimension $Q \times P$. L'écriture se fait colonne par colonne, puis le signal de sortie $y(n)$ est obtenu par la lecture ligne par ligne du contenu de la matrice. Le principe de fonctionnement de cet entrelaceur qui est périodique avec une période $N = PQ$ est présenté par la figure 3.1-a.

3.2.3.2-b Fonction PCC de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

En utilisant la décomposition suivante (3.16) sur la base (P, Q) de tout entier n de l'intervalle $[0 : N - 1]$, il est facile de vérifier que la fonction PCC de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes est donnée par la relation (3.17).

$$n = Pb_{P,Q}(n) + c_{P,Q}(n) \text{ avec } c_{P,Q}(n) = \underline{n}_P \text{ et } b_{P,Q}(n) = \overline{n}_Q^P \quad (3.16)$$

$$f(n) = -(Q - 1)c_{P,Q}(n) + (P - 1)b_{P,Q}(n) \quad (3.17)$$

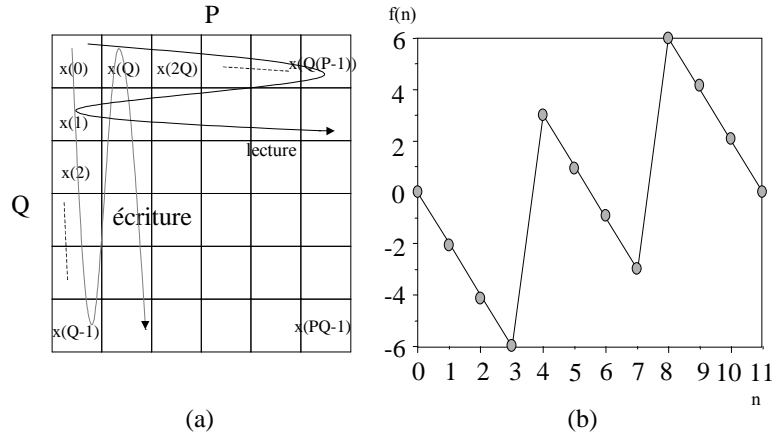


FIG. 3.1 – (a)-Principe de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes (b)-Fonction PCC dans le cas $(Q, P) = (3, 4)$.

La figure 3.1-b propose la représentation de la fonction PCC de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes avec $(Q, P) = (3, 4)$. Dans le cas général, la fonction PCC de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes est constituée de Q fonctions affines successives sur des intervalles chacun de longueur P .

3.2.3.2-c Représentation modulateurs de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

Il est possible d'après les résultats précédents de représenter l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes selon la représentation modulateurs de la figure 1.8. Les filtres modulateurs sont calculés à partir de la relation (3.12) et de l'expression (3.17) de la fonction PCC de l'entrelaceur lignes/colonnes. Nous obtenons alors l'expression (3.18) pour ces filtres modulateurs. Les détails de ce calcul se trouvent dans l'annexe C.1.

$$T_p(f) = \frac{\exp(j \frac{\pi p}{N}) \sin(\pi f P(Q-1) - \frac{\pi}{Q} p)}{N} \frac{\sin(\pi f Q(P-1))}{\sin(\pi f(Q-1) - \frac{\pi}{N} p)} \frac{\sin(\pi f Q(P-1))}{\sin(\pi f(P-1) + \frac{\pi}{Q} p)} \quad (3.18)$$

Notons que l'expression (3.18) des filtres modulateurs est calculable par continuité pour les points où elle n'est pas définie, à savoir les $Q-1$ valeurs de f qui annulent la fonction sinus au premier dénominateur et les $P-1$ valeurs de f qui annulent la fonction sinus du second dénominateur. En effet, on vérifie que la limite du premier quotient vaut P lorsque le sinus

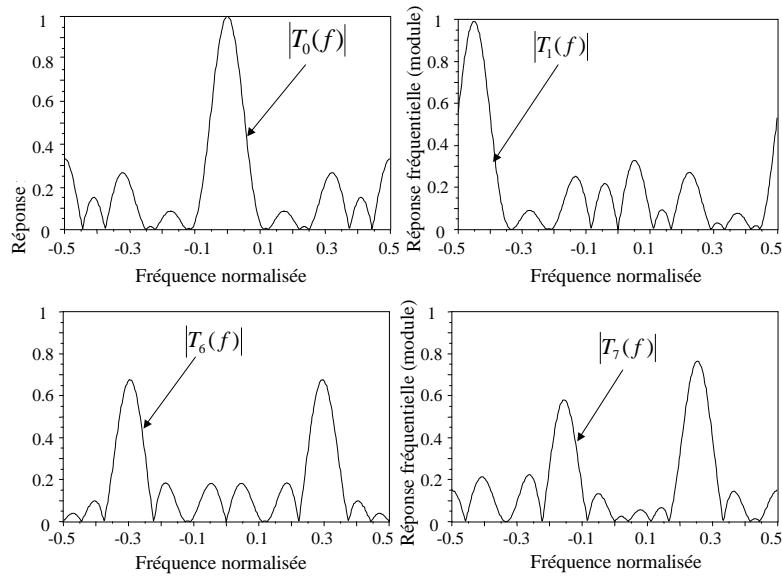


FIG. 3.2 – Représentation des filtres modulateurs pour l’entrelaceur Q lignes/ P colonnes - $(Q, P) = (3, 4)$

au dénominateur s’annule. Quant au second quotient, on vérifie de même que la limite vaut Q lorsque le sinus du dénominateur s’annule. Les détails concernant l’étude de cette fonction figurent également dans l’annexe C.1.

Ainsi, l’équivalence entre les entrelaceurs et les PCC nous permet de conclure que la sortie fréquentielle $Y(f)$ de l’entrelaceur lignes/colonnes est donnée par l’expression (1.36) en fonction de l’entrée fréquentielle $X(f)$ où les filtres $T_p(f)$ ont l’expression précédente (3.18). Nous exploiterons cette propriété pour la mise en oeuvre d’un système d’accès multiple par étalement dans le cinquième chapitre.

La figure 3.2 illustre les modules en échelle linéaire des filtres modulateurs associés à l’entrelaceur Q lignes/ P colonnes pour $(Q, P) = (3, 4)$.

3.3 Structure de groupe de l’ensemble des PCC

Nous avons jusqu’à présent mis en évidence la nature LPTV des changements d’horloge ainsi que l’équivalence entre PCC numériques et entrelaceurs. Nous allons voir à présent qu’il est

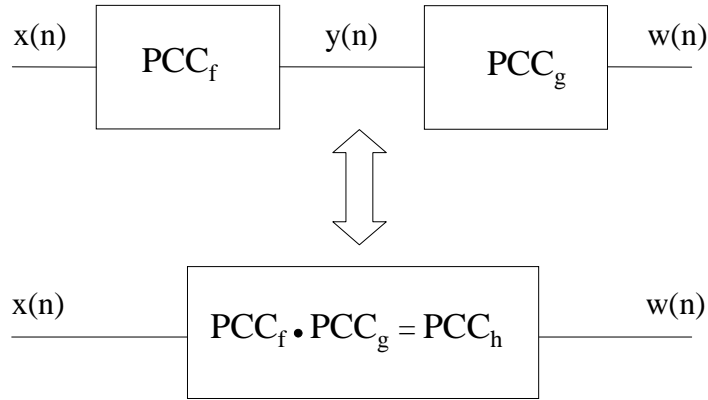


FIG. 3.3 – Illustration de la loi de cascade de deux PCC

possible de définir une structure de groupe à l'ensemble des PCC. Pour cela, nous définissons dans un premier temps une loi interne sur les PCC par la loi de cascade de deux PCC. Le problème de l'inversibilité d'un PCC numérique est ensuite abordé. Deux conditions nécessaires et suffisantes sont alors proposées pour caractériser l'inversibilité d'un PCC. Ensuite, la structure de groupe des PCC inversibles est démontrée, puis nous définissons deux sous ensembles particuliers des PCC dont nous verrons dans le paragraphe suivant qu'ils ont la propriété d'engendrer l'ensemble des PCC inversibles.

3.3.1 Définition d'une loi interne

Etant donnés PCC_f et PCC_g , deux changements d'horloge de périodes respectives P et Q , la cascade de ces deux PCC (Figure 3.3) demeure un PCC dont la fonction PCC, notée h , a l'expression donnée par la relation (3.19) et dont une période est le plus petit commun multiple de P et Q .

$$h(n) = g(n) + f(n - g(n)) \quad (3.19)$$

Pour obtenir ce résultat, conformément à la figure 3.3, il suffit d'appliquer la relation (3.1) successivement à $y(n)$ et $w(n)$. Ensuite, il est facile de vérifier que $PPCM(P, Q)$ est une période de h .

Si nous notons $\Theta(N)$ l'ensemble des PCC de période N , le résultat précédent signifie que

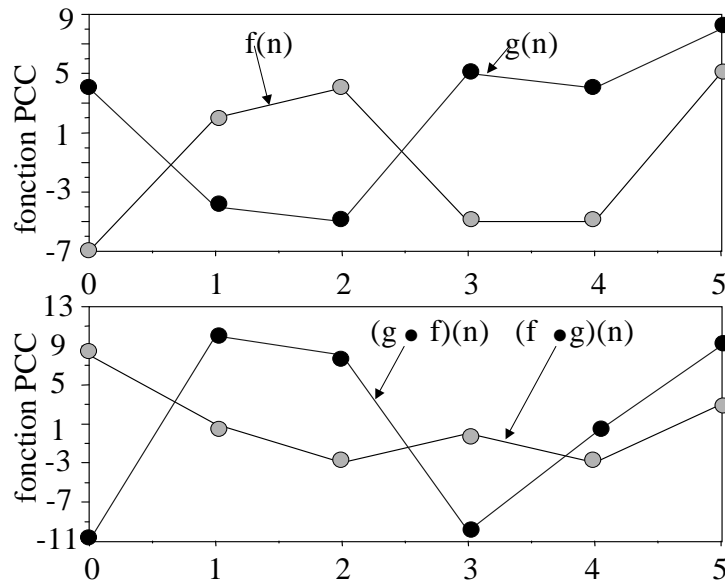


FIG. 3.4 – Illustration de la non commutativité de la loi de cascade

l'ensemble $\Theta(N)$ est stable par la loi de cascade. L'opération de cascade, que nous notons " \bullet ", constitue donc une loi interne pour $\Theta(N)$. Pour signifier que h est la fonction PCC correspondant à la cascade de deux PCC de fonctions respectives f et g conformément à la figure 3.3, nous noterons $PCC_h = PCC_f \bullet PCC_g$ ou bien $h = f \bullet g$.

Il est facile de vérifier, d'après la relation (3.19), que la loi " \bullet " est associative et que PCC_e , défini par une fonction PCC nulle $e(n) = 0$, est l'élément neutre pour cette loi. Cependant, cette loi n'est pas commutative. Pour contre exemple, nous choisissons deux fonctions f et g de période 6 définies par $f(n) = [-7, 2, 4, -5, -5, 5]$ et $g(n) = [4, -4, -5, 5, 4, 8]$. La cascade de ces PCC nous donne d'une part $(f \bullet g)(n) = [8, 1, -3, 0, -3, 3]$ et d'autre part $(g \bullet f)(n) = [-11, 10, 8, -10, 0, 9]$. La figure 3.4 illustre ce contre exemple.

3.3.2 Inversibilité d'un PCC

Dans un contexte de communications numériques, pour les mêmes raisons que dans le cas général de l'utilisation de filtres LPTV, il est nécessaire d'étudier l'inversibilité d'un PCC. Il est possible pour cela de caractériser la forme particulière des matrices LPTV ((1.42)-(1.45)),

puis d'appliquer la condition matricielle nécessaire et suffisante d'inversibilité des filtres LPTV proposée au début du second chapitre. Nous choisissons ici de présenter une approche temporelle portant directement sur l'étude des fonctions f , F et $(\overline{F}, \underline{F})$ définies par la relation (3.3). Nous établissons alors une première condition nécessaire et suffisante sur la fonction F qui caractérise l'inversibilité du PCC. Puis, grâce à l'exploitation de la périodicité de f , nous obtenons une seconde condition nécessaire et suffisante sur \underline{F} équivalente à l'inversibilité du PCC. Nous illustrons ensuite l'intérêt de ces résultats par la présentation d'une méthode générale de construction de PCC inversibles ainsi qu'une discussion sur l'inversibilité d'une famille particulière de PCC que nous appelons PCC linéaires.

3.3.2.1 Conditions d'inversibilité

Etant donné PCC_f , un PCC de période N , nous définissons ce PCC comme étant inversible s'il existe un second PCC noté $PCC_{f'}$ de période N tel que $PCC_f \bullet PCC_{f'} = PCC_e$. Autrement dit, en utilisant la relation (3.19), la fonction f' doit vérifier la relation (3.20).

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f'(n) + f(n - f'(n)) = 0 \quad (3.20)$$

En utilisant cette définition de l'inversibilité d'un PCC, une première condition nécessaire et suffisante (**CNS 1**) portant sur la fonction F sur \mathbb{Z} peut être établie pour l'inversibilité d'un PCC. Mais l'exploitation de la périodicité du PCC nous permet d'établir une seconde condition nécessaire et suffisante (**CNS 2**) ne portant que sur la fonction \underline{F} sur un intervalle de longueur N . Ces deux conditions nécessaires et suffisantes, dont les démonstrations se trouvent dans les annexes C.2 et C.3, sont les suivantes.

Condition Nécessaire et Suffisante 1 :

Etant donné $PCC_f \in \Theta(N)$, ce PCC est inversible si et seulement si la fonction F définie par la relation (3.3), $F(n) = n - f(n)$, est bijective sur \mathbb{Z} .

Condition Nécessaire et Suffisante 2 :

Etant donné un PCC caractérisé par une fonction F définie par la relation (3.3), la fonction F est bijective sur \mathbb{Z} si et seulement si la fonction \underline{F} définie par (3.3), $\underline{F}(n) = \underline{F}(n)_N$, réalise une bijection de l'intervalle $[0 : N - 1]$ dans lui-même.

La conséquence principale de la CNS 2 est que l'inversibilité d'un PCC ne dépend que de la fonction \underline{F} et se trouve donc être indépendante de \overline{F} définie en (3.3). De plus, l'étude de

l'inversibilité d'un PCC se réduit à une étude sur un intervalle de longueur N et consiste à vérifier que la fonction \underline{F} réalise une permutation sur l'intervalle $[0 : N - 1]$.

3.3.2.2 Utilisation de la caractérisation de l'inversibilité d'un PCC

Nous allons illustrer l'intérêt de la CNS 2 précédente. Tout d'abord, nous allons voir qu'elle offre une méthode générale pour construire un PCC inversible. Puis, dans un second temps, nous définissons la famille des PCC linéaires caractérisés par une fonction $f(n) = -kn_N$ et nous allons montrer que cette CNS 2 nous permet de discuter les valeurs de k équivalentes à l'inversibilité du PCC linéaire associé.

3.3.2.2-a Méthode générale de construction de PCC inversibles

D'après la CNS 2, la construction d'un PCC inversible est équivalente à définir \underline{F} comme une permutation sur $[0 : N - 1]$. Remarquons que le nombre de permutations possibles sur l'ensemble $[0 : N - 1]$ est égal à $N!$. Ensuite pour un choix donné de \underline{F} , le choix de \overline{F} est totalement libre sur l'intervalle $[0 : N - 1]$. L'ensemble des PCC inversibles de période N est donc infini si aucune condition particulière n'est imposée au PCC. Nous illustrons cette construction générale par l'exemple de PCC de période 6. Pour le choix d'une permutation particulière \underline{F} , nous générons deux PCC différents par deux choix distincts de \overline{F}_1 et \overline{F}_2 pour \overline{F} . Nous en déduisons alors les deux fonctions PCC, $f_1(n)$ et $f_2(n)$, des deux PCC inversibles ainsi construits. Cet exemple particulier de génération de PCC inversibles de période 6 est résumé dans le tableau 3.1 suivant.

n	0	1	2	3	4	5
$\underline{F}(n)$	2	3	5	0	1	4
$\overline{F}_1(n)$	1	-1	-1	0	2	0
$\overline{F}_2(n)$	1	0	0	1	-2	1
$f_1(n)$	-8	4	3	3	-9	1
$f_2(n)$	-8	-2	-3	-3	15	-5

Tableau 3.1 : Génération de PCC inversibles

3.3.2.2-b Discussion de l'inversibilité des PCC linéaires

Nous définissons la famille des PCC linéaires de période N par une fonction PCC de la forme $f(n) = -kn_N$. Ainsi défini, il n'est pas évident de discuter l'inversibilité de tels PCC. Mais en appliquant la CNS2, nous allons obtenir directement la caractérisation des PCC linéaires

inversibles. En effet, si nous calculons la fonction \underline{F} associée à un PCC linéaire pour $n \in [0 : N-1]$, nous obtenons l'expression suivante (3.21).

$$\underline{F}(n) = \underline{n - f(n)}_N = \underline{(1+k)n}_N \quad (3.21)$$

Or, il est un résultat classique d'algèbre que $1+k$ est un élément générateur de l'ensemble fini $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (i.e l'ensemble des N premiers entiers) si et seulement si $(1+k)$ et N sont premiers entre eux. Ainsi, d'après la forme (3.21) de \underline{F} , en utilisant l'énoncé de la CNS 2, on en déduit qu'un PCC linéaire de fonction $f(n) = -kn_N$ est inversible si et seulement si $(k+1) \wedge N = 1$. Nous verrons dans le prochain paragraphe sur la décomposition des PCC comment déterminer la fonction du PCC inverse.

Nous illustrons ce résultat par un exemple numérique. A cet effet, nous choisissons une période $N = 6$. Nous construisons le PCC linéaire de fonction f_1 avec $k_1 = 3$ ainsi que le PCC linéaire de fonction f_2 de coefficient $k_2 = 4$. Ensuite, nous calculons \underline{F}_1 et \underline{F}_2 , la fonction \underline{F} associée à ces deux PCC. On vérifie bien alors que le premier PCC n'est pas inversible puisque \underline{F}_1 n'est pas une permutation de $[0 : 5]$, ce que nous savions déjà puisque $(k_1 + 1) = 4$ n'est pas premier avec $N = 6$. Quant au second PCC, il est inversible puisque \underline{F}_2 est une permutation de $[0 : 5]$, ce que nous savions aussi puisque $(k_2 + 1) = 5$ est premier avec $N = 6$. Ces résultats numériques sont résumés dans le tableau 3.2 suivant.

n	0	1	2	3	4	5
$f_1(n)$	0	-3	-6	-9	-12	-15
$f_2(n)$	0	-4	-8	-12	-16	-20
$\underline{F}_1(n)$	0	4	2	0	4	2
$\underline{F}_2(n)$	0	5	4	3	2	1

Tableau 3.2 : Génération de PCC linéaires

3.3.3 Structures de groupe des PCC et sous ensembles de PCC

Nous avons introduit jusqu'ici la classe générale $\Theta(N)$ des PCC N périodiques, puis nous avons déterminé une condition nécessaire et suffisante sur la fonction \underline{F} d'un PCC qui assure l'inversibilité de celui ci. Cette condition nous a permis de proposer une méthode générale pour la construction d'un PCC inversible. Dans cette partie, nous allons à présent définir et caractériser certains sous ensembles de l'ensemble $\Theta(N)$: $\tilde{\Theta}(N)$, $B(N)$, $\tilde{B}(N)$, $C(N)$ et $\tilde{C}(N)$ qui

désignent respectivement l'ensemble des PCC inversibles, l'ensemble des PCC blocs, l'ensemble des PCC blocs inversibles, l'ensemble des PCC convolutionnels ainsi que l'ensemble des PCC convolutionnels inversibles. L'intérêt de la définition de ces sous ensembles est que les ensembles $\tilde{\Theta}(N)$, $\tilde{B}(N)$ et $\tilde{C}(N)$ munis de la loi de cascade ont une structure de groupe. Mais, nous verrons aussi dans le paragraphe suivant qu'un second intérêt est que les deux sous groupes $\tilde{B}(N)$ et $\tilde{C}(N)$ engendrent $\tilde{\Theta}(N)$ par la loi de cascade.

3.3.3.1 L'ensemble des PCC N périodiques inversibles : $\tilde{\Theta}(N)$

Nous appelons $\tilde{\Theta}(N)$ l'ensemble des PCC N périodiques inversibles. D'après la CNS 2 établie au début de ce paragraphe, nous savons que $PCC_f \in \tilde{\Theta}(N)$ si et seulement si la fonction \underline{F} associée est une permutation de $[0 : N - 1]$. De plus, l'ensemble $\tilde{\Theta}(N)$ muni de la loi "•" a une structure de groupe. Les axiomes définissant une structure de groupe ainsi que la preuve de la nature de groupe de $\tilde{\Theta}(N)$ se trouvent dans l'annexe C.4.

3.3.3.2 L'ensemble des PCC blocs N périodiques : $B(N)$

Soit un PCC de fonction f de période N , nous dirons que ce PCC est q -bloc si la propriété suivante (3.22) est vérifiée.

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \forall A_q^i = [iq : (i+1)q - 1], F(A_q^i) \subset A_q^i \quad (3.22)$$

La propriété (3.22) signifie que les blocs A_q^i sont stables par la transformation occasionnée par PCC_f . La figure 3.5 illustre la nature q -bloc d'un PCC. Dans la suite, nous noterons $B(N)$ l'ensemble des PCC de période N tels qu'il existe un entier q tel que ce PCC soit q -bloc.

Concernant la caractérisation de la nature q -bloc d'un PCC, il est facile de vérifier qu'un PCC est q bloc si et seulement la fonction \overline{F} associée vérifie : $\forall n \in \mathbb{Z}, \overline{F}(n)^q = \overline{n}^q$. D'autre part, $B(N)$ comprend tous les PCC de période N tels qu'il existe un entier q tel que ce PCC est q -bloc. Il est intéressant de chercher à caractériser le lien arithmétique entre la période N d'un PCC bloc et la valeur q qui caractérise la nature bloc de ce PCC. A ce propos, nous avons établi les résultats suivants dont les démonstrations se trouvent dans l'annexe C.5.

1 -Nous considérons PCC_f , un PCC q -bloc appartenant à $B(N)$. Si $q \wedge N = 1$ alors PCC_f est l'élément neutre pour la loi "•", c'est à dire $f = e$.

2 -Etant donné PCC_f , un PCC q -bloc appartenant à $B(N)$, PCC_f est aussi $PGCD(q, N)$ -bloc.

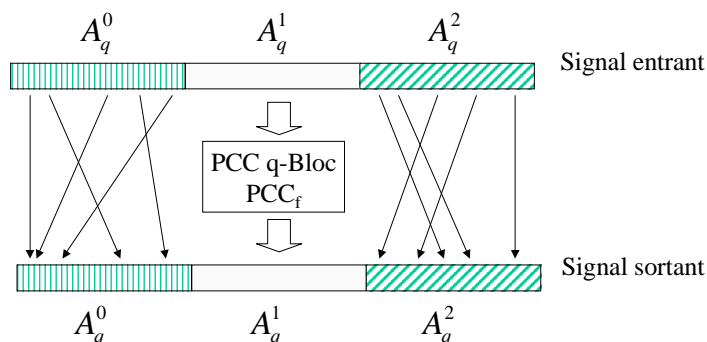


FIG. 3.5 – Illustration de la nature bloc d'un PCC

3 -Etant donné PCC_f , un PCC q -bloc appartenant à $B(N)$, alors PCC_f est nécessairement N -bloc.

4 -Soit $PCC_f \in \Theta(N)$, alors PCC_f appartient à $B(n)$ si et seulement si $\bar{F}(n) = \bar{n}^N$, c'est à dire si et seulement si sa fonction F est de la forme $F(n) = N\bar{n}^N + \underline{F}(n)$.

5 Soit $PCC_f \in \Theta(N)$, nous notons $N = \prod_{i=1}^{P_N} N_i^{\alpha_{N_i}}$ la décomposition de N en produit de facteurs premiers. Si $PCC_f \in B(N)$ alors le plus petit q tel que PCC_f est q -bloc est nécessairement de la forme $q = \prod_{i=1}^{P_N} N_i^{\beta_{N_i}}$ avec $\beta_{N_i} \leq \alpha_{N_i}$. Inversement, il est toujours possible de construire un PCC N périodique et q -bloc si $q = \prod_{i=1}^{P_N} N_i^{\beta_{N_i}}$ avec $\beta_{N_i} \leq \alpha_{N_i}$.

3.3.3.3 L'ensemble des PCC blocs N périodiques inversibles : $\tilde{B}(N)$

Nous appelons $\tilde{B}(N)$ l'ensemble des PCC N périodiques inversibles blocs, c'est à dire $\tilde{B}(N) = B(N) \cap \tilde{\Theta}(N)$. D'après la caractérisation de $B(N)$ et $\tilde{\Theta}(N)$, nous avons la caractérisation suivante pour $\tilde{B}(N)$:

$PCC_f \in \tilde{B}(N)$ si et seulement si la fonction $F(n)$ associée est de la forme (3.23) où $\underline{F}(n)$ est une permutation de $[0 : N - 1]$.

$$F(n) = N\bar{n}^N + \underline{F}(n) \quad (3.23)$$

D'autre part, une condition nécessaire simple sur la fonction PCC d'un PCC N périodique pour appartenir à $\tilde{B}(N)$ est : $\sum_{n=0}^{N-1} f(n) = 0$. Cette condition nécessaire s'obtient en utilisant

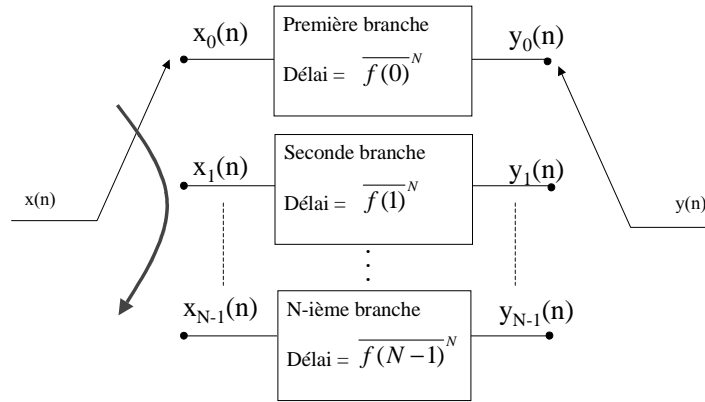


FIG. 3.6 – Représentation MIMO d'un PCC convolutionnel

l'expression précédente de $F(n)$. Enfin, on montre dans l'annexe C.6 que l'ensemble $\tilde{B}(N)$ muni de la loi "•" est un sous groupe de $\tilde{\Theta}(N)$.

3.3.3.4 L'ensemble des PCC convolutionnels N périodiques : $C(N)$

Nous appelons convolutionnel et notons $C(N)$ l'ensemble des PCC de période N dont la fonction PCC vérifie $\underline{f}(n)_N = 0$. Une conséquence de cette définition est qu'en utilisant $x_k(n)$ et $y_k(n)$ les composantes polyphases, définies par (1.1), respectivement de l'entrée et de la sortie du PCC convolutionnel, ce PCC admet la représentation MIMO de la figure 3.6.

Une caractérisation d'un PCC convolutionnel à partir de la fonction \underline{F} est que $PCC_f \in C(N)$ si et seulement si $\underline{F}(n) = \underline{n}_N$, autrement dit la fonction $F(n)$ s'écrit sous la forme (3.24).

$$F(n) = N\overline{F}(n) + \underline{n}_N \quad (3.24)$$

Cette caractérisation est une conséquence directe de la définition d'un PCC convolutionnel en remarquant que pour un tel PCC, le calcul de \underline{F} nous donne $\underline{F}(n) = \underline{n}_N$. Il est intéressant de noter enfin que la représentation MIMO de la figure 3.6 nous indique, en utilisant les résultats du deuxième chapitre, que l'ensemble des PCC convolutionnels constitue un sous ensemble de Δ_0 . Cela signifie entre autre que la matrice modulateurs d'un PCC convolutionnel est circulaire.

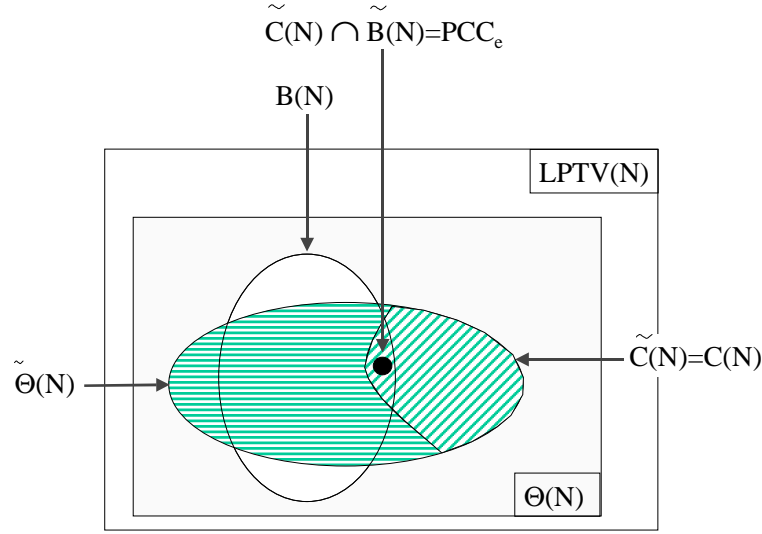


FIG. 3.7 – Illustration des sous ensembles de PCC.

3.3.3.5 L'ensemble des PCC convolutionnels N périodiques : $\tilde{C}(N)$

Nous appelons $\tilde{C}(N)$ l'ensemble des PCC, de période N , convolutionnels et inversibles, c'est à dire $\tilde{C}(N) = C(N) \cap \tilde{\Theta}(N)$. Un résultat important est que les ensembles $\tilde{C}(N)$ et $C(N)$ sont confondus. En effet, soit $PCC_f \in C(N)$, nous avons vu alors qu'une caractérisation (3.24) est que $\underline{F}(n) = \underline{n}_N$. Or, en utilisant la CNS 2 sur l'inversibilité d'un PCC, puisque la fonction \underline{F} est la permutation identité, nous en concluons que tout PCC convolutionnel est par définition inversible. Par la suite, nous utiliserons $\tilde{C}(N)$ pour désigner indifféremment les ensembles $C(N)$ ou $\tilde{C}(N)$ afin de conserver la notation $\tilde{\cdot}$ pour la désignation d'ensembles de PCC inversibles.

Comme pour $\tilde{B}(N)$, il est possible de montrer (Annexe C.7) que l'ensemble $\tilde{C}(N)$ muni de la loi "•" est un sous groupe de $\tilde{\Theta}(N)$ et que l'intersection (Annexe C.8) des deux sous groupes $\tilde{B}(N)$ et $\tilde{C}(N)$ est réduit à l'élément neutre e de la loi "•". Toutes ces définitions d'ensembles de PCC sont résumées par la figure 3.7 où $LPTV(N)$ désigne l'ensemble des filtres LPTV de période N .

3.4 Décompositions de PCC

Des considérations de décompositions des PCC sont ici abordées. Dans une première partie, le problème de la décomposition de PCC en la cascade d'un PCC bloc et d'un PCC convolutionnel de même période est abordé. Il y est ainsi démontré que tout élément de $\Theta(N)$ est décomposable en la cascade d'un PCC bloc suivi d'un PCC convolutionnel de même période. Dans le sens inverse, une décomposition d'un PCC en la cascade d'un PCC convolutionnel et d'un PCC bloc n'est pas possible pour tout élément de $\Theta(N)$, mais l'est pour tout élément de $\tilde{\Theta}(N)$. Nous illustrons ce résultat par un exemple de décomposition d'un PCC linéaire, puis nous montrons qu'un intérêt d'une telle décomposition est la possibilité de découper le problème de la recherche de l'inverse d'un PCC en deux étapes. En raison de l'équivalence démontrée entre les PCC numériques et les entrelaceurs, un résultat similaire à cette décomposition a déjà été mentionné dans [34] pour les entrelaceurs.

Dans un second temps, le problème de la décomposition d'un PCC de $\tilde{\Theta}(N)$ en la cascade de deux PCC de périodes plus petites et premières entre elles est abordé. Un couple de conditions constituant une CNS pour une telle décomposition est à ce sujet établi. Grâce à l'équivalence entre PCC et entrelaceurs, nous appliquons ce résultat au cas de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes et nous montrons qu'un tel entrelaceur $N = QP$ périodique est décomposable en la cascade de deux PCC de périodes respectives Q et P lorsque P et Q sont premiers entre eux.

3.4.1 Décomposition de tout PCC en la cascade d'un PCC bloc et d'un PCC convolutionnel de même période

3.4.1.1 Approche qualitative de la décomposition bloc/convolutionnel

Afin de bien comprendre le principe de la décomposition bloc/convolutionnel de tout PCC de $\tilde{\Theta}(N)$, nous proposons ici une approche qualitative de l'effet d'un PCC sur un signal $x(n)$. Nous adoptons pour cela une représentation sous forme matricielle du signal $x(n)$ conformément à la figure 3.8. Une matrice constituée de N lignes et un nombre infini de colonnes est remplie par le signal $x(n)$ colonne par colonne. Avec cette représentation, il est facile de constater que la ligne L_i (pour $i \in [0 : N - 1]$) est constituée de la i -ème famille polyphase définie en (1.1) du signal $x(n)$. Sans perte de généralité, nous supposons que le signal $x(n)$ est nul pour $n < 0$. Nous allons voir que l'effet d'un PCC de fonction f peut être décomposé en la succession de deux opérations, une permutation des lignes (i.e une permutation des familles polyphases) suivie

L_0	$x(0)$	$x(N)$	-----
L_1	$x(1)$	$x(N+1)$	-----
L_2	$x(2)$	$x(N+2)$	-----
	⋮	⋮	-----
L_{N-2}	$x(N-2)$	$x(2N-2)$	-----
L_{N-1}	$x(N-1)$	$x(2N-1)$	-----

FIG. 3.8 – Distribution initiale du signal $x(n)$

d'une translation de chaque ligne les unes par rapport aux autres.

Permutation des lignes :

Le premier effet du PCC de fonction f consiste en une opération sur les lignes, c'est à dire que chaque ligne i (pour $i \in [0 : N - 1]$) est remplacée par la ligne $\underline{F}(i)$. La distribution du signal à la sortie de cette première étape est illustrée par la figure 3.9. Remarquons que cette opération sur les lignes est une permutation si le PCC à décomposer est inversible. En effet, d'après la CNS 2 sur l'inversibilité d'un PCC, on sait que $\underline{F}(i)$ est une permutation sur $[0 : N - 1]$ si le PCC est inversible. Nous supposons pour cette approche qualitative que le PCC est inversible et parlons alors de permutations sur les lignes. Nous verrons plus loin dans la formulation théorique de cette décomposition que cette décomposition reste valable même si le PCC n'est pas inversible.

Translation des lignes :

Pour chaque ligne numéro i (pour $i \in [0 : N - 1]$) sur la nouvelle distribution de la figure 3.9, le second effet du PCC consiste en une translation de $|\overline{F}(i)|$ positions. Cette translation se fait sur la droite si $\overline{F}(i) < 0$ et sur la gauche dans le cas contraire. Nous obtenons ainsi la distribution finale du signal illustrée par la figure 3.10. Le signal de sortie du PCC est obtenu par la lecture colonne par colonne de la distribution de la figure 3.10.

$L_{\underline{F}(0)}$	$x(\underline{F}(0))$	$x(\underline{F}(0)+N)$	-----
$L_{\underline{F}(1)}$	$x(\underline{F}(1))$	$x(\underline{F}(1)+N)$	-----
$L_{\underline{F}(2)}$	$x(\underline{F}(2))$	$x(\underline{F}(2)+N)$	-----
	⋮	⋮	-----
$L_{\underline{F}(N-2)}$	$x(\underline{F}(N-2))$	$x(\underline{F}(N-2)+N)$	-----
$L_{\underline{F}(N-1)}$	$x(\underline{F}(N-1))$	$x(\underline{F}(N-1)+N)$	-----

FIG. 3.9 – Distribution du signal à la sortie de la première étape de permutation des lignes

$L_{\underline{F}(0)}$	$x(\underline{F}(0)+N\bar{F}(0))$ $y(0)$	$x(\underline{F}(0)+N\bar{F}(0)+N)$ $y(N)$	Translation de ligne de $\bar{F}(0)$ échantillons
$L_{\underline{F}(1)}$	$x(\underline{F}(1)+N\bar{F}(1))$ $y(1)$	$x(\underline{F}(1)+N\bar{F}(1)+N)$ $y(N+1)$	Translation de ligne de $\bar{F}(1)$ échantillons
$L_{\underline{F}(2)}$	$x(\underline{F}(2)+N\bar{F}(2))$ $y(2)$	$x(\underline{F}(2)+N\bar{F}(2)+N)$ $y(N+2)$	Translation de ligne de $\bar{F}(2)$ échantillons
	⋮	⋮	
$L_{\underline{F}(N-2)}$	$x(\underline{F}(N-2)+N\bar{F}(N-2))$ $y(N-2)$	$x(\underline{F}(N-2)+N\bar{F}(N-2)+N)$ $y(2N-2)$	Translation de ligne de $\bar{F}(N-2)$ échantillons
$L_{\underline{F}(N-1)}$	$x(\underline{F}(N-1)+N\bar{F}(N-1))$ $y(N-1)$	$x(\underline{F}(N-1)+N\bar{F}(N-1)+N)$ $y(2N-1)$	Translation de ligne de $\bar{F}(N-1)$ échantillons

FIG. 3.10 – Distribution du signal après les translations de lignes

Les deux étapes qui constituent l'effet d'un PCC sur un signal $x(n)$ ont été présentées ici qualitativement. Ces deux étapes correspondent à l'application successive d'un PCC bloc et d'un PCC convolutionnel. En effet, un PCC est bloc si son effet sur un signal se réduit à la première transformation sur les lignes. De plus, cette transformation est une permutation si le PCC bloc est inversible. Un PCC bloc a donc pour effet de mélanger les familles polyphases du signal $x(n)$ entre elles. Un PCC est convolutionnel si son effet sur un signal $x(n)$ se réduit à la seconde étape de translations des lignes. Un PCC convolutionnel laisse alors inchangées les familles polyphases du signal $x(n)$ mais décale chacune de ces familles polyphases les unes par rapport aux autres. Nous allons à présent présenter la formulation analytique de cette décomposition ainsi que celle de la décomposition inverse.

3.4.1.2 Expression analytique de la décomposition : $\Theta(N) = B(N) \bullet \tilde{C}(N)$

Etant donné $PCC_f \in \Theta(N)$, il existe un couple $(PCC_{f_b}, PCC_{f_c}) \in B(N) \times \tilde{C}(N)$ tel que $PCC_f = PCC_{f_b} \bullet PCC_{f_c}$. Les fonctions PCC, f_b et f_c , sont données par les relations (3.25) et (3.26).

$$f_c(n) = -\overline{F}(\underline{n}_N)N \quad (3.25)$$

$$f_b(n) = \underline{n}_N - \underline{F}(n) \quad (3.26)$$

La démonstration de cette proposition se trouve dans l'annexe C.9 où il est aussi montré que cette décomposition est unique dans le cas où le PCC appartient à $\tilde{\Theta}(N)$. Il est intéressant de faire quelques remarques à propos de ce résultat. Tout d'abord, une première conséquence de cette proposition est que les deux ensembles $B(N)$ et $C(N)$ engendrent l'ensemble $\Theta(N)$. D'autre part, étant donné $PCC_f \in \Theta(N)$, nous appliquons la décomposition précédente. Puisque tout PCC convolutionnel est inversible par définition, on en déduit que l'inversibilité de PCC_f est donc équivalente à l'inversibilité de sa composante PCC bloc (3.26). Enfin, un dernier résultat intéressant qui découle de cette décomposition est que pour tout $PCC_f \in \tilde{\Theta}(N)$, nous avons $\sum_{n=0}^{N-1} f(n) = -N \sum_{n=0}^{N-1} \overline{F}(\underline{n}_N)$. Ce résultat implique que pour tout PCC inversible de période N , $\sum_{n=0}^{N-1} f(n)$ est multiple de N .

3.4.1.3 Problème de la décomposition inverse : $\tilde{\Theta}(N) = \tilde{C}(N) \bullet \tilde{B}(N)$

Etant donné $PCC_f \in \tilde{\Theta}(N)$, il existe un couple unique $(PCC_{f'_c}, PCC_{f'_b}) \in \tilde{C}(N) \times \tilde{B}(N)$ tel que $PCC_f = PCC_{f'_c} \bullet PCC_{f'_b}$. Les fonctions PCC, f'_c et f'_b , sont données par les relations (3.27)

et (3.28).

$$f'_c(n) = -\overline{F}(\underline{F}^{-1}(n))N \quad (3.27)$$

$$f'_b(n) = \underline{n}_N - \underline{F}(n) \quad (3.28)$$

La démonstration de cette proposition se trouve également dans l'annexe C.9. Il est intéressant de remarquer que cette décomposition n'est pas valable pour $\Theta(N)$, mais seulement pour $\tilde{\Theta}(N)$ puisque la relation (3.27) nécessite de définir la fonction \underline{F}^{-1} . Enfin, une remarque générale sur ces deux décompositions est que la composante PCC bloc (3.26) et (3.28) dans les deux décompositions est identique.

3.4.1.4 Illustration et intérêt de la décomposition

Dans un premier temps, nous allons illustrer les décompositions précédentes en appliquant les résultats au cas du PCC linéaire que nous avons défini précédemment. Nous verrons ensuite que l'un des intérêts de cette décomposition est la recherche de l'inverse d'un PCC en deux temps, c'est à dire que la recherche d'un PCC peut se faire en cherchant d'abord l'inverse de sa composante bloc puis l'inverse de sa composante convolutionnelle.

3.4.1.4-a Décomposition convolutionnel/bloc d'un PCC linéaire

Nous considérons la fonction PCC d'un PCC linéaire N périodique $f(n) = -kn_{\underline{n}_N}$. La décomposition convolutionnel/bloc n'étant possible que pour les éléments de $\tilde{\Theta}(N)$, il faut s'assurer de l'inversibilité du PCC linéaire. Or, nous avons vu que cette inversibilité était équivalente à la condition $(k+1) \wedge N = 1$.

D'autre part, il est nécessaire dans l'expression (3.27) de connaître $\underline{F}^{-1}(n)$. Il est possible de montrer que l'inverse de la fonction $\underline{F}(n) = \underline{(1+k)n}_N$ (3.21) est donné par $\underline{F}^{-1}(n) = \underline{(1+k')n}_N$ où $(1+k')$ est le coefficient unique de Bézout appartenant à $[0 : N-1]$ associé au couple $(1+k, N)$ et vérifiant $(1+k')(1+k) + NN' = 1$ où N' est un entier relatif. Nous avons donc, d'après les expressions (3.27) et (3.28), les expressions (3.29) et (3.30) pour les composantes PCC blocs et convolutionnels de la décomposition convolutionnel/bloc de PCC_f .

$$f'_c(n) = -\overline{(1+k)(1+k')n}_N^N N \quad (3.29)$$

$$f'_b(n) = \underline{n}_N - \underline{(1+k)n}_N \quad (3.30)$$

Nous appliquons ce résultat au cas particulier où $N = 6$ et $k = 4$. Il est facile de vérifier que

$k' = 4$ dans ce cas et nous avons alors les relations (3.31) et (3.32) pour $n \in [0 : 5]$.

$$f'_c(n) = -\overline{5 \times 5n_6} \times 6 \quad (3.31)$$

$$f'_b(n) = \underline{n_6} - \underline{5n_6} \quad (3.32)$$

Le tableau 3.3 suivant fournit l'évaluation de ces composantes convolutionnels et blocs du PCC linéaire.

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	0	-4	-8	-12	-16	-20
$f'_c(n)$	0	-24	-18	-12	-6	0
$f'_b(n)$	0	-4	-2	0	2	4

Tableau 3.3 : Décomposition Convolutionnel/Bloc d'un PCC linéaire inversible

3.4.1.4-b Décomposition bloc/convolutionnel d'un PCC linéaire

La décomposition bloc/convolutionnel d'un PCC étant possible pour tout PCC de $\Theta(N)$, il n'est pas nécessaire que le PCC décomposé soit inversible. Dans le cas d'un PCC linéaire, les composantes convolutionnel et bloc (3.25) et (3.26) de cette décomposition sont données par (3.33) et (3.34).

$$f_c(n) = -\overline{(1+k)n^N} N \quad (3.33)$$

$$f_b(n) = \underline{n_N} - \underline{(1+k)n_N} \quad (3.34)$$

Si nous appliquons ces résultats au cas $N = 6$ et $k = 3$, dont nous savons que le PCC associé n'est pas inversible, nous avons le tableau 3.4 suivant.

n	0	1	2	3	4	5
$f(n)$	0	-3	-6	-9	-12	-15
$f_c(n)$	0	0	-6	-12	-12	-18
$f_b(n)$	0	-3	0	3	0	3

Tableau 3.4 : Décomposition Bloc/Convolutionnel d'un PCC linéaire

3.4.1.4-c Utilisation de la décomposition pour la détermination de l'inverse d'un PCC

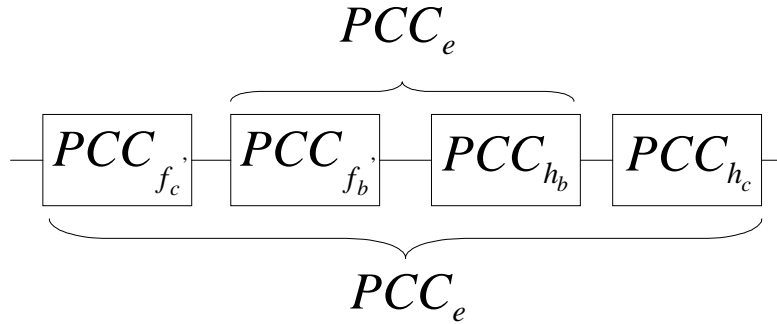


FIG. 3.11 – Utilisation de la décomposition d'un PCC pour la recherche du PCC inverse

Nous considérons PCC_f , un PCC appartenant à $\tilde{\Theta}(N)$ et nous notons PCC_h son PCC inverse. Nous notons f'_c et f'_b les fonctions PCC convolutionnel et bloc de la décomposition convolutionnel/bloc de PCC_f ainsi que h_b et h_c les fonctions PCC bloc et convolutionnel de la décomposition bloc/convolutionnel de PCC_h . Puisque PCC_h est le PCC inverse de PCC_f , nous avons par définition $PCC_f \bullet PCC_h = PCC_e$. Conformément à la figure 3.11, en utilisant la structure de groupe de $\tilde{B}(N)$, nous en déduisons que $PCC_{f'_b} \bullet PCC_{h_b}$ vaut PCC_e . Par conséquent, nous avons aussi $PCC_{f'_c} \bullet PCC_{h_c} = PCC_e$. La recherche de l'inverse de PCC_f revient donc à résoudre les deux équations (3.35) et (3.36).

$$PCC_{f'_b} \bullet PCC_{h_b} = PCC_e \quad (3.35)$$

$$PCC_{f'_c} \bullet PCC_{h_c} = PCC_e \quad (3.36)$$

Nous notons $(\underline{F}, \overline{F})$ et $(\underline{H}, \overline{H})$ les fonctions définies en (3.3) associées respectivement à PCC_f et PCC_h . En utilisant les expressions (3.26), (3.28) ainsi que (3.25) et (3.27), les deux équations (3.35) et (3.36) sont équivalentes à (3.37) et (3.38).

$$\underline{H}(n) = \underline{F}^{-1}(n) \quad (3.37)$$

$$\overline{H}(\underline{n}_N) = -\overline{F}(\underline{F}^{-1}(n)) \quad (3.38)$$

Ensuite, en utilisant l'expression (3.7) pour $H(n)$, nous en déduisons finalement l'expression suivante (3.39) de la fonction h , puisque $h(n) = n - H(n)$. Ce résultat nous donne une expression

du PCC inverse.

$$h(n) = \underline{n}_N + N\overline{F}(\underline{F}^{-1}(n)) - \underline{F}^{-1}(n) \quad (3.39)$$

De nouveau, nous appliquons ce résultat à la détermination du PCC inverse du PCC linéaire $f(n) = -kn_N$ de période N . Nous savons que $\underline{F}^{-1}(n) = \underline{(1+k')n}_N$ et $\overline{F}(\underline{n}_N) = \overline{(1+k)n}^N$. Cela nous permet d'en déduire l'expression (3.40) pour h pour $n \in [0 : N - 1]$.

$$h(n) = n + N\overline{(1+k)(1+k')n}_N^N - \underline{(1+k')n}_N \quad (3.40)$$

Pour le cas particulier, $N = 6$ et $k = 4$, nous avons le tableau 3.5 suivant pour la détermination de l'inverse du PCC linéaire.

n	0	1	2	3	4	5
$\underline{H}(n)$	0	5	4	3	2	1
$\overline{H}(n)$	0	4	3	2	1	0
$h(n)$	0	20	16	12	8	4

Tableau 3.5 : Détermination de l'inverse d'un PCC linéaire

3.4.2 Décomposition d'un PCC en la cascade de deux PCC de périodes inférieures

Nous venons de voir que tout élément de $\tilde{\Theta}(N)$ est décomposable en la cascade de deux PCC blocs et convolutionnels de même période N . Dans cette partie, nous nous intéressons à un problème différent de décomposition, qui est la possibilité de décomposer un PCC de période N en la cascade de deux PCC de périodes plus petites P et Q premières entre elles. Pour discuter la faisabilité d'une telle décomposition, nous abordons le problème en utilisant la représentation modulateurs de la figure 1.8 des PCC. Cette approche nous permet de projeter le problème initialement temporel dans le domaine fréquentiel. Nous verrons que cet outil fréquentiel présente le grand intérêt de nous conduire à un système d'équations qui sépare les grandeurs liées aux deux PCC de la décomposition.

Nous commencerons par présenter une condition arithmétique nécessaire entre P , Q et N pour qu'une telle décomposition soit possible. Sous cette condition arithmétique, nous allons voir que la formulation du problème projeté dans le domaine fréquentiel nous conduit à deux conditions nécessaires sur la fonction f du PCC à décomposer et que le couple de ces deux conditions

nécessaires conduit à une CNS pour la faisabilité de la décomposition. Grâce à l'équivalence entre PCC numériques et entrelaceurs, nous appliquerons ce résultat au cas particulier de la décomposition de l'entrelaceur lignes/colonnes.

3.4.2.1 Formulation du problème

Nous considérons PCC_f un PCC inversible et nous appelons N la plus petite période de PCC_f . Nous cherchons un couple $(PCC_h, PCC_g) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ tel que $P < N$, $Q < N$ et $PCC_f = PCC_h \bullet PCC_g$. D'après la définition (3.19) de la loi de cascade, nous cherchons donc deux fonctions h et g respectivement Q et P périodiques qui vérifient la relation suivante (3.41).

$$f(n) = g(n) + h(n - g(n)) \quad (3.41)$$

3.4.2.2 Condition arithmétique nécessaire

Nous avons vu dans la définition de la loi de cascade qu'une période de la cascade de deux PCC de périodes respectives P et Q est $PPCM(P, Q)$. Or, nous avons appelé N la plus petite période du PCC à décomposer. Nous en déduisons donc que N divise nécessairement $PPCM(P, Q)$. Notre but est de trouver une décomposition (3.41) avec des périodes P et Q les plus petites possibles. Nous choisissons alors de nous placer dans l'hypothèse où $PPCM(P, Q)$ est le plus petit entier que divise N (i.e $N = PPCM(P, Q)$) et où P et Q sont premiers entre eux (i.e $P \wedge Q = 1$). Sous cette hypothèse, la condition arithmétique nécessaire pour la décomposition devient (3.42).

$$PQ = N \text{ et } P \wedge Q = 1 \quad (3.42)$$

3.4.2.3 Résolution par projection du problème dans le domaine fréquentiel

Nous n'expliquons ici que les grandes lignes du raisonnement et des calculs qui permettent de résoudre le problème initial, le détail se trouvant dans l'annexe C.10. Il est nécessaire néanmoins d'introduire au préalable la définition suivante (3.43) de la fonction θ .

$$\begin{aligned} \theta \quad [0; Q - 1] \times [0; P - 1] &\longrightarrow [0; N - 1] \\ (q, p) &\longrightarrow \theta(q, p) = \underline{qP + pQ}_N \end{aligned} \quad (3.43)$$

En utilisant l'hypothèse que $P \wedge Q = 1$, il est facile de vérifier que cette fonction θ est bijective et nous notons $\theta^{-1}(n) = (q_n, p_n)$.

Le principe de la méthode consiste à projeter l'équation (3.41) dans le domaine fréquentiel en calculant la TFD de part et d'autre de cette équation sur N points temporels, en remarquant que le terme $h(n - g(n))$ dans cette équation correspond à l'application de PCC_g à la série temporelle $h(n)$. Pour évaluer fréquentiellement l'effet de cette application de PCC_g sur la série temporelle $h(n)$, nous allons utiliser la relation (1.35) qui exprime l'effet fréquentiel d'un PCC. Nous notons pour cela $\{T_p^g(z)\}_{0 \leq p \leq N-1}$ les filtres modulateurs associés à PCC_g considéré comme un PCC N périodique ainsi que $\{F_k, G_k, H_k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ les TFD des séries temporelles $\{f(n), g(n), h(n)\}_{0 \leq n \leq N-1}$ considérées aussi comme N périodiques. Il est possible de montrer (cf annexe C.10) que le fait de considérer les séries temporelles $g(n)$ et $h(n)$ respectivement P et Q périodiques comme des séries $N = PQ$ périodiques implique que seuls les coefficients de TFD $\{G_{Qk}\}_{0 \leq k \leq P-1}$ et $\{H_{Pk}\}_{0 \leq k \leq Q-1}$ sont non nuls. Nous obtenons ainsi l'expression fréquentielle (3.44) équivalente à l'expression temporelle (3.41).

$$F_k = \delta(\underline{k}_Q) G_{Q\bar{k}^Q} + T_{Qp_k}^g (W_N^{-Pq_k}) H_{Pq_k}, \quad \forall k \in [0 : N - 1] \quad (3.44)$$

L'expression fréquentielle (3.44) a l'avantage par rapport à l'expression temporelle de la décomposition de permettre, par un choix approprié des valeurs de k , de séparer les grandeurs $\{G_{Qk}\}_{0 \leq k \leq P-1}$ et $\{H_{Pk}\}_{0 \leq k \leq Q-1}$ qui définissent entièrement les PCC de fonction g et h . En exploitant cette relation fréquentielle, nous obtenons deux conditions nécessaires sur la fonction f pour l'existence de la décomposition (3.41). Les deux conditions nécessaires dont la réunion sous l'hypothèse arithmétique (3.42) constitue une condition suffisante sont les suivantes.

CN 1 : Si PCC_f , de période N , admet la décomposition (3.41) avec l'hypothèse arithmétique (3.42), alors $\forall p \in [0 : P - 1]$, Q divise $\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP)$.

CN 2 : Si PCC_f , de période N , admet la décomposition (3.41) avec l'hypothèse arithmétique (3.42), alors $\forall k \in [0 : N - 1]$ tel que $q_k \neq 0$, le rapport $\frac{F_k}{A(p_k, q_k)}$ est indépendant de p_k où $(q_k, p_k) = \theta^{-1}(k)$ et $A(p_k, q_k)$ est défini par la relation suivante (3.45). Nous notons $\alpha(q_k)$ ce rapport indépendant de p_k lorsque cette condition nécessaire est vérifiée.

$$A(p_k, q_k) = \frac{1}{P} \sum_{m=0}^{P-1} W_P^{p_k m} W_Q^{q_k \frac{\sum_{n=0}^{P-1} f(m+nP)}{Q}} \quad (3.45)$$

Si les deux conditions CN 1 et CN 2 sont vérifiées, le PCC de fonction f est décomposable selon la relation (3.41) et une solution $(PCC_{h_0}, PCC_{g_0}) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ pour cette décomposition

est donnée par (3.46) et (3.47).

$$g_0(n) = \frac{1}{Q} \sum_{m=0}^{N-1} f(n + mP) \quad (3.46)$$

$$h_0(n) = \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{Q-1} \alpha(q) W_Q^{-qn} \quad (3.47)$$

Cette solution (PCC_{h_0}, PCC_{g_0}) n'est pas unique. En effet, nous montrons qu'il existe une infinité de couples $(PCC_{h_j}, PCC_{g_j}) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ admissibles pour la décomposition (3.41). Ces couples solutions sont donnés par les relations (3.48) et (3.49).

$$g_j(n) = g_0(n) - j \quad (3.48)$$

$$h_j(n) = j + h_0(n - j) \quad (3.49)$$

3.4.2.4 Application à la décomposition de l'entrelaceur lignes/colonnes en la cascade de deux PCC de périodes inférieures

En utilisant le résultat précédent, nous montrons dans l'annexe C.11, grâce à l'équivalence entre PCC et entrelaceurs, que l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes avec $P \wedge Q = 1$ est décomposable en la cascade de deux PCC Q et P périodiques. Les fonctions $(PCC_{h_j}, PCC_{g_j}) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ de la décomposition sont alors données par les expressions (3.50) et (3.51) où P' est le coefficient de Bézout appartenant à $[0 : P - 1]$ tel que $PP' + QQ' = 1$ (où Q' est un entier relatif) et $b' = \frac{P'(P-1)(Q-1)}{2} \underline{Q}$.

$$g_j(n) = \frac{(P-1)(Q-1)}{2} - (Q-1)\underline{n}_P - j \quad (3.50)$$

$$h_j(n) = j - \frac{(P-1)(Q-1)}{2} + (P-1)\underline{P}'(n-j) + b' \underline{Q} \quad (3.51)$$

La figure 3.12 propose les couples (h_0, g_0) et (h_5, g_5) admissibles pour la décomposition de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes dans le cas où $Q = 8$ et $P = 21$. L'intérêt de cette décomposition, autre que théorique, reste ouvert à la discussion, mais nous reviendrons dans le cinquième chapitre sur une application possible pour la synchronisation de notre système d'accès multiple.

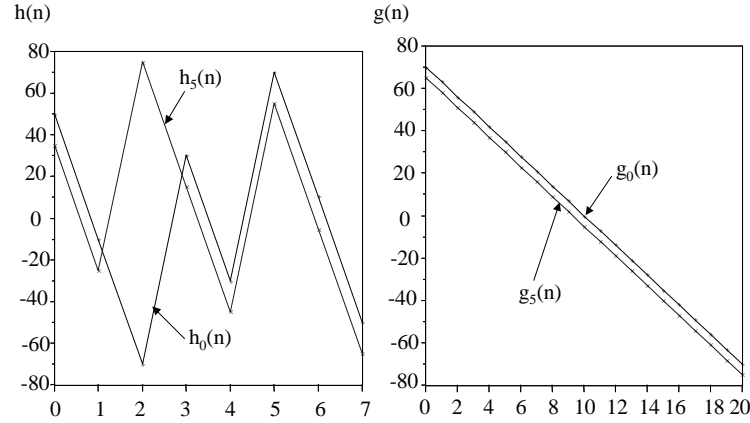


FIG. 3.12 – Illustration de la décomposition de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes avec $(Q, P) = (8, 21)$

3.5 Effets de bords dans le traitement bloc

3.5.1 Mise en évidence de l'effet de bords

Jusqu'à présent, nous avons défini les PCC comme des applications de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} et nous ne nous sommes pas préoccupés de la contrainte réelle dans les applications de communications numériques qui est de travailler sur des signaux d'entrée à durée finie ou tout simplement de vouloir travailler sur des blocs. Ainsi, on peut résumer cette contrainte par le besoin d'un traitement bloc sur des signaux sur un intervalle $I_M = [0 : M - 1]$. Dans ce cas, les signaux d'entrée et de sortie sont liés par la relation (3.52).

$$y(n) = x(n - f(n)) \quad \forall n \in I_M = [0 : M - 1] \quad (3.52)$$

Sous cette hypothèse, deux types d'effets de bords peuvent apparaître comme l'illustre la figure 3.13. Plus précisément, le fait de réduire le domaine de définition d'un PCC à un intervalle fini I_M a pour conséquence que certains éléments de I_M peuvent ne pas avoir d'image dans I_M par la fonction $F(n) = n - f(n)$ associée au PCC considéré. Nous notons E_{bord} (3.53) l'ensemble des éléments de I_M qui sont concernés par ce premier effet de bords.

$$\begin{aligned} E_{bord} &= \{n \in I_M / F(n) \notin I_M\} \\ &= \{n \in I_M / f(n) > n \text{ ou } f(n) \leq n - M\} \end{aligned} \quad (3.53)$$

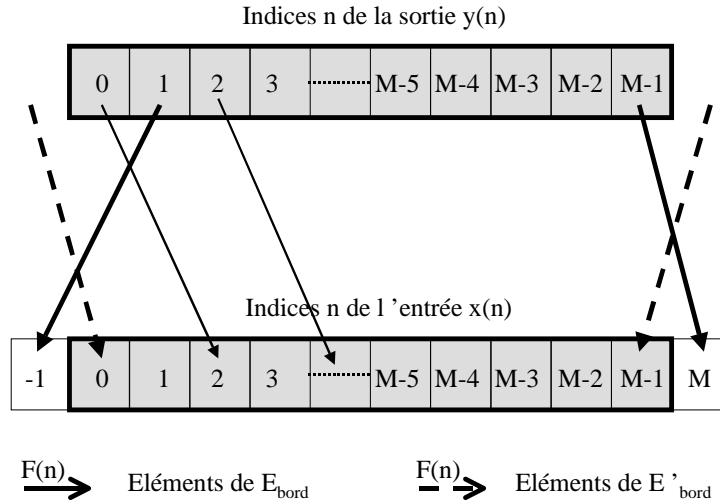


FIG. 3.13 – Illustration de l’effet de bords pour un PCC

Parallèlement, certains éléments de I_M peuvent ne pas avoir d’antécédents par F dans I_M . Nous appelons E'_{bord} (3.54) l’ensemble de ces éléments qui sont concernés par ce second effet de bords.

$$E'_{bord} = \{n \in I_M / \nexists m \in I_M / F(m) = n\} \tag{3.54}$$

Dans le cas où E_{bord} n’est pas l’ensemble vide, une solution pour pallier ce premier effet de bords est d’affecter la valeur nulle, $y(n) = 0$, pour $n \in E_{bord}$. Cette solution implique une perte de débit utile pour la transmission. Dans le cas où E'_{bord} n’est pas l’ensemble vide, des échantillons d’information sont perdus car $\{x(n)\}_{n \in E'_{bord}}$ ne sont pas transmis. Nous proposons une alternative pour résoudre le problème des effets de bords qui consiste en la définition d’un PCC modulo.

3.5.2 Les PCC modulo

3.5.2.1 Définition

Etant donné $PCC_f \in \Theta(N)$ et un entier M , nous définissons le PCC modulo dérivé de PCC_f sur l'intervalle $I_M = [0 : M - 1]$ par les fonctions $F'_M(n)$ (3.55) et $f'_M(n)$ (3.56).

$$F'_M(n) = \underline{F(n)}_M \quad (3.55)$$

$$f'_M(n) = n - F'_M(n) \quad (3.56)$$

La sortie $y(n)$ du PCC modulo s'obtient alors en fonction de l'entrée $x(n)$ du PCC modulo par la relation (3.57).

$$\forall n \in I_M, \quad y(n) = x(n - f'_M(n)) \quad (3.57)$$

Si nous supposons que la longueur M du bloc à traiter est multiple de la période N du PCC, i.e $M = mN$, il est facile de vérifier à partir de l'expression (3.7) que F' a l'expression (3.58) en fonction des grandeurs $(\overline{F}, \underline{F})$ du PCC initial.

$$F'_M(n) = N(\overline{n}^N + \overline{F}(\underline{n}_N)_m) + \underline{F}(\underline{n}_N) \quad (3.58)$$

Nous allons voir à présent que le PCC modulo ainsi défini permet de supprimer totalement les effets de bords dans le cas d'un traitement bloc où la taille des blocs est multiple de la période du PCC.

3.5.2.2 Condition d'inversibilité

Nous considérons $PCC_f \in \Theta(N)$ ainsi qu'un intervalle $I_M = [0 : M - 1]$ où $M = mN$. Si $PCC_f \in \widetilde{\Theta}(N)$ alors la fonction F'_M est bijective de I_M dans I_M . La preuve de cette proposition figure dans l'annexe C.12.

Ce résultat est très important puisqu'il signifie que s'il l'on dispose d'un PCC inversible, on sait que le PCC modulo associé sur n'importe quel intervalle $I_M = [0 : M - 1]$ où $M = mN$ est bijectif.

D'autre part, nous savons que si un PCC est bloc alors sa fonction F est donnée par l'expression (3.23). On déduit alors en utilisant la relation (3.58) que pour un PCC bloc, nous avons $F'_M = F$. Dans le cas d'un PCC convolutionnel, les relations (3.24) et (3.58) nous

permettent d'écrire l'expression (3.59) de F'_M .

$$F'_M(n) = N(\overline{n^N} + \overline{F(\underline{n}_N)_m}) + \underline{n}_N \quad (3.59)$$

Mais nous avons vu que tout PCC_f de $\tilde{\Theta}(N)$ se décompose en la cascade $PCC_f = PCC_{f_b} \bullet PCC_{f_c}$ avec $(PCC_{f_b}, PCC_{f_c}) \in \tilde{B}(N) \times \tilde{C}(N)$. Les fonctions f_b et f_c sont données par les relations (3.26) et (3.25). Ainsi, dans le cas d'un traitement sur un bloc $I_M = [0 : M - 1]$ où $M = mN$, seule la composante convolutionnelle du PCC est affectée par la définition du PCC modulo, la composante bloc restant inchangée. De plus, nous avons les deux résultats suivants pour la caractérisation de E_{bord} (3.60) et E'_{bord} (3.61).

$$E_{bord} = \{n \in I_M / (\overline{n^N} + \overline{F(\underline{n}_N)}) \notin [0 : m - 1]\} \quad (3.60)$$

$$E'_{bord} = \{F'_M(n) / n \in E_{bord}\} \quad (3.61)$$

Nous avons ainsi, d'après (3.61), $F'_M(E_{bord}) = E'_{bord}$. Le PCC modulo permet ainsi par une opération bijective d'affecter aux valeurs de $y(n)$, pour $n \in E_{bord}$, les échantillons de $x(p)$, pour $p \in E'_{bord}$.

Nous illustrons ces résultats en utilisant de nouveau le PCC linéaire utilisé au cours de ce chapitre défini par une fonction PCC $f(n) = -k\underline{n}_N$. Nous choisissons une période $N = 5$ et un facteur $k = 3$ qui nous assure l'inversibilité du PCC. Nous désirons travailler sur un intervalle fini $I_{30} = [0 : 29]$. Afin d'éviter les effets de bords, nous utilisons le PCC modulo dont la fonction F'_{30} vaut (3.62) en utilisant la relation (3.58) et où la fonction f' vaut donc (3.63).

$$F'_{30}(n) = 5(\overline{n^5} + \overline{4\underline{n}_5}_6) + \underline{4n}_5 \quad (3.62)$$

$$f'_{30}(n) = n - 5(\overline{n^5} + \overline{4\underline{n}_5}_6) - \underline{4n}_5 \quad (3.63)$$

Dans cet exemple, nous trouvons les ensembles (3.64) et (3.65) pour E_{bord} et E'_{bord} .

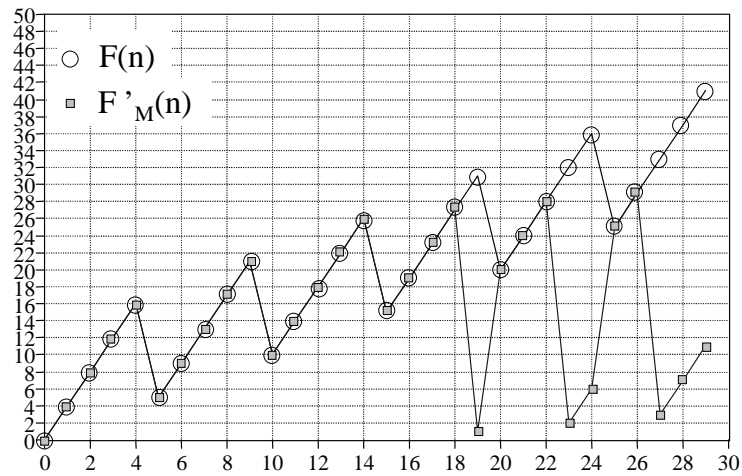
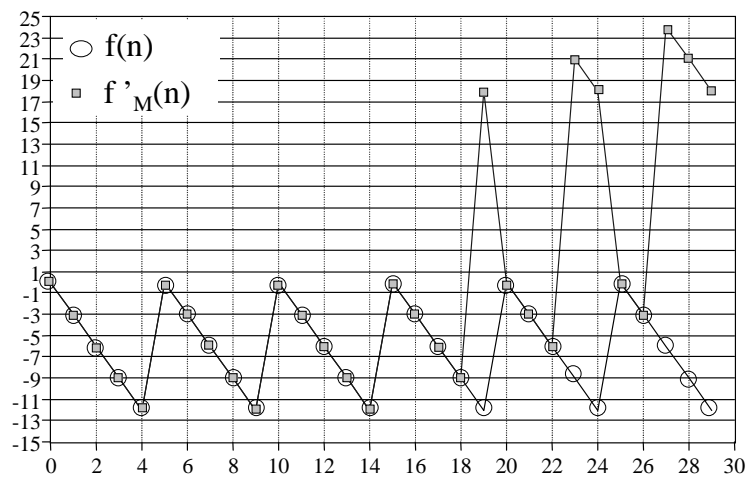
$$E_{bord} = \{19, 23, 24, 27, 28, 29\} \quad (3.64)$$

$$E'_{bord} = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\} \quad (3.65)$$

Nous vérifions alors bien (3.66) que nous avons $F'_M(E_{bord}) = E'_{bord}$.

$$F'_M(E_{bord}) = \{1, 2, 6, 3, 7, 11\} \quad (3.66)$$

Les figures 3.14 et 3.15 représentent respectivement les couples de fonctions (F, F'_M) et (f, f'_M) pour le cas du PCC linéaire $f(n) = -k\underline{n}_N$ avec $(k, N) = (3, 5)$ et le PCC modulo dérivé pour un traitement bloc sur un intervalle $I_{30} = [0 : 29]$.

Représentation des fonctions F et F'_M pour le PCC linéaireReprésentation des fonctions f et f'_M pour le PCC linéaire

3.6 Conclusion

Les changements d'horloge ont été introduits et étudiés par [8] sous forme analogique. Mais le comportement de ces transformations est assez mal connu lorsque l'on s'intéresse à leur forme numérique. Ce chapitre a donc consisté en un essai d'étude des PCC numériques. Une première propriété remarquable est alors qu'il s'avère que l'ensemble des PCC numériques est équivalent

à l'ensemble des entrelaceurs périodiques. D'autre part, nous avons montré que l'ensemble des PCC constituait un sous ensemble des filtres LPTV ce qui fait hériter à l'ensemble des PCC numériques de l'ensemble des propriétés et résultats associés aux filtres LPTV que nous avons présentés dans les deux premiers chapitres. Nous avons ensuite étudié l'inversibilité des PCC et avons pu montrer que l'inversibilité d'un PCC ne dépendait que de la fonction \underline{F} associée. Ce résultat important nous a permis de proposer une méthode générale pour construire un PCC numérique inversible et de discuter l'inversibilité d'une famille de PCC que nous avons introduits : les PCC linéaires. Nous reviendrons sur cette famille de PCC dans le système d'accès multiple proposé dans le cinquième chapitre.

Nous avons ensuite proposé une étude de la loi de cascade qui constitue une loi interne sur l'ensemble des PCC. Il s'avère alors que l'ensemble des PCC inversibles, complètement caractérisés par la condition sur \underline{F} , muni de la loi interne a une nature de groupe. De plus, nous avons introduit et caractérisé deux sous ensembles de PCC que sont les PCC convolutionnels et les PCC blocs inversibles. Il est alors possible de montrer que ces deux sous ensembles munis de la loi interne constituent deux sous groupes de l'ensemble des PCC inversibles.

Ensuite, des considérations de décomposition de PCC ont été abordées. Dans un premier temps, nous avons montré que tout PCC de période N se décomposait en la cascade d'un PCC convolutionnel et d'un PCC bloc de même période N . Ce résultat indique d'une part que les deux groupes des PCC blocs et convolutionnels engendrent l'ensemble des PCC inversibles et d'autre part que l'inversibilité d'un PCC est équivalente à l'inversibilité de sa composante bloc dans cette décomposition puisque sa composante convolutionnelle est toujours inversible. Dans un second temps, nous avons cherché à caractériser la faisabilité de la décomposition d'un PCC N périodique en la cascade de deux PCC de périodes plus petites et premières entre elles. Une condition nécessaire et suffisante pour cette décomposition a été trouvée à l'aide d'une étude fréquentielle du problème s'appuyant sur les filtres modulateurs associés à un PCC. Grâce à l'équivalence entre PCC numériques et entrelaceurs périodiques, nous avons ainsi pu décomposer l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes lorsque Q est premier avec P . Nous reviendrons sur l'intérêt pratique de cette décomposition dans le cinquième chapitre. Enfin, le cas de l'utilisation d'un PCC dans le cas d'un traitement bloc a été abordé. Un PCC modulo a été proposé pour pallier les effets de bords introduits par la contrainte d'un traitement sur un intervalle fini.

Pour clore ce chapitre, il est nécessaire de revenir sur l'équivalence introduite entre l'ensemble des PCC numériques et des entrelaceurs périodiques. Tout d'abord, cette équivalence a

pour conséquence que certains résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux. C'est le cas de la décomposition de tout PCC en la cascade d'un PCC convolutionnel et d'un PCC bloc puisque nos recherches bibliographiques nous ont indiqué qu'un résultat similaire de décomposition a été démontré pour les entrelaceurs par [34]. Mais cette équivalence a aussi pour conséquence de nous fournir une approche originale des entrelaceurs périodiques comme des filtres LPTV. En particulier, la formulation fréquentielle de l'effet d'un entrelaceur est nouvelle et offre une nouvelle voie d'étude des entrelaceurs qui n'ont été étudiés que par une approche temporelle. Dans ce chapitre, nous avons ainsi pu caractériser l'entrelaceur lignes/colonnes par ses filtres modulateurs dans le premier paragraphe et nous avons aussi décomposé l'entrelaceur lignes/colonnes grâce à l'étude fréquentielle sur les PCC. Mais cette approche fréquentielle des entrelaceurs sera utile aussi dans le dernier chapitre où nous proposons un système d'accès multiple par étalement.

Chapitre 4

Filtres LPTV et communications numériques

4.1 Introduction

Ce quatrième chapitre ouvre le volet des applications des filtres LPTV en communications numériques. Celles-ci sont nombreuses et se distinguent selon qu'elles utilisent explicitement ou implicitement l'outil LPTV. Les applications implicites couvrent un très large éventail de domaines si nous considérons la riche famille de transformations qu'englobe la nature LPTV. Nous avons, par exemple, eu l'occasion de voir dans les chapitres précédents que tout entrelacement temporel était déclinable sous la vision LPTV. Il en est de même, encore, pour les applications liées au traitement multicausal du fait de la nature LPTV des opérations de décimation et d'interpolation. Nous choisissons, dans le cadre bibliographique de ce travail, de ne pas développer ces utilisations implicites de filtres LPTV et de focaliser notre attention sur les utilisations explicites de ces filtres. Ce choix étant fait, nous proposons de présenter ces applications selon que l'utilisation du filtre LPTV relève d'une approche fréquentielle, temporelle ou bien duale. Dans chacune de ces trois parties, nous rappelons brièvement les applications existantes recensées pour ensuite proposer notre contribution personnelle dans la catégorie associée.

Ainsi, la première partie est consacrée aux applications des filtres LPTV associées à une approche fréquentielle. Après avoir introduit la représentation bifréquentielle d'un filtre LPTV, nous présentons brièvement comment celle-ci permet d'expliquer l'utilisation de filtres LPTV pour le scrambling fréquentiel ([36], [13]) et comme outil d'étalement spectral quand le filtre est

appliqué à un signal suréchantillonné. Cette capacité d'étalement spectral en fait ainsi une solution potentielle pour réaliser un système d'accès multiple par étalement ([7], [45]) comme nous le verrons dans le dernier chapitre. Notre première contribution dans ce paragraphe fréquentiel est de proposer un système d'étalement sur une large bande tout en excluant une sous bande à la position adaptable. Ce système, en cours de brevet CNES, permet de se prémunir d'interférences volontaires (brouillage à bande étroite) ou involontaires (présence d'autres signaux dans le plan de fréquences de la bande d'étalement). Nous étudions aussi le comportement vis à vis d'un canal additif à bruit blanc gaussien (canal AWGN) des deux familles de filtres LPTV inversibles que nous avons caractérisées dans le second chapitre pour réaliser de l'étalement spectral.

La seconde partie de ce chapitre s'intéresse aux applications des filtres LPTV relevant d'une approche temporelle. Il est un résultat connu [46] que le filtrage d'un signal stationnaire par un filtre LPTV résulte en un signal cyclostationnaire. Cette propriété est exploitée pour l'estimation de canal ([39], [40], [41], [43]) à partir de la connaissance de la réponse impulsionnelle du filtre LPTV. Notre contribution personnelle consiste à proposer deux méthodes de réduction de PAPR (Peak to Average Power Ratio) par utilisation des filtres LPTV-LL dans le cas d'un système OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex). La première méthode suggère d'utiliser une famille de filtres LPTV-LL, et de sélectionner à chaque symbole le filtre donnant le plus faible PAPR. Les résultats sont comparés à une méthode récente similaire qui utilise une famille d'entrelaceurs aléatoires [51] et à la technique de Selective Mapping (**SM**), ([56], [57]), en terme de réduction PAPR, mais aussi en terme de TEB sur un canal sélectif en fréquence avec bruit additif blanc gaussien. La seconde méthode consiste à insérer un filtre LPTV-LL et un fenêtrage déterministe avant la mise en forme OFDM. La technique de fenêtrage [52] a été proposée récemment comme moyen de diminuer le PAPR, mais au prix d'une dégradation des performances en TEB. L'insertion d'un filtre LPTV-LL conduit aux mêmes performances en terme de réduction de PAPR tout en conduisant à des performances en TEB différentes pour un canal AWGN. Enfin, nous proposons une nouvelle formulation LPTV des techniques utilisées traditionnellement dans la réduction de PAPR.

La troisième et dernière partie est, quant à elle, consacrée à l'utilisation des filtres LPTV relevant d'une approche duale, temporelle et fréquentielle à la fois. Cette partie sera abordée très brièvement car nous ne proposons aucune contribution liée à cette approche temps/fréquence.

4.2 Filtres LPTV et propriétés spectrales

Dans cette partie, nous discutons la représentation bifréquentielle associée à un filtre LPTV déduite de l'expression entrée/sortie (1.35). À la lumière de celle-ci, nous expliquons comment les filtres LPTV peuvent être utilisés pour réaliser du scrambling fréquentiel ([36], [13]) et de l'étalement ([7], [45]). Nous expliquons ensuite brièvement le principe du système que nous avons développé permettant un étalement spectral sauf dans une sous bande particulière. Nous proposons, dans un second temps, d'utiliser les filtres inversibles LPTV convolutionnels et LPTV-LL définis au second chapitre pour réaliser un système d'étalement. Le comportement de ces deux familles est alors caractérisé par les performances en TEB lorsque le signal traverse un canal AWGN avant d'être récupéré par le filtrage LPTV inverse.

4.2.1 Présentation des applications recensées

4.2.1.1 Représentation bifréquentielle d'un filtre LPTV

La représentation bifréquentielle d'un filtre LPTV N périodique s'obtient à partir de la relation fréquentielle (1.36) entrée/sortie présentée dans le chapitre 1.

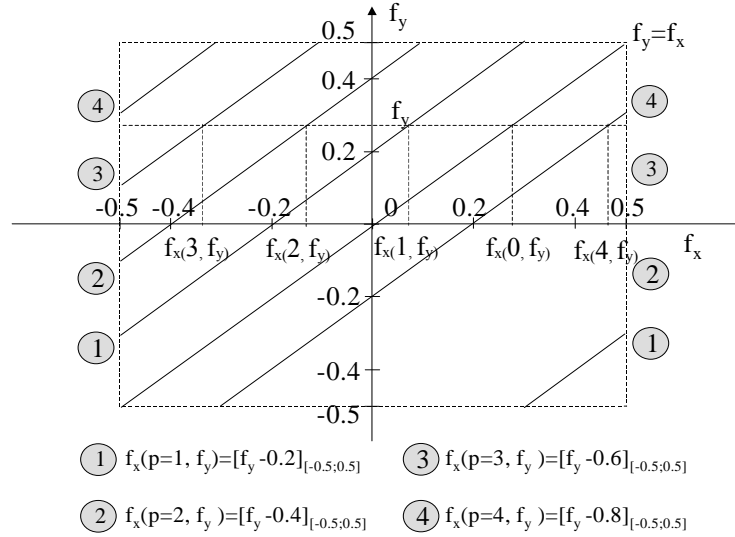
En posant alors $f_x(p, f_y) = f_y - pf_0$ où $f_0 = \frac{1}{N}$, nous obtenons le système suivant (4.1) de N équations linéaires. Ces équations lient les fréquences normalisées d'entrée et de sortie en se réduisant à l'intervalle $[-0.5; 0.5]$. La notation $[x]_{[-0.5; 0.5]}$ signifie que l'on ramène la valeur réelle x dans l'intervalle $[-0.5; 0.5]$ par une translation entière.

$$\forall p \in [0 : N - 1], \quad f_x(p, f_y) = [f_y - pf_0]_{[-0.5; 0.5]} \quad (4.1)$$

Cet ensemble de N équations définit $2N - 1$ droites affines dans le plan des fréquences normalisées comme l'illustre la figure 4.1 dans le cas particulier où $N = 5$. En utilisant ces équations linéaires, la relation fréquentielle (1.36) se réécrit (4.2).

$$Y(f_y) = \sum_{p=0}^{N-1} T_p(f_x(p, f_y)) X(f_x(p, f_y)) \quad (4.2)$$

Pour une valeur donnée de f_y , il existe N valeurs distinctes $V_{f_y} = \{f_x(0, f_y), \dots, f_x(N - 1, f_y)\}$ de f_x associées par le système des N équations (4.1) comme le montre la figure 4.1. Ainsi, la relation (4.2) signifie que $Y(f_y)$ est obtenu par la somme des $X(f)$ pour $f \in V_{f_y}$ pondérés par les valeurs des filtres modulateurs $T_p(f)$ pour $f \in V_{f_y}$. Dans la représentation graphique

FIG. 4.1 – Illustration des équations linéaires fréquentielles pour $N = 5$

de la figure 4.1, il est possible alors d'associer un filtre modulateur à chaque droite affine. Nous obtenons ainsi pour n'importe quel filtre LPTV une représentation bifréquentielle à 3 dimensions illustrée par la figure 4.2 dans le cas particulier $N = 5$. Par souci de lisibilité, nous avons fait apparaître seulement le filtre modulateur $T_3(f)$. Remarquons que dans le cas d'un filtre LIT, seul le filtre modulateur $T_0(f)$ associé à la diagonale principale est non nul. La nature variant dans le temps d'un filtre LPTV se traduit par des filtres modulateurs $T_p(f)$ non nuls pour $p \neq 0$. Cette nature variant dans le temps est d'autant plus forte que les filtres modulateurs pour $p \neq 0$ sont importants par rapport au filtre modulateurs $T_0(f)$.

4.2.1.2 Scrambling fréquentiel

La représentation fréquentielle que nous venons de présenter permet d'expliquer une technique de scrambling fréquentiel proposée par [36] et [13]. Cette application consiste à découper en N sous bandes uniformes le spectre du signal initial. Ensuite, les sous bandes fréquentielles sont permutées grâce à l'utilisation d'un filtre LPTV dont les filtres modulateurs sont des filtres passe bande déterminés en fonction de la permutation fréquentielle souhaitée. Nous illustrons ici brièvement ce principe dans le cas d'un filtre périodique de période 4.

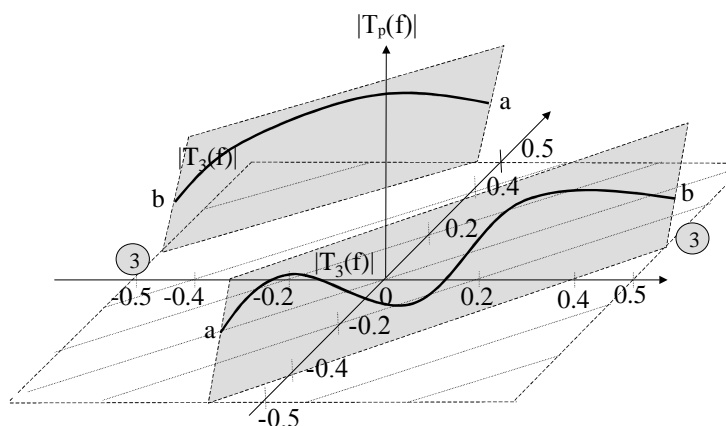


FIG. 4.2 – Représentation bifréquentielle en 3 dimensions d'un filtre LPTV ($N = 5$)

4.2.1.2-a Découpage du signal en sous bandes

Nous supposons que le signal initial $x(n)$ est réel. Le spectre de ce signal, symétrique, est illustré par la figure 4.3. Nous découpons ce spectre en 4 sous bandes B_0, B_1, B_2 et B_3 .

4.2.1.2-b Choix d'une permutation

Nous supposons que la permutation p sur $[0 : 3]$ désirée est la suivante (4.3).

$$p(0) = 2 \quad p(1) = 0 \quad p(2) = 3 \quad p(3) = 1 \quad (4.3)$$

Ce choix de permutation implique pour le spectre de sortie désiré, $S_y(f)$, la forme théorique illustrée par la figure 4.4.

4.2.1.2-c Détermination du filtre LPTV adéquat

Nous supposons que nous disposons de filtres idéaux passe bande pour les filtres modulateurs ce qui nous protège du phénomène de repliement sur le spectre final. Nous utilisons la représentation bifréquentielle de la figure 4.2 précédente. Par souci de lisibilité, nous ramenons cette représentation à deux dimensions en ajoutant en trait plein le support sur chaque droite affine correspondant à la bande passante du filtre modulateur associé. Il est alors facile de vérifier que la représentation bifréquentielle du filtre LPTV de période 4 qui réalise le scrambling fréquentiel précédent a la forme illustrée par la figure 4.5.

Cette représentation bifréquentielle nous permet d'en déduire la forme des réponses fréquentielles des filtres modulateurs illustrée par la figure 4.6. Ces filtres sont des filtres complexes et la

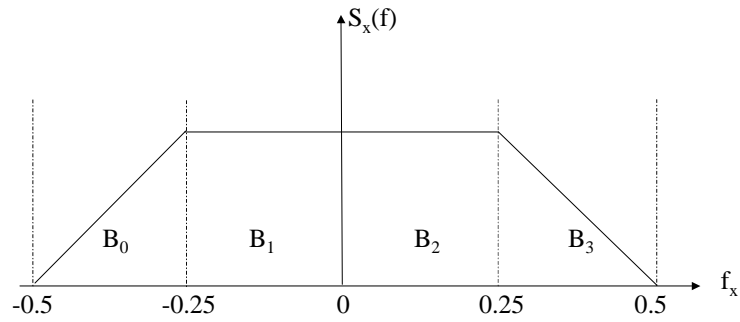
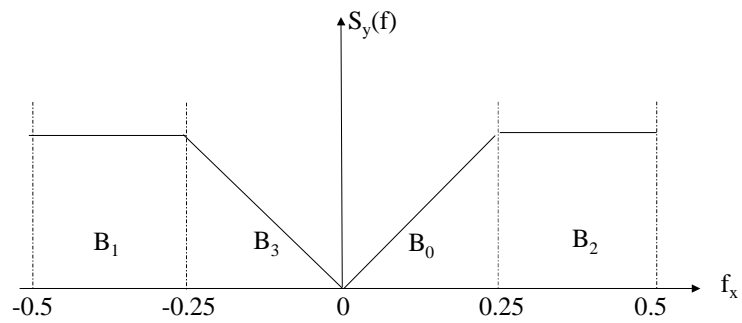
FIG. 4.3 – Découpage du spectre initial en $N = 4$ sous-bandes uniformes

FIG. 4.4 – Spectre théorique souhaité en sortie du filtre LPTV

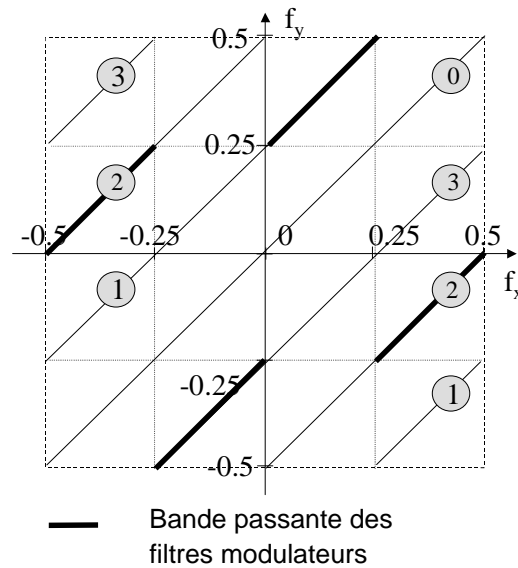


FIG. 4.5 – Représentation bifréquentielle du filtre LPTV utilisé

sortie est, dans ce cas, un signal complexe. Il est aussi possible de conserver la nature réelle du signal en sortie en prenant soin, dans le mélange du spectre, de conserver la symétrie hermitienne.

4.2.1.3 Étalement de spectre

Une propriété intéressante des filtres LPTV est leur capacité à étaler un signal lorsque celui-ci est suréchantillonné à une fréquence d'échantillonnage bien plus grande que la fréquence de Shannon. La représentation bifréquentielle de la figure 4.7 illustre cette propriété dans le cas simple d'un filtre LPTV de période $N = 5$ et un signal initial de support spectral $\mathbf{B} = [-0.1; 0.1]$. Les filtres modulateurs sont supposés être passe bas de bande passante \mathbf{B} . La réponse fréquentielle de ces filtres à l'extérieur de \mathbf{B} n'intervient pas dans le filtrage dans l'hypothèse où le signal d'entrée x est à support spectral \mathbf{B} . Il est alors facile de vérifier que dans ce cas, quelque soit la valeur de $f_y \in [-0.5; 0.5]$, $Y(f_y)$ est non nul puisque toute droite horizontale coupe en au moins un point une droite affine sur le support \mathbf{B} de $S_x(f)$.

Cette propriété d'étalement des filtres LPTV fait de ces derniers un outil potentiel pour de l'accès multiple par spectre étalé. Ainsi, [7] et [45] proposent respectivement de réaliser un tel

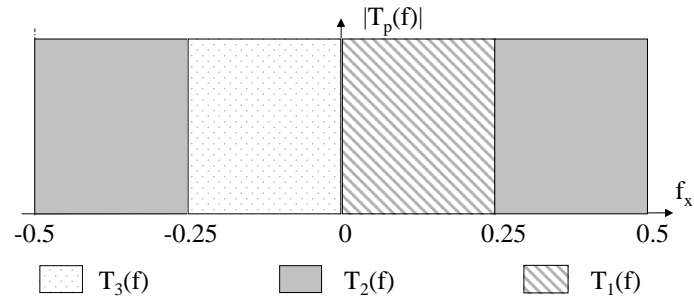
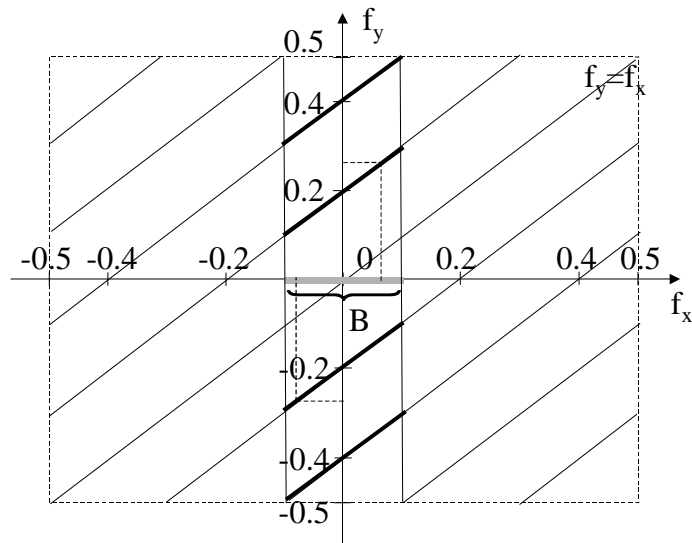


FIG. 4.6 – Formes des filtres modulateurs

FIG. 4.7 – Représentation bifréquente d'un filtre LPTV appliqué à un signal suréchantillonné ($N = 5$, bande spectrale= $[-0.1; 0.1]$)

système à base de PCC et de permutations aléatoires qui sont des cas particuliers simples de filtres LPTV.

4.2.2 Contributions personnelles

En rapport avec l'approche fréquentielle d'un filtre LPTV, notre contribution personnelle est double. La première a consisté en la construction d'un système d'étalement à base de filtres LPTV permettant un étalement sur une bande large à l'exception d'une sous bande aux caractéristiques à définir.

La seconde est de proposer la réalisation d'un étalement à partir des deux familles de filtres LPTV inversibles que nous avons caractérisées dans le second chapitre, à savoir les filtres LPTV convolutionnels et les filtres LPTV-LL. La propriété d'inversibilité est naturellement indispensable pour la récupération du signal en réception. Utiliser des filtres LPTV pour réaliser de l'étalement a déjà été proposé dans [7] et [45], mais les filtres LPTV utilisés sont des cas particuliers simples de filtres LPTV (PCC et entrelaceurs). Nous désirons proposer ici un système d'étalement à base de filtres LPTV plus complexes, mettant en jeu une véritable opération de filtrage.

4.2.2.1 Système d'étalement avec effacement de bande

Nous décrivons brièvement ce système qui fait l'objet d'un dépôt de brevet CNES. Le but initial était d'exploiter les propriétés d'étalement d'un filtre LPTV pour réaliser un étalement régulier dans une bande continue à l'exception d'une sous bande à définir. L'intérêt d'un tel système est de se prémunir totalement d'un brouillage en bande étroite. Ces brouillages peuvent être de nature volontaire ou bien involontaire lorsque la sous bande a été offerte à un autre usage dans le plan de fréquences.

4.2.2.2 Réalisation d'un accès par étalement à partir des filtres convolutionnels

4.2.2.2-a Filtrage inverse et décision hard

Nous proposons de réaliser un accès par étalement grâce à un filtre LPTV convolutionnel de l'ensemble Δ_0 défini dans le second chapitre. Le système réalisé est celui de la figure 4.8. Notons que le problème de la mise en forme spectrale du signal étalé n'est pas abordé ici. Notre but est seulement d'étudier la résistance de notre système d'étalement face au bruit. Remarquons que le

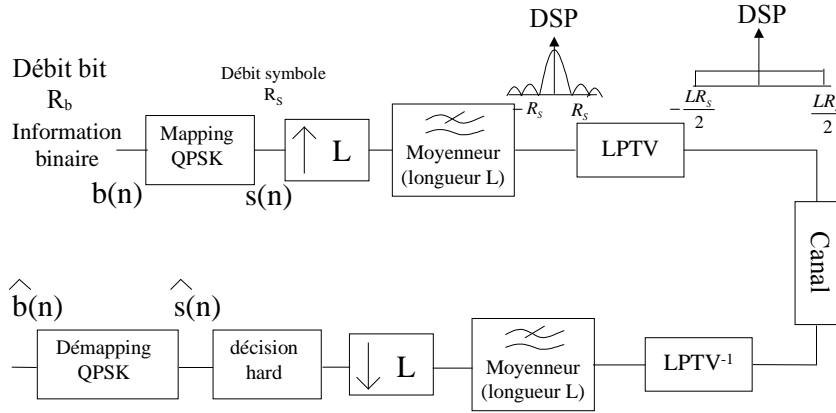


FIG. 4.8 – Structure du système d'étalement à base de filtres LPTV

filtre moyenneur est utilisé pour obtenir un suréchantillonnage par répétition de L fois la valeur d'un symbole QPSK.

Le filtre LPTV réalisé est un filtre de Δ_0 comme indiqué par la figure 2.1. Nous choisissons les transformées en z , $A_i(z)$, sous une forme RIF d'ordre p . Cette forme est alors donnée par la relation (4.4). Le facteur K_i est un facteur de normalisation choisi pour que le gain du filtre soit égal à 1.

$$A_i(z) = K_i \prod_{j=1}^p (1 - z^{-1}z_{i,j}) \quad (4.4)$$

En réception, le filtrage inverse est réalisé. Celui ci est suivi d'une décision hard après moyennage (filtrage passe bas) sur L échantillons appartenant au même symbole QPSK (Figure 4.8). Le filtre LPTV inverse appartient aussi à Δ_0 et admet donc une structure semblable avec des transformées en z inverse $B_i(z)$ RII données par la relation (4.5).

$$B_i(z) = A_i^{-1}(z) = \frac{1}{K_i \prod_{j=1}^p (1 - z^{-1}z_{i,j})} \quad (4.5)$$

Le canal est modélisé par un bruit additif blanc gaussien complexe de puissance $2\sigma^2$ (les parties réelles et imaginaires, indépendantes, suivent chacune une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2). σ^2 est obtenu grâce à la relation (4.6) où P_S , R_b et R_S désignent

respectivement la puissance du signal, le débit bit et le débit symbole.

$$\sigma^2 = \frac{P_S}{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{R_S}} \quad (4.6)$$

Dans le cas d'une modulation QPSK et d'un suréchantillonnage par un facteur L , la puissance du bruit sur la voie réelle et la voie imaginaire vaut donc (4.7).

$$\sigma^2 = \frac{L P_S}{4 \frac{E_b}{N_0}} \quad (4.7)$$

Il est évident que le comportement des filtres LPTV en réception est lié à la position des racines de $A_i(z)$ à l'intérieur du cercle unité. En effet, un zéro $z_{i,j} = \rho_{i,j} \exp(2i\pi\theta_{i,j})$ proche du cercle unité (i.e $\rho_{i,j} \simeq 1$) implique un trou dans la réponse fréquentielle $A_i(f)$ pour une fréquence normalisée $f = \theta_{i,j}$. Le filtre inverse $B_i(z)$, à même fréquence, aura alors une réponse fréquentielle $B_i(f = \theta_{i,j})$ très forte en module. L'effet d'une telle propriété est alors d'amplifier le bruit autour de $\theta_{i,j}$ lors du filtrage inverse en réception. On retrouve un comportement similaire à celui des égaliseurs ZFE qui amplifient le bruit autour des fréquences où le gain du canal est faible.

Si nous inversons les filtres d'émission et de réception, le problème est symétrique. En effet, l'existence d'un pôle $z_{i,j} = \rho_{i,j} \exp(2i\pi\theta_{i,j})$ du filtre d'émission $B_i(z)$ proche du cercle unité (i.e $\rho_{i,j} \simeq 1$) implique que la réponse fréquentielle associée $B_i(f = \theta_{i,j})$ est très forte en module. La conséquence est alors que le coefficient de normalisation associé K_i est petit devant 1. En réception, le filtre inverse associé $A_i(z)$ a alors un coefficient K_i^{-1} très fort, ce qui a pour effet d'amplifier le bruit par filtrage par $A_i(z)$.

Nous allons ainsi quantifier l'influence de la position des racines de $A_i(z)$ (i.e des pôles de $B_i(z)$) sur les performances du système en terme de TEB dans le cas où les filtres LPTV caractérisés par $A_i(z)$ sont utilisés en émission. Dans le cas inverse où les filtres $B_i(z)$ sont utilisés en émission, nous avons vérifié par simulation que les performances étaient identiques.

Pour cela, nous proposons de générer trois filtres LPTV de Δ_0 de période $N = 8$ et de degré $p = 2$. Le facteur de suréchantillonnage est choisi égal à $L = 4$. Nous choisissons une valeur faible de N dans un souci de lisibilité des localisations des racines du filtre LPTV. Ces trois filtres LPTV de Δ_0 notés $LPTV^{0.2}$, $LPTV^{0.6}$ et $LPTV^1$ sont caractérisés par une génération aléatoire de racines pour les $A_i(z)$ à l'intérieur des cercles de rayons respectifs 0.2, 0.6 et 1. Les figures 4.9, 4.10 et 4.11 présentent la localisation des racines des $A_i(z)$ pour ces trois filtres. Les figures 4.12, 4.13 et 4.14 représentent les modules des 3 coefficients de chacun des $A_i(z)$. On

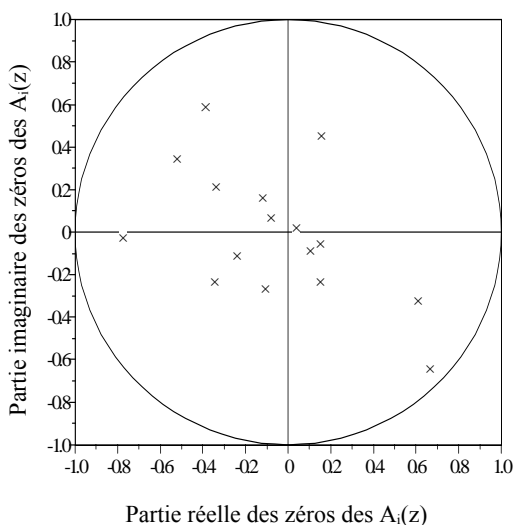


FIG. 4.9 – Localisation des racines des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^1$

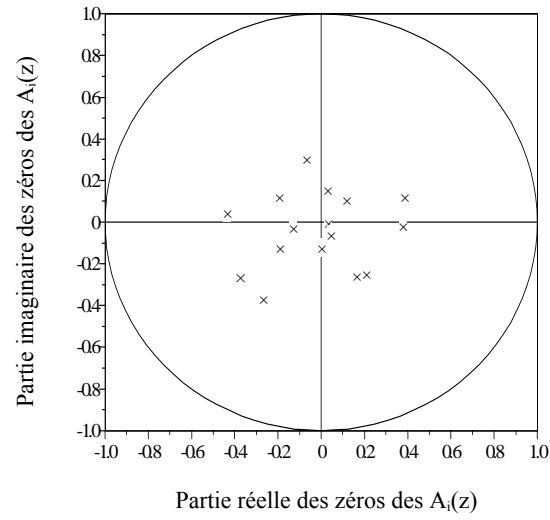
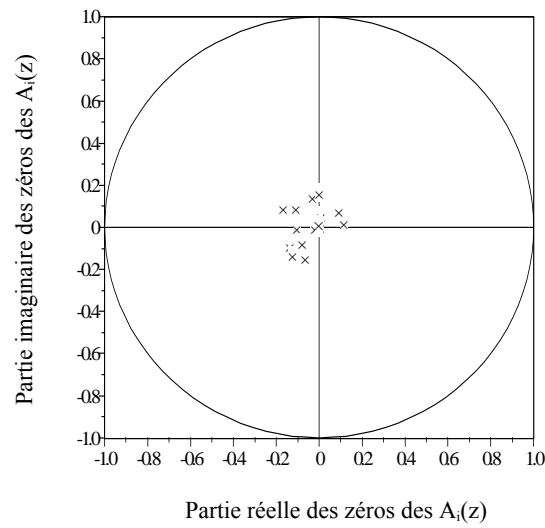
vérifie grâce à ces premières figures que le poids relatif du module des deuxièmes et troisièmes coefficients des filtres $A_i(z)$ par rapport au module du premier coefficient augmente lorsque les racines des $A_i(z)$ se rapprochent du cercle unité.

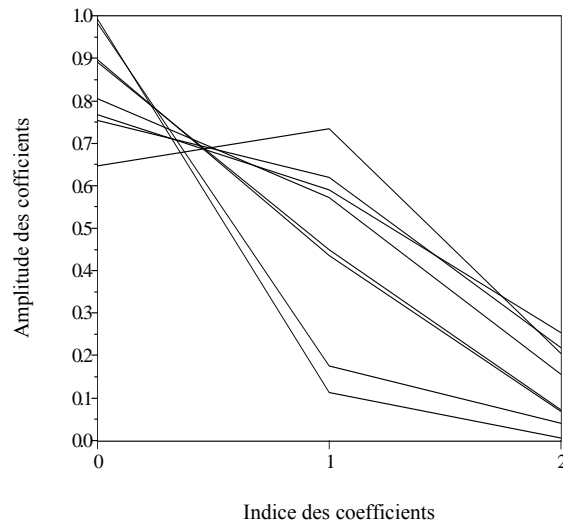
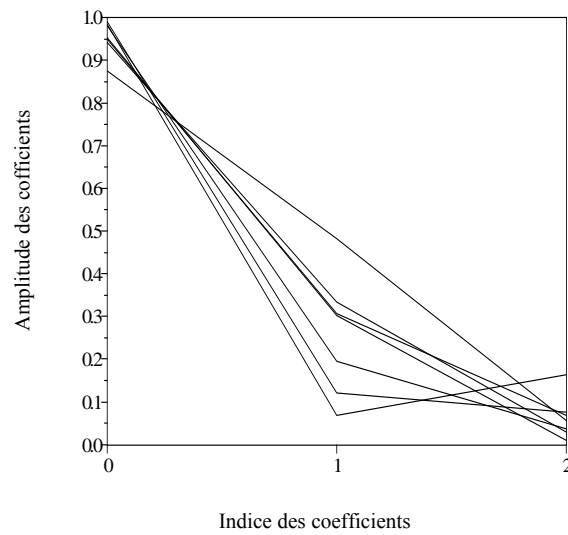
Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 représentent l'histogramme normalisé du module des échantillons d'un bruit blanc gaussien de puissance 1 filtré par les filtres LPTV inverses (4.5). La figure 4.15 représente l'histogramme de référence normalisé (loi de Rayleigh) du bruit blanc gaussien de puissance 1 avant filtrage.

Enfin, la figure 4.19 illustre les résultats en terme de TEB en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour un étalement réalisé par chacun de ces trois filtres LPTV. Nous vérifions par ces résultats que plus les racines des $A_i(z)$ se trouvent proches du cercle unité, plus les performances en TEB se trouvent dégradées ce qui est en accord avec les histogrammes précédents du bruit en sortie du filtre LPTV inverse.

4.2.2.2-b Filtrage inverse réalisé par un treillis et décision soft

Nous venons de voir que pour des racines de $A_i(z)$ proches du cercle unité, le système précédent a des performances largement dégradées en terme de TEB en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$. Ce résultat prévisible est inhérent au fait d'essayer de faire de l'accès par filtrage et récupération par filtrage inverse. La dégradation est liée à la forme des réponses fréquentielles des filtres d'émission $A_i(z)$ et est une simple conséquence du filtrage d'un bruit blanc gaussien par chacun des filtres LIT

FIG. 4.10 – Localisation des racines des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^{0.6}$ FIG. 4.11 – Localisation des racines des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^{0.2}$

FIG. 4.12 – Module des coefficients des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^1$ FIG. 4.13 – Module des coefficients des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^{0.6}$

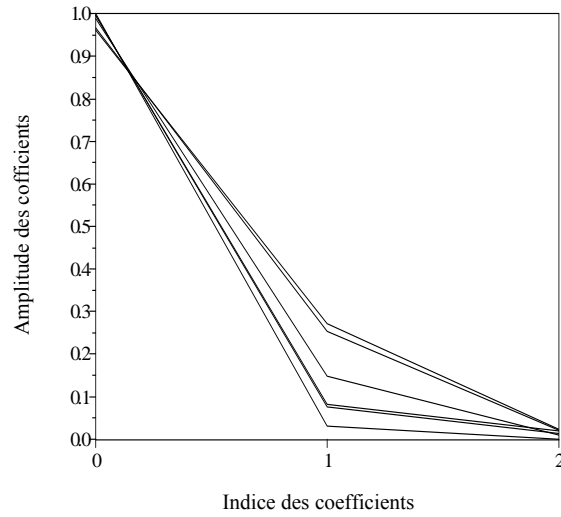
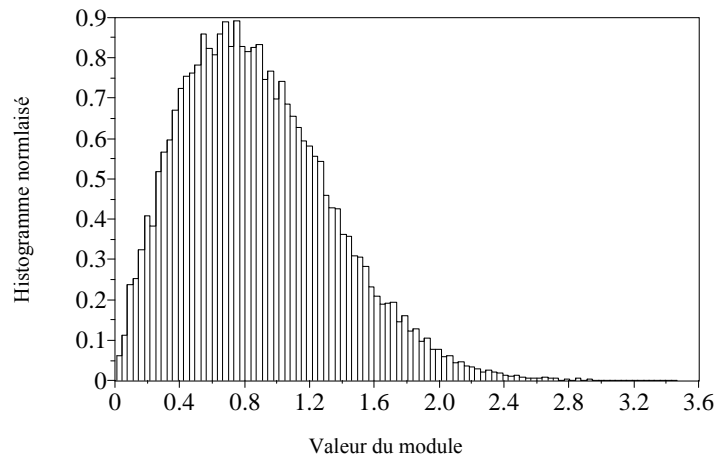
FIG. 4.14 – Module des coefficients des $A_i(z)$ pour le filtre $LPTV^{0.2}$ 

FIG. 4.15 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 (loi de Rayleigh)

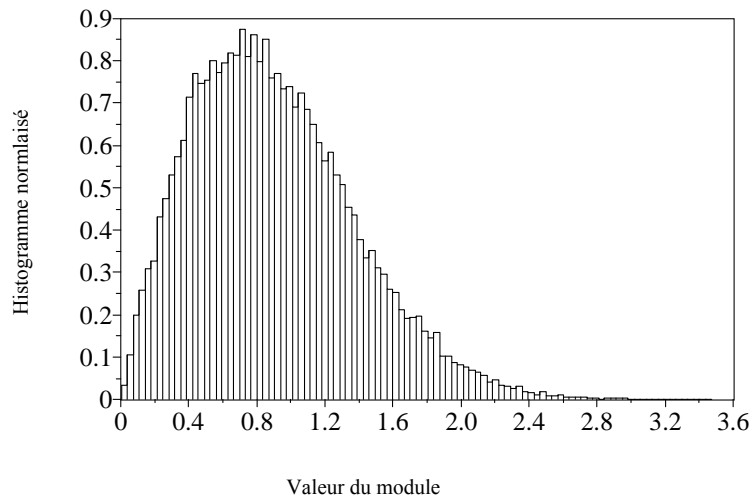


FIG. 4.16 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 après filtrage inverse pour $LPTV^{0.2}$

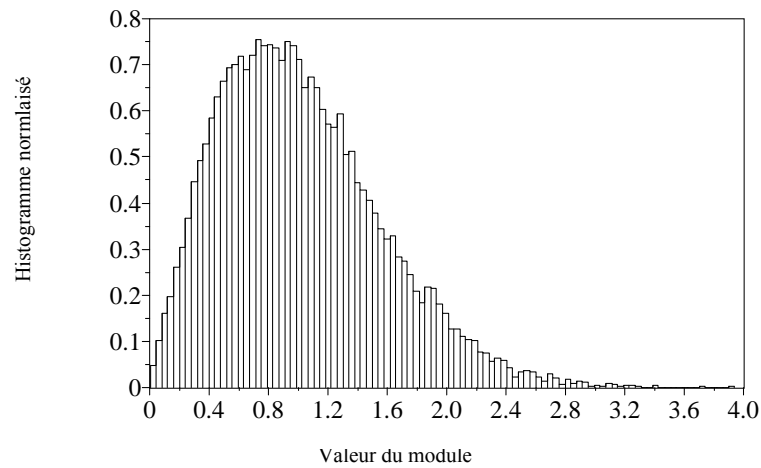


FIG. 4.17 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 après filtrage inverse pour $LPTV^{0.6}$

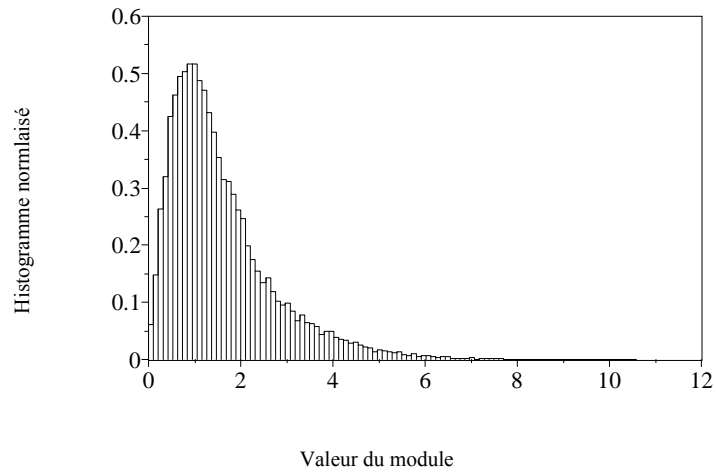


FIG. 4.18 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 après filtrage inverse pour $LPTV^1$

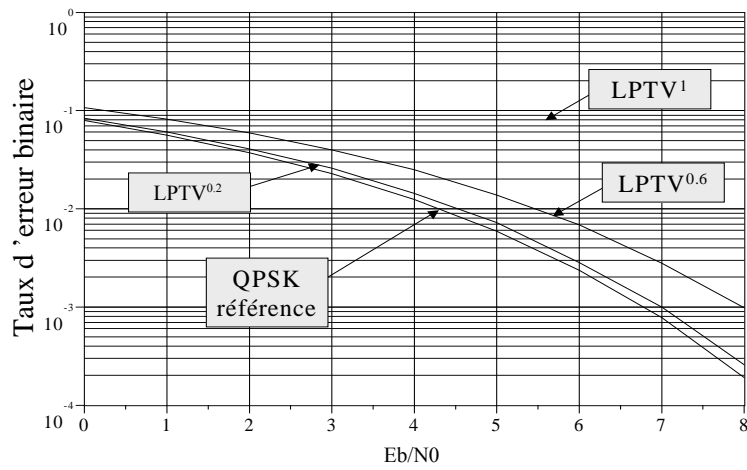


FIG. 4.19 – Performances en TEB pour le système d'étalement à base de filtres LPTV convolutionnels

$B_i(z)$ du filtre LPTV inverse. On obtient un bruit coloré de puissance d'autant plus grande que les pôles des filtres de réception sont proches du cercle unité.

Pour améliorer ces performances, nous proposons, en réception, non plus de réaliser un filtrage inverse suivi d'une décision hard sur les symboles reçus, mais de réaliser une famille de treillis à partir des filtres d'émission RIF $A_i(z)$. Un tel treillis est possible car les filtres LPTV filtrent des séquences ayant un nombre fini de valeurs possibles. Le principe de ce treillis est semblable à celui d'un décodage de Viterbi pour un codeur convolutionnel. Celui ci permet de réaliser des décisions soft sur les symboles reçus.

Cependant, pour réaliser un tel treillis, nous avons besoin de l'hypothèse que les filtres $A_i(z)$ sont identiques par groupe de L afin qu'un treillis soit affecté à tous les échantillons d'un même symbole. Le nombre de treillis réalisés est alors égal à $\frac{N}{L}$. Mais nous désirons utiliser les mêmes filtres LPTV que dans les simulations précédentes afin que la comparaison ait un sens. Nous choisissons alors un facteur de suréchantillonnage $L = 1$. Naturellement, le système ainsi obtenu ne réalise plus d'étalement, mais le but ici est de pouvoir comparer les performances en terme de TEB avec et sans treillis pour les mêmes filtres LPTV convolutionnels. Nous avons cependant pris soin de vérifier par simulation que dans les simulations précédentes sans treillis, un choix de $L = 1$ à la place de $L = 4$ n'affecte pas les performances en TEB.

Nous utilisons les mêmes filtres $LPTV^{0.2}$, $LPTV^{0.6}$ et $LPTV^1$ que dans les simulations précédentes. Des simulations de TEB sont alors réalisées en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$. Les résultats sont présentés sur les figures 4.20, 4.21 et 4.22.

L'utilisation d'un treillis et d'une décision soft sur les symboles améliore les performances en terme de TEB en fonction du rapport $\frac{E_b}{N_0}$ au prix d'une complexité accrue. Cependant, les performances sont toujours moins bonnes que dans le cas de référence d'une QPSK mise en forme par un filtre en Racine de Cosinus Surélevé (**RCS**).

Nous allons voir, à présent, que les filtres LPTV-LL présentés dans le deuxième chapitre permettent de réaliser un système d'étalement basé sur des filtres LPTV non triviaux présentant des performances identiques à celle d'une QPSK mise en forme par un filtre RCS.

4.2.2.3 Réalisation d'un accès par étalement à partir des filtres LPTV-LL

Nous réalisons un système d'étalement identique à celui de la figure 4.8. Cette fois ci, les filtres LPTV d'émission et de réception sont des filtres LPTV-LL de matrices MIMO données respectivement par les relations (2.28) et (2.29). Nous choisissons une période $N = 8$, un ordre $p = 1$

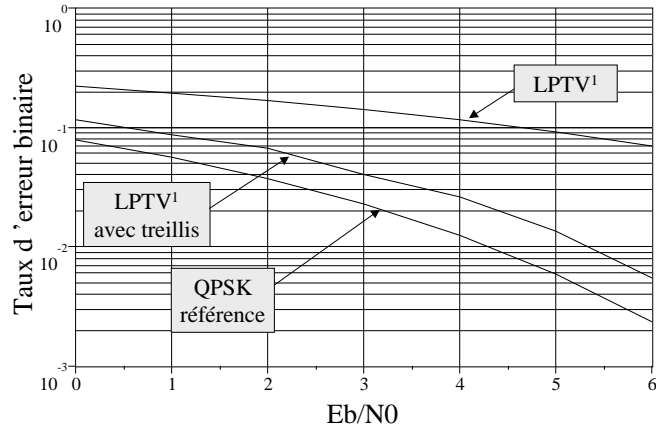


FIG. 4.20 – TEB avec et sans treillis pour $LPTV^1$

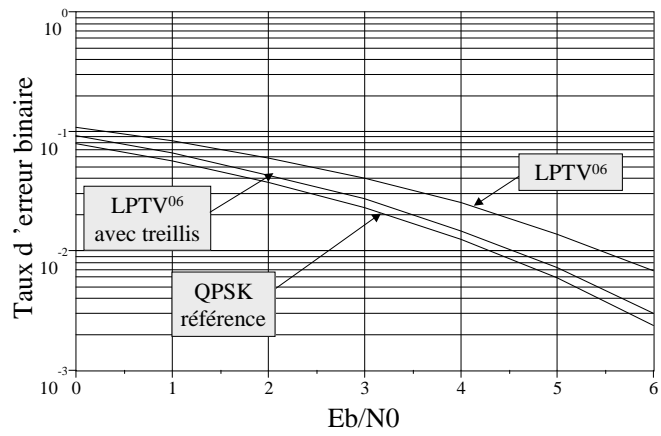
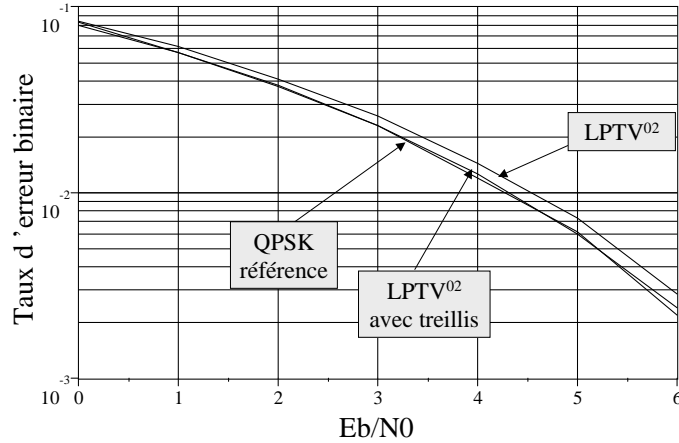


FIG. 4.21 – TEB avec et sans treillis pour $LPTV^{0.6}$

FIG. 4.22 – TEB avec et sans treillis pour $LPTV^{02}$

et un facteur de suréchantillonnage $L = 4$.

Les figures 4.23 et 4.24 illustrent l'histogramme du bruit avant et après filtrage par le filtre LPTV de réception. La propriété "sans perte" du filtre LPTV, $\mathbf{F}(e^{j\omega})\mathbf{F}_*^t(e^{j\omega}) = \mathbf{I}_N$, a pour conséquence de ne pas modifier la densité de probabilité du bruit par filtrage inverse. Cette propriété résulte en des performances (Figure 4.25) du système en terme de TEB identiques au cas de référence d'une QPSK non étalée mise en forme par un filtre RCS.

Pour conclure ce paragraphe sur des solutions pour l'étalement de spectre, rappelons que deux systèmes d'étalement basés sur des filtres LPTV ont déjà été proposés par [7] et [45]. Cependant, les filtres LPTV choisis pour ces travaux sont des filtres LPTV particuliers simples (PCC et entrelaceurs) ne faisant appel à aucun filtrage. Dans ce premier paragraphe, nous avons voulu proposer deux systèmes d'étalement basés sur des filtres LPTV plus complexes. Il apparaît que les filtres LPTV convolutionnels constituent une mauvaise solution dans le cas où les coefficients des filtres $A_i(z)$ sont non nuls (impliquant un réel filtrage) à cause de leur sensibilité au bruit. En revanche, les filtres LPTV-LL apparaissent comme une solution LPTV potentielle non triviale pour réaliser un système d'étalement par filtrage LPTV. Si nous considérons de plus les capacités d'étalement de ces filtres LPTV illustrées dans le second chapitre par les figures 2.3 et 2.7, les filtres LPTV-LL présentent le second avantage de proposer un étalement spectral plus régulier dans la bande offerte par rapport aux filtres LPTV convolutionnels. Ces conclusions font de la

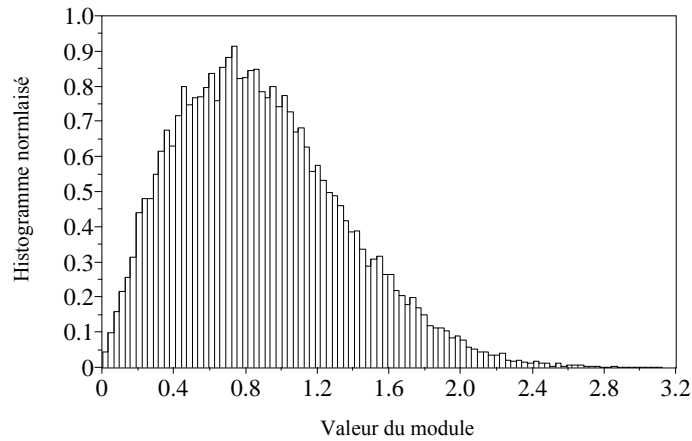


FIG. 4.23 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 (loi de Rayleigh)

famille des filtres LPTV-LL un candidat potentiel pour réaliser un système d'accès multiple par étalement de spectre par filtrage LPTV. Ce point est un point non traité dans ce travail, et reste ouvert à discussion.

4.3 Filtres LPTV et propriétés temporelles

Dans cette partie, nous développons les applications des filtres LPTV dans les communications numériques qui relèvent d'une approche temporelle. Un premier point rappelle brièvement les applications recensées des filtres LPTV qui selon nous présentent plutôt une approche temporelle. Ensuite, nous proposons notre contribution personnelle pour cette partie en nous intéressant au problème de réduction du PAPR pour des systèmes OFDM.

4.3.1 Présentation des applications recensées

Les principales applications liées à une approche temporelle des filtres LPTV que nous avons recensées sont rattachées à la propriété de cyclostationnarité et à l'estimation aveugle de canal. En effet, il est un résultat connu [46] que le filtrage d'un processus stationnaire par un filtre LPTV

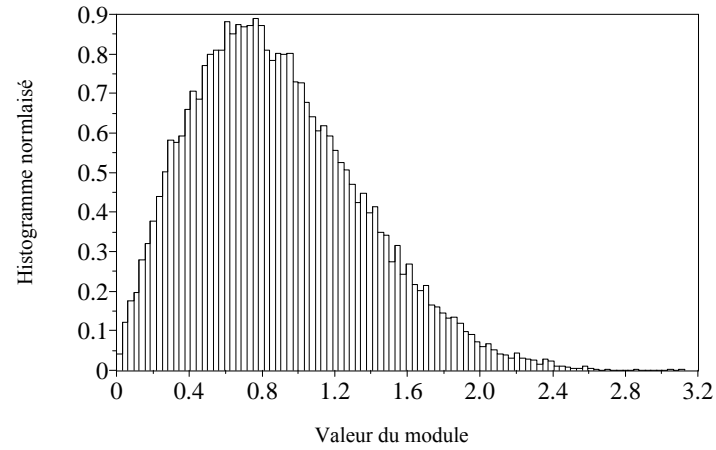


FIG. 4.24 – Histogramme du module du bruit blanc gaussien de puissance 1 après filtrage inverse pour un filtre LPTV-LL

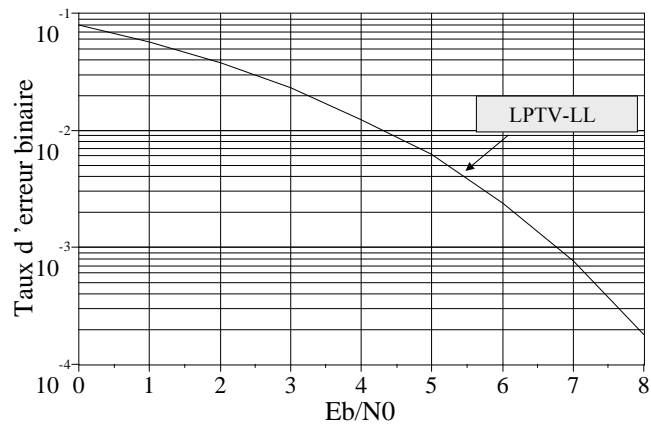


FIG. 4.25 – Performances en TEB pour un système d'étalement basé sur un filtre LPTV-LL

résulte en un processus cyclostationnaire. D'autre part, la cyclostationnarité appliquée aux communications numériques est un sujet largement étudié ([8], [47], [50]). Notamment, concernant l'estimation aveugle, [42] par exemple, reprenant les travaux de [47], montre l'intérêt de la cyclostationnarité par rapport au cas d'une estimation de canal à partir d'un signal reçu stationnaire. Il y est montré qu'à partir des statistiques de second ordre pour un signal cyclostationnaire, il est possible d'estimer un canal non nécessairement à phase minimale. Dans le cas d'un signal reçu stationnaire, l'information de phase est perdue dans les termes de second ordre et l'estimation de canaux potentiellement à phase non minimale nécessite alors le calcul de statistiques d'ordre supérieur [38].

Pour obtenir cette cyclostationnarité, certains travaux proposent un filtrage LPTV en émission ([39], [40]). Bien que nous sortions alors du cadre de l'utilisation de filtres LPTV, notons aussi qu'une autre technique pour obtenir la cyclostationnarité est de suréchantillonner le signal reçu à une fréquence multiple du débit symbole ([41],[44]). Remarquons que cette technique de suréchantillonnage conduit à un modèle de multicanaux et d'autres méthodes peuvent alors s'appliquer [48], [49].

Nous ne détaillons pas plus en détail ces techniques d'identification de canal aveugle liées aux filtres LPTV et à la cyclostationnarité parce que nous n'avons pas fait de ce domaine un axe de travail durant ce travail de thèse. Un recueil d'applications liées aux propriétés des signaux cyclostationnaires plus généralement en communications numériques peuvent être trouvées dans [50].

4.3.2 Contributions personnelles

Concernant une approche temporelle de l'utilisation des filtres LPTV, nous nous sommes orientés vers le problème de la réduction de PAPR pour les systèmes OFDM. Cette méthode de modulation par porteuses orthogonales offre de nombreux avantages à l'heure où les débits de transmissions nécessaires sont de plus en plus grands : robustesse contre les canaux multitrajets (l'interférence intersymbole est potentiellement annulable par augmentation du nombre de porteuses) et gain en efficacité spectrale. Le principal inconvénient de cette technique est que le signal obtenu souffre d'une très grande dynamique d'amplitude que l'on quantifie grâce au rapport instantané entre la puissance crête et la puissance moyenne du signal (PAPR). Cet inconvénient est particulièrement gênant dans les applications satellites qui utilisent des amplificateurs à forte

puissance non linéaires. De nombreuses techniques sont proposées pour réduire la valeur maximale du PAPR (techniques déterministes) ou bien réduire la probabilité d'apparition des fortes valeurs de PAPR (techniques probabilistes). Nous proposons l'utilisation des filtres LPTV-LL pour la réduction de ce PAPR.

Dans un premier temps, nous proposons une utilisation de ces filtres LPTV dans une approche probabiliste. Cette technique est à rapprocher et à comparer à [51] qui propose d'utiliser des entrelaceurs aléatoires et au Selective Mapping ([56], [57]). Dans un second temps, nous nous intéressons à la technique déterministe [52] qui propose une pondération du signal avant mise en forme OFDM par une fenêtre déterministe. Cette technique offre des réductions de PAPR, mais a l'inconvénient de dégrader les performances du système en terme de TEB. Nous proposons de précéder ce fenêtrage déterministe par un filtrage LPTV-LL. Ce filtrage permet de conserver les mêmes capacités de réductions de PAPR tout en offrant des performances en TEB différentes selon la plage de $\frac{E_b}{N_0}$ où le système travaille. Enfin, nous proposons une nouvelle formulation de l'utilisation des techniques générales de réduction de PAPR en utilisant l'outil LPTV.

4.3.2.1 Présentation de l'OFDM

Nous considérons que nous désirons réaliser une transmission numérique de débit symbole D_S^0 (de période symbole $T_S^0 = \frac{1}{D_S^0}$). Nous appelons d_k le symbole de la constellation numérique transmis durant l'intervalle $[kT_S^0; (k+1)T_S^0]$. Le principe de l'OFDM est de générer N porteuses complexes espacées fréquentiellement de $\Delta f = \frac{1}{NT_S^0}$. Chacune de ces porteuses est modulée en amplitude par les symboles d_k appartenant à la constellation utilisée. Ainsi, le p -ième symbole OFDM, de durée $T_S = NT_S^0$ est obtenu par la somme des N porteuses complexes modulées (4.8). Le signal OFDM total $S(t)$ est obtenu par la somme de ces symboles OFDM (4.9).

$$S^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} d_{pN+k} e^{2i\pi k \Delta f t} \quad pT_S \leq t < (p+1)T_S \quad (4.8)$$

$$S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} S^{(p)}(t) \quad (4.9)$$

Pour obtenir le signal $S^{(p)}(t)$ échantillonné à la fréquence $\frac{1}{T_S}$, une méthode simple est de calculer la IFFT du vecteur $[d_{pN}, d_{pN+1} \dots d_{pN+N-1}]$. On récupère ainsi les versions échantillonnées $S_m^{(p)}$ de $S^{(p)}(t)$ données par (4.10) pour le p -ième symbole OFDM. On obtient alors la réalisation de la figure 4.26.

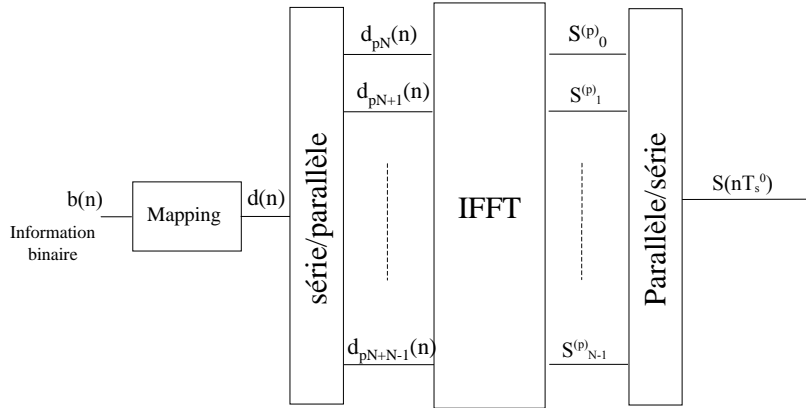


FIG. 4.26 – Réalisation pratique d'un signal OFDM échantillonné à la fréquence $\frac{1}{T_S}$

$$S_m^{(p)} = \sum_{k=0}^{N-1} d_{pN+k} W_N^{-2i\pi km} \quad 0 \leq m \leq N-1 \quad (4.10)$$

Si l'on désire un signal OFDM échantillonné à une fréquence plus grande, il suffit de calculer cette IFFT en réalisant du zéro-padding. L'intérêt de cette technique de modulation sur porteuses orthogonales est que la durée T_S du symbole émis a été multipliée par N par rapport à la période symbole T_S^0 d'une modulation monoporteuse. Ainsi, dans le cas où le canal est sélectif en fréquence pour une modulation monoporteuse, on a alors un temps de dispersion du canal T_C qui vérifie $T_C \geq T_S^0$ et il existe de l'interférence intersymbole en réception ce qui rend nécessaire une opération d'égalisation en réception. Mais une modulation OFDM sur N porteuses permet alors d'obtenir un temps symbole $T_S = NT_S^0$ tel que $T_C \ll T_S$ ce qui préserve dans ce cas de l'interférence intersymbole. Il n'y a alors pas d'interférence entre les symboles OFDM si l'on rajoute un temps de garde de l'ordre de T_C . On choisit alors N pour que ce temps de garde n'excède pas en pratique 20% de la période symbole T_S .

4.3.2.2 Définition du PAPR

L'un des inconvénients de l'OFDM est la grande dynamique du signal OFDM $S(t)$. En effet, $S(t)$ est la somme de porteuses complexes pondérées par les d_k et selon que ces porteuses pondérées

s'ajoutent en phase ou non, la valeur instantanée de la somme résultante peut varier de 0 à N . Cette grande dynamique de l'amplitude représente un lourd inconvénient lorsque l'on désire amplifier le signal par un amplificateur non linéaire. Pour mesurer la dynamique du signal, le PAPR pour le p -ième symbole OFDM est défini par la relation (4.11).

$$PAPR^{(p)} = \frac{\max_{t \in [pT_S; (p+1)T_S]} (|S^{(p)}(t)|^2)}{E(|S^{(p)}(t)|^2)} \quad (4.11)$$

Le PAPR calculé à partir de la forme échantillonnée à la fréquence $\frac{1}{T_S}$ (4.10) de $S^{(p)}(t)$ est donné par $PAPR_e^{(p)}$ (4.12).

$$PAPR_e^{(p)} = \frac{\max_{m \in [0; N-1]} (|S_m^{(p)}|^2)}{E(|S_m^{(p)}|^2)} \quad (4.12)$$

En réalité, pour le calcul du PAPR, il est nécessaire d'échantillonner $S(t)$ à une fréquence bien plus grande que $\frac{1}{T_S}$ afin de ne pas manquer le maximum de la fonction $S(t)$ et de réaliser donc la IFFT des d_k avec du zéro padding. Par la suite, nous réaliserons les simulations avec un échantillonnage à une fréquence $\frac{8}{T_S}$ pour les calculs de PAPR.

Différentes bornes théoriques pour la valeur théorique du PAPR sont proposées dans la littérature ([53], [54], [55]).

4.3.2.3 Techniques de réduction de PAPR

Diverses techniques pour réduire le PAPR d'un signal OFDM ont été proposées. Ces techniques appartiennent à deux familles différentes. La première, déterministe, vise à diminuer les valeurs de PAPR en proposant un traitement avant ou après la mise en forme OFDM du signal. Parmi celles-ci, nous pouvons citer la technique d'écrêtage, qui consiste à écrêter le signal OFDM lorsque l'amplitude dépasse un seuil toléré. Cette technique s'accompagne de traitements en réception pour détecter ces écrêtages et pour reconstruire les parties écrêtées. Une autre technique déterministe consiste à réaliser un codage sur les symboles d_k tel que les séquences codées aient un PAPR faible. Une dernière méthode consiste à pondérer les symboles d_k par une fenêtre déterministe avant le calcul de la IFFT sur la figure 4.26.

La seconde famille de techniques est, quant à elle, probabiliste. Ces techniques ne visent pas à empêcher les séquences à fort PAPR, mais proposent de réduire la probabilité de transmission des symboles OFDM correspondants. Pour cela, un ensemble de P transformations matricielles

$\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ et vectorielles $\{\beta_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ est proposé. Pour un symbole OFDM, les P vecteurs \mathbf{D}_n sont alors calculés à partir du vecteur initial \mathbf{D}_0 des d_k conformément à la relation (4.13). Selon la technique, soit les $\{\beta_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ sont nuls, soit les $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ valent \mathbf{I}_N . Concernant la famille $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$, celle ci doit être constituée de transformations inversibles pour être en mesure de récupérer le vecteur d'information \mathbf{D}_0 en réception. Notons que la transformation α_0 correspond à la transformation identité.

$$\mathbf{D}_n = \alpha_n \mathbf{D}_0 + \beta_n \quad \text{pour } n \in [0 : P - 1] \quad (4.13)$$

Ensuite, la IFFT des P vecteurs \mathbf{D}_n est calculée. Le symbole OFDM transmis est celui qui admet la plus faible valeur de PAPR. Il est évident que pour chaque symbole émis, le récepteur doit avoir connaissance de la transformation choisie ce qui se traduit par une légère perte de débit utile transmis équivalent à la transmission de $\log_2(P)/\rho$ bits si jamais un codage de taux ρ est utilisé pour protéger cette information.

Parmi les techniques probabilistes qui proposent une famille $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$, les plus connues sont l'entrelacement ([51]), le Selective Mapping (**SM**) ([56], [57]), ou encore le Partial Transmit Sequence (**PTS**) ([58], [59], [57]). L'entrelacement consiste à utiliser pour $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ un ensemble de P entrelaceurs blocs aléatoires de taille N . La technique du SM consiste à définir pour $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ un ensemble de matrices aléatoires diagonales dont les éléments diagonaux sont complexes de module 1. Enfin, la technique du PTS consiste à découper les symboles correspondant aux N porteuses en V sous ensembles fixes de cardinal $\frac{N}{V}$. Ensuite chaque symbole appartenant au même sous ensemble $\{E_i\}_{0 \leq i \leq V-1}$ subit une rotation d'angle θ_i . En réduisant à θ le nombre de valeurs possibles pour θ_i , le jeu des V paramètres θ_i est optimisé pour donner le plus faible PAPR. Cette technique plus complexe en temps de calcul que le PTS mais plus efficace en terme de réduction de PAPR, nécessite de transmettre les valeurs choisies des paramètres θ_i pour la réception. Ainsi P vaut pour cette technique $P = \theta^V$.

Parmi les techniques probabilistes qui proposent d'optimiser les vecteurs β_n , les plus connues sont le Tone Injection (**TI**) ([60], [61]) et le Tone Reservation (**TR**) ([60]). La première technique (TI) consiste à dupliquer $\theta - 1$ fois la constellation initiale dans \mathbb{C} de la modulation numérique à laquelle appartiennent les d_k . On obtient alors θ constellations se déduisant de la constellation initiale par une translation dans le plan complexe \mathbb{C} . Le principe de cette technique consiste alors, pour chaque d_k , à trouver la translation associée qui donne la valeur minimale du PAPR, parmi les θ valeurs possibles. Le vecteur β_n dans la relation (4.13) peut alors avoir θ valeurs possibles pour

chacune de ses composantes. Un algorithme d'optimisation permet de trouver le vecteur β_n parmi les θ^N possibles qui donne le vecteur \mathbf{D}_n qui minimise le PAPR. Il s'agit alors, dans la pratique, de choisir un compromis entre la complexité des algorithmes et l'optimalité dans la recherche du vecteur β_n qui minimise le PAPR. Il est à noter que pour cette technique, aucune information n'est à transmettre au récepteur, qui n'a besoin que d'opérer une opération modulo en réception pour retrouver la constellation initiale. L'inconvénient de cette méthode est que l'énergie moyenne des symboles transmis est augmentée car l'ensemble des θ constellations a une énergie moyenne plus grande que l'énergie moyenne de la constellation initiale. La seconde technique (TR) consiste, quant à elle, à sacrifier un certain nombre de porteuses d'un sous ensemble E' de $[0 : N - 1]$. Les porteuses de l'ensemble E' ne contiennent aucune information d_k , mais un algorithme permet d'optimiser les amplitudes et les phases de l'ensemble de ces porteuses afin de minimiser le PAPR du symbole obtenu. Cette technique consiste alors dans l'équation (4.13) à rajouter un vecteur β_n orthogonal à \mathbf{D}_0 (i.e $\beta_n^{t*} \mathbf{D}_0 = 0$ puisque chaque porteuse est soit une porteuse d'information soit une porteuse de E'). Pour cette technique, aucune information n'est transmise parce que le récepteur connaît la position (c'est à dire l'ensemble E') des porteuses sacrifiées. Par contre, une perte de débit relative égale à $\frac{\text{card}(E')}{N}$ (card désigne le cardinal de l'ensemble) est à signaler puisque les porteuses de E' ne transmettent aucune information.

Maintenant que nous avons brièvement fait le tour des méthodes notables utilisées pour la réduction de PAPR, nous allons proposer deux méthodes personnelles pour la réduction du PAPR.

4.3.2.4 Utilisation des filtres LPTV-LL dans un contexte probabiliste

L'idée est ici de choisir dans l'équation (4.13) pour $\{\alpha_n\}_{0 \leq n \leq P-1}$ un ensemble de filtres LPTV-LL aléatoires. Cette technique est à rapprocher et à comparer aux deux techniques aléatoires (sans algorithme d'optimisation) que sont l'entrelacement [51] et le Selected Mapping ([56], [57]).

4.3.2.4-a Présentation du système basé sur les filtres LPTV-LL

Nous générons $P - 1$ filtres LPTV-LL d'ordre 1. Si N est le nombre de porteuses du système OFDM, la matrice MIMO du n -ième filtre pour $1 \leq n \leq P - 1$ est donnée par (4.14) conformément à (2.28) où les $\mathbf{F}_n(z)$ sont construits selon la relation (2.26) avec $p = 1$. La matrice MIMO du filtre LPTV inverse n pour $1 \leq n \leq P - 1$ est donnée par la relation (4.15) conformément à

la relation (2.29).

$$\mathbf{H}'_{n,em}(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{F}_n(z^N) \boldsymbol{\theta}(z^N) \mathbf{D}_z \quad (4.14)$$

$$\mathbf{H}'_{n,re}(z) = z^{-Nr} \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{I}'_N \mathbf{F}_{n*}^t(z^{-1}) \mathbf{D}_z \quad (4.15)$$

A partir de ces filtres, nous dérivons une relation de filtrage bloc par une opération modulo afin que pour un vecteur \mathbf{D}_n (4.13), la sortie ne dépende que du vecteur \mathbf{D}_0 . Cette contrainte de relation bloc est exigée pour que chaque symbole OFDM soit indépendant des autres symboles OFDM. En effet, il se peut que deux symboles OFDM successifs n'aient pas été filtrés par le même filtre LPTV et le filtrage inverse n'est alors pas possible sans la précaution d'un filtrage bloc. La relation de filtrage bloc peut s'écrire sous la forme matricielle (4.16) où $\boldsymbol{\alpha}_n^{LL}$ est une matrice carré de taille $N \times N$.

$$\mathbf{D}_n^{LL} = \boldsymbol{\alpha}_n^{LL} \mathbf{D}_0 \quad (4.16)$$

4.3.2.4-b Présentation du système basé sur les entrelaceurs aléatoires

La première méthode ([51]) à laquelle nous allons comparer notre système consiste à définir P entrelaceurs blocs aléatoires de taille N notés $\{\boldsymbol{\alpha}_n^{entr}\}_{0 \leq n \leq P-1}$. Il est alors possible d'écrire la sortie sous la même forme (4.17) que précédemment où les $\boldsymbol{\alpha}_n^{entr}$ sont les matrices de permutation carrées de taille $N \times N$ telles qu'il existe un seul élément non nul égal à 1 par ligne et par colonne.

$$\mathbf{D}_n^{entr} = \boldsymbol{\alpha}_n^{entr} \mathbf{D}_0 \quad (4.17)$$

4.3.2.4-c Présentation du système basé sur le Selective Mapping

La seconde méthode ([56], [57]) à laquelle nous allons comparer notre système est le Selective Mapping. Cette fois ci, les transformations $\{\boldsymbol{\alpha}_n^{SM}\}_{0 \leq n \leq P-1}$ correspondent à une rotation aléatoire de chacun des symboles. Ainsi, il est à nouveau possible d'écrire la sortie sous la forme matricielle (4.18) où les $\boldsymbol{\alpha}_n^{SM}$ sont des matrices diagonales où l'élément $[\boldsymbol{\alpha}_n^{SM}]_{i,i}$ est un complexe de module 1 et de phase aléatoire uniformément répartie entre $[0; 2\pi]$.

$$\mathbf{D}_n^{SM} = \boldsymbol{\alpha}_n^{SM} \mathbf{D}_0 \quad (4.18)$$

Nous définissons enfin la fonction complémentaire de la fonction de répartition associée au PAPR (4.19).

$$F(x) = P(\text{PAPR}_e \geq x) \quad (4.19)$$

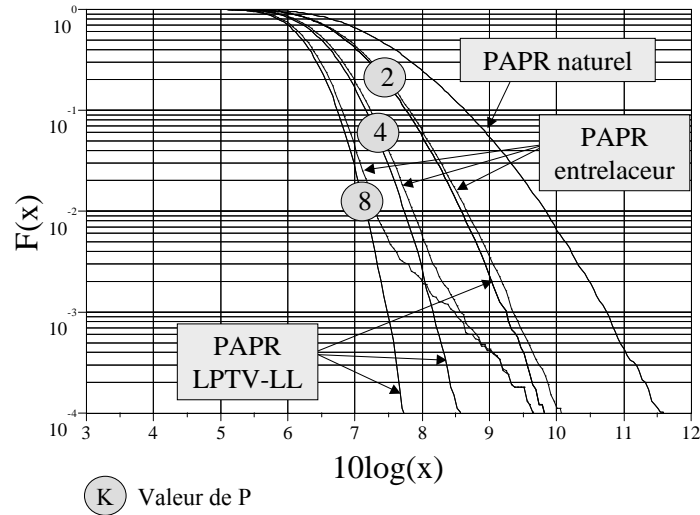


FIG. 4.27 – Fonction de répartition complémentaire du PAPR pour l’entrelacement et les filtres LPTV-LL ($N = 64$)

4.3.2.4-d Simulations

Les figures 4.27 et 4.28 présentent la fonction de répartition complémentaire $F(x)$ du PAPR pour les 3 techniques et pour des valeurs de P égales à 2, 4 et 8 et un nombre N de porteuses égal à 64. La modulation utilisée est une QPSK. Les simulations sont réalisées pour un nombre de symboles OFDM égal à 10^5 .

Les figures 4.29 et 4.30 présentent les fonctions F pour les 3 techniques et pour des valeurs de P égales à 2, 4, 8 et 16 et un nombre N de porteuses égal à 128. La modulation utilisée est une QPSK. Les simulations sont réalisées pour un nombre de symboles égal à 10^5 .

Nous remarquons que la technique par filtre LPTV-LL présente de meilleures performances en réduction de PAPR que la technique basée sur les entrelaceurs pour laquelle la courbe F subit un phénomène de palier pour des probabilités inférieures à 0.01. Par contre, les capacités de réduction de PAPR de notre méthode sont sensiblement équivalentes à celles du Selective Mapping. En ce qui concerne la complexité de calcul, les trois techniques nécessitent un calcul matriciel d’après les relations (4.16), (4.17) et (4.18). Cependant, pour les techniques SM et entrelaceurs les matrices n’ont qu’un seul élément par ligne et par colonne. Pour la technique LPTV-LL, la matrice est pleine. La complexité est donc plus grande.

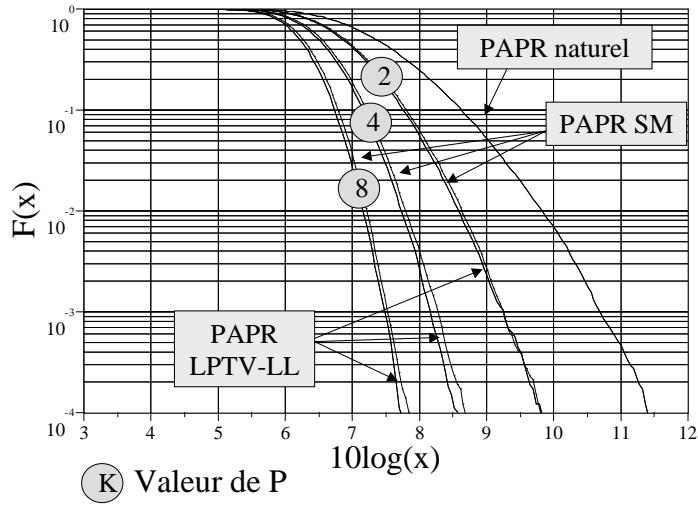


FIG. 4.28 – Fonction de répartition complémentaire du PAPR pour le Selective Mapping et les filtres LPTV-LL ($N = 64$)

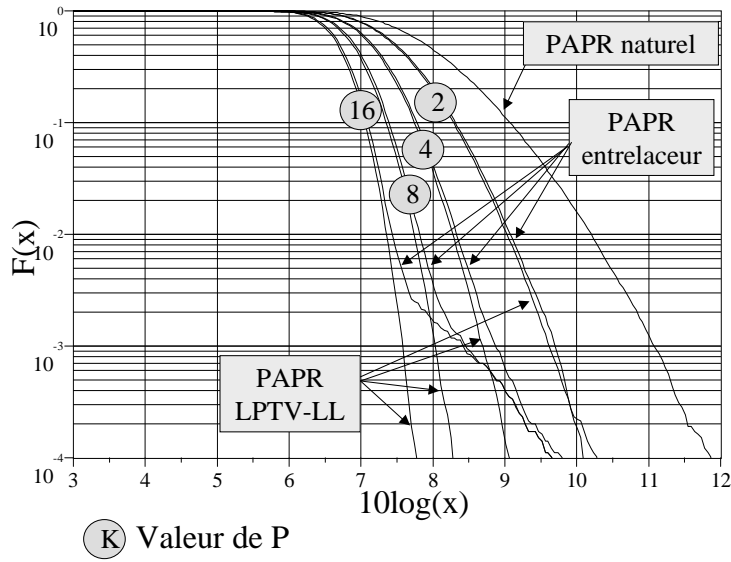


FIG. 4.29 – Fonction de répartition complémentaire du PAPR pour l'entrelacement et les filtres LPTV-LL ($N = 128$)

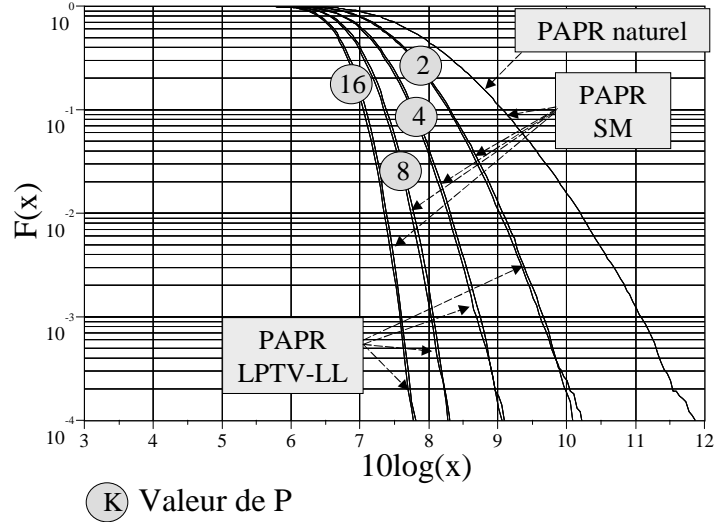


FIG. 4.30 – Fonction de répartition complémentaire du PAPR pour le Selective Mapping et les filtres LPTV-LL ($N = 128$)

Mais, nous allons voir dans la suite, que dans le cas d'un canal sélectif en fréquence avec bruit additif blanc gaussien, les performances en TEB de notre système diffèrent de celles des deux autres méthodes d'entrelacement et de SM. Pour certains types de canaux, nous allons voir que notre méthode peut s'avérer avantageuse en terme de TEB.

4.3.2.4-e Description d'un canal sélectif en fréquence

Nous supposons que le signal OFDM $S(t)$ (Figure 4.26) est échantillonné à la fréquence $\frac{1}{T_S}$. L'évaluation des performances en termes de TEB ne nécessite pas de suréchantillonner. Nous supposons le modèle suivant (4.20) de canal discret à retards, invariant dans le temps. Les retards sont rangés dans l'ordre croissant, c'est à dire ($m_0 < m_1 < \dots < m_{N_r-1}$).

$$h(m) = \sum_{k=0}^{N_r-1} a_k e^{j2\pi\theta_k} \delta((m - m_k)) \quad (4.20)$$

La relation (4.20) signifie que le canal est constitué de N_r multitrajets de retards $\{m_k T_S^0\}_{0 \leq k \leq N_r-1}$, de modules associées $\{a_k\}_{0 \leq k \leq N_r-1}$ et de phases $\{\theta_k\}_{0 \leq k \leq N_r-1}$. De plus, nous supposons l'existence d'un trajet direct, c'est à dire $m_0 = 0$. Remarquons que nous choisissons un modèle de canal invariant dans le temps. Nous justifions ce choix par le fait que nous désirons seulement comparer

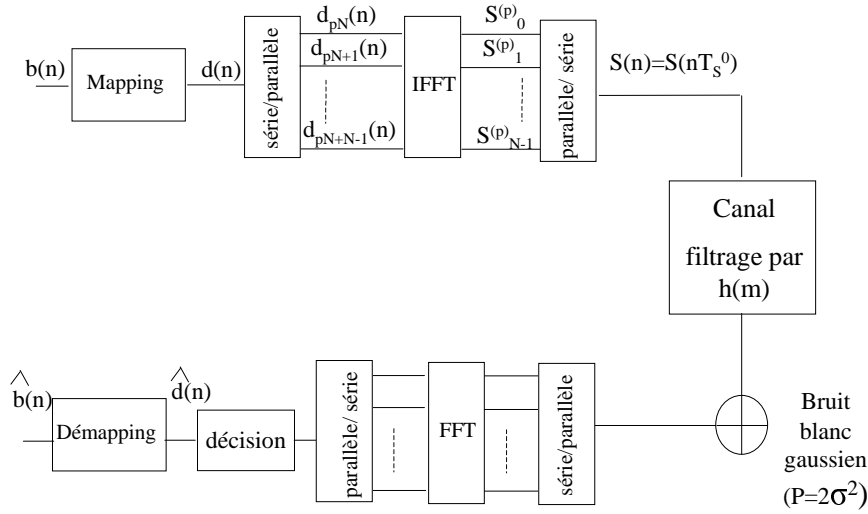


FIG. 4.31 – Modélisation d’une transmission OFDM sur canal discret et bruit additif blanc gaussien

les performances du système avec filtre LPTV-LL en émission et entrelaceurs (ou SM) pour un canal donné. Les résultats que nous allons présenter peuvent se généraliser au cas d’un canal variant dans le temps. La figure 4.31 modélise notre système OFDM avec le modèle précédent de canal discret avec bruit blanc additif gaussien.

D’autre part, en réception, nous supposons le canal connu et nous choisissons une technique d’inversion fréquentielle du canal. Ainsi, sous cette hypothèse, en appelant $\{H_i\}_{0 \leq i \leq N-1}$ les coefficients de TFD du canal calculés sur N points, la figure 4.31 peut se réécrire comme un modèle de N canaux AWGN où la puissance du bruit dans la branche i est donnée par $2\sigma^2 |H_i^{-1}|^2$ (Figure 4.32).

L’utilisation d’une technique de réduction de PAPR par entrelacement ou par SM ne modifie pas la probabilité d’erreur par rapport à une transmission sans technique de réduction de PAPR. La probabilité d’erreur du système est donnée par la relation (4.21) (cf annexe D.1) dans le cas

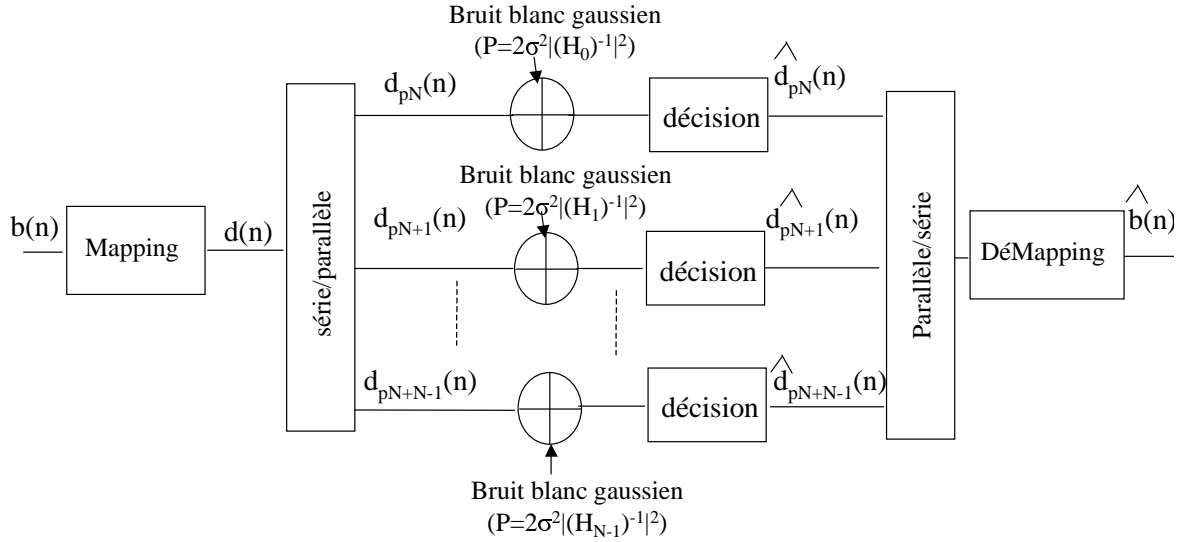


FIG. 4.32 – Modèle de canal équivalent pour une transmission OFDM avec inversion fréquentielle du canal en réception

d'une modulation numérique QPSK où $Q(x) = 0.5 \operatorname{erfc}(\frac{x}{\sqrt{2}})$ et $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$.

$$P_e = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Q\left(\sqrt{2 \cdot |H_i|^{-2} \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (4.21)$$

L'utilisation d'un filtre LPTV-LL en émission de degré non nul a pour effet de modifier la probabilité d'erreur bit du système OFDM. Nous faisons l'hypothèse que le filtrage en réception par un filtre LPTV-LL a pour effet d'uniformiser les N canaux de bruits AWGN de puissances respectives $2\sigma^2 |H_i^{-1}|^2$ en un canal AWGN de puissance $\frac{2\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H_k^{-1}|^2$. Nous vérifierons l'exactitude de cette hypothèse par les simulations. Sous cette hypothèse, la probabilité d'erreur, dans le cas d'une technique de réduction de PAPR par filtre LPTV-LL, est donnée par la relation (4.22) (cf annexe D.1) dans le cas d'une modulation numérique QPSK.

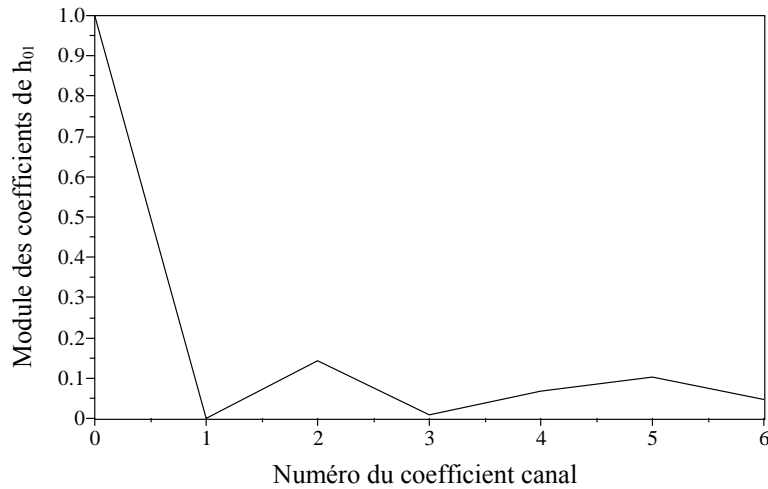
$$P_e^{LL} = Q \left(\sqrt{2 \cdot \frac{E_b}{N_0} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |H_i^{-1}|^2 \right]^{-1}} \right) \quad (4.22)$$

4.3.2.4-f Simulations

Nous choisissons $N = 128$ porteuses. Le premier canal sous forme discrète (4.20) est choisi avec les paramètres suivants. Le nombre de retards est choisi $N_r = 6$. Les valeurs de ces 6 retards sont choisis aléatoirement avec une valeur maximale de retard égale à 10 ($\frac{T_C}{T_S} = \frac{10}{128}$ vérifie l'hypothèse d'un temps de garde inférieur à 20% de la période symbole). Le trajet direct est choisi de module 1. Les autres retards ont un module qui suit une loi de Rayleigh de moyenne 0.1 et une phase uniformément répartie entre 0 et 2π . Nous appelons $h_{0,1}$ le canal obtenu selon ces lois. Un second canal $h_{0,2}$ est généré de la même façon avec un module moyen des trajets secondaires égal à 0.2. Un troisième canal $h_{0,5}$ est généré de la même façon avec un module moyen des trajets secondaires égal à 0.5.

Les figures 4.33, 4.34 et 4.35 illustrent les modules a_k pour ces trois canaux. Les figures 4.36, 4.37 et 4.38 illustrent les réponses fréquentielles de ces trois canaux. Ces réponses fréquentielles sont normalisées afin que ces canaux n'amplifient pas le signal. De plus, la fréquence est normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{T_S}$. Les figures 4.39, 4.40 et 4.41 présentent les TEB théoriques et simulés pour ces trois canaux dans le cas de l'utilisation d'un filtre LPTV-LL et dans le cas d'une technique SM (ou entrelaceurs).

Tout d'abord, sur les figures 4.39, 4.40 et 4.41, nous notons la fidélité entre les probabilités d'erreur théoriques et simulées. Cela signifie que l'hypothèse qui consiste à considérer que le filtre LPTV-LL uniformise les différents bruits gaussiens de puissances $2\sigma^2 |H_i^{-1}|^2$ en un bruit gaussien de puissance égale à la moyenne des puissances semble valable. D'autre part, nous remarquons que, selon la forme de la réponse fréquentielle du canal, la méthode avec filtres LPTV-LL peut permettre une amélioration des performances en TEB par rapport aux autres méthodes qui n'affectent pas le TEB. La nature des fonctions de probabilités d'erreur indique que la courbe de TEB associée à la méthode avec filtres LPTV-LL coupe nécessairement la courbe de référence pour ensuite passer en dessous et apporter un gain en TEB. Mais, si la réponse fréquentielle du canal est trop affaiblie, cette valeur de coupure peut s'avérer être très grande et inintéressante en pratique. Cette présence de forts affaiblissements est liée à l'amplitude relative des trajets secondaires par rapport au trajet principal.

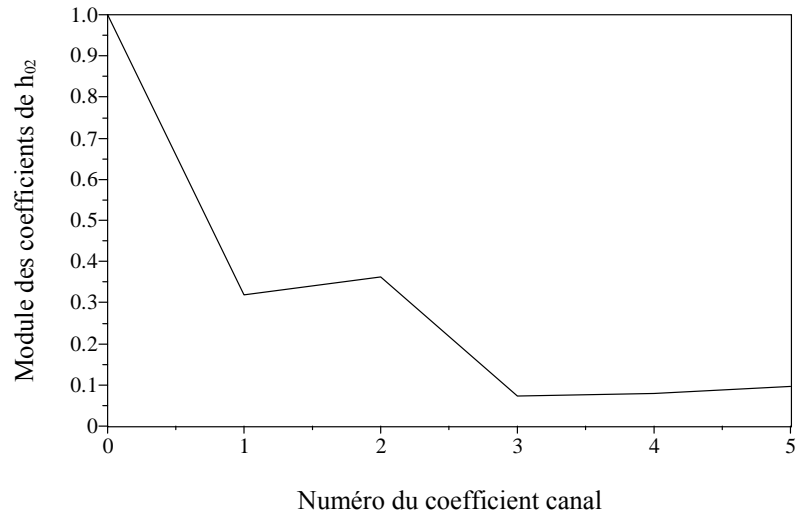
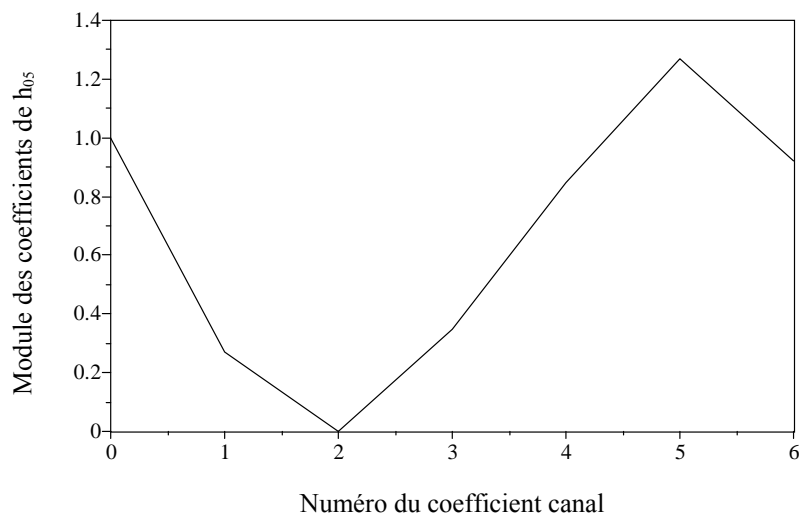
FIG. 4.33 – Module des coefficients de $h_{0,1}$

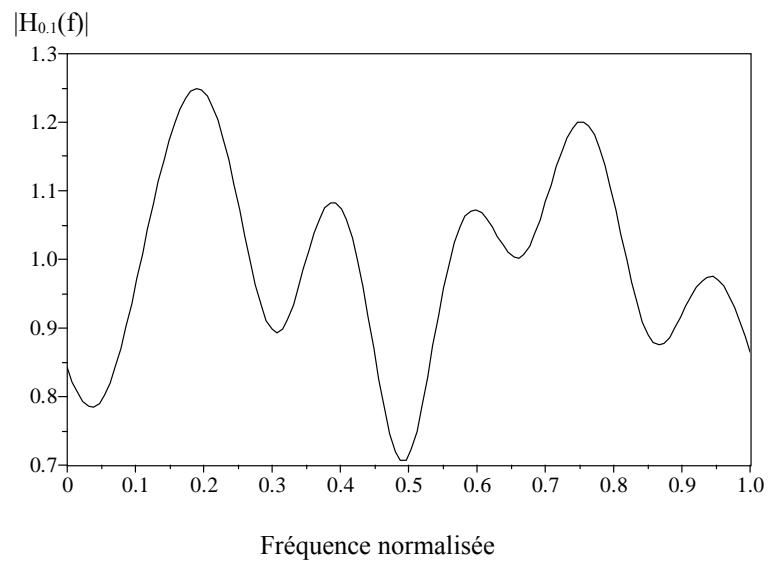
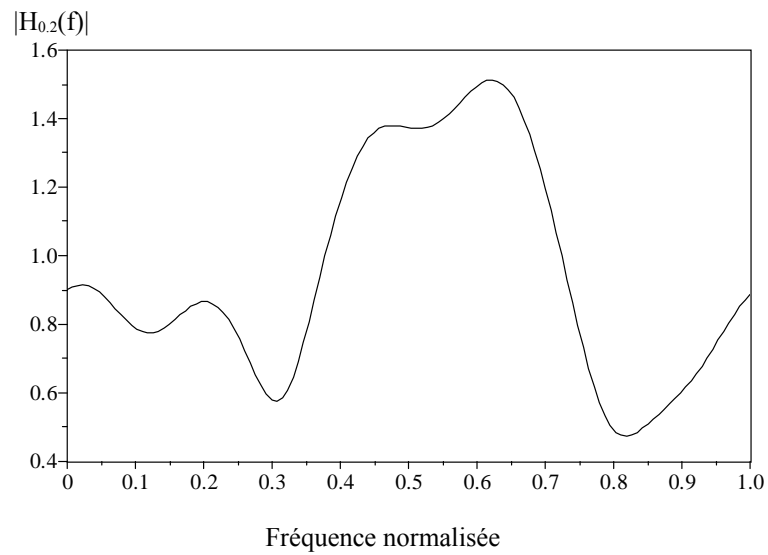
En conclusion, selon les caractéristiques statistiques du canal (le canal peut varier dans le temps) et le TEB auquel on désire travailler, il est à discuter grâce aux fonctions de probabilités (4.21) et (4.22) l'avantage d'utiliser la technique LPTV-LL par rapport au SM. Par exemple, dans le cas d'une utilisation d'OFDM pour une liaison satellite, la technique LPTV-LL permet de réduire le PAPR dans les mêmes proportions que la technique SM. Cette propriété est nécessaire car les amplificateurs sont de forte puissance et non linéaire. De plus, un canal satellite est modélisé par un canal de Rice avec des trajets réfléchis très faibles par rapport au trajet principal. On est alors dans la configuration des figures 4.39 et 4.40 où la technique LPTV apporte un gain en TEB pour de faibles valeurs de $\frac{E_b}{N_0}$. Nous avons prévu de vérifier ce résultat par des simulations avec un modèle de canal de Rice variant dans le temps.

4.3.2.5 Utilisation des filtres LPTV-LL dans un contexte déterministe

Nous avons choisi de placer cette partie dans l'annexe D.2 et nous expliquons seulement ici le cheminement et les résultats.

Nous proposons d'utiliser un filtre LPTV-LL dans un contexte déterministe de réduction de PAPR. [52] propose l'utilisation d'une fenêtre déterministe de pondération des symboles d_k afin de diminuer le PAPR d'un signal OFDM. Cette technique permet en effet de diminuer le PAPR,

FIG. 4.34 – Module des coefficients du canal $h_{0,2}$ FIG. 4.35 – Module des coefficients du canal $h_{0,5}$

FIG. 4.36 – Réponse fréquentielle du canal $h_{0.1}$ FIG. 4.37 – Réponse fréquentielle du canal $h_{0.2}$

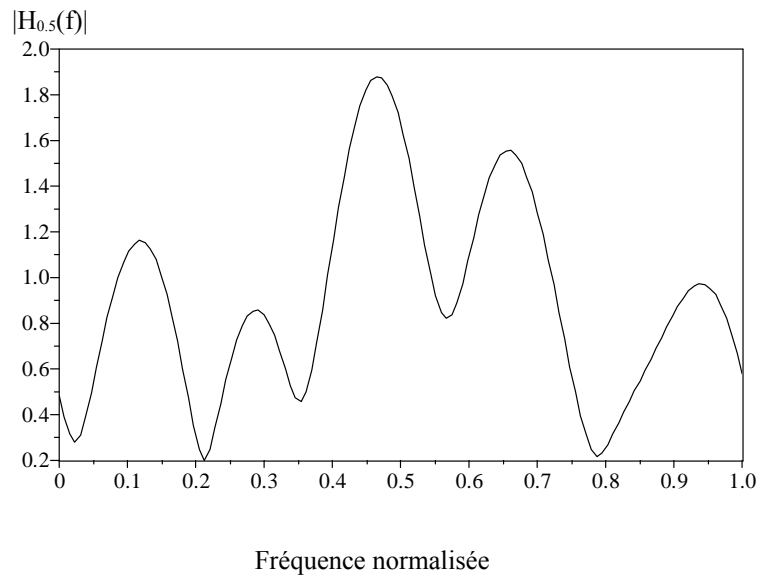


FIG. 4.38 – Réponse fréquentielle du canal $h_{0.5}$

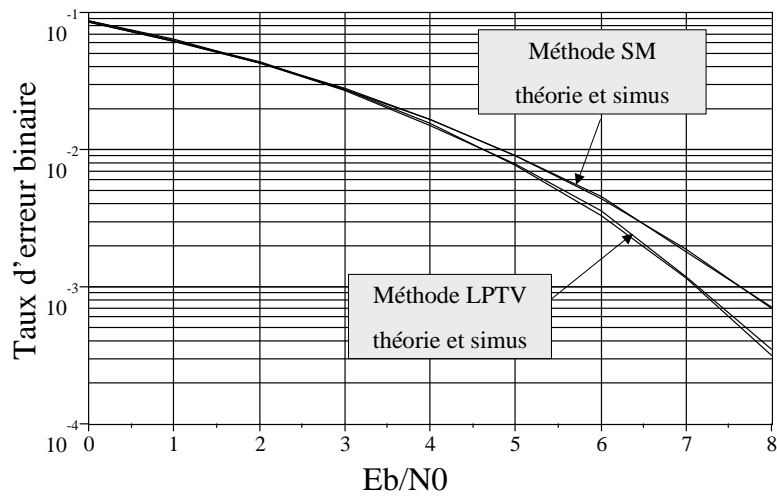
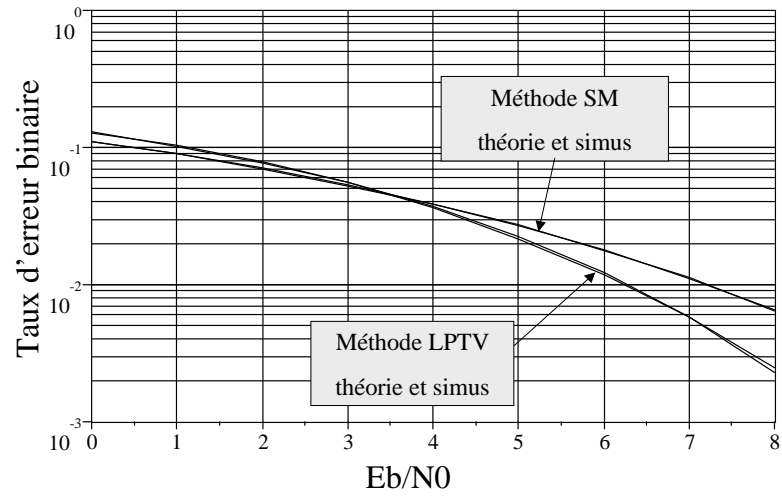
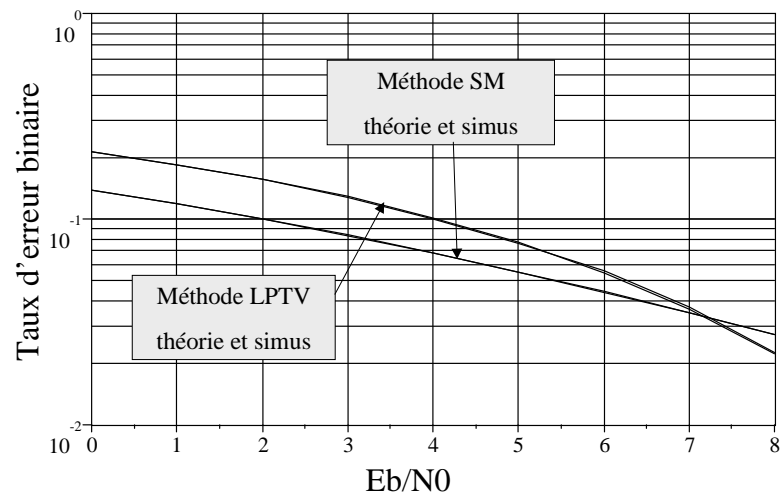


FIG. 4.39 – Performances en TEB sur le canal $h_{0.1}$

FIG. 4.40 – Performances en TEB sur le canal $h_{0.2}$ FIG. 4.41 – Performances en TEB sur le canal $h_{0.5}$

mais présente l'inconvénient de dégrader les performances en terme de TEB. Nous proposons de faire précéder cette fenêtre d'un filtre LPTV-LL afin d'améliorer les performances en TEB du système. Dans ce contexte déterministe, ce filtre LPTV est unique et fixé.

Dans un premier temps, nous vérifions par simulation que les performances en réduction de PAPR du fenêtrage restent identiques si nous faisons précéder le fenêtrage par un filtre LPTV-LL. Ensuite, nous nous intéressons aux performances du système sur un canal à bruit additif blanc gaussien. Il est alors possible de montrer que le fenêtrage est équivalent à un modèle de canal discret que l'on inverse fréquentiellement en réception comme dans le paragraphe précédent. Les performances théoriques en terme de TEB sur un canal à bruit additif blanc gaussien sont données par les expressions (4.21) et (4.22) respectivement pour les techniques de fenêtrage sans et avec le filtre LPTV-LL. Dans ces expressions, les coefficients fréquentiels H_i pour $i \in [0 : N-1]$ sont remplacés par les coefficients temporels de la fenêtre utilisée de longueur N .

Les conclusions sont alors que selon la fenêtre utilisée, pour les mêmes performances en réduction de PAPR, l'ajout du filtre LPTV-LL peut conduire à des performances en terme de TEB meilleures que dans le cas d'un fenêtrage simple selon la valeur de $\frac{E_b}{N_0}$.

4.3.2.6 Reformulation LPTV des méthodes de diminution de PAPR

Nous avons vu précédemment que la plupart des techniques de réduction de PAPR consistaient en une opération sur le vecteur \mathbf{D}_0 selon l'équation (4.13). Dans le cas où les β_n sont nuls, la relation (4.13) signifie que périodiquement (la dimension périodique vient du fait que l'on applique la même opération α_n à chaque vecteur successif \mathbf{D}_0), on effectue P opérations matricielles $\alpha_n \mathbf{D}_0$ pour obtenir un nouveau vecteur \mathbf{D}_n de symboles à affecter aux différentes porteuses. Il est évident que cette opération linéaire et périodique est équivalente à un filtrage périodique bloc sur les vecteurs successifs D_0 de symboles à transmettre.

A présent, pour un symbole OFDM donné, si l'on appelle $Y_n(z)$ et $Y_0(z)$ les transformées en z associées aux vecteurs temporels \mathbf{D}_n et \mathbf{D}_0 , nous avons, d'après les résultats sur les filtres LPTV (1.35) la relation suivante (4.23) où les $T_p^{(n)}(z)$ sont les filtres modulateurs du filtre LPTV associés à la relation matricielle α_n .

$$Y_n(z) = \sum_{p=0}^{N-1} T_p^{(n)}(zW_N^p)Y_0(zW_N^p) \quad (4.23)$$

De plus, si nous notons $\{Y_n'(k)\}_{0 \leq n \leq N-1}$ les coefficients de TFD inverse associée au vecteur \mathbf{D}_n , il est facile de vérifier d'après la définition de la transformée en z que nous avons la relation

suivante (4.24).

$$Y'_n(k) = Y_n(z = W_N^k) \quad (4.24)$$

Il est alors possible de réécrire la relation (4.23), en faisant un changement de variable, sous la forme (4.25).

$$Y'_n(k) = \sum_{p=0}^{N-1} T_{p-k_N}^{(n)}(W_N^p) Y'_0(p) \quad (4.25)$$

Enfin, en écrivant la matrice $\mathbf{A}_n^{1,1}(z)$ (2.2) associée au filtre LPTV associé à la transformation α_n , en fonction des filtres modulateurs $T_p^{(n)}(z)$, on obtient une matrice $\mathbf{A}_n^{1,1}(z)$ de la forme (4.26) donnée par (A.45).

$$\mathbf{A}_n^{1,1}(z) = \begin{bmatrix} T_0^{(n)}(z) & T_1^{(n)}(zW_N^1) & \dots & T_{N-1}^{(n)}(zW_N^{N-1}) \\ T_{N-1}^{(n)}(z) & T_0^{(n)}(zW_N^1) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_1^{(n)}(z) & T_2^{(n)}(zW_N^1) & \dots & T_0^{(n)}(zW_N^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

On remarque alors que la relation (4.25) peut s'écrire matriciellement sous la forme (4.27) où \mathbf{Y}'_n représente le vecteur des N coefficients de TFD inverse calculée à partir du vecteur des symboles D_n .

$$\mathbf{Y}'_n = \mathbf{A}^{1,1}(\mathbf{1}) \mathbf{Y}'_0 \quad (4.27)$$

Ainsi, nous avons obtenu une relation entre les sorties des IFFT. Appliquer un filtre LPTV sur le vecteur symbole \mathbf{D}_0 est équivalent à effectuer un filtrage circulaire (4.25) sur la sortie de la IFFT. Les coefficients de ce filtrage circulaire sont les éléments de la matrice modulateurs évaluée en $z = 1$. Nous allons discuter l'intérêt de cette réécriture (4.27).

4.3.2.6-a Premier intérêt : diminution de la complexité de calcul

Le premier intérêt de cette formulation LPTV est de l'ordre de la complexité de calcul. Pour notre technique d'utilisation de filtres LPTV-LL présentée précédemment, nous devons, d'après l'équation (4.16), calculer les vecteurs \mathbf{D}_n pour $n \in [1 : P - 1]$. Le calcul d'un vecteur \mathbf{D}_n nécessite de calculer le produit d'une matrice de taille $N \times N$ par le vecteur \mathbf{D}_0 . Ensuite, il est nécessaire de calculer la IFFT des vecteurs obtenus \mathbf{D}_n pour $n \in [0 : P - 1]$, soit un calcul de P IFFT.

La relation (4.27) nous donne directement la sortie de la IFFT du vecteur \mathbf{D}_n pour $n \in [1 : P - 1]$. Ainsi, en utilisant cette formulation (4.27), il est nécessaire dans un premier temps de calculer la IFFT de \mathbf{D}_0 , puis ensuite de réaliser $P - 1$ produits d'une matrice de taille $N \times N$ par le vecteur \mathbf{Y}'_0 . Cette formulation fait donc économiser le calcul de $P - 1$ IFFT.

4.3.2.6-a Second intérêt : discussion sur la recherche de techniques de réduction de PAPR

Dans les techniques traditionnelles de réduction de PAPR, le choix des transformations α_n traduit l'idée que ces différentes transformations agissant directement sur le vecteur de symboles \mathbf{D}_0 doivent permettre d'obtenir des vecteurs symboles faiblement corrélés dans une technique probabiliste (pour augmenter la probabilité que les PAPR associés soient différents) ou bien doivent diminuer le PAPR systématiquement pour un vecteur symbole donné dans le cas d'une technique déterministe. Le choix des transformations est aujourd'hui empirique. Dans les techniques probabilistes, celui ci repose sur le caractère indépendant entre elles des transformations α_n .

Grâce à la relation (4.27), nous avons une formulation différente possible. Au sens probabiliste, une bonne famille de transformations est une famille telle que les matrices modulateurs (en $z = 1$) soient des matrices unitaires (\mathbf{Y}'_n doit être de même norme que \mathbf{Y}'_0) et telles que pour un vecteur \mathbf{Y}'_0 donné, l'une des matrices modulateurs diminue la valeur maximale du vecteur d'entrée (il s'agit de diminuer le PAPR donc la valeur maximale du module du vecteur d'entrée). Dans un contexte déterministe, les propriétés sont similaires. La matrice modulateurs associée évaluée en $z = 1$ doit avoir la propriété de diminuer la valeur maximale quelque soit le vecteur d'entrée.

Cette formulation permet de fournir un cadre mathématique différent à la recherche de techniques de réduction de PAPR en la recherche pour résumer de matrices unitaires ayant la forme particulière (4.26) et ayant la propriété de diminuer la valeur maximale du module des composantes par rapport au vecteur d'entrée. Cette valeur maximale des composantes constitue une norme appelée la norme max.

Il est vrai que les techniques courantes proposent des filtres LPTV particuliers simples (entrelaceur, SM ou PTS qui sont des filtres LPTV convolutionnels de degré 0), mais cette nouvelle vision directement sur le signal en sortie de la IFFT \mathbf{Y}'_0 peut fournir une nouvelle méthode matricielle de recherche de techniques de réduction de PAPR plus complexes.

4.4 Filtres LPTV et propriétés temps/fréquences

Nous avons ajouté cette dernière partie car il nous semblait naturel de respecter la dualité temps/fréquence d'un filtre LPTV. Nous ne détaillons pas plus en avant cette approche temps/fréquence des filtres LPTV parce que nous n'avons pas travaillé sur cette partie, mais il nous semble logique, parmi les applications recensées, d'y inscrire les convertisseurs FDM/TDM et TDM/FDM. Ces deux convertisseurs permettent de transformer un multiplexage fréquentiel en un multiplexage temporel et inversement. Il est montré par exemple dans [14] la nature LPTV et l'implantation LPTV de tels convertisseurs.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, notre objectif a été double. Le premier objectif a été de proposer brièvement un recensement des diverses applications explicites existantes des filtres LPTV en communications numériques. Pour cela, nous avons adopté une classification fréquentielle et temporelle de ces applications. Le deuxième objectif a été de proposer une contribution personnelle dans l'utilisation de filtres LPTV pour les communications numériques.

Ainsi, dans la classification fréquentielle des filtres LPTV, nous avons d'abord proposé un système d'étalement permettant un étalement sur une large bande fréquentielle à l'exception d'une sous bande. Ce système, en cours de brevet CNES, permet de se prémunir d'interférences dans le plan fréquentiel. Ces interférences peuvent être de nature volontaire (brouillage) ou involontaires (sous bande allouée à une autre utilisation dans le plan de fréquences).

Ensuite, nous avons proposé l'utilisation de filtres LPTV pour réaliser de l'étalement de spectre. S'il est vrai que l'utilisation explicite de filtres LPTV comme système d'étalement a déjà été proposée ([7], [45] ou CDMA), ces derniers demeurent des cas particuliers simples de filtres LPTV ne faisant appel à aucun filtrage. Nous avons voulu proposer l'utilisation de véritables filtres LPTV plus complexes dont l'inversibilité, nécessaire, a été étudiée dans le second chapitre : les filtres LPTV convolutionnels et les filtres LPTV-LL. Il s'avère que les filtres LPTV convolutionnels constituent de mauvais candidats pour de l'étalement car les performances en TEB sur un canal AWGN sont fortement dégradées par rapport au cas de référence d'une QPSK non étalée. Cette propriété est liée à l'opération de filtrage inverse sensible au bruit. Nous avons alors proposé une méthode de treillis en réception menant à une décision soft. Néanmoins, les performances demeurent comparées à celles d'une QPSK de référence. En revanche, l'utilisation

d'un filtre LPTV-LL permet de réaliser un système d'étalement tout en conservant des performances en TEB identiques à celles d'une QPSK de référence. Ce résultat est, somme toute, original dans sa capacité à réaliser de l'étalement par filtrage LPTV. Cette technique permet de corrélérer les différents symboles de sortie par rapport aux techniques d'étalement classiques comme le CDMA. La discussion sur la façon d'exploiter cette corrélation introduite par le filtre LPTV reste ouverte.

Ensuite, dans une approche temporelle, nous avons abordé le problème de réduction de PAPR par utilisation de filtres LPTV-LL. Une première méthode, probabiliste, a consisté à choisir une famille de filtres LPTV-LL et à filtrer le signal en émission par celui qui fournit le plus faible PAPR. Cette technique offre des performances meilleures qu'une technique basée sur l'entrelacement et offre des performances comparables à la technique de Selective Mapping en terme de réduction de PAPR. En revanche, les performances en TEB diffèrent dans le cas d'un canal sélectif en fréquence. La probabilité d'erreur théorique associée a permis de conclure que, dans le cas de canaux ne présentant pas de trop forts affaiblissements fréquentiels, notre méthode offre de meilleures performances en TEB. Une telle méthode peut alors être envisagée pour des transmissions satellites où la diminution de PAPR est nécessaire pour l'utilisation d'amplificateurs non linéaires et où le canal est modélisé par un canal de Rice avec une forte prépondérance en module pour le trajet direct par rapport aux trajets secondaires. Ensuite, dans un contexte déterministe de réduction de PAPR, nous avons proposé d'utiliser la technique de fenêtrage précédée d'un filtrage LPTV-LL. L'insertion d'un filtre LPTV-LL conduit aux mêmes réductions de PAPR, mais fournit des performances en TEB différentes. Il s'agit alors de discuter le compromis entre réduction de PAPR et performances en terme de TEB en fonction des exigences de la transmission.

Enfin, nous avons proposé une reformulation des techniques générales de réduction de PAPR. Cette écriture LPTV permet de reformuler matriciellement le problème de réduction de PAPR et offre un cadre mathématique algébrique pour la recherche de techniques de réduction de PAPR.

Pour conclure, notons que le but de ce chapitre était de présenter l'intérêt d'utiliser des filtres LPTV en communications numériques. Il semble, à ce sujet, que les filtres LPTV-LL présentent des propriétés particulières qui laissent ouverte la recherche de domaines des communications numériques où ces filtres peuvent trouver leur place.

Chapitre 5

Filtres LPTV pour l'accès multiple

5.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent qu'un filtre LPTV appliqué à un signal suréchantillonné a la propriété générale d'étaler le spectre. Ces propriétés d'étalement font de la famille des filtres LPTV des candidats potentiels pour une solution d'accès multiple à spectre étalé. Cette réflexion a d'ailleurs motivé certains travaux récents ([7], [45]). Prétendre construire un système multi-utilisateurs impose cependant deux contraintes. Tout d'abord, chacun des filtres LPTV associé à chacun des utilisateurs, doit avoir la propriété d'inversibilité. Ensuite, pour assurer de bonnes performances du système face aux interférences multi-utilisateurs, il est nécessaire de garantir une certaine orthogonalité entre ces différents filtres. Par exemple, dans [45], l'inversibilité est assurée par le choix d'un entrelaceur inversible bloc (permutations) pour chacun des utilisateurs et une forme d'orthogonalité est définie par le caractère aléatoire de la génération de ces entrelaceurs.

Après avoir présenté le principe général de l'accès multiple avec étalement de spectre ainsi que les solutions traditionnelles basées sur l'utilisation de codes binaires (CDMA-Code Division Multiple Access), nous proposons une méthode générale pour construire une famille de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux numériques suréchantillonnés. Cette méthode nécessite simplement la connaissance d'un filtre LPTV inversible générateur. L'ensemble des filtres LPTV orthogonaux est alors construit à partir de ce filtre initial. Nous proposons ensuite d'utiliser ce résultat pour réaliser un système d'accès multiple par étalement. Pour une telle application, l'orthogonalité du système est parfaite dans le cas où les différents utilisateurs sont tous synchronisés. Dans le cas d'une désynchronisation entre les utilisateurs, l'orthogonalité du

système est dégradée. Cette dégradation est liée aux propriétés du filtre LPTV générateur. Le choix de ce filtre LPTV générateur apparaît ainsi déterminant pour cette application d'accès multiple. A la lumière de ce résultat, deux filtres LPTV générateurs sont proposés. Des simulations illustrent alors les performances en terme d'interférences multiutilisateurs causées par la perte d'orthogonalité du système.

Le premier paragraphe rappelle le principe des systèmes traditionnels d'accès multiple avec étalement par utilisation de codes binaires que sont le DS-CDMA (Direct Sequence Code Division Multiple Access), le MC-DS-CDMA (Multicarrier Direct Sequence Code Division Multiple Access), le MT CDMA (Multitone Code Division Multiple Access) et le MC-CDMA (Multicarrier Code Division Multiple Access). Le second paragraphe présente une définition générale de l'orthogonalité d'un système et propose une méthode générale pour construire un ensemble de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux numériques suréchantillonnés. Dans le troisième paragraphe, nous proposons d'appliquer cette construction de filtres LPTV orthogonaux à la synthèse d'un système d'accès multiple par étalement spectral. Des considérations de robustesse à la désynchronisation nous permettent de discuter le choix d'un filtre LPTV générateur pour un tel système. Des simulations comparent alors les performances de notre système en terme d'interférences multiutilisateurs avec celles d'un système DS-CDMA.

5.2 Les systèmes d'accès multiutilisateurs à spectre étalé

Nous présentons brièvement le principe des trois grandes familles d'accès multiple dans le domaine des télécommunications : l'accès multiple par multiplexage temporel (TDMA), l'accès multiple par multiplexage fréquentiel (FDMA) et l'accès multiple par étalement de spectre dont le plus courant, basé sur l'utilisation de codes binaires, est le CDMA. Chacun de ces systèmes d'accès a pour but de partager une ressource commune (temporelle et fréquentielle) entre différents utilisateurs. Concernant les accès multiples par CDMA, nous présentons les différentes techniques utilisées.

5.2.1 Présentation des différents types d'accès multiple

Nous considérons un ensemble de P utilisateurs, ayant chacun un débit bit D_{b_i} et une modulation numérique d'efficacité spectrale η_i . Il existe différentes méthodes courantes d'accès multiple sur une bande fréquentielle B fournie à l'ensemble des P utilisateurs.

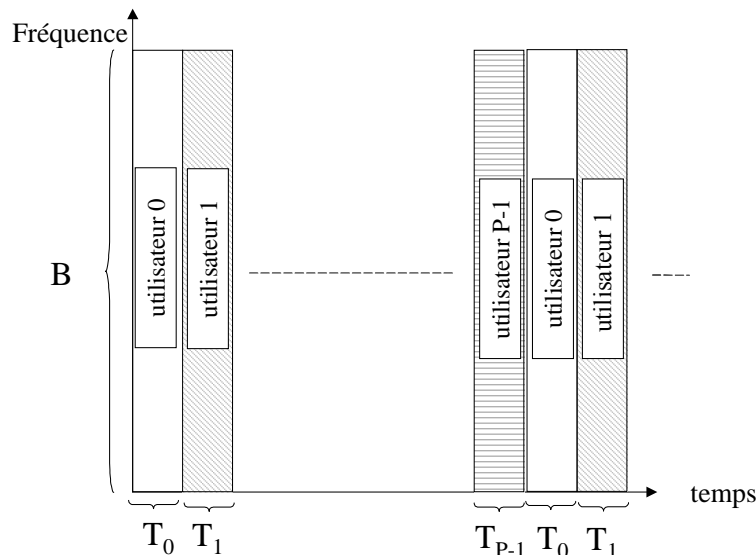


FIG. 5.1 – Principe de l'accès multiple par multiplexage temporel

Il est possible en effet d'affecter une sous bande permanente B_i de B , de largeur $\eta_i^{-1}D_{b_i}$ pour l'utilisateur i . On parle alors d'accès par multiplexage fréquentiel (FDMA) qui peut se généraliser à de l'OFDMA si on utilise une technique OFDM avec des porteuses orthogonales présentée dans le quatrième chapitre.

Une seconde méthode consiste à allouer toute la bande fréquentielle B pendant une durée T_i périodiquement (de période T) à l'utilisateur i . La durée T_i accordée à l'utilisateur i est $T_i = T \frac{D_{b_i}}{B\eta_i}$ avec $T = \sum_{i=0}^{P-1} T_i$. On réalise alors un accès multiple par multiplexage temporel.

Enfin, il est aussi possible d'affecter à chaque instant l'intégrale de la bande B à chaque utilisateur. Nous parlons dans ce cas d'accès multiple par étalement. Les figures 5.1, 5.2 et 5.3 illustrent ces différents modes d'accès multiple.

Pour les trois types d'accès présentés, nous appelons orthogonalité du système la capacité à séparer les différents utilisateurs. Il est évident que pour les accès multiples, FDMA et TDMA, l'orthogonalité est de nature respectivement fréquentielle et temporelle. Dans le cas de l'accès multiple par étalement de spectre, la transformation associée à chaque utilisateur qui permet d'étaler le signal doit comporter une propriété d'orthogonalité et ainsi permettre d'extraire du

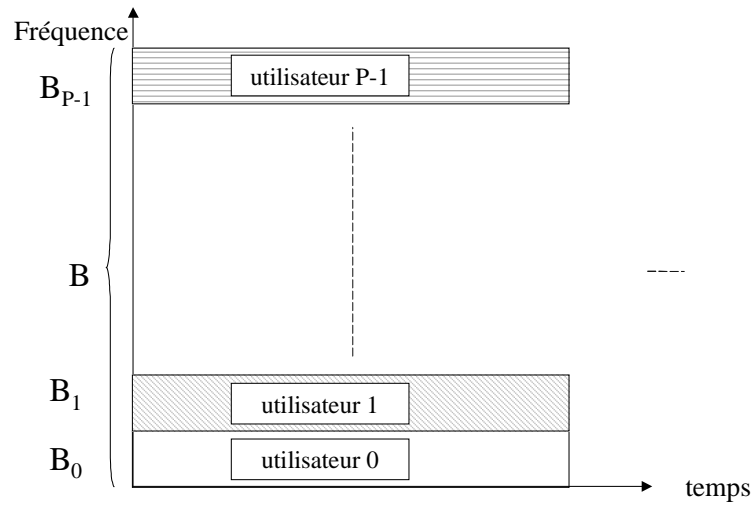


FIG. 5.2 – Principe de l'accès multiple par multiplexage fréquentiel

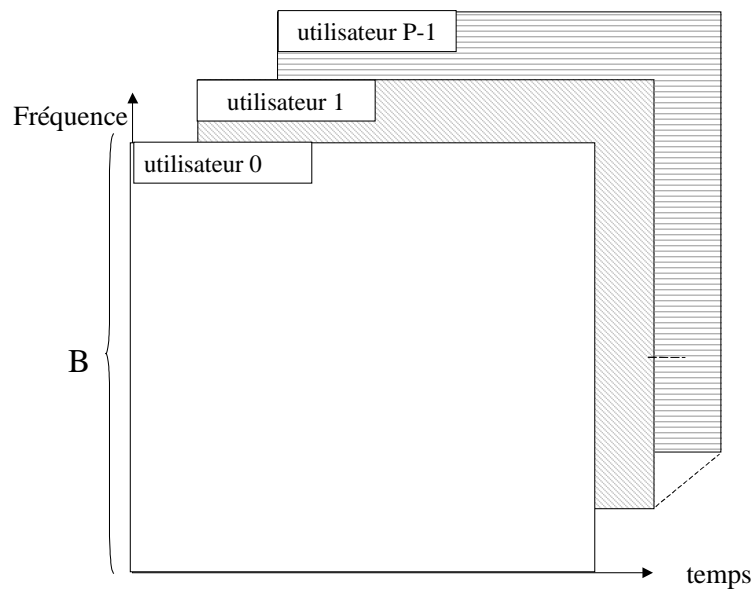


FIG. 5.3 – Principe de l'accès multiple par étalement de spectre

signal total le signal correspondant à l'utilisateur désiré. Les solutions existantes pour ces transformations consistent en la génération de codes binaires orthogonaux (CDMA). Nous présentons à présent le principe des différentes méthodes de CDMA.

5.2.2 Présentation des systèmes traditionnels de CDMA

Nous appelons P le nombre d'utilisateurs et B la bande totale utilisée par le système d'étalement. Nous faisons l'hypothèse qu'à chaque utilisateur i est associée une modulation numérique de débit symbole D_S (de durée symbole $T_S = \frac{1}{D_S}$) et nous notons $d_i(n)$ le n -ième symbole transmis par l'utilisateur i . Nous appelons N la longueur des codes d'étalement et T_C la durée chip de réalisation des codes. Enfin, nous appelons gain de traitement (G_T) d'étalement du système le rapport entre la bande occupée par le signal après étalement et la bande occupée par le signal avant étalement. Nous notons enfin $P_\alpha(t)$ le signal de mise en forme rectangulaire défini par (5.1).

$$\begin{cases} P_\alpha(t) = 1 \text{ pour } t \in [0; \alpha] \\ P_\alpha(t) = 0 \text{ pour } t \notin [0; \alpha] \end{cases} \quad (5.1)$$

5.2.2.1 Caractéristiques des codes utilisés

Les systèmes d'étalement classiques reposent sur l'assignation à chaque utilisateur d'un code particulier $\{c_i(k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$ de longueur N . Les deux caractéristiques fondamentales pour de tels codes sont leur fonction d'autocorrélation et la fonction d'intercorrélation entre les codes associés aux différents utilisateurs. La première caractéristique va traduire le pouvoir de séparation entre le signal d'un utilisateur donné et ce même signal décalé. Cette caractéristique est très importante dans le cas de canaux multitrajets. L'intercorrélation entre les différents codes va traduire la capacité à extraire le signal d'un utilisateur particulier dans le signal total. C'est cette caractéristique que nous appelons orthogonalité du système d'étalement.

Il existe différents types de codes binaires [65]. Parmi ceux ci, les séquences de Walsh/Hadamard, présentent une orthogonalité parfaite entre les différents utilisateurs, sous la condition que les séquences sont synchronisées entre elles. Il est alors possible de construire $N = 2^n$ codes orthogonaux (nombre maximal d'utilisateurs) si N est la période des séquences. De telles séquences sont adaptées à des transmissions synchrones où les signaux associés aux différents utilisateurs sont synchronisés. Dans le cas de désynchronisations, l'orthogonalité entre les différents utilisateurs est perdue.

Une seconde famille de séquences est la famille des codes de Gold construite à partir de séquences à longueur maximale. Ces séquences présentent de bonnes propriétés d'autocorrélation et d'intercorrélation, (bien que jamais parfaitement nulle), même dans le cas où les utilisateurs sont désynchronisés en réception. Pour une période $N = 2^n - 1$, le nombre de séquences constructibles est égal à $N + 2$. Cette famille de séquences est adaptée pour des liaisons désynchronisées avec un canal multitrajets.

5.2.2.2 DS-CDMA : Direct Sequence CDMA

Le plus ancien des systèmes d'étalement et le plus utilisé dans les normes actuelles est le DS-CDMA (Direct Sequence Code Division Multiple Access, [62]). Une séquence de N chips de durée $T_C = \frac{T_S}{N}$ est générée périodiquement pour chaque utilisateur. La période de génération de ces chips est égale à la durée symbole T_S . Ainsi, pour un utilisateur i , chaque symbole $d_i(n)$ est multiplié par l'intégralité du code binaire associé $\{c_i(k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$. Le signal est alors mis en forme par un signal rectangulaire $P_{T_C}(t)$ défini par (5.1). Le signal CDMA généré pour l'utilisateur i est donné par la relation (5.2).

$$s_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_i(n) \sum_{k=0}^{N-1} c_i(k) P_{T_C}(t - kT_C - nT_S) \quad (5.2)$$

Le signal $s_i(t)$ est un signal à durée symbole numérique $\frac{1}{ND_S}$ et à mise en forme rectangulaire. La bande occupée B (largeur du lobe principal) est égale à $B = 2ND_S$. Sans utilisation du code d'étalement et avec une mise en forme rectangulaire, la bande occupée (largeur du lobe principal) est égale à $2D_S$. Le gain de traitement du système d'étalement vaut donc $G_T = N$. La figure 5.4 illustre l'allure du spectre du signal étalé pour un utilisateur dans le cas d'un accès par DS-CDMA.

5.2.2.3 MC-DS-CDMA : MultiCarrier Direct Sequence CDMA

Une seconde technique d'étalement dérivée du DS-CDMA est le MC-DS-CDMA [64]. Cette technique combine l'étalement DS-CDMA et une mise en forme OFDM. Ainsi, pour l'utilisateur i , les symboles sur chaque porteuse sont étalés par la séquence d'étalement associée à l'utilisateur i . C'est à dire que si l'on reprend la figure 4.26 du chapitre précédent, un étalement de type DS-CDMA est appliqué à chaque branche de la sortie du convertisseur Série/ Parallèle. La durée d'un chip vaut donc $T_C = \frac{N_C T_S}{N}$ où N_C est le nombre de porteuses. Chacune des porteuses

orthogonales est alors modulée par un signal de durée symbole $\frac{N_C T_S}{N}$. L'écart fréquentiel entre deux porteuses adjacentes est donc $\Delta f = \frac{N}{N_C T_S}$. Le signal résultant pour le p -ième symbole OFDM de l'utilisateur i est donné par (5.3). Le signal total de l'utilisateur i est donné par (5.4).

$$S_i^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{N_C-1} e^{2i\pi k \Delta f t} \sum_{j=0}^{N-1} d_i(pN_C + k) c_i(j) P_{T_C}(t - jT_C - pN_C T_S) \quad (5.3)$$

$$S_i(t) = \sum_{p=0}^{\infty} S_i^{(p)}(t) \quad (5.4)$$

La bande occupée totale est égale $B = \frac{N_C+1}{N_C} \frac{N}{T_S}$. Dans le cas de la même mise en forme OFDM, sans étalement, la bande occupée est $\frac{N_C+1}{N_C} \frac{1}{T_S}$. Le gain de traitement, d'après la définition, vaut donc $G_T = N$. La figure 5.5 illustre l'allure du spectre du signal étalé pour un utilisateur dans le cas d'un accès par MC-DS-CDMA.

5.2.2.4 MT-CDMA : MultiTone CDMA

Une troisième technique qui découle du DS-CDMA est le Multi Tone CDMA. Le système est similaire au MC-DS-CDMA, combinant l'étalement DS-CDMA et la mise en forme OFDM. La différence par rapport au MC-DS-CDMA est que l'étalement a lieu après la mise en forme OFDM. Ainsi, pour l'utilisateur i , on commence par former le signal OFDM avec N_C porteuses. Le p -ième symbole OFDM de l'utilisateur i , $S_i^{(p)}(t)$, est donné par (5.5) où $\Delta f = \frac{1}{N_C T_S}$.

$$S_i^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{N_C-1} d_i(pN_C + k) e^{2i\pi k \Delta f t} P_{N_C T_S}(t - pN_C T_S) \quad (5.5)$$

Ensuite le p -ième symbole OFDM (5.5) de durée $N_C T_S$ est étalé par la séquence $\{c_i(k)\}_{0 \leq k \leq N-1}$ avec une durée chip $T_C = \frac{N_C}{N} T_S$. On obtient alors le signal $S_i'^{(p)}(t)$ (5.6). Le signal total $S_i'(t)$ associé à l'utilisateur i est obtenu par la somme (5.7).

$$S_i'^{(p)}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_i(k) S_i^{(p)}(t) P_{T_C}(t - kT_C - pN_C T_S) \quad (5.6)$$

$$S_i'(t) = \sum_{p=0}^{\infty} S_i'^{(p)}(t) \quad (5.7)$$

Avant étalement, la bande occupée par le signal OFDM est égale à $\frac{N_C+1}{N_C T_S}$. Ensuite, l'étalement résulte en une bande finale occupée égale à $\frac{2N+N_C-1}{N_C T_S}$. Le gain de traitement de l'étalement

vaut donc $G_T = \frac{2N+N_C-1}{N_C+1}$. La figure 5.6 illustre l'allure du spectre du signal étalé pour un utilisateur dans le cas d'un accès par MT-CDMA. Nous remarquons que les porteuses ne sont plus orthogonales.

5.2.2.5 MC-CDMA : MultiCarrier CDMA

La dernière technique d'étalement est le Multicarrier CDMA. Cette technique combine à nouveau le DS-CDMA et la mise en forme OFDM. Le nombre de porteuses est égal nécessairement à la période des codes, *i.e* $N_C = N$. Cette fois ci, pour l'utilisateur i , chaque symbole $d_i(n)$ est répété N fois. La k -ième valeur répétée est multipliée par $c_i(k)$ et module ensuite la k -ième porteuse. Ainsi, le p -ième symbole OFDM est obtenu par la modulation des N porteuses par le même symbole $d_i(p)$ multiplié par le code. Puisque $N_C = N$, la durée d'un symbole OFDM est T_S . L'espacement fréquentiel entre deux sous porteuses adjacentes est alors de $\Delta f = \frac{1}{T_S}$. Le p -ième symbole OFDM $S_i^{(p)}(t)$ est donné par la relation (5.8). Le signal total associé à l'utilisateur i est donné par la somme $S_i(t)$ (5.9).

$$S_i^{(p)}(t) = d_i(p) \sum_{k=0}^{N_C-1} c_i(k) e^{2i\pi k \Delta f t} P_{T_S}(t - pT_S) \quad (5.8)$$

$$S_i(t) = \sum_{p=0}^{\infty} S_i^{(p)}(t) \quad (5.9)$$

La durée d'un symbole OFDM est T_S ce qui signifie que la bande totale occupée par le signal étalé est $B = \frac{N_C+1}{T_S}$. Sans étalement, une mise en forme OFDM classique conduirait à une bande occupée égale à $\frac{N_C+1}{N_C T_S}$. Le gain de traitement associé à cette technique d'étalement vaut donc $G_T = N_C = N$. La figure 5.7 illustre l'allure du spectre du signal étalé pour un utilisateur dans le cas d'un accès par MC-CDMA.

Nous avons ici présenté les différentes techniques couramment utilisées pour réaliser de l'accès multiutilisateurs par étalement de spectre. Remarquons qu'une dernière technique est le **FH-CDMA** (Frequency Hopping CDMA) qui consiste, pour un utilisateur donné, à émettre sur une porteuse variant dans le temps de façon périodique.

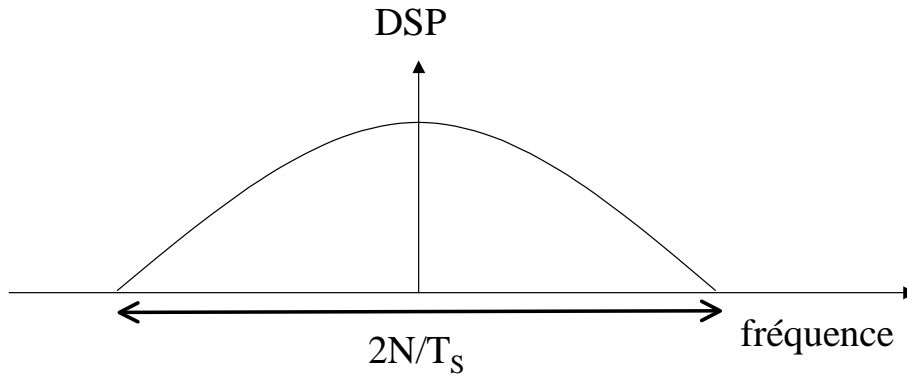


FIG. 5.4 – Allure de la DSP du signal pour le DS-CDMA

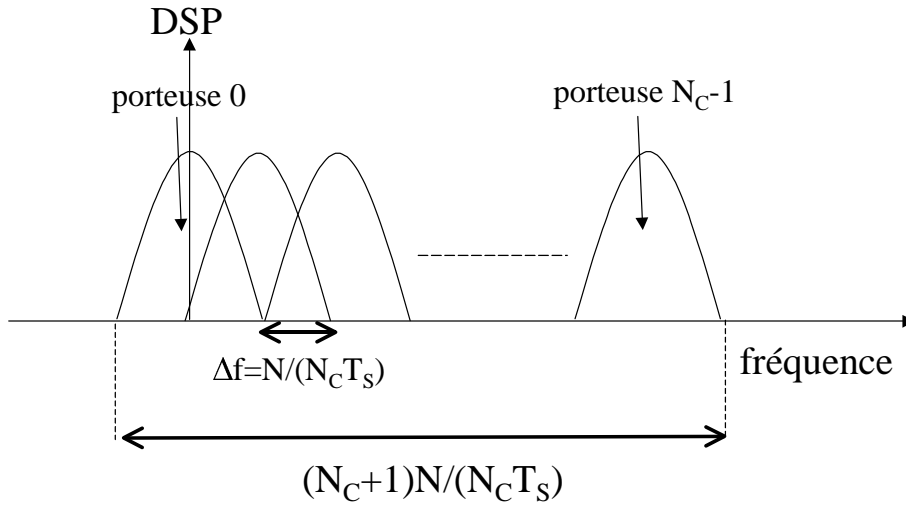


FIG. 5.5 – Allure de la DSP du signal pour le MC-DS-CDMA

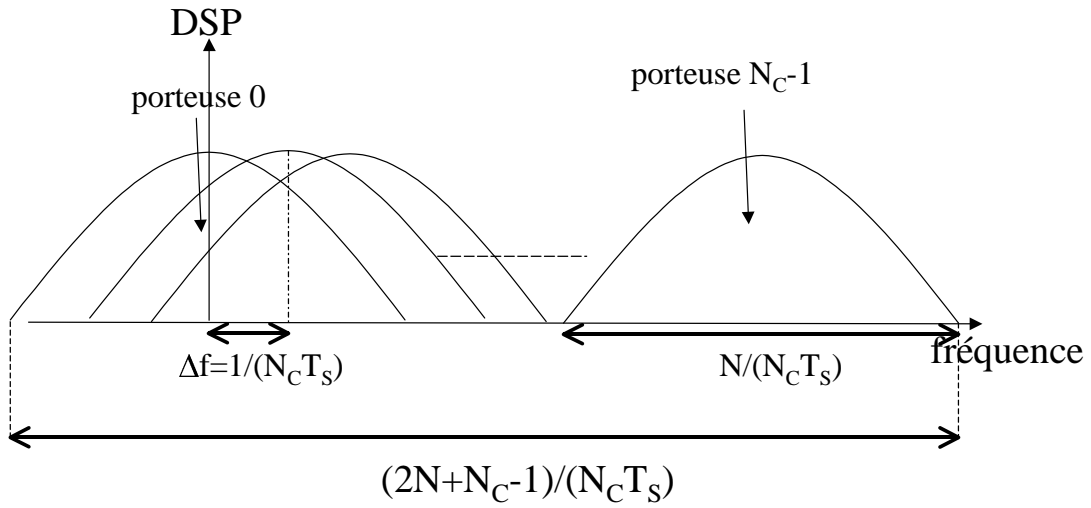


FIG. 5.6 – Allure de la DSP du signal pour le MT-CDMA

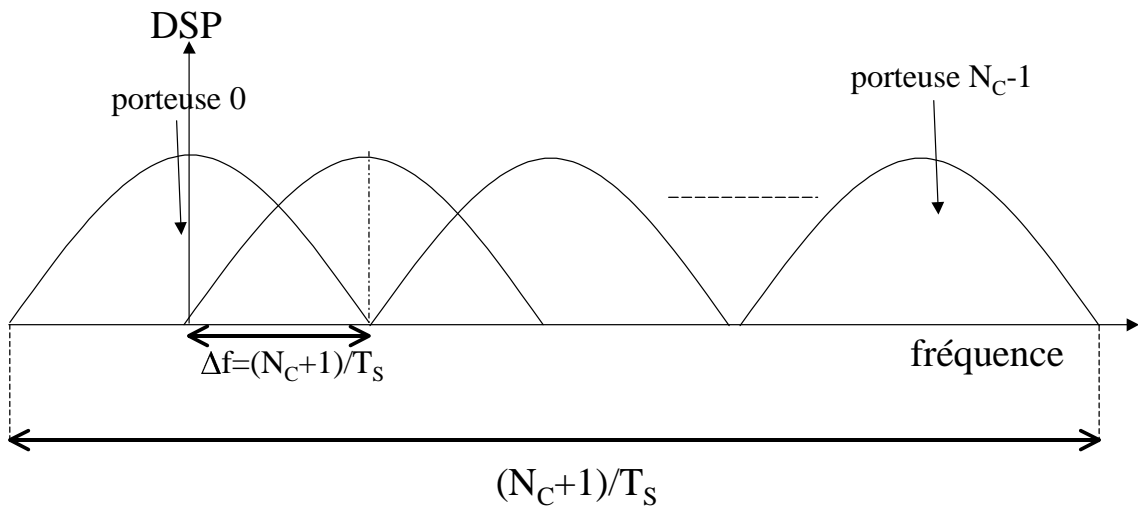


FIG. 5.7 – Allure de la DSP du signal pour le MC-CDMA

5.3 Proposition d'une famille de filtres LPTV orthogonaux

Nous venons de voir que pour réaliser un système d'accès multiple par étalement, il est nécessaire de définir un ensemble de transformations associées aux différents utilisateurs. Ces transformations se doivent de respecter trois propriétés fondamentales : le pouvoir d'étalement, l'inversibilité et l'orthogonalité. La première de ces propriétés (figure 5.3) est nécessaire afin que le signal associé à chaque utilisateur occupe l'intégralité de la bande B offerte au système. L'inversibilité est liée à la possibilité de retrouver l'information des différents utilisateurs en réception. Enfin, l'orthogonalité traduit la capacité à extraire du signal total étalé le signal associé à un utilisateur particulier. Dans les systèmes courants d'étalement de spectre que nous avons présentés, l'étalement est assuré par l'utilisation de codes orthogonaux générés avec une durée chip petite devant la durée symbole du signal à étaler. L'inversibilité est assurée par le fait que les codes utilisés sont des codes binaires dont l'inverse est le code lui-même. Enfin, l'orthogonalité des systèmes présentés est liée aux comportements des fonctions d'intercorrélation des différents codes. Cette orthogonalité peut être temporelle (DS-CDMA, MC-DS-CDMA ou MT CDMA) ou bien fréquentielle (MC-CDMA).

Nous avons mis en évidence dans le quatrième chapitre le pouvoir d'étalement d'un filtre LPTV lorsque celui-ci filtre un signal suréchantillonné par rapport à la fréquence de Shannon. Cette propriété fait des filtres LPTV un candidat potentiel pour réaliser un système d'accès multiple par étalement de spectre. Ainsi, après avoir rappelé la notion d'orthogonalité générale d'un ensemble de transformations, nous proposons une méthode pour construire un ensemble de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux suréchantillonnés.

5.3.1 Définition d'un système orthogonal

Etant donné un ensemble E et deux ensembles de P transformations $\{A_i\}$ et $\{B_i\}$ pour $0 \leq i \leq P - 1$, nous disons que ces deux familles de transformations définissent un ensemble orthogonal sur le domaine E , si la relation (5.10) est vérifiée où \bullet est la loi de composition sur E .

$$\forall x \in E, 0 \leq i, j \leq P - 1, B_j \bullet A_i(x) = \delta(i - j)x \quad (5.10)$$

Cette relation signifie d'une part que chaque transformation A_i est inversible d'inverse B_i et que la transformation B_j est orthogonale à toutes les transformations A_i pour $i \neq j$.

5.3.2 Proposition d'une famille de filtres LPTV orthogonaux

5.3.2.1 Construction d'une famille de N filtres LPTV N périodiques inversibles

Nous considérons un filtre LPTV de période N défini par ses N filtres modulateurs $T_p^{(0)}(z)$ de la figure 1.8. Pour $k \in [1 : N - 1]$, nous définissons $N - 1$ filtres LPTV par les N filtres modulateurs $\left\{ T_p^{(k)}(z) \right\}_{0 \leq p \leq N-1}$ exprimés par la relation (5.11). Si le filtre LPTV initial de filtres modulateurs $\left\{ T_p^{(0)}(z) \right\}_{0 \leq p \leq N-1}$ est inversible, alors quelque soit $k \in [1 : N - 1]$, le filtre LPTV de filtres modulateurs $\left\{ T_p^{(k)}(z) \right\}_{0 \leq p \leq N-1}$ est inversible.

$$T_p^{(k)}(z) = T_{\underline{p-k}_N}^{(0)}(z) W_N^{-k} \quad (5.11)$$

La démonstration de cette propriété découle de l'écriture matricielle des matrices modulateurs des filtres LPTV correspondants. En effet, si nous appelons $\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z)$ définie en (A.45), la matrice modulateurs du filtre LPTV de filtres modulateurs $T_p^{(k)}(z)$, il est facile de vérifier que la relation (5.11) est équivalente à la relation matricielle (5.12) où la matrice $\boldsymbol{\pi}$ que nous avons déjà rencontrée est la matrice de permutation circulaire définie par $[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(i - j - 1_N)$.

$$\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z) = \mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z) \boldsymbol{\pi}^{N-k} \quad (5.12)$$

Cette relation signifie que la matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z)$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ en réalisant une permutation circulaire sur les colonnes d'ordre k sur la droite. En utilisant ensuite l'hypothèse que le filtre LPTV initial de matrice $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ est inversible avec un filtre LPTV inverse de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{(0)}^{1,1}(z)$, il est facile de déduire de (5.12) que le filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z)$ admet un filtre LPTV inverse de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{(k)}^{1,1}(z)$ définie par (5.13).

$$\mathbf{B}_{(k)}^{1,1}(z) = \boldsymbol{\pi}^k \mathbf{B}_{(0)}^{1,1}(z) \quad (5.13)$$

5.3.2.2 Construction d'une famille de filtres LPTV orthogonale sur l'ensemble des signaux suréchantillonnés

La proposition précédente nous a fourni une méthode pour construire un ensemble de N filtres LPTV inversibles à partir d'un filtre LPTV générateur inversible. Nous allons à présent voir comment utiliser cet ensemble de filtres LPTV inversibles pour construire un ensemble de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux suréchantillonnés.

Pour cela, étant donné une fréquence d'échantillonnage f_e et un réel $b \in [0; 1]$, nous définissons $E_b^{f_e}$ comme l'ensemble des signaux numériques échantillonnés à la fréquence f_e et ayant un spectre à support fréquentiel normalisé inclu dans $[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$. Nous considérons alors la famille des N filtres construits précédemment caractérisés par les matrices modulateurs $\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z)$ et modulateurs inverse $\mathbf{B}_{(k)}^{1,1}(z)$ pour $k \in [0 : N - 1]$ et nous définissons les deux paramètres β et γ par (5.14) et (5.15).

$$\beta = \text{int}(bN) + 1 \quad (5.14)$$

$$\gamma = \text{Int}(N/\beta) \quad (5.15)$$

Avec les notations et définitions précédentes, le couple d'ensembles de filtres LPTV $\{\mathbf{A}_{(k\beta)}^{1,1}(z)\}$ et $\{\mathbf{D}_H(z)\mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(z)\}$ chacun de cardinal γ ($0 \leq k \leq \gamma - 1$) constitue un système de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble $E_b^{f_e}$ où $\mathbf{D}_H(z)$ est la matrice modulateurs diagonale associée à un filtre passe bas LIT de bande passante normalisée $[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$. D'après la définition (5.10), cela signifie que la relation (5.16) est vérifiée pour tout signal de $E_b^{f_e}$ de vecteur modulateur $\tilde{\mathbf{X}}(z)$ défini au premier chapitre par (1.40).

$$\forall (k, l) \in [0 : \gamma - 1]^2, \quad \mathbf{D}_H(e^{2i\pi f})\mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(e^{2i\pi f})\mathbf{A}_{(l\beta)}^{1,1}(e^{2i\pi f})\tilde{\mathbf{X}}(e^{2i\pi f}) = \delta(k - l)\tilde{\mathbf{X}}(e^{2i\pi f}) \quad (5.16)$$

La preuve de cette propriété est détaillée dans l'annexe E.1.

5.4 Réalisation d'un système d'accès multiutilisateurs

Dans le paragraphe précédent, nous avons proposé une méthode pour construire un ensemble de N filtres LPTV inversibles. Cet ensemble est construit à partir d'un filtre LPTV générateur inversible. Pour une fréquence d'échantillonnage f_e choisie et une période N choisie indépendamment de cette fréquence d'échantillonnage, nous avons montré qu'il était possible de construire un ensemble de γ filtres LPTV parfaitement orthogonaux au sens de la définition (5.10) sur l'ensemble des signaux suréchantillonnés à la fréquence f_e de support spectral $[-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$. Nous allons exploiter ce résultat théorique pour réaliser un système d'accès multiple à étalement spectral. Lorsque les différents utilisateurs sont synchronisés, le système proposé reste parfaitement orthogonal. Dans le cas d'une désynchronisation, l'orthogonalité est dégradée. Nous voyons l'influence du choix du filtre LPTV générique dans la dégradation de l'orthogonalité. A la lumière de cette discussion, nous choisissons deux filtres LPTV génériques dont nous caractérisons la sensibilité

à la désynchronisation. Enfin, des simulations sont réalisées pour comparer les performances en TEB de notre système par rapport à un accès multiple par étalement de type DS CDMA.

5.4.1 Présentation du système d'accès

Le système d'accès que nous réalisons est illustré par la figure 5.8. Chaque utilisateur transmet une information binaire avec un débit symbole D_S en sortie de la modulation numérique. Ces symboles sont alors suréchantillonnés par un facteur L puis filtrés par un filtre en RCS de rolloff α . En sortie du filtre RCS, la fréquence d'échantillonnage vaut LD_S . Il est alors facile de vérifier que chacun de ces signaux $x_i(n)$, échantillonné à LD_S , appartient à $E_{\frac{1+\alpha}{L}}^{LD_S}$.

En utilisant les résultats du paragraphe précédent, choisissant une période N , nous définissons les paramètres β et γ définis dans ce contexte respectivement par (5.17) et (5.18).

$$\beta = \text{int}\left(\frac{1+\alpha}{L}N\right) + 1 \quad (5.17)$$

$$\gamma = \text{Int}(N/\beta) \quad (5.18)$$

A partir d'un filtre LPTV générateur inversible de matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$, on construit l'ensemble des γ filtres LPTV du paragraphe précédent qui forment un ensemble de filtres LPTV orthogonaux sur $E_{\frac{1+\alpha}{L}}^{LD_S}$. Il est alors possible de construire le système d'accès multiple par étalement de la figure 5.8 avec un nombre d'utilisateurs maximal sans perte d'orthogonalité égal à γ . Sur la figure 5.8, $LPTV_i$ et $LPTV_i^{-1}$ sont les filtres LPTV de matrices modulateurs respectives $\mathbf{A}_{(i\beta)}^{1,1}(z)$ et $\mathbf{D}_H(z)\mathbf{B}_{(i\beta)}^{1,1}(z)$.

Remarquons que le filtre $LPTV_i$, défini par la matrice modulateurs (5.12), peut dans la pratique être décomposé en la cascade d'un modulateur fréquentiel et du filtre LPTV générateur $LPTV_0$ comme illustré par la figure 5.9. Symétriquement, le filtre LPTV inverse $LPTV_i^{-1}$, de matrice modulateurs (5.13) peut être obtenu à partir du filtre LPTV générateur inverse $LPTV_0^{-1}$ par le traitement de la figure 5.9. Cette remarque pratique nous permet de réaliser simplement le filtrage par $LPTV_i$ et $LPTV_i^{-1}$.

Notons que le gain de traitement de notre système d'accès multiple par étalement, défini au préalable comme le gain en bande occupé, vaut $\frac{L}{1+\alpha}$. Contrairement aux méthodes présentées dans le premier paragraphe de ce chapitre, le gain en traitement est indépendant de la période du système d'étalement, à savoir de la période des codes binaires dans les exemples du premier paragraphe et de la période des filtres LPTV dans notre système. De plus, notons que pour N

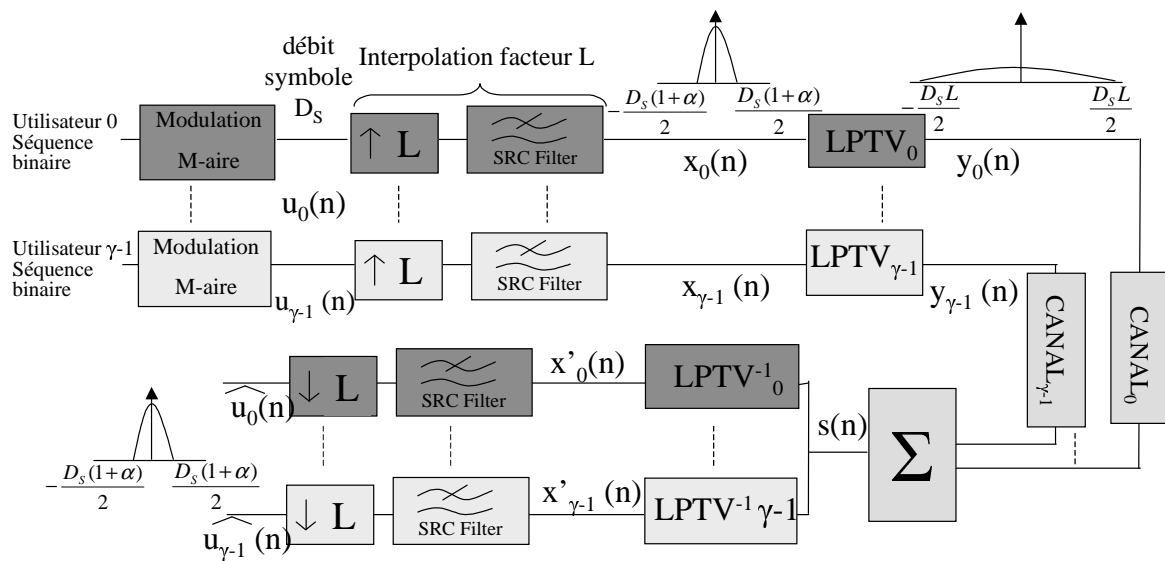


FIG. 5.8 – Réalisation du système d'accès multiple par étalement

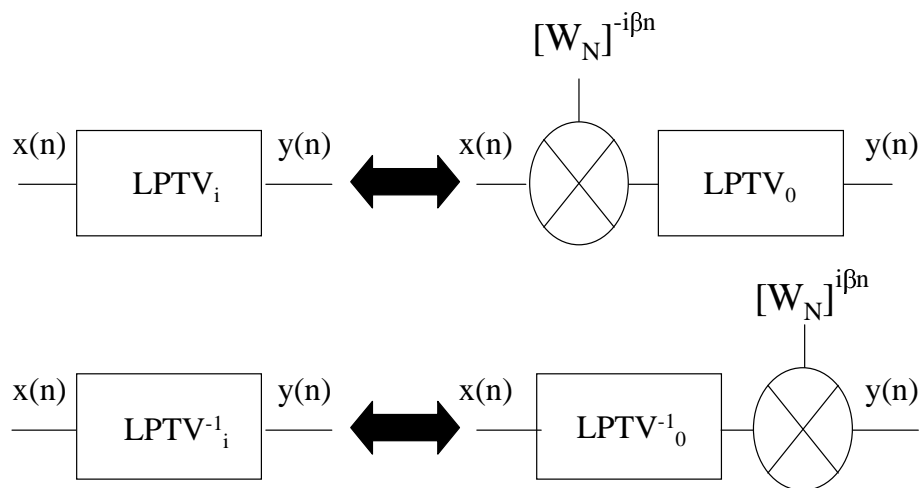


FIG. 5.9 – Réalisation pratique des filtres LPTV à partir du filtre LPTV générateur

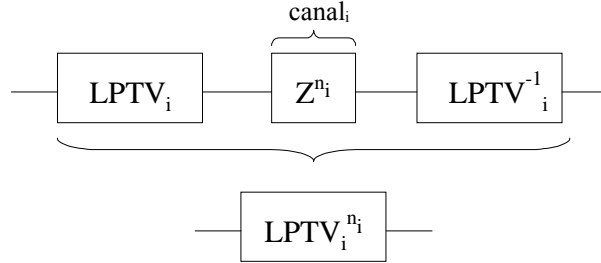


FIG. 5.10 – Modélisation LPTV d'une désynchronisation pour le i -ème utilisateur

grand, $\gamma \simeq \text{int}(L/(1 + \alpha))$. Le nombre d'utilisateurs maximal pour une bande fixée $B = LD_S$ dépend seulement du rolloff du filtre RCS α et est indépendant du filtre LPTV générateur.

Le système que nous proposons présente une orthogonalité parfaite, pour un nombre d'utilisateurs égal au maximum à γ et dans le cas où tous les utilisateurs sont synchronisés en réception. Nous allons voir qu'une désynchronisation de ces utilisateurs (i.e des canaux sur la figure 5.8 modélisés par des retards différents) entraîne une dégradation de l'orthogonalité.

5.4.2 Sensibilité du système à une désynchronisation

Pour le i -ème utilisateur, l'introduction d'un délai n_i se traduit par un canal de la forme $\text{canal}_i = z^{n_i}$. La cascade du filtre LPTV d'émission, du canal et du filtre LPTV de réception résulte en un filtre LPTV équivalent illustré par la figure 5.10. La matrice modulateurs $\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, n_i)$ de ce filtre LPTV équivalent a l'expression (5.19) où $\mathbf{D}_{n_i}(z)$ est la matrice modulateurs associée au filtre LIT de réponse fréquentielle z^{n_i} . Cette matrice est diagonale d'élément $[\mathbf{D}_{n_i}(z)]_{k,k} = W_N^{kn_i} z^{n_i}$.

$$\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, n_i) = \boldsymbol{\pi}^{i\beta} \mathbf{B}_{(0)}^{1,1}(z) \mathbf{D}_{n_i}(z) \mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z) \boldsymbol{\pi}^{N-i\beta} \quad (5.19)$$

Pour le i -ème utilisateur, dans le cas d'une désynchronisation nulle, i.e $n_i = 0$, la matrice modulateurs $\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, 0)$ vaut l'identité et la dépendance temporelle de la cascade des deux filtres LPTV est annulée résultant en une orthogonalité parfaite pour le système s'il n'existe aucune désynchronisation pour chacun des utilisateurs.

Dans le cas d'une désynchronisation pour le i -ème utilisateur, la matrice modulateurs résultante $\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, n_i)$ est celle d'un véritable filtre LPTV. D'après la représentation bifréquentielle

d'un filtre LPTV de la figure 4.1, la dépendance temporelle de ce filtre LPTV, introduite par la désynchronisation, est d'autant plus forte que les filtres modulateurs associés exprimés par $\left[\mathbf{M}_{(k)}^{1,1}(z, n_i)\right]_{p,0}$ pour $p \neq 0$ d'après la forme (4.26), ont une énergie relative forte par rapport à la composante modulateurs LIT $\left[\mathbf{M}_{(k)}^{1,1}(z, n_i)\right]_{0,0}$. La perte d'orthogonalité du système provoquée par le i -ème utilisateur est ainsi d'autant plus grande que la dépendance temporelle du filtre LPTV équivalent de matrice modulateurs $\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, n_i)$ est grande. La perte globale d'orthogonalité, pour un ensemble de γ retards $(n_0, n_1 \dots n_{\gamma-1})$ consiste à étudier la dépendance temporelle de chaque filtre LPTV de matrice $\mathbf{M}_{(i)}^{1,1}(z, n_i)$.

Mais l'expression de ces matrices (5.19) est liée au filtre LPTV générateur de matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ confrontée à une désynchronisation, la matrice $\boldsymbol{\pi}$ n'étant qu'une matrice de permutation circulaire (Figure 5.9). La robustesse aux désynchronisations du système construit à partir du filtre LPTV générateur de matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ dépend uniquement de la robustesse du filtre LPTV générateur face à une désynchronisation. Ainsi, un tel système orthogonal conserve une bonne orthogonalité malgré une désynchronisation de chacun des utilisateurs si le filtre LPTV générateur est résistant à une désynchronisation, c'est à dire si le filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{(0)}^{1,1}(z)\mathbf{D}_{n_0}(z)\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ est un filtre LPTV dont la nature variant dans le temps reste faible quelque soit la désynchronisation n_0 .

Nous allons, à la lumière de cette conclusion, proposer deux exemples de filtres LPTV générateurs qui présentent une bonne robustesse à la désynchronisation.

5.4.3 Choix d'un filtre LPTV générateur

Nous venons de mettre en évidence qu'un système d'accès multiple utilisant la construction d'une famille de filtres LPTV orthogonaux du deuxième paragraphe présentait une orthogonalité parfaite dans le cas d'une absence de désynchronisation entre les différents utilisateurs en réception. Dans le cas de désynchronisations pour chacun des utilisateurs, nous venons de voir que la perte d'orthogonalité du système est liée à la robustesse du filtre LPTV générateur face à une désynchronisation. Un choix quelconque d'un filtre LPTV inversible pour ce filtre générateur mène à un comportement catastrophique face à une désynchronisation. Nous proposons d'utiliser deux PCC particuliers comme filtre LPTV générateur : l'entrelaceur lignes/colonnes et le PCC linéaire présentés au troisième chapitre. L'effet d'une désynchronisation pour ces deux PCC est étudié.

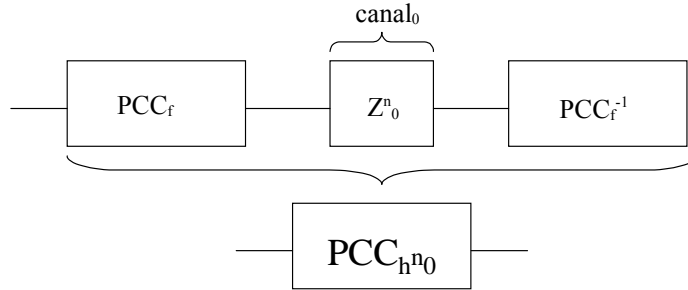


FIG. 5.11 – Modélisation PCC équivalent dans le cas d'une désynchronisation pour le PCC générateur

5.4.3.1 Choix de l'entrelaceur lignes/colonnes comme filtre LPTV générateur

Nous considérons l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes présenté sur la figure 3.1. Nous avons vu que cet entrelaceur est un PCC de fonction $f(n)$ d'expression analytique (5.20) où les fonctions $c_{P,Q}(n)$ et $b_{P,Q}(n)$ sont définies par la relation (5.21).

$$f(n) = -(Q - 1)c_{P,Q}(n) + (P - 1)b_{P,Q}(n) \quad (5.20)$$

$$n = Pb_{P,Q}(n) + c_{P,Q}(n) \text{ avec } c_{P,Q}(n) = \underline{n}_P \text{ et } b_{P,Q}(n) = \overline{n}^P_Q \quad (5.21)$$

Pour étudier la robustesse de ce PCC face à une désynchronisation de n_0 , il s'agit d'étudier le PCC équivalent à la cascade illustrée par la figure 5.11 dans le cas d'une désynchronisation de n_0 . Sur cette figure, PCC_f , PCC_f^{-1} et $PCC_{h^{n_0}}$ désignent respectivement le PCC de fonction f (5.20), le PCC inverse et le PCC équivalent à la cascade désynchronisée.

Pour obtenir l'expression de h^{n_0} , nous utilisons la relation de cascade de deux PCC établie en (3.19). Il est alors possible de montrer que la fonction h^{n_0} du PCC équivalent a l'expression analytique suivante (5.22) où $\theta_{n_0}(n)$ et $\theta'_{n_0}(n)$ sont deux fonctions de n à valeur dans $\{0, 1\}$.

$$h^{n_0}(n) = f(n_0) - n_0 + \theta_{n_0}(n)(PQ - 1) - \theta'_{n_0}(n)(P - 1)Q \quad (5.22)$$

Les calculs pour arriver à ce résultat ainsi que les expressions exactes des fonctions $\theta_{n_0}(n)$ et $\theta'_{n_0}(n)$ sont détaillés dans l'annexe E.2. Pour visualiser les valeurs de $\theta_{n_0}(n)$ et $\theta'_{n_0}(n)$, en fonction

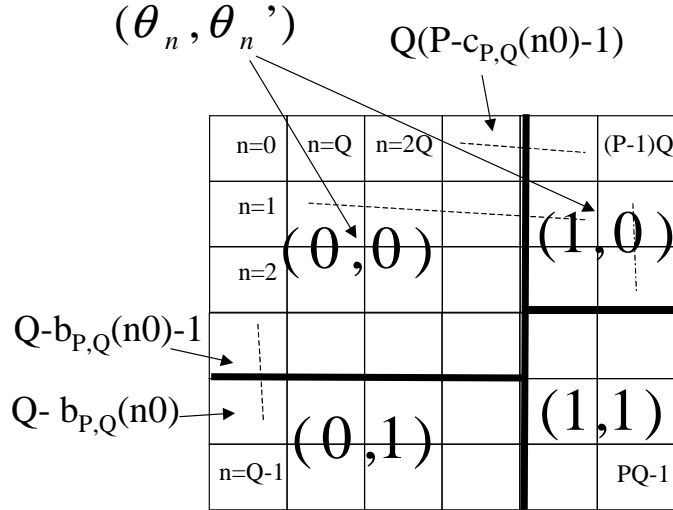


FIG. 5.12 – Valeurs des fonctions $\theta_{n_0}(n)$ et $\theta'_{n_0}(n)$ en fonction de n sur une période

de $n \in [0 : N - 1]$, nous proposons la visualisation matricielle de la figure 5.12. Nous écrivons n de manière croissante en remplissant la matrice de taille $Q \times P$ colonne par colonne. La matrice peut se découper dans le cas général en 4 zones selon les 4 valeurs du couple $(\theta_{n_0}(n), \theta'_{n_0}(n))$. La conséquence de cette distribution des fonctions $\theta_{n_0}(n)$ et $\theta'_{n_0}(n)$ est que pour une valeur de retard fixée n_0 , la fonction $h^{n_0}(n)$ ne peut prendre que 4 valeurs. Cette fonction, périodique de période N , est une fonction constante par intervalle. Le nombre de sauts (changements de valeurs de $h^{n_0}(n)$) sur une période est égal au maximum à $2P$ quelque soit la valeur du retard n_0 .

En conclusion, en l'absence de désynchronisation, la fonction PCC équivalente $h^0(n)$ est nulle résultant en un PCC équivalent LIT de fonction nulle. Dans le cas d'une désynchronisation n_0 , la fonction $h^{n_0}(n)$ du PCC équivalent est une fonction régulière constante par morceau, le nombre de morceaux étant égal au maximum à $2P$. La figure 5.13 illustre la fonction $h^{n_0}(n)$ pour le cas particulier où $Q = 3$, $P = 7$, et $n_0 = 4$.

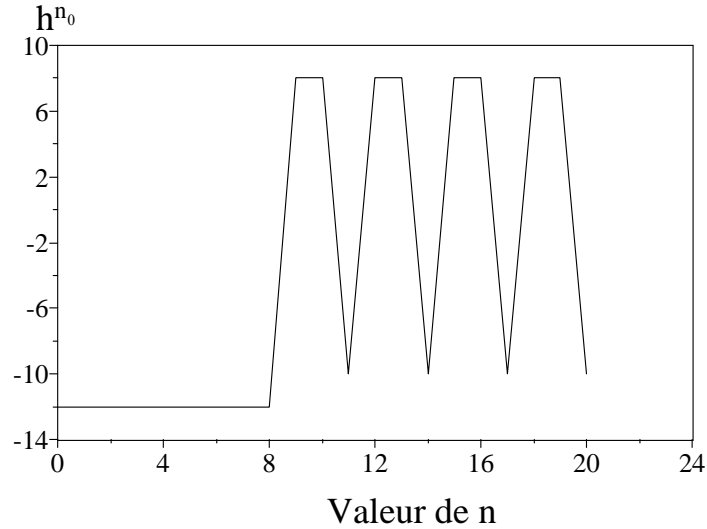


FIG. 5.13 – Fonction PCC $h^{n_0}(n)$ pour l'entrelaceur lignes/colonnes ($Q = 3$, $P = 7$, $n_0 = 4$)

5.4.3.2 Choix du PCC linéaire comme filtre LPTV générateur

Nous choisissons comme second filtre LPTV générateur le PCC linéaire que nous avons défini dans le troisième chapitre par la fonction PCC N périodique (5.23) dont nous avons montré qu'il était inversible si et seulement si N était premier avec $k + 1$.

$$f(n) = -k\underline{n}_N \quad (5.23)$$

Comme dans le cas précédent, nous cherchons à déterminer la fonction du PCC équivalent de la figure 5.11, lorsque sont mis en cascade un PCC linéaire et son PCC inverse désynchronisé de n_0 . Nous montrons dans l'annexe E.3 que la fonction PCC équivalente $h^{n_0}(n)$ a l'expression suivante (5.24). L'entier P est le coefficient de Bézout unique inférieur à N associé à $(k + 1)$, c'est à dire qui vérifie $(k + 1)P + NN' = 1$ où N' est un entier relatif.

$$h^{n_0}(n) = -(k + 1)n_0 + kN \left[\overline{Pn + n_0}^N - \overline{Pn}^N \right] \quad (5.24)$$

Il est facile de vérifier que pour une désynchronisation fixée n_0 , la fonction $h^{n_0}(n)$ ne peut avoir que deux valeurs : $-(k + 1)n_0$ ou $kN - (k + 1)n_0$. Plus précisément, on montre dans l'annexe E.3 que sur une période N , $h^{n_0}(n)$ atteint n_0 fois la valeur $kN - (k + 1)n_0$. Ainsi, le

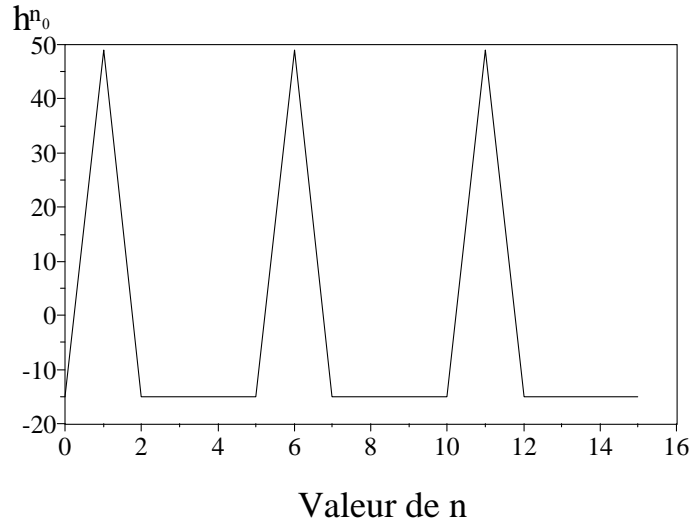


FIG. 5.14 – Fonction PCC $h^{n_0}(n)$ pour le PCC linéaire ($N = 16$, $k = 4$, $n_0 = 3$)

PCC équivalent est une fonction à deux valeurs ayant au maximum $2n_0$ sauts dans une période. La figure 5.14 illustre la fonction $h^{n_0}(n)$ pour le cas particulier où $N = 16$, $k = 4$ et $n_0 = 3$ pour lequel le coefficient de Bézout P vaut 13.

Pour les deux PCC proposés, la régularité de la fonction PCC équivalent dans le cas d'une désynchronisation indique une bonne robustesse pour ces deux PCC face à une désynchronisation. En effet, les filtres modulateurs pour un PCC sont obtenus (3.12) par la TFD des $z^{-h^{n_0}(n)}$. Ainsi, plus la fonction $h^{n_0}(n)$ est régulière, plus les filtres modulateurs associés $T_p(z)$ (pour $p \neq 0$) sont de faible énergie et plus faible est la nature LPTV de ce PCC équivalent. Cette remarque fait de ces deux PCC deux bons candidats de filtres LPTV générateurs pour construire un système d'accès multiple de la figure 5.8.

5.4.4 Performances de notre système

Dans cette dernière partie, nous proposons de réaliser le système d'accès multiple de la figure 5.8 en choisissant comme filtre LPTV générateur, $LPTV_0$, l'entrelaceur lignes/colonnes et le PCC linéaire. Remarquons que par la suite, nous utiliserons systématiquement une modulation numérique binaire (BPSK). Dans un premier temps, nous vérifions la capacité d'étalement des filtres

LPTV d'accès de la figure 5.8 en calculant la DSP du signal en sortie du filtrage LPTV. Nous désirons ensuite illustrer les bonnes propriétés d'orthogonalité du système ainsi construit. Pour cela, nous proposons deux méthodes pour quantifier la perte d'orthogonalité dans le cas d'utilisateurs désynchronisés. L'orthogonalité de notre système étant de nature fréquentielle puisque le signal pour chaque utilisateur est récupéré en réception par un filtre passe bas, la première méthode consiste à calculer la puissance relative restée en bande dans le cas d'une désynchronisation. La seconde méthode consiste à simuler les performances de notre système dans le cas de désynchronisations aléatoires en terme de TEB en fonction du nombre d'utilisateurs. Ces performances sont comparées à celles d'un système d'accès DS-CDMA.

5.4.4.1 Capacité d'étalement des filtres LPTV générateurs choisis

Nous proposons deux systèmes d'accès multiple de la figure 5.8 construits respectivement à partir de l'entrelaceur ligne/colonne et d'un PCC linéaire.

5.4.4.1-a Cas de l'entrelaceur ligne/colonnes

Les paramètres choisis sont les suivants. Le coefficient de suréchantillonnage est choisi égal à $L = 8$. Le rolloff du filtre RCS est choisi égal à $\alpha = 0.4$. Nous choisissons, pour l'entrelaceur lignes/colonnes de la figure 3.1, $(P, Q) = (16, 12)$ soit une période $N = 192$. Notons que pour le cas de l'entrelaceur lignes/colonnes, il faut choisir $Q > L$ afin que ce PCC sépare les échantillons d'un même symbole. Les paramètres β et γ d'expressions (5.17) et (5.18) valent alors respectivement (5.25) et (5.26).

$$\beta = \text{int}\left(\frac{1+\alpha}{L}N\right) + 1 = 34 \quad (5.25)$$

$$\gamma = \text{Int}(N/\beta) = 5 \quad (5.26)$$

Le nombre d'utilisateurs maximal sans perte d'orthogonalité pour ce système est $\gamma = 9$. La figure 5.15 illustre, pour l'entrelaceur lignes/colonnes, la DSP du signal du cinquième utilisateur avant étalement (DSP de $x_4(n)$) et après étalement (DSP de $y_4(n)$). La figure 5.16 illustre la DSP du signal total étalé $s(n)$. Les DSP sont calculées sur des blocs de longueur égale à 8 fois la période du PCC. On remarque que l'étalement par l'entrelaceur lignes/colonnes résulte en un étalement sous la forme de P pics. Cet étalement n'est pas régulier pour un seul utilisateur, mais on constate sur la figure 5.16 que le signal total $s(n)$ présente une DSP étalée régulièrement sur toute la bande. Notons que l'influence du paramètre P (et donc de la période du PCC), pour

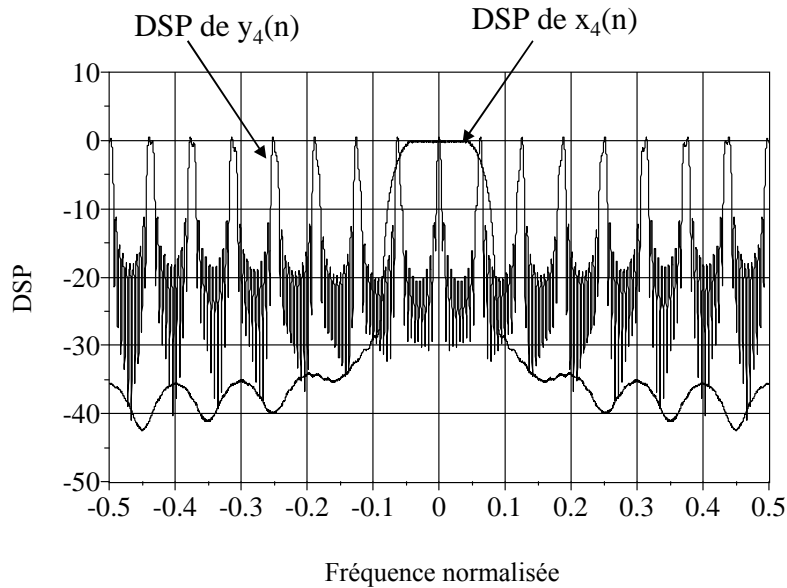


FIG. 5.15 – DSP de $x_4(n)$ et $y_4(n)$ pour l'entrelaceur lignes colonnes $((P, Q) = (16, 12))$

un facteur d'échantillonnage fixé, est d'augmenter le nombre de ces pics sur la bande si l'on augmente P à L fixé.

5.4.4.1-b Cas du PCC linéaire

Pour le PCC linéaire, nous choisissons de nouveau un rolloff $\alpha = 0.4$. Nous choisissons la même période $N = 192$ que pour l'entrelaceur lignes/colonnes ainsi qu'un facteur $k = 10$ (ce qui assure l'inversibilité car 11 est premier avec 192). Notons que pour le cas du PCC linéaire, il faut choisir un paramètre $k > L$ pour séparer les échantillons d'un même symbole. Les paramètres β et γ sont identiques au cas de l'entrelaceur lignes/colonnes. Nous réalisons les simulations par itération sur des blocs de symboles dont la taille est multiple de la période du PCC linéaire ce qui nous permet d'appliquer le résultat obtenu dans le troisième chapitre sur les PCC modulo puisque le PCC linéaire a une composante convolutionnelle non nulle.

La figure 5.17 illustre, pour le PCC linéaire, la DSP du signal du cinquième utilisateur avant étalement (DSP de $x_4(n)$) et après étalement (DSP de $y_4(n)$). La figure 5.18 illustre la DSP du signal total étalé ($s(n)$). On remarque que l'étalement par le PCC linéaire résulte à nouveau en un étalement sous forme de pics. L'évaluation du nombre de ces pics nous a donné un nombre de pics

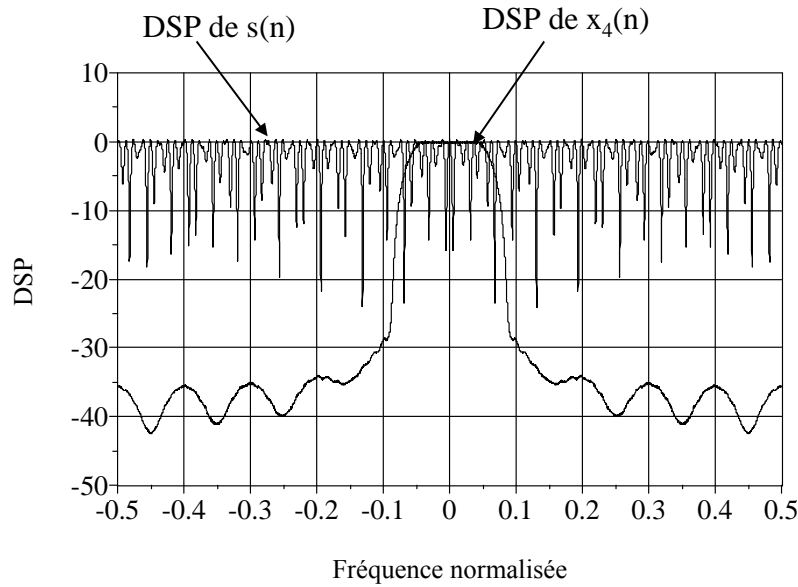


FIG. 5.16 – DSP de $x_4(n)$ et $s(n)$ pour l'entrelaceur lignes colonnes $((P, Q) = (16, 12))$

principaux de l'ordre de la période du PCC linéaire. Comme dans le cas précédent, l'influence de la période pour un facteur d'échantillonnage fixé, est de fixer le nombre de ces pics sur la bande. On remarque à nouveau que le signal correspondant à la somme des signaux étalés occupe la bande d'étalement de façon continue.

Pour expliquer la forme d'étalement sous forme de pics de ces deux PCC, il faudrait calculer les filtres modulateurs associés à ces PCC et utiliser la représentation bifréquentielle (Figure 4.2) de l'effet d'un filtre LPTV sur le spectre d'entrée.

Notons seulement que la qualité d'étalement d'un entrelaceur Q lignes/ P colonnes semble comparable à la qualité d'étalement d'un PCC linéaire de période $N = P$. Pour vérifier qualitativement cela, nous réalisons à nouveau le système de la figure 5.8 avec un PCC linéaire. Nous choisissons une période $N = 16$ égale au nombre de colonnes de l'entrelaceur lignes/colonnes précédent. Avec le même facteur de suréchantillonnage $L = 8$ et le même rolloff $\alpha = 0.4$ que dans la simulation de l'entrelaceur lignes/colonnes, le calcul de γ nous donne un même nombre $\gamma = 5$ d'utilisateurs maximal sans perte d'orthogonalité. La figure 5.19 illustre, pour ce nouveau PCC linéaire de période 16, la DSP du signal du cinquième utilisateur avant étalement (DSP de

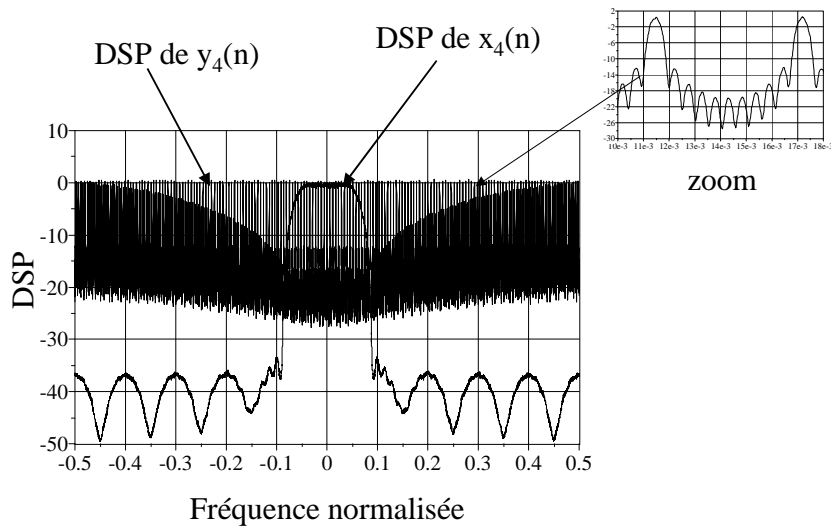


FIG. 5.17 – DSP de $x_4(n)$ et $y_4(n)$ pour le PCC linéaire ($N = 192, k = 10$)

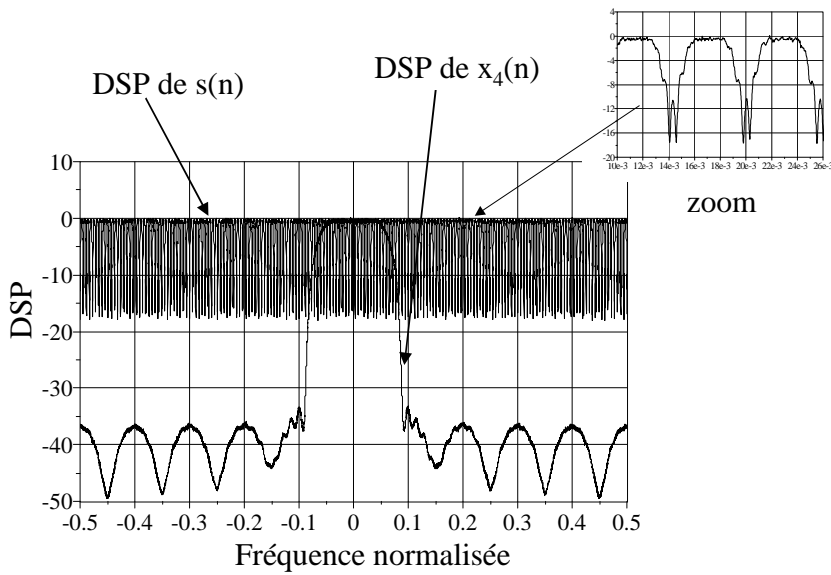


FIG. 5.18 – DSP de $x_4(n)$ et $s(n)$ pour le PCC linéaire ($N = 192, k = 10$)

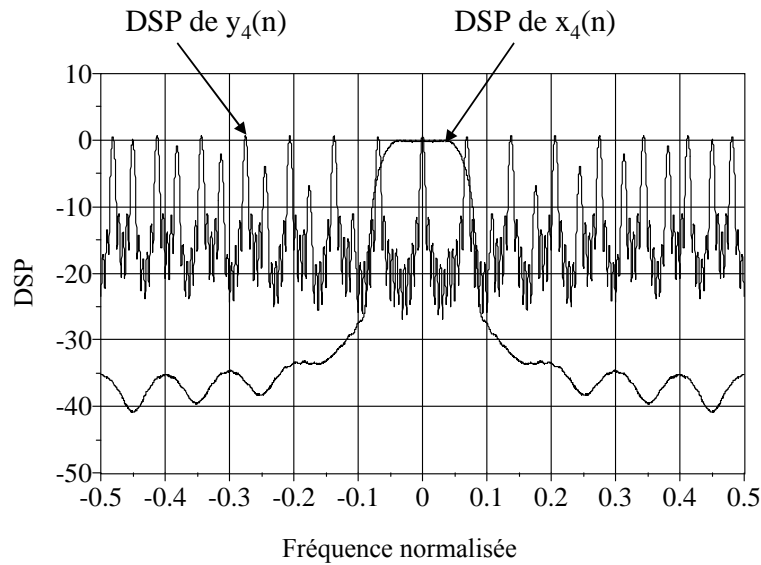


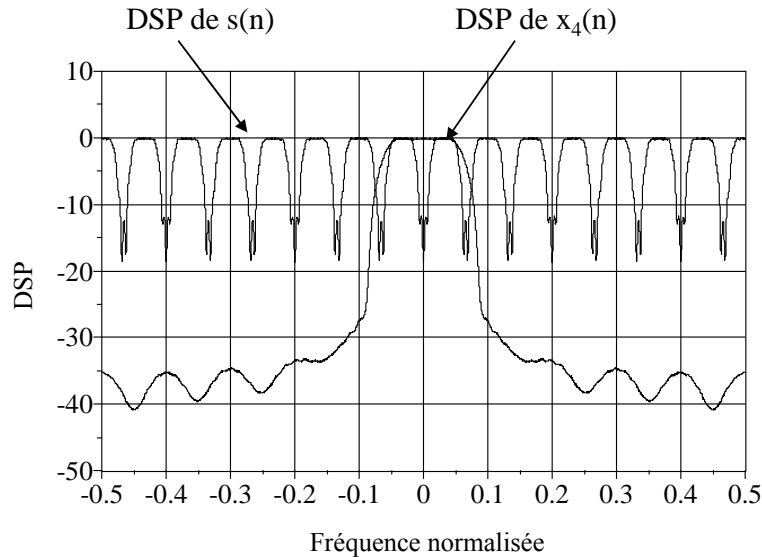
FIG. 5.19 – DSP de $x_4(n)$ et $y_4(n)$ pour le PCC linéaire ($N = 16, k = 10$)

$x_4(n)$) et après étalement (DSP de $y_4(n)$). La figure 5.20 illustre la DSP du signal total étalé ($s(n)$). En comparant les figures 5.15 et 5.19, nous vérifions que le comportement d'étalement d'un entrelaceur Q lignes/ P colonnes semble comparable à celui d'un PCC linéaire de période P pour lequel le nombre de pics principaux dans l'étalement vaut $P = 16$. Pour essayer d'expliquer ce résultat, il est intéressant d'observer la fonction PCC de l'entrelaceur lignes/colonnes (5.20). On remarque que celle-ci peut être rapprochée d'un PCC linéaire (5.23) de paramètre $k = Q - 1$ et de période P . Le second terme dans cette expression de la fonction PCC est en fait un terme qui permet de rendre bloc le PCC obtenu sur des blocs de taille $N = PQ$. Nous utiliserons par la suite cette remarque en veillant à comparer les entrelaceurs Q lignes/ P colonnes avec des PCC linéaires de période P .

5.4.4.2 Evaluation de la perte d'orthogonalité dans le cas de liaisons désynchronisées

5.4.4.2-a Calcul de la puissance en bande

Sur la figure 5.8, en réception, le signal associé à l'utilisateur i est récupéré par filtrage LPTV par le filtre $LPTV_i^{-1}$ et par filtrage passe bas par un filtre RCS de bande passante $\frac{1+\alpha}{2}D_S$. Ainsi,

FIG. 5.20 – DSP de $x_4(n)$ et $s(n)$ pour le PCC linéaire ($N = 16, k = 10$)

l'orthogonalité de notre système est de nature fréquentielle. En effet, les signaux associés aux différents utilisateurs sont séparés par filtrage passe bas. En absence de désynchronisation pour chacun des utilisateurs, le récepteur associé à l'utilisateur i récupère en sortie du filtre passe bas de réception uniquement le signal émis par l'utilisateur i .

Si l'on s'intéresse à un utilisateur i , dans le cas d'une désynchronisation pour cet utilisateur, nous avons vu que la cascade de la figure 5.10 était équivalente à un filtre LPTV. Ainsi, en sortie du filtre passe bas associé au i ème filtre de réception, seule la partie du signal dont le spectre reste dans la bande $[-\frac{1+\alpha}{2}D_S; \frac{1+\alpha}{2}D_S]$ est récupérée. La puissance du signal qui a été étalée hors de cette bande par le filtre LPTV équivalent de la figure 5.10 est envoyée dans les autres bandes et constitue de la puissance qui va interférer dans les branches de réception associées aux autres utilisateurs, impliquant une perte partielle de l'orthogonalité fréquentielle du système. Ainsi, pour un utilisateur donné avec une désynchronisation donnée, la partie de sa puissance qui va contribuer à l'interférence interutilisateurs est égale à la puissance hors bande en sortie du filtre LPTV équivalent de la figure 5.10. Nous illustrons ce phénomène par la figure 5.21 où $PCC_{h^{n_0}}$ est le PCC équivalent de la figure 5.11 lorsque le canal est modélisé par un délai n_0 et où $x_0(n)$

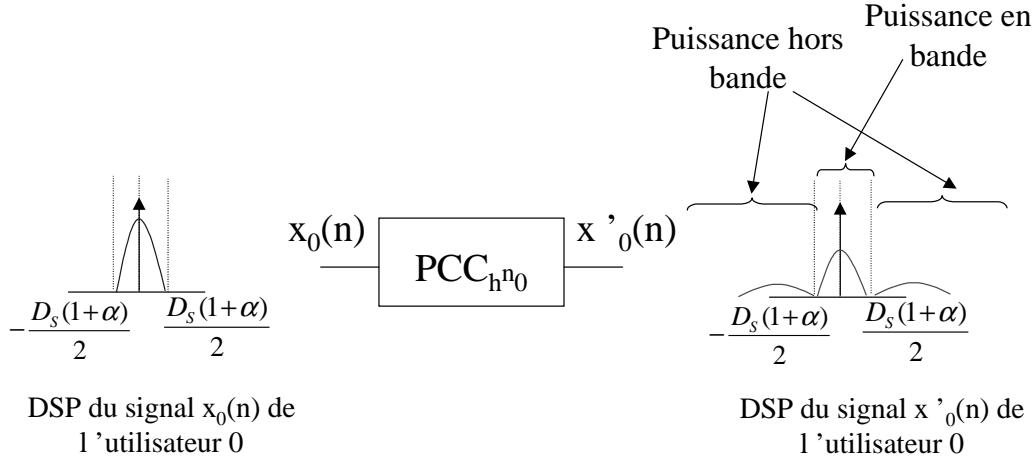


FIG. 5.21 – Illustration de l'effet d'étalement par le PCC équivalent dans le cas d'une désynchronisation

et $x'_0(n)$ sont les signaux mentionnés sur la figure 5.8. En l'absence de désynchronisation, la puissance est uniquement en bande. La puissance hors bande apparaît avec la désynchronisation.

Nous proposons donc pour un utilisateur donné seul, de calculer en fonction de la désynchronisation la puissance relative en sortie du filtre passe bas de réception dans la branche associée à cet utilisateur. Plus celle ci est grande, moins est grande l'intérférence interutilisateurs provoquée par l'utilisateur vis à vis du reste du système. Pour cela, nous réalisons à nouveau le système de la figure 5.10 avec les paramètres suivants en utilisant l'entrelaceur lignes/colonnes et le PCC linéaire.

Entrelaceur lignes/colonnes

Nous choisissons l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes avec $(P, Q) = (32, 16)$ et un rolloff égal à $\alpha = 0.4$ ainsi qu'un facteur de suréchantillonnage $L = 12$. La période de cet entrelaceur vaut donc $N = 512$ et les paramètres β et γ valent alors respectivement (5.27) et (5.28).

$$\beta = \text{int}\left(\frac{1+\alpha}{L}N\right) + 1 = 60 \quad (5.27)$$

$$\gamma = \text{Int}(N/\beta) = 8 \quad (5.28)$$

La figure 5.22 illustre la puissance relative restant en bande en sortie du filtre passe bas pour l'utilisateur 0 en fonction de la désynchronisation pour cet utilisateur. Nous remarquons que la

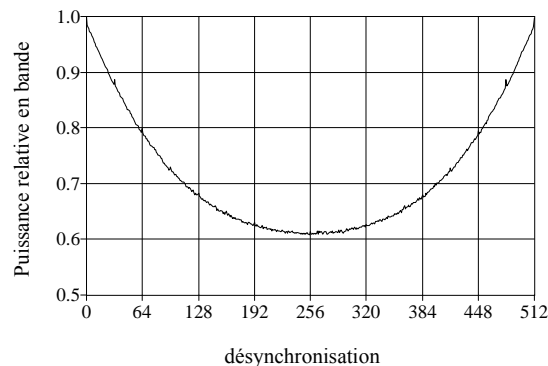


FIG. 5.22 – Puissance relative en sortie du filtre RCS de réception en fonction de la désynchronisation pour l’entrelaceur lignes/ colonnes.

puissance hors bande est d’autant plus grande que la désynchronisation est grande avec une symétrie autour d’une désynchronisation égale à une moitié de période. Même dans le pire cas, c’est à dire une désynchronisation d’une demi période, la puissance hors bande est encore inférieure à 40% de la puissance émise par l’utilisateur. Ce résultat signifie que quelque soit la désynchronisation d’un utilisateur, la contribution en puissance de cet utilisateur dans l’interférence multiutilisateurs est inférieure à 40% de la puissance émise par cet utilisateur.

PCC linéaire

Afin de comparer la résistance à la désynchronisation du PCC linéaire avec celle de l’entrelaceur lignes/colonnes précédent, nous choisissons un PCC linéaire de période $N = P = 32$ conformément à la remarque du paragraphe précédent ainsi qu’un même coefficient de suréchantillonnage $L = 12$. Le calcul de γ nous donne à nouveau le même nombre d’utilisateurs maximal $\gamma = 8$ pour ce système. Nous choisissons un coefficient du PCC linéaire $k = 16$. La figure 5.23 illustre la puissance relative restant en sortie du filtre passe bas pour l’utilisateur 0 en fonction de la désynchronisation. L’allure de la courbe est semblable à celle de la figure 5.22. De nouveau, la puissance hors bande est d’autant plus grande que la désynchronisation est grande avec une symétrie autour d’une désynchronisation égale à une moitié de période. Par contre, dans le pire cas, correspondant toujours à une désynchronisation d’une demi période, la puissance hors bande atteint 50% la puissance émise par l’utilisateur. Ce résultat signifie que quelque soit la désynchronisation d’un utilisateur, la contribution en puissance de cet utilisateur dans l’interférence

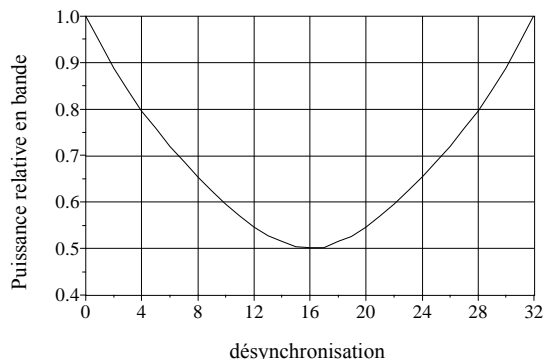


FIG. 5.23 – Puissance en bande relative en fonction de la désynchronisation pour le PCC linéaire

multiutilisateur est inférieure à 50% de la puissance émise par cet utilisateur.

Afin de comparer sur une même figure les profils de puissance en bande des deux PCC, les périodes n'étant pas les mêmes, nous ramenons les deux courbes avec en abscisse le rapport entre la désynchronisation et la période. Nous obtenons alors la figure 5.24. Nous remarquons que la pente de la courbe de la puissance en bande est semblable pour les deux PCC pour des valeurs relatives de désynchronisation faibles. La différence entre les deux PCC est que l'entrelaceur lignes/colonnes a une puissance hors bande plus faible pour les valeurs de désynchronisation proches du pire cas, à savoir une demi période. La puissance moyenne relative hors bande vaut 31% et 28% respectivement pour le PCC linéaire et l'entrelaceur lignes/colonnes. Ce résultat laisse supposer que l'entrelaceur lignes/colonnes présente globalement une interférence multi-utilisateurs légèrement plus faible que le PCC linéaire. Nous allons à présent vérifier ce résultat par l'évaluation des performances en TEB de nos systèmes en fonction du nombre d'utilisateurs.

5.4.4.2-b Simulation des performances en TEB en fonction du nombre d'utilisateurs

Nous venons de proposer une première méthode pour quantifier la perte d'orthogonalité fréquentielle du système d'accès multiple de la figure 5.10 construit à partir du PCC linéaire ou de l'entrelaceur lignes/colonnes. A présent, nous proposons de quantifier cette perte d'orthogonalité par des simulations de performances en TEB pour notre système en fonction du nombre d'utilisateurs.

Nous choisissons comme facteur de suréchantillonnage $L = 31$. Le facteur de rolloff est à

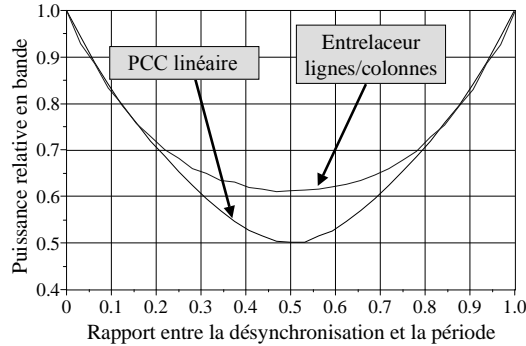


FIG. 5.24 – Comparaison des puissances en bande pour les deux PCC générateurs

nouveau choisi égal à $\alpha = 0.4$. Nous allons comparer les performances avec celles d'un accès de type DS-CDMA de gain de traitement égal à L . Les paramètres pour ces trois systèmes sont les suivants.

Entrelaceur lignes/colonnes

Pour l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes, nous choisissons $(Q, P) = (32, 128)$ soit une période pour cet entrelaceur égale à $N = 4096$. Les facteurs β et γ valent alors respectivement (5.29) et (5.30).

$$\beta = \text{int}\left(\frac{1 + \alpha}{L}N\right) + 1 = 185 \quad (5.29)$$

$$\gamma = \text{Int}(N/\beta) = 22 \quad (5.30)$$

Le nombre d'utilisateurs maximal sans perte d'orthogonalité vaut donc $\gamma = 22$. Nous supposons que l'utilisateur 0 est synchronisé en réception. Les autres utilisateurs subissent une désynchronisation aléatoire suivant une loi uniformément répartie sur une période soit dans $[0 : 4095]$. Le TEB pour l'utilisateur 0 est alors calculé pour des séquences de 10000 bits. Ce calcul est réitéré 1000 fois, une nouvelle distribution des retards étant alors générée à chaque itération.

PCC linéaire

Pour le PCC linéaire, conformément aux remarques dans la première partie de ce paragraphe, nous choisissons une période égale à 128 et un facteur $k = 32$. Les calculs de β et γ correspondant nous donnent une valeur de $\gamma = 21$.

Nous supposons que l'utilisateur 0 est synchronisé en réception. Les autres utilisateurs subissent une désynchronisation aléatoire suivant une loi uniformément répartie dans une période soit $[0 : 127]$. Le TEB pour l'utilisateur 0 est alors calculé pour des séquences de 10000 bits. Ce calcul est réitéré 1000 fois, une nouvelle distribution des retards étant alors générée à chaque itération.

Notons qu'il est possible de réaliser le système d'accès de la figure 5.8 pour un nombre d'utilisateurs supérieur à γ . En effet, pour un nombre d'utilisateurs γ' supérieur au nombre d'utilisateurs sans perte d'orthogonalité γ , nous utilisons la famille des filtres LPTV de matrices modulateurs $\mathbf{A}_{ka}^{1,1}(z)$ définies en (5.12) et de filtres LPTV inverses de matrices modulateurs $\mathbf{B}_{ka}^{1,1}(z)$ définies en (5.13) avec $a = \text{int}(\frac{N}{\gamma'})$ et $k \in [0 : \gamma' - 1]$.

Accès DS-CDMA

Afin de comparer les performances de notre système, nous simulons les performances d'un accès multiutilisateurs avec étalement basé sur le DS-CDMA. Nous choisissons une famille de codes de Gold de longueur égale à $L = 31$. Les deux polynômes générateurs [65] utilisés pour générer la famille de L codes sont les polynômes [2 5] et [2 3 4 5]. L'utilisateur 0 est synchronisé en réception. Les autres utilisateurs sont désynchronisés aléatoirement selon une loi uniformément répartie dans l'intervalle $[0 : L - 1]$. Le TEB pour l'utilisateur 0 est alors calculé pour des séquences de 10000 bits. Ce calcul est réitéré 1000 fois, une nouvelle distribution des retards étant alors générée à chaque itération.

La figure 5.25 illustre les performances en TEB pour les trois systèmes en fonction du nombre d'utilisateurs. Remarquons qu'aucun bruit n'est rajouté sur le canal, les pertes en TEB sont dues exclusivement aux interférences multiutilisateurs.

En premier commentaire sur cette courbe, nous remarquons que le système basé sur les filtres LPTV orthogonaux présente des performances en terme de TEB en fonction du nombre d'utilisateurs bien meilleures que le système basé sur le DS-CDMA. Nous en concluons que notre système offre une interférence multiutilisateurs bien plus faible que le système d'accès DS-CDMA.

En ce qui concerne la comparaison entre les deux PCC générateurs, il semble que le système utilisant l'entrelaceur lignes/colonnes présente un TEB variant très peu jusqu'au nombre d'utilisateurs $\gamma = 21$. Rappelons que cette valeur représente le nombre maximal d'utilisateurs sans perte d'orthogonalité en l'absence de désynchronisation. La courbe de TEB est régulièrement croissante en échelle logarithmique pour le PCC linéaire.

Pour un nombre d'utilisateurs supérieur à γ , les performances pour les deux PCC générateurs

sont semblables. Pour un nombre d'utilisateurs inférieur à γ , le système basé sur l'entrelaceur lignes/colonnes semble présenter une plus faible interférence multiutilisateurs que le système basé sur le PCC linéaire. Cela confirme le résultat précédent (Figure 5.24). Nous ne savons expliquer l'allure des courbes pour de probabilités d'erreur inférieures à 10^{-5} où le PCC linéaire présente des performances en TEB meilleures. Il faudrait refaire des simulations pour ces TEB très faibles sur un plus grand nombre d'itérations.

En conclusion, notre système utilisant les PCC générateurs lignes/colonnes et linéaires affiche une bien plus faible interférence multiutilisateurs que le système basé sur le CDMA. Néanmoins, il est nécessaire de nuancer ce résultat. En effet, nous n'avons pas encore étudié les performances de notre système dans le cas de canaux multitrajets. Nous pouvons seulement conclure, pour l'instant, que notre système est un candidat potentiel pour réaliser de l'accès multiple par étalement pour des canaux sans multitrajet, comme par exemple un canal satellite où le trajet direct est prépondérant devant les trajets secondaires.

Remarquons qu'il serait utile de comparer notre système en terme d'interférences multiutilisateurs avec les autres solutions d'accès multiple présentées dans le premier paragraphe de ce chapitre.

Enfin, il est utile de revenir sur l'intérêt de la décomposition de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes (chapitre 3) en la cascade de deux PCC de période P et Q . Pour ce système d'accès multiple par étalement de spectre [66], nous avons proposé une méthode pour réaliser la synchronisation de l'entrelaceur inverse en réception [67] lorsqu'est utilisé l'entrelaceur lignes/colonnes comme LPTV générateur. Cette technique repose sur la forme particulière de la puissance en bande (Figure 5.22) en fonction de la désynchronisation. Nous envisageons d'utiliser la décomposition de l'entrelaceur lignes/colonnes du chapitre 3 afin de réaliser une synchronisation en deux étapes des deux PCC résultant de la décomposition de l'entrelaceur lignes/colonnes. Ainsi, la synchronisation de l'entrelaceur ligne/colonne de période $N = PQ$ peut être remplacé par la synchronisation de deux PCC de périodes plus petites P et Q . Ce problème est à l'étude.

5.5 Conclusion

Dans le quatrième chapitre, nous avons mis en évidence la propriété d'étalement d'un filtre LPTV lorsque celui ci est appliqué à un signal suréchantillonné. Ce résultat fait des filtres LPTV une solution potentielle pour de l'accès multiple par étalement. A la lumière de ce résultat, dans ce

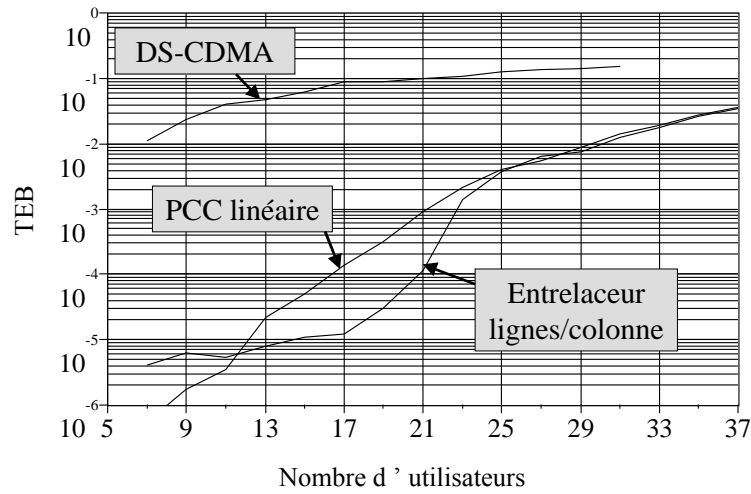


FIG. 5.25 – Performances en TEB en fonction du nombre d'utilisateurs

dernier chapitre, nous avons abordé le problème de la réalisation d'un système d'accès multiple construit à partir de filtres LPTV. Dans un premier temps, nous avons rappelé les solutions traditionnelles d'accès multiple par étalement utilisées dans les communications numériques. Celles-ci proposent toutes un étalement par multiplication du signal par un code binaire (CDMA) de durée chip petite devant la durée d'un symbole. Les techniques les plus récentes combinent la technique OFDM et l'étalement CDMA afin d'exploiter les avantages associés à ces deux techniques. Dans un cadre général, quelque soit la solution d'étalement adoptée, il est néanmoins nécessaire que les transformations utilisées remplissent trois conditions : elles doivent permettre un étalement de spectre, elles doivent être inversibles et orthogonales. L'inversibilité est liée à la possibilité de récupérer l'information en réception. Quant à l'orthogonalité, elle traduit la capacité à extraire le signal d'un utilisateur particulier dans le signal total. Pour les techniques traditionnelles, cette orthogonalité est liée aux propriétés d'intercorrélations des codes choisis.

Nous avons à notre tour proposé une technique pour construire un ensemble de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux numériques suréchantillonnés. Cette technique repose sur l'utilisation d'un filtre LPTV initial. La famille complète des filtres LPTV orthogonaux est alors construite à partir de ce filtre LPTV générateur. Nous avons alors exploité ce résultat théorique pour la construction d'un système d'accès multiple par étalement de spectre. Ce système présente une orthogonalité de nature fréquentielle qui est parfaite dans le cas où tous les utilisateurs

sont synchronisés en réception. Dans le cas d'une désynchronisation des différents utilisateurs, l'orthogonalité du système est dégradée. Nous avons montré que la dégradation d'orthogonalité pour le système était liée au choix du filtre LPTV générateur. En effet, la propriété cruciale est le comportement de ce filtre LPTV générateur face à une désynchronisation, à savoir, ce qu'il se passe lorsque sont mis en cascade ce filtre LPTV générateur et son filtre LPTV inverse désynchronisé. Nous avons montré que cette cascade résultait en un nouveau filtre LPTV équivalent. Le filtre LPTV générateur est alors d'autant plus robuste à la désynchronisation que le filtre LPTV équivalent a une nature variant dans le temps faible (c'est à dire que le filtre modulateur $T_0(z)$, composante LIT, est prépondérant devant les autres filtres modulateurs). Ainsi le système d'accès multiple que nous proposons conserve une bonne orthogonalité malgré la désynchronisation des différents utilisateurs en réception si le filtre LPTV générateur est robuste à la désynchronisation.

A la lumière de ce résultat, nous avons proposé deux filtres LPTV générateurs particuliers dont nous avons montré la bonne robustesse face à la désynchronisation : l'entrelaceur lignes/colonnes et le PCC linéaire. Nous avons alors quantifié l'interférence multiutilisateurs du système d'accès résultant par des simulations de TEB en fonction du nombre d'utilisateurs. Ces performances ont été comparées à celles d'un système d'accès par DS-CDMA. Les performances de nos deux systèmes présentent des performances en terme de TEB bien meilleures que le système construit à partir du DS-CDMA. Un point optimiste pour la suite est que dans le cas d'un canal sans multitrajets à évanouissement, notre système devrait présenter un avantage par rapport à un système classique basé sur le CDMA car les différents échantillons successifs sont entrelacés dans notre système, ce qui protège les symboles des phases de fort évanouissement en amplitude.

En revanche, il s'agit à l'avenir d'étudier le comportement de notre système dans le cas de canaux à multitrajets, ce qui n'a pas été encore fait. Enfin, nous avons construit notre système de filtres LPTV orthogonaux avec l'hypothèse de signaux à bande fréquentielle limitée, et c'est la raison pour laquelle nous avons utilisé des filtres RCS en émission. Nous envisageons de tester les performances de notre système en utilisant une mise en forme rectangulaire (porte temporelle rectangulaire) plutôt que l'utilisation d'un filtre RCS en émission. Notre système gagnerait alors en simplicité de réalisation.

Conclusion générale

Les filtres LPTV n'ont été étudiés et utilisés au sein du laboratoire TésA que sous la forme analogique. Ainsi, ce travail de thèse avait pour prétention initiale de proposer une étude théorique des filtres LPTV sous une forme numérique ainsi que de discuter l'intérêt d'utiliser cette famille de filtres dans le domaine des communications numériques.

Le premier chapitre a permis de poser un cadre théorique pour les différentes représentations numériques d'un filtre LPTV. Bien que les filtres LPTV tels que nous les avons définis ne changent pas la fréquence d'échantillonnage entre les signaux d'entrée et de sortie, il a été possible de rapprocher le domaine LPTV du domaine de traitement multiscalaire qui par définition englobe les différents traitements numériques permettant de changer la fréquence d'échantillonnage d'un signal. L'intérêt de ce rapprochement s'est avéré double. Tout d'abord, il a permis d'offrir une représentation unifiée des différentes représentations numériques des filtres LPTV en empruntant les opérations de décimation et d'interpolation au traitement multiscalaire. Ces représentations unifiées ont conduit à la possibilité d'établir rigoureusement par une méthode matricielle les relations entre les grandeurs définissant les différentes représentations des filtres LPTV. Le second intérêt du rapprochement entre filtres LPTV et traitement multiscalaire a été de pouvoir définir une relation d'équivalence entre les filtres LPTV et les bancs de filtres à décimation maximale. En effet, bien que ces bancs de filtres à décimation maximale fournissent une famille de signaux sous échantillonnés à partir d'un signal original, il a été possible de relier le comportement d'un tel banc de filtres à celui d'un filtre LPTV. Cette relation d'équivalence est intéressante si l'on considère le grand nombre de travaux consacrés aux bancs de filtres par rapport à ceux marginaux des filtres LPTV.

Le second chapitre est consacré à l'inversibilité des filtres LPTV. Une condition nécessaire et suffisante matricielle pour l'inversibilité est rappelée. S'il est vrai que cette condition matricielle permet de vérifier l'inversibilité d'un filtre LPTV donné, elle n'indique en rien comment construire

un filtre LPTV inversibles. Ce problème de la construction d'un filtre LPTV inversible est un problème ouvert. De nos recherches, il s'est avéré qu'un seul papier avait proposé une méthode pour construire une famille particulière de filtres LPTV inversibles. Cette absence de travaux a motivé nos recherches pour ce sujet. Ainsi, nous avons proposé deux méthodes pour construire une famille de filtres LPTV inversible. La première s'intéresse à la forme particulière de la matrice modulateurs pour un filtre LPTV. Nous avons établi une condition nécessaire et suffisante pour que celle ci soit circulaire. En utilisant alors les propriétés des matrices circulaires, nous avons défini une famille de filtres LPTV inversibles caractérisée par une forme particulière des filtres modulateurs. Nous avons appelé filtres LPTV convolutionnels cette famille de filtres LPTV par analogie entre la forme MIMO de ces filtres et l'entrelaceur convolutionnel utilisé par exemple dans la norme DVB-T. La seconde méthode exploite la relation d'équivalence entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale établie dans le premier chapitre. Après avoir montré que la propriété de reconstruction parfaite pour un banc de filtres était équivalente à l'inversibilité du filtre LPTV équivalent au sens de la relation du premier chapitre, nous avons généralisé une méthode de construction de bancs de filtres "LossLess" à reconstruction parfaite. Par extension, nous avons appelé filtres LPTV-LL la famille de filtres LPTV résultant de cette construction. A la fin de ce second chapitre, nous étions donc en mesure de proposer deux méthodes différentes pour construire un filtre LPTV inversible.

Le troisième chapitre a abandonné un instant la considération générale des filtres LPTV pour s'intéresser à une sous famille particulière de filtres LPTV que sont les changements d'horloge (PCC). Nous avons mis en évidence une caractérisation de l'inversibilité des PCC. Cette caractérisation nous a permis entre autre de construire une famille particulière de PCC inversibles : les PCC linéaires. Différentes structures de groupes et de sous groupes ont été proposées pour cette famille et des considérations de décomposition ont été abordées. Outre ces différents résultats théoriques, le résultat important de ce chapitre est d'avoir mis en évidence l'équivalence entre PCC numériques et entrelaceurs. S'il est vrai que les PCC constituent aujourd'hui un sujet somme toute encore marginal, les entrelaceurs sont très largement utilisés dans les communications numériques. Ce chapitre offre une approche nouvelle de l'étude des entrelaceurs par un formalisme LPTV. A titre d'exemple, une étude fréquentielle des entrelaceurs est possible en utilisant les filtres modulateurs associés à un entrelaceur vu comme un PCC.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes intéressés à nouveau aux filtres LPTV en général. Après les considérations plutôt théoriques des trois premiers chapitres, nous nous sommes

intéressés à l'intérêt de l'utilisation d'un filtre LPTV en communications numériques. Nous avons alors au préalable présenté les applications existantes explicites de filtres LPTV dans les communications numériques. Nous avons choisi de classer celles ci selon que l'application relève d'une approche fréquentielle ou temporelle des filtres LPTV. Ainsi, notre contribution dans le domaine fréquentiel a été de proposer un système d'étalement LPTV qui étale la puissance du signal dans une bande continue à l'exception d'une sous bande particulière. Ce système, en cours de brevet CNES permet de se prémunir d'interférences à bande étroite. Nous demandant s'il était possible de réaliser de l'étalement de spectre par filtrage, nous avons ensuite proposé d'utiliser les filtres LPTV inversibles définis au second chapitre afin de réaliser de l'étalement spectral. Le comportement en terme de TEB de nos deux familles a été simulé lorsque le signal étalé traverse un canal gaussien. Il s'est avéré que les filtres LPTV convolutionnels étaient sensibles au bruit à cause du filtrage inverse et qu'ils constituaient une solution fort peu adaptée à de l'étalement même dans le cas où nous réalisons un treillis en réception. Par contre, les filtres LPTV-LL offrent des performances équivalentes à celles d'une mise en forme par un filtre RCS sans étalement. Ce résultat laisse ouverte la discussion sur la réalisation d'un système d'étalement à partir de ces filtres LPTV-LL. Ensuite, pour les applications des filtres LPTV qui relèvent d'une approche temporelle, nous nous sommes intéressés au problème de réduction de PAPR pour l'OFDM. Nous avons proposé une méthode de type probabiliste utilisant les filtres LPTV-LL. Des simulations ont montré que la capacité de réduction de PAPR de notre méthode était comparable à la technique de Selective Mapping et meilleure que la technique d'entrelacement qui sont deux techniques connues. Nous avons alors établi théoriquement l'influence de l'utilisation d'un filtre LPTV-LL sur les performances en TEB dans le cas d'un système OFDM avec un canal sélectif en fréquence (canal multitrajets) avec bruit additif blanc gaussien. Il s'est avéré que dans le cas de canaux multitrajets présentant un trajet principal prépondérant, notre méthode de réduction de PAPR basée sur les filtres LPTV-LL permettait une amélioration des performances en TEB par rapport aux autres techniques de réduction de PAPR. Bien que nous pensions que dans le cas d'un modèle de canal satellite, cette méthode peut être avantageuse, ce résultat est encore à discuter pour définir le modèle physique de canaux où une telle technique serait intéressante.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de la réalisation d'un système d'accès multiple par étalement de spectre basé sur les filtres LPTV. Nous avons rappelé le principe des techniques traditionnelles d'accès multiple par étalement de spectre. Celles ci reposent toutes sur l'utilisation de codes binaires (CDMA). Nous avons alors proposé une

méthode pour construire une famille de filtres LPTV orthogonaux sur l'ensemble des signaux numériques suréchantillonnés. Cette construction repose sur la définition d'un filtre LPTV générateur quelconque inversible. La famille des filtres LPTV est alors construite à partir de ce filtre générateur. Nous avons alors utilisé ce résultat pour proposer un système d'accès multiple par étalement. Dans le cas où les différents utilisateurs sont tous synchronisés en réception, le système proposé présente une orthogonalité parfaite. Cette orthogonalité, de nature fréquentielle, est dégradée dans le cas où les différents utilisateurs sont désynchronisés. Nous avons montré alors que le degré de dégradation était lié à la robustesse du filtre LPTV générateur face à une désynchronisation. À la lumière de cette remarque, nous avons proposé deux filtres LPTV générateurs particuliers qui présentaient une bonne robustesse face à une désynchronisation : l'entrelaceur lignes/ colonnes et le PCC linéaire. Afin de quantifier la perte d'orthogonalité des systèmes d'accès multiples construits à partir de ces deux PCC, nous avons simulé les performances en TEB de ces deux systèmes en fonction du nombre d'utilisateurs. Ces performances ont été comparées à celles d'un système d'accès de type DS-CDMA et se sont avérées meilleures. Nous avons alors pu conclure que nos deux systèmes présentaient une interférence multiutilisateurs plus faible qu'un système de type DS-CDMA. Il reste cependant à comparer notre système avec les autres techniques basées sur le CDMA (MC-DS-CDMA, MT-CDMA et MC-CDMA) en terme d'interférences multiutilisateurs. Un autre point à étudier est le comportement de notre système dans le cas de canaux à multitrajets.

À la fin de ce travail de thèse, divers points restent encore à étudier. Concernant les filtres LTPV-LL, nous avons vu que ces filtres avaient une propriété très particulière de répartir la puissance uniformément en sortie si le signal d'entrée a une distribution irrégulière des puissances. Nous avons étudié ce comportement dans le cas d'un canal sélectif en fréquence avec bruit additif blanc gaussien. Il nous semble intéressant de réfléchir à certaines applications des communications numériques où cette propriété pourrait être exploitée de façon positive. Enfin, il reste, comme nous l'avons dit précédemment, à étudier le comportement de notre système d'accès multiple par étalement dans le cas d'un canal à multitrajets.

Annexe A

Annexes relatives au chapitre 1

A.1 Détermination de la matrice MIMO d'un filtre LPTV

Une façon d'obtenir la représentation matricielle MIMO de la figure 1.7 est de partir de l'équation (1.16) faisant intervenir la fonction de Green $c_n(m)$ que nous réécrivons ici après changement d'indice.

$$y(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{\underline{n}_N}(l)x(n-l) \quad (\text{A.1})$$

En utilisant les composantes polyphases définies en (1.1) pour $x(n)$ et $y(n)$, l'équation de filtrage précédente nous donne alors N équations (A.2) pour $k \in [0 : N - 1]$.

$$y_k(n) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k(l)x(nN + k - l) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k(l)x_{\underline{k-l}_N}(n + \overline{k-l}^N) \quad (\text{A.2})$$

Nous calculons alors $Y_k(z)$ les transformées en z définies par (1.2). Après séparation des termes dans l'expression (A.3), on aboutit à l'expression finale (A.4).

$$Y_k(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_k(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k(l)x_{\underline{k-l}_N}(n + \overline{k-l}^N) \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k(l)z^{\overline{k-l}^N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{\underline{k-l}_N}(n + \overline{k-l}^N)z^{-n-\overline{k-l}^N} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k(l)z^{\overline{k-l}^N} X_{\underline{k-l}_N}(z) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Finalement, en effectuant dans (A.4) les changements d'indices $p = k - l$ (A.5) puis la décomposition $p = Ni + j$ par la division euclidienne de p par N , on obtient (A.6).

$$Y_k(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_k(k-p)z^{\bar{p}^N} X_{\underline{p}_N}(z) \quad (\text{A.5})$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} X_j(z) \sum_{i=-\infty}^{\infty} z^i c_k(k - Ni - j) \quad (\text{A.6})$$

Enfin, si nous notons $H_{k,j}(z)$ la transformée en z définie par (A.7), les N équations obtenues dans (A.6) peuvent se réécrire sous la forme matricielle (A.8) où les $H_{k,j}(z)$ sont les éléments de la matrice $\mathbf{H}(z)$ (A.9).

$$H_{k,j}(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_k(k - j - Ni)z^i \quad (\text{A.7})$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}(z) = \mathbf{H}(z)\widehat{\mathbf{X}}(z) \quad (\text{A.8})$$

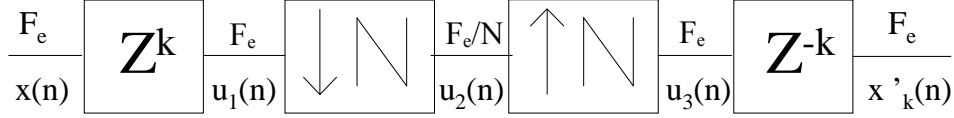
$$\mathbf{H}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) & \dots & H_{0,N-1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{N-1,0}(z) & \dots & \dots & H_{N-1,N-1}(z) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

L'expression (A.8) nous fournit une relation matricielle entre les transformées en z des premières composantes polyphases (1.2) de l'entrée et la sortie du filtre LPTV. Si nous voulons déterminer la relation matricielle entre les secondes composantes polyphases (1.5), nous appliquons la relation (1.9) à $\widehat{\mathbf{X}}$ et $\widehat{\mathbf{Y}}$ dans l'équation (A.8). Nous obtenons alors (A.10) avec $\mathbf{H}'(z)$ défini par (A.11) en fonction de $\mathbf{H}(z)$.

$$\widehat{\mathbf{Y}}'(z) = \mathbf{H}'(z)\widehat{\mathbf{X}}'(z) \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{H}'(z) = \mathbf{D}_z^{-1}\mathbf{H}(z^N)\mathbf{D}_z \quad (\text{A.11})$$

La relation (A.11) implique que les éléments de $\mathbf{H}'(z)$ sont de la forme : $[\mathbf{H}'(z)]_{i,j} = z^{j-i}H_{i,j}(z^N)$.


FIG. A.1 – Traitement pour obtenir $x'_k(n)$

A.2 Obtention des composantes polyphases $X'_k(z)$

Nous allons appliquer les résultats (1.37) et (1.38) sur l'interpolation et la décimation au schéma de la figure 1.10. Pour cela, nous redessinons la figure 1.10 en la Figure 1 en nommant $u^1(n)$, $u^2(n)$ et $u^3(n)$ les signaux intermédiaires de transformées en z respectives $U^1(z)$, $U^2(z)$ et $U^3(z)$.

En opérant pas à pas, $u^1(n)$ est obtenu à partir de $x(n)$ par une avance de k échantillons soit la relation (A.12).

$$U^1(z) = z^k X(z) \quad (\text{A.12})$$

Ensuite, $u^2(n)$ est obtenu à partir de $u^1(n)$ par une décimation d'ordre N , soit en utilisant le résultat (1.38), nous obtenons la relation (A.13).

$$U^2(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} U^1(z^{\frac{1}{N}} W_N^p) = \frac{z^{\frac{k}{N}}}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(z^{\frac{1}{N}} W_N^p) W_N^{kp} \quad (\text{A.13})$$

Le signal $u^3(n)$ est alors obtenu à partir de $u^2(n)$ par une interpolation d'ordre N , ce qui en utilisant le résultat (1.37) nous donne (A.14).

$$U^3(z) = U^2(z^N) = \frac{z^k}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(z W_N^p) W_N^{kp} \quad (\text{A.14})$$

Enfin, $x'_k(n)$ est obtenu à partir de $u^3(n)$ par un simple retard de k ce qui se traduit par

(A.15) pour les transformées en z .

$$X'_k(z) = z^{-k} U^3(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p) W_N^{kp} \quad (\text{A.15})$$

La relation (A.15) est très intéressante. En effet, il s'avère que les composantes $X'_k(z)$ sont obtenues par TFD des $X(zW_N^p)$, ce qui en utilisant les notations (1.40), (1.8) et la matrice \mathbf{F}^+ des coefficients de Fourier se traduit matriciellement par la relation (A.16).

$$\widehat{\mathbf{X}}'(z) = \frac{1}{N} \mathbf{F}^+ \widetilde{\mathbf{X}}(z) \quad (\text{A.16})$$

A.3 Relations entres les représentations d'un filtre LPTV : Méthode 1

Nous allons établir les relations entre les transformées en z des différentes représentations des filtres LPTV définies dans le premier chapitre. Pour cela, nous allons exploiter les figures modifiées 1.11, 1.12 et 1.13 correspondant aux représentations commutées ainsi que les figures 1.8 et 1.9 correspondant aux filtres modulateurs. Pour chacune de ces figures, nous allons commencer par exprimer la sortie $Y(z)$ en fonction de l'entrée $X(z)$ grâce au résultat (1.39) qui traduit l'effet sur les transformées en z de la structure de la figure 1.10. Nous obtenons alors pour chacune des structures les résultats suivants.

Structure commutée MISO

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} R_k(z) \left[\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p) W_N^{pk} \right] = \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} R_k(z) W_N^{pk} \right] \quad (\text{A.17})$$

Structure commutée SIMO

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} C_k(zW_N^p) X(zW_N^p) W_N^{pk} \right] = \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k(zW_N^p) W_N^{pk} \right] \quad (\text{A.18})$$

Structure commutée MIMO

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p) \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} z^{k-l} H_{l,k}(z^N) W_N^{pk} \right] \quad (\text{A.19})$$

Filtres modulateurs 1

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p)T_p(zW_N^p) \quad (\text{A.20})$$

Filtres modulateurs 2

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} X(zW_N^p)T'_p(z) \quad (\text{A.21})$$

A partir des cinq relations précédentes et par identification, nous allons exprimer les liens entre les différentes transformées en z .

Filtres modulateurs 1/ Filtres modulateurs 2

Par identification de (A.20) et (A.21), on obtient les relations suivantes (A.22) et (A.23) pour les filtres modulateurs.

$$T'_p(z) = T_p(zW_N^p) \quad (\text{A.22})$$

$$T_p(z) = T'_p(zW_N^{-p}) \quad (\text{A.23})$$

Filtres SIMO/ Filtres modulateurs 1 et 2

Par identification de (A.18) avec (A.20), puis avec (A.21), nous obtenons directement les expressions (A.24) et (A.25).

$$T_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{pk} C_k(z) \quad (\text{A.24})$$

$$T'_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{pk} C_k(zW_N^p) \quad (\text{A.25})$$

En remarquant alors que les $T_p(z)$ sont obtenus par TFD des $C_k(z)$, on en déduit par TFD inverse la relation (A.26) puis (A.27) en utilisant (A.23).

$$C_k(z) = \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{-pk} T_p(z) \quad (\text{A.26})$$

$$C_k(z) = \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{-pk} T'_p(zW_N^{-p}) \quad (\text{A.27})$$

Filtres MISO/ Filtres modulateurs 1 et 2

Par identification de (A.17) avec (A.21), puis avec (A.20), nous obtenons directement les expressions (A.28) et (A.29).

$$T'_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{pk} R_k(z) \quad (\text{A.28})$$

$$T_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{pk} R_k(z W_N^{-p}) \quad (\text{A.29})$$

A nouveau, on remarque que les $T'_p(z)$ sont obtenus par TFD des $R_k(z)$, on en déduit par TFD inverse la relation (A.30) puis (A.31) en utilisant (A.22).

$$R_k(z) = \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{-pk} T'_p(z) \quad (\text{A.30})$$

$$R_k(z) = \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{-pk} T_p(z W_N^p) \quad (\text{A.31})$$

Filtres SIMO/ Filtres MISO

En injectant (A.29) dans (A.26) on obtient (A.32).

$$C_k(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{p(l-k)} R_l(z W_N^{-p}) \quad (\text{A.32})$$

De même, en injectant (A.25) dans (A.30), on obtient (A.33).

$$R_k(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{p(l-k)} C_l(z W_N^p) \quad (\text{A.33})$$

Filtres MIMO/ Filtres MISO

Par identification de (A.17) et (A.19), on obtient (A.34).

$$R_k(z) = z^k \sum_{l=0}^{N-1} H_{l,k}(z^N) z^{-l} \quad (\text{A.34})$$

D'après la relation précédente (A.34), on remarque que $H_{l,k}(z)$ et $H_{l,k}(z^N) z^{-l}$ pour $l \in [0 : N - 1]$ sont les transformées en z des composantes polyphases définies respectivement en (1.2) et (1.5) de $z^{-k} R_k(z)$. Or l'équation A.15 nous donne l'expression des transformées en z des

composantes polyphases en fonction de la transformée en z du signal initial. Si nous appliquons ce résultat, nous avons pour $H_{l,k}(z^N)z^{-l}$ l'expression (A.35), ce qui donne (A.36) pour $H_{l,k}(z)$.

$$H_{l,k}(z^N)z^{-l} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} z^{-k} W_N^{-kp} R_k(zW_N^p) W_N^{lp} \quad (\text{A.35})$$

$$H_{l,k}(z^N) = \frac{z^{l-k}}{N} \sum_{p=0}^{N-1} W_N^{p(l-k)} R_k(zW_N^p) \quad (\text{A.36})$$

Filtres MIMO/ Filtres SIMO

En utilisant (A.32) et (A.34) et le fait que $\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{pl} = N\delta(p)$, nous obtenons (A.37).

$$C_k(z) = z^{-k} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}(z^N) z^l \quad (\text{A.37})$$

De nouveau, nous remarquons, que les $H_{k,l}(z)$ pour $l \in [0 : N - 1]$ représentent les composantes polyphases de $z^k C_k(z)$ définies en (1.11). En injectant la relation (A.33) dans l'expression (A.36) et en faisant un changement d'indice, nous obtenons l'expression (A.38) en utilisant $\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{pl} = N\delta(p)$.

$$H_{l,k}(z^N) = \frac{z^{l-k}}{N} \sum_{p=0}^{N-1} C_l(zW_N^p) W_N^{(l-k)p} \quad (\text{A.38})$$

Structure MIMO/ Filtres modulateurs 1 et 2

En injectant (A.26) dans (A.38) on obtient (A.39), puis en injectant (A.23) dans (A.39), on obtient (A.40).

$$H_{l,k}(z^N) = \frac{z^{l-k}}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{l(p-m)} W_N^{-pk} T_m(W_N^p z) \quad (\text{A.39})$$

$$H_{l,k}(z^N) = \frac{z^{l-k}}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{l(p-m)} W_N^{-pk} T'_m(W_N^{p-m} z) \quad (\text{A.40})$$

En injectant (A.37) dans (A.24), on obtient (A.41). De même, on obtient (A.42) en injectant (A.34) et (A.28).

$$T_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} \sum_{l=0}^{N-1} H_{k,l}(z^N) z^l W^{pk} \quad (\text{A.41})$$

$$T'_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^k \sum_{l=0}^{N-1} H_{l,k}(z^N) z^{-l} W^{pk} \quad (\text{A.42})$$

A.4 Relations entre les représentations d'un filtre LPTV : Méthode 2

Nous avons vu dans le chapitre 1 qu'à chaque représentation d'un filtre LPTV, il était possible d'associer une matrice LPTV ainsi qu'une relation matricielle représentant l'action du filtre LPTV (relations (1.42) à (1.45)). Nous allons expliquer comment établir dans un premier temps les relations (1.51) à (1.54) entre les filtres définissant les différentes représentations LPTV et les matrices associées. Puis, grâce aux relations (1.55-1.59), il suffit alors d'exprimer les produits matriciels (1.47-1.50) pour accéder directement aux relations entre les filtres LIT définissant les filtres LPTV.

A.4.1 Relations entre les matrices LPTV et les filtres LIT définissant les filtres LPTV

Filtres modulateurs : relations entre $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ et $T_p(z)/T'_p(z)$

En utilisant les relations (A.20) et (A.21), nous obtenons la relation (A.43) qui nous permet d'en déduire le lien (A.44) par identification avec la relation matricielle (1.42).

$$Y(zW_N^i) = \sum_{j=0}^{N-1} X(W_N^j z) T_{\underline{j-i}_N}(zW_N^j) = \sum_{j=0}^{N-1} X(W_N^j z) T'_{\underline{j-i}_N}(zW_N^i) \quad (\text{A.43})$$

$$[\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{i,j} = T_{\underline{j-i}_N}(zW_N^j) = T'_{\underline{j-i}_N}(zW_N^i) \quad (\text{A.44})$$

Ces relations (A.44) entre les éléments de la matrice $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ et les filtres modulateurs $T_p(z)$ et $T'_p(z)$ se traduisent par les formes particulières (A.45) et (A.46) de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$.

$$\mathbf{A}^{1,1}(z) = \begin{bmatrix} T_0(z) & T_1(zW_N) & \dots & T_{N-1}(zW_N^{N-1}) \\ T_{N-1}(z) & T_0(zW) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_1(z) & T_2(zW) & \dots & T_0(zW^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$= \begin{bmatrix} T'_0(z) & T'_1(z) & \dots & T'_{N-1}(z) \\ T'_{N-1}(zW) & T'_0(zW) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T'_1(zW^{N-1}) & T'_2(zW^{N-1}) & \dots & T'_0(zW^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.46})$$

Filtres MISO : Relations entre $\mathbf{A}^{1,2}(z)$ et $R_k(z)$

D'après la figure 1.12, la relation entre l'entrée et la sortie du filtre LPTV s'écrit (A.47) et nous en déduisons la relation (A.48).

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{N-1} X'_j(z)R_j(z) \quad (\text{A.47})$$

$$Y(zW_N^i) = \sum_{j=0}^{N-1} X'_j(zW_N^i)R_j(zW_N^i) \quad (\text{A.48})$$

Nous voyons apparaître dans l'équation (A.48) les termes $X'_j(zW_N^i)$. Or, en utilisant le résultat (A.15), on montre que $X'_j(zW_N^i)$ s'écrit (A.49).

$$X'_j(zW_N^i) = W_N^{-ij} X'_j(z) \quad (\text{A.49})$$

En injectant alors ce résultat dans (A.48), on en déduit la relation (A.50) par identification avec la relation matricielle (1.43). Cette relation (A.50) se traduit par la forme (A.51) pour la matrice $\mathbf{A}^{1,2}(z)$.

$$A_{i,j}^{1,2} = W_N^{-ij} R_j(zW_N^i) \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{A}^{1,2}(z) = \begin{bmatrix} R_0(z) & R_1(z) & \dots & R_{N-1}(z) \\ R_0(zW_N) & W^{-1}R_1(zW_N) & \dots & W^{-(N-1)}R_{N-1}(zW_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_0(zW_N^{N-1}) & W_N^{-(N-1)}R_1(zW_N^{N-1}) & \dots & W_N^{-(N-1)(N-1)}R_{N-1}(zW_N^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.51})$$

Filtres SIMO : Relations entre $\mathbf{A}^{2,1}(z)$ et $C_k(z)$

D'après la figure 1.11, les relations entre l'entrée et la sortie du filtre LPTV peuvent s'écrire (A.52) en utilisant le résultat (A.15). Par identification avec la relation matricielle (1.44), cela nous permet de conclure à la relation (A.53). La forme de la matrice $\mathbf{A}^{2,1}(z)$ est donc (A.54).

$$Y_i(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} C_i(zW_N^j)X(W_N^j z)W_N^{ji} \quad (\text{A.52})$$

$$[\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,j} = \frac{1}{N} W_N^{ij} C_i(zW_N^j) \quad (\text{A.53})$$

$$\mathbf{A}^{2,1}(z) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} C_0(z) & C_0(zW_N) & \dots & C_0(zW_N^{N-1}) \\ C_1(z) & W_N C_1(zW_N) & \dots & W_N^{N-1} C_1(zW_N^{N-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{N-1}(z) & W_N^{N-1} C_{N-1}(zW_N) & \dots & W_N^{(N-1)^2} C_{N-1}(zW_N^{N-1}) \end{bmatrix} \quad (\text{A.54})$$

Représentation MIMO : Relations entre $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ et $H_{k,l}(z)$

L'identification entre les relation matricielles (1.45) et (A.10) nous donne $\mathbf{A}^{2,2}(z) = \mathbf{H}'(z)$ d'où d'après la relation (A.11), on en déduit la relation (A.55). Cette relation implique la forme particulière (A.56) pour $\mathbf{A}^{2,2}(z)$.

$$[\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,j} = z^{j-i} H_{i,j}(z^N) \quad (\text{A.55})$$

$$\mathbf{A}^{2,2}(z) = \mathbf{H}(z^N) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z^N) & zH_{0,1}(z^N) & \dots & z^{N-1}H_{0,N-1}(z^N) \\ z^{-1}H_{1,0}(z^N) & H_{1,1}(z^N) & \dots & z^{N-2}H_{1,N-1}(z^N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z^{1-N}H_{N-1,0}(z^N) & \dots & \dots & H_{N-1,N-1}(z^N) \end{bmatrix} \quad (\text{A.56})$$

A.4.2 Détermination des relations entre les grandeurs en z des filtres LPTV grâce aux relations matricielles

Filtres modulateurs

La traduction élément par élément des relations (1.47) nous donne les relations (A.57).

$$[\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{i,l} W_N^{lj} = \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{-il} [\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{l,j} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-im} \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{m,l} W_N^{lj} \quad (\text{A.57})$$

On en déduit directement les expression suivantes (A.58) et (A.59) grâce aux relations (1.51-1.54) entre les filtres LIT et les éléments des matrices LPTV.

$$\begin{aligned} T'_j(z) &= [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{0,j} = T_j(zW_N^j) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} R_l(z) W_N^{lj} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} C_l(zW_N^j) W_N^{lj} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} z^{l-m} H_{m,l}(z^N) W_N^{lj} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

$$\begin{aligned}
T_i(z) &= [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{\underline{-i}_N,0} = T'_i(zW_N^{-i}) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} R_l(zW_N^{-i})W_N^{il} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} C_l(z)W_N^{il} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} z^{l-m} H_{m,l}(z^N)W_N^{im}
\end{aligned} \tag{A.59}$$

Filtres MISO

La traduction élément par élément des relations (1.48) nous donne les relations (A.60).

$$[\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{i,j} = \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{i,l} W_N^{-lj} = \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{-im} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{-lj} [\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{m,l} = \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{l,j} W_N^{-il} \tag{A.60}$$

On en déduit directement les expressions suivantes (A.61) grâce aux relations précédentes (1.51-1.54) entre les filtres LIT et les éléments des matrices LPTV.

$$\begin{aligned}
R_j(z) &= [\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{0,j} = \sum_{l=0}^{N-1} T_l(zW_N^l)W_N^{-lj} = \sum_{l=0}^{N-1} T'_l(z)W_N^{-lj} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{l(m-j)} C_m(zW_N^l) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{j-l} H_{l,j}(z^N)
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Filtres SIMO

La traduction élément par élément des relations (1.49) nous donne (A.62).

$$[\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{il} [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{l,j} = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{im} \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{m,l} W_N^{lj} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,l} W_N^{lj} \tag{A.62}$$

On en déduit directement les expressions suivantes (A.63) grâce aux relations précédentes (1.51-1.54) entre les filtres LIT et les éléments des matrices LPTV.

$$\begin{aligned}
C_i(z) &= N [\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,0} = \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{-il} T_l(z) = \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{-il} T'_l(zW_N^{-l}) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{m(l-i)} R_l(zW_N^{-m}) = \sum_{l=0}^{N-1} z^{l-i} H_{i,l}(z^N)
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Représentation MIMO

La traduction élément par élément des relations (1.50) nous donne (A.64).

$$[\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} W_N^{im} \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{1,1}(z)]_{m,l} W_N^{-lj} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{il} [\mathbf{A}^{1,2}(z)]_{l,j} = \sum_{l=0}^{N-1} [\mathbf{A}^{2,1}(z)]_{i,l} W_N^{-lj} \quad (\text{A.64})$$

On en déduit directement les expressions suivantes (A.65) grâce aux relations précédentes (1.51-1.54) entre les filtres LIT et les éléments des matrices LPTV.

$$\begin{aligned} H_{i,j}(z^N) &= z^{i-j} [\mathbf{A}^{2,2}(z)]_{i,j} = \frac{z^{i-j}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{im} W_N^{-lj} T_{l-m_N}(z W_N^l) \\ &= \frac{z^{i-j}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{im} W_N^{-lj} T'_{l-m_N}(z W_N^m) \\ &= \frac{z^{i-j}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{l(i-j)} R_j(z W_N^l) = \frac{z^{i-j}}{N} \sum_{l=0}^{N-1} W_N^{l(i-j)} C_i(z W_N^l) \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

A.5 Filtres LPTV et bancs de filtres

Nous proposons d'établir la relation matricielle entre la matrice MIMO d'un filtre LPTV et la matrice polyphase d'un banc de filtres équivalent.

A.5.1 Cas d'un filtre LPTV et du banc d'analyse équivalent

Dans le cas d'un filtre LPTV et d'un banc d'analyse équivalents nous avons la relation (1.62) qui est vérifiée entre les filtres SIMO et les filtres d'analyse. D'après la décomposition polyphase (1.60) des filtres d'analyse et la décomposition MIMO (A.63) des filtres SIMO, on déduit la relation (A.66) à partir de la relation (1.62) pour tout $i \in [0 : N - 1]$.

$$\sum_{l=0}^{N-1} z^{-l} F_{i,l}(z^N) = \sum_{k=0}^{N-1} H_{i,k}(z^N) z^k \quad (\text{A.66})$$

En effectuant le changement d'indice $l = N - k$ dans la somme de gauche, on aboutit à (A.67).

$$F_{i,0}(z^N) + z^{-N} \sum_{k=1}^{N-1} z^k F_{i,N-k}(z^N) = \sum_{k=0}^{N-1} H_{i,k}(z^N) z^k \quad (\text{A.67})$$

Ensuite, en identifiant les termes de part et d'autre de (A.67), on obtient le résultat (1.64). Ainsi, ce résultat implique matriciellement que la matrice $\mathbf{H}^{an}(z)$ (A.8) des $H_{i,j}(z)$ s'exprime selon (A.68) en fonction de la matrice $\mathbf{F}(z)$ des composantes polyphases du banc d'analyse où la matrice $\boldsymbol{\theta}(z)$ est définie en (1.68).

$$\mathbf{H}^{an}(z) = \mathbf{F}(z)\boldsymbol{\theta}(z) \quad (\text{A.68})$$

Finalement, en utilisant l'expression (A.11) de la matrice MIMO $\mathbf{H}^{an}(z)$ en fonction de $\mathbf{H}^{an}(z)$, on en déduit le résultat (1.66).

A.5.2 Cas d'un filtre LPTV et du banc de synthèse équivalent

Dans le cas d'un filtre LPTV et d'un banc de synthèse équivalents, nous avons la relation (1.63) qui est vérifiée entre les filtres MISO et les filtres de synthèse. D'après la décomposition polyphase (1.61) des filtres de synthèse et la décomposition MIMO (A.61) des filtres MISO, on déduit la relation (A.69) à partir de la relation (1.63) pour tout $i \in [0 : N - 1]$.

$$\sum_{l=0}^{N-1} z^{-(N-1-l)} G_{l,i}(z^N) = \sum_{k=0}^{N-1} H_{k,i}(z^N) z^{-k} \quad (\text{A.69})$$

En effectuant le changement d'indice $l = N - 1 - k$ dans la somme de gauche, on aboutit à la relation (A.70).

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} G_{N-1-k,i}(z^N) = \sum_{k=0}^{N-1} H_{k,i}(z^N) z^{-k} \quad (\text{A.70})$$

Ensuite, en identifiant les termes de part et d'autre de (A.70), on obtient le résultat (1.65). Ainsi, ce résultat implique matriciellement que la matrice $\mathbf{H}^{sy}(z)$ (A.8) des $H_{i,j}(z)$ s'exprime selon (A.71) en fonction de la matrice $\mathbf{G}(z)$ des composantes polyphases du banc de synthèse où \mathbf{I}'_N est la matrice avec la seconde diagonale (i.e $[\mathbf{I}'_N]_{i,j} = \delta(N - 1 - (j - i))$).

$$\mathbf{H}^{sy}(z) = \mathbf{I}'_N \mathbf{G}(z) \quad (\text{A.71})$$

Finalement, en utilisant l'expression (A.11) de la matrice MIMO $\mathbf{H}^{sy}(z)$ en fonction de $\mathbf{H}^{sy}(z)$, on en déduit le résultat (1.67).

Annexe B

Annexes relatives au chapitre 2

B.1 Condition d'inversibilité d'un filtre LPTV

Etant donné un filtre LPTV défini par sa matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$, les composantes modulateurs $\tilde{\mathbf{Y}}(z)$ et $\tilde{\mathbf{X}}(z)$, respectivement de la sortie et de l'entrée du filtre LPTV sont fonctions l'une de l'autre d'après la relation (2.1). Nous avons la propriété que le filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est inversible si et seulement si les racines du déterminant de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ sont strictement contenus à l'intérieur du cercle unité. Une expression du filtre LPTV inverse de matrice modulateurs $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ est alors donnée par l'inverse de la matrice $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ (2.3). La preuve de cette proposition se trouve dans [25] et c'est la raison pour laquelle il est inutile de la refaire ici. Cependant, nous allons vérifier deux propriétés utiles qui n'ont pas été explicitées dans [25]. La première consiste à vérifier que si l'inverse $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ existe, alors cette matrice a aussi la forme particulière (2.2) d'une matrice modulateurs. Ensuite, la seconde propriété que nous allons vérifier est que dans l'équation (2.3), $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1} \mathbf{I}_N$, représente la matrice modulateurs d'un filtre LIT.

B.1.1 Première propriété :

Pour vérifier que $\mathbf{B}^{1,1}(z) = [\mathbf{A}^{1,1}(z)]^{-1}$ est aussi de la forme particulière (2.2) d'une matrice modulateurs, il suffit de remarquer qu'une matrice carré $\mathbf{V}(z)$ de taille $N \times N$, constituée de fonctions de z , $[\mathbf{V}(z)]_{i,j} = V_{i,j}(z)$, est de la forme (2.2) si et seulement si la relation (B.1) est

vérifiée quelque soit $p \in [0 : N - 1]$ où $\boldsymbol{\pi}$ est la matrice définie par $[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(i - j - 1_N)$.

$$\mathbf{V}(zW_N^p) = \boldsymbol{\pi}^{-p}\mathbf{V}(z)\boldsymbol{\pi}^p \quad (\text{B.1})$$

Ensuite, l'hypothèse que $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ est l'inverse de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ nous donne $\mathbf{B}^{1,1}(z)\mathbf{A}^{1,1}(z) = \mathbf{I}_N$, d'où en évaluant cette égalité en zW_N^p , nous obtenons la relation (B.2) quelque soit $p \in [0 : N - 1]$.

$$\mathbf{B}^{1,1}(zW_N^p)\mathbf{A}^{1,1}(zW_N^p) = \mathbf{I}_N \quad (\text{B.2})$$

Mais, comme par hypothèse, la matrice $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est de la forme (2.2), la propriété (B.1) nous permet de réécrire (B.2) en (B.3), ce qui nous permet d'en déduire (B.4), puisque $[\mathbf{A}^{1,1}(z)]^{-1} = \mathbf{B}^{1,1}(z)$ et nous obtenons le résultat annoncé.

$$\mathbf{B}^{1,1}(zW_N^p)\boldsymbol{\pi}^{-p}\mathbf{A}^{1,1}(z)\boldsymbol{\pi}^p = \mathbf{I}_N \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{B}^{1,1}(zW_N^p) = \boldsymbol{\pi}^{-p}\mathbf{B}^{1,1}(z)\boldsymbol{\pi}^p \quad (\text{B.4})$$

B.1.2 Seconde propriété :

Pour vérifier que $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1}\mathbf{I}_N$ est bien la matrice modulateurs d'un filtre LIT, nous allons démontrer une propriété préliminaire, à savoir : étant donné un filtre LIT de transformée en z , $V(z)$, alors $V(zW_N^p) = V(z)$ quelque soit $p \in [0 : N - 1]$ si et seulement si $V(z)$ est une fonction de z^N .

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'utiliser la décomposition polyphase (1.10). En utilisant alors les relations (1.41) et (1.9), nous avons les relations (B.5) entre le vecteur modulateurs $\tilde{\mathbf{V}}(z)$ définies en (1.40) et le vecteur polyphase $\hat{\mathbf{V}}(z)$ définie en (1.7).

$$\tilde{\mathbf{V}}(z) = \mathbf{F}^{-}\mathbf{D}_z^{-1}\hat{\mathbf{V}}(z^N) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{V}}(z^N) = \frac{1}{N}\mathbf{D}_z\mathbf{F}^{+}\tilde{\mathbf{V}}(z) \quad (\text{B.5})$$

Ainsi, $V(zW_N^p) = V(z)$ quelque soit $p \in [0 : N - 1]$ est équivalent matriciellement à $\tilde{\mathbf{V}}(z) = V(z)[1 \ 1 \dots 1]^t$ où $[1 \ 1 \dots 1]$ est le vecteur ligne de longueur N composé de 1. D'après (B.5), cette propriété est équivalente pour $\hat{\mathbf{V}}(z^N)$ à (B.6).

$$\hat{\mathbf{V}}(z^N) = \frac{V(z)}{N}\mathbf{D}_z\mathbf{F}^{+}[1 \ 1 \dots 1]^t \quad (\text{B.6})$$

Or, d'après la définition de \mathbf{F}^+ , en utilisant le fait que $\sum_{l=0}^{N-1} W_N^{pl} = N\delta(p)$, on déduit de (B.6) que $\widehat{\mathbf{V}}(z^N) = V(z)[1 \ 0 \dots 0]^t$ où $[1 \ 0 \dots 0]$ est le vecteur dont seule la première composante est non nulle et vaut un. D'après la définition (1.7), on en déduit que $V(z) = V_0(z^N)$, autrement dit $V(z)$ est réduit à sa première composante polyphase. Le raisonnement ayant été fait par équivalence, nous avons le résultat annoncé pour la propriété préliminaire.

D'après la forme particulière (2.2) des matrices modulateurs et la propriété préliminaire, $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1} \mathbf{I}_N$ est la matrice modulateurs d'un filtre LIT si et seulement si $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ est une fonction de z^N . Nous allons donc montrer que $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ est une fonction de z^N . Pour cela, nous appliquons le résultat (B.1) à la matrice $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ et calculons le déterminant de l'égalité obtenue, ce qui nous donne (B.7).

$$\det(\mathbf{A}^{1,1}(zW_N^p)) = \det(\boldsymbol{\pi}^{-p}) \det(\mathbf{A}^{1,1}(z)) \det(\boldsymbol{\pi}^p) \quad (\text{B.7})$$

Nous déduisons que $\det(\mathbf{A}^{1,1}(zW_N^p)) = \det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ quelque soit $p \in [0 : N - 1]$. Ainsi, en utilisant la propriété préliminaire, on en déduit que $\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))$ est une fonction de z^N .

Nous avons donc montré que $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1} \mathbf{I}_N$ est la matrice modulateurs d'un filtre LIT, ce qui nous permet de déduire de (2.3) que $[\text{com}(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^t$ est la matrice modulateurs d'un filtre LPTV. La conclusion est que l'inverse d'un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est la cascade d'un filtre LIT de transformée en z , $[\det(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^{-1}$, et d'un filtre LPTV de matrice modulateurs $[\text{com}(\mathbf{A}^{1,1}(z))]^t$. Ce dernier filtre LPTV a la propriété d'être RIF si le filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est RIF.

B.2 Filtres LPTV à matrice modulateurs circulaire

Etant donné un filtre LPTV défini par la matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$, d'après la définition (2.10) des matrices circulaires et la définition (1.51) des éléments de $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ en fonction des filtres modulateurs, une matrice modulateurs est circulaire si et seulement si la relation (B.8) est vérifiée pour tout j et p appartenant à $[0 : N - 1]$.

$$T'_j(zW_N^p) = T'_j(z) \quad (\text{B.8})$$

En utilisant la propriété préliminaire démontrée dans l'annexe précédente B.1, on en conclut qu'un filtre LPTV a sa matrice modulateurs circulaire si et seulement si chacun de ses filtres modulateurs $T'_j(z)$ ne possède que sa première composante polyphase non nulle.

B.3 Reconstruction parfaite et inversibilité

Dans le premier chapitre, nous avons introduit une notion d'équivalence entre un filtre LPTV et un banc d'analyse ainsi que l'équivalence entre un filtre LPTV et un banc de synthèse. Nous allons montrer qu'un banc de filtre est à reconstruction parfaite si et seulement si le filtre LPTV équivalent au banc d'analyse est inversible et que, de plus, le filtre LPTV inverse est équivalent au banc de synthèse qui permet la reconstruction parfaite.

Concernant la reconstruction parfaite, étant donné un banc d'analyse et un banc synthèse respectivement de matrices polyphases $\mathbf{F}(z)$ et $\mathbf{G}(z)$ conformément à la figure 1.15, il est montré dans [33] que le banc de filtres est à reconstruction parfaite si et seulement si la matrice polyphase $\mathbf{P}(z) = \mathbf{G}(z)\mathbf{F}(z)$ est de la forme (B.9) où k_0 est tel que le signal reconstruit $x'(n)$ vaut $x(n - (k_0 + N - 1))$ et \mathbf{I}^1 et \mathbf{I}^2 sont les matrices identités de tailles respectives $(N - \underline{k}_{0N})$ et \underline{k}_{0N} .

$$\mathbf{P}(z) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & z^{-\overline{k}_0^N} \mathbf{I}^1 \\ z^{-(\overline{k}_0^N + 1)} \mathbf{I}^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

Parallèlement, pour un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$, nous avons défini l'inversibilité de ce filtre dans le deuxième chapitre par l'existence d'un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{B}^{1,1}(z)$ telle que le produit des deux matrices modulateurs vaut l'identité. Afin de pouvoir comparer avec les bancs de filtres, nous allons ici généraliser la notion de filtre LPTV inverse : un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ est inversible s'il existe un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{r_0}^{1,1}(z)$ tel que la cascade des deux filtres LPTV résulte en un filtre LIT égal à un simple retard z^{-r_0} , c'est à dire que la sortie du filtre inverse $x'(n)$ vaut $x'(n) = x(n - r_0)$ si $x(n)$ est l'entrée du filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$. En évaluant la matrice modulateurs (2.2) du filtre LIT de transformée en z , z^{-r_0} , il est facile de vérifier alors que nous avons la relation (B.10) où $\mathbf{D}_{W_N^-}$ est la matrice diagonale composée des N racines N ième de l'unité (i.e $[D_{W_N^-}]_{i,j} = \delta(i - j)W_N^{-i}$)

$$\mathbf{B}_{r_0}^{1,1}(z)\mathbf{A}^{1,1}(z) = z^{-r_0}(\mathbf{D}_{W_N^-})^{r_0} \quad (\text{B.10})$$

Grâce à la relation (1.50), on a la relation (B.11) équivalente à (B.10) dans la représentation MIMO.

$$\mathbf{B}_{r_0}^{2,2}(z)\mathbf{A}^{2,2}(z) = \frac{z^{-r_0}}{N}\mathbf{F}^+(\mathbf{D}_{W_N^-})^{r_0}\mathbf{F}^- \quad (\text{B.11})$$

Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{F}^+ \mathbf{D}_{W_N}^- = \boldsymbol{\pi} \mathbf{F}^+$ où la matrice $\boldsymbol{\pi}$ est définie par $[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(\underline{i-j-1_N})$. On obtient alors (B.12) à partir de (B.11).

$$\mathbf{B}_{r_0}^{2,2}(z) \mathbf{A}^{2,2}(z) = z^{-r_0} \boldsymbol{\pi}^{r_0} \quad (\text{B.12})$$

A présent, supposons que $\mathbf{A}^{2,2}(z)$ soit la matrice MIMO du filtre LPTV équivalent à un banc d'analyse de matrice polyphase $\mathbf{F}(z)$ et que $\mathbf{B}_{r_0}^{2,2}(z)$ soit la matrice MIMO du filtre LPTV équivalent à un banc de synthèse de matrice polyphase $\mathbf{G}(z)$ alors nous avons (B.13) et (B.14) conformément aux relations (1.66) et (1.67) où \mathbf{I}'_N est la matrice avec la diagonale opposée (i.e $[\mathbf{I}'_N]_{i,j} = \delta(N-1-(j-i))$) et $\boldsymbol{\theta}(z)$ est défini par (1.68) et \mathbf{D}_z est défini par $[\mathbf{D}_z]_{i,j} = \delta(i-j)z^i$.

$$\mathbf{A}^{2,2}(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{F}(z^N) \boldsymbol{\theta}(z^N) \mathbf{D}_z \quad (\text{B.13})$$

$$\mathbf{B}_{r_0}^{2,2}(z) = \mathbf{D}_z^{-1} \mathbf{I}'_N \mathbf{G}(z^N) \mathbf{D}_z \quad (\text{B.14})$$

En remarquant à présent que $(\mathbf{I}'_N)^{-1} = \mathbf{I}'_N$, et en utilisant (B.12) ainsi que (B.13) et (B.14), nous avons pour $\mathbf{P}(z^N) = \mathbf{G}(z^N) \mathbf{F}(z^N)$ l'expression (B.15).

$$\mathbf{P}(z^N) = z^{-r_0} \mathbf{I}'_N \mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1} \boldsymbol{\theta}^{-1}(z^N) \quad (\text{B.15})$$

Nous allons à présent déterminer la forme de la matrice $\mathbf{P}(z^N)$ du banc de filtres équivalent au filtre LPTV. D'après la définition de \mathbf{D}_z et $\boldsymbol{\pi}$, nous avons l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1}$ qui est donné par (B.16).

$$[\mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1}]_{i,j} = z^{i-j} \delta(\underline{i-j-r_{0_N}}) \quad (\text{B.16})$$

Ensuite, la multiplication à gauche par la matrice \mathbf{I}'_N revient à une permutation $i \rightarrow N-1-i$ sur les lignes, d'où à partir de (B.16), on en déduit que l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{I}'_N \mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1}$ est donné par (B.17).

$$[\mathbf{I}'_N \mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1}]_{i,j} = z^{N-1-i-j} \delta(\underline{N-1-i-j-r_{0_N}}) \quad (\text{B.17})$$

Enfin, on remarque d'après la forme (1.68) de $\boldsymbol{\theta}(z)$ que $\boldsymbol{\theta}^{-1}(z) = \boldsymbol{\theta}(z^{-1})$. Ainsi, multiplier une matrice de colonnes C_j à droite par $\boldsymbol{\theta}^{-1}(z^N)$ revient à réaliser l'opération (B.18) sur les colonnes C_j .

$$\begin{cases} C_0 \rightarrow C_0 \\ C_j \rightarrow z^N C_{N-j} \text{ pour } j \in [1 : N-1] \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Ainsi, en appliquant (B.18) à (B.17), on en déduit que l'élément (i, j) de la matrice $\mathbf{P}(z^N) = z^{-r_0} \mathbf{I}'_N \mathbf{D}_z \boldsymbol{\pi}^{r_0} \mathbf{D}_z^{-1} \boldsymbol{\theta}^{-1}(z^N)$ est donné par (B.19).

$$\begin{cases} [\mathbf{P}(z^N)]_{i,0} = z^{-r_0} z^{N-1} z^{-i} \delta(\underline{N-1-i-r_{0N}}) \\ [\mathbf{P}(z^N)]_{i,j} = z^{-r_0} z^{N-1} z^{j-i} \delta(\underline{j-i-1-r_{0N}}) \text{ pour } j \in [1 : N-1] \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Au final, on remarque dans (B.19) que l'expression de $[\mathbf{P}(z^N)]_{i,j}$ est la même pour tout $j \in [0 : N-1]$. On peut donc uniformiser l'écriture de $[\mathbf{P}(z^N)]_{i,j}$ par (B.20) pour tout $j \in [0 : N-1]$.

$$[\mathbf{P}(z^N)]_{i,j} = z^{-r_0} z^{N-1} z^{j-i} \delta(\underline{j-i+N-1-r_{0N}}) \quad (\text{B.20})$$

Il est alors utile de remarquer que $N-1-r_0$ peut s'écrire $-N\bar{r}_0^N + N-1-\underline{r_{0N}}$, ce qui permet d'en déduire, puisque $N-1-\underline{r_{0N}}$ appartient à $[0 : N-1]$, que $\underline{N-1-r_{0N}} = N-1-\underline{r_{0N}}$. D'où de (B.20), on en déduit qu'un seul élément par colonne est non nul et on en déduit les deux cas (B.21) et (B.22) correspondant à $i-j = N-1-\underline{r_{0N}}$ et $i-j = -1-\underline{r_{0N}}$.

$$[\mathbf{P}(z^N)]_{j+N-1-\underline{r_{0N}}, j} = z^{-r_0} z^{N-1} z^{-N+1+\underline{r_{0N}}} = z^{-N\bar{r}_0^N} \text{ pour } j \in [0 : \underline{r_{0N}}] \quad (\text{B.21})$$

$$[\mathbf{P}(z^N)]_{j-(1+\underline{r_{0N}}), j} = z^{-r_0} z^{N-1} z^{1+\underline{r_{0N}}} = z^{-N(\bar{r}_0^N-1)} \text{ pour } j \in [\underline{r_{0N}}+1 : N-1] \quad (\text{B.22})$$

On déduit de (B.21) et (B.22) la forme générale (B.23) de $\mathbf{P}(z)$ où \mathbf{I}'^1 et \mathbf{I}'^2 sont des matrices carrées de tailles respectives $N-1-\underline{r_{0N}}$ et $\underline{r_{0N}}+1$.

$$\mathbf{P}(z) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & z^{-(\bar{r}_0^N-1)} \mathbf{I}'^1 \\ z^{-\bar{r}_0^N} \mathbf{I}'^2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.23})$$

Enfin, pour pouvoir comparer avec (B.9), on pose $r_0 = k_0 + N - 1$. Alors, il y a deux cas, à savoir soit $\underline{r_{0N}} \neq N - 1$ ou soit $\underline{r_{0N}} = N - 1$. Dans le premier cas, on a alors d'après le changement de variable les relations (B.24) et (B.25).

$$\underline{r_{0N}} + 1 = \underline{r_0 + 1}_N = \underline{k_0 + N}_N = \underline{k_{0N}} \quad (\text{B.24})$$

$$\bar{r}_0^N = \overline{r_0 + 1}^N = \overline{k_0 + N}^N = \overline{k_0}^N + 1 \quad (\text{B.25})$$

En utilisant ces deux relations, on en déduit que la matrice $\mathbf{P}(z)$ (B.23) a alors exactement la même forme que la matrice (B.9).

Il reste à regarder la cas $\underline{r}_{0N} = N - 1$. Dans ce cas, nous avons étant donné le changement de variable, les relations (B.26) et (B.27).

$$\underline{r}_0 + \underline{1}_N = \underline{k}_0 + \underline{N}_N = 0 \text{ d'où } \underline{k}_{0N} = 0 \quad (\text{B.26})$$

$$\overline{r}_0 + \overline{1}^N = \overline{r}_0^N + 1 = \overline{k}_0^N + 1 \text{ d'où } \overline{r}_0^N = \overline{k}_0^N \quad (\text{B.27})$$

On vérifie alors que dans ce cas, la matrice (B.23) a de nouveau exactement la même forme que la matrice (B.9). On est dans le cas particulier où la matrice polyphase $\mathbf{P}(z)$ est diagonale.

Nous avons donc montré qu'étant donné un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$, s'il existe un filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{r_0}^{1,1}(z)$ tel que la cascade des deux résulte en un simple retard r_0 alors le banc de filtres composé du banc d'analyse équivalent au filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{A}^{1,1}(z)$ et du banc de synthèse équivalent au filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{r_0}^{1,1}(z)$ est un banc de filtre à reconstruction parfaite avec un retard r_0 . Le raisonnement est équivalent dans le sens inverse et nous avons la propriété réciproque.

Annexe C

Annexes relatives au chapitre 3

C.1 Filtres modulateurs de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

En utilisant l'expression (3.12) des filtres modulateurs en fonction de la fonction PCC ainsi que l'expression (3.17) de la fonction PCC associée à l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes, nous obtenons une expression (C.1) pour les filtres modulateurs qui nous donne l'expression (C.2) en effectuant le changement de variable $n = Pb + c$.

$$T_p(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{pn} z^{(Q-1)c_{P,Q}(n) - (P-1)b_{P,Q}(n)} \quad (\text{C.1})$$

$$= \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{c=0}^{P-1} W_N^{pc} z^{(Q-1)c}}_{\alpha_p(z)} \underbrace{\sum_{b=0}^{Q-1} W_Q^{pb} z^{-(P-1)b}}_{\beta_p(z)} \quad (\text{C.2})$$

Les termes $\alpha_p(z)$ et $\beta_p(z)$ correspondent à deux sommes géométriques. Pour $\alpha_p(z)$, nous avons l'expression (C.3) où $E_\alpha(p) = \left\{ W_{N(Q-1)}^{-p} W_{Q-1}^l \right\}_{l \in [0:Q-2]}$.

$$\begin{cases} \alpha_p(z) = \frac{1 - W_Q^p z^{(Q-1)P}}{1 - W_N^p z^{(Q-1)}} & \text{si } z \notin E_\alpha(p) \\ \alpha_p(z) = P & \text{si } z \in E_\alpha(p) \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

De la même façon, nous avons pour $\beta_p(z)$ l'expression (C.4) où $E_\beta(p) = \left\{ W_{Q(P-1)}^p W_{P-1}^l \right\}_{l \in [0:P-2]}$.

$$\begin{cases} \beta_p(z) = \frac{1-z^{-(P-1)Q}}{1-W_Q^p z^{-(P-1)}} \text{ si } z \notin E_\beta(p) \\ \beta_p(z) = Q \text{ si } z \in E_\beta(p) \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Ensuite, pour obtenir l'expression des $T_p(f)$, il suffit d'évaluer les expressions $\alpha_p(z)$ et $\beta_p(z)$ précédentes en $z = \exp(j2\pi f)$ où f est la fréquence normalisée. En posant alors $E'_\alpha(p) = \left\{ \frac{p}{N(Q-1)} [\frac{1}{Q-1}] \right\}$ et $E'_\beta(p) = \left\{ \frac{-p}{Q(P-1)} [\frac{1}{P-1}] \right\}$, où $[\frac{1}{Q-1}]$ signifie modulo $\frac{1}{Q-1}$, l'expression des $T_p(f)$ est donnée par (C.5).

$$\begin{cases} T_p(f) = \frac{\exp(j\frac{\pi p}{N}) \sin(\pi f P(Q-1) - \frac{\pi}{Q} p)}{N} \frac{\sin(\pi f Q(P-1))}{\sin(\pi f(Q-1) - \frac{\pi}{N} p)} \frac{\sin(\pi f Q(P-1))}{\sin(\pi f(P-1) + \frac{\pi}{Q} p)} \text{ si } f \in [0; 1] \setminus (E'_\alpha(p) \cup E'_\beta(p)) \\ T_p(f) = \frac{\exp(j\frac{\pi p}{N}) \sin(\pi f Q(P-1))}{Q} \frac{\sin(\pi f Q(P-1))}{\sin(\pi f(P-1) + \frac{\pi}{Q} p)} \text{ si } f \in E'_\alpha(p) \setminus E'_\beta(p) \\ T_p(f) = \frac{\exp(j\frac{\pi p}{N}) \sin(\pi f P(Q-1) - \frac{\pi}{Q} p)}{P} \frac{\sin(\pi f P(Q-1) - \frac{\pi}{Q} p)}{\sin(\pi f(Q-1) - \frac{\pi}{N} p)} \text{ si } f \in E'_\beta(p) \setminus E'_\alpha(p) \\ T_p(f) = 1 \text{ si } f \in (E'_\alpha(p) \cap E'_\beta(p)) \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Dans l'expression (C.5), on remarque que l'on peut généraliser l'expression de $T_p(f)$ pour $f \in [0; 1] \setminus (E'_\alpha \cup E'_\beta)$ et prolonger par continuité pour les valeurs de $f \in (E'_\alpha \cup E'_\beta)$ où $T_p(f)$ n'est pas définie.

C.2 CNS sur F pour l'inversibilité d'un PCC

Soit PCC_f un PCC N périodique. Nous supposons que la fonction F associée (3.3) est bijective sur \mathbb{Z} . Nous allons montrer alors qu'il existe une fonction f' de période N qui vérifie la relation (3.20).

Nous définissons H la fonction inverse de F sur \mathbb{Z} . En posant $f'(n) = n - H(n)$, et en utilisant le fait que $F(n) = n - f(n)$, il est facile de vérifier que la fonction f' vérifie la relation (3.20). Ensuite, pour vérifier la N périodicité de f' , nous considérons un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$. Grâce à la bijectivité de F , il existe un entier $n'_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_0 = F(n'_0)$. Puisque $f'(n) = n - H(n)$, nous avons d'une part une expression (C.6) pour $f'(n_0)$ et une expression (C.7) pour $f'(n_0 + N)$.

$$f'(n_0) = n_0 - H(F(n'_0)) = n_0 - n'_0 \quad (\text{C.6})$$

$$f'(n_0 + N) = N + n_0 - H(N + F(n'_0)) \quad (\text{C.7})$$

Mais en utilisant la propriété (3.4) pour la fonction F , la relation (C.7) nous donne $f'(n_0 + N) = n_0 - n'_0$, ce qui nous assure la N périodicité de f' , puisque $f'(n_0) = f'(n_0 + N)$.

Inversement, soit PCC_f un PCC N périodique, nous supposons qu'il existe $PCC_{f'}$ tel que la fonction f' vérifie la relation (3.20). Nous appelons à nouveau $H(n) = n - f'(n)$. Pour montrer la bijectivité de $F(n) = n - f(n)$ sur \mathbb{Z} , nous considérons à nouveau un entier $n_0 \in \mathbb{Z}$. Puisque $H(n) = n - f'(n)$, nous avons pour $F(H(n_0))$ l'expression (C.8), qui en utilisant le fait que $F(n) = n - f(n)$, devient (C.9).

$$F(H(n_0)) = F(n_0 - f'(n_0)) \quad (\text{C.8})$$

$$= n_0 - f'(n_0) - f(n_0 - f'(n_0)) \quad (\text{C.9})$$

En utilisant enfin alors la relation (3.20), nous en concluons que $F(H(n_0)) = n_0$ ce qui nous montre que la fonction H est la fonction inverse de F .

C.3 CNS sur \underline{F} pour l'inversibilité d'un PCC

L'annexe précédente montre qu'un PCC est inversible si et seulement si la fonction F associée est bijective sur \mathbb{Z} . Nous allons à présent montrer que la fonction F est bijective sur \mathbb{Z} si et seulement si la fonction associée \underline{F} définie par la relation (3.3) est une permutation de $[0 : N - 1]$ où N est la période du PCC considéré.

Supposons que F est bijective sur \mathbb{Z} , mais que \underline{F} n'est pas injective sur $[0 : N - 1]$. Cela signifie que nous pouvons trouver deux entiers différents $(n_1, n_2) \in [0 : N - 1]^2$ tels que $\underline{F}(n_1) = \underline{F}(n_2)$. Nous posons alors $p_2 = N [\overline{F}(n_1) - \overline{F}(n_2)] + n_2$. Il est facile de vérifier alors que $\underline{p}_2^N = n_2$ et $\overline{p}_2^N = \overline{F}(n_1) - \overline{F}(n_2)$. Ainsi, en utilisant l'écriture (3.7) pour $F(p_2)$, on en déduit que $F(p_2) - F(n_1) = 0$. Nous avons ainsi trouvé deux entiers p_2 et n_1 distincts tels que $F(p_2) = F(n_1)$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de bijectivité de F sur \mathbb{Z} .

Ce résultat nous permet de conclure que la bijectivité de F sur \mathbb{Z} implique l'injectivité de \underline{F} sur $[0 : N - 1]$. Cependant, la fonction \underline{F} étant définie sur un ensemble fini, l'injectivité est équivalente à la bijectivité. Ainsi, la bijectivité de F sur \mathbb{Z} implique que \underline{F} est une permutation de $[0 : N - 1]$.

Inversement, supposons que \underline{F} est une permutation de $[0 : N - 1]$, nous allons montrer que la fonction F est bijective sur \mathbb{Z} en montrant successivement l'injectivité et la surjectivité de F .

Injectivité de F sur \mathbb{Z} :

Nous considérons deux entiers $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tels que $F(n_1) = F(n_2)$. En utilisant la

relation (3.7) pour les expressions de $F(n_1)$ et $F(n_2)$, nous obtenons l'égalité suivante (C.10).

$$N \{ \overline{n_2}^N - \overline{n_1}^N + \overline{F}(n_{2_N}) - \overline{F}(n_{1_N}) \} = \underline{F}(n_{1_N}) - \underline{F}(n_{2_N}) \quad (\text{C.10})$$

De l'expression précédente, nous en déduisons que $\underline{F}(n_1) - \underline{F}(n_2)$ est un multiple de N . Or, ce terme est nécessairement strictement inférieur à N en valeur absolue d'après la définition (3.3) ce qui nous permet de conclure que $\underline{F}(n_1) = \underline{F}(n_2)$. Puisque la fonction \underline{F} est injective sur $[0 : N - 1]$, on en déduit donc que $n_1 = n_2$. Enfin, la relation (C.10) nous permet de conclure $\overline{n_2} = \overline{n_1}$. Finalement, on en conclut que $n_1 = n_2$.

Surjectivité de F sur \mathbb{Z} :

Nous considérons un entier $p \in \mathbb{Z}$. Puisque \underline{F} est bijective sur $[0 : N - 1]$, il existe $n_0 \in [0 : N - 1]$ tel que $\underline{F}(n_0) = \underline{p}_N$. Il est alors facile de vérifier en utilisant l'expression (3.7) que pour $n' = N\overline{p}^N + n_0 - N\overline{F}(n_{0_N})$, nous avons $F(n') = p$ ce qui assure la surjectivité de F .

C.4 Structure de groupe de $\tilde{\Theta}(N)$

Il est utile de rappeler au préalable les 4 axiomes à vérifier pour qu'un ensemble E muni d'une loi interne \bullet soit un groupe.

C₁ : Stabilité de E par la loi \bullet : $\forall (a, b) \in E^2, a \bullet b \in E$

C₂ : Associativité de la loi \bullet : $\forall (a, b, c) \in E^3, (a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c) = a \bullet b \bullet c$

C₃ : Existence de l'élément neutre : $\exists! e \in E$ tel que $\forall a \in E, a \bullet e = e \bullet a = a$.

C₄ : Existence d'un inverse dans E pour tout élément de E : $\forall a \in E, \exists! a^{-1} \in E$ tel que $a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$.

Stabilité de $\tilde{\Theta}(N)$ par la loi de cascade " \bullet " :

Nous considérons deux PCC $(PCC_f, PCC_g) \in \tilde{\Theta}(N)^2$. Nous savons déjà que la cascade de ces deux PCC, $PCC_h = PCC_f \bullet PCC_g$, est un PCC de $\Theta(N)$ d'après le résultat (3.19). Il nous font donc montrer que $PCC_h \in \tilde{\Theta}(N)$. D'après la CNS 2 sur l'inversibilité d'un PCC, si nous appelons $H(n) = n - h(n)$, il suffit de montrer que la fonction \underline{H} définie en (3.3) est une permutation de $[0 : N - 1]$. Pour cela, nous appelons F et G les fonctions associées (3.3) respectivement aux fonctions PCC f et g . D'après la relation (3.19), il est facile d'obtenir pour \underline{H} l'expression (C.11) qui en raison de la propriété (3.6) de périodicité de la fonction \underline{F} , nous

donne (C.12).

$$\underline{H}(n) = \underline{F}(G(n)) = \underline{F}(N\overline{G}(n) + \underline{G}(n)) \quad (\text{C.11})$$

$$= \underline{F}(\underline{G}(n)) \quad (\text{C.12})$$

Ainsi, comme composition de deux permutations de $[0 : N - 1]$, \underline{H} est une permutation de $[0 : N - 1]$ et nous avons le résultat attendu.

Associativité de la loi " • " :

Nous considérons trois PCC $(PCC_f, PCC_g, PCC_h) \in \tilde{\Theta}(N)^3$, il est alors facile de vérifier en utilisant la formule de PCC équivalent (3.19) que $[PCC_f \bullet PCC_g] \bullet PCC_h = PCC_f \bullet [PCC_g \bullet PCC_h]$.

Existence d'un élément neutre e dans $\tilde{\Theta}(N)$ pour la loi " • " :

Il est facile de vérifier en utilisant de nouveau la formule de PCC équivalent (3.19) que le PCC de fonction $e(n) = 0$ est élément neutre à droite et à gauche pour la loi " • ". Cette fonction est naturellement N périodique pour tout N . De plus, $\forall N \in \mathbb{N}$, la fonction E associée (3.3) vérifie $\underline{E}(n)_N = \underline{n}_N$ qui est la permutation identité sur $[0 : N - 1]$. Ainsi, d'après la CNS 2 sur l'inversibilité, $PCC_e \in \tilde{\Theta}(N)$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Existence d'un inverse dans $\tilde{\Theta}(N)$:

Par définition de $\tilde{\Theta}(N)$, cet ensemble est la restriction de $\Theta(N)$ aux PCC inversibles caractérisé par la CNS 2 sur l'inversibilité d'un PCC. Ainsi, soit $PCC_f \in \tilde{\Theta}(N)$, il existe un PCC_g tel que $PCC_f \bullet PCC_g = PCC_e$. De plus, si nous appelons F et G les fonctions (3.3) associées à PCC_f et PCC_g , l'annexe C.2 a montré que $G = F^{-1}$. Nous en déduisons que la fonction G est bijective sur \mathbb{Z} et que $G^{-1} = F$. On en conclut, d'après la CNS 1 sur l'inversibilité d'un PCC, que $PCC_g \in \tilde{\Theta}(N)$ et que $PCC_g \bullet PCC_f = PCC_e$. Ainsi, il existe un PCC_g de $\tilde{\Theta}(N)$ qui est inverse à droite et à gauche de PCC_f ce qui démontre le quatrième axiome.

Nous allons à présent préciser une relation pour G et pour g qui seront utiles pour la suite. Pour cela, nous appliquons les résultats (3.37) et (3.38) du quatrième chapitre qui nous permettent d'exprimer séparément les fonctions \underline{G} et \overline{G} du PCC inverse de PCC_f . Ainsi, nous obtenons l'expression (C.13) pour G .

$$G(n) = N [\overline{n}^N - \overline{F}(F^{-1}(\underline{n}_N))] + \underline{F}^{-1}(\underline{n}_N) \quad (\text{C.13})$$

De même, nous appliquons la relation (3.39) qui nous permet d'obtenir l'expression suivante

(C.14) pour g .

$$g(n) = N\overline{F}(F^{-1}(n)) + \underline{n}_N - \underline{F}^{-1}(n) \quad (\text{C.14})$$

C.5 Relations entre q et N pour un PCC q – bloc et N périodique

Nous allons démontrer les cinq résultats entre les entiers q et N pour un PCC q -bloc de $B(N)$. Nous précisons au préalable un résultat arithmétique utile pour la suite :

Etant donné $(a, b, N) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, la fonction $G_a(n) = \underline{bn} + \underline{a}_N$ est une permutation de $[0 : N - 1]$ si et seulement si $b \wedge N = 1$.

Résultat 1 :

Nous considérons $PCC_f \in \Theta(N)$ avec l'hypothèse que PCC_f est q – bloc et que $q \wedge N = 1$. Nous supposons que la fonction f est différente de la fonction nulle, c'est à dire que PCC_f est différent de l'élément neutre de la loi "•". Sous cette hypothèse, il existe un entier $n_0 \in [0 : N - 1]$ tel que $F(n_0) \neq n_0$. Nous supposons que $F(n_0) > n_0$, la démonstration étant symétrique dans le cas contraire. Pour un entier $p \in \mathbb{Z}$, nous définissons la fonction θ_p par (C.15). Cette fonction peut aussi s'écrire (C.16) en utilisant la division euclidienne par q .

$$\theta_p = q \left[\overline{F(n_0) + pN^q} - \overline{n_0 + pN^q} \right] \quad (\text{C.15})$$

$$= F(n_0) - n_0 - \frac{F(n_0) + pN_q}{q} + \frac{n_0 + pN_q}{q} \quad (\text{C.16})$$

L'hypothèse que PCC_f est q – bloc implique d'après la caractérisation d'un PCC q – bloc que $\theta_0 = \overline{F(n_0)}^q - \overline{n_0}^q = 0$. De plus, comme $q \wedge N = 1$, le résultat arithmétique au début de cette annexe nous indique que la fonction $\overline{F(n_0) + pN_q}$, comme fonction de p , est une bijection de $[0 : q - 1]$ dans $[0 : q - 1]$. Il existe donc un entier p' de $[0 : q - 1]$ qui vérifie $\overline{F(n_0) + p'N_q} = 0$. Nous avons alors pour cette valeur de p' : $\underline{n_0 + p'N_q} \geq 0$. Comme par hypothèse $F(n_0) > n_0$, nous en déduisons d'après l'expression (C.16) que $\theta_{p'} > 0$. Enfin en utilisant la propriété (3.4) pour F dans l'expression (C.15), la propriété $\theta_{p'} > 0$ signifie que nous venons de trouver un entier $n_0 + p'N$ tel que $\overline{F(n_0 + p'N)}^q \neq \overline{n_0 + p'N}^q$. Cette relation est incompatible avec la propriété de nature q bloc de PCC_f . Nous en concluons par l'absurde que la fonction f est nécessairement la fonction nulle.

Résultat 2 :

Nous considérons $PCC_f \in \Theta(N)$. Si f est la fonction nulle alors PCC_f est q – bloc quelque soit q et nous avons le résultat. Supposons alors que la fonction f n'est pas la fonction nulle.

D'après le résultat précédent, nous savons que q et N ne sont pas premiers entre eux. Il existe donc deux entiers N' et q' tels que $q' \wedge N' = 1$ et $F_c = \text{PGCD}(N, q)$ tels que $N = N'F_c$ et $q = q'F_c$.

Nous voulons montrer que si PCC_f est $q - \text{bloc}$, alors il est aussi F_c -bloc. Pour cela, nous supposons que PCC_f est $q - \text{bloc}$, mais pas F_c -bloc. Alors, d'après la caractérisation de la nature bloc sur la fonction F , il existe deux entiers n_0 tels que $F(n_0)$ et n_0 n'appartiennent pas au même bloc de taille q . Autrement dit, il existe deux entiers n_0 et i_0 tels que la relation suivante (C.17) est valable. Notons que l'inégalité pourrait être dans le sens inverse, mais la preuve serait symétrique.

$$n_0 < i_0 F_c \leq F(n_0) \tag{C.17}$$

A présent, nous définissons une fonction $\theta_p = \frac{i_0 F_c + pN}{q} = \frac{F_c(i_0 + pN')}{q}$. Il est facile de vérifier que pour trois entiers (n, a, b) , nous avons $\frac{na}{ab} = \frac{an}{b}$. En appliquant ce résultat à θ_p , nous obtenons $\theta_p = \frac{F_c(i_0 + pN')}{q}$. A présent, puisque $q' \wedge N' = 1$, nous pouvons appliquer le résultat arithmétique présenté au début de cette annexe C.5. C'est à dire qu'il existe un entier $p' \in [0 : q' - 1]$ tel que $\theta_{p'} = 0$. Ainsi, en ajoutant $p'N$ à chacun des termes de l'inégalité (C.17), nous obtenons la nouvelle inégalité (C.18) puisque $\frac{i_0 F_c + p'N}{q} = 0$ et à cause de la relation (3.4) pour F .

$$n_0 + p'N < \overline{q(i_0 F_c + p'N)^q} \leq F(n_0 + p'N) \tag{C.18}$$

Ainsi, la conclusion de cette inégalité (C.18) est que nous avons trouvé un entier $n_0 + p'N$ tel que $\overline{n_0 + p'N^q} \neq \overline{F(n_0 + p'N)^q}$. Autrement dit, $n_0 + p'N$ et $F(n_0 + p'N)$ n'appartiennent pas au même bloc de taille q ce qui est incompatible avec la nature q -bloc de PCC_f .

Résultat 3 :

Pour montrer ce résultat, nous considérons $PCC_f \in B(N)$. Par définition de $B(N)$, il existe un entier q tel que PCC_f est $q - \text{bloc}$. Mais d'après le résultat 2 précédent, PCC_f est $\text{PGCD}(N, q) - \text{bloc}$. Cependant, si un PCC est $q - \text{bloc}$, il est évident d'après la définition de (3.22) que ce PCC est aussi $aq - \text{bloc}$ si a est un entier de \mathbb{N}^* . Puisque $\text{PGCD}(N, q)$ divise nécessairement N , on en déduit que PCC_f est $N - \text{bloc}$.

Résultat 4 :

Ce résultat est la traduction du résultat précédent 3 sur la fonction F .

Résultat 5 :

Ce résultat est une conséquence des résultats 1 et 2.

C.6 Structure de groupe de $\tilde{B}(N)$

Puisque $\tilde{B}(N) \subset \tilde{\Theta}(N)$, il suffit de montrer que $\tilde{B}(N)$ est un sous groupe de $\tilde{\Theta}(N)$. Nous rappelons ici les deux propriétés à vérifier pour qu'un ensemble E' inclus dans un groupe E soit un sous groupe de E :

C_1 : Stabilité de E' par la loi \bullet : $\forall(a, b) \in E'^2, a \bullet b \in E'$

C_2 : Existence d'un inverse dans E' : $\forall a \in E', a^{-1} \in E'$

Stabilité de $\tilde{B}(N)$ par la loi de cascade " \bullet " :

Nous considérons PCC_f et PCC_g appartenant à $\tilde{B}(N)$. Nous allons montrer que $PCC_h = PCC_f \bullet PCC_g$ appartient à $\tilde{B}(N)$. Pour cela, nous appelons H, F et G les fonctions (3.3) associées aux 3 PCC. Nous savons que $H(n) = G(F(n))$ ce qui nous donne pour $H(n)$ l'expression (C.19). Mais en utilisant la caractérisation (3.23) pour les PCC blocs, nous avons pour $H(n)$ l'expression (C.20) ce qui nous assure de la nature bloc de PCC_h .

$$H(n) = N\overline{G}(N\overline{F}(n) + \underline{F}(n)) + \underline{G}(N\overline{F}(n) + \underline{F}(n)) \quad (C.19)$$

$$= N\overline{n}^N + \underline{G}(\underline{F}(n)) \quad (C.20)$$

Existence d'un inverse dans $\tilde{B}(N)$:

Nous considérons $PCC_f \in \tilde{B}(N)$ et nous voulons vérifier que le PCC inverse de fonction g appartient à $\tilde{B}(N)$. Nous appelons F et G les fonctions (3.3) associées aux deux PCC. La relation (C.13) nous donne l'expression de G en fonction de F . Mais en utilisant la caractérisation bloc (3.23) pour F , on en déduit la relation (C.21) pour $G(n)$ dont la forme nous assure l'appartenance de PCC_g à $\tilde{B}(N)$.

$$G(n) = N\overline{n}^N + \underline{F}^{-1}(n) \quad (C.21)$$

C.7 Structure de groupe de $\tilde{C}(N)$

Puisque $\tilde{C}(N) \subset \tilde{\Theta}(N)$, il nous suffit de montrer la structure de sous groupe de $\tilde{C}(N)$ en vérifiant les deux propriétés caractérisant un sous groupe présentées dans l'annexe C.6.

Stabilité de $\tilde{C}(N)$ par la loi de cascade " \bullet " :

Nous considérons PCC_f et PCC_g appartenant à $\tilde{C}(N)$. Nous allons montrer que $PCC_h = PCC_f \bullet PCC_g$ appartient à $\tilde{C}(N)$. D'après la relation (C.12), nous savons que $\underline{H}(n) = \underline{F}(\underline{G}(n))$.

Mais la caractérisation (3.24) d'un PCC convolutionnel nous indique que $\underline{F}(n) = \underline{G}(n) = \underline{n}_N$ ce qui nous donne $\underline{H}(n) = \underline{n}_N$ et prouve que $PCC_h \in \tilde{C}(N)$.

Existence d'un inverse dans $\tilde{C}(N)$:

Soit $PCC_f \in \tilde{C}(N)$, nous désirons vérifier que le PCC inverse PCC_g appartient aussi à $\tilde{C}(N)$. Pour cela, nous utilisons la relation (C.13) qui nous indique que $\underline{G}(n) = \underline{F}^{-1}(n)$. Mais d'après la caractérisation (3.24) d'un PCC convolutionnel, nous avons $\underline{F}^{-1}(n) = \underline{F}(n) = \underline{n}_N$ ce qui nous permet de conclure que $\underline{G}(n) = \underline{n}_N$ et que donc $PCC_g \in \tilde{C}(N)$.

C.8 Intersection de $\tilde{C}(N)$ et $\tilde{B}(N)$

Nous considérons PCC_f appartenant à $\tilde{C}(N) \cap \tilde{B}(N)$ et nous notons F la fonction associée (3.3) à ce PCC. D'après les caractérisations (3.24) d'un PCC convolutionnel et (3.23) d'un PCC bloc, nous avons pour ce PCC $\overline{F}(n) = \overline{n}^N$ et $\underline{F}(n) = \underline{n}_N$ ce qui permet de conclure que $F(n) = N\overline{n}^N + \underline{n}_N$. Autrement dit, $F(n) = n$, ce qui implique que $f(n) = 0$. L'intersection de $\tilde{C}(N)$ et $\tilde{B}(N)$ est réduite à l'élément neutre de la loi " \bullet ".

C.9 Décomposition Bloc/Convolutionnel de tout PCC

Nous considérons PCC_f appartenant à $\Theta(N)$ et de fonctions associées (3.3), nous allons vérifier que la cascade d'un PCC bloc de fonction PCC $f_b(n)$ (3.26) et d'un PCC convolutionnel de fonction PCC $f_c(n)$ (3.25) nous donne PCC_f . Pour cela, nous utilisons la loi de cascade (3.19). Si nous appelons $h = f_b \bullet f_c$, nous avons pour h l'expression (C.22).

$$\begin{aligned} h(n) &= f_c(n) + f_b(n - f_c(n)) \\ &= -\overline{F}(\underline{n}_N)N + \underline{n}_N - \underline{F}(n) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Mais $\underline{F}(n) = \underline{F}(\underline{n}_N)$ par périodicité (3.6). Nous en déduisons alors que $\underline{F}(n) + \overline{F}(\underline{n}_N)N = \underline{F}(\underline{n}_N)$. Nous en concluons que $h(n) = \underline{n}_N - \underline{F}(\underline{n}_N) = f(n)$.

Nous allons à présent vérifier l'unicité de la décomposition dans le cas d'un PCC de $\tilde{\Theta}(N)$. Supposons pour cela qu'il existe deux couples $(PCC_{f_b}, PCC_{f_c}) \in \tilde{B}(N) \times \tilde{C}(N)$ et $(PCC_{f'_b}, PCC_{f'_c}) \in \tilde{B}(N) \times \tilde{C}(N)$ qui vérifient la décomposition bloc/convolutionnel précédente. Nous avons donc la double égalité suivante.

$$PCC_f = PCC_{f_b} \bullet PCC_{f_c} = PCC_{f'_b} \bullet PCC_{f'_c} \quad (\text{C.23})$$

Par la nature de groupe de $\tilde{B}(N)$ et $\tilde{C}(N)$, il existe $(PCC_{g'_b}, PCC_{g_c}) \in \tilde{B}(N) \times \tilde{C}(N)$ inverses respectivement de $PCC_{f'_b}$ et PCC_{f_c} . Ainsi, en composant à droite et à gauche les deux membres de l'expression (C.23) respectivement par PCC_{g_c} et $PCC_{g'_b}$, nous obtenons la relation (C.24).

$$PCC_{g'_b} \bullet PCC_{f_b} = PCC_{f'_c} \bullet PCC_{g_c} \quad (\text{C.24})$$

Ainsi, à droite de l'expression (C.24), nous avons un PCC convolutionnel, et à gauche, nous avons un PCC bloc. Or nous avons montré que l'intersection de $\tilde{C}(N)$ et $\tilde{B}(N)$ est réduite à l'élément neutre. On en déduit que $PCC_{g'_b} \bullet PCC_{f_b} = PCC_e$ et $PCC_{f'_c} \bullet PCC_{g_c} = PCC_e$ et donc que $f'_b = f_b$ et $f'_c = f_c$.

La démonstration se fait de façon similaire dans le cas de la décomposition Convolutionnel/Bloc d'un PCC.

C.10 Décomposition d'un PCC en la cascade de deux PCC

Nous détaillons dans cette annexe la démarche et les calculs adoptés pour résoudre le problème de la décomposition de $PCC_f \in \tilde{\Theta}(N)$ en $PCC_f = PCC_h \bullet PCC_g$ avec $(PCC_h, PCC_g) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ et l'hypothèse arithmétique (3.42) sur P, Q et N . Le principe de la méthode est de projeter l'équation temporelle (3.41) dans le domaine fréquentiel grâce à l'outil de TFD calculé sur N points et d'utiliser les filtres modulateurs associés au PCC de fonction g . Pour cela, nous avons besoin de démontrer quelques propriétés préliminaires et de définir quelques notations.

Propriétés et définitions préliminaires :

Soit une séquence temporelle $\{a(n)\}_{n \in [0:N-1]}$, la TFD de cette séquence calculée sur N points, notée $\{A_k\}_{k \in [0:N-1]}$, est définie par (C.25). De plus, si nous appelons $A(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)z^{-n}$ la transformée en z de cette séquence, les coefficients de TFD et sa transformée en z sont liés par la relation (C.26).

$$A_k = \sum_{n=0}^{N-1} a(n)W_N^{kn} \quad \text{et} \quad a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k W_N^{-kn} \quad (\text{C.25})$$

$$A_k = A(z = W_N^{-k}) \quad (\text{C.26})$$

Si nous considérons une séquence temporelle P périodique $\{a(n)\}_{n \in [0:P-1]}$, le calcul de la TFD sur N points où $N = PQ$ de la séquence $\{a(n)\}$ répétée Q fois nous donne seulement P

termes non nuls donnés par (C.27).

$$A_{kQ} = Q \sum_{n=0}^{P-1} a(n) W_P^{kn} \quad \text{et} \quad a(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{P-1} A_{kQ} W_P^{-kn} \quad (\text{C.27})$$

Dans ce résultat, les entiers P et Q jouent un rôle symétrique. Ce résultat reste donc valable si on échange P et Q .

Nous introduisons la fonction θ définie par (3.43) dont il est facile de vérifier la bijectivité de $[0; Q-1] \times [0; P-1]$ dans $[0; N-1]$ avec l'hypothèse $P \wedge Q = 1$. Nous notons alors $\theta^{-1}(n) = (q_n, p_n)$.

Projection de l'équation temporelle (3.41) dans le domaine fréquentiel

Nous allons projeter le problème dans le domaine fréquentiel. Pour cela, nous notons $h'(n) = h(n - g(n))$ le second terme dans l'équation temporelle (3.41). Il est alors intéressant de remarquer que $h'(n)$ correspond à l'application du PCC de fonction g et de période P à la séquence temporelle $h(n)$. Ainsi, si nous appelons $\{T_p^g(z)\}_{p \in [0; N-1]}$ les filtres modulateurs associés au PCC de fonction g considéré comme N périodique, en appliquant la relation (1.35), nous avons la relation suivante (C.28) entre les transformées en z , $H'(z)$ et $H(z)$ respectivement de $\{h'(n)\}_{n \in [0; N-1]}$ et $\{h(n)\}_{n \in [0; N-1]}$.

$$H'(z) = \sum_{n=0}^{N-1} T_n^g(z W_N^n) H(z W_N^n) \quad (\text{C.28})$$

Mais, en remarquant que dans la relation (3.12), les filtres modulateurs $\{T_p^g(z)\}_{p \in [0; N-1]}$ associés au PCC de fonction g sont obtenus par TFD des $\{z^{-g(n)}\}_{n \in [0; N-1]}$ et en rappelant que la séquence des $z^{-g(n)}$ est une séquence P périodique, il est possible d'appliquer le résultat (C.27). On sait alors que seuls les P filtres modulateurs $\{T_{pQ}^g(z)\}_{p \in [0; P-1]}$ sont non nuls. En utilisant ce résultat, la relation (C.28) devient (C.29).

$$H'(z) = \sum_{p=0}^{P-1} T_{pQ}^g(z W_N^{pQ}) H(z W_N^{pQ}) \quad (\text{C.29})$$

A présent, nous calculons la TFD sur N points de chacun des membres de l'égalité temporelle (3.41). Ainsi, si nous appelons $\{F_k, G_k, H_k'\}_{k \in [0; N-1]}$ les coefficients de TFD respectivement des séries temporelles $\{f(n), g(n), h'(n)\}_{n \in [0; N-1]}$, l'équation (3.41) peut se réécrire (C.30).

$$F_k = G_k + H_k' \quad (\text{C.30})$$

Nous allons étudier chacun des termes de cette équation. Tout d'abord, les $\{G_k\}_{k \in [0:N-1]}$ correspondent à la TFD de la série g qui est P périodique donc en utilisant la propriété (C.27), on en déduit la relation (C.31) pour les $\{G_k\}_{k \in [0:N-1]}$.

$$G_k = \delta(\underline{k}_Q) G_{Q\bar{k}^Q} \quad (\text{C.31})$$

Pour l'expression des $\{H'_k\}_{k \in [0:N-1]}$, nous utilisons la relation (C.29) tout en utilisant la relation (C.26) entre transformée en z et TFD et nous obtenons l'expression (C.32) pour H'_k .

$$H'_k = \sum_{p=0}^{P-1} T_{pQ}^g (W_N^{pQ-k}) H_{\underline{k-pQ}_N} \quad (\text{C.32})$$

Enfin, dans cette expression, les $\{H_k\}_{k \in [0:N-1]}$ correspondent à la TFD de la série h qui est Q périodique donc en utilisant la propriété (C.27), on en déduit que $H_k = \delta(\underline{k}_P) G_{P\bar{k}^P}$. Cela implique que dans la somme (C.32), les seuls termes non nuls pour un k fixé correspondent aux valeurs de p qui vérifient $k = \underline{pQ + qP}_N$ où $q \in [0 : Q - 1]$. En utilisant la fonction θ définie par (3.43), cela revient à chercher l'ensemble des couples (q, p) de $[0 : Q - 1] \times [0 : P - 1]$ tels que $\theta(q, p) = k$. Mais la bijectivité de θ implique que ce couple est unique. Nous notons alors $(q_k, p_k) = \theta^{-1}(k)$ ce qui pour H'_k donne (C.33).

$$H'_k = T_{Qp_k}^g (W_N^{-Pq_k}) H_{Pq_k} \quad (\text{C.33})$$

Ainsi, en utilisant les expressions (C.31) et (C.33), l'équation fréquentielle (C.30) devient (C.34).

$$F_k = \delta(\underline{k}_Q) G_{Q\bar{k}^Q} + T_{Qp_k}^g (W_N^{-Pq_k}) H_{Pq_k} \quad (\text{C.34})$$

Nous avons donc transformé le problème temporel (3.41) en une équation fréquentielle. L'intérêt de cette transformation est qu'elle a permis de séparer les grandeurs H_k liées à $h(n)$ et les grandeurs G_k liées à $g(n)$ ce qui n'était pas le cas dans la formulation temporelle initiale. En effet, nous allons voir qu'un choix approprié des valeurs de k dans cette équation va permettre une séparation des H_k et des G_k , ce qui va nous permettre de trouver deux conditions nécessaires pour la faisabilité de la décomposition de PCC_f .

Expression de la première condition nécessaire : CN1

Dans l'expression (C.34), nous choisissons k de la forme pQ . Pour un tel choix, nous avons $\theta^{-1}(k) = (0, p)$. Nous obtenons alors les P équations suivantes pour $0 \leq p \leq P - 1$.

$$F_{pQ} = G_{pQ} + T_{pQ}^g(1) H_0 \quad (\text{C.35})$$

Mais d'après l'expression (3.12) des filtres modulateurs et le résultat (C.27), nous avons $T_{pQ}^g(1) = \frac{Q}{N} \sum_{n=0}^{P-1} W_P^{pn} = \delta(p)$. En injectant ce résultat, la relation précédente (C.35) devient (C.36).

$$G_{pQ} = F_{pQ} - \delta(p)H_0 \quad (\text{C.36})$$

A présent, si nous voulons retrouver l'expression de $g(n)$, il suffit de prendre la TFD inverse de l'expression (C.36) en utilisant la relation (C.27) puisque la fonction $g(n)$ est P périodique. Nous obtenons alors l'expression (C.37) pour $g(n)$.

$$g(n) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{P-1} G_{pQ} W_P^{-pn} = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{P-1} F_{pQ} W_N^{-pQn} - \overbrace{\frac{H_0}{N} \sum_{p=0}^{P-1} \delta(p) W_P^{-pn}} \quad (\text{C.37})$$

Dans cette expression, il nous faut encore évaluer le premier terme. Pour cela, nous exprimons les F_{pQ} en fonction des $f(n)$ grâce à l'expression (C.25).

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{P-1} F_{pQ} W_N^{-pQn} &= \sum_{p=0}^{P-1} W_N^{-pQn} \sum_{m=0}^{N-1} f(m) W_N^{pQm} \\ &= P \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \delta(\underline{m - n_P}) = P \sum_{m=0}^{Q-1} f(n + mP) \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Finalement, on obtient le résultat (C.39) pour $g(n)$ où H_0 par définition vaut $P \sum_{m=0}^{Q-1} h(m)$.

$$g(n) = \frac{1}{Q} \sum_{m=0}^{Q-1} f(n + mP) - \frac{H_0}{N} \quad (\text{C.39})$$

On déduit ainsi de cette expression la première condition nécessaire sur f pour la faisabilité de la décomposition. En effet, on s'intéresse à la décomposition d'un PCC de fonction f inversible. Cela implique que nécessairement le PCC de fonction h est inversible. Or nous avons montré dans la partie liée à la décomposition bloc/convolutionnel qu'un PCC h inversible de période Q vérifie nécessairement que $\sum_{m=0}^{Q-1} h(m)$ est un multiple de Q , ce qui implique que $H_0 = P \sum_{m=0}^{Q-1} h(m)$ est multiple de N . La nécessité que $g(n)$ soit à valeurs entières implique donc, d'après l'équation (C.39), que $\forall p \in [0 : P - 1]$, Q doit diviser $\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP)$. De plus, nous avons obtenu l'expression à un paramètre près de la fonction $g(n)$ en fonction de $f(n)$.

Expression de la seconde condition nécessaire : CN2

Dans l'équation (C.34), nous avons exploité P équations sur les N équations initiales. Il reste à exploiter les $(Q - 1)P$ équations restantes qui correspondent aux valeurs de $k = \theta(q_k, p_k)$ avec $q_k \in [1 : Q - 1]$ et $p_k \in [0 : P - 1]$. Évaluée pour ces valeurs de k , l'équation (C.34) devient (C.40).

$$F_k = T_{Qp_k}^g (W_N^{-Pq_k}) H_{Pq_k} \quad (\text{C.40})$$

En exprimant alors $T_{Qp_k}^g (W_N^{-Pq_k})$ grâce à l'expression (3.12) des filtres modulateurs et la relation (C.27) puisque g est une série temporelle P périodique, il est facile de vérifier que le système précédent (C.40) s'écrit (C.41) où les coefficients $A(p_k, q_k)$ sont exprimés par (3.45).

$$F_k = A(p_k, q_k) W_Q^{-q_k \frac{H_0}{N}} H_{Pq_k} \quad (\text{C.41})$$

Cette équation nous permet d'obtenir la seconde condition nécessaire pour la faisabilité de la décomposition de PCC_f . En effet, on remarque que le système des $(Q - 1)P$ équations précédentes est possible si le facteur $\frac{F_k}{A(p_k, q_k)}$ est indépendant de p_k . Nous notons alors $\alpha(q_k) = \frac{F_k}{A(p_k, q_k)}$ si cette seconde condition nécessaire est vérifiée par PCC_f .

Expression des couples admissibles pour la décomposition de PCC_f

Si les deux conditions nécessaires précédentes sont vérifiées, le PCC de fonction f est décomposable selon la relation (3.41). La fonction g est donnée par la relation (C.39) en fonction de f et les Q coefficients de TFD non nuls de $h(n)$ sont donnés par $H_{Pq_k} = \alpha(q_k) W_Q^{q_k \frac{H_0}{N}}$. Nous remarquons alors que ces deux déterminations des grandeurs liées à $g(n)$ et $h(n)$ sont paramétrées par le paramètre $H_0 = P \sum_{m=0}^{Q-1} h(m)$. Mais, nous avons vu dans la discussion de la première condition nécessaire que puisque h est la fonction d'un PCC inversible de période Q , nous savons que nécessairement $\sum_{m=0}^{Q-1} h(m)$ est un multiple de Q . Ainsi H_0 est un paramètre libre sous la forme $H_0^j = jN$. Nous en déduisons alors qu'il existe une infinité de couples admissibles $(PCC_{h_j}, PCC_{g_j}) \in \tilde{\Theta}(Q) \times \tilde{\Theta}(P)$ tels que $PCC_f = PCC_{h_j} \bullet PCC_{g_j}$. Les expressions des fonctions g_j et h_j sont données par (C.42) et (C.43).

$$g_j(n) = \frac{1}{Q} \sum_{m=0}^{Q-1} f(n + mP) - j \quad (\text{C.42})$$

$$h_j(n) = \frac{1}{N} \sum_{q=0}^{Q-1} H_{qP}^j W_Q^{-qn} = j + \frac{1}{N} \sum_{q=1}^{Q-1} \alpha(q) W_Q^{-q(n-j)} \quad (\text{C.43})$$

Il est facile de vérifier alors que les fonctions g_j et h_j pour $j \neq 0$ sont respectivement fonctions de g_0 et h_0 selon les relations (C.44) et (C.45).

$$g_j(n) = g_0(n) - j \quad (\text{C.44})$$

$$h_j(n) = j + h_0(n - j) \quad (\text{C.45})$$

C.11 Décomposition de l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes

Nous allons démontrer que l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes est décomposable en la cascade de PCC h et g de périodes respectives Q et P si $P \wedge Q = 1$. Pour cela, nous allons montrer que la fonction PCC associée à cet entrelaceur vérifie le couple de conditions nécessaires et suffisantes énoncées dans la partie précédente.

Première condition pour la faisabilité de la décomposition

Il s'agit de vérifier que $\forall p \in [0 : P - 1]$, Q divise $\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP)$. Or, nous avons déterminé l'expression (3.17) de la fonction PCC associée à l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes. Nous avons donc la relation (C.46) pour $p \in [0 : P - 1]$.

$$\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP) = -(Q - 1) \sum_{m=0}^{Q-1} c_{P,Q}(p + mP) + (P - 1) \sum_{m=0}^{Q-1} b_{P,Q}(p + mP) \quad (\text{C.46})$$

Mais d'après la définition (3.16) des $c_{P,Q}(n)$ et $b_{P,Q}(n)$, nous avons d'une part $c_{P,Q}(p + mP) = p$ et $\sum_{m=0}^{Q-1} b_{P,Q}(p + mP) = \sum_{m=0}^{Q-1} m$. La relation précédente devient alors (C.47).

$$\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP) = Q \left[\frac{(P - 1)(Q - 1)}{2} - (Q - 1)p \right] \quad (\text{C.47})$$

Mais comme P et Q sont premiers entre eux, un des deux entiers $P - 1$ ou $Q - 1$ est pair, donc l'expression précédente est nécessairement multiple de Q .

Seconde condition pour la faisabilité de la décomposition

Pour vérifier que la seconde condition est vérifiée, nous allons exprimer le coefficient $A(p_k, q_k)$ défini par la relation (3.45) en utilisant l'expression précédente (C.47) de $\sum_{m=0}^{Q-1} f(p + mP)$. Nous avons alors l'expression suivante (C.48) pour $A(p_k, q_k)$.

$$A(p_k, q_k) = \frac{1}{P} W_Q^{q_k \frac{(P-1)(Q-1)}{2}} \sum_{m=0}^{P-1} W_P^{p_k m} W_Q^{q_k m} \quad (\text{C.48})$$

Or, par définition, $(q_k, p_k) = \theta^{-1}(k)$, d'où $W_P^{p_k m} W_Q^{q_k m} = W_N^{mk}$, ce qui donne pour $A(p_k, q_k)$ l'expression (C.49).

$$A(p_k, q_k) = \frac{1}{P} W_Q^{q_k \frac{(P-1)(Q-1)}{2}} \sum_{m=0}^{P-1} W_N^{mk} \quad (\text{C.49})$$

Il nous reste à exprimer F_k , la k ième composante de TFD de la fonction $f(n)$, pour $p_k \in [1 : P - 1]$ et $q_k \in [0 : Q - 1]$. En utilisant l'expression (3.17) de $f(n)$, nous obtenons (C.50).

$$F_k = -(Q - 1) \sum_{n=0}^{N-1} c_{P,Q}(n) W_N^{kn} + (P - 1) \sum_{n=0}^{N-1} b_{P,Q}(n) W_N^{kn} \quad (\text{C.50})$$

Mais d'après la définition (3.16) des $c_{P,Q}(n)$ et $b_{P,Q}(n)$, en utilisant le changement de variable $n = aP + b$, nous obtenons les expressions (C.51) et (C.52).

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_{P,Q}(n) W_N^{kn} = \sum_{b=0}^{P-1} b W_N^{kb} \sum_{a=0}^{Q-1} W_Q^{ka} \quad (\text{C.51})$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_{P,Q}(n) W_N^{kn} = \sum_{a=0}^{Q-1} a W_Q^{ka} \sum_{b=0}^{P-1} W_N^{kb} \quad (\text{C.52})$$

Comme somme géométrique, $\sum_{a=0}^{Q-1} W_Q^{ka} = Q\delta(\underline{k}_Q)$. Mais par hypothèse de la CN2, nous cherchons à évaluer les F_k pour $p_k \in [1 : P - 1]$ ce qui implique que $\delta(\underline{k}_Q)$ est toujours nul. L'expression (C.50) de F_k pour $p_k \in [1 : P - 1]$ et $q_k \in [0 : Q - 1]$ devient alors (C.53).

$$F_k = (P - 1) \sum_{a=0}^{Q-1} a W_Q^{ka} \sum_{b=0}^{P-1} W_N^{kb} \quad (\text{C.53})$$

En utilisant les expressions (C.49) et (C.53), le terme $\frac{F_k}{A(p_k, q_k)}$ s'avère être indépendant de p_k . Nous le notons $\alpha(q_k)$ (C.54).

$$\alpha(q_k) = \frac{F_k}{A(p_k, q_k)} = P(P - 1) W_Q^{-q_k \frac{(P-1)(Q-1)}{2}} \sum_{a=0}^{Q-1} a W_Q^{aq_k P} \quad (\text{C.54})$$

Expression des couples (PCC_{h_j}, PCC_{g_j}) admissibles pour la décomposition

Nous avons vérifié que la fonction PCC associée à l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes vérifiait les deux conditions pour la décomposition. La fonction g_0 de cette décomposition est donnée

par la relation (3.46) en utilisant la relation (C.47) ce qui nous permet d'obtenir l'expression suivante (C.55).

$$g_0(n) = \frac{(P-1)(Q-1)}{2} - (Q-1)c_{P,Q}(n) \quad (\text{C.55})$$

La fonction h_0 est donnée par la relation (3.47) en utilisant l'expression (C.54) de $\alpha(q)$, nous obtenons (C.56).

$$h_0(n) = \frac{P(P-1)}{N} \sum_{a=0}^{Q-1} a \sum_{q=1}^{Q-1} W_Q^{q(-n+aP-\frac{(P-1)(Q-1)}{2})} \quad (\text{C.56})$$

On remarque que la somme $\sum_{q=1}^{Q-1} W_Q^{q(-n+aP-\frac{(P-1)(Q-1)}{2})}$ est une somme géométrique au premier terme manquant près. Nous avons donc pour cette somme la valeur suivante (C.57).

$$\sum_{q=1}^{Q-1} W_Q^{q(-n+aP-\frac{(P-1)(Q-1)}{2})} = Q \delta\left(aP - n - \frac{(P-1)(Q-1)}{2}\right)_Q - 1 \quad (\text{C.57})$$

Mais chercher l'entier n qui vérifie $aP - n - \frac{(P-1)(Q-1)}{2} \equiv 0 \pmod{Q}$ est équivalent à $n \equiv aP - \frac{(P-1)(Q-1)}{2} \pmod{Q}$ puisque $n \in [0 : Q-1]$. Pour ce genre d'équation modulo avec $P \wedge Q = 1$, il est possible de montrer que l'équation bijective de la forme $y = \underline{P}x + \underline{b}_Q$ a une équation inverse de type modulo $x = \underline{P}'y + \underline{b}'_Q$ où \underline{P}' est le coefficient de Bézout strictement inférieur à Q qui vérifie $\underline{P}\underline{P}' + \underline{Q}\underline{Q}' = 1$ où \underline{Q}' est un entier relatif et où $\underline{b}' = -\underline{P}'\underline{b}_Q$. En appliquant ce résultat à notre problème, on en déduit que la valeur de $a \in [0 : Q-1]$ telle que $aP - n - \frac{(P-1)(Q-1)}{2} \equiv 0 \pmod{Q}$ vaut $a = \underline{P}'n + \underline{b}'_Q$ où $\underline{b}' = \underline{P}'\frac{(P-1)(Q-1)}{2} \pmod{Q}$. Nous obtenons donc à partir de ces remarques et de l'expression (C.56), l'expression finale suivante (C.58) de $h_0(n)$.

$$h_0(n) = (P-1)\underline{P}'n + \underline{b}'_Q - \frac{(P-1)(Q-1)}{2} \quad (\text{C.58})$$

Les expressions des autre couples admissibles (PCC_{h_j}, PCC_{g_j}) s'obtiennent à partir de l'expression (C.58) de $h_0(n)$ et l'expression (C.55) de $g_0(n)$ en utilisant les relations (3.48) et (3.49).

C.12 Annexe 3.12 : CS d'inversibilité d'un PCC modulo

Etant donné un PCC de fonction f et de période N ainsi qu'un intervalle $I_M = [0 : M - 1]$ où $M = mN$, nous allons montrer que si $PCC_f \in \widetilde{\Theta}(N)$ alors la fonction F'_M définie en (3.55) est bijective de I_M dans I_M .

Pour cela, nous considérons deux entiers $(n_1, n_2) \in I_M^2$ tels que $F'_M(n_1) = F'_M(n_2)$. En utilisant la relation (3.58), cette égalité devient (C.59).

$$N \left[\overline{(\overline{n_2^N} + \overline{F(n_{2_N})})}_m} - \overline{(\overline{n_1^N} + \overline{F(n_{1_N})})}_m} \right] = \underline{F}(n_{1_N}) - \underline{F}(n_{2_N}) \quad (\text{C.59})$$

De cette équation, nous en déduisons que $\underline{F}(n_{1_N}) - \underline{F}(n_{2_N})$ est multiple de N . Mais par définition de \underline{F} , $|\underline{F}(n_{1_N}) - \underline{F}(n_{2_N})| < N$. On en déduit que ce terme est nécessairement nul. Mais par hypothèse $PCC_f \in \widetilde{\Theta}(N)$ donc \underline{F} est une permutation de $[0 : N - 1]$, on en déduit que $n_{1_N} = n_{2_N}$. En utilisant cette égalité, l'équation (C.59) nous permet de conclure que $\overline{n_{2^N}}_m = \overline{n_{1^N}}_m$. Mais par hypothèse, $(n_1, n_2) \in [0 : mM - 1]$, d'où $\overline{n_{2^N}}_m = \overline{n_2^N}$ et $\overline{n_{1^N}}_m = \overline{n_1^N}$. On en déduit que $n_1 = n_2$. La fonction F'_M est donc injective sur I_N . Comme cette fonction est définie sur un ensemble fini, on en déduit que la fonction F'_M est une bijection de I_M dans I_M .

Annexe D

Annexes relatives au chapitre 4

D.1 Calcul théorique du TEB pour un canal sélectif en fréquence

D.1.1 Cas d'une QPSK sur un canal AWGN

Nous considérons une modulation QPSK avec un bruit blanc additif gaussien complexe de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{2}$ sur la voie réelle et la voie complexe. La probabilité d'erreur bits est donnée par (D.1) où la fonction Q est définie par $Q(x) = 0.5 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ où $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2) dt$.

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{D.1})$$

D.1.2 Cas d'un signal OFDM à N porteuses sur un canal sélectif en fréquence

Dans le cas d'un signal OFDM avec N porteuses et d'un canal sélectif en fréquence, nous avons le modèle de N canaux (Figure 4.32) à bruit blanc gaussien de puissance chacun $2\sigma^2 |H_i^{-1}|^2$. Ainsi, en utilisant le résultat précédent (D.1), la probabilité d'erreur bits pour le i -ème canal est donnée par (D.2).

$$P_b^i = Q\left(\sqrt{2|H_i|^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{D.2})$$

Ainsi, la probabilité d'erreur bit totale est donnée par la moyenne des N probabilités précédentes, ce qui nous permet d'obtenir le résultat final (D.3).

$$P_e = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} Q\left(\sqrt{2|H_i|^2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (\text{D.3})$$

L'utilisation de la technique d'entrelacement ou de SM ne fait respectivement qu'entrelacer les symboles ou les multiplier par un coefficient de module 1. La probabilité d'erreur bits n'est pas affectée par ces transformations, et on a le même résultat théorique (D.3).

D.1.3 Cas d'un signal OFDM à N porteuses sur un canal sélectif en fréquence avec filtre LPTV-LL

Nous faisons l'hypothèse que le filtrage en réception par le filtre LPTV-LL inverse uniformise les N canaux de la figure 4.32 en N canaux identiques modélisés par un bruit additif blanc gaussien de puissance égale à la moyenne des puissances des N bruits d'entrée. Cette puissance moyenne du bruit, d'après la figure 4.32, vaut donc $\frac{2\sigma^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H_i^{-1}|^2$. En utilisant le résultat (D.1), nous obtenons alors une probabilité d'erreur bits (D.4).

$$P_e^{LL} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |H_i^{-1}|^2\right]^{-1}}\right) \quad (\text{D.4})$$

D.2 Utilisation de filtres LPTV-LL dans un contexte déterministe

D.2.1 Principe du fenêtrage déterministe

Le principe proposé par [52] consiste à définir une fenêtre de longueur égale au nombre de porteuses du système OFDM. En appelant alors $\Pi_N(n)$ cette fenêtre, les symboles d_k sont multipliés périodiquement par cette fenêtre. Le système OFDM fonctionne alors comme si les nouveaux symboles associés au p -ième symbole OFDM (Figure 4.26) étaient les symboles $\left\{d'_{pN+k}\right\}_{0 \leq k \leq N-1}$ définis par (D.5).

$$d'_{pN+k} = \Pi_N(k) d_{pN+k}(n) \quad (\text{D.5})$$

Plusieurs fenêtres sont testées dans [52] et leurs performances dans la réduction du PAPR sont simulées. Parmi les nombreuses fenêtres considérées, nous proposons d'utiliser la fenêtre rectangulaire de référence (D.6), la fenêtre de Bartlett (D.7) et la fenêtre en cosinus surélevé (D.8). De nombreuses autres fenêtres sont proposées, mais le but de cette partie est d'expliquer comment l'insertion d'un filtre LPTV-LL avant le fenêtrage, pour une fenêtre donnée, peut apporter un gain en TEB.

$$\begin{aligned} F_N^0(k) &= A_0 \quad \text{pour } k \in [0 : N - 1] \\ &= 0 \quad \text{pour } k \notin [0 : N - 1] \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} F_N^1(k) &= A_1 \left(1 - \frac{|k - \frac{N}{2}|}{N/2}\right) \quad \text{pour } k \in [0 : N - 1] \\ &= 0 \quad \text{pour } k \notin [0 : N - 1] \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} F_N^2(k) &= A_2 \sin^2\left(\pi \frac{k}{N}\right) \quad \text{pour } k \in [0 : N - 1] \\ &= 0 \quad \text{pour } k \notin [0 : N - 1] \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

La figure D.1 illustre la forme de ces fenêtres normalisées ($A_i^2 \sum_{k=0}^{N-1} (F_N^i(k))^2 = 1$). Par la suite, nous utiliserons ces fenêtres en les tronquant selon une certaine proportion en ne gardant que la partie centrale. Ainsi, pour une fenêtre $F_N^i(k)$, nous appelons fenêtres tronquées à 98, 90, 70 et 50% les fenêtres définies sur N points respectivement par (D.9), (D.10), (D.11) et (D.12).

$$98\% \quad : \quad \Pi_N^i(k) = F_N^0(k) F_{N+2}^i(k+1) \quad (\text{D.9})$$

$$90\% \quad : \quad \Pi_N^i(k) = F_N^0(k) F_{N+N/8}^i\left(k + \frac{N}{16}\right) \quad (\text{D.10})$$

$$75\% \quad : \quad \Pi_N^i(k) = F_N^0(k) F_{N+3N/8}^i\left(k + \frac{3N}{16}\right) \quad (\text{D.11})$$

$$50\% \quad : \quad \Pi_N^i(k) = F_N^0(k) F_{2N}^i\left(k + \frac{N}{2}\right) \quad (\text{D.12})$$

D.2.2 Performances des fenêtres pour la réduction du PAPR

Pour un nombre de porteuses égal à $N = 64$, nous calculons la fonction de répartition complémentaire F associée au PAPR (4.19) pour chacune des fenêtres aux différents degrés de troncature. Ainsi, les figures D.2 et D.3 illustrent la fonction F pour la fenêtre de Bartlett respectivement sans et avec filtre LPTV-LL. Les figures D.4 et D.5 illustrent la fonction F pour

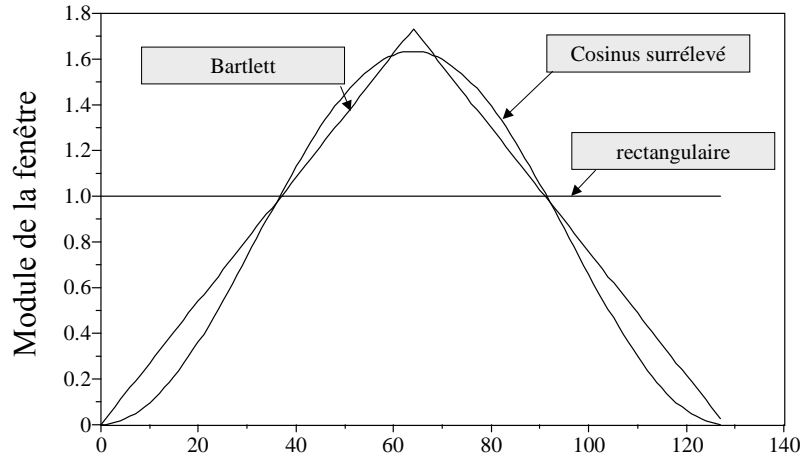


FIG. D.1 – Forme temporelle des fenêtres utilisées

la fenêtre en cosinus surrélevé respectivement sans et avec filtre LPTV-LL. Nous remarquons le pouvoir de réduction du PAPR des deux fenêtres et surtout que l'ajout d'un filtre LPTV-LL avant le fenêtrage ne modifie pas les performances en terme de réduction de PAPR des fenêtres.

D.2.3 Considération de TEB

Dans le cas d'un canal AWGN, en utilisant une fenêtre $\Pi_N^i(k)$, tout se passe comme si l'on avait un système sans fenêtre et un canal sélectif en fréquence de TFD calculée sur N points $H_k^i = \Pi_N^i(k)$. La probabilité d'erreur sur un canal AWGN, en utilisant une fenêtre $\Pi_N^i(k)$ vaut donc (D.13).

$$P_e = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} |\Pi_N^i(k)|^2}\right) \quad (\text{D.13})$$

Dans le cas d'une utilisation d'un filtre LPTV "lossless" avant le fenêtrage, nous avons la probabilité d'erreur (D.14).

$$P_e^{LL} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{|\Pi_N^i(k)|^2}\right]^{-1}}\right) \quad (\text{D.14})$$

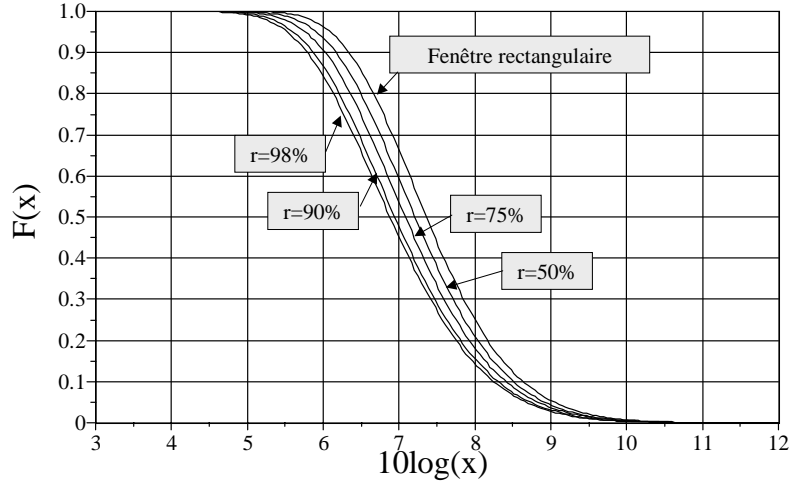


FIG. D.2 – Fonction de répartition du PAPR pour la fenêtre de Bartlett à différents degré de troncature (sans filtre LPTV)

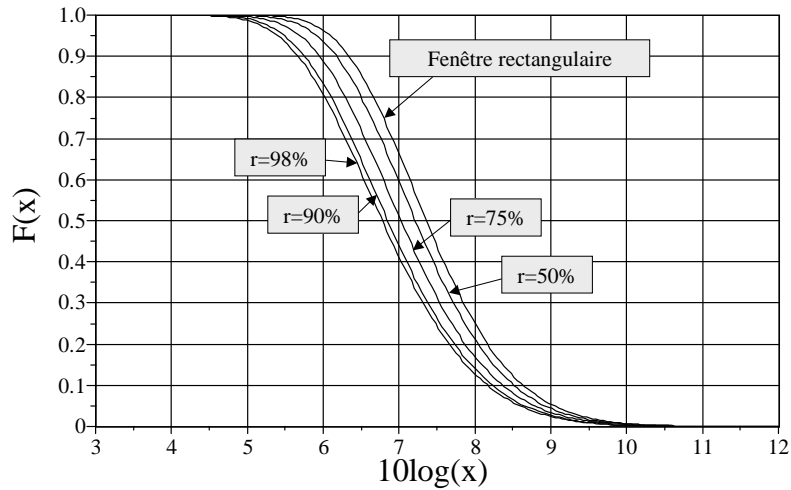


FIG. D.3 – Fonction de répartition du PAPR pour la fenêtre de Bartlett à différents degré de troncature (avec filtre LPTV)

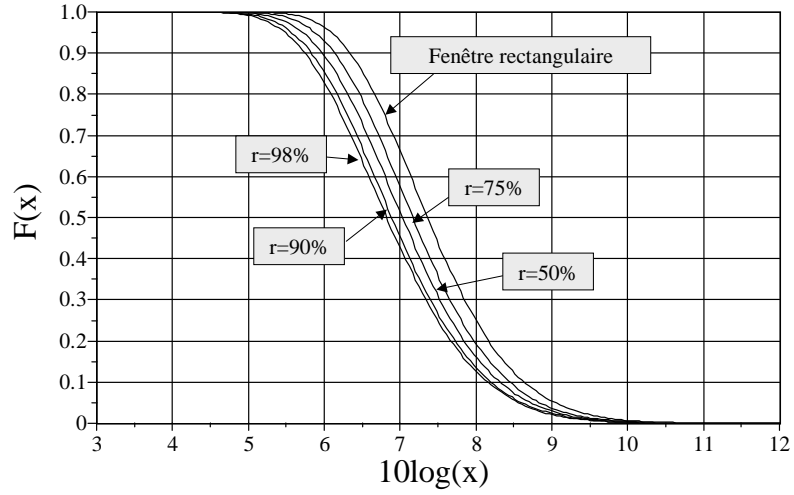


FIG. D.4 – Fonction de répartition du PAPR pour la fenêtre en cosinus surélevé à différents degré de troncature (sans filtre LPTV)

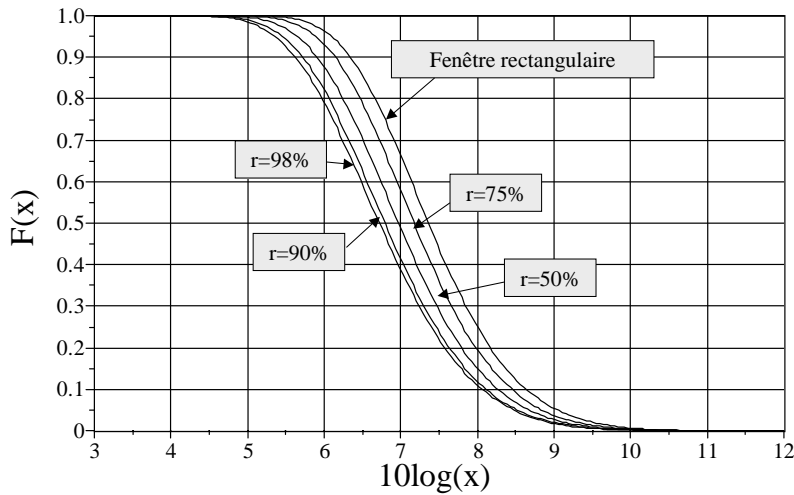


FIG. D.5 – Fonction de répartition du PAPR pour la fenêtre en cosinus surélevé à différents degré de troncature (avec filtre LPTV)

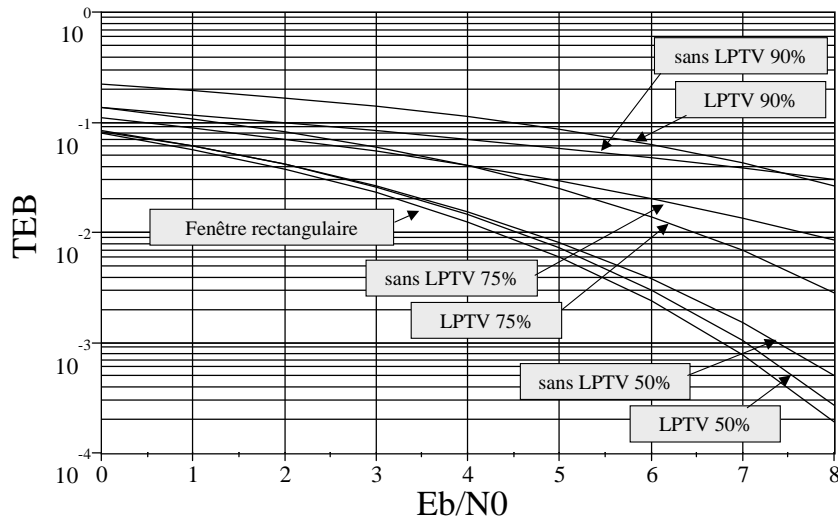


FIG. D.6 – TEB pour la fenêtre de Bartlett avec et sans filtre LPTV

Comme dans le cas d'un canal sélectif en fréquence, nous avons vérifié que ces probabilités théoriques étaient absolument fidèles aux résultats par simulation et nous choisissons ici de ne tracer que les probabilités théoriques pour alléger les figures. La figure D.6 illustre la probabilité théorique avec et sans filtre LPTV-LL pour la fenêtre de Bartlett $\Pi_N^1(k)$ pour les différents degrés de troncature de la fenêtre initiale. La figure D.7 illustre les mêmes résultats pour la fenêtre en cosinus surélevé $\Pi_N^2(k)$.

Les considérations de performances en TEB sur un canal AWGN nous permettent de rapprocher le problème du fenêtrage de celui d'un canal sélectif en fréquence inversé fréquentiellement. L'utilisation d'un filtre LPTV-LL, tout en conduisant aux mêmes capacités de réduction de PAPR que la technique de fenêtrage simple, peut s'avérer avantageux selon le TEB que l'on désire obtenir et la réduction du PAPR désiré. Ce résultat permet de rediscuter le compromis entre diminution de PAPR et performances en TEB présenté dans [52]. Ajoutons que nous n'avons considéré ici que deux fenêtres simples, mais qu'il est possible d'étendre la discussion à d'autres fenêtres proposées dans [52].

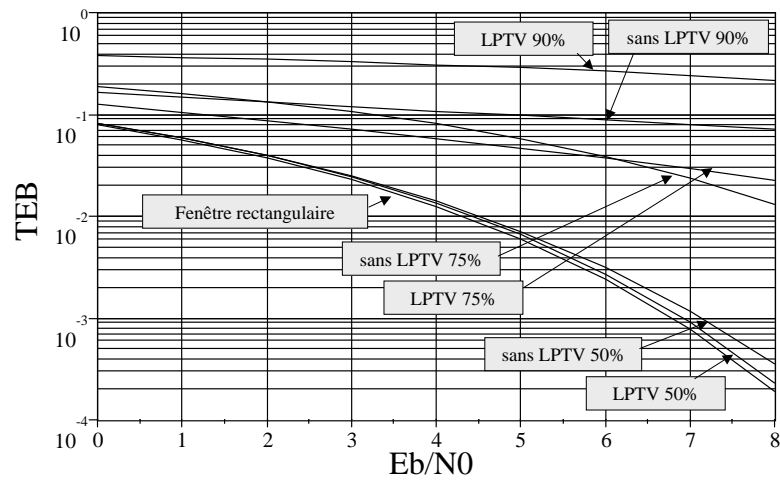


FIG. D.7 – TEB pour la fenêtre en cosinus surrélevé avec et sans filtre LPTV

Annexe E

Annexes relatives au chapitre 5

E.1 Construction d'une famille de filtres LPTV orthogonaux

Nous considérons un filtre LPTV générateur N périodique inversible de matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(0)}^{1,1}(z)$ et de matrice modulateurs inverse $\mathbf{B}_{(0)}^{1,1}(z)$. Nous définissons alors la famille de N filtres LPTV par leur matrice modulateurs $\mathbf{A}_{(k)}^{1,1}(z)$ exprimés par (5.12) pour $k \in [0 : N - 1]$. Nous avons vu que ces N filtres LPTV admettent un filtre LPTV inversible de matrice modulateurs $\mathbf{B}_{(k)}^{1,1}(z)$ exprimée par (5.13). Nous définissons alors les paramètres β et γ par (5.14) et (5.15).

Etant donnés alors deux entiers $(k, l) \in [0 : \gamma - 1]^2$, les relations (5.12) et (5.13) nous permettent d'écrire la relation suivante (E.1).

$$\mathbf{D}_H(z) \mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(z) \mathbf{A}_{(l\beta)}^{1,1}(z) = \mathbf{D}_H(z) \pi^{(k-l)\beta} \quad (\text{E.1})$$

Nous considérons alors un signal de E_b^{fc} de transformée en z , $X(z)$, et nous notons $\tilde{\mathbf{X}}(z)$ le vecteur modulateur de ce signal défini au premier chapitre par (1.40). Nous obtenons alors la relation (E.2) en utilisant la relation (E.1).

$$\mathbf{D}_H(z) \mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(z) \mathbf{A}_{(l\beta)}^{1,1}(z) \tilde{\mathbf{X}}(z) = \mathbf{D}_H(z) \pi^{(k-l)\beta} \tilde{\mathbf{X}}(z) \quad (\text{E.2})$$

Or, $\mathbf{D}_H(z)$ est par définition la matrice modulateurs d'un filtre LIT, de transformée en z $H(z)$, vu comme un filtre LPTV N périodique. Considérant la forme (4.26) de la matrice modulateurs, il en résulte que la matrice $\mathbf{D}_H(z)$ une matrice diagonale d'élément $[\mathbf{D}_H(z)]_{i,i} = H(zW_N^i)$.

D'après la définition de la matrice $\boldsymbol{\pi}$ ($[\boldsymbol{\pi}]_{i,j} = \delta(i-j-1_N)$), il en résulte que l'élément d'indice (i, j) de la matrice $\mathbf{D}_H(z)\boldsymbol{\pi}^{(k-l)\beta}$ vaut $H(zW_N^i)\delta(i-j-(k-l)\beta_N)$. Si nous appelons $T_p^{l,k}(z)$ les N filtres modulateurs de ce filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{D}_H(z)\boldsymbol{\pi}^{(k-l)\beta}$, seul un filtre modulateurs est non nul pour ce filtre LPTV et nous avons (E.3) en utilisant la forme générale d'une matrice modulateurs (4.26).

$$T_p^{l,k}(z) = \delta(p - \underline{(l-k)\beta_N})H(zW_N^{(k-l)\beta}) \quad (\text{E.3})$$

A présent, si nous appelons $Y(z)$ la transformée en z de la sortie du filtre LPTV de matrice modulateurs $\mathbf{D}_H(z)\mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(z)\mathbf{A}_{(l\beta)}^{1,1}(z)$, $Y(z)$ peut s'exprimer selon (E.4) en fonction de $X(z)$ grâce à la relation entrée/sortie (1.35) d'un filtre LPTV.

$$Y(z) = \sum_{p=0}^{N-1} T_p^{l,k}(zW_N^p)X(zW_N^p) \quad (\text{E.4})$$

En utilisant la relation (E.3), la relation (E.4) devient (E.5), puisqu'un seul filtre modulateur est non nul.

$$Y(z) = H(z)X(zW_N^{(l-k)\beta}) \quad (\text{E.5})$$

A présent, en évaluant la relation (E.5) en $z = \exp(j2\pi f)$ où f est la fréquence normalisée par rapport à la fréquence d'échantillonnage f_e , nous obtenons (E.6) en utilisant $W_N = \exp(-\frac{2i\pi}{N})$.

$$Y(f) = H(f)X(f - \frac{(l-k)}{N}\beta) \quad (\text{E.6})$$

Mais, par définition (5.14), $\beta = \text{int}(bN) + 1$ et par définition $X(f) = 0$ et $H(f) = 0$ pour $f \notin [-\frac{\beta}{2}; \frac{\beta}{2}]$. Sous l'hypothèse que le filtre passe bas est idéal, on en déduit que $Y(f) = X(f)\delta(l-k)$. En appelant $\tilde{\mathbf{Y}}(z)$ le vecteur modulateur associé à $Y(z)$ défini par (1.40), nous avons donc la relation finale attendue (E.7) en utilisant la notation $\tilde{\mathbf{Y}}(f)$ pour $\tilde{\mathbf{Y}}(z = \exp(i2\pi f))$.

$$\tilde{\mathbf{Y}}(f) = \mathbf{D}_H(f)\mathbf{B}_{(k\beta)}^{1,1}(f)\mathbf{A}_{(l\beta)}^{1,1}(z)\tilde{\mathbf{X}}(f) = \delta(l-k)\tilde{\mathbf{X}}(f) \quad (\text{E.7})$$

E.2 Expression du PCC équivalent pour l'entrelaceur lignes/colonnes

Soient deux PCC N périodiques de fonctions f et g . Nous supposons que ces deux PCC sont mis en cascade avec un délai z^{n_0} intercalé entre ces deux PCC comme indiqué par la figure E.1.

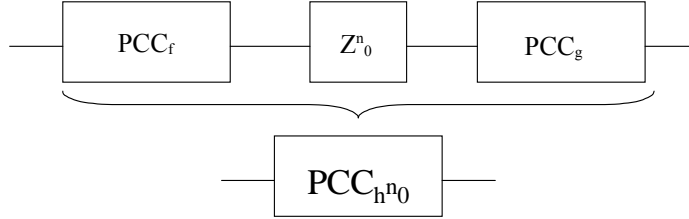


FIG. E.1 – Cascade de deux PCC intercalés d'un délai

En utilisant deux fois la relation de composition de deux PCC (3.19) et en considérant le délai z^{n_0} comme un PCC N périodique de fonction PCC constante égale à $-n_0$, il est facile de vérifier que le PCC équivalent à cette double cascade a la fonction $h_{n_0}(n)$ N périodique exprimée par (E.8).

$$h_{n_0}(n) = g(n) - n_0 + f(n - g(n) + n_0) \quad (\text{E.8})$$

A présent, nous allons utiliser ce résultat dans le cas où PCC_f est le PCC associé à l'entrelaceur Q lignes/ P colonnes et PCC_g est le PCC inverse équivalent à l'entrelaceur P lignes/ Q colonnes. D'après la relation (3.17) et les définitions (3.16), ces deux fonctions valent respectivement (E.9) et (E.10).

$$f(n) = -(Q - 1)c_{P,Q}(n) + (P - 1)b_{P,Q}(n) \quad (\text{E.9})$$

$$g(n) = -(P - 1)c_{Q,P}(n) + (Q - 1)b_{Q,P}(n) \quad (\text{E.10})$$

Nous commençons par quelques définitions utiles pour les calculs suivants. Puisque n_0 appartient à $[0 : N - 1]$, nous décomposons n_0 selon la base (P, Q) et d'après la définition (3.16), nous obtenons la décomposition (E.11).

$$n_0 = Pb_{P,Q}(n_0) + c_{P,Q}(n_0) \quad (\text{E.11})$$

Nous décomposons de même n selon la base (P, Q) et la base (Q, P) ce qui nous donne les deux relations (E.12) et (E.13).

$$n = Pb_{P,Q}(n) + c_{P,Q}(n) \quad (\text{E.12})$$

$$n = Qb_{Q,P}(n) + c_{Q,P}(n) \quad (\text{E.13})$$

Afin d'évaluer l'expression (E.8), nous commençons par évaluer $n - g(n) + n_0$. Nous remarquons d'abord, en utilisant l'expression (E.10) de $g(n)$ ainsi que la décomposition (E.13) pour n , que $n - g(n)$ a l'expression simple (E.14).

$$n - g(n) = Pc_{Q,P}(n) + b_{Q,P}(n) \quad (\text{E.14})$$

En utilisant alors la relation (E.14) pour $n - g(n)$ et la décomposition (E.11) pour n_0 , nous avons la relation suivante (E.15) pour $n - g(n) + n_0$.

$$n - g(n) + n_0 = P[c_{Q,P}(n) + b_{P,Q}(n_0)] + b_{Q,P}(n) + c_{P,Q}(n_0) \quad (\text{E.15})$$

L'astuce est de décomposer $b_{Q,P}(n) + c_{P,Q}(n_0)$ dans la base (Q, P) . Pour cela, par souci de légèreté de notation nous définissons (θ, β) par (E.16) et (E.17).

$$\theta = b_{P,Q}(b_{Q,P}(n) + c_{P,Q}(n_0)) \quad (\text{E.16})$$

$$\beta = c_{P,Q}(b_{Q,P}(n) + c_{P,Q}(n_0)) \quad (\text{E.17})$$

De la même façon, nous définissons (θ', β') par (E.18) et (E.19).

$$\theta' = b_{Q,P}(c_{Q,P}(n) + b_{P,Q}(n_0) + \theta) \quad (\text{E.18})$$

$$\beta' = c_{Q,P}(c_{Q,P}(n) + b_{P,Q}(n_0) + \theta) \quad (\text{E.19})$$

En utilisant le fait que $(n_0, n) \in [0 : N - 1]^2$, il est alors facile de vérifier d'après la définition de θ et θ' que ces deux variables valent soit 0 soit 1.

En utilisant les définitions de (θ, β) et (θ', β') , l'expression (E.15) de $n - g(n) + n_0$ s'écrit alors (E.20).

$$n - g(n) + n_0 = \beta + P\beta' + \theta'PQ \quad (\text{E.20})$$

A présent, nous évaluons f pour l'expression (E.20). En utilisant pour cela la l'expression (E.9) et la $N = PQ$ périodicité de f , nous obtenons l'expression (E.21).

$$f(n - g(n) + n_0) = -(Q - 1)\beta + (P - 1)\beta' \quad (\text{E.21})$$

Enfin, en utilisant cette expression (E.21), d'après l'expression (E.8) de $h_{n_0}(n)$, nous en déduisons pour $h_{n_0}(n)$ l'expression (E.22).

$$h_{n_0}(n) = -(P-1)[c_{Q,P}(n) - \beta'] + (Q-1)[b_{Q,P}(n) - \beta] - n_0 \quad (\text{E.22})$$

Mais nous avons vu que les définitions de (θ, β) et (θ', β') nous permettent d'écrire (E.23) et (E.24).

$$b_{Q,P}(n) + c_{P,Q}(n_0) = \theta P + \beta \quad (\text{E.23})$$

$$c_{Q,P}(n) + b_{P,Q}(n_0) + \theta = \theta' Q + \beta' \quad (\text{E.24})$$

Cette remarque nous permet alors de réécrire $h_{n_0}(n)$ (E.22) en utilisant le couple (θ, θ') pour obtenir (E.25).

$$h_{n_0}(n) = -(P-1)[\theta' Q - \theta - b_{P,Q}(n_0)] + (Q-1)[\theta P - c_{P,Q}(n_0)] - n_0 \quad (\text{E.25})$$

Enfin, dans l'expression (E.25), on reconnaît l'expression (E.9) de $f(n_0)$. On obtient alors l'expression finale (E.26) de $h_{n_0}(n)$.

$$h_{n_0}(n) = f(n_0) - n_0 + \theta(PQ - 1) - \theta' Q(P - 1) \quad (\text{E.26})$$

Pour une désynchronisation fixée n_0 , l'expression de $h_{n_0}(n)$ dépend seulement des deux paramètres θ et θ' qui sont deux fonctions de n définies par les relations (E.23) et (E.24). Ces paramètres ne peuvent prendre que les valeurs 0 et 1. Pour n_0 fixé, pour θ , il y a deux cas (E.27) et (E.28).

$$\theta = 0 \text{ si } 0 \leq b_{Q,P}(n) < P - c_{P,Q}(n_0) \quad (\text{E.27})$$

$$\theta = 1 \text{ si } P - c_{P,Q}(n_0) \leq b_{Q,P}(n) \leq P - 1 \quad (\text{E.28})$$

Ensuite, pour θ' , il y a à nouveau deux cas (E.29) et (E.30).

$$\theta' = 0 \text{ si } 0 \leq c_{Q,P}(n) < Q - b_{P,Q}(n_0) - \theta \quad (\text{E.29})$$

$$\theta' = 1 \text{ si } Q - b_{P,Q}(n_0) - \theta \leq c_{Q,P}(n) \leq Q - 1 \quad (\text{E.30})$$

Ces différentes plages de valeurs du couple (θ, θ') peuvent se résumer par la figure 5.12 où n est rangé dans la matrice de taille $Q \times P$ colonne par colonne. Les 4 plages de valeurs pour le couple (θ, θ') apparaissent. Selon la valeur de n_0 , il est évident d'après les conditions (E.27) à (E.30) que certaines zones peuvent ne pas exister.

E.3 Expression du PCC équivalent pour le PCC linéaire

Nous allons établir l'expression de la fonction PCC , $h_{n_0}(n)$, de la figure E.1 dans le cas où f est la fonction PCC d'un PCC linéaire définie en (5.23) et g est la fonction du PCC inverse. Nous commençons par déterminer une expression de $g(n)$ la fonction PCC inverse. D'après la relation (3.20), la fonction g vérifie (E.31) en fonction de f où \underline{G} est la fonction associée à g définie en (3.3).

$$g(n) = -f(\underline{G}(n)) \quad (\text{E.31})$$

Mais nous avons vu dans le troisième chapitre que pour le PCC linéaire inverse, la fonction \underline{G} est définie par la relation (E.32) où l'entier P est le coefficient unique de Bézout inférieur à N associé au couple $((k+1), N)$ et qui vérifie la relation (E.33) où N' est un entier relatif.

$$\underline{G}(n) = \underline{P}n_N \quad (\text{E.32})$$

$$P(k+1) + NN' = 1 \quad (\text{E.33})$$

En utilisant cette remarque, on en déduit qu'une expression de $h_{n_0}(n)$ exprimée par (E.8) est (E.34).

$$h_{n_0}(n) = k\underline{P}n_N - n_0 - k(\underline{n} - k\underline{P}n_N + n_{0_N}) \quad (\text{E.34})$$

Mais en utilisant la relation (E.33) vérifiée par P , on peut écrire (E.35).

$$\underline{n} - k\underline{P}n_N + n_{0_N} = \underline{P}n + n_{0_N} \quad (\text{E.35})$$

La fonction $h_{n_0}(n)$ (E.34) peut alors s'écrire (E.36).

$$h_{n_0}(n) = k(\underline{P}n_N - \underline{P}n + n_{0_N}) - n_0 \quad (\text{E.36})$$

Enfin, en utilisant la division euclidienne $n = N\bar{n}^N + \underline{n}_N$, on obtient le résultat final annoncé (E.37).

$$h_{n_0}(n) = kN(\overline{P}n + n_0^N - \overline{P}n^N) - (k+1)n_0 \quad (\text{E.37})$$

On vérifie alors que la fonction $h_{n_0}(n)$ ne peut prendre que les deux valeurs $-(k+1)n_0$ et $-(k+1)n_0 + kN$. De plus, nous savons que la fonction de n , $a(n) = \underline{P}n_N$ est une bijection

de $[0 : N - 1]$ dans $[0 : N - 1]$. Cette remarque fait que pour n_0 fixé, le nombre de valeurs de n sur une période $[0 : N - 1]$ pour lesquelles $\underline{Pn} + n_{0_N} = \underline{Pn}_N + 1$ est égal à n_0 . Le nombre de valeurs de n pour lesquelles $\underline{Pn} + n_{0_N} = \underline{Pn}_N$ est égal à $N - n_0$. La conséquence est que $h_{n_0}(n)$ atteint n_0 fois la valeur $-(k + 1)n_0 + kN$ et atteint $N - n_0$ fois la valeur $-(k + 1)n_0$. Ce résultat peut se vérifier sur l'exemple de la figure 5.14.

Bibliographie

- [1] D. Mc Leron, "One dimensional LPTV structures : derivations, interrelationships and properties", IEE Proc. Image Signal Process., Vol 149, No 5, October 1999.
- [2] A. M. Hayar, "Application des changements d'horloges périodiques en télécommunications", thèse Institut National Polytechnique, 2001.
- [3] A. Duverdier, " Cyclostationnarité et changement d'horloge", thèse Institut National Polytechnique, 1997.
- [4] N. D. Aakwaag, "Contribution à l'étude des changements d'horloge aléatoires", thèse Institut National Polytechnique, 1996.
- [5] A. Hayar, B. Lacaze, D. Roviras, "Periodic clock changes as generalization of multiple access techniques", Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop, June 1999.
- [6] A. Duverdier, B. Lacaze, "On the use of periodic clock changes to implement linear periodic time varying filters", IEEE Transactions on circuit and systems II : analog and digital signal processing, Vol. 47, No. 11, November 2000.
- [7] A. Duverdier, B. Lacaze, "Transmission of two users by means of periodic clock changes", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 1998.
- [8] B. Lacaze, "Processus Stochastiques pour les communications numériques", collection traitement du signal, Hermes, 2000.
- [9] Proakis, "Digital Signal Processing", Chapter 10.
- [10] M. Vetterli, "A theory of multirate filter banks", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol ASSP-35, No. 3, March 1987.

- [11] P.P Vaidyanathan, "Multirate digital filters, filter banks, polyphase networks, and applications : A tutorial", Proceedings of the IEEE, Vol 78, No. 1, January 1990.
- [12] P.P.Vaidyanathan, "A tutorial on multirate digital filter banks", ISCAS, 1988.
- [13] X.W.Min, R.Ishii, "A new approach for the analysis of a periodically time varying recursive digital filter", IECON 1991.
- [14] J.S.Prater, C.M.Loeffler, "Analysis and design of periodically time varying IIR filters with applications to transmultiplexing", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, No. 11, November 1992.
- [15] X. Yang, M. Kawamata, T. Higuchi, "Approximations of IIR periodically time varying digital filters", IEE Proc.-Circuits Devices Syst., Vol. 142, No. 6, December 1995.
- [16] C.M.Loeffler, C.S.Burrus, "Optimal design of periodically time varying and multirate digital filters", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. ASSP-32, No. 5, October 1984.
- [17] A.S.Mehr, T.Chen, "On alias component matrices of discrete time linear periodically time varying systems", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 8, No.4, April 2001.
- [18] S.Akkarakaran, P.P.Vaidyanathan, "Bifrequency and bispectrum maps : a new look at multirate systems with stochastic inputs", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 48, No. 3, March 2000.
- [19] T.Chen, P.P.Vaidyanathan, "General theory of time reversed inversion for perfect reconstruction filter banks", Signals Systems and Computers, 1992, Conference Record of The Twenty-Sixth Asilomar Conference on , 1992
- [20] S-M.Phoong, P.P.Vaidyanathan, "A polyphase approach to time varying filter banks", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 1996.
- [21] R.L.Reng, "Polyphase and modulation descriptions of multirate systems : a systematic approach", International Conference on Digital Signal Processing, June 26-28, 1995, Limassol, Cyprus.

- [22] P.P.Vaidyanathan, S.K.Mitra, "Polyphase networks, block digital filtering, LPTV systems, and alias-free QMF banks; a unified approach based on pseudocirculants", IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, Vol. 36, No. 3, March 1988.
- [23] T.Rohlev, C.Loeffler, "Invertible periodically time-varying digital filters", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 1987.
- [24] K. Kazlauskas, "Inversion of LPTV digital filters", IEEE Trans.Circuits Systems-II : Analog Digital Signal Process, Vol 41, No 2, February 1994.
- [25] M. Vetterli, "Invertibility of LPTV fillters", IEEE Trans.Circuits Systems, Vol 36, No 1, Jauary 1989.
- [26] R.M Gray, "Toeplitz and Circulant Matrices : A Review", Tech. Rep. 6502-1, Information Systems Laboratory, Stanford University, revised September 2001.
- [27] W.Chauvet, B.Lacaze, D.Roviras, A.Duverdier, " Characterization of a set of invertible LPTV filters using circulant matrices", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 2003, Hong Kong.
- [28] X.Gao, T.Nguyen, G.Strang, "On factorization of M -channel paraunitary filterbanks", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 49, No 7, July 2001.
- [29] G. D. Forney, "Burst correcting codes for the classic bursty channel", IEEE Transactions on Communication Technology, Vol. 19, Number 5, October 1971.
- [30] P.P Vaidyanathan, T.Q. Nguyen, Z. Doganata, T. Saramaki, "Improved technique for design of perfect reconstruction FIR QMF banks with lossless polyphase matrices", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, pp. 1042-1056, July 1989.
- [31] M. Vetterli, D. L. Gall, "Perfect reconstruction FIR filterbanks : some properties and factorizations", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 37, pp. 1057-1071, July 1989.
- [32] Z. Doganata, P. P. Vaydianathan, T.Q Nguyen, "General synthesis procedures for FIR lossless transfer matrices, for perfect reconstruction multirate filter bank applications",

- IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 36, pp. 1561-1574, October 1988.
- [33] P. P. Vaidyanathan, "Theory and design of M -channel maximally quadrature mirror filters with arbitrary M , having the perfect reconstruction property", IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP 36, pp. 476-492, April 1987.
- [34] R. Garello, G. Montorsi, S. Benedetto and G. Cancellieri, "Interleaver properties and their applications to the treillis complexity analysis of Turbo Codes", IEEE Trans. Communications, May 2001, Vol 49, No 5.
- [35] Xiongwei Min, Rokuya Ishii" A periodically time varying digital filter containing an inverse discrete fourier transformer and its application to the spectrum scrambling ", Industrial Electronics Society, 1990. IECON '90., 16th Annual Conference of IEEE , 27-30 Nov. 1990
- [36] Rokuya Ishii, Masahiro Kakishita, " A design method for a periodically time varying digital filter for spectrum scrambling ", IEEE Transactions on Acoustics. Speech. and Signal Processing. Vol. 38, No 7, July 1990.
- [37] Robert Leonard, Charles Loeffler, " Bandwith compression with periodically time varying FIR filters ", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 1986, TOKYO, p2551-2554.
- [38] Dimitrios Hatzinakos, C. L. Nikias, " Blind equalization using a tricepstrum based algorithm ", IEEE Transactions on Communications, Vol 39, No5, May 1991.
- [39] Michail K . Tsatsanis, Georgios B.Giannakis, " Transmitter induced cyclostationnarity for blind channel equalization ", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol 45, No 7, July 1997.
- [40] A.G Orozco Lugo, D.C McLernon, " An application of linear periodically time varying digital filters to blind equalisation ", IEE, Savoy Place, London WC2R OBL, UK, 1998.
- [41] A.G Orozco Lugo, D.C McLernon, G.D. Halikias, D.A. Wilson, " A new blind identification algorithm based on cyclosationnarity and the band limited property of the communication channel ", IEE, Savoy Place, London WC2R OBL, UK, 1998.

- [42] Lang Tong, Guanghan Xu, Thomas Kailath, " Blind identification and equalization based on second order statistics : a time domain approach. ", IEEE Transactions on Information Theory, Vol 40, No 2, March 1994
- [43] Giacinto Gelli, Francesco Verde, " Blind LPTV joint equalization and interference suppression ", International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2000.
- [44] Jitendra K. Tugnait, "On blind Identifiability of multipath channels using fractionnal sampling and second order cyclostationnarities statistics ", IEEE transactions on Information Theory, Vol 41, No 1, January 1995.
- [45] D. Roviras, B. Lacaze, N. Thomas, "Effect of discrete LPTV on stationnary signals", International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, 2002, Orlando, pp 1776.
- [46] P.P Vaidynathan, S.Akkarakaran, Bifréquency ans Bispectrum Maps : A new look at Multi-rate Systems with Stochastic Inputs., IEEE Trans. on Signal Processing, Vol 48, n°3, March 2000.
- [47] W. A. Gardner, "Introduction to random processes with applications to signals and systems", 2nd edition, New York : McGraw-Hill, 1990.
- [48] E. Moulines, P. Duhamel, J-F. Cardoso, S. Mayrargue, " Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR filters", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 43, No. 2, February 1995.
- [49] G. Xu, H. Liu, L. Tong, T. Kailath, " A least-squares approach to blind channel identification", IEEE Transactions on signal processing, Vol. 43, No. 12, December. 1995.
- [50] W. Gardner, " Exploitation of spectral redundancy in cyclostationnary signals", IEEE Signal Processing Magazine, vol. 8, pp. 14-36, Apr. 1991.
- [51] A.D.S. Jyalath, C. Tellambura, "The use of interleaving to reduce the Peak to Average Power Ration of an OFDM signal", Global Telecommunications Conference, 2000.
- [52] H. Nikookar, R. Prasad, "Weighted OFDM for wireless multipath channels", IEICE Transactions Commun., Vol.E83-B, No.8, August 2000.

- [53] R. van Nee, A. de Wild, "Reducing the peak-to-average power ratio of OFDM", IEEE Vehicular Technology Conference, Vol.3, 1998, pp.2072-2076.
- [54] M. Sharif, B. H. Khalaj, "Peak to mean envelope power ratio of oversampled OFDM signals; an analytic approach", IEEE International Conference on Communications, Vol.5, June 2001, pp. 1476-1480.
- [55] X. Zhou, J. Caffery, "A new distribution bound and reduction scheme for OFDM PAPR", Wireless Personal Multimedia Communications, 2002.
- [56] S. Muller, R. Bauml, R. Fischer, J. Huber, "OFDM with reduced peak to average power ratio by multiple signal representation", Annals of telecommunications, Vol. 52, No.1-2, pp.58-67, 1997.
- [57] S. Muller, J. Huber, "A comparison of peak power reduction schemes for OFDM", Globecom 97, Phoenix,AZ, pp. 1-5, 1997.
- [58] C. Tellambura, "Phase optimisation criterion for reducing peak to average power ratio in OFDM", Electronic letters, Vol.43, No.2, pp. 169-170, 1998.
- [59] C. Tellambura, " Improved phase factor computation for the PAPR reduction of peak to average power ratio of OFDM signal", IEEE Communications Letters, Vol. 5, No.4, pp.135-137, 2001.
- [60] J. Tellado, J. Cioffi, "Peak power reduction for multicarrier transmission", Proceedings Globecom 98, Sydney, Australia, 1998.
- [61] D. Jones, "Peak power reduction in OFDM and DMT via active channel modification", Proceedings of 1999 Asilomar Conference, Pacific Grove, CA, pp. 1076-1079, 1999.
- [62] S. Hara, T.H Lee, R. Prasad, "BER comparison of DS-CDMA and MC-CDMA for frequency selective fading channels", Signal Processing in Telecommunications, Ezio Biglieri, Marco Luise, Springer, 1995.
- [63] L. Vandendorpe, O. van de Wiel, "Decision feedback multiuser detection for Multitone CDMA systems", Signal Processing in Telecommunications, Ezio Biglieri, Marco Luise, Springer, 1995.

- [64] H. Steendam, M. Moeneclaey, "Comparison of MC-CDMA and MC-DS-CDMA to carrier frequency offset", *Communications and Vehicular Technology*, 2000.
- [65] E. H. Dinan, B. Jabbari, "Spreading codes for direct sequence CDMA and Wideband CDMA cellular networks", *IEEE Communications Magazine*, September 1998.
- [66] W. Chauvet, B. Cristea, B. Lacaze, D. Roviras, B. Lacaze, "Design of orthogonal LPTV filters : application to spread spectrum multiple access", *International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing*, 2004, Montreal.
- [67] B. Cristea, B. Escrieg, B. Lacaze, D. Roviras, W. Chauvet, " Synchronisation algorithm for LPTV based spread spectrum signals", *European Signal Processing Conference*, September 2004, Vienna.

RESUME

Les filtres linéaires périodiques (**LPTV**) ont fait l'objet de divers travaux au sein du laboratoire TéSA. Cette famille de filtres n'y a cependant été envisagée que sous la forme analogique. Ce travail de thèse propose en premier lieu une étude théorique des filtres LPTV numériques. Dans un second temps, l'intérêt de l'utilisation des filtres LPTV numériques pour les communications numériques est considéré. Après avoir recensé les applications existantes, nous proposons alors plusieurs applications des filtres LPTV.

La partie théorique formalise les différentes représentations LPTV et propose d'établir un rapprochement entre le domaine du traitement multiscalaire et les filtres LPTV. A cet effet, une relation d'équivalence entre filtres LPTV et bancs de filtres à décimation maximale est définie. Le problème de l'inversibilité des filtres LPTV est ensuite abordé. La littérature étant pauvre en méthodes de construction de filtres LPTV inversibles, nous définissons deux familles de filtres LPTV ayant cette propriété. La dernière partie théorique s'intéresse à un cas particulier de filtres LPTV que sont les changements d'horloge périodiques (**PCC**). Il y est montré que l'ensemble de ces transformations est confondu avec l'ensemble des entrelaceurs périodiques. S'il est vrai que les PCC constituent un sujet somme toute marginal, ce dernier résultat permet de proposer une nouvelle approche et de nouveaux outils pour l'étude des entrelaceurs, outil largement utilisé dans les communications numériques.

Dans le deuxième volet, nous proposons plusieurs applications de filtres LPTV pour les communications numériques. Les filtres LPTV sont tout d'abord proposés comme outil pour la réduction du Peak Average Power Ratio (**PAPR**) pour les systèmes OFDM (**Orthogonal Frequency Division Multiplexing**). Les performances théoriques en Taux d'Erreur Binaire (**TEB**) sont dans ce contexte étudiées dans le cas d'un canal sélectif en fréquence pour les filtres LPTV utilisés. Nous proposons aussi l'utilisation des filtres LPTV pour réaliser de l'étalement de spectre. Dans cette optique, un système d'accès multiple est décrit reposant sur une méthode de construction d'une famille de filtres LPTV orthogonaux à partir d'un filtre LPTV générateur.

Mots clefs : filtres linéaires périodiques variant dans le temps, changements d'horloges, entrelaceurs, bancs de filtres à décimation maximale, OFDM, réduction de PAPR, étalement spectral, accès multiple.