

THESE

présentée
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Ecole Doctorale Système
Spécialité : Systèmes Automatiques

par

Grace GANDANEGARA

DEA Systèmes Automatiques

Méthodologie de conception systémique en Génie Electrique à l'aide de l'outil Bond Graph Application à une chaîne de traction ferroviaire

soutenue le 7 Novembre 2003 devant le jury composé de :

MM.	S. SCAVARDA	Président, Rapporteur
	L. GERBAUD	Rapporteur
	R. PERIOT	
	C. ROMBAUT	
	B. SARENI	
	X. ROBOAM	
Mme.	G. DAUPHIN-TANGUY	

Méthodologie de conception systémique en Génie Electrique à l'aide de l'outil Bond Graph : Application à une chaîne de traction ferroviaire

Mots clés

- bond graph
- approche système
- couplage
- modélisation
- simplification de modèle
- stabilité
- traction ferroviaire

Résumé

L'hétérogénéité et le caractère souvent multidomaines des systèmes au sein desquels le Génie Electrique intervient complexifient leur analyse globale. Pourtant, l'approche système est essentielle car elle met en exergue les couplages entre éléments situés dans différentes disciplines. Pour faciliter cette démarche, le formalisme de modélisation unifiant "Bond Graph" est utilisé pour visualiser les transferts énergétiques. Par ailleurs, cette méthodologie offre des perspectives intéressantes en terme d'analyse systémique, objet de ce mémoire. Deux méthodes de simplification de modèle ont été étudiées et comparées. Il s'agit de la Méthode des Perturbations Singulières, basée sur la séparation de dynamique des éléments, et de la méthode MORA (*Model Order Reduction Algorithm*), basée sur l'activité énergétique. Ces méthodes peuvent nous conduire à la simplification du modèle Bond Graph en fonction de la gamme de fréquence des signaux d'entrées/sorties. Pour analyser la stabilité, la méthode du lieu des pôles et la deuxième méthode de Lyapunov ont été étudiées et appliquées à l'aide du formalisme Bond Graph. Ces différentes techniques d'analyse sont appliquées au cas d'étude d'une chaîne de traction ferroviaire industrielle.

Methodology of System Design in Electrical Engineering with Bond Graph : Application on a Railway Traction System

Keywords

- bond graph
- system approach
- coupling
- modeling
- model simplification
- stability
- railway traction

Abstract

In Electrical Engineering, the global analysis of systems is difficult because of their heterogeneity and their multidomain nature. Nevertheless, this system approach is essential because it underlines couplings between elements of different physical fields. To facilitate this analysis, the unified formalism Bond Graph is used. This modeling method illustrates the energetic transfers in the system. Moreover, this methodology offers interesting solutions in terms of system analysis. Two simplification methods have been investigated and compared, i.e. the Singular Perturbations Method (SPM), based on the dynamic analysis of elements, and the Model Order Reduction Algorithm (MORA), based on the energetic activity. By these methods, a simplified bond graph model can be obtained for a given frequency range. The stability analysis by the root locus method and the Lyapunov's second method have been examined and applied with the Bond Graph formalism support. An industrial railway traction system is considered as the case study in the application of these different analysis techniques.

*A la mémoire de mon père,
à ma mère et mes frères,
avec tout mon cœur*

Avant propos

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique Industrielle (LEEI) à l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique, d'Electronique, d'Informatique, d'Hydraulique et de Télécommunications (ENSEEIH) de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, en collaboration avec le Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Lille (LAIL) à l'Ecole Centrale de Lille.

Je voudrais remercier toutes les personnes qui m'ont soutenue, de près et de loin, en particulier :

- *Monsieur Yvon Cheron*, directeur de recherche au CNRS et directeur du LEEI, pour m'avoir accueillie dans son laboratoire.
- *Monsieur Serge Scavarda*, Professeur émérite à l'INSA de Lyon pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant d'être à la fois le président du jury et le rapporteur de ce mémoire. Je le remercie pour les discussions téléphoniques très intéressantes et fructueuses au sujet de cette thèse.
- *Monsieur Laurent Gerbaud*, chargé de recherche au CNRS au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble LEG de l'INP Grenoble, pour avoir accepté d'être le rapporteur de cette thèse.
- *Monsieur Robert Périot*, responsable du département de Recherche et de Développement chez Alstom Transport, pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à ce jury.
- *Monsieur Christian Rombaut*, Professeur à l'EC de Lille et directeur du centre ENSAM de Lille, pour avoir bien voulu participer à ce jury.
- *Monsieur Xavier Roboam*, chargé de recherche au CNRS et responsable du groupe Système au LEEI, qui a consacré son temps pour encadrer ces travaux. Merci pour ses conseils scientifiques, l'encouragement et la confiance qu'il m'a accordés.
- *Madame Geneviève Dauphin-Tanguy*, Professeur à l'EC de Lille, qui a co-dirigé cette thèse. L'accueil pendant mes séjours à Lille, les discussions sur place, électroniques ou téléphoniques, le réconfort moral et sa compétence au sujet du bond graph m'ont été très profitables.
- *Monsieur Bruno Sareni*, maître de conférences à l'ENSEEIH, qui a suivi tout au long de mes années au LEEI. Je le remercie pour l'encouragement, les discussions, et... les corrections de ce manuscrit malgré ses énormes activités d'enseignement.

- *Madame Maria Pietrzak-David*, Professeur à l'ENSEEIH et responsable du département du Génie Electrique, pour la confiance qu'elle m'a accordée durant les années de vacances et d'ATER. Je la remercie également de sa gentillesse.
- *Messieurs Henry Foch, Hubert Piquet et Stephan Astier* pour les discussions et conseils à propos de ces travaux.

Je remercie le personnel administratif du LEEI : Mesdames BODDEN, ESCAIG, PIONNIE, SCHWARZ, MEBREK, Mademoiselle CHARRON, Monsieur BERTELLI, ainsi que Monsieur DALZOVO pour leurs compétences, leur gentillesse et leur disponibilité.

Je tiens à remercier très sincèrement *Lauric Garbuio, Paul-Etienne Vidal, Sylvain Canat, Gianluca Postiglione et Martin Blodt*, occupants du bureau E 113a, qui ont créé une ambiance sympathique et ... une bonne odeur du café matinal... Je remercie également mes amis au LEEI, en particulier : *Rémi Saïssset* (merci pour le modèle de la pile à combustible), *Afef Ben Abdelghani, Houssem Demni, Jérémie Regnier et Adam Mirecki*.

Je pense à *Rosendo Peña-Eguiluz, Julian van der Merwe, Vincent Riga et Weiping Zhang*, anciens membres de la République des Etrangers du bureau E 113a, pour l'amitié qui passe la frontière.

Je remercie également toute la famille *Pelous et Cahuzac*, en particulier *Mamie et Cédric*, pour m'avoir accueillie comme une propre fille et petite fille... Les mots ne suffisent pas pour exprimer la formidable chance que j'ai : leur hospitalité, l'affection, le réconfort, l'encouragement, les conseils, les cours de français ... les gâteaux ...

Enfin, je dédicace cette thèse à ma famille : *Maman*, mes frères *Adri et Deni*, qui m'ont moralement soutenue malgré la distance qui nous sépare. Je les remercie du fond du cœur pour l'amour qu'ils me donnent abondamment ...

Au dessus de tout, je remercie le Seigneur, Dieu Tout Puissant, car ces travaux ne peuvent pas être réalisés sans son aide. Il m'a donné la chance d'être en France, d'avoir une vraie famille, une famille adoptive et les encadrants qui me soutiennent énormément, et de m'accompagner jusqu'au bout dans toutes les épreuves ...

Table des matières

Notations	xi
Introduction	1
Chapitre 1 Le Bond Graph Causal dans le cadre d'une approche système en Génie Electrique.....	3
1.1. Contexte de l'approche système en Génie Electrique.....	3
1.2. Le formalisme Bond Graph.....	5
1.2.1. Les variables généralisées.....	6
1.2.2. Les éléments bond graphs.....	6
1.2.2.1. Eléments actifs	6
1.2.2.2. Eléments passifs	7
1.2.2.3. Détecteurs.....	7
1.2.3. Les jonctions.....	8
1.2.4. Construction d'un modèle bond graph à partir d'un modèle physique	9
1.2.5. La causalité.....	10
1.3. Exemple.....	13
1.4. Le bond graph : outil d'analyse et de dimensionnement.....	16
1.4.1. Analyses structurelles	16
1.4.2. Analyse de la causalité.....	16
1.4.3. Analyses formelles.....	17
1.4.4. Analyses numériques	18
1.4.5. Dimensionnement – problème inverse	18
1.5. Autres formalismes existants.....	19
1.5.1. Graphe Informationnel Causal (GIC).....	19
1.5.2. Puzzle.....	20
1.6. Etude en cours sur la modélisation systémique par Bond Graph dans l'équipe "Système" du LEEI.....	22
1.7. Conclusion.....	27
Chapitre 2 Les méthodes d'analyse par Bond Graph pour l'approche système	29
2.1. La linéarisation en petit signal.....	29
2.1.1. Application au bond graph.....	30
2.1.1.1. Non linéarité liée aux lois caractéristiques des éléments passifs R, I, C	30
2.1.1.2. Non linéarité du module d'un élément	31
2.1.1.3. Non linéarité des lois caractéristiques modulées par la commande.....	34
2.1.2. Exemple	34
2.2. Analyse de stabilité.....	36
2.2.1. Lieu des pôles	36
2.2.2. Deuxième méthode de Lyapunov.....	40

2.2.2.1.	Application au bond graph.....	41
2.2.2.2.	Exemple.....	44
2.3.	Les méthodes de simplification de modèles.....	48
2.3.1.	Méthode des perturbations singulières	48
2.3.1.1.	Application au modèle d'état linéaire.....	49
2.3.1.2.	Application au modèle d'état non linéaire.....	51
2.3.1.3.	Application au bond graph.....	52
2.3.2.	Méthode MORA (<i>Model Order Reduction Algorithm</i>).....	58
2.3.2.1.	Obtention du modèle réduit pour une bande de fréquence désirée (modèle linéaire).....	60
2.3.2.2.	Signaux d'excitation.....	62
2.3.2.3.	Obtention du modèle réduit selon le signal d'excitation (modèle linéaire et non linéaire).....	64
2.3.2.4.	Exemple.....	64
2.4.	Conclusion.....	66
Chapitre 3	Modélisation Bond Graph de la chaîne de traction ferroviaire	67
3.1.	La BB36000.....	67
3.2.	Le modèle bond graph de la BB36000.....	68
3.2.1.	La source d'alimentation.....	69
3.2.2.	Les modèles de conversion statique d'énergie	69
3.2.2.1.	Le filtre d'entrée.....	69
3.2.2.2.	L'onduleur	70
3.2.2.3.	La commande en MLI.....	72
3.2.3.	La transformation de Park	73
3.2.4.	La commande vectorielle.....	75
3.2.5.	Modélisation Bond Graph d'une machine asynchrone.....	77
3.2.5.1.	Représentation générale	77
3.2.5.2.	Représentation électrique diphasée d'une machine asynchrone	78
3.2.5.3.	Modèle 1 : MAS modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments multiports.....	81
3.2.5.4.	Modèle 2 : MAS modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments monoports.....	82
3.2.5.5.	Modèle 3: MAS modélisée dans le repère (d, q) lié au vecteur de tension stator	84
3.2.6.	La chaîne de transmission mécanique	87
3.3.	Validation par simulations.....	88
3.3.1.	Fonctionnement normal : cas d'un démarrage.....	89
3.3.2.	Fonctionnement dégradé : cas d'un court-circuit symétrique.....	91
3.4.	Conclusion.....	91
Chapitre 4	Analyse systémique de la chaîne de traction.....	93
4.1.	Analyse de la partie mécanique	93
4.1.1.	Méthode des Perturbations Singulières (MPS).....	93
4.1.2.	Réduction de modèles selon la bande passante par la Méthode MORA.....	98
4.1.3.	MORA : modèles réduits selon la gamme de fréquence d'utilisation.....	100
4.1.4.	Exploitation de la réduction du modèle mécanique pour l'analyse système	104

4.2.	Analyse du système complet.....	106
4.2.1.	Simplification par la méthode MORA.....	106
4.2.1.1.	L'influence du modèle de la MLI.....	108
4.2.1.2.	L'influence du régime de vitesse.....	110
4.2.1.3.	Choix du modèle de la machine asynchrone.....	112
4.2.1.4.	L'effet de masquage.....	115
4.2.1.5.	Le choix de l'entrée perturbée.....	117
4.2.2.	Une solution : se baser sur un modèle à variables continues.....	118
4.2.2.1.	Modèle linéarisé.....	118
4.2.2.2.	Simplification du modèle linéarisé par la méthode MORA.....	120
4.2.2.3.	Simplification du modèle linéarisé par la MPS.....	125
4.2.3.	Simplification du modèle non linéaire par la MPS.....	127
4.2.4.	Synthèse sur la réduction de modèle.....	132
4.2.5.	Conclusions.....	134
4.3.	Analyse de stabilité.....	134
4.3.1.	Modèle linéarisé.....	135
4.3.1.1.	Effet de la valeur de la résistance du filtre R_f	139
4.3.1.2.	Influence de la valeur de la capacité du filtre C_f	139
4.3.1.3.	Influence de la valeur de l'inductance du filtre L_f	140
4.3.1.4.	Influence de la valeur de la constante de temps du régulateur de courant (T_{BF}).....	141
4.3.1.5.	Effet de la valeur de la vitesse.....	142
4.3.2.	Modèle non linéaire.....	146
4.4.	Conclusions.....	147
	Conclusion Générale.....	149
	Bibliographie.....	153
	Annexe A Formalisme Bond Graph.....	157
A.1.	Eléments passifs.....	157
A.2.	Eléments multiports.....	157
A.3.	Construction d'un modèle bond graph.....	158
A.3.1.	Modélisation d'un système mécanique de translation (adaptée en rotation)...	158
A.3.2.	Modélisation d'un système hydraulique.....	159
A.4.	Causalité : chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action.....	159
A.4.1.	Chemin causal.....	159
A.4.2.	Boucle causale.....	161
A.4.3.	Chaîne d'action.....	162
A.5.	Obtention d'un modèle mathématique.....	162
A.5.1.	Equation d'état (cas où tous les éléments I et C sont en causalité intégrale) .	162
A.5.2.	Fonction de transfert.....	163
A.6.	Analyses structurelles.....	164
A.6.1.	Ordre d'un modèle.....	164
A.6.2.	Rang de la matrice d'état.....	164
A.6.3.	Observabilité.....	164
A.6.4.	Commandabilité.....	165
A.6.5.	Inversibilité.....	165
A.6.6.	Exemple.....	166

Annexe B	Les valeurs des paramètres	169
B.1.	Moteur à courant continu.....	169
B.2.	Chaîne de traction ferroviaire.....	169
Annexe C	Modèles d'état de la chaîne de traction ferroviaire.....	171
C.1.	Modèle d'état non linéaire	172
C.2.	Modèle d'état linéarisé.....	173
Annexe D	Bond graph incrémental de la chaîne de traction ferroviaire	175
Annexe E	Etude fréquentielle des variables de la chaîne de traction ferroviaire.....	177
Annexe F	Modèle d'état linéarisé en petit signal pour l'analyse de stabilité avec la méthode du lieu des pôles	191
F.1.	Modèle d'état non linéaire.....	191
F.2.	Linéarisation.....	193
Annexe G	Calcul analytique de l'activité énergétique des éléments de la transmission mécanique.....	199
G.1.	Détermination des boucles causales	199
G.2.	Détermination de $D(s)$	199
G.3.	Détermination de la chaîne d'action $T_i(s)$	201
G.4.	Détermination de $D_i(s)$	202
G.5.	Détermination de $y_i(s)$	203
G.6.	Détermination de $U(\mathbf{w})$	203
G.7.	Calcul des activités énergétiques.....	203
G.8.	Intégration de l'activité énergétique par rapport à la pulsation.....	205
Annexe H	Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA).....	207
Annexe I	Etude des signaux de la chaîne de transmission mécanique (par la méthode MORA).....	209
I.1.	Excitation à l'entrée C_{em}	209
I.1.1.	Echelon.....	209
I.1.2.	Sinusoïde.....	210
I.1.3.	SBPA.....	211
I.1.4.	Chirp	212
I.2.	Excitation à l'entrée F_{res}	213
I.2.1.	Echelon.....	213
I.2.2.	Sinusoïde.....	214
I.2.3.	SBPA.....	215
I.2.4.	Chirp	215

Notations

Φ_s et Φ_r	Flux statorique et rotorique
I_s et I_r	Courants statorique et rotorique
l_s et l_r	Inductances des fuites statorique et rotorique
L_m	Inductance mutuelle
L_s	Inductance cyclique statorique ($L_s = l_s + L_m$)
L_r	Inductance cyclique rotorique ($L_r = l_r + L_m$)
R_s et R_r	Résistances statorique et rotorique
LM	Inductance magnétisante ramenée au stator ($LM = L_m^2 / L_r$)
LF	Inductance des fuites totalisées au stator ($LF = L_s - LM$)
RR	Résistance rotorique ramenée au stator ($RR = (L_m / L_r)^2 R_r$)
p	Nombre de paires de pôles
ω et Ω	Vitesses électrique et mécanique ($\omega = p \cdot \Omega$)
C_{em}	Couple électromagnétique
F_{res}	Force résistive à l'avancement
C_r	Couple résistif
VRP	Vitesse du train en régime permanent
ω_n et T_n	Pulsation et période naturelles d'une boucle causale de type $I - I$ ou $I - C$
T	Constante de temps d'une boucle causale de type $I - R$ ou $C - R$
A_i	Activité énergétique de l'élément i
A_{total}	Somme des activités énergétiques dans le modèle
AI_i	Index d'activité de l'élément i

Introduction

Introduction

Le Génie Electrique est au cœur de dispositifs par nature multidisciplinaires, à l'interface entre domaines mécanique, hydraulique, thermodynamique, chimique,.... Dans ces dispositifs, il existe de fortes interactions des éléments appartenant parfois à des disciplines distinctes correspondant à différents champs d'expertise. Si la connaissance est souvent cloisonnée, la physique et l'énergie ne s'arrêtent pas aux frontières disciplinaires. Ces couplages, dans un tel contexte, sont en grande partie à la source de la complexité de la conception de systèmes, notamment de l'analyse systémique sur laquelle se penche ce mémoire.

L'équipe Système du LEEI voit dans cette problématique un domaine de recherche et situe ses activités dans le cadre d'une approche système en Génie Electrique. C'est dans ce contexte que nos travaux ont été effectués avec l'idée d'exploiter les méthodes de modélisation unifiantes telles que le formalisme Bond Graph qui, en offrant plus de cohérence dans la représentation de systèmes énergétiques hétérogènes et multidisciplinaires contribue à en donner une vision globale plus claire. De plus, il est apparu que l'exploitation des propriétés causales des transferts énergétiques ouvrait des perspectives intéressantes en terme d'analyse systémique. Ainsi, à l'aide de la méthodologie Bond Graph, nous nous sommes surtout focalisés vers la définition de *modèles "juste assez" précis, adaptables aux objectifs de l'étude*, ce qui répond à un enjeu majeur de l'approche système : définir des modèles à moindre coût. Nous avons donc exploité les méthodes de simplification de modèle appliquées directement au bond graph. Cette simplification peut conduire à l'obtention d'un *modèle réduit valable sur une gamme de fréquence donnée*. Actuellement, c'est plutôt vers les basses fréquences que nos efforts se portent, car l'approche systémique de la conception impose d'être capable de représenter un système complexe dans sa totalité dans le cadre de missions qui peuvent s'étendre sur de longues durées. Ainsi, la définition systématique de modèles représentant les modes lents du dispositif (modèles moyens, Bond Graph lent) constitue un axe d'effort majeur. A l'opposé, on peut envisager que ces mêmes techniques issues des Bond Graphs Causaux soient exploitables afin de définir les modes rapides du système (Bond Graph rapide), également susceptibles de générer des interactions inter-disciplinaires (exemple de l'étude de phénomènes vibratoires ou acoustiques).

Dans un autre côté, la *stabilité* est un aspect fondamental de l'étude des systèmes complexes. Le comportement instable peut détériorer le système, voire même provoquer un accident grave. Cependant, les systèmes que nous étudions étant le plus souvent non linéaires, la linéarisation en petit signal est une procédure souvent utile que l'on peut appliquer directement sur le Bond Graph Causal.

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Dans le Chapitre 1, nous présentons brièvement le formalisme Bond Graph Causal et son apport dans le cadre d'une approche système en Génie Electrique.

Les méthodes d'analyse systémique telles que la simplification du modèle et d'analyse de stabilité sont explicitées dans le chapitre suivant, partant de l'existant jusqu'aux développements que nous avons effectués au cours de cette thèse.

La modélisation de notre cas d'étude : une chaîne de traction ferroviaire, est décrite dans le Chapitre 3, où nous présentons également une *modélisation particulière linéarisable* de la machine asynchrone alimentée par onduleur de tension.

L'analyse systémique des modèles obtenus, les problématiques associées à ces méthodes et la validation par simulation sont détaillées dans le Chapitre 4.

Enfin, nos conclusions et perspectives à ces travaux sont décrites à la fin de ce mémoire.

Chapitre 1

Le Bond Graph Causal dans le cadre d'une approche système en Génie Electrique

Chapitre 1

Le Bond Graph Causal dans le cadre d'une approche système en Génie Electrique

Dans ce chapitre, nous présentons succinctement le formalisme Bond Graph (BG) que nous utilisons au cours de nos travaux.

Un objectif particulier de ce chapitre est de situer le bond graph causal dans le contexte des travaux de recherche du groupe 'Système', de façon à expliciter la logique qui a conduit cette équipe, voici quatre ans, à utiliser ce formalisme et à en faire aujourd'hui un de nos outils de conception privilégié. Cette mise en perspective entre méthode BG et démarche de conception système en Génie Electrique opérera, tant au plan méthodologique (méthode de conception par la synthèse et l'analyse), que vis a vis des champs applicatifs (éléments de production et stockage électrochimique, systèmes de transport, énergies nouvelles,...) actuellement investis.

1.1. Contexte de l'approche système en Génie Electrique

Le domaine du Génie Electrique est au cœur et à l'interface avec plusieurs disciplines connexes, mettant en œuvre des domaines physiques différents, électrique bien sûr, mais aussi thermique, magnétique, mécanique, hydraulique, chimique,.... Parmi ces disciplines, il existe un dénominateur commun lié au fait que des échanges de puissances et d'énergie transitent au sein et entre chaque domaine. Une chaîne de traction, telle que celle que nous considérons dans ce mémoire, constitue ainsi un exemple de système électromécanique présentant un couplage fort entre les domaines électrique et mécanique, tandis qu'une pile à combustible est un système présentant des couplages électrique, chimique, hydraulique et thermodynamique.

A cause de cet aspect multidomaine, l'analyse globale du système n'est pas facile à effectuer. En raison d'un partage souvent disciplinaire de l'expertise, partage largement répandu dans le contexte éducatif puis souvent dans l'entreprise, cette analyse est souvent réalisée selon chaque discipline de façon isolée, masquant ainsi les interactions entre les domaines. Ainsi, les phénomènes mécaniques intervenant sur le bogie d'une locomotive sont souvent très simplifiés voire négligés par les électrotechniciens et vice et versa pour ce qui est de la conception de la partie mécanique.

Cette vision simplificatrice (mécaniste) a régné en maître pendant une bonne partie du 20^{ème} siècle et a longtemps montré son efficacité mais aussi ses limites dès lors que les couplages sont forts entre les disciplines. Or, les phénomènes de couplage ou d'interaction sont l'essence même du mot système. Ainsi, I. Bertalanffy, pionnier de la "systémique" et

fondateur de la "théorie générale des systèmes" propose une définition très simple au mot système, le définissant comme un *complexe d'éléments en interaction*.

Ainsi, une nouvelle vision de la conception a vu le jour, plutôt impulsée au départ par les sciences "du vivant", de la biologie à l'écologie (P. Delattre, L. V. Bertalanffy, E. Morin,...) puis largement exploitée dans le domaine des sciences de l'information et de la communication (N. Wiener, Shannon,...) et de l'économie (J.L. Le Moigne,...). Ces pionniers, auquel il faut ajouter et signaler l'influence prépondérante des américains du MIT (N. Wiener, J. De Rosnay,...), ont largement contribué à dégager les concepts fondamentaux d'une sciences des systèmes véritablement interdisciplinaire. Ce n'est donc probablement pas par hasard si le "père" des Bonds Graphs, Ronald Paynter, est également issu du MIT.

Cette vision méthodologique, relativement vague à l'origine, se concrétise notamment depuis quelques années au sein de nombreuses entreprises, notamment des entreprises de grande taille qui ont modifié voire révolutionné leur approche industrielle de la conception de façon à limiter les coûts par une minimisation des temps de conception et une limitation du prototypage au profit de la modélisation/simulation/analyse dont découle la notion nouvelle de "prototypage virtuel".

L'exemple de l'automobile est ainsi tout à fait typique, secteur dans lequel la réduction des cycles de conception de nouveaux véhicules de 5 à 3 ans entre 1990 et 2000 [Dau-99a] est passée par une réorganisation complète des départements "conception". Ainsi, est apparue la notion de "plateau technique", qui repose sur un découpage par fonction (freinage, direction, suspension,...) plus que par discipline. Au sein de chaque plateau, échantent différents experts (électriciens, électroniciens, mécaniciens, informaticiens...) qui doivent faire face, de plus en plus vite, à de plus en plus d'innovation technologique et technique, notamment avec l'introduction de fonctions innovantes et "intelligentes", à caractère fondamentalement interdisciplinaires (ABS, direction assistée électrique, alternodémarrreur,...) dans lesquelles l'électricité joue de plus en plus un rôle prépondérant. Ceci est en particulier possible grâce à l'apparition de nouveaux outils de conception système favorisant justement les notions fondamentales en entreprise de "dialogue" et de "capitalisation de connaissance" qui sont à l'essence même de "l'espéranto" que constitue le Bond Graph pour les dispositifs énergétiques.

Dans le groupe de recherche "Système" du LEEI [Rob-00][Ast-03], nous nous efforçons d'appliquer une démarche systémique de la conception en Génie Electrique qui vise à considérer le dispositif dans son ensemble, en situant son périmètre vis à vis de 'l'environnement' avec lequel il interagit et en le représentant dans le cadre de sa *mission*. Ainsi, dans un contexte fortement multidomaine, l'idée de modéliser tous les domaines physiques selon un tout cohérent et unifiant paraît parfaitement opportune, d'autant plus si la méthode apporte une lisibilité en terme d'analyse des interactions, ce qui, comme nous le verrons dans ce chapitre, est le cas lorsqu'on exploite les propriétés fondamentales qui

découlent de la causalité dans les dispositifs énergétiques. C'est donc fort logiquement que ce groupe en est venu à s'intéresser à ce formalisme graphique qui peut parfois rebuter au premier abord, mais qui, une fois le cap passé nous apporte un soutien important vis à vis de notre démarche.

Hormis le Bond Graph, il existe aussi d'autres formalismes graphiques orientés vers la conception : le Graphe Informationnel Causal (GIC) et la méthode du "Puzzle". Ces méthodologies qui proposent aussi une modélisation homogène d'un système sont présentées dans les parties suivantes.

1.2. Le formalisme Bond Graph

NB : les notions classiques définies dans ce paragraphe sont présentées de façon synthétique car elles ne font l'objet d'aucun développement personnel. Nous proposons au lecteur intéressé par plus de détails de se reporter aux annexes du mémoire ainsi qu'aux nombreux ouvrages de référence sur les Bond Graphs

Le formalisme bond graph [Bor-92][Dau-99a][Dau-00][Kar-00] a été introduit par H. Paynter en 1961 et formalisé par Karnopp et Rosenberg en 1975. Cette méthodologie est entrée en Europe à la fin de l'années 70 par les Pays-Bas (Université de Twente) et la France (société Alstom). L'outil bond graph est maintenant utilisé régulièrement dans quelques entreprises, en particulier dans l'industrie automobile (PSA, Renault, Ford, Toyota, General Motors,...).

Cette méthode illustre les transferts énergétiques dans le système en utilisant des liens de puissance (*bond*, en anglais). Un lien de puissance est symbolisé par une demi flèche, dont l'orientation indique le sens de transfert de puissance. Ainsi la Figure 1.1 représente le transfert de puissance du sous-système A vers le sous-système B.

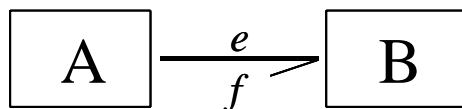


Figure 1.1. Bond graph : transfert de puissance de A vers B.

Une des caractéristiques fondamentales du formalisme bond graph est son aspect unifiant, quel que soit le domaine physique d'application (électrique, mécanique, hydraulique, chimique,...). Nous pouvons visualiser les transferts énergétiques dans les systèmes multidomains grâce aux variables généralisées présentées dans le paragraphe suivant.

1.2.1. Les variables généralisées

Chaque lien de puissance véhicule deux informations simultanément : l'effort e et le flux f (voir Figure 1.1). Ce sont les variables généralisées de puissance (leur produit étant la puissance transférée). Nous utilisons aussi des variables généralisées d'énergie : le moment p (l'intégrale de l'effort par rapport au temps) et le déplacement q (l'intégrale du flux par rapport au temps). Nous présentons Tableau 1.1 les variables associées aux variables généralisées dans plusieurs domaines physiques.

Tableau 1.1. Equivalences des variables généralisées dans des domaines physiques

Domaine	Effort e	Flux f	Moment p	Déplacement q
Electrique	Tension u	Courant i	Flux magnétique Φ	Charge q
Mécanique Translation	Force F	Vitesse v	Impulsion p	Déplacement x
Mécanique Rotation	Couple C	Vitesse angulaire ω	Impulsion angulaire h	Angle θ
Hydraulique	Pression P	Débit volumique Q	Impulsion pression Γ	Volume V
Chimique	Potentiel chimique	Flux molaire		Nombre de mole
Thermodynamique	Température	Flux d'entropie		Entropie
Magnétique	Force magnéto- motrice	Dérivée du flux magnétique		Flux magnétique
Acoustique	Pression	Vitesse volumique	Impulsion	Volume

1.2.2. Les éléments bond graphs

Nous utilisons les éléments pour représenter des phénomènes qui lient les variables généralisées. Nous pouvons les séparer en trois catégories :

1.2.2.1. Eléments actifs

Les éléments actifs sont des sources d'effort ou de flux. Ces dernières peuvent avoir une valeur indépendante de toute influence extérieure (par exemple la pesanteur) symbolisées par Se pour des sources d'effort ou Sf pour des sources de flux, ou modulée selon un signal (symbolisées par MSe ou MSf). Ces éléments fournissent la puissance (positive ou négative) au système. Par conséquent, *le sens de la demi-flèche sortant de l'élément est obligatoire.*

1.2.2.2. Eléments passifs

Le tétraèdre de Paynter présenté Figure 1.2 illustre les relations entre les variables généralisées en passant par les éléments passifs (R , I , C). Ceux-ci peuvent être de caractéristique linéaire ou non linéaire. Dans cette section, nous ne parlons que des éléments passifs ayant un seul lien de puissance entrant. Nous les appelons éléments passifs monoports. Les éléments multiports (ayant plusieurs liens de puissance entrants) seront détaillés en Annexe A.

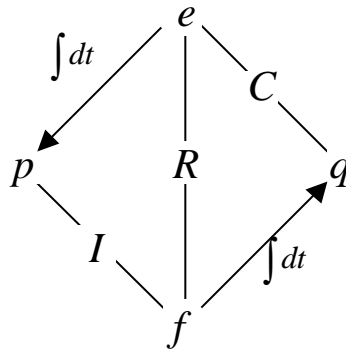


Figure 1.2. Tétraèdre de Paynter.

Un élément R est dissipatif d'énergie, sous forme de chaleur. Les éléments I et C sont les éléments de stockage d'énergie. L'énergie stockée est définie comme :

$$E(t) = \int_0^t e(\mathbf{t}) f(\mathbf{t}) dt + E(0) \quad (1.1)$$

Les éléments passifs consomment la puissance et la transforment soit en énergie dissipée comme chaleur dans les éléments R , soit en énergie stockée dans les éléments I (énergie cinétique) et C (énergie potentielle). *L'orientation de la demi-flèche est donc entrante vers l'élément.*

1.2.2.3. Détecteurs

Nous utilisons les détecteurs d'effort (De) et de flux (Df) pour mesurer les variables correspondantes dans un modèle bond graph. Nous les considérons idéaux : ils ne consomment pas de puissance; nous utilisons donc un lien de type signal (une flèche).

Le Tableau 1.2 résume les éléments bond graphs avec des exemples dans quelques domaines physiques. Des détails supplémentaires sur les éléments passifs sont donnés en Annexe A.

Tableau 1.2. Eléments de base de bond graph.

Elément	Symbole	Loi générique	Exemples
Eléments actifs	$S_e \longrightarrow$	e indépendant de f	Générateur idéal de tension
	$S_f \longrightarrow$	f indépendant de e	Générateur idéal de courant
Eléments passifs monoports	$\longrightarrow R$	$\Phi_R(e, f) = 0$	Résistance électrique, frottement, amortisseur, restriction hydraulique
	$\longrightarrow I$	$\Phi_I(p, f) = 0$	Bobine, inertie, masse
	$\longrightarrow C$	$\Phi_C(e, q) = 0$	Condensateur, ressort, élasticité, réservoir
Détecteurs	$\longrightarrow D_e$		Voltmètre, manomètre
	$\longrightarrow D_f$		Ampèremètre, tachymètre

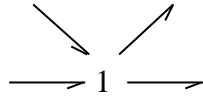
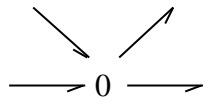
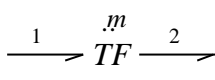
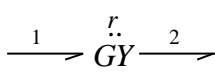
1.2.3. Les jonctions

Les jonctions servent à coupler les éléments précédemment présentés. Celles-ci sont conservatives de puissance. Quatre types de jonction sont définis. Il s'agit des jonctions 0, 1, TF (transformateur) et GY (gyrateur).

- Les jonctions 1 sont des jonctions iso-flux
- Les jonctions 0 sont des jonctions iso-effort
- Les jonctions TF transforment les variables effort - effort, flux - flux.
- Les jonctions GY transforment les variables effort - flux, flux - effort.

Le Tableau 1.3 présente le symbole et la loi générique de chaque type de jonction. Les coefficients a_i correspondent à l'orientation de la demi-flèche ($a_i = +1$ si celle-ci entre dans la jonction et $a_i = -1$ si elle sort de la jonction).

Tableau 1.3. Eléments de jonction de bond graph.

Elément	Symbole	Loi générique	Exemples
Jonctions		$f_1 = f_2 = \dots = f_n$ $\sum_{i=0}^n a_i e_i = 0$	couplage en parallèle en mécanique, en série en électrique et hydraulique
		$e_1 = e_2 = \dots = e_n$ $\sum_{i=0}^n a_i f_i = 0$	couplage en série en mécanique, en parallèle en électrique et hydraulique
		$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	transformateur électrique, levier, réducteur mécanique, couplage de systèmes physiques
		$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	moteur à courant continu, couplage de systèmes physiques

1.2.4. Construction d'un modèle bond graph à partir d'un modèle physique

Les procédures de construction diffèrent sensiblement selon les domaines physiques considérés. Ainsi, un élément C en mécanique (ressort) exprime une différence de vitesse (flux) entre ses deux extrémités et sera placé sur une jonction "équi-effort" 0. Au contraire, un condensateur électrique est caractérisé par une différence de potentiel (effort) et sera placé sur une jonction "équi-flux" 1.

Nous présentons uniquement les procédures permettant de déduire le modèle bond graph à partir d'un système électrique à partir d'un circuit. Le même type de procédure en mécanique et en hydraulique est donné en Annexe A.

La procédure complète détaillée de la modélisation d'un système électrique est la suivante :

1. A partir d'un schéma électrique, fixer le sens du courant (transfert de puissance) dans le circuit.
2. Déterminer les nœuds qui ont un potentiel différent et introduire une jonction 0 pour chacun d'eux.
3. Mettre une jonction 1 entre deux jonctions 0 et y attacher les éléments qui se situent entre les nœuds correspondants.

4. Mettre le sens de la demi-flèche en suivant le sens du courant (pour un élément passif, l'orientation de la demi-flèche est fixée entrante tandis qu'elle est sortante pour un élément actif).
5. Pour un circuit présentant un potentiel de terre explicite, supprimer toutes les jonctions 0 représentant ce potentiel. Dans un autre cas, choisir un nœud de référence (ou plusieurs), puis supprimer les jonctions correspondantes.
6. Simplifier le bond graph si possible.

Cette procédure détaillée peut être simplifiée "avec l'habitude". L'exemple de la chaîne de motorisation donné au paragraphe 1.3 est repris en Annexe A de façon à expliquer la construction du Bond Graph électromécanique.

1.2.5. La causalité

Nous abordons ici une des notions majeure des Bond Graph et, de façon plus générale, des systèmes énergétiques. En effet, ce paragraphe montre en résumé comment le respect d'une causalité physique (intégrale) garantie les lois fondamentales d'association d'éléments échangeant de la puissance. Nous verrons également comment l'étude des «chemins» suivis par la causalité donne de précieux enseignements en terme d'analyse modale, structurelle,... et mène à la mise en forme mathématique des modèles (fonction de transfert, équation d'état,...). Le travail d'analyse systémique (simplification de modèle, analyse de stabilité,...), objet de ce mémoire, est en majeure partie fondé sur ce concept.

Pour décrire les relations de "cause à effet" et écrire les lois associées aux éléments sous forme causale mathématiquement solvable, il faut d'abord déterminer les variables qui sont imposées aux éléments (les données) et celles qu'imposent ces éléments (les conséquences).

Dans un bond graph, cette propriété est représentée par un trait orthogonal au lien, appelé trait causal.

Le trait causal est placé près (respectivement loin) de l'élément ou jonction pour lequel l'effort (respectivement le flux) est une donnée.

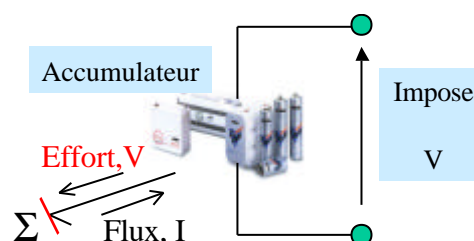


Figure 1.3. Causalité d'un batterie d'accumulateur.

Le sens de la causalité n'a rien à voir avec celui du transfert de la puissance. Pour bien faire comprendre cette notion, l'exemple de la batterie d'accumulateur est tout à fait parlant pour

l'électricien. En effet, que celui se charge (puissance reçue) ou de décharge (puissance fournie), un accumulateur idéal impose systématiquement sa tension (effort) au système environnant. Cet exemple montre aussi le lien entre causalité intégrale et physique. En effet, l'électrotechnicien sait bien pourquoi un tel objet se doit d'être alimenté en courant, de même qu'un condensateur auquel il faut impérativement ne pas provoquer de variations brutales de la tension. Inversement, une inductance (élément I) se doit d'être alimentée, en tension pour éviter toute surintensité non maîtrisée. Ces réflexes et ces problèmes bien connus de l'électrotechnicien se posent de manière analogue au mécanicien, à l'hydraulicien,... et de nombreux ennuis peuvent être évités au stade de la conception si les règles élémentaires de la causalité physique (intégrale) sont respectées. Ces règles d'affectation aux éléments et aux jonctions sont présentées dans le Tableau 1.4. La causalité intégrale d'un élément I ou C est donc choisie préférentiellement pour les raisons que nous venons d'évoquer, mais aussi pour faciliter la simulation : un Bond Graph en causalité intégrale permet généralement d'éviter les boucles algébriques.

Pour bien distinguer l'assignation causale et l'égalité, nous utilisons des notations différentes.

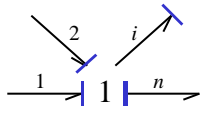
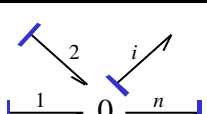
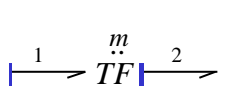
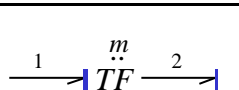
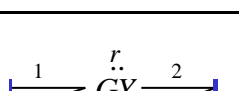
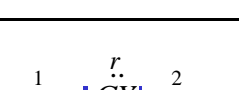
- Dans le cas d'une assignation causale dans le bond graph, nous utilisons la notation " := " pour dire que la variable à droite de l'égalité impose sa valeur à la variable à gauche de cette notation. Par exemple, $f_1 := f_2$ indique que la variable f_2 (à droite) impose au sens de la causalité sa valeur à la variable f_1 (à gauche).
- Dans le cas d'une égalité dans le bond graph acausal, nous utilisons le signe "=" tout simplement.

Après avoir affecté la causalité aux jonctions et aux éléments dans un modèle, nous obtenons un bond graph causal. A partir de ce dernier, nous pouvons :

- écrire les équations relatives aux jonctions et aux éléments selon la causalité.
- déduire l'équation d'état du système et les variables d'état associées aux éléments I et C (éléments dynamiques).
- déterminer les chemins causaux, les boucles causales et les chaînes d'actions qui illustrent les couplages entre les éléments dans le modèle et donnent des informations en terme d'analyse structurelle et de commande.
- obtenir, à partir des gains des boucles causales une images des modes du système, donnant ainsi une orientation vers l'analyse modale.

L'ensemble des définitions relatives aux chemins et boucles causales sont détaillés en Annexe A. Il en est de même de l'obtention d'un modèle mathématique (équation d'état, fonction de transfert) à partir du Bond Graph Causal. A noter que plusieurs de ces notions et définitions sont utilisées dans les chapitres suivants.

Tableau 1.4. Règles d'affectation de causalité.

Elément	Causalité	Symbole	Loi générique	
Eléments actifs	obligatoire	$Se \longrightarrow \vdash$	e imposé par Se	
		$Sf \vdash \longrightarrow$	f imposé par Sf	
Eléments passifs	intégrale	$\longrightarrow \vdash I$	$f_I := \Psi_I \left(\int e_I(t) dt \right)$	
		$\vdash \longrightarrow C$	$e_C := \Psi_C \left(\int f_C(t) dt \right)$	
	dérivée	$\vdash \longrightarrow I$	$e_I := \Psi_I^{-1} \left(\frac{df_I}{dt} \right)$	
		$\longrightarrow \vdash C$	$f_C := \Psi_C^{-1} \left(\frac{de_C}{dt} \right)$	
	arbitraire (cas linéaire) ou non arbitraire (cas non linéaire)	$\vdash \longrightarrow R$	$e_R := R f_R$	$e_R := \Psi_R(f_R)$
		$\longrightarrow \vdash R$	$f_R := \frac{1}{R} e_R$	$f_R := \Psi_R^{-1}(e_R)$
Jonctions	restriction de causalité	 1 trait causal loin de J-1	$\begin{cases} f_1 := f_i \\ \vdots \\ f_n := f_i \end{cases}$ $e_i := -a_1 e_1 - \dots - a_n e_n$	
		 1 trait causal près de J-0	$\begin{cases} e_1 := e_i \\ \vdots \\ e_n := e_i \end{cases}$ $f_i := -a_1 f_1 - \dots - a_n f_n$	
			$e_1 := m e_2$ $f_2 := m f_1$	
			$e_2 := m^{-1} e_1$ $f_1 := m^{-1} f_2$	
			$e_1 := r f_2$ $e_2 := r f_1$	
			$f_1 := r^{-1} e_2$ $f_2 := r^{-1} e_1$	

1.3. Exemple

Considérons le modèle d'un moteur à courant continu alimenté présenté à la Figure 1.4. Ce moteur est alimenté par un hacheur en passant par un filtre de deuxième ordre.

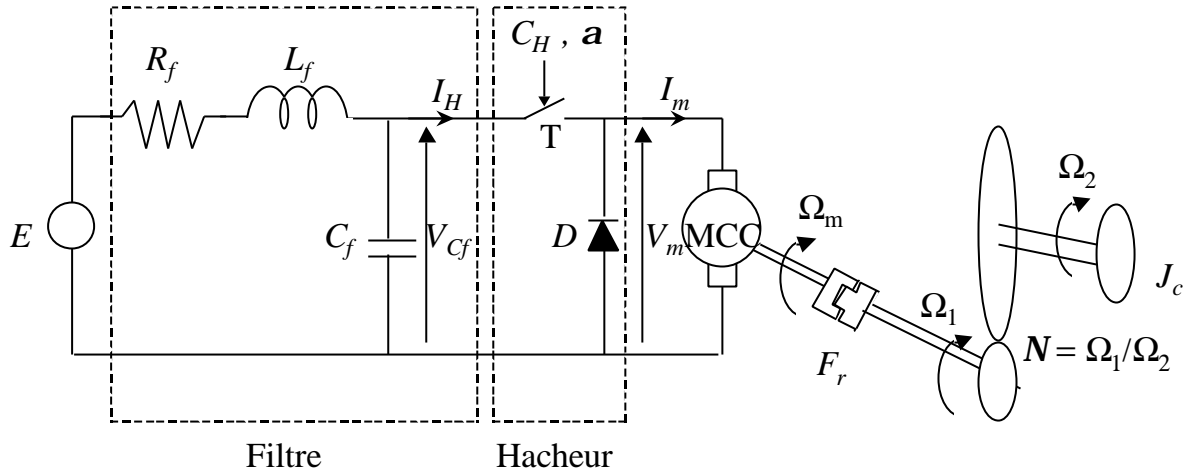


Figure 1.4. Moteur à courant continu.

Le hacheur est considéré parfait sans pertes de puissance. Il permet de commander la tension d'entrée du moteur. En valeur moyenne, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} V_m &= a V_{Cf} \\ I_H &= a I_m \end{aligned} \tag{1.2}$$

où a est le rapport cyclique de hacheur, associé à la commande. La commande en courant peut être réalisée par une fonction simple comme un hystérésis ou un correcteur de type PID.

Le moteur est modélisé par la résistance et l'inductance d'induit (R_m et L_m) en série du côté électrique. Du côté mécanique, nous considérons le frottement et l'inertie de l'arbre du moteur (F_m et J_m). Le moteur est couplé avec une charge mécanique réalisée par une inertie J_c à travers un réducteur de rapport N et un frottement F_r . Le couple de charge est modélisé par une source d'effort C_{ch} .

Le bond graph associé est présenté Figure 1.5. Le couple de charge a un signe moins ($-C_{ch}$) pour respecter la convention sur l'orientation de la demi-flèche sortante de la source.

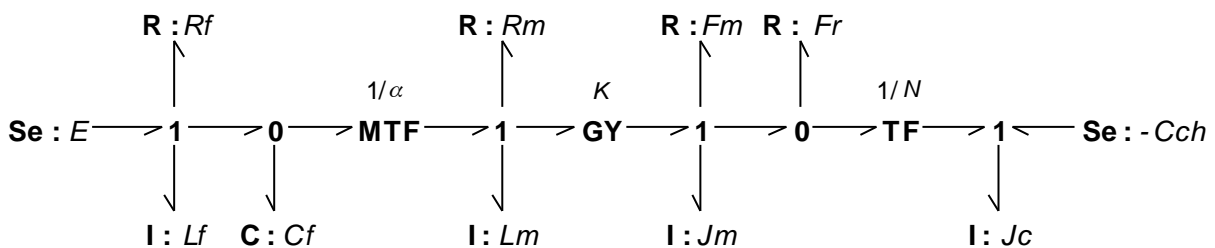


Figure 1.5. Bond graph du moteur à courant continu.

L'élément MTF associé au hacheur a un rapport de transformation $m = 1/\mathbf{a}$ pour respecter la convention d'écriture pour le MTF : m est dimensionné à l'aide de la relation $e_1 = m e_2$, soit ici $V_{Cf} = (1/\mathbf{a})V_m$. Le même raisonnement est appliqué au transformateur associé au réducteur TF : $1/N$.

Sur ce bond graph non causal, nous affectons la causalité suivant les règles présentées section 1.2.5 avec la causalité préférentielle intégrale pour les éléments I et C . Nous obtenons le bond graph causal illustré Figure 1.6.

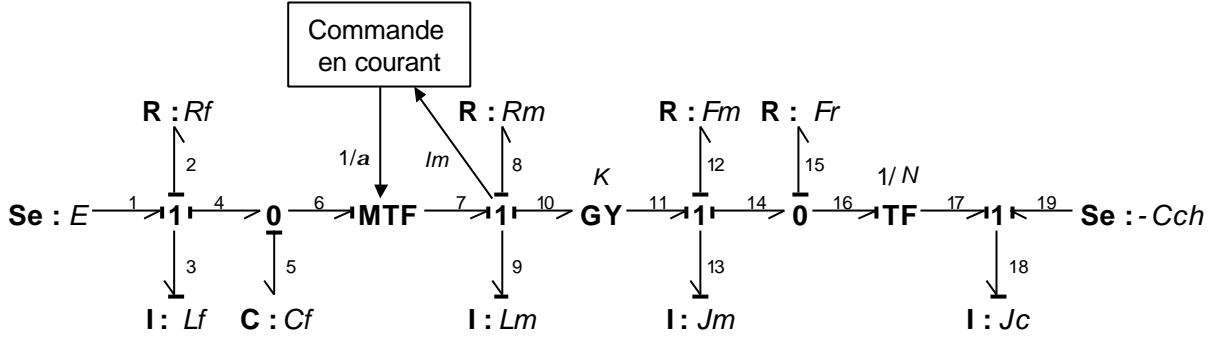


Figure 1.6. Bond graph causal du moteur à courant continu.

A partir de ce bond graph causal, nous déduisons les équations relatives aux jonctions et aux éléments. Chaque lien est numéroté. Les équations déduites des jonctions et des éléments sont présentées dans le Tableau 1.5.

A partir de ces équations, nous pouvons déduire l'équation d'état suivante dont les variables d'état sont les variables d'énergie (p pour les éléments I et q pour les éléments C) :

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_3 \\ \dot{p}_9 \\ \dot{p}_{13} \\ \dot{p}_{18} \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & -\frac{R_m}{L_m} & -\frac{K}{J_m} & 0 & \frac{\mathbf{a}}{C_f} \\ 0 & \frac{K}{L_m} & -\frac{F_m + F_r}{J_m} & \frac{N F_r}{J_c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N F_r}{J_m} & -\frac{N^2 F_r}{J_c} & 0 \\ \frac{1}{L_f} & -\frac{\mathbf{a}}{L_m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_9 \\ p_{13} \\ p_{18} \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ -C_{ch} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Les variables p_3 , p_9 , p_{13} , p_{18} et q_5 correspondent respectivement à Φ_{L_f} , Φ_{L_m} , p_{J_m} , p_{J_c} et q_{C_f} . Nous pouvons aussi écrire l'équation d'état en fonction des variables de puissance, soient ici i_{L_f} , i_{L_m} , Ω_{J_m} , Ω_{J_c} et v_{C_f} .

Tableau 1.5. Equations des jonctions et des éléments.

Jonction	Loi	Elément	Loi
1	$\begin{cases} f_1 := f_3 \\ f_2 := f_3 \\ f_4 := f_3 \end{cases}$ $e_3 := e_1 - e_2 - e_4$	Se : E	$e_1 := E$
0	$\begin{cases} e_4 := e_5 \\ e_6 := e_5 \end{cases}$ $f_5 := f_4 - f_6$	R : R_f	$e_2 := R_f f_2$
TF : 1/a	$e_7 := a e_6$ $f_6 := a f_7$	I : L_f	$f_3 := \frac{1}{L_f} \int e_3 dt = \frac{1}{L_f} p_3$
1	$\begin{cases} f_7 := f_9 \\ f_8 := f_9 \\ f_{10} := f_9 \end{cases}$ $e_9 := e_7 - e_8 - e_{10}$	C : C_f	$e_5 := \frac{1}{C_f} \int f_5 dt = \frac{1}{C_f} q_5$
GY : K	$e_{10} := K f_{11}$ $e_{11} := K f_{10}$	R : R_m	$e_8 := R_m f_8$
1	$\begin{cases} f_{11} := f_{13} \\ f_{12} := f_{13} \\ f_{14} := f_{13} \end{cases}$ $e_{13} := e_{11} - e_{12} - e_{14}$	I : L_m	$f_9 := \frac{1}{L_m} \int e_9 dt = \frac{1}{L_m} p_9$
0	$\begin{cases} e_{14} := e_{15} \\ e_{16} := e_{15} \end{cases}$ $f_{15} := f_{14} - f_{16}$	R : F_m	$e_{12} := F_m f_{12}$
TF : 1/N	$e_{17} := N e_{16}$ $f_{16} := N f_{17}$	I : J_m	$f_{13} := \frac{1}{J_m} \int e_{13} dt = \frac{1}{J_m} p_{13}$
1	$\begin{cases} f_{17} := f_{18} \\ f_{19} := f_{18} \end{cases}$ $e_{18} := e_{17} + e_{19}$	R : F_r	$e_{15} := F_r f_{15}$
		I : J_c	$f_{18} := \frac{1}{J_c} \int e_{18} dt = \frac{1}{J_c} p_{18}$
		Se : -C_{ch}	$e_{19} := -C_{ch}$

En utilisant les gains de chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action, nous obtenons la même équation d'état. Nous présentons la détermination de certains éléments des matrices **A** et **B** dans le Tableau 1.6.

Tableau 1.6. Exemple de calcul des éléments des matrices d'état à l'aide des chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action.

Élément	Commentaire	Equation
a_{33}	somme des gains statiques de boucles causales : - entre J_m et F_m ($n_1 = 1$) : $B_1 = -\frac{F_m}{J_m}$ - entre J_m et F_r ($n_1 = 1$) : $B_2 = -\frac{F_r}{J_m}$	$a_{33} = -\frac{F_m + F_r}{J_m}$
a_{23}	gain statique du chemin causal partant de J_m vers L_m ($n_1 = 1, r = K$), multiplié par le gain statique de J_m :	$a_{23} = -\frac{K}{J_m}$
b_{11}	gain de chaîne d'action de source E vers L_f :	$b_{11} = 1$

1.4. Le bond graph : outil d'analyse et de dimensionnement

Nous avons résumé dans la section précédente les orientations qui peuvent être prises à partir d'un Bond Graph Causal. Dans cette partie, nous présentons quelques possibilités d'analyses système, appliquées directement à partir du bond graph, dans le cas où le modèle est linéaire.

1.4.1. Analyses structurelles

Le logiciel ARCHER [Azm-92], développé au LAIL, peut effectuer ces analyses automatiquement sur le modèle bond graph implanté par l'utilisateur. Il est possible de déterminer ainsi :

- l'ordre du modèle ;
- le rang de la matrice d'état ;
- l'observabilité ;
- la commandabilité ;
- l'inversibilité ;

d'un système modélisé par un Bond Graph. Ces notions sont détaillées en Annexe A.

1.4.2. Analyse de la causalité

L'analyse des propriétés causales du graphes offre directement plusieurs types d'enseignement :

- L'existence d'une boucle causale de gain +1 (boucle de causalité) sans passer par des éléments dynamiques (éléments I ou C) ou en passant par des éléments dynamiques dont

les termes en s s'annulent n'est pas acceptable (terme nul au dénominateur de la fonction de transfert). Il faut transformer certaines causalités initialement intégrales en causalités dérivées pour éliminer le problème.

- Le cas où la causalité n'est pas unique (voir Figure 1.7) conduit à l'obtention d'équations implicites qui peuvent provoquer des problèmes numériques lors de la simulation. Il faut rendre explicites ces équations, en cassant la boucle algébrique (indiquée par la boucle de causalité Figure 1.7) entre les éléments impliqués en ajoutant des éléments dynamiques qui fixent la propagation de causalité. Dans notre exemple, il suffit d'introduire un élément C à la jonction 0 pour fixer la causalité les éléments R . En fait, les éléments ajoutés correspondent souvent à des phénomènes physiques parasites négligés dans la modélisation.

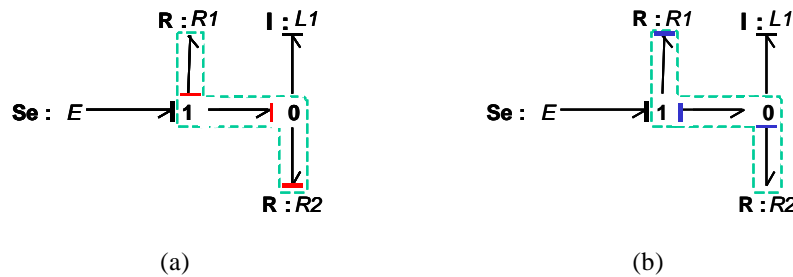


Figure 1.7. Exemple de non unicité de la causalité entre les éléments R_1 et R_2 , (a) ou (b).

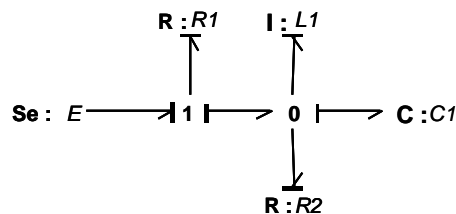


Figure 1.8. Causalité unique.

- Une causalité dérivée sur des éléments dynamiques conduit aussi à des équations implicites lors de la construction de l'équation d'état. Pour effectuer la simulation d'un modèle ayant ce type de causalité, il faut utiliser un solveur acceptant les équations implicites ou modifier le modèle pour supprimer la causalité dérivée en ajoutant des éléments dynamiques supplémentaires comme pour le cas de non unicité de la causalité.

1.4.3. Analyses formelles

L'obtention d'un modèle mathématique sous forme d'expression formelle, telle que l'équation d'état ou la fonction (ou la matrice dans le cas à plusieurs entrées/sorties) de transfert se fait directement à partir du bond graph. Par ailleurs, le calcul des boucles causales permet de

déterminer les modes du modèle. Les analyses formelles peuvent être effectuées grâce au logiciel ARCHER.

1.4.4. Analyses numériques

En considérant les valeurs numériques des paramètres, nous pouvons évaluer numériquement des fréquences de couplage entre composants, la fréquence d'échantillonnage à implanter pour simuler le modèle et la durée minimale de la simulation. La simulation temporelle et fréquentielle permet de calculer des critères et d'analyser des performances du système. Par ailleurs, la simplification du modèle peut être effectuée [Sue-91][Lou-99]. Cette dernière sera détaillée dans le Chapitre 2.

1.4.5. Dimensionnement – problème inverse

Dans la conception d'un système, il y a toujours un cahier des charges (par exemple la caractéristique couple-vitesse d'une machine) à respecter. Une fois que le modèle est obtenu, il faut déterminer les valeurs des paramètres en tenant en compte de la demande. C'est le problème du dimensionnement. De plus, en phase de conception, il peut être intéressant d'inverser le graphe en se donnant les sorties pour retrouver les entrées du graphe.

Le formalisme bond graph et en particulier les notions liées à la bicausalité permettent ainsi de dimensionner les paramètres ou les entrées à partir de la connaissance des réponses désirées [Fot-99]. Ceci impose que le modèle soit inversible (voir Annexe A).

Dans le cas de la bicausalité, le trait causal est séparé en deux demi-trait causaux. Chacun affecte une variable (effort ou flux). Nous pouvons donc réécrire la convention décrite dans le paragraphe 1.2.5 comme suit:

Le demi-trait causal d'effort (respectivement de flux) est placé près (respectivement loin) de l'élément pour lequel l'effort (respectivement de flux) est une donnée.

Pour ne pas confondre, le demi-trait de la variable d'effort est placé du côté sans demi-flèche (voir Figure 1.9), tandis que celui de la variable de flux est du côté avec demi-flèche. En fait, la causalité "standard" est un cas particulier de la bicausalité où les demi-trait sont placés du même côté du lien. Notons qu'en utilisant la bicausalité, nous pouvons déterminer la valeur des paramètres en fonction des informations véhiculées par un lien (par exemple la valeur d'une résistance R si nous connaissons la tension e et le courant f qui la traverse). En parcourant les liens bicausaux dans le modèle inversible, les paramètres peuvent donc être calculés en fonction des sorties.



Figure 1.9. Exemple de la bicausalité sur un élément R où l'effort et le flux sont des données.

En outre, l'inversibilité d'un bond graph peut être étudiée d'une manière structurale en appliquant la bicausalité. Les informations plus détaillées sur la bicausalité et le dimensionnement peuvent être consultées dans [Gaw-95][Fot-96][Fot-97][Fot-99].

1.5. Autres formalismes existants

A côté de la méthodologie bond graph, nous pouvons citer deux formalismes unifiants tels que le Graphe Informationnel Causal (GIC) et le Puzzle.

1.5.1. Graphe Informationnel Causal (GIC)

Cette méthode a été formalisée par J.P. Hautier et J. Faucher. Elle permet de visualiser les transferts d'informations dans le système [Hau-96][Hau-99]. Cette méthode utilise aussi la notion des variables généralisées d'effort et de flux. Le GIC traite des informations portées par les variables et orientées par la causalité de la cause vers l'effet. Les transformations d'information sont effectuées par des processeurs. Pratiquement, la sortie du processeur ne dépend donc que des valeurs présentes et passées de ses entrées. C'est la raison pour laquelle nous préférons exprimer la causalité sous forme intégrale. Il existe deux types de processeurs ou relations (voir Figure 1.10) [Hau-99] :

- Processeur causal : la sortie est nécessairement une fonction de l'état énergétique. La relation est alors orientée par la causalité temporelle.
- Processeur rigide : la sortie est une fonction instantanée de l'entrée.

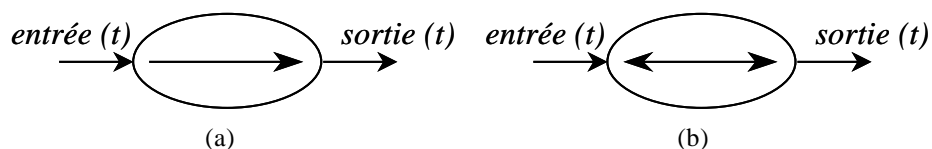


Figure 1.10. GIC : (a) processeur causal et (b) processeur rigide.

Dans la réalité, nous représentons les processeurs causaux par des processeurs intégraux (causalité préférentielle intégrale). Nous utilisons aussi des processeurs rigides sous forme des

sommateurs lorsque nous avons besoin de représenter les relations entre variables. Ces processeurs sont présentés à la figure suivante.

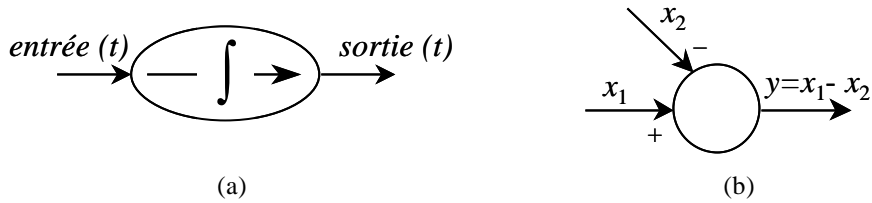


Figure 1.11. GIC : (a) processeur intégral et (b) sommateur.

Considérons l'exemple traité dans le paragraphe A.6.6 de l'Annexe A. Le modèle GIC obtenu est le suivant :

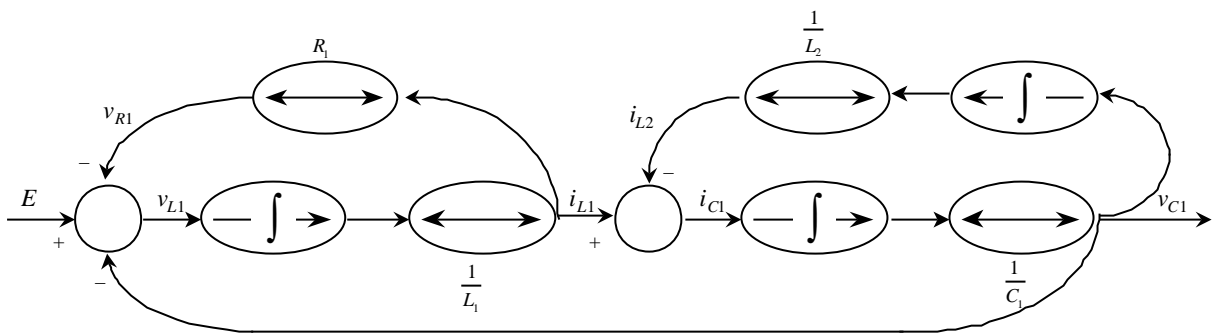


Figure 1.12. Modèle GIC d'un circuit électrique du 3^{ème} ordre.

Nous constatons que le modèle GIC ressemble au schéma bloc construit à partir du modèle bond graph (voir Figure A.10 en Annexe A).

La vocation principale des GIC est la synthèse de lois de commande obtenu par inversion du graphe. Le GIC peut être obtenu de façon systématique à partir du Bond Graph. Plus récemment, est apparu, suite aux travaux du L2EP Lille, un nouveau formalisme de modélisation issu des GIC et nommé REM : Représentation Energetique Macroscopique [Bous-02]. Ce formalisme encore plus proche du Bond Graph en raison de sa vision plus énergétique qu'informationnelle est également principalement dédié à la synthèse de lois de commande puisque les règles systématiques d'inversion de graphe présentes dans les GIC y ont été transposées. Par rapport au GIC, cette représentation présente l'avantage d'une plus grande compacité.

1.5.2. Puzzle

Ce formalisme a été proposé au sein du LEEI dans l'équipe Système par H. Piquet, H. Foch et H. Demni. A la base, il s'agit là d'un formalisme dédié à la conception (au sens de la synthèse) plus qu'à l'analyse de système. En réponse à un chaire des charges, les objectifs sont de guider le concepteur pour définir une structure dont chaque éléments constitutifs fonctionne et s'associe à ses voisins dans des conditions physiquement acceptable.

Initialement dédiés à la conception en électronique de puissance [Piq-00], on s'est rapidement aperçu que ce formalisme pouvait, au même titre que les Bond Graphs se généraliser et s'appliquer à la conception de systèmes multidomains. Ainsi, le principe est de modéliser chaque élément du système par une pièce de puzzle qui "s'emboîte" avec ses éléments périphériques si les règles d'association physique sont respectées : la causalité intégrale est donc ici obligatoire. Comme le lien dans le formalisme bond graph, chaque côté de puzzle comporte simultanément 2 informations : les variables généralisées d'effort e et de flux f . Grâce à ces notions, la méthode puzzle permet d'obtenir un modèle homogène d'un système multidomaine. Les conventions graphiques, fortement marquées par la "culture électrique", sont les suivantes :

- l'excroissance ayant la forme triangulaire rappelant V de tension représente une variable d'effort.
- l'excroissance ayant la forme rectangulaire rappelant I d'intensité représente une variable de flux.

Le sens de transfert de l'information (ou sens de la causalité) est indiqué par l'orientation de l'excroissance. Un élément qui échange de la puissance avec un autre ne peut qu'imposer la tension (effort) et, de ce fait, recevoir le courant (flux) que lui impose son voisin, ou *vice versa*. La Figure 1.13 présente l'exemple d'un transfert de puissance du sous-système A vers le sous-système B où A impose la tension à B.

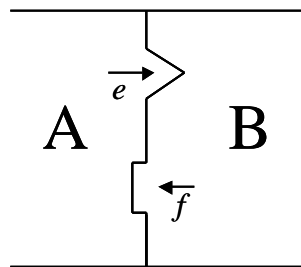


Figure 1.13. Puzzle : transfert d'information entre A et B.

Notons qu'un morceau de puzzle peut alors être connecté à un autre si et seulement s'ils ont les côtés complémentaires l'un de l'autre.

On retrouve les principaux éléments du Bond Graph dans la bibliothèque d'éléments puzzle [Dem-00]. Nous pouvons citer certains éléments tels que les transformateurs (par exemple, hacheur abaisseur ou élévateur), les gyrateurs, les connexions équi-effort (jonction 0 en bond graph), les connexions équi-flux (jonction 1 en bond graph), les dipôles (sources) et les éléments passifs.

Par ailleurs, ce formalisme graphique offre des "points de vue" supplémentaires qui permettent de guider la conception. Certains de ces points de vue sont spécifiques au domaine électrique (polarités, propriétés d'isolation,...) d'autres sont aussi généralisables à un ensemble de domaines :

- a. les propriétés fréquentielles.
Selon la fréquence de fonctionnement, un élément se comporte différemment. Par exemple, une inductance (élément I) est une source de courant (impose le courant (flux)) en hautes fréquences. A l'opposé, rien n'interdit d'imposer un courant (flux) à une inductance (élément I) en basses fréquences. Ces propriétés fréquentielles déterminent le domaine de validité.
- b. les polarités des grandeurs.
Elles doivent être prises en compte car des incompatibilités de polarité dans des liaisons entre éléments peuvent modifier le comportement d'une chaîne de conversion.
- c. la relation d'entrées/sorties
Cette propriété est identique à la notion de causalité du formalisme bond graph. Nous décrivons l'équation mathématique des variables de sortie en fonction des variables imposées.
- d. les propriétés fonctionnelles.
Ce sont les propriétés telles que l'aspect survolteur ou dévolteur d'un élément, l'irréversibilité en puissance, la nécessité d'une isolation galvanique, ...

Ces points autres de vue peuvent s'exprimer sous forme de règles de conception que l'on peut traiter par un système expert. Ils viennent compléter le formalisme à base de pièce de puzzle [Dem-00].

Vu les similitudes entre ces deux méthodes, un passage systématique des puzzles au bond Graphs est en cours de mise au point. L'idée est de les utiliser chacune dans leur domaine de prédilection, à savoir respectivement la synthèse et l'analyse systémique.

1.6. Etude en cours sur la modélisation systémique par Bond Graph dans l'équipe "Système" du LEEI.

Comme cela a été évoqué au paragraphe 1.1, l'utilisation du formalisme Bond Graph paraît tout à fait opportune dans le contexte de l'approche système en Génie Electrique. Ce n'est donc pas un hasard s'il est devenu aujourd'hui un des outils de conception de base de l'équipe "Système" du LEEI. Ainsi, au grè d'études diverses, c'est une véritable bibliothèque d'objets du Génie Electrique (machines électriques, convertisseurs statiques, sources d'énergie,...) qui se développe actuellement. Par exemple, le véhicule solaire "Solelhada", qui a effectué la traversée de l'Australie dans le cadre du World Solar Challenge 2001, est entièrement modélisé sous le formalisme Bond Graph. Ce dispositif est un exemple typique de système à fort degré de couplage entre éléments situés dans des champs disciplinaires distincts.

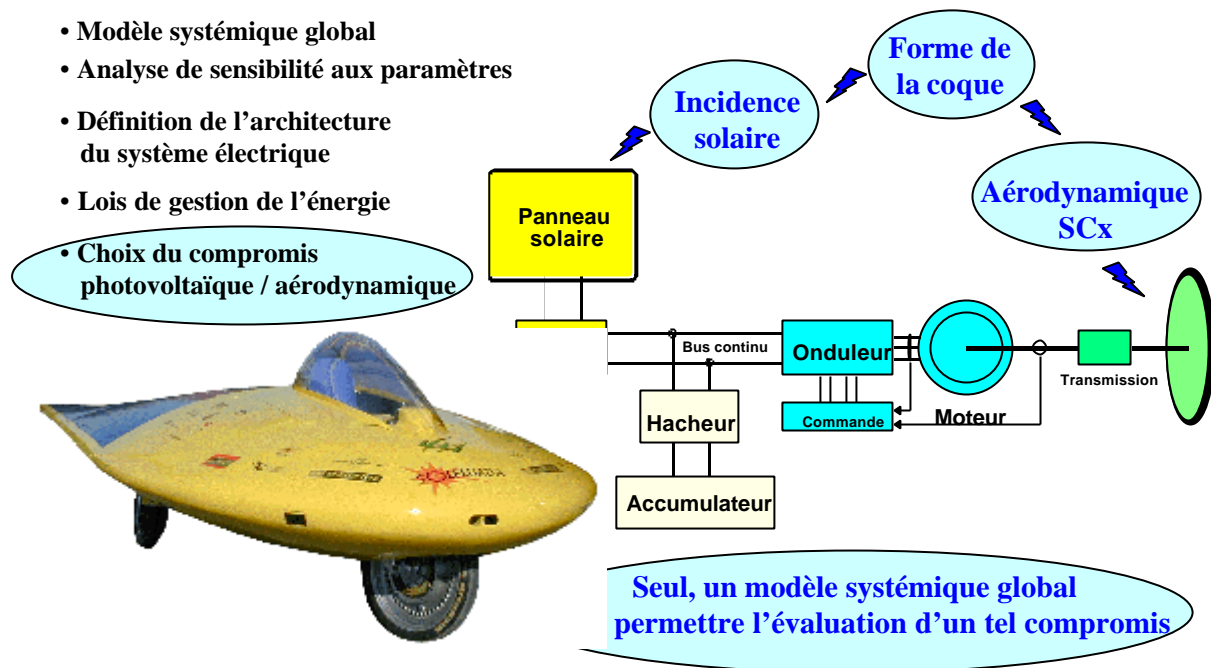


Figure 1.14. Solehada : un exemple de système à fort degré de couplage modélisé entièrement par Bond Graph

Parmi les retombées directes de cette modélisation globale, on peut citer la détermination du nombre et de la géométrie optimale des modules photovoltaïques placés sur le dos du véhicule, chaque module étant associé à un dispositif de Maximisation de Puissance (MPPT). L'apport de composants de stockage innovants (Li-Ion) sur le compromis performances énergétique/masse a aussi été analysé grâce à cet outil.

L'idée n'est pas ici de lister ces travaux de façon exhaustive et nous avons donc choisi de prendre l'exemple d'un thème qui sort du cadre classique de l'électrotechnique et correspond à un effort de recherche important pour ce groupe :

- *Modélisation de composants électrochimiques de production et de stockage [Ast-03]*
L'avènement de ce thème est en effet un exemple d'interdisciplinarité réussi, puisque des échanges approfondis avec la communauté des électrochimistes ont été nécessaires. Le formalisme Bond Graph a contribué à ce niveau à faciliter le dialogue entre les disciplines.
Nous avons le souci de développer des modèles génériques conservant autant que possible le lien entre les paramètres du modèle et les phénomènes internes traduits au niveau macroscopique, suivant une position intermédiaire entre modèles fins de type EDP (Equations aux Dérivées Partielles) et modèles comportementaux souvent lourdement cartographiés, efficaces pour la commande mais peu génériques dans une optique de conception.
Le Tableau 1.1 rappelle les variables d'effort et de flux manipulées dans chaque domaine. En chimie, on considérera respectivement le potentiel chimique (ou énergie libre molaire) et le flux molaire.

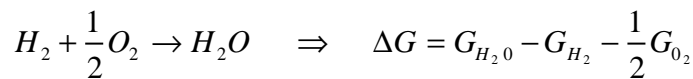
▪ *Energie récupérable ou énergie libre de Gibbs*

Dans le cas d'une conversion isobare ($\Delta P = 0$), isochore ($\Delta V = 0$) d'un système thermodynamique au repos situé hors d'un champ de potentiel, l'énergie maximale récupérable (exergie) se réduit à l'énergie libre de Gibbs ou enthalpie libre qui correspond à la partie de l'énergie transformée sous forme utile (électrique dans notre cas).

Dans le cas d'un système électrochimique, il est nécessaire de définir l'énergie chimique contenue dans les éléments réactifs (gaz, liquides,...). Ces éléments fournissent une partie de l'énergie sous forme électrique et dissipent une autre partie sous forme thermique. En fait, seules comptent les variations d'énergie entre produits et réactants. L'énergie libre de Gibbs est liée à l'enthalpie (H) par le terme de création d'entropie ($T.S$) qui traduit l'énergie perdue sous forme de chaleur selon le second principe de la thermodynamique :

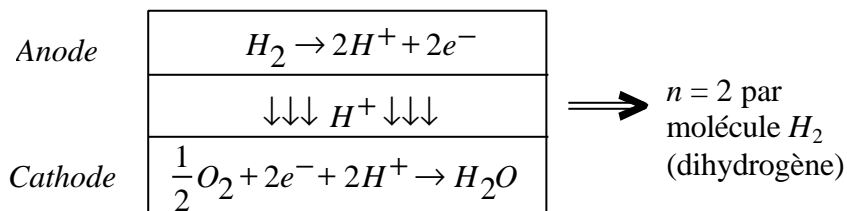
$$\Delta G = \Delta H - T.\Delta S$$

Si l'on prend l'exemple d'une pile à combustible à base d'hydrogène, dont la réaction complète est :



▪ *Passage Chimique – Electrique*

Pour établir la relation entre l'énergie libre de la réaction et le potentiel électrique, il suffit de connaître la charge électrique totale à laquelle cette énergie est transférée (chimique ? électrique). Alors, si n électrons sont échangés par chaque molécule d'un réactant (par exemple l' H_2 dans une pile à combustible), la charge échangée par mole transformée de ce réactant vaut $-n.e.N_A = -n.F$ avec $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ le nombre d'Avogadro et $F = e.N_A = 96485$ C la constante de Faraday (une mole de charge d'électron). Par exemple, dans une pile à combustible PEM :



soit une charge $-2.F$ par mole de dihydrogène.

Le "travail électrique" est le produit de la charge par la tension (E) et doit être égal au "travail chimique" représenté par l'énergie libre de Gibbs :

$$\Delta G = -n.F.E$$

avec $n = 2$ dans l'exemple. ΔG est une énergie libre par mole de dihydrogène. Alors, le courant électrique correspondant au produit de la charge par mole ($n.F$ /mol) par le débit molaire x (en mol/s) met en jeu la quantité de matière consommée :

$$I = -n.F \mathbf{x}$$

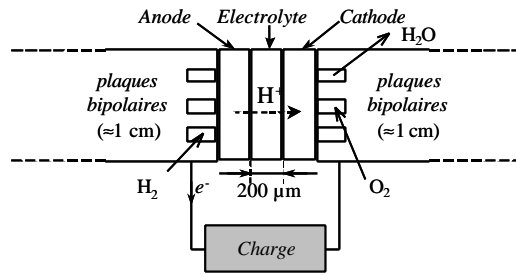
Ces relations montrent que le passage du domaine chimique au domaine électrique s'effectue par un élément TF (transformateur) :

$$\begin{array}{c} DG \\ \xrightarrow{\quad} \\ \mathbf{x} \end{array} \begin{array}{c} nF \\ TF \\ \xrightarrow{\quad} \\ I \end{array} \begin{array}{c} E \\ \xrightarrow{\quad} \\ I \end{array} \quad E = -\frac{\Delta G}{n.F}$$

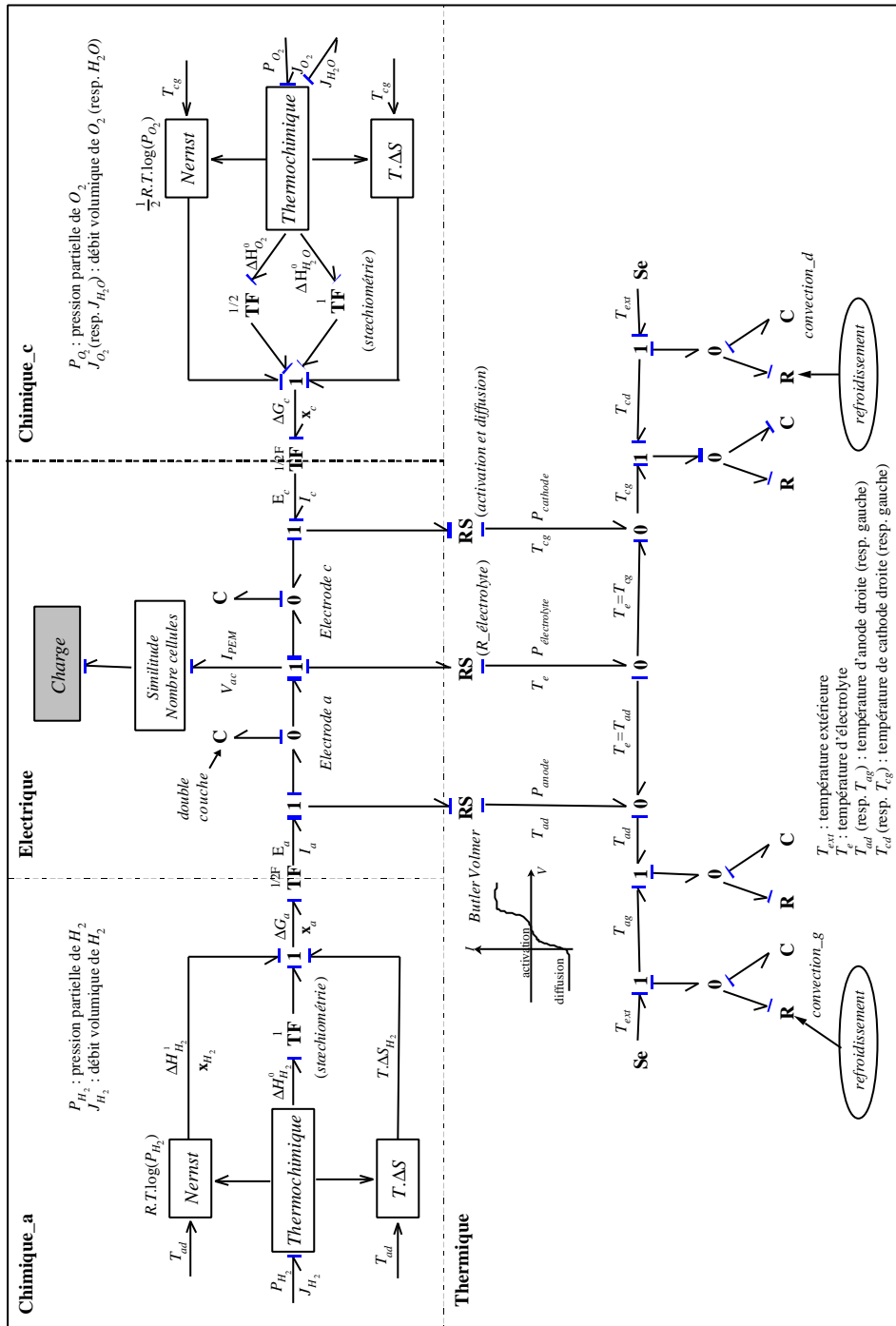
Figure 1.15. Passage du domaine chimique au domaine électrique.

- *Bond Graph d'une pile à combustible PEM*

La Figure 1.16 montre les trois domaines (électrique, chimique, thermique) et leurs échanges concernés par la modélisation électrochimique. Nous utilisons des éléments RS pour illustrer le phénomène dissipatif non linéaire qui couple les domaines électrique et thermique. Dans le domaine électrique, l'élément RS est caractérisé par la relation $I := \Psi_e(V)$ selon le phénomène d'activation-diffusion à l'anode et la cathode. Dans ce cas, la causalité est imposée. Pour l'électrolyte, il se comporte comme un élément R où seul le gain est non linéaire ($V = R.I$ où R est non linéaire). La causalité n'est pas imposée et elle dépend donc de l'affectation de causalité des autres éléments. Du côté thermique, la causalité est imposée à l'anode, à la cathode et à l'électrolyte, pour lesquels l'élément RS impose les pertes $P := \Psi_T(T)$.



(a). synoptique d'une pile à combustible PEM.



(b). bond graph associé.

Figure 1.16. Bond Graph multidomaines d'une pile à combustible PEM.

1.7. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré pourquoi et en quoi l'utilisation du formalisme Bond Graph est en bonne adéquation avec une approche système en général, en Génie Electrique en particulier. Il constitue en effet, à la base, un outil favorisant l'échange interdisciplinaire et la capitalisation de connaissance. De plus, les possibilités d'analyse, voire de dimensionnement et de synthèse issues des principes de causalité dans les Bond Graphs ont été évoquées brièvement et sont reprises dans les chapitres suivants pour ce qui concerne plus particulièrement la réduction des modèles et l'analyse de stabilité. Nous avons présenté d'autres méthodes permettant également de modéliser d'une manière unifiante un système multidomaine. L'existence de ces formalismes, relativement proches du Bond Graph voire transposables d'un formalisme à l'autre, révèle certainement la nécessité d'une plus grande cohérence des efforts de recherche en matières de conception/modélisation/analyse de systèmes complexes (hétérogènes et multidomaines). Enfin, nous avons situé nos travaux dans le contexte local, en résumant les travaux du groupe Système du LEEI autour de la méthodologie Bond Graph. L'exemple du Bond Graph d'une pile à combustible PEM a permis d'illustrer la capacité de ce formalisme à représenter plusieurs domaines de façon homogène, et à faciliter le dialogue entre spécialistes.

Après ce chapitre introductif, nous abordons maintenant les méthodes d'analyse que nous avons utilisé et contribué à développer dans ce travail.

Chapitre 2

Les méthodes d'analyse par Bond Graph pour l'approche système

Chapitre 2

Les méthodes d'analyse par Bond Graph pour l'approche système

Dans le Chapitre 1, nous avons montré que le formalisme bond graph permet d'obtenir un modèle homogène pour un système hétérogène multidomaine. Nous pouvons donc analyser le modèle complet obtenu. Dans le cadre d'une approche système, plusieurs méthodes d'analyses peuvent être appliquées directement au bond graph. Ce chapitre est ainsi consacré aux méthodes de linéarisation, d'analyse de stabilité et de simplification de modèle que nous avons utilisées dans nos travaux. La stabilité est un aspect fondamental de l'étude des systèmes complexes. Cependant, ceux-ci sont le plus souvent non linéaires et la linéarisation en petit signal est une procédure souvent utile. De même, l'idée de simplifier chaque modèle qui constitue un système complexe est de première importance dans le cadre d'une approche globale incluant des dynamiques parfois largement réparties sur le spectre fréquentiel. Ce chapitre a donc pour vocation d'explorer un ensemble de méthodes d'analyse directement dérivables à partir du formalisme Bond Graph et qui contribuent à faciliter le processus de conception système.

2.1. La linéarisation en petit signal

La plupart des phénomènes physiques sont non linéaires. L'analyse complète et globale des systèmes non linéaires est souvent difficile à effectuer. C'est la raison pour laquelle nous restreindrons notre étude à l'analyse autour d'un point de fonctionnement judicieusement choisi. Il s'agit de l'analyse d'un modèle linéarisé ou modèle en petit signal [Kar-77][And-01].

Le modèle en petit signal peut être construit de la manière suivante. Supposons que toutes les variables dans le modèle initial peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= \bar{\mathbf{X}} + \Delta\mathbf{X} \\ \mathbf{U} &= \bar{\mathbf{U}} + \Delta\mathbf{U}\end{aligned}\tag{2.1}$$

où $\bar{\mathbf{X}}$ et $\bar{\mathbf{U}}$ représentent respectivement la valeur au point de fonctionnement du vecteur d'état et de l'entrée, tandis que $\Delta\mathbf{X}$ et $\Delta\mathbf{U}$ sont respectivement leurs variations.

Nous pouvons alors représenter l'équation d'état sous forme :

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{X} = \mathbf{A}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{B}\Delta\mathbf{U}\tag{2.2}$$

2.1.1. Application au bond graph

Nous pouvons effectuer la linéarisation directement sur le modèle bond graph [Kar-77]. Les non linéarités peuvent se manifester dans les éléments bond graphs sous deux formes :

- des non linéarités associées aux lois caractéristiques des éléments passifs (par exemple, un élément R ayant la relation non linéaire $f = \Psi(e)$)
- des non linéarités apparues dans le module (gain) des éléments passifs et des jonctions (par exemple, un transformateur MTF modulé par la commande).

Nous soulignons que les jonctions 1 et 0 sont toujours linéaires car elles doivent respecter la relation iso-flux (jonction 1) ou iso-effort (jonction 0). Dans la linéarisation, elles seront inchangées.

2.1.1.1. Non linéarité liée aux lois caractéristiques des éléments passifs R, I, C

Considérons le cas d'un élément R dont la variable e dépend de la variable f selon l'équation (2.3) comme la Figure 2.1.a. La causalité associée à ce phénomène est visualisée par la Figure 2.1.b.

$$e := \Psi(f) \quad (2.3)$$

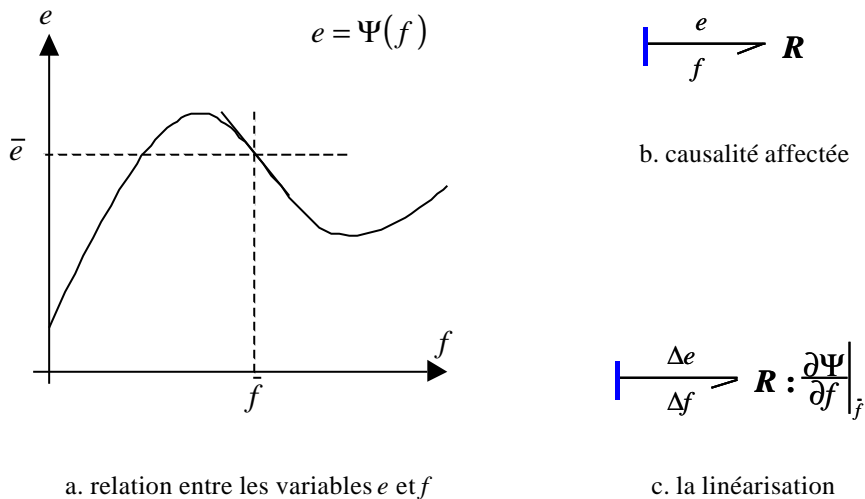


Figure 2.1. Linéarisation d'un élément R .

Au point de fonctionnement défini par (\bar{e}, \bar{f}) , la linéarisation donne :

$$\Delta e := \left. \frac{\partial \Psi}{\partial f} \right|_{\bar{f}} \Delta f \quad (2.4)$$

Dans le modèle linéarisé, cet élément R aura le gain égal à $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial f} \right|_j$.

Notons que cette valeur peut être négative. Par conséquent, un élément R linéarisé peut dissiper ou "fournir" de l'énergie au reste du modèle. Ce problème peut être évité par une modélisation plus fine du système.

De la même manière, nous pouvons déduire les modèles linéarisés des autres éléments passifs de lois caractéristiques non linéaires.

2.1.1.2. Non linéarité du module d'un élément

La non linéarité provoquée par une commande externe peut apparaître dans le gain des éléments passifs ou le module des jonctions de type transformateur et gyrateur.

Dans le cas d'un élément passif, nous présentons au Tableau 2.1 le modèle linéarisé pour tous les éléments. Le modèle dépend de la causalité affectée. La commande est représentée par le terme \mathbf{b} . Le gain de l'élément est une fonction de \mathbf{b} (notée par $\Psi(\mathbf{b})$).

Pour les jonctions, la non linéarité se présente sous forme d'un transformateur ou d'un gyrateur modulé par la commande. Le Tableau 2.2 expose les modèles linéarisés de ces jonctions. Nous négligeons le produit de deux variations de variable ou plus. En effet, les non linéarités sont ramenées aux sources d'effort ou de flux modulées. Enfin, le modèle linéarisé ne contient que des variations de variables et d'entrées. C'est la raison pour laquelle ce modèle est appelé modèle en petit signal.

Tableau 2.1. Linéarisation des éléments passifs.

Élément	Bond graph associé	
	Non linéaire	Linéarisé
R	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow R : \Psi(\mathbf{b})$ $f_1 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})e_1$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 0 \rightarrow R : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSf : e_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$ $\Delta f_1 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}}) \Delta e_1 - \bar{e}_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$
	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow R : \Psi(\mathbf{b})$ $e_1 := \Psi(\mathbf{b})f_1$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 1 \rightarrow R : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSe : -\bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$ $\Delta e_1 := \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \Delta f_1 + \bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$
I	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow I : \Psi(\mathbf{b})$ $f_1 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})p_1$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 0 \rightarrow I : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSf : p_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$ $\Delta f_1 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}}) \Delta p_1 - \bar{p}_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$
	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow I : \Psi(\mathbf{b})$ $e_1 := \frac{d}{dt} (\Psi(\mathbf{b})f_1)$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 1 \rightarrow I : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSe : -\left(\bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \frac{d \Delta \mathbf{b}}{dt} \right)$ $\Delta e_1 := \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \frac{d \Delta f_1}{dt} + \bar{f}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \frac{d \Delta \mathbf{b}}{dt}$
C	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow C : \Psi(\mathbf{b})$ $e_1 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})q_1$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 1 \rightarrow C : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSe : \bar{q}_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$ $\Delta e_1 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}}) \Delta q_1 - \bar{q}_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b}$
	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow C : \Psi(\mathbf{b})$ $f_1 := \frac{d}{dt} (\Psi(\mathbf{b})e_1)$	$\frac{\Delta e_1}{\Delta f_1} \rightarrow 0 \rightarrow C : \Psi(\bar{\mathbf{b}})$ $MSf : -\left(\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \frac{d \Delta \mathbf{b}}{dt} \right)$ $\Delta f_1 := \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \frac{d \Delta e_1}{dt} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \frac{d \Delta \mathbf{b}}{dt}$

Tableau 2.2. Linéarisation des éléments MGY et MTF.

Type	Modèle	Bond graph associé	Equations
MTF <i>cas 1</i>	Non linéaire	$\begin{array}{c} m = \Psi(\mathbf{b}) \\ \left \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \end{array} \right. \text{MTF} \left \begin{array}{c} e_2 \\ f_2 \end{array} \right. \end{array}$	$\begin{array}{l} e_1 := \Psi(\mathbf{b})e_2 \\ f_2 := \Psi(\mathbf{b})f_1 \end{array}$
	Linéarisé	$\begin{array}{c} \bar{m} = \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \\ \left \begin{array}{c} \Delta e_1 \\ \Delta f_1 \end{array} \right. \text{1} \left \begin{array}{c} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{array} \right. \text{TF} \left \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \\ \uparrow \text{MSs}e: -e_2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad \uparrow \text{MSs}f: f_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \Delta e_1 := \Psi(\bar{\mathbf{b}})\Delta e_2 + e_2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \\ \Delta f_2 := \Psi(\bar{\mathbf{b}})\Delta f_1 + f_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$
MTF <i>cas 2</i>	Non linéaire	$\begin{array}{c} m = \Psi(\mathbf{b}) \\ \left \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \end{array} \right. \text{MTF} \left \begin{array}{c} e_2 \\ f_2 \end{array} \right. \end{array}$	$\begin{array}{l} e_2 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})e_1 \\ f_1 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})f_2 \end{array}$
	Linéarisé	$\begin{array}{c} \bar{m} = \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \\ \left \begin{array}{c} \Delta e_1 \\ \Delta f_1 \end{array} \right. \text{0} \left \begin{array}{c} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{array} \right. \text{TF} \left \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right. \\ \uparrow \text{MSs}f: \frac{f_2}{\Psi^2(\bar{\mathbf{b}})} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad \uparrow \text{MSs}e: -\frac{e_1}{\Psi^2(\bar{\mathbf{b}})} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \Delta e_2 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}})\Delta e_1 - e_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \\ \Delta f_1 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}})\Delta f_2 - f_2 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$
MGY <i>cas 1</i>	Non linéaire	$\begin{array}{c} r = \Psi(\mathbf{b}) \\ \left \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \end{array} \right. \text{MGY} \left \begin{array}{c} e_2 \\ f_2 \end{array} \right. \end{array}$	$\begin{array}{l} e_1 := \Psi(\mathbf{b})f_2 \\ e_2 := \Psi(\mathbf{b})f_1 \end{array}$
	Linéarisé	$\begin{array}{c} \bar{r} = \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \\ \left \begin{array}{c} \Delta e_1 \\ \Delta f_1 \end{array} \right. \text{1} \left \begin{array}{c} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{array} \right. \text{GY} \left \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right. \\ \uparrow \text{MSs}e: -f_2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad \uparrow \text{MSs}e: f_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \Delta e_1 := \Psi(\bar{\mathbf{b}})\Delta f_2 + f_2 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \\ \Delta e_2 := \Psi(\bar{\mathbf{b}})\Delta f_1 + f_1 \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$
MGY <i>cas 2</i>	Non linéaire	$\begin{array}{c} r = \Psi(\mathbf{b}) \\ \left \begin{array}{c} e_1 \\ f_1 \end{array} \right. \text{MGY} \left \begin{array}{c} e_2 \\ f_2 \end{array} \right. \end{array}$	$\begin{array}{l} f_1 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})e_2 \\ f_2 := \Psi^{-1}(\mathbf{b})e_1 \end{array}$
	Linéarisé	$\begin{array}{c} \bar{r} = \Psi(\bar{\mathbf{b}}) \\ \left \begin{array}{c} \Delta e_1 \\ \Delta f_1 \end{array} \right. \text{0} \left \begin{array}{c} \Delta e_2 \\ \Delta f_2 \end{array} \right. \text{GY} \left \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \\ \uparrow \text{MSs}f: \frac{e_2}{\Psi^2(\bar{\mathbf{b}})} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \quad \uparrow \text{MSs}f: -\frac{e_1}{\Psi^2(\bar{\mathbf{b}})} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$	$\begin{array}{l} \Delta f_1 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}})\Delta e_2 - e_2 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \\ \Delta f_2 := \Psi^{-1}(\bar{\mathbf{b}})\Delta e_1 - e_1 \cdot \Psi^{-2}(\bar{\mathbf{b}}) \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \Big _{\bar{\mathbf{b}}} \cdot \Delta \mathbf{b} \end{array}$

2.1.1.3. Non linéarité des lois caractéristiques modulées par la commande

Considérons un élément R dont la loi caractéristique est modulée par un signal. La loi non linéaire de cet élément est définie comme :

$$e := \Psi(f, \mathbf{b}) \quad (2.5)$$

Le modèle bond graph est illustré par la Figure 2.2.a.

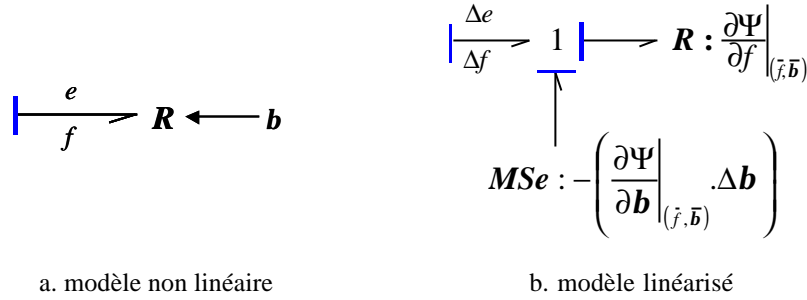


Figure 2.2. Linéarisation d'un élément R ayant la loi caractéristique non linéaire avec la présence d'un signal de commande.

La linéarisation de cette équation conduit à :

$$\Delta e := \left. \frac{\partial \Psi}{\partial f} \right|_{(f, \bar{\mathbf{b}})} \Delta f + \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{b}} \right|_{(f, \bar{\mathbf{b}})} \Delta \mathbf{b} \quad (2.6)$$

Le bond graph linéarisé est donc celui présenté à la Figure 2.2.b.

En utilisant la même démarche, nous pouvons obtenir le modèle linéarisé pour les autres éléments passifs.

Remarque :

La non linéarité du module d'un élément est, en fait, un cas particulier de la non linéarité des lois caractéristiques modulées par la commande. Nous pouvons grouper le paragraphe 2.1.1.2 dans le paragraphe 2.1.1.3.

2.1.2. Exemple

Considérons la chaîne d'une motorisation à courant continu traitée dans la section 1.3. Nous représentons le bond graph causal obtenu à la Figure 2.3.

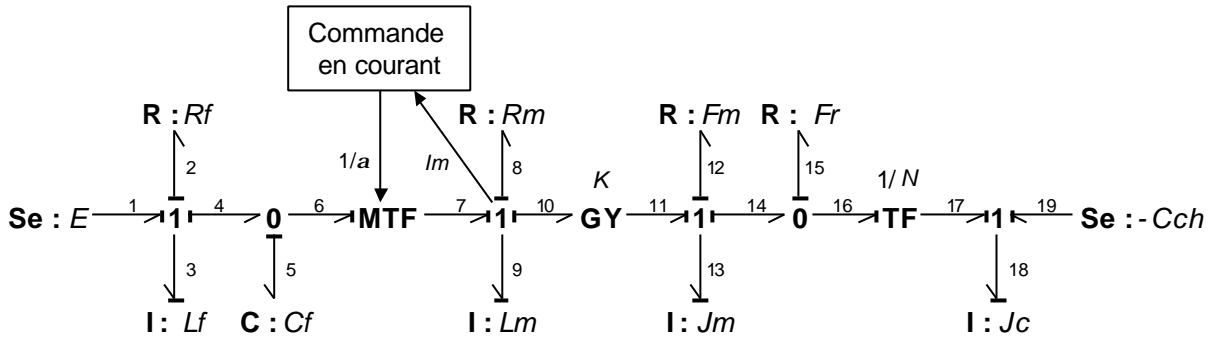


Figure 2.3. Motorisation à courant continu : bond graph causal.

Nous remarquons l'existence d'un MTF associé à la commande du hacheur. Le modèle ci-dessus peut donc être linéarisé autour de point de fonctionnement défini par l'ensemble de \bar{a} , \bar{E} et \bar{C}_{ch} . Cette linéarisation conduit au modèle en petit signal présenté à la Figure 2.4.

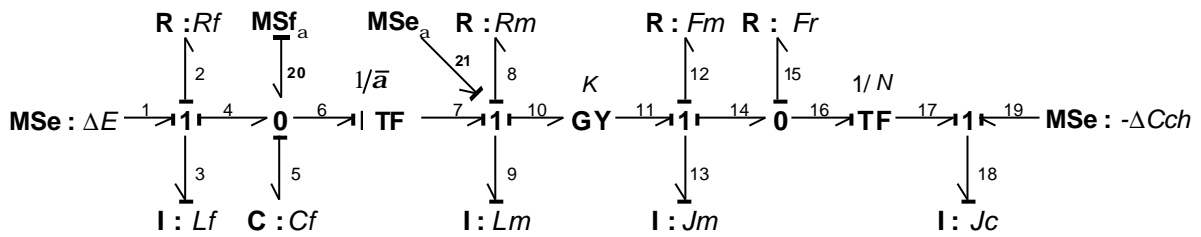


Figure 2.4. Motorisation à courant continu : modèle en petit signal.

Les termes MSf_a et MSe_a sont associés à la variation de la commande Δa . En utilisant la relation écrite dans le Tableau 2.2, ces sources modulées sont définies comme :

$$\begin{aligned}
 MSe_a &= \bar{e}_6 \cdot \Delta a = \frac{\bar{q}_5}{C_f} \Delta a \\
 MSf_a &= -\bar{f}_7 \cdot \Delta a = -\frac{\bar{p}_9}{L_m} \Delta a
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

L'équation d'état du modèle en petit signal s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{p}_3 \\ \Delta \dot{p}_9 \\ \Delta \dot{p}_{13} \\ \Delta \dot{p}_{18} \\ \Delta \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_f} \\ 0 & -\frac{R_m}{L_m} & -\frac{K}{J_m} & 0 & \frac{\bar{a}}{C_f} \\ 0 & \frac{K}{L_m} & -\frac{F_m + F_r}{J_m} & \frac{N F_r}{J_c} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N F_r}{J_m} & -\frac{N^2 F_r}{J_c} & 0 \\ \frac{1}{L_f} & -\frac{\bar{a}}{L_m} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_3 \\ \Delta p_9 \\ \Delta p_{13} \\ \Delta p_{18} \\ \Delta q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_5}{C_f} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{p_9}{L_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta E \\ \Delta \mathbf{a} \\ -\Delta C_{ch} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

2.2. Analyse de stabilité

La stabilité est un aspect important pour un système. Le comportement instable peut détériorer le système voire même, dans le cas d'un réacteur chimique, provoquer un accident grave. Il est donc nécessaire d'étudier la stabilité du modèle représentant le système considéré pour caractériser le domaine de stabilité.

Pour cela, nous proposons deux méthodes : le lieu des pôles et la deuxième méthode de Lyapunov.

2.2.1. Lieu des pôles

Cette méthode est valable pour un modèle linéaire. Nous regardons le lieu des pôles dans le plan complexe [Dor-80][Bor-93]. En fait, les pôles sont les solutions du polynôme caractéristique défini par l'équation :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (2.9)$$

où \mathbf{A} est la matrice d'état et \mathbf{I} est la matrice identité, de dimensions $n \times n$.

Le polynôme caractéristique est aussi le dénominateur des fonctions de transfert. Nous soulignons que ce dernier peut être obtenu directement à partir d'un bond graph en appliquant la méthode présentée dans la section A.5.2 en Annexe A.

Chaque pôle a une partie réelle et une partie imaginaire. La partie réelle détermine la convergence du modèle et la partie imaginaire correspond au comportement oscillant. Le modèle est stable si tous les pôles se trouvent dans la partie réelle négative du plan complexe.

Les pôles dépendent de la valeur des paramètres et définissent donc la stabilité du modèle. En examinant l'évolution de la position des pôles en fonction de la valeur des paramètres, nous pouvons donc déterminer le domaine de stabilité.

Pour illustrer cette méthode, nous prenons l'exemple traité dans la section 2.1.2. Considérons que toutes les entrées de puissance E et C_{ch} sont constantes ($\Delta E = 0$, $\Delta C_{ch} = 0$). Pour la commande, nous implantons un régulateur de courant I_m de type PI à l'entrée du moteur. Cette commande s'écrit :

$$\mathbf{a} = \frac{1}{E} \left(K_P (I_{ref} - I_m) + K_I \int (I_{ref} - I_m) dt \right) \quad (2.10)$$

Cette équation peut être écrite sous la forme différentielle suivante :

$$\dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{E} \left(K_P (\dot{I}_{ref} - \dot{I}_m) + K_I (I_{ref} - I_m) \right) \quad (2.11)$$

En effet, le courant du moteur I_m correspond au courant imposé par l'inductance L_m . Nous pouvons remplacer l'expression de \dot{I}_m par :

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{p}_9}{L_m} = \frac{1}{L_m} \left(\frac{\mathbf{a}}{C_f} q_5 - \frac{R_m}{L_m} p_9 - \frac{K}{J_m} p_{13} \right) \quad (2.12)$$

Nous supposons que la consigne I_{ref} est constante :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{ref} &= 0 \\ \Delta I_{ref} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les paramètres du régulateur K_P et K_I sont réglés de manière à compenser le pôle électrique de la machine en boucle ouverte :

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{L_m}{T_{BF}} \\ K_I &= \frac{R_m}{T_{BF}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

où T_{BF} représente la constante de temps choisie en boucle fermée.

En implantant les équations (2.12), (2.13) et (2.14), nous pouvons réécrire l'équation (2.11) sous forme de petites variations selon l'équation (2.15).

$$\Delta \dot{\mathbf{a}} = \frac{1}{ET_{BF}} \left(-\frac{\bar{\mathbf{a}}}{C_f} \Delta q_5 - \frac{\bar{q}_5}{C_f} \Delta \mathbf{a} + \frac{K}{J_m} \Delta p_{13} \right) \quad (2.15)$$

Cette équation s'ajoute à l'équation d'état (2.8).

En utilisant les valeurs numériques données à l'Annexe B, nous pouvons obtenir le point de fonctionnement associé au courant de référence I_{ref} de 100 A et la vitesse de rotation à l'arbre du moteur $\Omega_m = 250$ rad/s. Nous regardons par exemple l'influence de la valeur de l'inductance du filtre L_f sur le lieu des pôles (voir Figure 2.5). En faisant un zoom, nous remarquons que pour une valeur de $L_f > 9$ mH, des pôles sont situés dans la partie réelle positive. Ils ne sont donc pas stables.

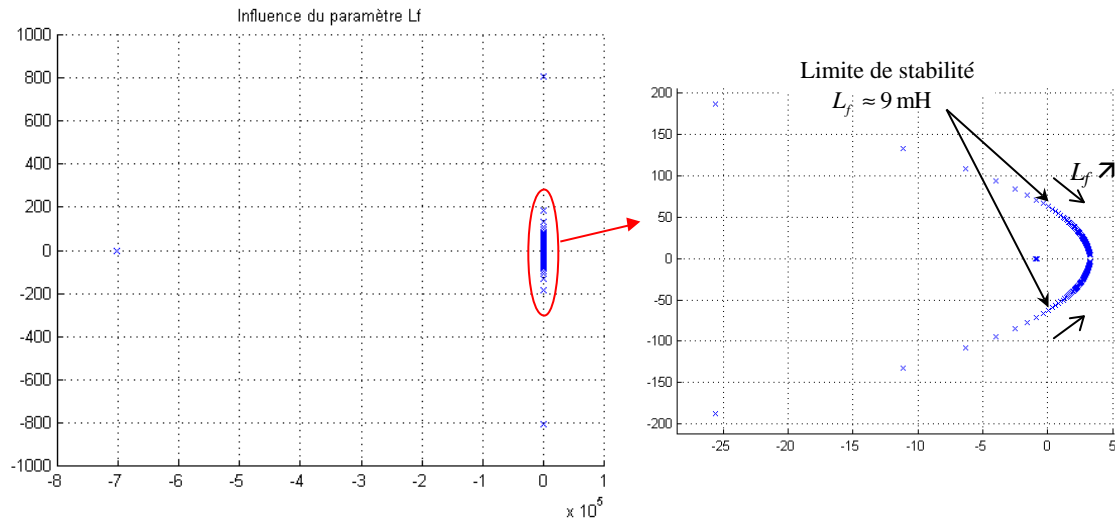
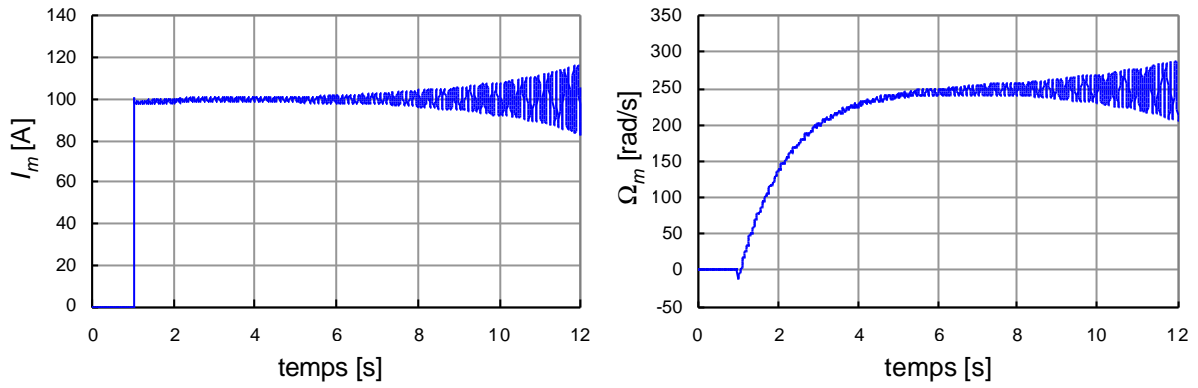


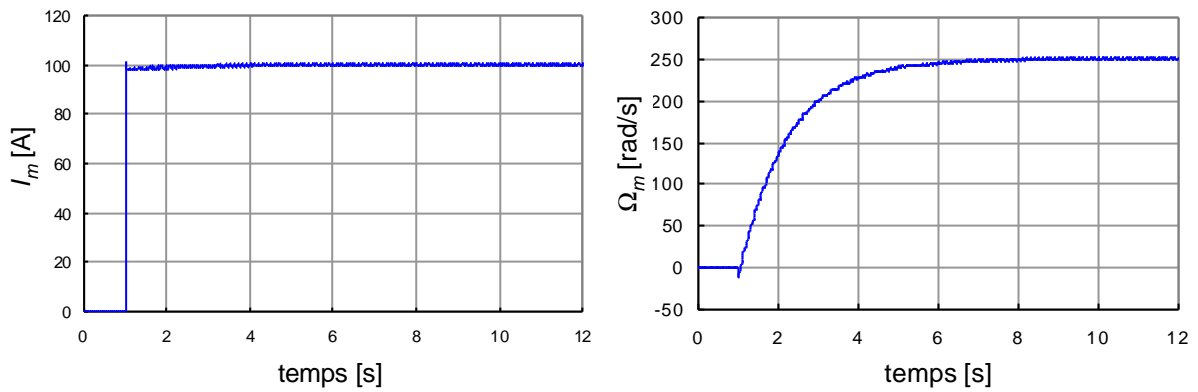
Figure 2.5. Lieu des pôles : influence de la valeur du paramètre L_f .

Nous vérifions cette limite de stabilité par simulation.

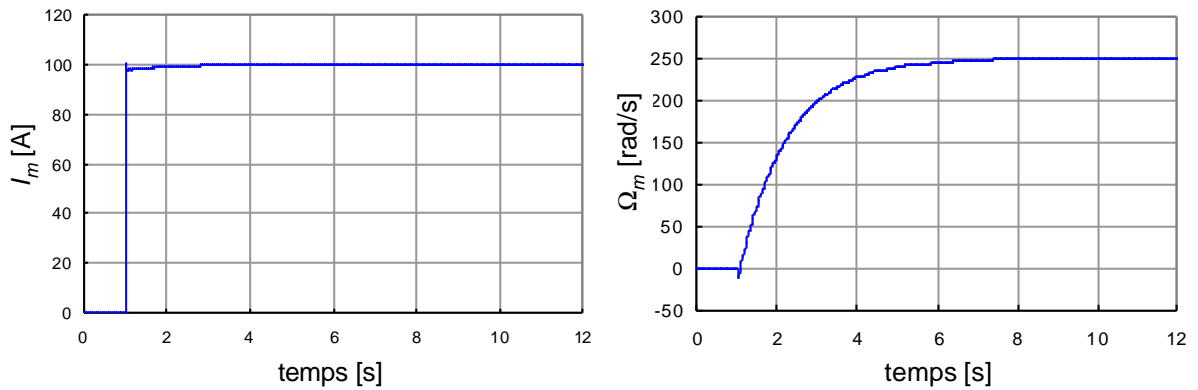
- Pour $L_f = 10$ mH, l'oscillation des variables est amplifiée (voir Figure 2.6.a). Le modèle est donc instable.
- Pour $L_f = 9$ mH, nous remarquons que les réponses oscillent avec une amplitude constante (voir Figure 2.6.b). Le modèle est à la limite de stabilité.
- Pour $L_f = 5$ mH, le modèle est stable (voir Figure 2.6.c).



(a). $L_f = 10$ mH.



(b). $L_f = 9$ mH.



(c). $L_f = 5$ mH.

Figure 2.6. Influence de la valeur du paramètre L_f au courant (I_m) et à la vitesse (Ω_m) du moteur. : (a) $L_f = 10$ mH , (b) $L_f = 9$ mH , (c) $L_f = 5$ mH .

Avec ces résultats de simulation, l'analyse de stabilité avec la méthode du lieu des pôles est validée.

2.2.2. Deuxième méthode de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov est utilisée pour analyser la stabilité d'un modèle [Bor-93][Gru-99][Jun-93][Jun-01]. L'intérêt d'utiliser cette méthode est qu'elle est valable aussi bien pour des modèles non linéaires que linéaires.

Considérons un modèle où \mathbf{x} représente les variables d'état du modèle et le point de fonctionnement O est définie par $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Définition 2.1 :

Une fonction $V(\mathbf{x})$ est une fonction de Lyapunov candidate si elle est définie positive telle que :

$$V(\mathbf{x}) > 0 \text{ pour } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ et} \\ V(\mathbf{x}) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Définition 2.2 :

Un modèle est *asymptotiquement stable* s'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V(\mathbf{x})$ dont la dérivée est définie négative

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ pour } \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ et} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) = 0 \text{ si et seulement si } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Définition 2.3 :

Un modèle est *exponentiellement stable* s'il existe une fonction de Lyapunov candidate $V(\mathbf{x})$ et une constante $a > 0$ telles que :

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < -a.V(\mathbf{x})$$

Remarquons que les Définitions 2.2 et 2.3 sont des *conditions suffisantes* de stabilité. Ce ne sont pas des conditions nécessaires.

En effet, si le point de fonctionnement n'est pas déterminé par $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (par exemple $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$), il faut utiliser les variations de variables d'état autour du point de fonctionnement $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$.

La deuxième méthode de Lyapunov peut être appliquée pour examiner la stabilité locale et globale. Nous utilisons le bond graph incrémental pour ramener le point de fonctionnement (ou le point d'équilibre) à l'origine.

- Si, pour un point de fonctionnement choisi judicieusement, nous avons une fonction de Lyapunov candidate qui satisfait les conditions de stabilité, nous sommes dans le cas d'une *stabilité locale* autour de ce point de fonctionnement.

- Si, pour différents points de fonctionnement dans l'espace des possibilités, nous trouvons toujours une fonction de Lyapunov candidate qui satisfait les conditions de stabilité, nous sommes dans le cas d'une *stabilité globale*.

En général, nous utilisons une fonction carrée comme fonction de Lyapunov candidate. Dans la pratique, l'énergie stockée dans le modèle est souvent choisie pour assurer une stabilité énergétique. Or, le bond graph représente d'une manière très explicite cette énergie à travers les éléments I et C . C'est la raison pour laquelle cette méthode peut être appliquée directement au modèle bond graph.

2.2.2.1. Application au bond graph

Nous pouvons écrire une fonction énergétique comme fonction de Lyapunov candidate [Jun-93][Dau-99b]. Cette fonction peut être associée à l'énergie stockée dans les éléments dynamiques I et C . En considérant les variables d'énergie comme variables d'état, la fonction s'écrit donc :

$$V(p, q) = \sum_{i=1}^{n_c} (k_i E_{C_i}) + \sum_{j=1}^{n_l} (k_j E_{I_j}) = \sum_{i=1}^{n_c} \left(k_i \frac{q_{C_i}^2}{2 C_i} \right) + \sum_{j=1}^{n_l} \left(k_j \frac{p_{I_j}^2}{2 I_j} \right) \quad (2.16)$$

avec

$$k_i > 0, \quad i = 1 \dots n_c$$

$$k_j > 0, \quad j = 1 \dots n_l$$

où n_c et n_l représentent respectivement le nombre d'éléments C et I dans le modèle. Nous constatons que cette fonction est définie positive (satisfait la Définition 2.1) pour un point de fonctionnement déterminé par les valeurs nulles des variables d'énergie. Quant au point de fonctionnement dont les variables d'état ne sont pas nulles, il suffit de remplacer ces dernières par l'écart entre la variable d'énergie p_i et q_c et sa valeur au point de fonctionnement nominal $\overline{p_i}$ et $\overline{q_c}$.

$$V(\Delta p, \Delta q) = \sum_{i=1}^{n_c} \left(k_i \frac{\Delta q_{C_i}^2}{2 C_i} \right) + \sum_{j=1}^{n_l} \left(k_j \frac{\Delta p_{I_j}^2}{2 I_j} \right) \quad (2.17)$$

où

$$\Delta q_{C_i} = q_{C_i} - \overline{q_{C_i}}$$

$$\Delta p_{I_j} = p_{I_j} - \overline{p_{I_j}}$$

Pour la suite, nous prendrons cette dernière équation utilisant les variations des variables d'état comme fonction de Lyapunov candidate.

La question qui se pose est de savoir comment obtenir ces variations directement à partir d'un modèle bond graph. En effet, dans la section 2.1.1, nous avons examiné le modèle en petit signal. Si ce dernier néglige les produits entre deux variations car nous linéarisons le modèle à l'aide d'une approximation au premier ordre, nous prenons en compte ces produits dans la présente analyse de stabilité. Le modèle obtenu est qualifié de bond graph incrémental [Jun-93]. La différence entre le modèle en petit signal et le bond graph incrémental n'apparaît qu'aux jonctions de type *MTF* et *MGY*. Nous présentons la déduction du bond graph incrémental pour ces jonctions au Tableau 2.3 [Jun-93].

Après avoir déterminé la fonction de Lyapunov candidate, nous examinons sa dérivée par rapport au temps, qui est donc la puissance.

$$\dot{V}(\Delta p, \Delta q) = \sum_{i=1}^{n_c} \left(k_i \frac{\Delta q_{C_i} \Delta \dot{q}_{C_i}}{C_i} \right) + \sum_{j=1}^{n_l} \left(k_j \frac{\Delta p_{I_j} \Delta \dot{p}_{I_j}}{I_j} \right) = \sum_{i=1}^{n_c} (k_i P_{C_i}) + \sum_{j=1}^{n_l} (k_j P_{I_j}) \quad (2.18)$$

En effet, la puissance absorbée par les éléments dynamiques peut être déduite directement du modèle bond graph en regardant les relations aux jonctions. Dans le cas particulier où les paramètres k_i et k_j valent 1, nous obtenons donc :

$$\dot{V}(\Delta p, \Delta q) = \sum_{i=1}^{n_c} (P_{C_i}) + \sum_{j=1}^{n_l} (P_{I_j}) = P_{I,C} \quad (2.19)$$

D'un autre côté, la puissance absorbée par le système est égale à la puissance fournie par la source :

$$P_{source} = P_{I,C} + P_R \quad (2.20)$$

En utilisant ces deux dernières équations, nous déduisons :

$$\dot{V}(\Delta p, \Delta q) = P_{I,C} = P_{source} - P_R \quad (2.21)$$

Le système est donc stable si la puissance dissipée par les éléments R est plus grande que celle fournie par la source ($P_R \geq P_{source}$). Ceci revient au fait que le système doit être passif.

Tableau 2.3. Bond graph incrémental des éléments *MTF* et *MGY*.

Type	Bond graph causal	Bond graph incrémental
<i>MTF</i> <i>cas 1</i>		
	$e_1 := m.e_2$ $f_2 := m.f_1$	$\Delta e_1 := \bar{m}.\Delta e_2 + \bar{e}_2.\Delta m + \Delta m.\Delta e_2$ $\Delta f_2 := \bar{m}.\Delta f_1 + \bar{f}_1.\Delta m + \Delta m.\Delta f_1$
<i>MTF</i> <i>cas 2</i>		
	$e_2 := b.e_1$ $f_1 := b.f_2$	$\Delta e_2 := \bar{b}.\Delta e_1 + \bar{e}_1.\Delta b + \Delta b.\Delta e_1$ $\Delta f_1 := \bar{b}.\Delta f_2 + \bar{f}_2.\Delta b + \Delta b.\Delta f_2$
<i>MGY</i> <i>cas 1</i>		
	$e_1 := r.f_2$ $e_2 := r.f_1$	$\Delta e_1 := \bar{r}.\Delta f_2 + \bar{f}_2.\Delta r + \Delta r.\Delta f_2$ $\Delta e_2 := \bar{r}.\Delta f_1 + \bar{f}_1.\Delta r + \Delta r.\Delta f_1$
<i>MGY</i> <i>cas 2</i>		
	$f_1 := b.e_2$ $f_2 := b.e_1$	$\Delta f_1 := \bar{b}.\Delta e_2 + \bar{e}_2.\Delta b + \Delta b.\Delta e_2$ $\Delta f_2 := \bar{b}.\Delta e_1 + \bar{e}_1.\Delta b + \Delta b.\Delta e_1$

2.2.2.2. Exemple

Nous prenons l'exemple classique d'un filtre d'entrée *RLC* du deuxième ordre qui alimente une charge contrôlée à travers un convertisseur statique (voir Figure 2.7). Dans le cas où la commande impose à la charge une puissance constante, une variation de tension positive conduit à une variation de courant négative.

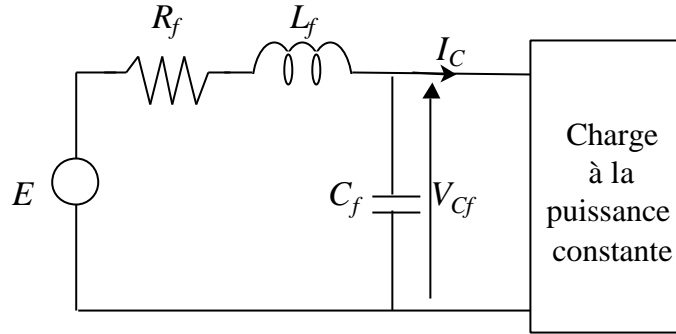


Figure 2.7. Exemple d'un filtre d'entrée sur une charge à puissance constante.

Explication mathématique :

$$\text{Puissance absorbée : } P = V_{cf} \cdot I_c$$

$$\text{Puissance constante : } dP = 0 \Rightarrow \bar{V}_{cf} \cdot dI_c + \bar{I}_c \cdot dV_{cf} = 0$$

$$\text{Par conséquent, } \frac{dV_{cf}}{dI_c} = -\left(\frac{\bar{V}_{cf}}{\bar{I}_c}\right)$$

Ce phénomène peut être représenté par une résistance négative de nature à générer l'instabilité du système. Le bond graph associé à ce type de système est représenté à la Figure 2.8, avec une résistance de charge R_c négative.

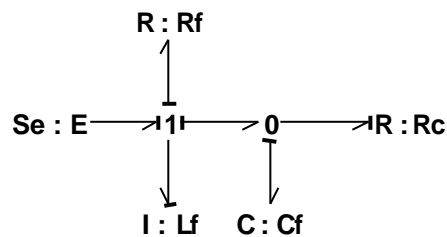


Figure 2.8. Modèle d'un filtre avec une résistance de charge négative.

Le domaine de stabilité de ce modèle peut être obtenu au moyen du critère de Routh-Hurwitz en utilisant le dénominateur du système.

$$Den(s) = 1 + \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f}\right) \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{L_f \cdot C_f} + \frac{R_f}{R_c \cdot L_f \cdot C_f}\right) \frac{1}{s^2} \quad (2.22)$$

Les conditions de stabilité sont les suivantes :

$$(1) \frac{R_f}{L_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f} > 0 \text{ ou } C_f > -\frac{L_f}{R_f \cdot R_c}$$

$$(2) \frac{1}{L_f \cdot C_f} + \frac{R_f}{R_c \cdot L_f \cdot C_f} > 0 \text{ ou } R_f < -R_c$$
(2.23)

Pour appliquer la deuxième méthode de Lyapunov, nous prenons l'énergie stockée dans les éléments dynamiques comme fonction de Lyapunov candidate. Dans un premier temps, nous construisons le bond graph incrémental qui est le même que le modèle initial car il n'existe pas de jonction *MGY* ou *MTF*. Nous supprimons la source car nous la considérons constante. Toutes les grandeurs dans ce nouveau modèle sont représentées en variation (Δ) autour du point de fonctionnement (régime permanent).

L'équation d'état du modèle en petites variations est formulée comme suit :

$$\Delta \dot{p}_{L_f} = -\frac{R_f \cdot \Delta p_{L_f}}{L_f} - \frac{\Delta q_{C_f}}{C_f}$$

$$\Delta \dot{q}_{C_f} = \frac{\Delta p_{L_f}}{L_f} - \frac{\Delta q_{C_f}}{R_c \cdot C_f}$$
(2.24)

La fonction de Lyapunov $V(\Delta x)$ s'écrit comme :

$$V(\Delta \mathbf{x}) = \frac{(\Delta p_{L_f})^2}{2 \cdot L_f} + \frac{(\Delta q_{C_f})^2}{2 \cdot C_f}$$
(2.25)

Pour analyser la stabilité, nous dérivons cette fonction par rapport au temps.

$$\dot{V}(\Delta \mathbf{x}) = \frac{\Delta p_{L_f} \cdot \Delta \dot{p}_{L_f}}{L_f} + \frac{\Delta q_{C_f} \cdot \Delta \dot{q}_{C_f}}{C_f} = -R_f \left(\frac{\Delta p_{L_f}}{L_f} \right)^2 - \frac{1}{R_c} \left(\frac{\Delta q_{C_f}}{C_f} \right)^2$$
(2.26)

Si nous déduisons la dérivée de la fonction de Lyapunov choisie directement du bond graph, nous obtenons :

$$\dot{V}(\Delta \mathbf{x}) = P_{source} - P_R = 0 - P_{R_f} - P_{R_c} = -R_f \left(\frac{\Delta p_{L_f}}{L_f} \right)^2 - \frac{1}{R_c} \left(\frac{\Delta q_{C_f}}{C_f} \right)^2$$
(2.27)

Cette dernière est équivalente à l'équation déduite à partir du modèle d'état.

Si $R_c < 0$, sur cette équation, nous ne pouvons pas déduire les conditions paramétriques de stabilité car nous ne connaissons pas la relation directe entre Δp_{Lf} et Δq_{Cf} . Alors, nous pensons que dans ce cas la fonction énergétique n'est pas une bonne fonction de Lyapunov. **Par contre, si R_f et R_c sont positifs $V > 0$ et $\dot{V} < 0$, le modèle est stable.**

Recherche d'une fonction Lyapunov V :

Définition 2.4 :

Une matrice \mathbf{A} est dite définie positive si elle satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &\neq 0 \\ a_{ii} &> 0 & \forall i = 1..n \\ (a_{ij})^2 &< a_{ii} \cdot a_{jj} & \forall i \neq j \end{aligned}$$

Supposons que nous avons l'équation d'état et la fonction de Lyapunov candidate avec sa dérivée définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} \\ V(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} \\ \dot{V}(\mathbf{X}) &= \mathbf{X}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{X}} + \dot{\mathbf{X}}^T \mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{X} = -\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Les matrices \mathbf{Q} et \mathbf{P} doivent être définies positives (et symétriques) pour que le modèle soit stable. Elles satisfont donc l'équation :

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \tag{2.29}$$

Considérons la matrice \mathbf{Q} comme la suivante :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

L'équation de la dérivée devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{X}) &= -(q_{11} \cdot x_1^2 + q_{22} \cdot x_2^2 + 2 \cdot q_{12} \cdot x_1 \cdot x_2) \\ &= -(q_{11} - c_1^2) \cdot x_1^2 + (q_{22} - c_2^2) \cdot x_2^2 + (c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2)^2 \end{aligned} \tag{2.31}$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta p_{Lf} \\ \Delta q_{Cf} \end{bmatrix}$$

Nous appliquons les conditions de stabilité décrites par les relations (2.23) à l'équation (2.31) :

$$\begin{aligned}
 q_{11} - c_1^2 &= \frac{1}{L_f} \left(\frac{R_f}{L_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f} \right) \\
 q_{22} - c_2^2 &= \frac{1}{C_f} \left(\frac{1}{R_f \cdot C_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f} \right) \\
 q_{12} &= c_1 \cdot c_2
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Pour simplifier, nous prenons :

$$\begin{aligned}
 c_1^2 &= k \frac{R_f}{L_f^2} \\
 c_2^2 &= k \frac{1}{R_f \cdot C_f^2}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Ces dernières impliquent :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sqrt{k \frac{R_f}{L_f^2}} \\
 c_2 &= \sqrt{k \frac{1}{R_f \cdot C_f^2}} \\
 c_1 \cdot c_2 &= k \cdot \frac{1}{L_f \cdot C_f}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

En utilisant ces relations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 q_{11} &= \frac{1}{L_f} \left(\frac{(1+k) \cdot R_f}{L_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f} \right) \\
 q_{22} &= \frac{1}{C_f} \left(\frac{1+k}{R_f \cdot C_f} + \frac{1}{R_c \cdot C_f} \right) \\
 q_{12} &= \frac{k}{L_f \cdot C_f}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Le paramètre k est calculé selon :

$$k = \frac{C_f}{L_f}$$

ou tout simplement $k = 0$ pour simplifier les expressions.

Avec ces équations, nous pouvons déduire l'expression littérale de la matrice \mathbf{P} . Cette expression n'est pas une fonction énergétique simple. Nous avons vérifié la fonction $V(\mathbf{X})$

pour plusieurs cas stables et instables, et nous trouvons que la matrice \mathbf{P} ou \mathbf{Q} devient non définie positive quand les parties réelles des valeurs propres de la matrice \mathbf{A} ne sont pas toutes dans le demi plan négatif ($Re < 0$).

Par cet exemple, nous constatons que l'analyse de stabilité par la deuxième méthode de Lyapunov n'est pas très facile à appliquer. Il n'existe pas une fonction de Lyapunov candidate "universelle" que l'on peut utiliser pour déterminer le domaine de stabilité. Il faut donc chercher une fonction qui satisfait les conditions décrites dans la Définition 2.2 ou la Définition 2.3. Dans certains cas, il n'est pas aisé non plus de caractériser *analytiquement* le signe de la dérivée de la fonction candidate $\dot{V}(\Delta\mathbf{x})$. La difficulté d'examiner analytiquement le signe de la fonction candidate et sa dérivée conduit à la production d'hypothèses qui peuvent être non judicieuses. Quand le calcul analytique n'est pas possible, nous utilisons le calcul numérique. Nous pouvons examiner l'évolution des fonctions $V(\Delta\mathbf{x})$ et $\dot{V}(\Delta\mathbf{x})$ au cours de la simulation autour de point de fonctionnement. Mais cette dernière approche n'est pas satisfaisante et semble peu intéressante parce que la simulation nous permet directement de voir si le modèle est stable ou instable. Il n'est donc pas nécessaire d'examiner la fonction de Lyapunov candidate. Par ailleurs, dans la majorité des cas, les points de fonctionnements instables ne peuvent pas être simulés.

Cependant, la deuxième méthode de Lyapunov peut se révéler utile pour déduire la loi de commande qui stabilise le modèle [Jun-93][Jun-01]. Il suffit d'écrire une fonction candidate $V(\Delta\mathbf{x})$ définie positive (par exemple : les carrées des variations des variables d'état) et de déduire sa dérivée. La commande stabilisante est déterminée de telle manière à imposer un signe négatif à la dérivée de la fonction candidate $\dot{V}(\Delta\mathbf{x})$. Cette méthode rend le modèle énergétiquement stable si nous utilisons une fonction énergétique comme fonction de Lyapunov candidate.

2.3. Les méthodes de simplification de modèles

Dans nos travaux, nous avons utilisé deux méthodes de simplification de modèle. Ce sont la méthode des perturbations singulières et la méthode MORA (*Model Order Reduction Algorithm*). Ces méthodes peuvent être appliquées directement au modèle bond graph. Nous les présentons dans les sections suivantes.

2.3.1. Méthode des perturbations singulières

Quand les ordres de grandeur des modes du modèle sont très différents, il est judicieux d'appliquer la méthode des perturbations singulières [Kok-86]. Le principe de cette méthode consiste à découpler les éléments qui ont des dynamiques distinctes en considérant leurs

constantes de temps. Les éléments qui présentent une constante de temps petite ont des dynamiques rapides tandis que ceux qui ont une constante de temps élevée ont des dynamiques lentes. On dit que l'élément dynamique rapide se comporte comme un élément parasite qui augmente la dynamique du modèle [Sue-91]. Il faut noter que la séparation des dynamiques dépend des valeurs numériques du modèle. Par ailleurs, la méthode des perturbations singulières est valable pour les modèles linéaires ou non linéaire, continus ou échantillonnés [Bor-92][Bouy-96].

2.3.1.1. Application au modèle d'état linéaire

Pour simplifier le problème, on se place volontairement dans le cas du système linéaire suivant représenté par son équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{B} \mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C} \mathbf{X} + \mathbf{D} \mathbf{U} \\ \mathbf{X}(0) \end{cases} \quad (2.36)$$

Nous déterminons les composantes rapides ou lentes par rapport à leurs valeurs propres associées dans la matrice \mathbf{A} . Si le système a des dynamiques distinctes, les termes de la matrice \mathbf{A} peuvent avoir des ordres de grandeur différents. Pour normaliser cette matrice, nous introduisons les paramètres \mathbf{e}_i (indice i pour distinguer s'il y a plusieurs niveaux de dynamique). Par exemple, s'il n'y a que 2 ordres de grandeur différents, l'équation d'état sous forme singulièrement perturbée s'écrit alors, avec \mathbf{X}_1 pour les composantes lentes et \mathbf{X}_2 pour les composantes rapides (en supposant que la matrice \mathbf{A}_{22} soit inversible) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_1 = \mathbf{A}_{11}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_1\mathbf{U} \\ \mathbf{e}\dot{\mathbf{X}}_2 = \mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{X}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{C}_2\mathbf{X}_2 + \mathbf{D}\mathbf{U} \\ \mathbf{X}_1(0) \\ \mathbf{X}_2(0) \end{cases} \quad (2.37)$$

Cette forme est dite singulièrement perturbée car le paramètre \mathbf{e} est considéré comme une perturbation. Si sa valeur est nulle, nous avons une singularité. La valeur du paramètre \mathbf{e} n'a pas à être déterminée de façon exacte car ce dernier n'apparaît pas dans les modèles découplés. Par exemple, nous pouvons choisir \mathbf{e} en utilisant les valeurs propres des matrices diagonales (\mathbf{A}_{11} et \mathbf{A}_{22}) comme présenté dans l'équation (2.38), ou directement à partir de la matrice \mathbf{A} pour que les termes de cette matrice soient normalisés.

$$\mathbf{e} = \frac{\min |\mathbf{I}_{lent}|}{\max |\mathbf{I}_{rapide}|} \quad (2.38)$$

L'étape suivante consiste à découpler les dynamiques du modèle. Nous déterminons le modèle lent en posant $\epsilon = 0$. Nous obtenons les relations suivantes (indice l pour indiquer que c'est le modèle lent) :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{2l} = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_{1l} - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{U}_l \\ \dot{\mathbf{X}}_{1l} = (\mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{X}_{1l} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_l \\ \mathbf{Y}_l = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})\mathbf{X}_{1l} + (\mathbf{D} - \mathbf{C}_2\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2)\mathbf{U}_l \\ \mathbf{X}_{1l}(0) \approx \mathbf{X}_1(0) \\ \mathbf{X}_{2l}(0) \approx -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{X}_{1l}(0) \end{cases} \quad (2.39)$$

Pour obtenir le modèle rapide, nous posons $\mathbf{X}_{1r} = 0$ ainsi que sa dérivée (indice r pour le modèle rapide). Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon\dot{\mathbf{X}}_{2r} = \mathbf{A}_{22}\mathbf{X}_{2r} + \mathbf{B}_2\mathbf{U}_r \\ \mathbf{Y}_r = \mathbf{C}_2\mathbf{X}_{2r} + \mathbf{D}\mathbf{U}_r \\ \mathbf{X}_{2r}(0) \approx \mathbf{X}_2(0) - \mathbf{X}_{2l}(0) \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous pouvons représenter toutes les variables dans l'équation d'état en additionnant les valeurs des modèles rapide et lent :

- les variables lentes :

$$\mathbf{X}_1(t) \cong \mathbf{X}_{1l}(t) \quad (2.41)$$

valable pour $t \in [0, +\infty[$

- les variables rapides :

$$\mathbf{X}_2(t) \cong \mathbf{X}_{2l}(t) + \mathbf{X}_{2r}(t/\epsilon) \quad \text{valable pour } t \in [0, +\infty[\quad (2.42)$$

avec

$$\mathbf{X}_{2l}(t) \text{ valable pour } t \in [T, \infty[$$

$$\mathbf{X}_{2r}(t/\epsilon) \text{ valable pour } t \in [0, T[$$

Cet intervalle T correspond au domaine de couche limite.

- les entrées et sorties :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_l + \mathbf{U}_r \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{Y}_l + \mathbf{Y}_r \end{aligned} \quad (2.43)$$

La décomposition de \mathbf{U} en \mathbf{U}_r et \mathbf{U}_l n'a vraiment de sens que pour le calcul de lois de commande découplées.

De ces relations, nous constatons que les composantes lentes n'ont que des dynamiques lentes, alors que les composantes rapides ont des dynamiques lentes et rapides.

S'il existe plusieurs niveaux de dynamiques (caractérisés par plusieurs paramètres e_i), nous disons que le modèle a des dynamiques rapides, ..., semi-rapides, ..., lentes. Dans un premier temps, nous découplons les composantes rapides des autres composantes. Puis, à partir de l'équation d'état du modèle lent, nous répétons l'opération en découplant les composantes précédentes des composantes qui sont moins rapides et ainsi de suite jusqu'à arriver à des dynamiques lentes. S'il y a n classes de dynamiques, nous devons répéter cette procédure $n - 1$ fois.

2.3.1.2. Application au modèle d'état non linéaire

Dans le cas d'un système non linéaire, le problème qui se pose est de savoir comment déterminer la dynamique d'un élément, qui correspond au paramètre e . Dans [Pli-89], nous normalisons toutes les grandeurs (entrées et variables d'état) dans le modèle non linéaire par leur valeur maximale. Par cette normalisation, nous pouvons introduire les paramètres e , qui seront utiles pour déterminer la dynamique engendrée par chaque variable.

Supposons que nous avons l'équation d'état non linéaire :

$$\dot{x} = \Phi(x, u) \quad (2.44)$$

où $0 \leq x \leq x_{\max}$ et $0 \leq u \leq u_{\max}$.

Par les valeurs maximales des variables d'état x et des entrées u , nous pouvons normaliser les variables comme :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{x_{\max}} \\ \tilde{u} &= \frac{u}{u_{\max}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Alors, toutes les nouvelles variables varient entre 0 et 1.

$$\begin{aligned} 0 \leq \tilde{x} = \frac{x}{x_{\max}} \leq 1 \\ 0 \leq \tilde{u} = \frac{u}{u_{\max}} \leq 1 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dans l'équation d'état, le changement de variable introduit des termes de normalisation N_i en facteur des $\dot{\tilde{x}}_i$ qui peuvent être classés en plusieurs groupes suivant leur ordre de grandeur.

$$N \dot{\tilde{x}} = \Phi'(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) \quad (2.47)$$

Par la classification de ces ordres de grandeurs, nous pouvons écrire l'équation d'état sous la forme singulièrement perturbée suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \Phi'_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) \\ \mathbf{e} \dot{\tilde{x}}_2 &= \Phi'_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

où \tilde{x}_1 représente les dynamiques lentes tandis que \tilde{x}_2 correspond aux dynamiques rapides.

Le modèle lent peut être obtenu en imposant $\mathbf{e} = 0$.

$$\dot{\tilde{x}}_{1l} = \Phi'_1(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \tilde{u}_l) \quad (2.49)$$

$$0 = \Phi'_2(\tilde{x}_{1l}, \tilde{x}_{2l}, \tilde{u}_l) \quad (2.50)$$

Si l'on suppose que l'équation (2.50) a une solution unique $\tilde{x}_{2l} = h(\tilde{x}_{1l}, \tilde{u}_l)$, alors le modèle lent s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_{1l} &= \Phi'_1(\tilde{x}_{1l}, \tilde{u}_l, h(\tilde{x}_{1l}, \tilde{u}_l)) \\ \tilde{x}_{2l} &= h(\tilde{x}_{1l}, \tilde{u}_l) \end{aligned} \quad (2.51)$$

2.3.1.3. Application au bond graph

La méthode des perturbations singulières peut être appliquée directement à partir du bond graph [Sue-91]. En utilisant cette méthode, nous obtenons le bond graph rapide et le bond graph lent à partir du bond graph initial.

Pour illustrer cette méthode, nous considérons le cas d'étude de la motorisation à courant continu (voir Figure 2.3). La procédure de simplification de modèle peut être décrite de la manière suivante :

- La première étape consiste à faire la décomposition des variables d'état en variables lentes et rapides. Pour cela, nous devons déterminer toutes les boucles causales dans le modèle initial. Pour faciliter cette recherche, nous pouvons utiliser le logiciel ARCHER [Azm-92] qui permet de trouver de manière analytique toutes les boucles causales et leur gain sur le bond graph initial. Le gain des boucles causales (sans l'opérateur $1/p$) donne une estimation des constantes de temps et des pulsations naturelles présentes dans le

modèle. Puis, nous identifions parmi toutes les composantes dynamiques celles qui sont rapides (ce sont les composantes avec un gain élevé en valeur absolue et une faible période) et celles qui sont lentes. Pour que la méthode soit applicable, la matrice A_{22} , correspondant aux dynamiques rapides doit être inversible. Cette inversibilité peut être vérifiée en regardant si, pour chaque élément rapide, il existe au moins 1 chemin causal direct qui le lie avec un élément R ou un autre élément rapide.

Comme nous l'avons précisé dans le paragraphe précédent, s'il y a plusieurs ordres de grandeur pour les constantes de temps et les périodes naturelles, nous pouvons séparer les composantes selon plusieurs niveaux de dynamique (rapide, ... , semi-rapide, ... , lente).

Dans le modèle de la motorisation à courant continu, il existe 8 boucles causales. En utilisant les valeurs numériques présentées en Annexe B, nous calculons les gains et les constantes de temps ou périodes naturelles engendrés par ces boucles. Le Tableau 2.4 présente leurs termes analytiques et valeurs numériques, où w_n représente la pulsation naturelle (en rad/s) pour des boucles causales de type $I-I$ ou $I-C$, tandis que le terme T_n correspond à la constante de temps pour des boucles causales de type $I-R$, ou la période naturelle pour le type $I-I$ ou $I-C$.

En examinant ces valeurs, nous pouvons émettre les hypothèses suivantes :

- L'inertie J_c est associée à une constante de temps très petite (voir boucle causale no. 8). Ceci est dû à la valeur élevée du frottement F_r . Nous pouvons donc considérer que la variable d'état de cette inertie a une dynamique rapide.
- Nous remarquons que l'inductance L_m intervient dans des constantes de temps et périodes naturelles petites par rapport aux autres, sauf celle correspondant à l'inertie J_c qui est encore plus petite. Nous considérons que cette inductance possède une dynamique appelée "semi-rapide".
- L'inertie J_m est associée, à la fois, à une constante de temps faible (avec l'élément F_r) et à une constante de temps importante (avec l'élément F_m). Cette ambiguïté nous empêche de classer la dynamique de l'inertie J_m comme rapide ou semi-rapide. Nous la considérons donc comme une dynamique lente.
- Enfin, les variables d'état des autres éléments sont classées comme les variables lentes, comme celle de l'inertie J_m .

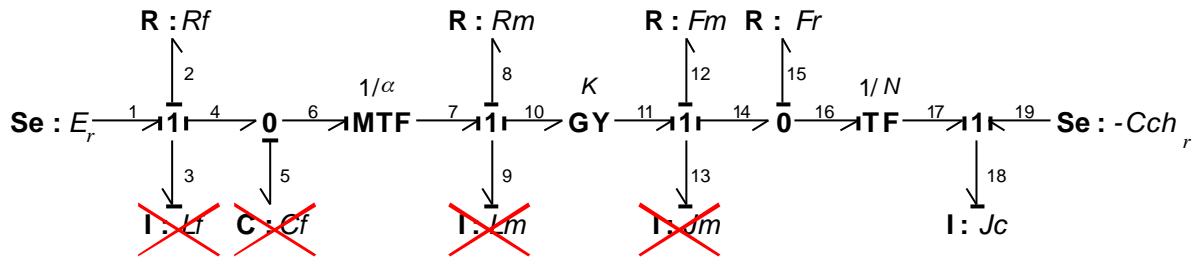
Il existe donc 3 niveaux de dynamiques dans le modèle : rapide (p_{18}), semi-rapide (p_9) et lente (p_3, p_{13}, q_5).

Tableau 2.4. Gains et constantes de temps ou périodes naturelles des boucles causales.

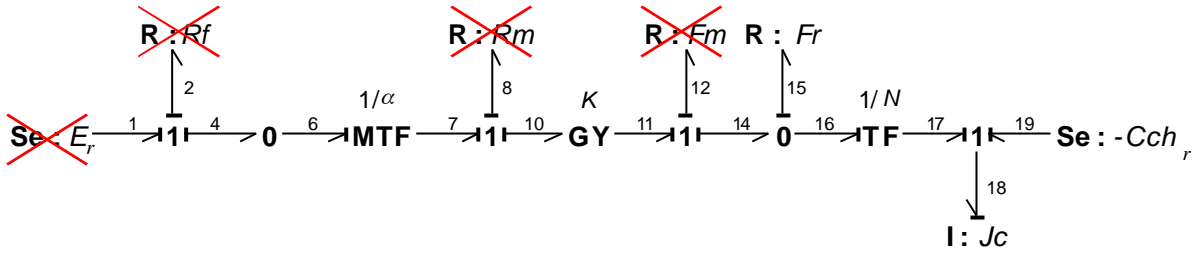
No.	Eléments liés par boucle causale		Gain (s)	w_n [rad/s]	T_n [sec]
1.	L_f	R_f	$-\frac{R_f}{L_f \cdot s}$	-	$\frac{L_f}{R_f} = 0.0526$
2.	L_f	C_f	$-\frac{1}{L_f \cdot C_f \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{1}{L_f \cdot C_f}} = 126.66$	$2p \cdot \sqrt{L_f \cdot C_f} = 0.0496$
3.	L_m	C_f	$-\frac{a^2}{L_m \cdot C_f \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{a^2}{L_m \cdot C_f}} = 513.53 a$	$\frac{2p}{a} \cdot \sqrt{L_m \cdot C_f} = 0.0122 / a$
4.	L_m	R_m	$-\frac{R_m}{L_m \cdot s}$	-	$\frac{L_m}{R_m} = 0.0011$
5.	L_m	J_m	$-\frac{K^2}{L_m \cdot J_m \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K^2}{L_m \cdot J_m}} = 740.82$	$\frac{2p}{K} \cdot \sqrt{L_m \cdot J_m} = 8.48 \times 10^{-3}$
6.	J_m	F_m	$-\frac{F_m}{J_m \cdot s}$	-	$\frac{J_m}{F_m} = 0.5286$
7.	J_m	F_r	$-\frac{F_r}{J_m \cdot s}$	-	$\frac{J_m}{F_r} = 3.7 \times 10^{-5}$
8.	J_c	F_r	$-\frac{N^2 \cdot F_r}{J_c \cdot s}$	-	$\frac{J_c}{N^2 \cdot F_r} = 1.48 \times 10^{-6}$

- La deuxième étape consiste à établir le bond graph rapide. Ce dernier est obtenu en supprimant toutes les composantes dynamiques lentes. Ensuite, nous supprimons aussi les résistances et les sources qui ne sont pas couplées causalement avec les composantes dynamiques restantes.

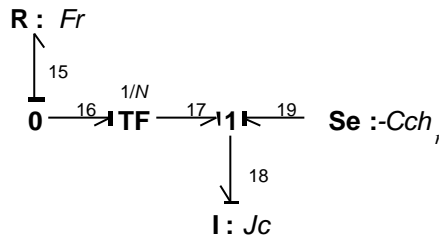
Pour obtenir le modèle rapide de notre cas d'étude, nous supprimons d'abord tous les éléments associés aux dynamiques semi-rapide et lente (voir Figure 2.9.a). Nous supprimons ensuite les éléments R et les sources qui ne sont pas liés causalement avec l'inertie J_c (Figure 2.9.b). Enfin, nous obtenons le modèle rapide présenté par la Figure 2.9.c.



(a) Phase 1 : Suppression des éléments associés aux dynamiques semi-rapide et lente.



(b) Phase 2 : Suppression des éléments R et des sources.

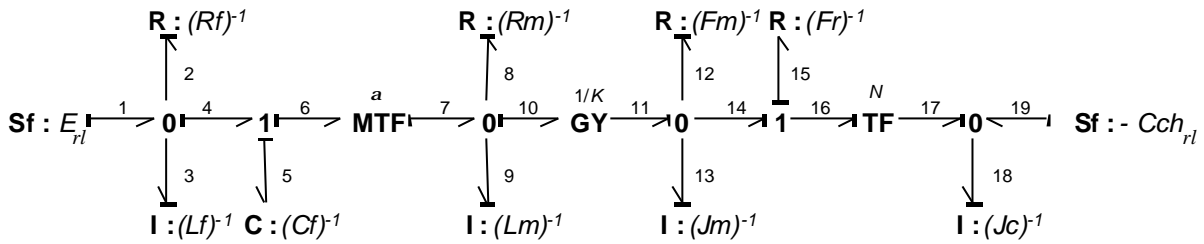


(c) Modèle rapide.

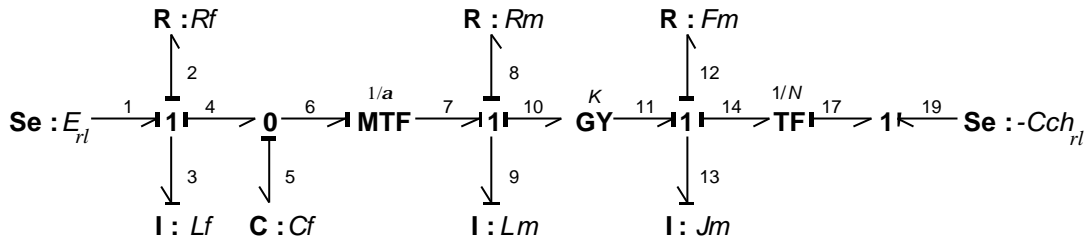
Figure 2.9. Construction du modèle rapide.

- La troisième étape réside en l'obtention du bond graph lent. D'abord, nous construisons le modèle réciproque du bond graph initial. Le modèle réciproque est obtenu en dualisant les jonctions et les sources (voir section A.6.3 de l'Annexe A) et en inversant les paramètres des éléments. Dans ce modèle, les composantes qui sont rapides dans le modèle initial deviennent lentes, et les composantes lentes deviennent rapides. Sur ce bond graph réciproque, nous appliquons la même méthode qui permet de déterminer le bond graph rapide (voir deuxième étape). Nous revenons ensuite au bond graph réduit en utilisant une nouvelle transformation réciproque.

Nous déduisons le modèle lent pour la classe de dynamique rapide. Nous construisons le modèle réciproque (voir Figure 2.10.a) et appliquons la procédure décrite à la deuxième étape. La Figure 2.10.b représente le modèle lent pour la dynamique rapide.



(a) Bond graph réciproque du modèle initial.



(b) BG direct "lent" après suppression de l'élément $I : J_c$.

Figure 2.10. Construction du modèle lent de la classe de dynamique rapide.

S'il y a plusieurs classes de dynamiques différentes, après avoir supprimé les composantes très rapides pour obtenir le bond graph lent, nous répétons la deuxième et la troisième étape pour les composantes moins rapides en considérant ce bond graph comme bond graph initial.

Le modèle lent présenté à la Figure 2.10.b est donc le modèle initial pour obtenir le modèle semi-rapide. Après avoir déterminé le modèle direct "lent-semi rapide", nous appliquons le même procédé en considérant l'inductance L_m comme élément rapide. Ceci nous amène à l'obtention le modèle semi-rapide présenté à la Figure 2.11.

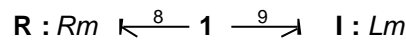


Figure 2.11. Modèle semi-rapide.

Nous constatons que ce modèle n'a aucune source. Nous pouvons donc négliger l'influence de ce dernier.

En appliquant l'étape 3 au bond graph de la Figure 2.10.b, nous obtenons le modèle lent illustré par la Figure 2.12.

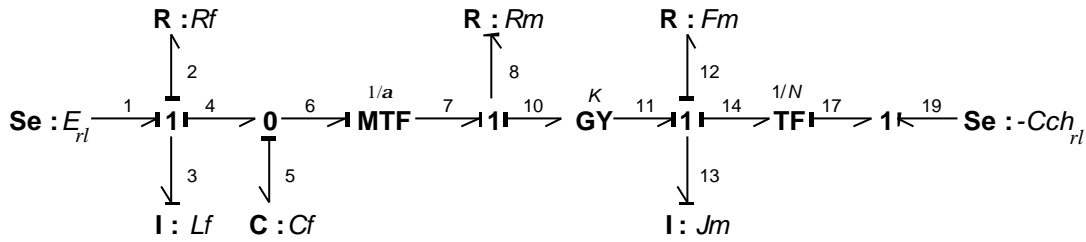


Figure 2.12. Modèle lent.

Les simplifications appliquées directement sur le modèle bond graph sont concordantes à celles obtenues par l'approche mathématique à l'aide de l'équation d'état du modèle [Gan-00].

Par ailleurs ces simplifications sont validées par les simulations, en utilisant un régulateur de courant de la machine de type PI (voir section 2.2.1). Nous considérons aussi que le couple de charge n'a pas de dynamique rapide. Ceci implique que le modèle rapide peut être négligé. Il ne reste donc que le modèle lent comme modèle réduit. Nous remarquons que le modèle réduit a le même comportement que le modèle initial pour un fonctionnement en valeur moyenne du hacheur (voir Figure 2.13) [Gan-01a]. Par contre, il n'est pas valable pour le hacheur modélisé en valeur instantanée avec une fréquence de découpage à 1 kHz. En effet, ce fonctionnement injecte une dynamique rapide à l'entrée du moteur. Dans le cas d'un modèle de hacheur avec commutations, il est donc nécessaire de garder l'inductance du moteur L_m dans le modèle réduit. En conclusion, le modèle réduit pour ce fonctionnement est celui présenté à la Figure 2.10.b.

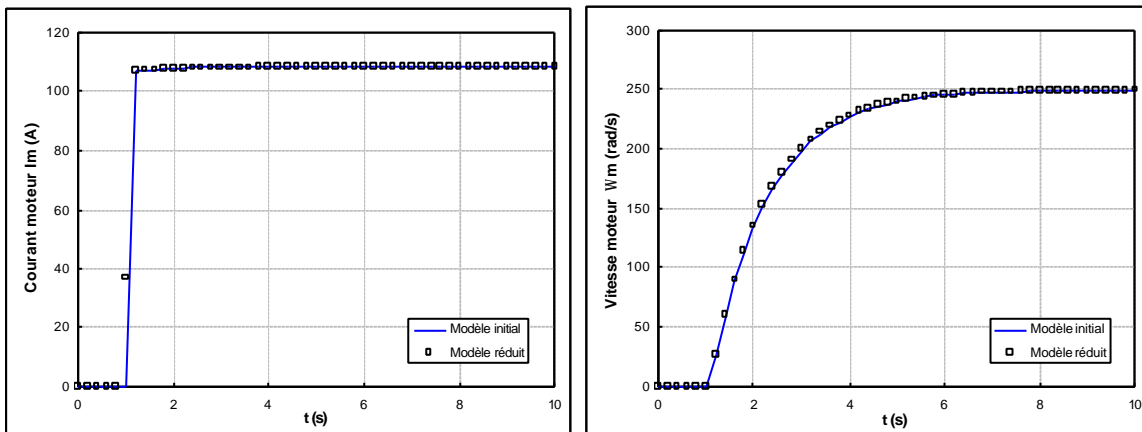


Figure 2.13. Comparaison entre le modèle initial et le modèle réduit (hacheur en valeur moyenne).

La dynamique des composantes rapides est approchée par la partie rapide et la partie lente (entraînée par les composantes lentes). Mais, pour la composante lente, il suffit de l'approcher à partir du bond graph lent. Pour trouver la dynamique lente des composantes rapides, nous mettons les composantes rapides en causalité dérivée sur le bond graph initial et calculons les gains des chemins causaux avec les composantes lentes et les sources.

C. Sueur [Sue-91] a montré que les équations d'état déduites des modèles bond graph lent et rapide correspondent aux équations (2.39) et (2.40) qui auraient été obtenues par calcul formel sur l'équation d'état générale.

2.3.2. Méthode MORA (Model Order Reduction Algorithm)

La méthode MORA, proposée par L.S. Louca et J.L. Stein [Lou-98][Lou-99], est une technique de simplification de modèle basée sur les échanges énergétiques dans les systèmes. La procédure MORA utilise la notion d'activité énergétique et d'index d'activité des éléments passifs.

Définition 2.5 :

L'*activité énergétique* d'un élément passif i pendant une fenêtre de temps observée $\Delta t = t_1 - t_0$ est formulée comme suit :

$$A_i = \int_{t_0}^{t_1} |P_i(t)| dt \quad (2.52)$$

où $P_i(t)$ est la puissance instantanée de l'élément i .

On constate ainsi que l'activité énergétique est liée à la puissance. Or, cette dernière peut être récupérée directement d'un modèle bond graph car chaque lien apporte les informations de l'effort e et du flux f qui correspond à la puissance ($P = e.f$). C'est la raison pour laquelle il est intéressant d'appliquer la méthode MORA sur le bond graph. Dans le modèle bond graph l'équation (2.52) s'écrit :

$$A_i = \int_{t_0}^{t_1} |e_i(t).f_i(t)| dt \quad (2.53)$$

où e_i et f_i représentent respectivement la variable d'effort et de flux dans l'élément passif i . Ce sont les éléments de type I , C ou R dans le modèle bond graph.

Définition 2.6 :

L'*activité totale* est la somme des activités énergétiques des éléments du modèle.

$$A_{total} = \sum_{i=1}^{n_k} A_i = \sum_{i=1}^{n_k} \left(\int_{t_0}^{t_1} |P_i(t)| dt \right) \quad i = 1..n_k \quad (2.54)$$

où n_k représente le nombre d'éléments passifs dans le modèle.

En normalisant les activités énergétiques par l'activité totale, nous obtenons les index d'activité. L'index d'activité AI_i d'un élément i est donc calculé selon :

$$AI_i = \frac{A_i}{A_{total}} \quad (2.55)$$

L'index d'activité montre l'importance d'un élément dans le système. Plus cet index est grand, plus l'élément contribue aux transferts énergétiques. Le principe de la méthode MORA est donc de supprimer les éléments ayant de faibles index d'activité.

Définition 2.7 :

Le *seuil d'activité* est le pourcentage de l'activité totale inclus dans le modèle réduit. Le choix de ce seuil dépend des spécifications techniques du système.

Les éléments contribuant à l'activité énergétique globales sont classés dans un tableau du plus actif au moins actif (cf. Figure 2.17). On totalise la somme des index d'activité jusqu'à ce que cette somme cumulée dépasse le seuil d'activité. Tout les éléments classés en deçà de ce seuil sont considérés comme actifs et doivent apparaître dans le modèle réduit, tandis que les éléments qui ne rentrent pas dans ce classement peuvent être négligés.

La méthode MORA est sensiblement différente selon qu'on l'applique à des systèmes linéaires ou non linéaires.

- *Systèmes linéaires* [Lou-99]

Pour des systèmes linéaires, nous sommes capables de déterminer :

- un modèle réduit pour une bande passante désirée.
- un modèle réduit pour des signaux d'excitation donnés.

- *Systèmes non linéaires* [Lou-98]

Pour des systèmes non linéaires, seul le dernier point, souligné précédemment en régime linéaire, peut être satisfait.

Comme l'activité énergétique et l'index d'activité sont directement liés à la fréquence des signaux d'excitation [Gan-03], nous pouvons obtenir un modèle simplifié du système associé à une gamme de fréquences spécifique. Pour cela, nous proposons d'utiliser les signaux "riches" du point de vue spectral afin que les modes relatifs à la gamme de fréquence désirée soient vraiment excités. Plusieurs types de signaux peuvent être utilisés pour l'excitation d'un modèle dans une gamme de fréquence donnée. Nous avons choisi d'appliquer des excitations de type échelon, sinusoïde, SBPA (Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire) et *chirp* pour déterminer les caractéristiques fréquentielles de nos modèles.

Nous soulignons que la simplification dépend de la valeur numérique des éléments. Il est donc nécessaire d'appliquer à nouveau la méthode quand les valeurs changent.

Nous allons présenter ces applications dans les sections suivantes.

2.3.2.1. Obtention du modèle réduit pour une bande de fréquence désirée (modèle linéaire)

Il y a deux approches pour arriver à cet objectif : par les calculs analytiques et par les simulations. Dans les deux cas, nous utilisons les sinusoides de pulsation $\omega \leq \omega_b$ à l'entrée avec ω_b la bande passante désirée. Il s'agit donc d'un balayage fréquentiel. Nous considérons que l'amplitude de la puissance d'entrée P dans le système est constante pour toutes les fréquences incluses dans cette bande. Ceci est illustré par la figure suivante, où nous prenons une valeur unitaire de P pour simplifier les calculs.

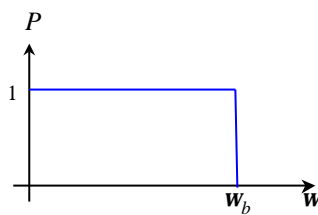


Figure 2.14. Amplitude constante de la puissance d'entrée pour $\omega \leq \omega_b$.

La procédure de cette méthode est la suivante [Lou-99] :

1. Pour chaque pulsation $\omega \leq \omega_b$:

- Calculer l'amplitude du signal d'entrée U_j (pour garder la valeur constante de la puissance P tout au long du balayage fréquentiel). Cette valeur peut être déterminée en examinant la fonction de transfert de la variable duale de l'entrée au lien de puissance de U_j .
- Calculer l'activité énergétique de chaque élément passif.
Si nous utilisons l'approche par les simulations, il suffit de simuler le modèle et de l'exciter avec une sinusoïde de pulsation ω dont l'amplitude a été déterminée précédemment. Quand le régime harmonique est déjà établi (l'amplitude d'oscillation des variables est constante), nous calculons l'activité énergétique pendant une période de sinusoïde en utilisant l'équation (2.53).

L'activité énergétique d'un élément passif peut aussi être calculée de façon analytique. Nous pouvons, à partir du modèle linéaire, trouver les fonctions de transfert des variables d'effort et de flux de chaque élément. Pour les éléments I et C , nous avons un déphasage entre ces variables de $\pm 90^\circ$, tandis que celles des éléments R sont en phase.

Considérons le vecteur \mathbf{Y} qui contient les variables de flux f_I des éléments I , d'effort e_C des éléments C et de flux f_R des éléments R . A partir de la fonction transfert (dans

le domaine fréquentiel) de ces variables, nous pouvons déterminer leurs variables duales (e_I, f_C, e_R) :

$$\begin{aligned} e_I(\mathbf{w}) &= j \mathbf{w} I f_I(\mathbf{w}) \\ f_C(\mathbf{w}) &= j \mathbf{w} C e_C(\mathbf{w}) \\ e_R(\mathbf{w}) &= R f_R(\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (2.56)$$

où I, C et R représentent les gains des éléments.

Pour calculer l'activité énergétique avec cette approche, nous devons déterminer la valeur absolue de la puissance pendant une période de sinusoïde. Nous prenons un élément I pour déduire l'expression de l'activité énergétique. Pour une pulsation \mathbf{w} , nous pouvons écrire les variables de flux et d'effort selon :

$$\begin{aligned} f_I(t) &= Y_I(\mathbf{w}) U_j(\mathbf{w}) \sin(\mathbf{w}t + \mathbf{j}) \\ e_I(t) &= I \mathbf{w} Y_I(\mathbf{w}) U_j(\mathbf{w}) \sin\left(\mathbf{w}t + \mathbf{j} + \frac{\mathbf{p}}{2}\right) = I \mathbf{w} Y_I(\mathbf{w}) U_j(\mathbf{w}) \cos(\mathbf{w}t + \mathbf{j}) \end{aligned} \quad (2.57)$$

où $Y_I(\mathbf{w})$ et \mathbf{j} représentent respectivement le gain de la variable de flux f_I pour la pulsation \mathbf{w} et son angle par rapport au signal d'entrée d'amplitude U_j . L'activité de cet élément pendant la période sinusoïdale $T = 2\mathbf{p} / \mathbf{w}$ est donc :

$$\begin{aligned} A_I(\mathbf{w}) &= \int_0^T |e_I(t) f_I(t)| dt = \frac{1}{2} \int_0^T |I \mathbf{w} Y_I(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \sin(2(\mathbf{w}t + \mathbf{j}))| dt \\ &= \frac{1}{2} I \mathbf{w} Y_I(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \int_0^{2\mathbf{p}/\mathbf{w}} |\sin(2(\mathbf{w}t + \mathbf{j}))| dt = 2 I Y_I(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \end{aligned} \quad (2.58)$$

En appliquant la même procédure, nous pouvons déduire l'activité énergétique des éléments C et R .

$$\begin{aligned} A_I &= 2 I Y_I(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \\ A_C &= 2 C Y_C(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \\ A_R &= \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{w}} R Y_R(\mathbf{w})^2 U_j(\mathbf{w})^2 \end{aligned} \quad (2.59)$$

2. Intégrer l'activité énergétique par rapport à la pulsation \mathbf{w} (de 0 à \mathbf{w}_b).

Pour calculer l'intégrale de l'activité d'un élément par rapport à la pulsation, nous pouvons utiliser la méthode de trapèze.

3. Calculer l'index d'activité des éléments en utilisant l'équation (2.55) pour chaque pulsation utilisée $\mathbf{w} \leq \mathbf{w}_b$.
4. Trier l'index d'activité par ordre décroissant.

5. Faire la sommation des index d'activité, commencer par le plus grand index (l'élément le plus important), jusqu'à atteindre le seuil.
6. Séparer les éléments en 2 catégories : ceux qui contribuent au seuil d'activité (ils seront inclus dans le modèle réduit) et ceux qui ne participe pas à ce seuil (ils doivent être négligés).
7. Construire le modèle réduit avec les éléments de la première catégorie.

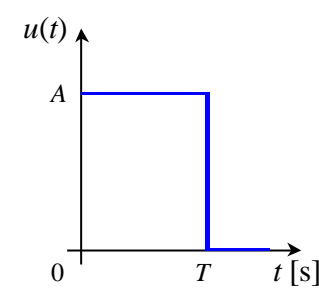
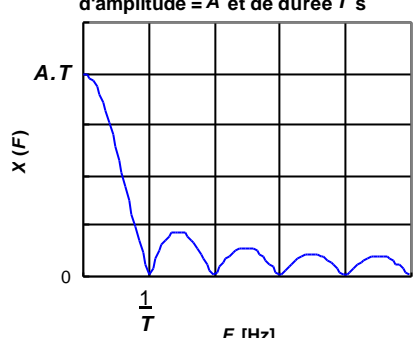
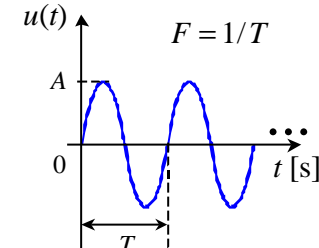
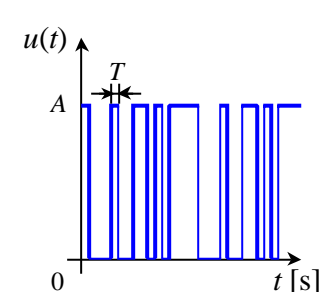
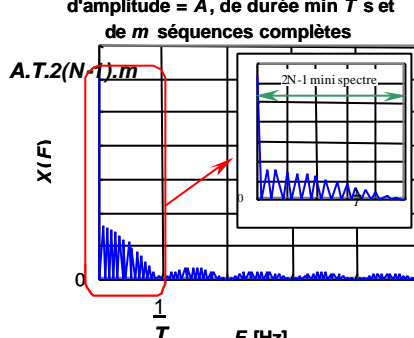
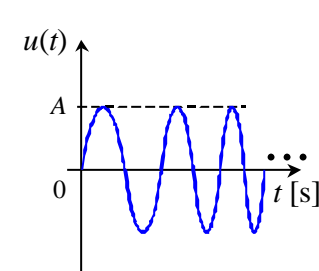
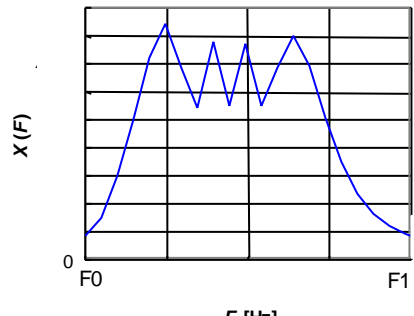
2.3.2.2. Signaux d'excitation

Dans le paragraphe suivant, nous utilisons les signaux d'excitation de type échelon, sinusoïde, SBPA (Séquence Binaire Pséudo-Aléatoire) [Cou-90][Bon-01] et *chirp* pour réduire l'ordre de modèles linéaires ou non. Nous présentons leurs spectres fréquentiels et leurs caractéristiques au Tableau 2.5. Le détail de la SBPA peut être consulté en Annexe H.

Un échelon excite une gamme de fréquence qui est déterminée par sa durée T [Kal-97]. Ce signal présente un inconvénient car il inclut toujours des composantes basses fréquences. Il ne peut donc pas exciter uniquement les hautes fréquences. Une SBPA a globalement les mêmes caractéristiques fréquentielles qu'un échelon. Par contre, une sinusoïde excite le modèle à une fréquence donnée. Un chirp est une cosinusoïde balayant les fréquences entre F_0 et F_1 . Il excite cette gamme de fréquence prédéfinie avec la même énergie.

Ces signaux seront utilisés comme excitation des entrées dans la simplification de modèle selon la gamme de fréquence d'utilisation.

Tableau 2.5. Spectres fréquentiels et caractéristiques des signaux d'excitation.

Type	Réponse temporelle	Spectre fréquentiel	Caractéristiques
Echelon	 <p>The graph shows a step function $u(t)$ that is constant at amplitude A from $t=0$ to $t=T$, and then drops to zero.</p>	<p>Spectre fréquentiel d'un échelon d'amplitude = A et de durée T s</p>  <p>The spectrum $X(F)$ shows a peak at $A \cdot T$ at $F=0$ and a first zero at $F = 1/T$. The spectrum is symmetric around $F=0$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> La largeur de bande dépend de la durée T. Il excite toujours les composantes basses fréquences (BF).
Sinusoïde	 <p>The graph shows a sine wave $u(t)$ with amplitude A and period T. The frequency is indicated as $F = 1/T$.</p>	<p>Un dirac à la fréquence associée</p>	<p>Il excite donc la fréquence correspondante, soit en BF, soit en hautes fréquences (HF).</p>
SBPA	 <p>The graph shows a square wave $u(t)$ with amplitude A and period T.</p>	<p>Spectre fréquentiel d'un SBPA d'amplitude = A, de durée min T s et de m séquences complètes</p>  <p>The spectrum $X(F)$ shows a peak at $A \cdot T \cdot 2(N-1) \cdot m$ at $F=0$ and a first zero at $F = 1/T$. An inset shows a '2N-1 mini spectre'.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Ce signal a une caractéristique quasi-similaire à celle de l'échelon. Il excite toujours les composantes basses fréquences (BF).
Chirp	 <p>The graph shows a chirp signal $u(t)$ with amplitude A and frequency increasing over time.</p>	<p>Spectre fréquentiel d'un chirp de F_0 à F_1</p>  <p>The spectrum $X(F)$ shows a peak at F_0 and F_1.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Le spectre dépend de ses fréquences (F_0 et F_1). Il peut donc exciter une certaine gamme de fréquence sans inclure les phénomènes BF.

2.3.2.3. Obtention du modèle réduit selon le signal d'excitation (modèle linéaire et non linéaire)

Contrairement à l'application détaillée dans la section 2.3.2.1 qui peut être faite à l'aide des simulations ou de calculs analytiques, nous ne pouvons obtenir le modèle réduit selon le signal d'excitation que par des simulations. Pour effectuer cette simplification, nous adoptons la procédure suivante :

1. Simuler le modèle global et calculer l'activité et l'index d'activité de chaque élément pendant la fenêtre de temps désirée.
2. Trier les index d'activité par ordre décroissant.
3. Faire la sommation des index d'activité, commencer par le plus grand index (l'élément le plus important) jusqu'à atteindre le seuil d'activité.
4. Séparer les éléments en 2 classes. La première contient les éléments contribuant à ce seuil tandis que les autres éléments appartiennent à la deuxième classe.
5. Construire le modèle réduit avec les éléments de la première classe.

Pour obtenir le modèle réduit relatif à une certaine gamme de fréquence, nous utilisons la procédure avec les signaux d'excitation présentés au paragraphe 2.3.2.2.

2.3.2.4. Exemple

Considérons un circuit électrique de deux filtres *RLC* en cascade. Nous présentons le schéma, les valeurs des paramètres dont la valeur numérique et le bond graph associé sont présentés à la Figure 2.15.

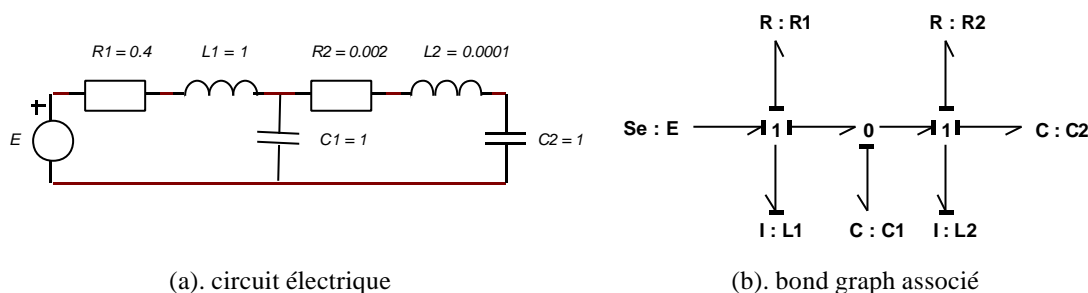


Figure 2.15. Exemple de la méthode MORA : modèle de 4^{ème} ordre.

Ce modèle est linéaire. Nous pouvons donc appliquer la méthode MORA décrite dans le paragraphe 2.3.2.3 pour obtenir les modèles réduits selon la bande passante. Etant donné qu'il n'y a que 6 éléments dans le modèle, nous utilisons l'approche analytique. Avec un seuil d'activité de 99 %, nous remarquons que pour les bandes passantes très basses fréquences, seules les capacités C_1 et C_2 interviennent dans le modèle réduit (voir Figure 2.16). Quand nous augmentons la bande passante, nous devons prendre en compte la résistance R_1 .

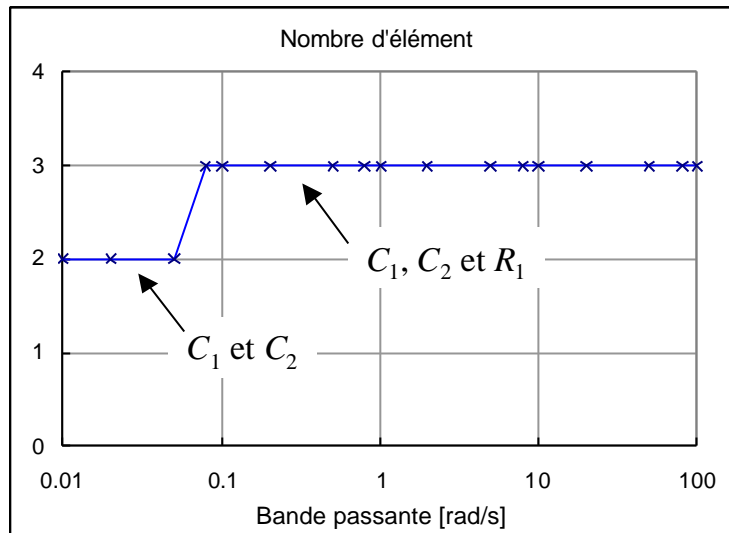


Figure 2.16. Nombre d'élément en fonction de la bande passante.

Nous présentons à la Figure 2.17 la démarche de simplification pour un échelon de durée 5 s à l'entrée E . Après avoir calculé les index d'activité à la fin de cette durée, nous trions les éléments par ordre d'index décroissant. Ensuite, nous additionnons les index pour obtenir l'index d'activité accumulé (indiqué par Σ). La valeur du seuil d'activité choisie est de 99 %. Quand Σ atteint cette valeur, nous séparons les éléments. Ceux qui sont en blanc sont importants et doivent être inclus dans le modèle réduit. Les éléments grisés sont à supprimer.

Elément	AI [%]
$R : R1$	89.1169
$I : L1$	0.4620
$C : C1$	5.1497
$R : R2$	0.1114
$I : L2$	1.14 E-4
$C : C2$	5.15989

(a) Etape 1 : index d'activité des éléments

Elément	AI [%]
$R : R1$	89.1169
$C : C2$	5.1599
$C : C1$	5.1497
$I : L1$	0.4620
$R : R2$	0.1114
$I : L2$	1.14 E-4

(b) Etape 2 : tri des index par ordre décroissant

Elément	AI [%]	Σ [%]
$R : R1$	89.1169	89.1169
$C : C2$	5.1599	94.2768
$C : C1$	5.1497	99.4265
$I : L1$	0.4620	99.8885
$R : R2$	0.1114	99.9999
$I : L2$	1.14 E-4	100.0000

(c) Etapes 3 et 4 : sommation des index et séparation des éléments

Figure 2.17. Application de la méthode MORA pour un échelon de durée 5 s.

Le modèle réduit est constitué par les éléments R_1 , C_1 et C_2 . En fait, l'échelon de durée 5 s est inclus dans une bande passante de $F_b = 0.2$ Hz ou $\omega_b = 1.24$ rad/s. Quand nous étudions la Figure 2.16, nous constatons que, pour une telle bande passante, nous avons 3 éléments dans le modèle réduit : R_1 , C_1 et C_2 . Nous soulignons la concordance de ces résultats.

2.4. Conclusion

Nous avons présenté des outils d'analyse compatible avec l'approche système qui peuvent être appliqués au bond graph, directement, ou en passant par l'équation d'état. La *linéarisation* d'un bond graph non linéaire autour d'un point de fonctionnement permet d'obtenir un modèle en petit signal. Les non linéarités sont ramenées aux sources modulées. Ce modèle linéarisé peut nous servir dans l'*analyse de stabilité en utilisant la méthode du lieu des pôles*. Par ailleurs, la stabilité peut être examinée à l'aide de la *deuxième méthode de Lyapunov*. Cette dernière est applicable aux modèles linéaires ou non linéaires. Cependant, l'application de cette méthode n'est pas toujours aisée car elle ne donne que des conditions suffisantes de stabilité. La difficulté d'examiner analytiquement le signe de la fonction candidate et sa dérivée conduit à la production d'hypothèses qui peuvent être non judicieuses. Quant à l'approche numérique en examinant l'évolution de la dérivée de la fonction candidate par des simulations, elle est quasiment inutile et n'apporte rien par rapport à une analyse classique par simulations successives. Cependant, cette méthode est très pratique et efficace pour déduire la loi de commande stabilisante du modèle.

Nous avons présenté deux méthodes de simplification de modèle, à savoir la *méthode des perturbations singulières*, basée sur l'analyse des dynamique, et la *méthode MORA*, basée sur la notion d'activité énergétique. Ces techniques permettent de réduire la complexité des systèmes et d'obtenir des modèles simplifiés valables selon la gamme de fréquence désirée. L'utilisation des modèles réduits après simplification facilite leur analyse et diminue les temps de simulation.

Dans la suite de ce travail, nous allons appliquer ces méthodes d'analyse sur une chaîne de traction ferroviaire dont la modélisation est présentée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation Bond Graph de la chaîne de traction ferroviaire

Chapitre 3

Modélisation Bond Graph de la chaîne de traction ferroviaire

Dans cette partie, nous présentons une représentation unifiée de la chaîne de traction ferroviaire BB36000, exemple typique de système hétérogène multidomaines caractérisé par un fort niveau de couplage entre les domaines électrique et mécanique. La méthodologie Bond Graph est utilisée pour représenter ces différents domaines de façon homogène. Nous donnons ici une vision simplifiée monomoteur de la chaîne de motorisation. Cette représentation a été choisie pour être compatible avec une approche système permettant d'appréhender la globalité des couplages électromécaniques.

3.1. La BB36000

La BB36000 est une chaîne de traction ferroviaire produite par la société ALSTOM [BB36000]. Cette chaîne, destinée à l'utilisation européenne, doit pouvoir supporter différentes configurations d'alimentation. C'est la raison pour laquelle elle a été qualifiée de "locomotive passe frontière" [Jeu-99]. Le schéma électrique de chaque configuration d'alimentation de la BB36000 est exposé dans [BB36000]. Les caractéristiques techniques de cette chaîne sont résumées au Tableau 3.1.

Tableau 3.1. Spécifications générales de la BB36000 [BB36000].

Alimentations	25 kV - 50 Hz, 1500 V continue, 3 kV continue
Poids	88 tonnes
Vitesse maximale	220 km/h
Vitesse nominale	80 km/h
Puissance de traction	6000 kW
Puissance de freinage	3000 kW
Onduleur	GTO, 4.5 kV – 4 kA, 140 Hz max.
Type de traction	Asynchrone
Nombre de moteurs	4
Caractéristique des moteurs	
Vitesse maximale	4160 tr/min
Puissance	1530 kW
Poids	2550 kg
Couple de démarrage	11450 Nm
Courant de démarrage	600 A (efficace)
Tension maximale	2200 V (efficace)



Figure 3.1. Locomotive BB36000

3.2. Le modèle bond graph de la BB36000

Dans ce mémoire, nous utiliserons un modèle approché de la chaîne de traction où nous ne considérerons qu'un seul moteur (modèle monomoteur) au lieu de quatre. La Figure 3.2 décrit le synoptique de cette chaîne.

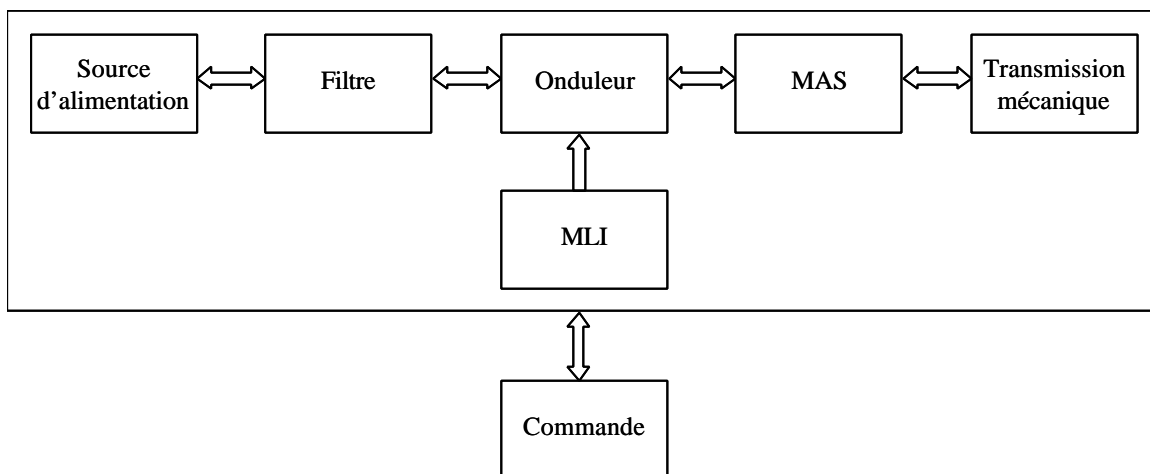


Figure 3.2. Synoptique de la chaîne de traction monomoteur.

En utilisant le formalisme bond graph, nous pouvons modéliser chaque partie physique de la Figure 3.2 de manière unifiante. Les modules de calcul (commande et MLI) peuvent être représentés par des équations en utilisant la notion de signal. Le bond graph à mots de cette chaîne complète est présenté à la Figure 3.3. Le sens de transfert de puissance est indiqué par des demi-flèches.

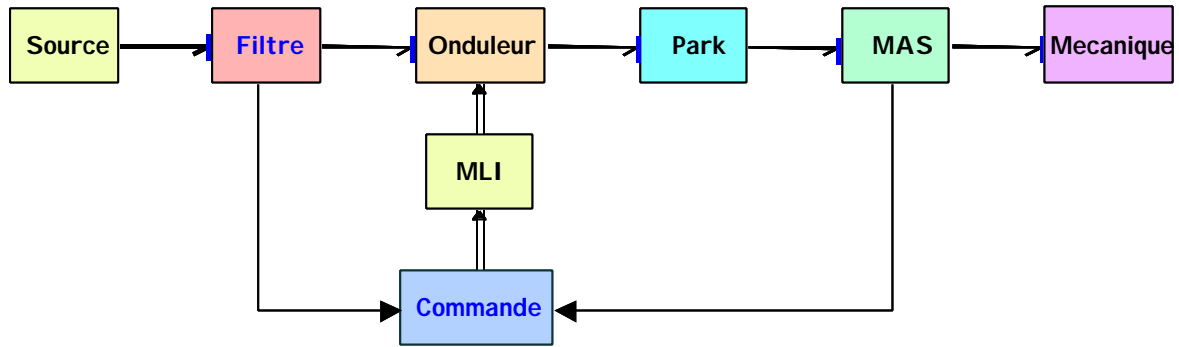


Figure 3.3. Bond graph à mots de la chaîne de traction.

Nous allons détailler la modélisation de chaque partie dans les sections suivantes.

3.2.1. La source d'alimentation

En fonctionnement normal, la chaîne est alimentée par une tension de bus continu de 2750 V supposée parfaite. En bond graph, si nous négligeons les pertes de transmission du réseau, cette alimentation peut être représentée simplement par une source d'effort parfaite Se .

$$Se: U_{cont} \longrightarrow$$

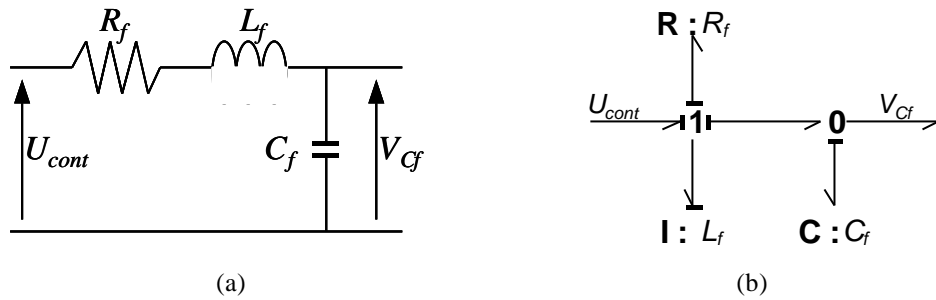
Figure 3.4. Modèle bond graph de la source d'alimentation.

A cette source, il est possible de superposer une composante de perturbation comme nous le verrons au Chapitre 4.

3.2.2. Les modèles de conversion statique d'énergie

3.2.2.1. Le filtre d'entrée

La chaîne est composée d'un filtre de type RLC du deuxième ordre dont le rôle est de réduire les courants harmoniques produits par le découpage de l'onduleur et de filtrer les perturbations issues de la caténaire. Le circuit électrique et le bond graph associé à ce filtre sont présentés à la Figure 3.5. La fréquence de résonance du filtre est de 18.72 Hz.



3.2.2.2. L'onduleur

Pour alimenter la machine asynchrone, un onduleur est utilisé pour convertir les grandeurs continues en grandeurs alternatives. Nous supposons que l'onduleur est sans pertes par conduction et par commutation dans les semi-conducteurs. Les équations (3.2) montrent les relations liées au fonctionnement de l'onduleur.

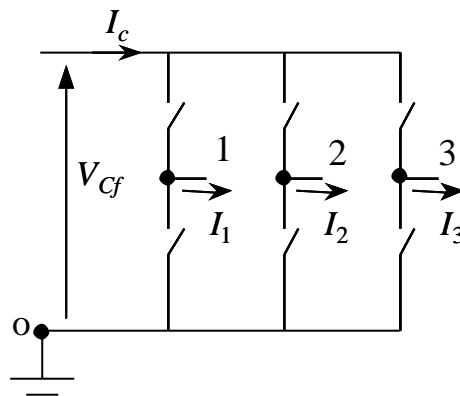


Figure 3.6. L'onduleur.

On définit :

- V_n : la tension neutre charge – masse d'alimentation (o)
- V_{Cf} : la tension à l'entrée de l'onduleur
- I_c : le courant à l'entrée de l'onduleur
- V_i : la tension du bras i par rapport au neutre de la charge, $i=1..3$
- I_i : le courant passant au bras i
- c_i : l'état booléen du bras N° i de l'onduleur : $c_i=1$ état haut, $c_i=0$ état bas.

On fait l'hypothèse que la charge de l'onduleur est équilibrée, ce qui, dans notre cas revient à considérer que la machine asynchrone possède trois armatures identiques. L'équilibre des courants impose alors l'équilibre des tensions simples :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow V_1 + V_2 + V_3 = 0 \quad (3.1)$$

Il est alors possible d'exprimer simplement le potentiel de chaque bras par rapport au neutre de la charge en fonction des états de conduction.

$$\begin{aligned}
 V_n &= \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3)V_{cf} \\
 V_1 &= c_1V_{cf} - V_n = \frac{1}{3}(2c_1 - c_2 - c_3)V_{cf} = \mathbf{h}_1V_{cf} \\
 V_2 &= c_2V_{cf} - V_n = \frac{1}{3}(2c_2 - c_1 - c_3)V_{cf} = \mathbf{h}_2V_{cf} \\
 V_3 &= c_3V_{cf} - V_n = \frac{1}{3}(2c_3 - c_1 - c_2)V_{cf} = \mathbf{h}_3V_{cf}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Inversement, le courant continu à l'entrée de l'onduleur s'exprime en fonction des courants de ligne et des états de conduction, en considérant $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

$$I_c = c_1I_1 + c_2I_2 + c_3I_3 \tag{3.3}$$

ou

$$\begin{aligned}
 I_c &= \left(\frac{2c_1 - c_2 - c_3}{3}\right)I_1 + \left(\frac{2c_2 - c_1 - c_3}{3}\right)I_2 + \left(\frac{2c_3 - c_2 - c_1}{3}\right)I_3 \\
 I_c &= \mathbf{h}_1I_1 + \mathbf{h}_2I_2 + \mathbf{h}_3I_3
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Selon ces hypothèses, il est possible de représenter cet onduleur par un modèle bond graph simplement représenté par trois transformateurs modulés dont les gains sont donnés par la commande à Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI). La Figure 3.7 illustre cette modélisation.

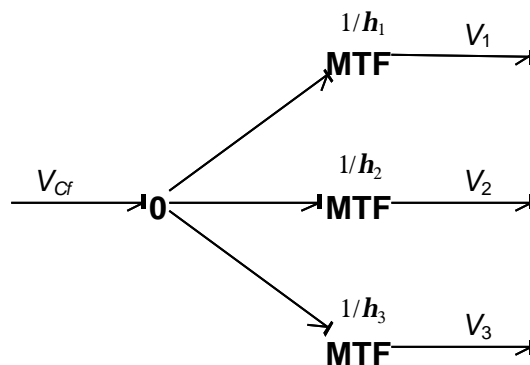


Figure 3.7. Modèle bond graph d'onduleur.

L'intérêt de cette modélisation réside dans sa simplicité bien que permettant de représenter de façon fidèle le comportement instantané ou moyen de l'onduleur. En complexifiant le calcul des ordres logiques de commande, des phénomènes de retards à la commutation peuvent si besoin être considérés.

3.2.2.3. La commande en MLI

La Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) construit les signaux de commande pour l'onduleur. La MLI peut être modélisée en valeur moyenne ou en valeur instantanée. En valeur instantanée, les sorties de la MLI correspondent aux états de conduction de chaque bras. La MLI construit des impulsions dont la durée est liée au gain de la commande.

Par exemple, si nous utilisons une MLI régulière symétrique où les impulsions sont centrées au milieu de la période de commutation, la construction des signaux de commutation est décrite à la Figure 3.8.

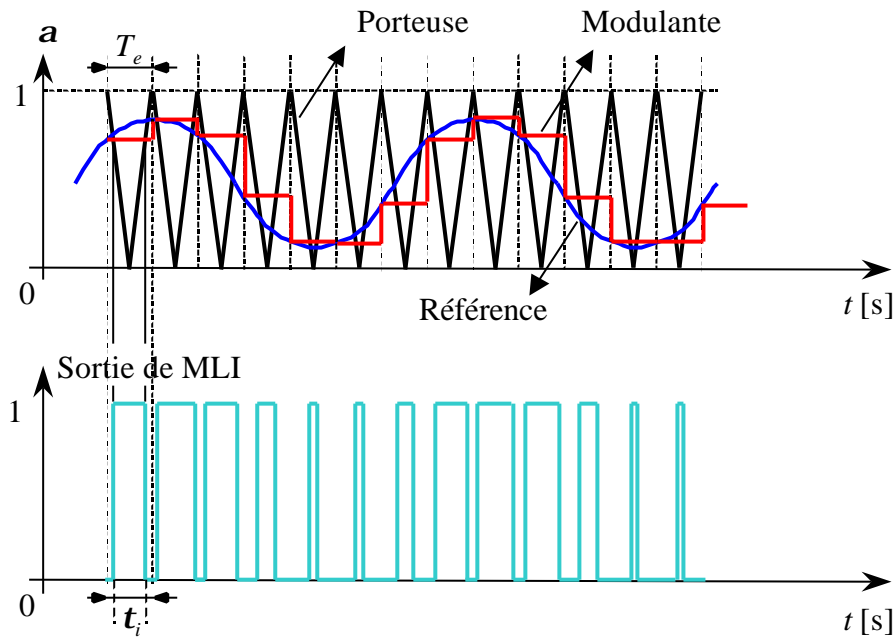


Figure 3.8. MLI régulière symétrique.

Le paramètre T_e représente la période de commutation de la MLI. Dans notre modèle, la fréquence de la porteuse est fixée à 1 kHz impliquant une période $T_e = 1$ ms.

La MLI régulière symétrique permet un calcul analytique des temps de conduction (τ_i), où, ce qui est équivalent, des rapports cycliques (a_i) :

$$\begin{aligned} \tau_i &= \frac{T_e}{2} + \frac{T_e}{V_c} V_i \\ a_i &= \frac{\tau_i}{T_e} = \frac{1}{2} + \frac{V_i}{V_c} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ainsi, il est aisé de passer d'un modèle d'onduleur MLI en valeur instantané à un modèle en valeur moyenne, en envoyant aux trois transformateurs modulés respectivement les ordres logiques de conduction (h_i) ou les rapports cycliques (a_i).

3.2.3. La transformation de Park

La transformation de Park nous permet de transformer les grandeurs d'un système triphasé en un système diphasé équivalent. Cette transformation est basée sur le théorème de Ferrari [Rob-96] :

une armature polyphasée répartie symétriquement dans l'espace et parcourue par des courants polyphasés équilibrés crée une force magnéto motrice (f.m.m) tournante unique.

La Figure 3.9 illustre la relation entre les grandeurs d'un système triphasé et d'un système diphasé équivalent.

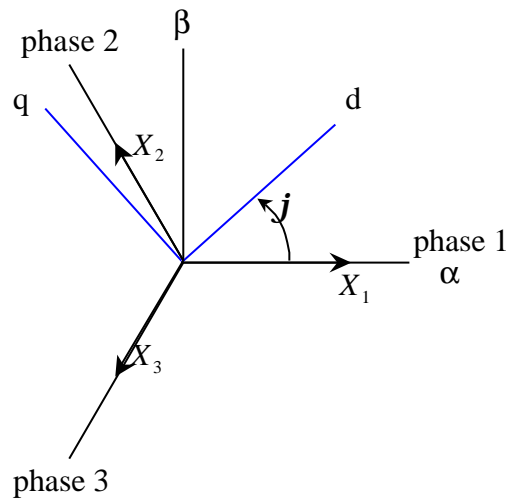


Figure 3.9. Relation entre un système triphasé et un système diphasé équivalent.

Il existe plusieurs transformations de Park mais celle qui a été utilisée dans la suite de ce travail est la transformation qui conserve la puissance. Cette dernière est définie ci-après :

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos j & \cos\left(j - \frac{2p}{3}\right) & \cos\left(j - \frac{4p}{3}\right) \\ -\sin j & -\sin\left(j - \frac{2p}{3}\right) & -\sin\left(j - \frac{4p}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

où j indique l'angle entre l'axe d et la phase 1 du stator.

Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}[j] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

où

$$\mathbf{P}[\mathbf{j}] = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos \mathbf{j} & \cos\left(\mathbf{j} - \frac{2\mathbf{p}}{3}\right) & \cos\left(\mathbf{j} - \frac{4\mathbf{p}}{3}\right) \\ -\sin \mathbf{j} & -\sin\left(\mathbf{j} - \frac{2\mathbf{p}}{3}\right) & -\sin\left(\mathbf{j} - \frac{4\mathbf{p}}{3}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Le terme $\mathbf{P}[\mathbf{j}]$ indique la matrice de changement de base. Pour obtenir les grandeurs du système triphasé, nous utilisons l'inverse de cette matrice, qui est en fait sa matrice transposée.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^T[\mathbf{j}] \begin{bmatrix} X_d \\ X_q \\ X_0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Pour obtenir les tensions dans le repère fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) lié au stator à partir des tensions triphasées, nous pouvons utiliser la transformation de Park avec $\mathbf{j} = 0$. L'équation (3.10) présente cette transformation.

$$\begin{bmatrix} V_{sa} \\ V_{sb} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \cos 0 & \cos \frac{2\mathbf{p}}{3} & \cos \frac{4\mathbf{p}}{3} \\ \sin 0 & \sin \frac{2\mathbf{p}}{3} & \sin \frac{4\mathbf{p}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

En bond graph, cette transformation peut être représentée par des transformateurs modulés dont les gains dépendent de l'angle de transformation \mathbf{j} (voir Figure 3.10). Le bloc *Calcul* évalue l'angle \mathbf{j} nécessaire à la détermination des gains des transformateurs modulés (MTF). Dans la Figure 3.10 la transformation de Park est décomposée en une transformation de concordia (1,2,3) – (\mathbf{a}, \mathbf{b}) et une rotation (\mathbf{a}, \mathbf{b}) – (d, q) . Nous utilisons les sorties V_{salp} et V_{sbet} (resp. V_{sd} et V_{sq}) pour la machine asynchrone modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) (resp. le repère (d, q)) en connectant les autres sorties non utilisées avec des sources de flux de valeur nulle.

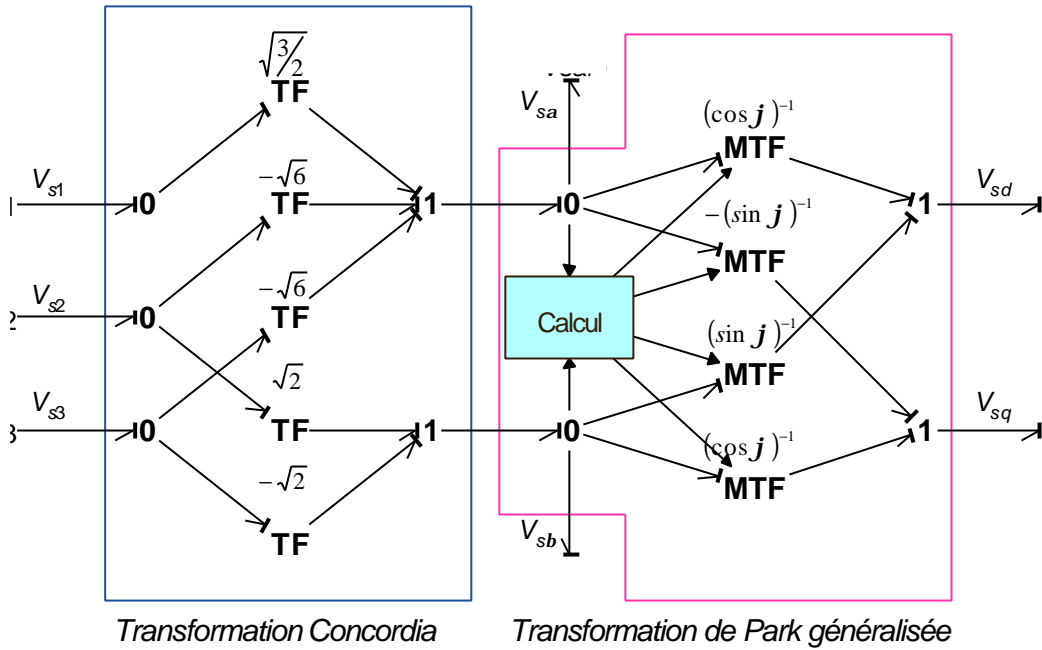
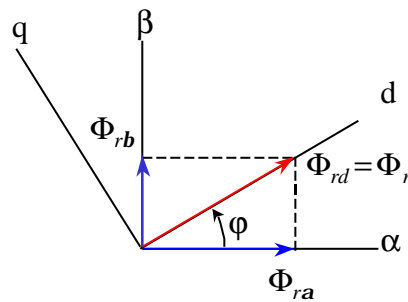


Figure 3.10. Transformation de Park généralisée.

3.2.4. La commande vectorielle

Pour réguler le système, nous appliquons une commande vectorielle de couple [Rob-96] [Loc-99]. Cette commande nous permet de réguler indépendamment le flux rotorique et le couple électromagnétique. Pour appliquer cette commande, toutes les grandeurs sont transformées dans le repère (d,q) lié au flux rotorique. La Figure 3.11 montre le changement de repère où j indique l'angle entre l'axe (d,q) et l'axe initial.


 Figure 3.11. Changement de repère d'axe (d,q) lié au flux rotorique.

Dans ce nouveau repère, nous considérons $\Phi_{rq}=0$. Le flux rotorique Φ_r et l'angle j peuvent être calculés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{rd} = \Phi_r &= \sqrt{\Phi_{ra}^2 + \Phi_{rb}^2} \\ j &= \arctan \frac{\Phi_{rb}}{\Phi_{ra}} \end{aligned} \quad (3.11)$$

La matrice de transformation est définie comme par l'équation (3.12) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{j} & \sin \mathbf{j} \\ -\sin \mathbf{j} & \cos \mathbf{j} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

La relation entre les grandeurs dans ces deux repères est présentée ci-après.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{X} \rangle_{d,q} &= \mathbf{A} \langle \mathbf{X} \rangle_{a,b} \\ \langle \mathbf{X} \rangle_{a,b} &= \mathbf{A}^T \langle \mathbf{X} \rangle_{d,q} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nous supposons que les flux rotoriques sont mesurables. Pour cette raison, nous utilisons directement leur valeur réelle dans les équations.

Dans la commande vectorielle classique, il y a 3 régulateurs dont 2 sont en cascade. Le premier sert à réguler le flux rotorique, qui est en cascade avec la régulation du courant statorique I_{sd} . Le dernier régule le courant I_{sq} . Dans notre cas, nous n'utilisons pour simplifier que 2 régulateurs de courant (voir Figure 3.12). Nous choisissons des régulateurs de type PI pour obtenir une erreur nulle en régime permanent. Les paramètres des régulateurs sont déterminés pour compenser les pôles dominants d'une machine asynchrone.

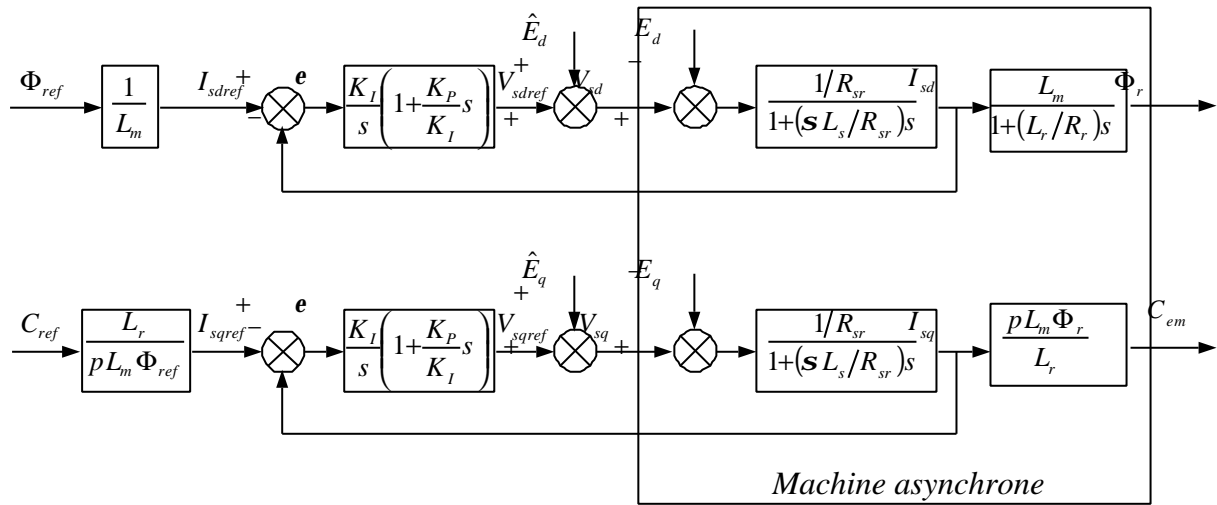


Figure 3.12. Structure de la commande vectorielle.

où

$$\mathbf{s} = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} \quad (3.14)$$

$$R_{sr} = R_s + \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
E_d &= \frac{L_m}{L_r} R_r \Phi_{rd} + \mathbf{s}L_s \mathbf{w}_{js} I_{sq} \\
E_q &= -\frac{L_m}{L_r} \mathbf{w} \Phi_{rd} - \mathbf{s}L_s \mathbf{w}_{js} I_{sd}
\end{aligned}
\tag{3.16}$$

Les forces électromotrices estimées \hat{E}_d et \hat{E}_q sont ajoutés dans la commande pour annuler les termes physiques E_d et E_q . Nous considérons que le pôle électrique de la machine dans le repère d est le même que celui du repère q . Pour compenser ce pôle électrique de la machine, nous obtenons la relation :

$$K_p = \frac{\mathbf{s}L_s}{R_{sr}} K_I \tag{3.17}$$

où la valeur de K_I est choisie pour placer le pôle en boucle fermée suivant la valeur de dynamique désirée.

Après avoir déterminé les valeurs de référence des tensions statoriques dans le repère (d,q) lié au flux rotor, nous appliquons la transformation de Park inverse pour repasser dans le repère fixe (1,2,3). Nous pouvons alors calculer les rapports cycliques des 3 bras d'onduleur qui seront transférés à la MLI. Pour synchroniser la MLI avec la commande vectorielle, cette dernière doit être échantillonnée à la même fréquence que celle de la porteuse. Le calcul de la commande est donc réalisé toutes les 1 ms, ce qui présente aussi l'avantage d'accélérer la simulation.

3.2.5. Modélisation Bond Graph d'une machine asynchrone

Trois modèles différents de machine sont décrits selon la méthodologie Bond Graph dans ce paragraphe. Les deux premiers correspondent à des représentations classiques dans les axes fixes (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . Enfin, nous présentons une représentation "atypique" d'une machine asynchrone dans un repère de Park lié au vecteur tension. Nous verrons par la suite que ce modèle est linéarisable et peut être exploité par la suite pour l'analyse du système de traction.

3.2.5.1. Représentation générale

Une machine asynchrone peut être représentée par trois enroulements identiques au stator. Le rotor à cage est ici également caractérisé par trois enroulements symétriques. Nous supposons de plus que la machine n'est pas saturée. L'équation de la machine s'écrit alors sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_s &= R_s \mathbf{I}_s + \frac{d\mathbf{F}_s}{dt} \\ \mathbf{0} &= R_r \mathbf{I}_r + \frac{d\mathbf{F}_r}{dt}\end{aligned}\quad (3.18)$$

où

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \end{bmatrix}, \mathbf{I}_{s,r} = \begin{bmatrix} I_{s,r1} \\ I_{s,r2} \\ I_{s,r3} \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{F}_{s,r} = \begin{bmatrix} \Phi_{s,r1} \\ \Phi_{s,r2} \\ \Phi_{s,r3} \end{bmatrix}$$

3.2.5.2. Représentation électrique diphasée d'une machine asynchrone

Si nous utilisons une machine asynchrone diphasée, nous sommes obligés d'utiliser la transformation de Park présentée précédemment. Nous appliquons une transformation de Park $\mathbf{P}[\mathbf{j}_s]$ au stator et une autre de $\mathbf{P}[\mathbf{j}_s - \mathbf{q}]$ au rotor [Rob-96], où \mathbf{j}_s représente l'angle du repère d du stator.

Au stator, en appliquant l'équation (3.9), l'équation (3.18) devient :

$$\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s] \mathbf{V}_{s(d,q)} = R_s \mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s] \mathbf{I}_{s(d,q)} + \mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s] \frac{d\mathbf{F}_{s(d,q)}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s]}{dt} \mathbf{F}_{s(d,q)} \quad (3.19)$$

En multipliant à gauche par $\mathbf{P}[\mathbf{j}_s]$, nous obtenons :

$$\mathbf{V}_{s(d,q)} = R_s \mathbf{I}_{s(d,q)} + \frac{d\mathbf{F}_{s(d,q)}}{dt} + \mathbf{P}[\mathbf{j}_s] \frac{d\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s]}{dt} \mathbf{F}_{s(d,q)} \quad (3.20)$$

Notons que :

$$\mathbf{P}[\mathbf{j}_s] \frac{d\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s]}{dt} = \mathbf{w}_s \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

où \mathbf{w}_s représente la pulsation du repère de Park ($\mathbf{w}_s = \frac{d\mathbf{j}_s}{dt}$).

Du côté rotor, en appliquant la même méthode, nous obtenons :

$$R_r \mathbf{I}_{r(d,q)} + \frac{d\mathbf{F}_{r(d,q)}}{dt} + \mathbf{P}[\mathbf{j}_s - \mathbf{q}] \frac{d\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s - \mathbf{q}]}{dt} \mathbf{F}_{s(d,q)} = 0 \quad (3.22)$$

avec

$$\mathbf{P}[\mathbf{j}_s - \mathbf{q}] \frac{d\mathbf{P}^T[\mathbf{j}_s - \mathbf{q}]}{dt} = \mathbf{w}_r \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Le terme w_r associé à la pulsation rotorique est défini comme suit :

$$w_r = w_s - w = \frac{dj}{dt} - \frac{dq}{dt} = \frac{d(j_s - q)}{dt} \quad (3.24)$$

Nous pouvons donc représenter la machine asynchrone diphasée comme :

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s I_{sd} + \frac{d\Phi_{sd}}{dt} - w_s \Phi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s I_{sq} + \frac{d\Phi_{sq}}{dt} + w_s \Phi_{sd} \\ 0 &= R_r I_{rd} + \frac{d\Phi_{rd}}{dt} - w_r \Phi_{rq} \\ 0 &= R_r I_{rq} + \frac{d\Phi_{rq}}{dt} + w_r \Phi_{rd} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Si nous voulons décrire l'équation (3.25) en fonction des courants statoriques et rotoriques, nous obtenons :

$$\begin{aligned} V_{sd} &= R_s I_{sd} + L_s \frac{dI_{sd}}{dt} + L_m \frac{dI_{rd}}{dt} - w_s \Phi_{sq} \\ V_{sq} &= R_s I_{sq} + L_s \frac{dI_{sq}}{dt} + L_m \frac{dI_{rq}}{dt} + w_s \Phi_{sd} \\ 0 &= R_r I_{rd} + L_m \frac{dI_{sd}}{dt} + L_r \frac{dI_{rd}}{dt} - w_r \Phi_{rq} \\ 0 &= R_r I_{rq} + L_m \frac{dI_{sq}}{dt} + L_r \frac{dI_{rq}}{dt} + w_r \Phi_{rd} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le circuit électrique correspondant de l'axe q est représenté à la Figure 3.13. Le circuit de l'axe d est quasiment le même. Il suffit de changer les variables avec celles de l'axe d et d'inverser la polarité des sources liées aux pulsations.

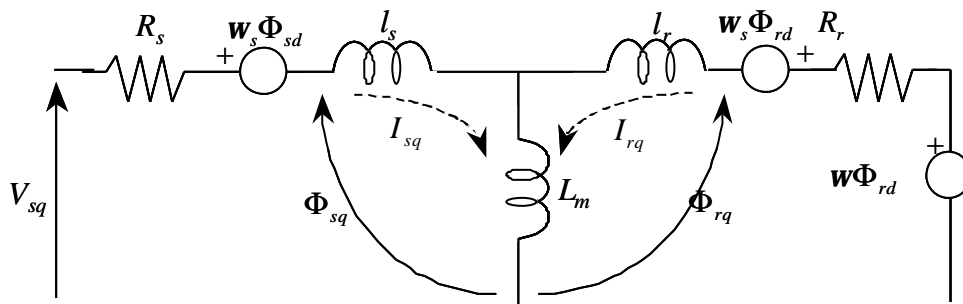


Figure 3.13. Circuit équivalent de l'axe q d'une machine asynchrone diphasée.

Les termes l_s et l_r représentent les inductances de fuites du stator et du rotor. Nous avons la relation :

$$\begin{aligned} l_s &= L_s - L_m \\ l_r &= L_r - L_m \end{aligned} \quad (3.27)$$

où

L_s : l'inductance cyclique du stator

L_r : l'inductance cyclique du rotor

L_m : l'inductance magnétisante.

Dans le cas particulier où la machine asynchrone est modélisée dans le repère fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , nous avons $\mathbf{j}_s = 0$ (l'axe d est confondu avec la phase 1 du stator), ce qui revient à $\mathbf{w}_s = 0$. L'équation (3.25) devient :

$$\begin{aligned} V_{sa} &= R_s I_{sa} + \frac{d\Phi_{sa}}{dt} \\ V_{sb} &= R_s I_{sb} + \frac{d\Phi_{sb}}{dt} \\ 0 &= R_r I_{ra} + \frac{d\Phi_{ra}}{dt} + \mathbf{w} \Phi_{rb} \\ 0 &= R_r I_{rb} + \frac{d\Phi_{rb}}{dt} - \mathbf{w} \Phi_{ra} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le circuit équivalent de la machine asynchrone modélisée ainsi dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) est présenté à la Figure 3.14.

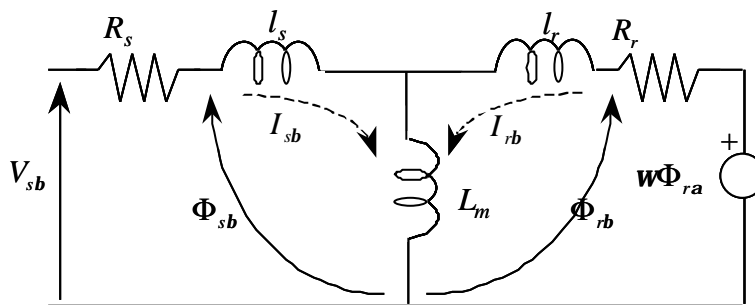


Figure 3.14. Circuit équivalent de l'axe \mathbf{b} d'une machine asynchrone diphasée.

Nous avons modélisé cette machine de différentes manières en diphasé. Les modèles sont examinés dans les parties suivantes.

3.2.5.3. Modèle 1 : MAS modélisée dans le repère (a,b) en utilisant des éléments multiports

Dans une machine asynchrone, les couplages entre les grandeurs statoriques et rotoriques sont représentés par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \Phi_s \\ \Phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s \\ I_r \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Dans le formalisme bond graph, cette relation est modélisée par un élément I -multiport (voir Figure 3.15).

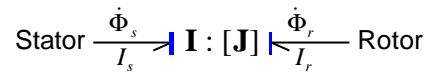


Figure 3.15. Élément multiport représentant le couplage stator-rotor.

avec

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} L_s & L_m \\ L_m & L_r \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

La conversion électromécanique est représentée par l'équation (3.31), où p représente le nombre de paires de pôles. Nous pouvons la modéliser en utilisant des gyrateurs modulés où les gains sont des flux rotoriques. Cette conversion montre la non linéarité de la machine asynchrone.

$$\begin{aligned} C_{em} &= C_{ema} + C_{emb} = p (\Phi_{rb} I_{ra} - \Phi_{ra} I_{rb}) \\ E_{ra,b} &= \pm p \Phi_{rb,a} \Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

La Figure 3.16 montre le bond graph associé à ce type de modélisation. La vitesse électrique w est associée à la vitesse de rotation mécanique Ω ($w = p \Omega$).

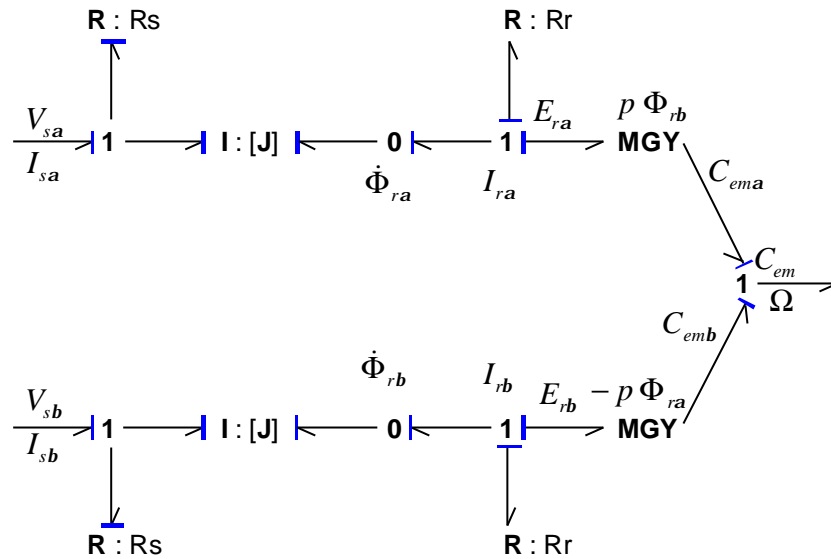
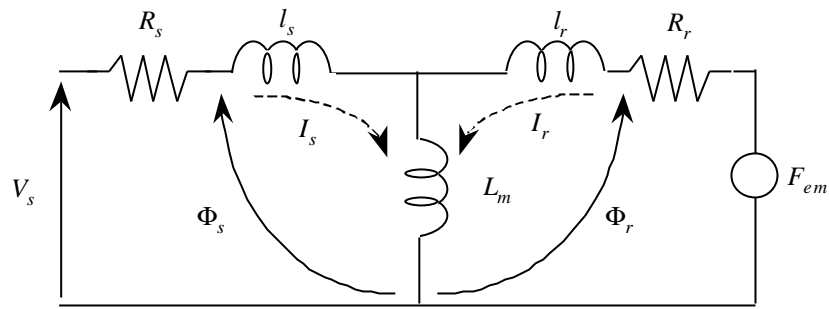


Figure 3.16. Bond graph de la machine asynchrone modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments multiports.

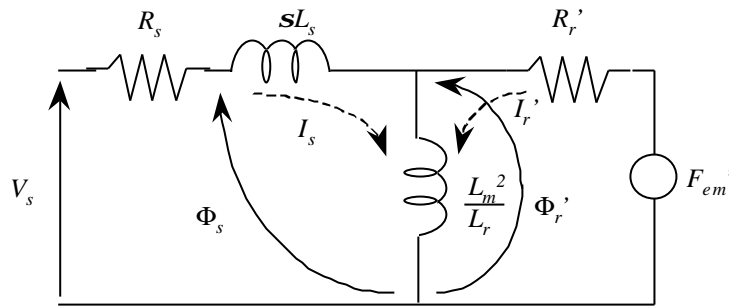
3.2.5.4. Modèle 2 : MAS modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments monoports

Le modèle de la machine asynchrone que nous avons exposé précédemment fait apparaître les inductances cycliques stator, rotor et magnétisante (L_s , L_r et L_m). Or, physiquement, les modes électriques rapides de cette machine sont associés aux inductances de fuites (l_s et l_r) et les modes électriques "moyens" à l'inductance magnétisante (L_m). La relation entre les inductances de fuites et inductances cycliques est donnée par l'équation (3.27). Pour faire apparaître cette séparation, nous avons été conduits à reprendre le circuit initial de la machine asynchrone présenté à la Figure 3.14 et à le ramener au stator (voir Figure 3.17). A partir de celui-ci, nous obtenons le modèle bond graph monoport pour chaque repère de la machine asynchrone (Figure 3.17.(c)).

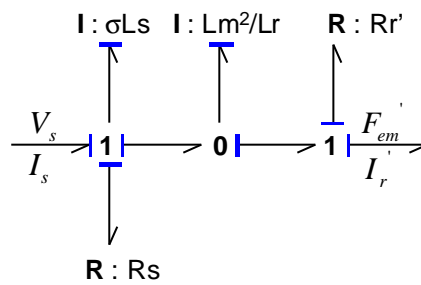
Le terme F_{em} correspond au terme $-w \Phi_{rb}$ pour l'axe \mathbf{a} ou $+w \Phi_{ra}$ pour l'axe \mathbf{b} de l'équation (3.28). Le paramètre \mathbf{s} est calculé à partir de l'équation (3.14).



(a)



(b)



(c)

Figure 3.17. Modélisation d'un axe de la machine asynchrone avec les inductances de fuite :
 (a) circuit initial, (b) circuit équivalent ramené au stator et (c) bond graph associé.

Les relations entre les grandeurs dans le modèle initial et le modèle équivalent ramené au stator sont définies ci-après :

$$\begin{aligned}
 R_r' &= \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r \\
 F_{em}' &= \frac{L_m}{L_r} F_{em}' \\
 I_r' &= \frac{L_r}{L_m} I_r \\
 \Phi_r' &= \frac{L_m}{L_r} \Phi_r
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Le bond graph complet de la machine asynchrone modélisée avec les inductances de fuites totalisées au stator est présenté à la Figure 3.18. Ce modèle est plus simple et finalement plus physique que le précédent. Il est également identifiable à partir des essais classiques réalisés par des mesures prélevées au stator de la machine.

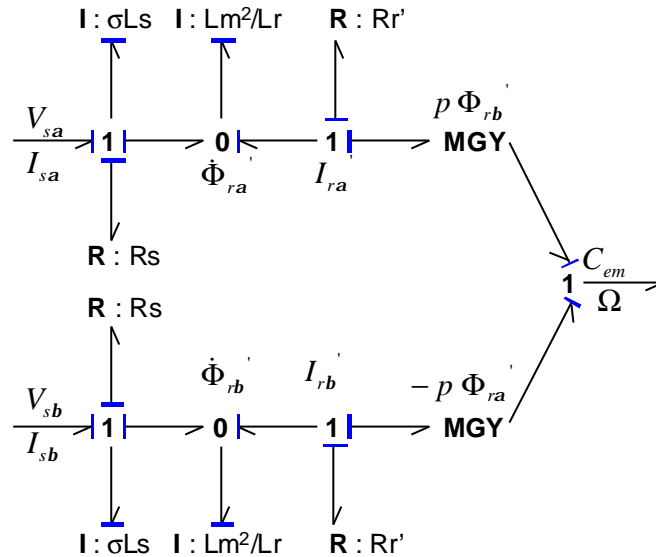


Figure 3.18. Bond graph de la machine asynchrone modélisée dans le repère (a,b) avec inductances de fuites totalisées au stator.

3.2.5.5. Modèle 3: MAS modélisée dans le repère (d,q) lié au vecteur de tension stator

Les modélisations présentées dans les sections précédentes sont liées au repère fixe (a,b) . Dans les analyses qui vont suivre, notamment lors de la simplification du modèle de cette chaîne de traction, qui sera présentée dans le Chapitre 4, nous rencontrons un problème avec ce type de modélisation. En effet, cette étude nécessite un modèle linéarisable autour de son point de fonctionnement (modèle en petit signal). Or, dans le modèle de la machine asynchrone représentée dans le repère (a,b) , toutes les grandeurs sont alternatives et leur valeur nominale (point de fonctionnement) est nulle. Nous ne pouvons donc pas linéariser la machine asynchrone dans ce repère.

Pour cette raison, il semble judicieux de modéliser la machine dans un repère tournant. En effet, dans ce cas, les variables (effort, flux) véhiculées par le Bond Graph évoluent de façon continue et ce modèle peut être linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Par ailleurs, nous avons choisi d'éviter l'utilisation d'une transformation de Park non linéaire $(a,b) - (d,q)$ qui fait intervenir des termes en cosinus, sinus. Ainsi, seule une orientation du repère de Park selon le vecteur tension stator permet d'obtenir un modèle linéarisable sans véritable transformation de Park.

A partir de l'équation (3.26), nous pouvons obtenir les équations de la machine asynchrone dans ce repère (d,q) lié au vecteur tension stator, avec fuites magnétiques ramenées au stator :

$$\begin{aligned}
 V_{sd} &= R_s \cdot I_{sd} - \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sq} + \mathbf{s} \cdot L_s \cdot \frac{dI_{sd}}{dt} + \frac{L_m^2}{L_r} \left(\frac{dI_{sd}}{dt} + \frac{dI_{rd}}{dt} \right) \\
 0 &= R_s \cdot I_{sq} + \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sd} + \mathbf{s} \cdot L_s \cdot \frac{dI_{sq}}{dt} + \frac{L_m^2}{L_r} \left(\frac{dI_{sq}}{dt} + \frac{dI_{rq}}{dt} \right) \\
 0 &= \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r \cdot I_{rd}' - (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}) \cdot \Phi_{rq}' + \frac{L_m^2}{L_r} \left(\frac{dI_{sd}}{dt} + \frac{dI_{rd}}{dt} \right) \\
 0 &= \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r \cdot I_{rq}' + (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}) \cdot \Phi_{rd}' + \frac{L_m^2}{L_r} \left(\frac{dI_{sq}}{dt} + \frac{dI_{rq}}{dt} \right)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

où

$$\begin{aligned}
 V_{sd} &= \sqrt{V_{sa}^2 + V_{sb}^2} \\
 V_{sq} &= 0 \\
 \mathbf{w}_s &= \frac{d\mathbf{j}_s}{dt}
 \end{aligned}$$

Les équations (3.33) dépendent alors de 2 entrées : l'amplitude (V_{sd}) et la pulsation du vecteur tension stator (\mathbf{w}_s). Cette pulsation peut être déterminée si l'on connaît la phase du vecteur tension stator \mathbf{j}_s . De même, l'amplitude du vecteur tension peut être exprimée à partir de la tension continue d'entrée d'onduleur. La valeur de la phase du vecteur tension stator \mathbf{j}_s peut être calculée, soit dans le bloc *Calcul* de la partie *Transformation de Park généralisée* (voir Figure 3.10) à partir de la connaissance de V_{sa} et V_{sb} , soit dans la commande en utilisant les rapports cycliques obtenus. Pour obtenir la pulsation \mathbf{w}_s , il suffit de dériver l'angle \mathbf{j}_s par rapport au temps.

Remarque importante : l'existence de la pulsation \mathbf{w}_s , dérivée de la phase du vecteur tension stator limite l'utilisation d'un tel modèle à une vision en valeur moyenne de l'onduleur de tension. En effet, si la phase varie brutalement, comme c'est le cas si un modèle instantané d'onduleur est considéré, elle n'est pas dérivable et ce modèle n'est alors pas valable.

Dans ce modèle, toutes les grandeurs sont continues. Nous pouvons donc modéliser l'onduleur de tension par un seul *MTF* dont le rapport cyclique \mathbf{h}_d est calculé à partir des relations du Tableau 3.2.

Tableau 3.2. Calcul des tensions statoriques à la sortie de l'onduleur.

Modèle d'onduleur	Les tensions statoriques	
	Modélisation dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b})	Modélisation dans le repère (d, q) lié au vecteur tension statorique
$V_1 = \left(\frac{2}{3} \mathbf{a}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_3 \right) V_{cf}$	$V_{sa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(V_1 - \frac{1}{2} V_2 - \frac{1}{2} V_3 \right)$	$V_{sd} = \sqrt{V_{sa}^2 + V_{sb}^2}$
$V_1 = \left(\frac{2}{3} \mathbf{a}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_2 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_3 \right) V_{cf}$	$= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\mathbf{a}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{a}_3 \right) V_{cf}$	$= V_{cf} \sqrt{\frac{1}{3} \left((\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2 + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)^2 + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^2 \right)}$
$V_1 = \left(\frac{2}{3} \mathbf{a}_3 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_1 - \frac{1}{3} \mathbf{a}_2 \right) V_{cf}$	$V_{sb} = \sqrt{\frac{1}{2}} (V_2 - V_3) = \sqrt{\frac{1}{2}} (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3) V_{cf}$	$= \mathbf{h}_d V_{cf}$

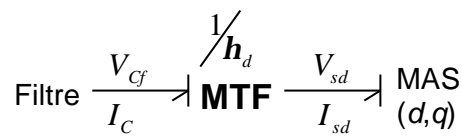


Figure 3.19. Modèle simple du convertisseur pour une machine asynchrone lié au repère (d, q) lié au vecteur tension statorique

Compte tenu de la conservation de la puissance, le courant d'entrée de convertisseur s'écrit alors :

$$I_c = \mathbf{h}_d I_{sd} \tag{3.34}$$

Le modèle bond graph de la machine asynchrone est présenté à la Figure 3.20.

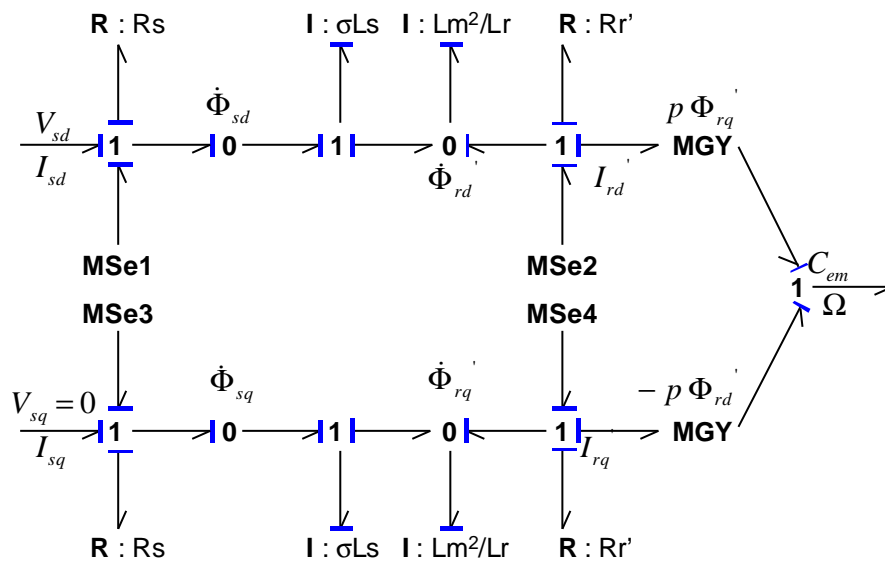


Figure 3.20. Modèle de la machine asynchrone lié au vecteur tension stator.

Les termes **MSe** dans la Figure 3.20 sont associés à :

$$\begin{aligned}
 MSe_1 &= \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sq} \\
 MSe_2 &= \mathbf{w}_s \cdot \Phi_{rq}' \\
 MSe_3 &= -\mathbf{w}_s \cdot \Phi_{sd} \\
 MSe_4 &= -\mathbf{w}_s \cdot \Phi_{rd}'
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

où

$$\Phi_r' = \frac{L_m}{L_r} \Phi_r \tag{3.36}$$

3.2.6. La chaîne de transmission mécanique

La chaîne de transmission mécanique [Loc-99] est constituée par deux accouplements : l'accouplement moteur et un accouplement souple appelé Jacquemin. Un réducteur à trois plateaux est inséré entre ces deux accouplements. Ces différents éléments sont représentés par différentes inerties, raideur et souplesse (éléments Bond Graph R , C , I). En particulier, la masse de la chaîne de traction est ramenée à travers une inertie équivalente (I_{eq}). La Figure 3.21 montre le synoptique de cette chaîne [Loc-99]. Le bond graph associé à cette transmission est présenté à la Figure 3.22. Dans notre étude, nous avons choisi de ne pas considérer le contact roue-rail et de nous limiter à un contact sans glissement. Précisons que la prise en compte plus physique du phénomène de contact est possible, bien que complexe, et peut se faire à partir d'une relation non linéaire entre la force transmise à la roue et la vitesse relative de glissement roue – rail [Loc-99]. La modularité du Bond Graph peut permettre très facilement de passer d'un niveau de modélisation à l'autre. Sous ces hypothèses, le modèle de la transmission mécanique est d'ordre 11. La principale fréquence de résonance de cette chaîne mécanique est de 18.02 Hz [Loc-99].

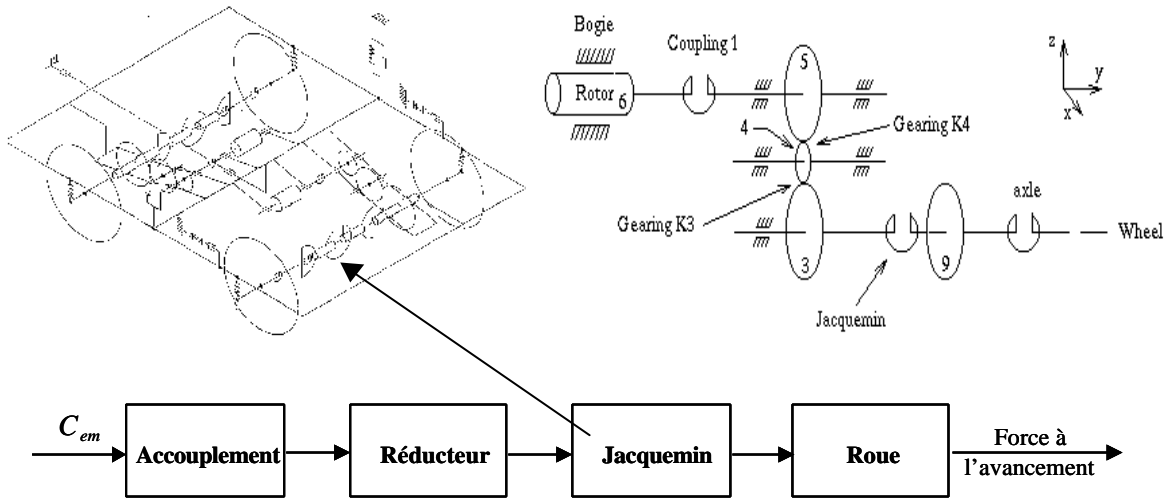


Figure 3.21. Synoptique de la chaîne de transmission mécanique.

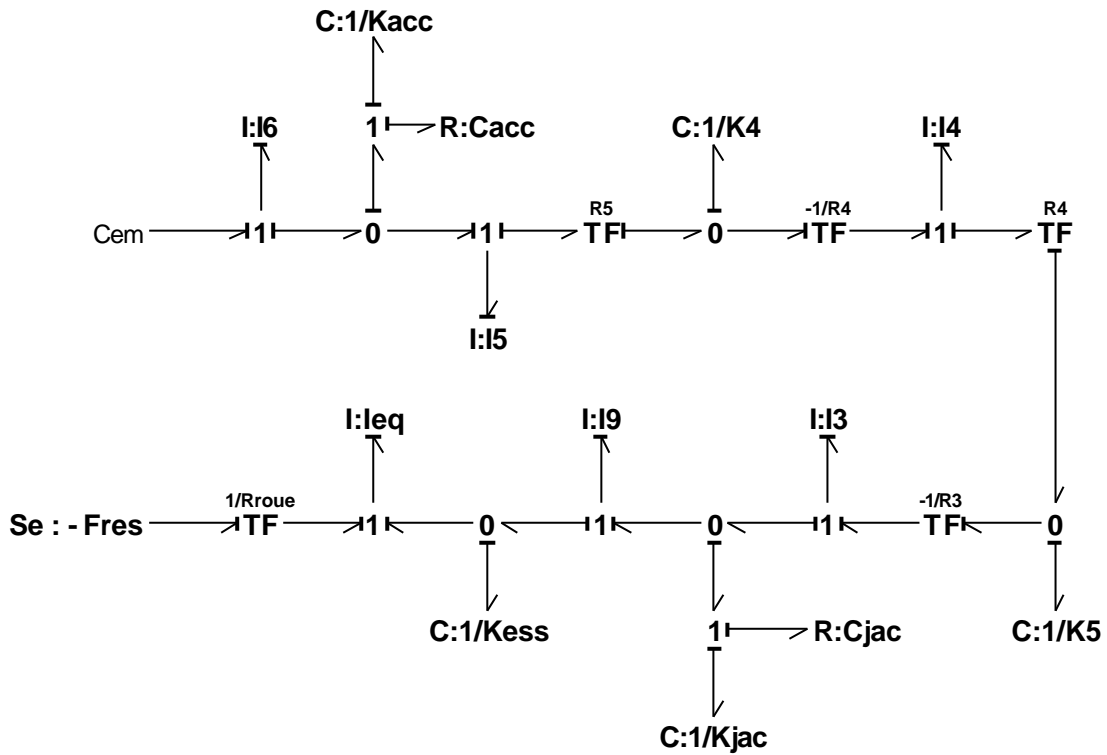


Figure 3.22. Bond graph de la chaîne de transmission mécanique.

3.3. Validation par simulations

Pour valider notre modélisation, nous réalisons plusieurs simulations. Nous examinons deux cas distincts :

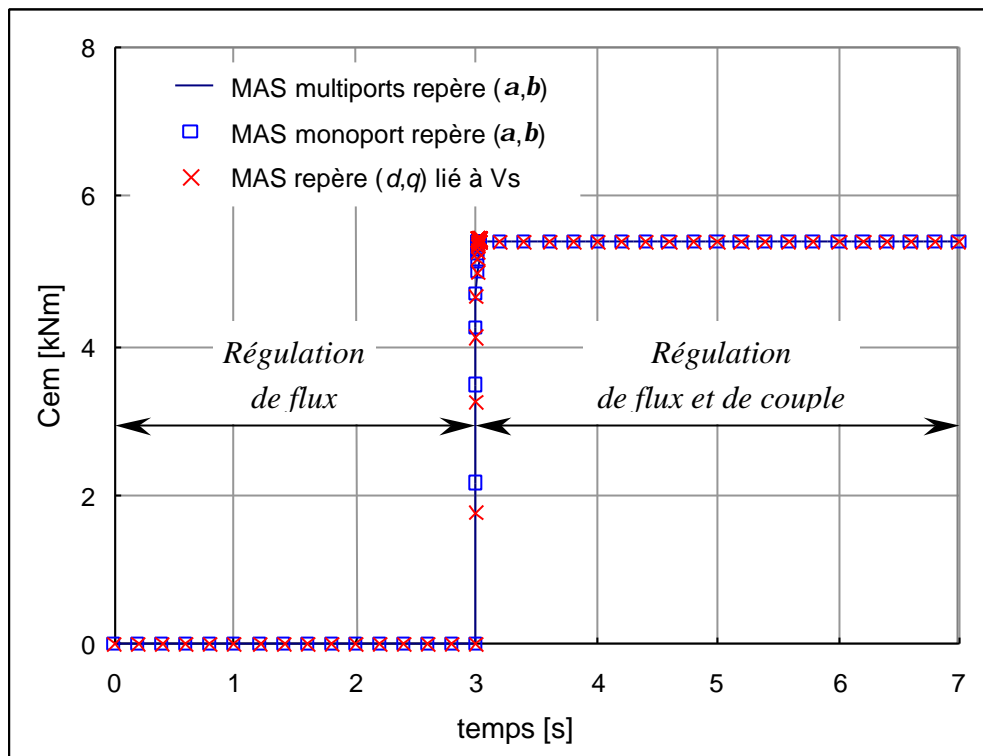
- Le cas d'un fonctionnement normal, qui correspond à un démarrage normal de cette chaîne.
- Le cas d'un fonctionnement dégradé représenté par le court-circuit d'un bras de l'onduleur (court-circuit symétrique). Ce type de fonctionnement avait été étudié en détail dans [Loc-99].

Par ailleurs, nous comparons dans ces essais le comportement de la chaîne de traction complète en considérant les 3 modèles de machine exposés précédemment.

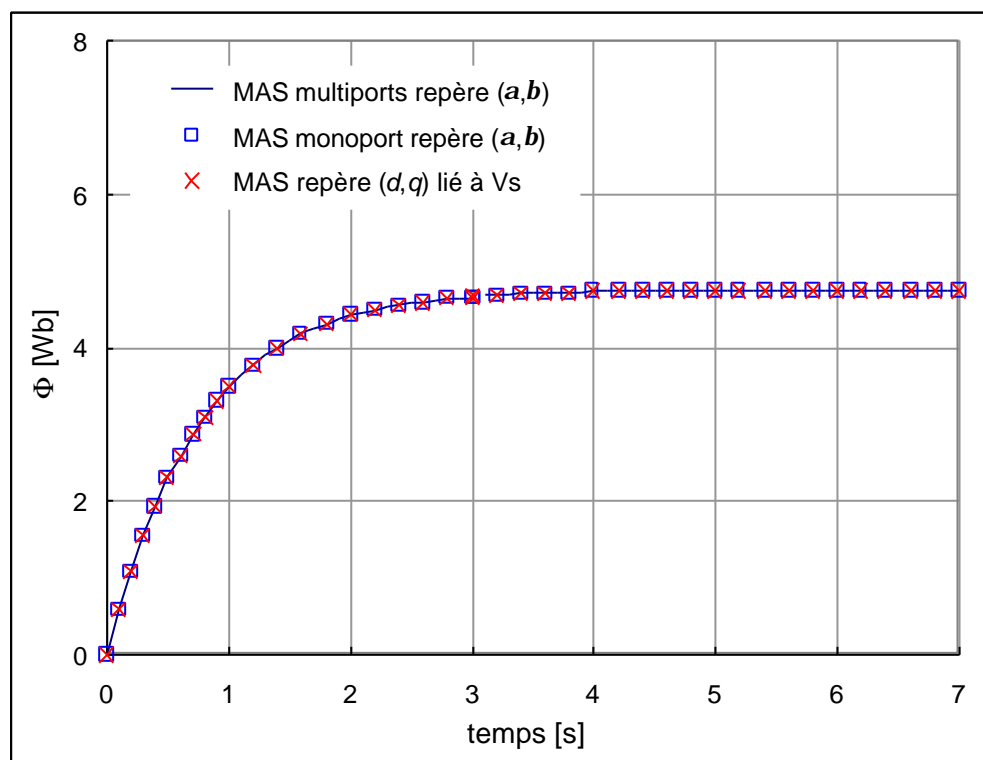
Tous les modèles sont implantés sous 20 Sim. Les essais sont effectués en utilisant la MLI modélisée en valeur moyenne, car le troisième modèle de machine (modèle de Park orienté selon le vecteur tension) n'est pas compatible avec une MLI en valeur instantanée (voir la remarque de la partie 3.2.5.5).

3.3.1. Fonctionnement normal : cas d'un démarrage

Cet essai représente le comportement transitoire de la chaîne. Nous passons par 2 régimes de régulation : la régulation du flux rotorique (à couple nul) jusqu'à arriver à la valeur désirée ($t < 3$ s) puis la régulation du couple électromagnétique ($t \geq 3$ s). La Figure 3.23 présente le couple électromagnétique et le flux rotorique dans ce mode de fonctionnement. Les valeurs de consigne sont de 4.76 Wb pour le flux rotorique et de 5.4 kNm pour le couple électromagnétique. Nous constatons que les modèles ont le même comportement pendant le démarrage.



(a)



(b)

Figure 3.23. Cas d'un démarrage : (a) couple électromagnétique, flux rotorique.

3.3.2. Fonctionnement dégradé : cas d'un court-circuit symétrique

Le court-circuit symétrique correspond à un court-circuit d'un bras de l'onduleur (voir Figure 3.24). Dans la simulation, ce défaut est réalisé en court-circuitant la capacité du filtre.

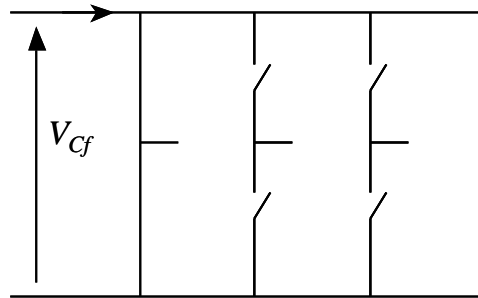
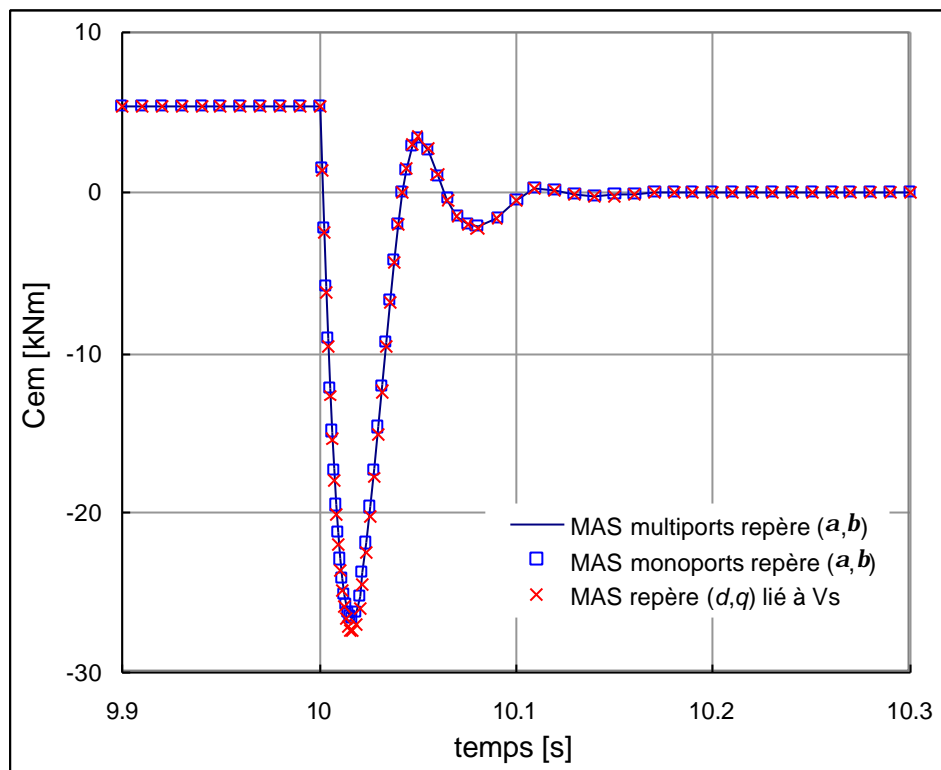


Figure 3.24. Court circuit symétrique.

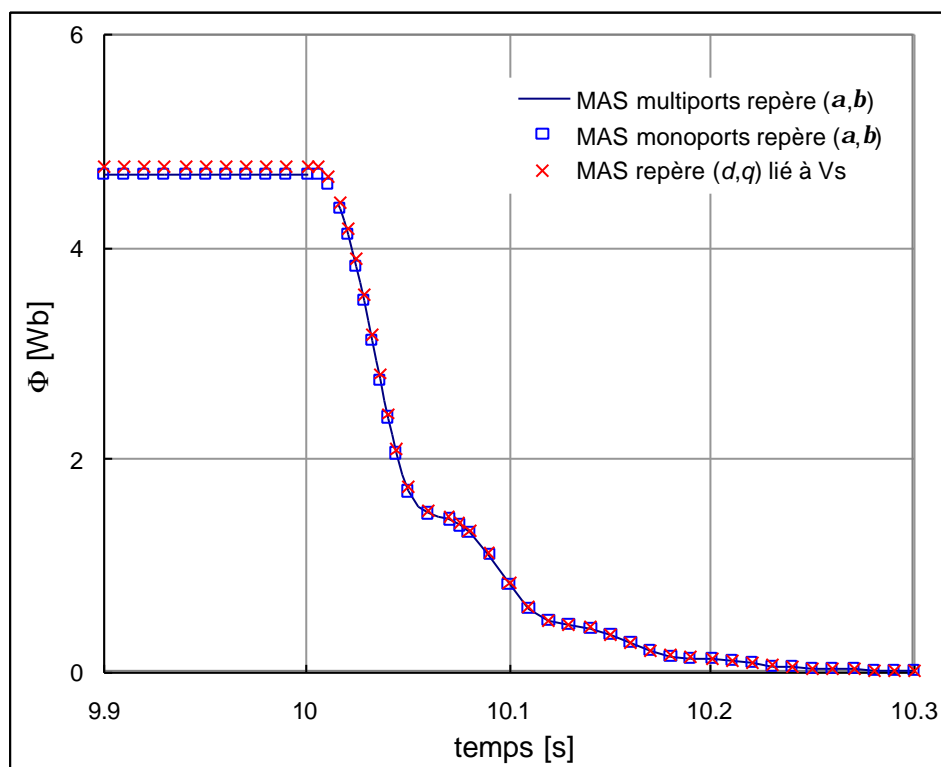
La Figure 3.25 présente le couple électromagnétique et le flux rotorique dans le cas d'un court-circuit symétrique. Nous introduisons cette perturbation quand nous sommes en régime permanent, déterminé par $\Phi_{ref} = 4.76 \text{ Wb}$, $C_{ref} = 5.4 \text{ kNm}$ et $VRP = 8 \text{ m/s}$ (vitesse de la chaîne). Cette perturbation provoque une variation brutale du couple électromagnétique. Nous remarquons que les modèles ont le même comportement pour ce type de défaut. Le résultat obtenu est identique à celui dans les travaux précédents [Loc-99].

3.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons modélisé une chaîne de traction ferroviaire par bond graphs. En utilisant ce formalisme, nous pouvons obtenir une modélisation homogène de la chaîne complète. Nous avons présenté 3 modélisations différentes de la machine asynchrone, qui seront utilisées dans l'analyse systémique de la chaîne. Ces modélisations ont été validées par des simulations pour des fonctionnements normal (cas d'un démarrage) et dégradé (cas d'un court-circuit symétrique). Par ces essais, nous constatons que ces modèles ont un comportement quasi identique. Les choix des niveaux de modélisation (degré de finesse) ont été fait afin de permettre une représentation globale du problème sur des temps d'horizon compatibles avec les dynamiques mécaniques les plus lentes en conservant un temps de simulation raisonnable. C'est en particulier vrai lorsque l'onduleur de tension est modélisé en valeur moyenne sur une période de commutation. Pour donner une idée sur l'ordre de grandeur du temps de simulation faite sous 20 Sim : pour un cas de démarrage complet avec une montée en régime de la vitesse de train jusqu'au point nominal de 40 km/h (horizon de 0 à 20 secondes), la simulation se fait en 6 minutes avec la MLI modélisée en valeur moyenne, tandis qu'en valeur instantanée la simulation est 5 fois plus lente.



(a)



(b)

Figure 3.25. Cas d'un court-circuit symétrique : (a) couple électromagnétique, (b) flux rotorique.

Chapitre 4

Analyse systémique de la chaîne de traction

Chapitre 4

Analyse systémique de la chaîne de traction

Après avoir modélisé en bond graph la chaîne de traction dans le chapitre précédent, nous analysons dans ce chapitre le comportement et la stabilité du système. Le Chapitre 4 se divisera en 3 parties.

La première présentera la réduction et l'analyse du modèle mécanique seul, ce modèle étant linéaire.

Puis nous abordons la problématique complexe liée à l'analyse systémique d'un modèle non linéaire en utilisant le modèle complet de la chaîne de traction. Sur cet exemple, nous examinons successivement la question de la réduction de modèle pour l'analyse comportementale puis celle de la stabilité. Pour parvenir à ces fins, nous utilisons un modèle original, complètement linéarisable, basé sur une orientation du repère de Park selon le vecteur tension statorique.

4.1. Analyse de la partie mécanique

Dans cette partie, nous ne considérons que le modèle de la transmission mécanique. En effet, celui-ci est linéaire et nous permet donc d'utiliser et de comparer différentes techniques d'analyse valables en linéaire comme en non linéaire [Gan-01b]. Ce modèle d'ordre 11 intègre la majorité des variables d'état du modèle complet (ordre 17 hors loi de commande), d'où l'intérêt de le simplifier.

4.1.1. Méthode des Perturbations Singulières (MPS)

Nous appliquons cette méthode de simplification sur le modèle mécanique en suivant la procédure présentée à la section 2.3.1.3 [Gan-01a][Sue-91].

Dans un premier temps, nous effectuons l'analyse des 14 boucles causales trouvées dans le modèle (voir Figure 3.21). Les gains de ces boucles et les constantes de temps T ou les périodes naturelles T_n associées sont présentées dans le Tableau 4.1. Nous remarquons que les constantes de temps et les périodes naturelles de ces boucles sont très disparates (de quelques microsecondes à quelques secondes). Il est donc intéressant d'appliquer la méthode des perturbations singulières sur ce modèle.

Tableau 4.1. Les gains et les constantes de temps ou périodes naturelles des boucles causales dans la partie mécanique.

No.	Eléments	$G (s)$	w_n [rad/s]	T ou T_n [sec]
1	$I_6 - C_{acc}$	$-\frac{C_{acc}}{I_6 \cdot s}$	-	$\frac{I_6}{C_{acc}} = 3$
2	$I_6 - K_{acc}$	$-\frac{K_{acc}}{I_6 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{acc}}{I_6}} = 18257.42$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_6}{K_{acc}}} = 3.44 \times 10^{-4}$
3	$I_5 - C_{acc}$	$-\frac{C_{acc}}{I_5 \cdot s}$	-	$\frac{I_5}{C_{acc}} = 0.028$
4	$I_5 - K_{acc}$	$-\frac{K_{acc}}{I_5 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{acc}}{I_5}} = 188982.24$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_5}{K_{acc}}} = 3.32 \times 10^{-5}$
5	$I_5 - K_4$	$-\frac{K_4 \cdot R_5^2}{I_5 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_4 \cdot R_5^2}{I_5}} = 8747.35$	$\frac{2 \cdot p}{R_5} \cdot \sqrt{\frac{I_5}{K_4}} = 7.18 \times 10^{-4}$
6	$I_4 - K_4$	$-\frac{K_4 \cdot R_4^2}{I_4 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_4 \cdot R_4^2}{I_4}} = 6787.82$	$\frac{2 \cdot p}{R_4} \cdot \sqrt{\frac{I_4}{K_4}} = 9.26 \times 10^{-4}$
7	$I_4 - K_5$	$-\frac{K_5 \cdot R_4^2}{I_4 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_5 \cdot R_4^2}{I_4}} = 6787.82$	$\frac{2 \cdot p}{R_4} \cdot \sqrt{\frac{I_4}{K_5}} = 9.26 \times 10^{-4}$
8	$I_3 - K_5$	$-\frac{K_5 \cdot R_3^2}{I_3 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_5 \cdot R_3^2}{I_3}} = 4157.84$	$\frac{2 \cdot p}{R_3} \cdot \sqrt{\frac{I_3}{K_5}} = 1.51 \times 10^{-3}$
9	$I_3 - C_{jac}$	$-\frac{C_{jac}}{I_3 \cdot s}$	-	$\frac{I_3}{C_{jac}} = 2.28 \times 10^{-3}$
10	$I_3 - K_{jac}$	$-\frac{K_{jac}}{I_3 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{jac}}{I_3}} = 572.96$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_3}{K_{jac}}} = 0.011$
11	$I_9 - C_{jac}$	$-\frac{C_{jac}}{I_9 \cdot s}$	-	$\frac{I_9}{C_{jac}} = 1.76 \times 10^{-3}$
12	$I_9 - K_{jac}$	$-\frac{K_{jac}}{I_9 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{jac}}{I_9}} = 658.28$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_9}{K_{jac}}} = 9.54 \times 10^{-3}$
13	$I_9 - K_{ess}$	$-\frac{K_{ess}}{I_9 \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{ess}}{I_9}} = 81649.66$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_9}{K_{ess}}} = 7.70 \times 10^{-5}$
14	$I_{eq} - K_{ess}$	$-\frac{K_{ess}}{I_{eq} \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{ess}}{I_{eq}}} = 2383.24$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_{eq}}{K_{ess}}} = 2.64 \times 10^{-3}$

A partir des ordres de grandeur des constantes de temps ou des périodes naturelles, nous déduisons l'analyse suivante :

- En comparant les boucles causales numéros 1 et 3 ainsi que les 2 et 4, nous déduisons que la dynamique de l'inertie I_6 est lente par rapport à I_5 .

- Les boucles causales numéros 5 et 6 nous conduisent à la conclusion que les inerties I_5 et I_4 ont la même dynamique. Les boucles causales numéros 7 et 8 (respectivement les 9 et 11 et les 10 et 12) nous permettent à dire que les inerties I_4 et I_3 (respectivement les inerties I_3 et I_9) sont de même ordre de dynamique. Autrement dit, les inerties I_3 , I_4 , I_5 et I_9 sont de même classe de dynamique.
- La dynamique de l'inertie I_{eq} est plus lente que celle de l'inertie I_9 (comparer les constantes de temps des boucles causales numéros 13 et 14).
- Pour les raideurs, nous pouvons dire que les éléments K_4 et K_5 ont la même dynamique (voir boucles numéros 6 et 7). En basant sur les boucles numéro 4 et 5, nous remarquons que la dynamique de l'élément K_{acc} est plus rapide que celle de K_4 .
- Dans le cas de l'élément K_{jac} , nous constatons que sa dynamique est plus lente que celle de l'élément K_5 (voir boucles numéro 8 et 10). Par contre, l'élément K_{ess} est beaucoup plus rapide que l'élément K_{jac} .

En basant sur cette analyse qualitative, nous pouvons émettre l'hypothèse que les éléments I_6 , I_{eq} et K_{jac} sont liés aux dynamiques lentes tandis que les autres éléments dynamiques sont associés aux dynamiques rapides.

En se basant sur cette hypothèse, nous construisons le modèle rapide et le modèle lent en appliquant la procédure expliquée dans la section 2.3.1.3 du Chapitre 2.

Modèle rapide :

A partir du bond graph initial, nous supprimons les éléments de dynamiques lentes. Sur le bond graph obtenu (voir Figure 4.1.(a)), nous supprimons les sources et les éléments dissipatifs qui ne sont pas liés causalement avec les éléments dynamiques rapides.

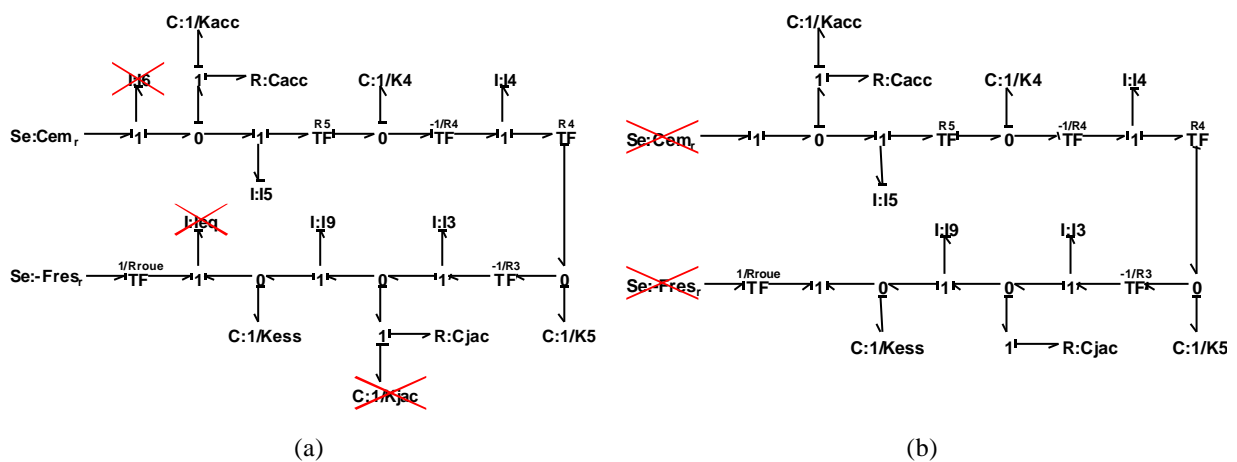


Figure 4.1. Construction du modèle rapide :
(a) première étape, (b) seconde étape.

Nous obtenons donc le bond graph rapide présenté à la Figure 4.2

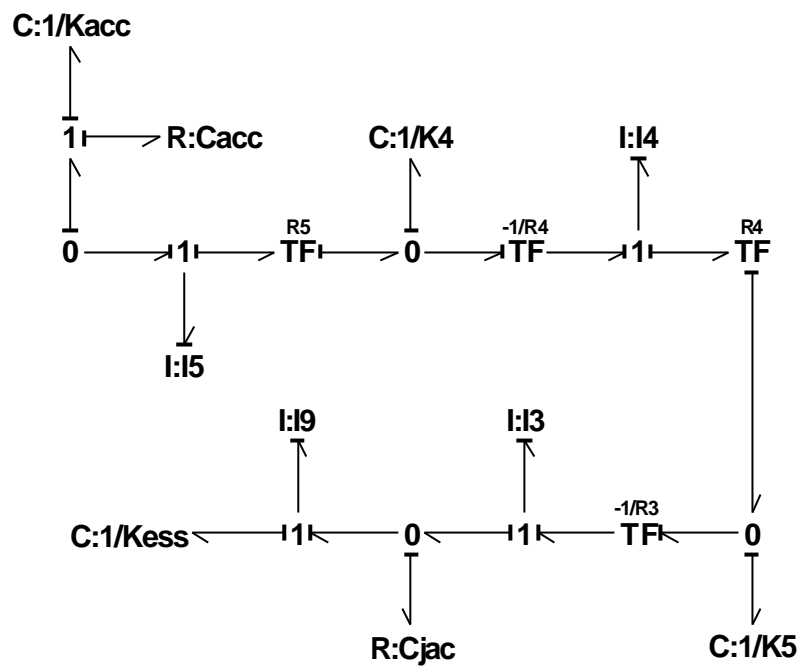


Figure 4.2. Bond graph rapide.

Etant donné que le modèle rapide n'est influencé par aucune source, nous pouvons négliger l'influence de ce modèle.

Modèle lent :

Pour obtenir le modèle lent, il faut d'abord construire le modèle bond graph réciproque en dualisant les jonctions et les sources et en inversant les gains des éléments. Nous obtenons le modèle réciproque suivant

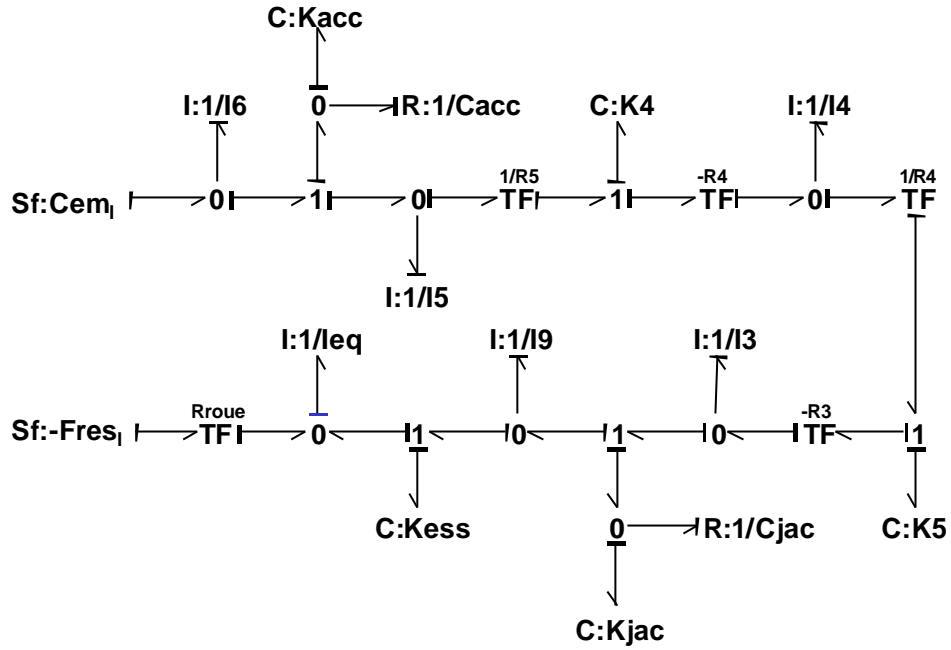


Figure 4.3. Construction du modèle lent : bond graph réciproque.

Dans ce modèle, les éléments rapides deviennent lents et vice versa. Nous appliquons la même procédure que nous avons utilisé pour le modèle rapide. Nous supprimons donc les éléments dynamiques 'lents' (indiqués par les croix rouges). Puis, nous supprimons l'élément C_{acc} (croix bleue) car il n'est pas lié causalement avec les éléments dynamiques restants.

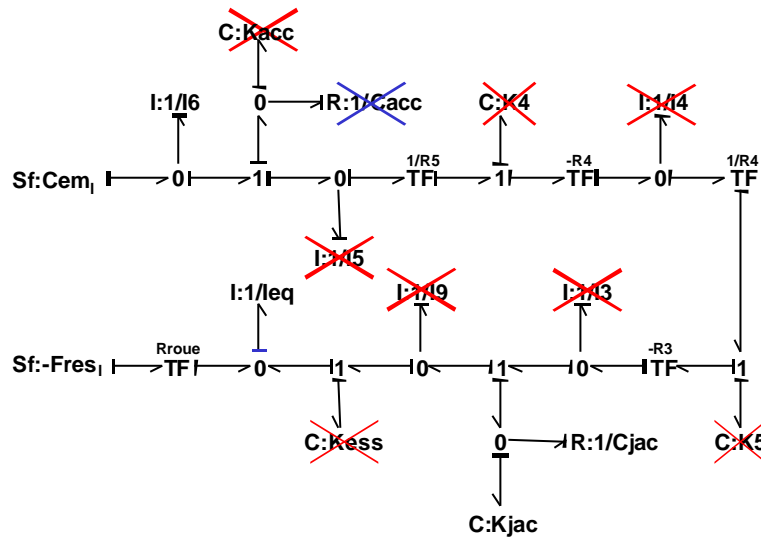


Figure 4.4. Construction du modèle lent : suppression des éléments.

Le bond graph lent est illustré par la Figure 4.5. Comme nous avons souligné précédemment, le modèle rapide n'a pas d'influence et nous pouvons le négliger. *Par conséquent, le modèle réduit est donc équivalent au modèle lent.*

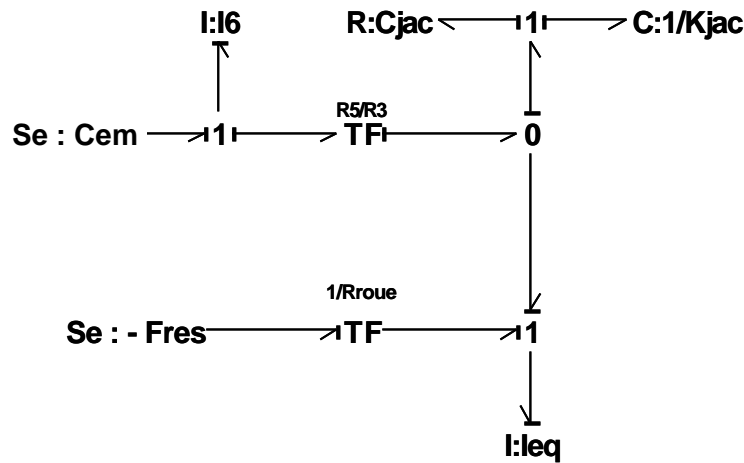


Figure 4.5. Bond graph lent.

4.1.2. Réduction de modèles selon la bande passante par la Méthode MORA

Nous appliquons la méthode MORA, présentée au chapitre 2, sur notre modèle de chaîne de transmission mécanique. Nous considérons d'abord la méthode classique qui permet d'obtenir les modèles réduits en fonction de la bande passante du signal d'entrée. Cette démarche peut être appliquée car le modèle est linéaire. Nous présenterons au paragraphe 4.1.3, une modification de la méthode MORA permettant de réduire des modèles selon la gamme de fréquence d'utilisation [Gan-03].

Nous prenons le couple électromagnétique C_{em} comme entrée d'excitation. La réduction de modèle est réalisée à partir de la méthode MORA standard, décrite à la section 2.3.2.1 du Chapitre 2. L'activité énergétique des éléments est déterminée de deux manières différentes, à savoir à partir de simulations numériques et par calcul analytique direct. Les résultats en parfaite concordance sont présentés à l'Annexe G.

La Figure 4.6 présente les éléments les plus actifs qui doivent être inclus dans le modèle réduit en fonction de la bande passante w_b pour différentes valeurs de seuil d'activité. Rappelons que le seuil d'activité (valeur en %) correspond au cumul (somme) des index d'activités au delà duquel les éléments les moins actifs sont considérés comme négligeables et sont exclus du modèle (cf. Définition 2.7 au Chapitre 2). Nous voyons que la complexité (nombre d'éléments) du modèle réduit augmente quand nous élargissons la bande passante. Notons qu'en basse fréquence, seules les inerties de valeur élevée (I_6 et I_{eq}) interviennent. Dès que la bande passante s'élargit ($0 - 20$ rad/s), nous retrouvons le modèle à 4 paramètres (I_6 , I_{eq} , K_{jac} , C_{jac}) du bond graph lent de la Figure 4.5.

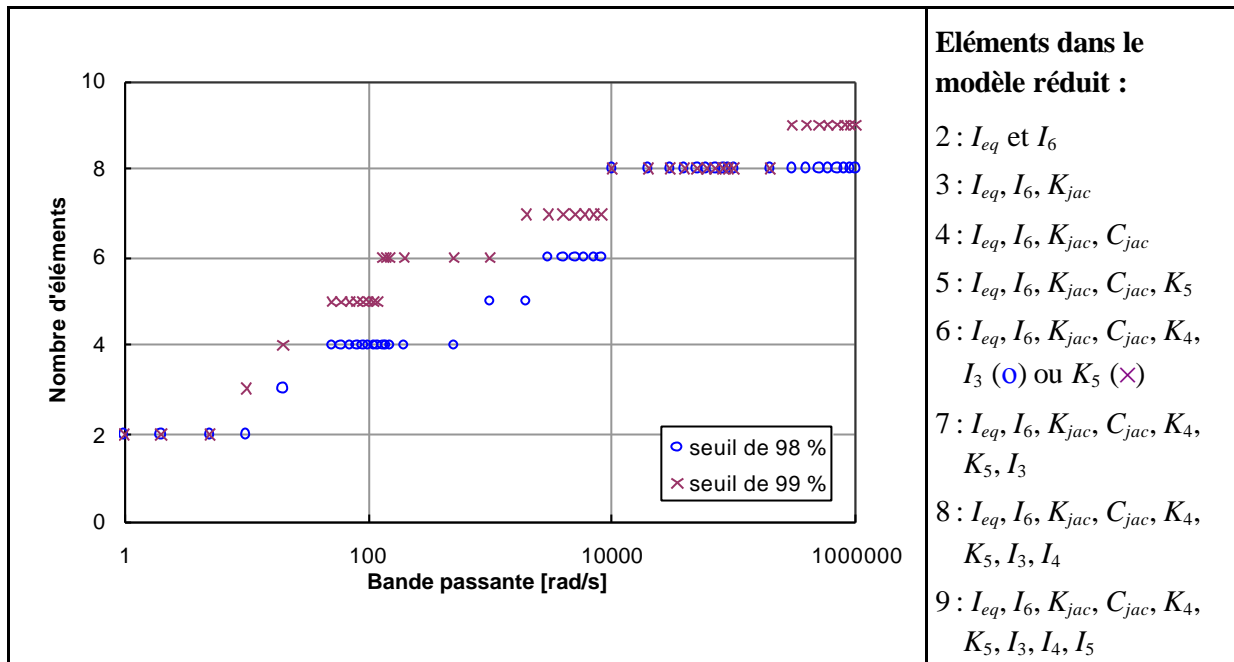


Figure 4.6. Eléments à retenir dans le modèle réduit en fonction de la bande passante et pour différentes valeurs de seuil d'activité.

Nous remarquons aussi l'influence de la valeur du seuil d'activité que nous choisissons sur le nombre d'éléments conservés dans le modèle réduit. Cette valeur doit être déterminée de manière à obtenir le meilleur compromis entre la complexité et la validité du modèle réduit. Pour cela, nous pouvons raisonner sur des critères tels que l'erreur quadratique des variables des sorties du modèle réduit par rapport à celles du modèle initial. On peut ainsi envisager l'utilisation de méthodes d'optimisation basées sur la minimisation de ce critère. Nous présentons Figure 4.7 un schéma d'algorithme d'optimisation pour minimiser l'erreur quadratique et le nombre d'éléments du modèle réduit.

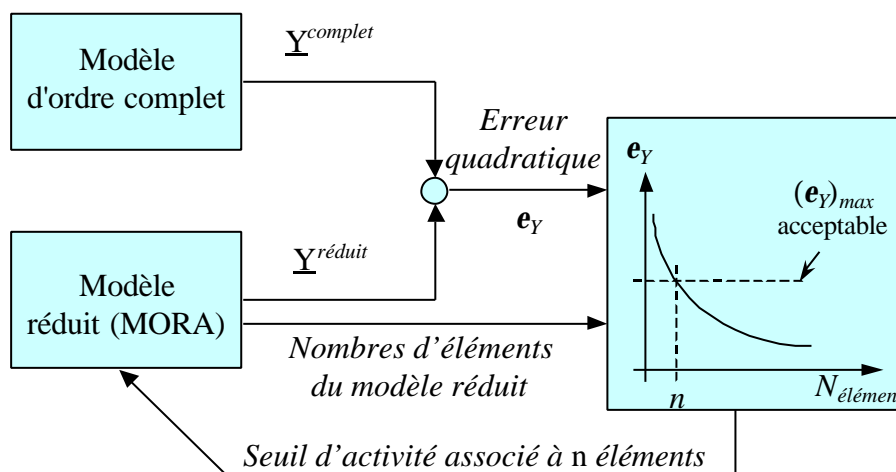


Figure 4.7. Méthode d'optimisation pour régler la valeur du seuil d'activité.

4.1.3. MORA : modèles réduits selon la gamme de fréquence d'utilisation

Dans cette partie, nous appliquons la méthode MORA modifiée pour obtenir un modèle réduit dédié à une gamme de fréquence désirée. Par rapport à l'approche traitée au paragraphe précédent et dans laquelle on définit une bande passante, cette méthode présente l'intérêt de ne pas imposer systématiquement la validité du modèle réduit pour les basses fréquences. Ceci permet par exemple l'étude du comportement haute fréquence d'un système. Nous utilisons les signaux d'excitation (échelon, sinusoïde, SBPA, chirp) présentés à la section 2.3.2.2 en entrée du modèle.

Le modèle de la chaîne mécanique possède deux entrées : le couple électromagnétique (C_{em}) et la force résistive (F_{res}). Nous avons successivement examiné le comportement du modèle en excitant une entrée seulement à chaque essai. L'étude complète est présentée en Annexe I. Il faut souligner que les excitations d'entrées sinus, chirp, SBPA, sont imposées autour de zéro, c'est à dire à composante continue (couple, force) nulle.

Les résultats obtenus en excitant le modèle par l'entrée couple électromagnétique (C_{em}) sont cohérents. En effet, en basse fréquence, 4 éléments sont importants : I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} . On retrouve ainsi le résultat donné par la méthode des perturbations singulières. En haute fréquence, au-delà de la fréquence de résonance mécanique, seuls les éléments I_9 , K_{acc} , K_{ess} et C_{acc} peuvent être négligés.

Pour des excitations basse fréquence par l'entrée F_{res} , nous pouvons dire que les seuls éléments importants sont I_6 et I_{eq} . Pour des excitations haute fréquence, il n'y a que l'inertie I_{eq} qui est importante. Cette inertie filtre les perturbations HF qui n'excitent donc plus les modes rapides de la chaîne mécanique comme c'est le cas lorsqu'on excite l'entrée couple moteur (C_{em}).

Ce dernier point soulève une remarque générale simple, mais importante : *le modèle réduit obtenu par la méthode MORA dépend intimement des entrées d'excitation*. En conséquence, il est impératif d'opérer des recoupements entre les différents modèles issus de l'excitation des différentes entrées du système.

Pour des excitations par F_{res} avec des signaux incluant la fréquence de résonance mécanique (18 Hz), les 4 éléments (I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac}) sont nécessaires.

A la suite de cette étude sur l'excitation par signaux spécifiques appliqués à la partie mécanique de la BB36000, nous pouvons conclure que selon la fréquence et la durée de l'excitation, l'index d'activité des éléments évolue de façon significative.

- Nous remarquons que l'entrée F_{res} n'excite que les inerties de valeur élevée I_6 et en particulier I_{eq} , sauf pour la fréquence de résonance mécanique où l'activité des éléments K_{jac} et C_{jac} n'est plus négligeable.

- En résumant tous les essais que nous avons réalisés (cf. Annexe I), nous présentons Figure 4.8 les index d'activité pour des excitations basse et haute fréquence à l'entrée du couple électromagnétique. Les excitations classées basse fréquence (BF) sont représentées par un échelon de durée $T = 1$ s, une SBPA d'une largeur minimale $T = 5$ s, une sinusoïde de fréquence $F = 1.6\text{Hz}$ et un signal chirp qui balaye les fréquences entre $F_0 = 0$ Hz et $F_1 = 1.6\text{Hz}$. La gamme de fréquence de ces excitations est donc en deçà de la fréquence de résonance ($f_{reson} = 18$ Hz). Les excitations haute fréquence (HF) sont représentées par une sinusoïde de fréquence $F = 160\text{Hz}$ et un chirp excitant une gamme entre $F_0 = 160$ Hz et $F_1 = 320\text{Hz}$.

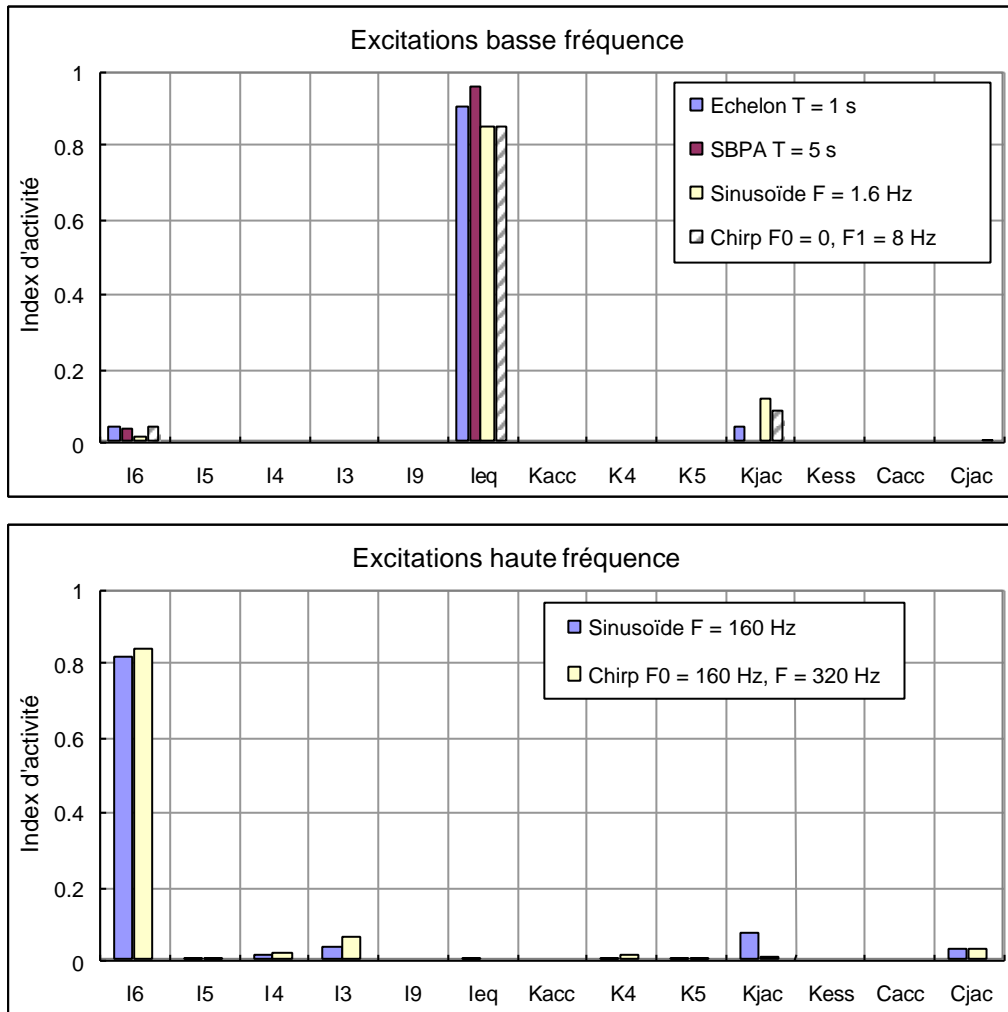


Figure 4.8. Index d'activité des éléments pour des excitations basse et haute fréquences par l'entrée C_{em} .

Sur la base de cette analyse, nous proposons 2 modèles réduits, chacun associé à une gamme de fréquence pour une excitation d'entrée C_{em} .

- Pour une entrée basse fréquence, les éléments nécessaires sont I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} . Ce modèle est exactement le même que celui obtenu par la méthode des perturbations singulières (voir section 4.1.1).

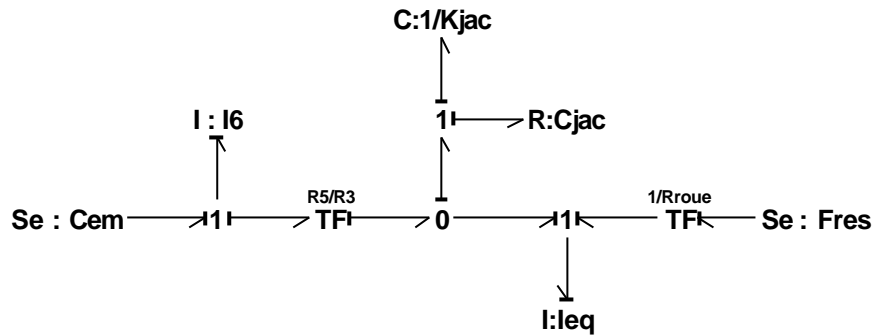


Figure 4.9. Modèle réduit pour des entrées basse fréquence.

- Pour une entrée haute fréquence, nous retenons tous les éléments, sauf I_9 , K_{acc} , K_{ess} et C_{acc} . Sur ce modèle réduit, nous retrouvons que les inerties I_6 et I_5 sont liées causalement sur une même jonction (il y a une inertie qui est en causalité dérivée). Pour éviter ce conflit de causalité, nous définissons une inertie équivalente $I : I_6 + I_5$.

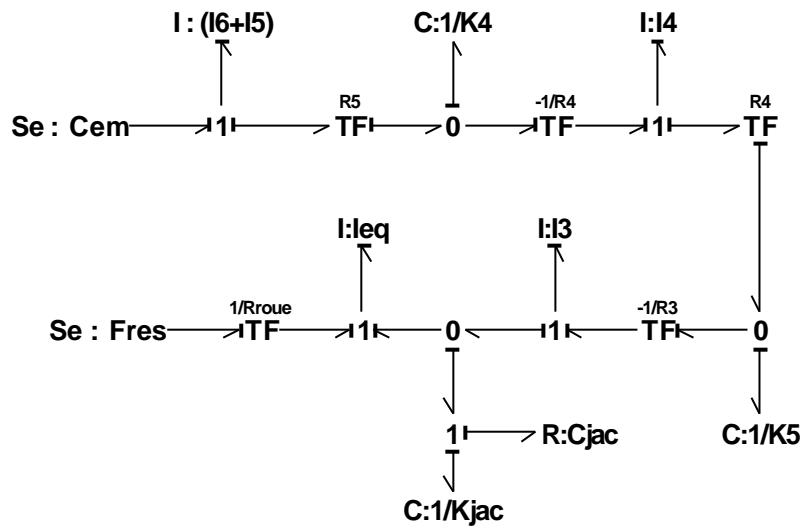


Figure 4.10. Modèle réduit pour des entrées en haute fréquence.

Pour valider nos simplifications, nous simulons les modèles initial et réduits pour des excitations basse et haute fréquence. L'excitation basse fréquence correspond à un défaut de court-circuit symétrique à l'entrée C_{em} dont la forme et le spectre fréquentiel sont présentés Figure 4.11. L'excitation du modèle en HF repose sur une excitation harmonique (Figure 4.12). Nous constatons que les modèles initial et réduits (BF et HF) donnent des réponses similaires.

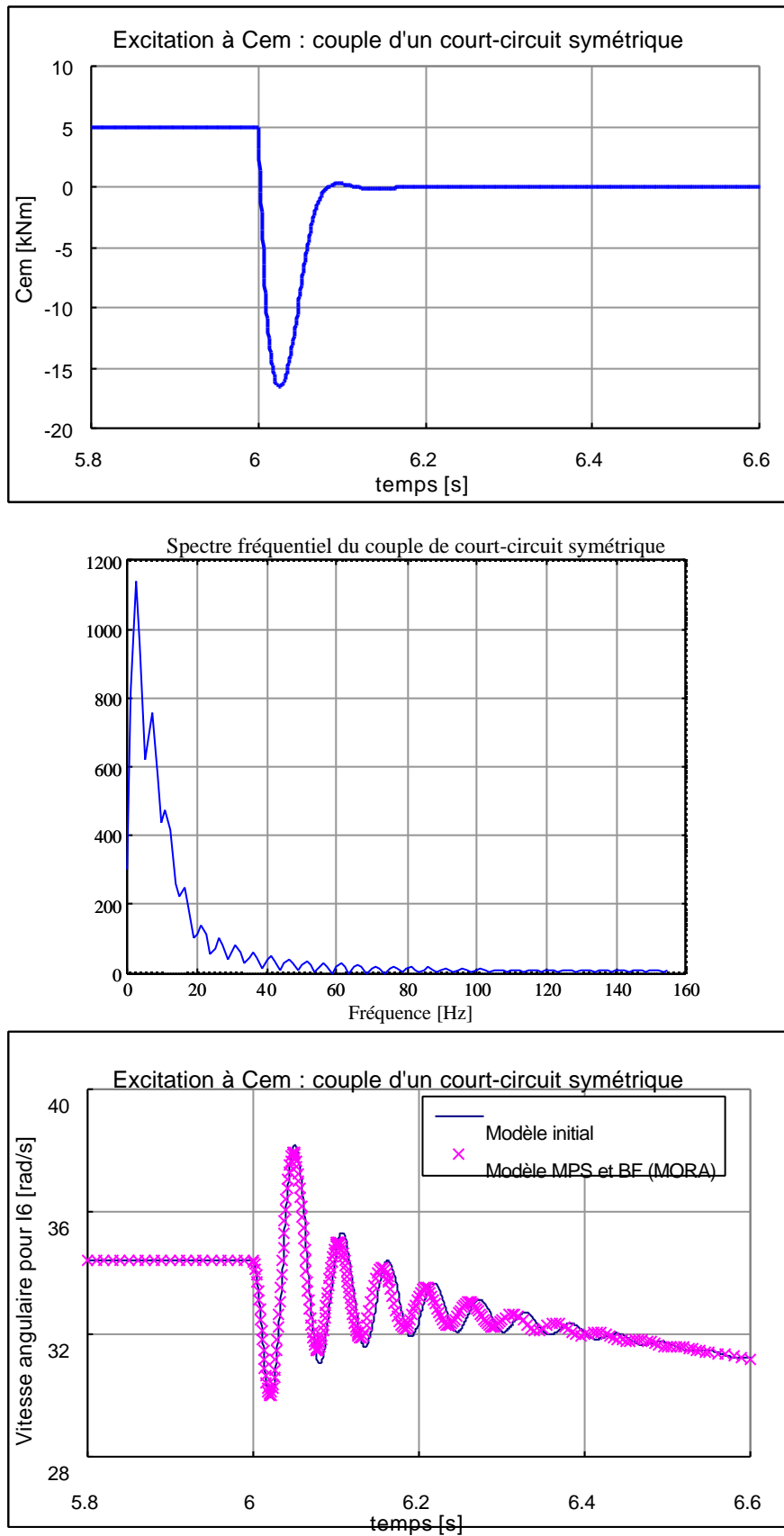


Figure 4.11. Excitation basse fréquence : couple d'un court-circuit symétrique, son spectre fréquentiel et la comparaison entre les modèles initial et réduit.

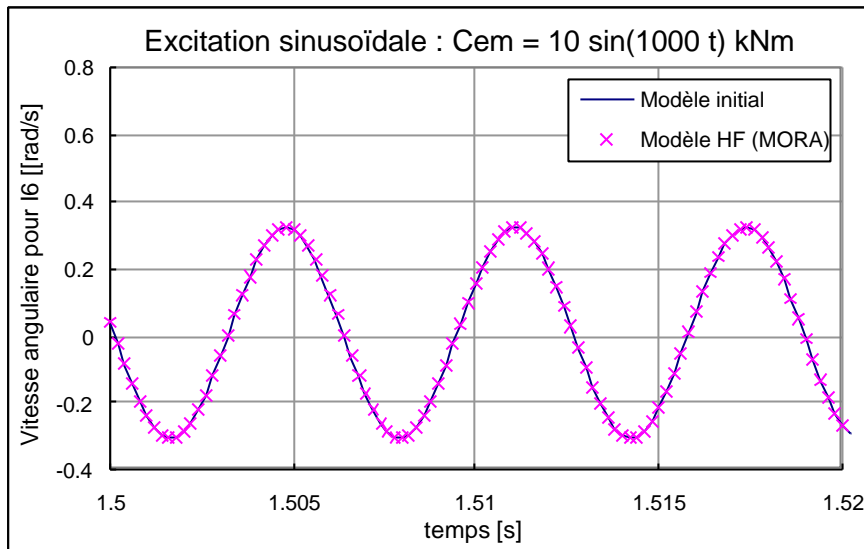


Figure 4.12. Comparaison entre les modèles initial et réduits pour une excitation haute fréquence.

4.1.4. Exploitation de la réduction du modèle mécanique pour l'analyse systématique

Nous avons construit des modèles réduits obtenus par les méthodes MPS et MORA. Quand nous examinons le modèle réduit issu de la Méthode des Perturbations Singulières, qui est le même que celui obtenu par la méthode MORA modifiée pour des excitations basses fréquences, nous nous apercevons qu'il existe une boucle causale entre les éléments I_6 et K_{jac} (voir Figure 4.13) dont la fréquence propre est de 18.72 Hz. Notons que les fréquences propres associées à des boucles causales dans un modèle peuvent donner une estimation proche de la fréquence de résonance. Dans notre modèle, cette valeur de fréquence propre (18.72 Hz) est très proche à la principale fréquence de résonance de la chaîne mécanique (18.02 Hz) [Loc-99]. Nous déduisons donc que les éléments I_6 et K_{jac} sont responsables de cette résonance. Nous remarquons que cette boucle causale n'apparaît pas dans le modèle initial dans lequel il existe plusieurs éléments entre I_6 et K_{jac} .

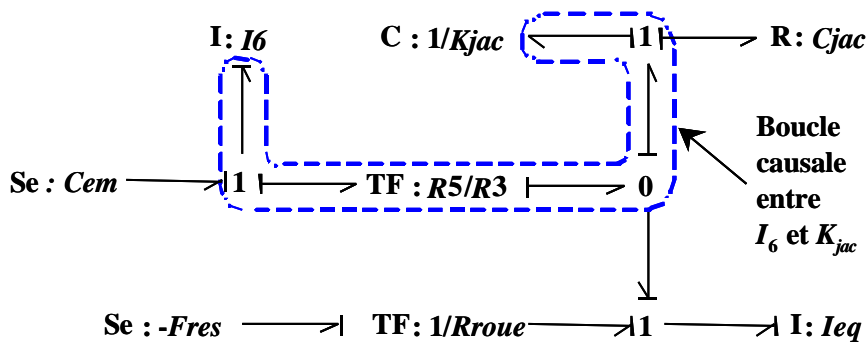


Figure 4.13. Modèle BF : boucle causale entre I_6 et K_{jac} .

Quand nous analysons la réponse fréquentielle du modèle initial et du modèle réduit en utilisant les diagrammes de Bode, nous remarquons que le modèle réduit a un comportement identique à celui du modèle complet pour une gamme de fréquence inférieure à 150 Hz, qui inclut la fréquence de résonance mécanique. Nous validons donc le modèle réduit en basse fréquence. Par ailleurs, nous vérifions que les éléments I_6 et K_{jac} sont bien responsables de la résonance mécanique principale du système.

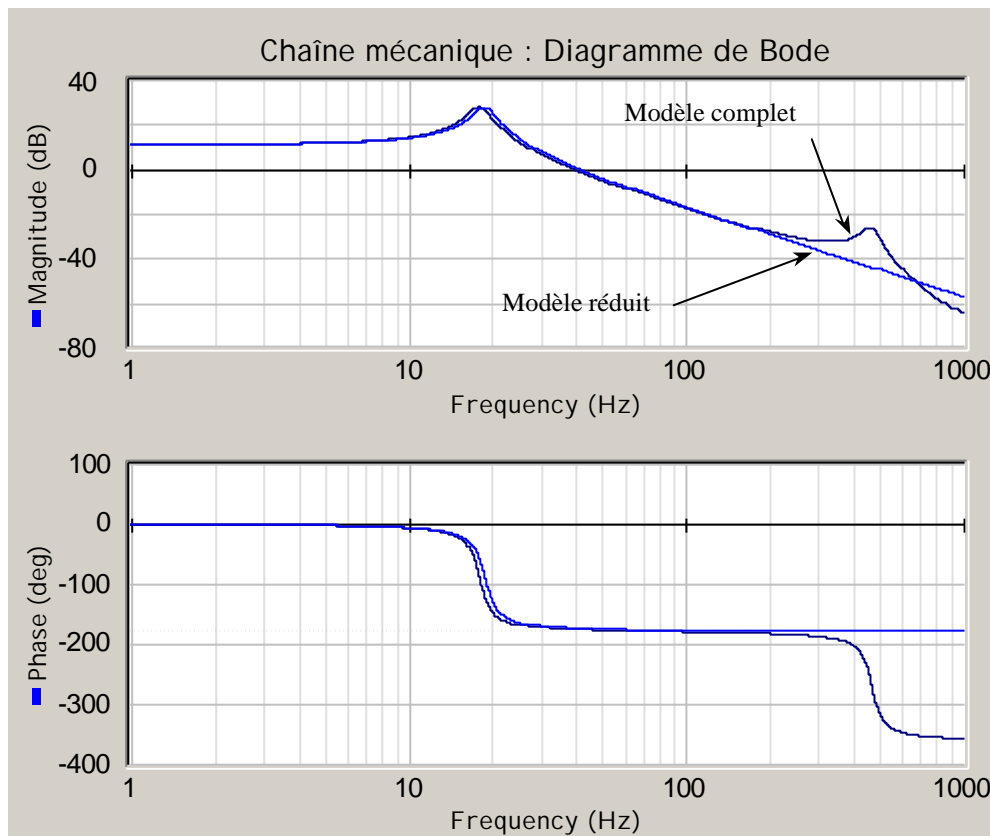


Figure 4.14. Diagramme de Bode des modèles complet et réduit de la chaîne mécanique.

Nous insistons ici sur l'intérêt des méthodes de simplification de modèle. Dans un premier temps, elles nous permettent de réduire l'ordre et donc la complexité du modèle, ce qui facilite la simulation du système global en diminuant le temps de calcul. Par ailleurs, elles permettent de simplifier l'analyse et de faire apparaître les éléments responsables des principaux effets de couplage tels que les phénomènes de résonance. Il est donc tout à fait possible *a posteriori* de reprendre le dimensionnement de ces éléments pour réduire leurs effets perturbateurs. Par ailleurs, l'application directe de la méthode des perturbations singulières et de la méthode MORA sur un modèle bond graph est plus aisée par rapport l'application sur le modèle mathématique.

4.2. Analyse du système complet

4.2.1. Simplification par la méthode MORA

Nous avons appliqué la méthode MORA sur la chaîne de traction complète. Trois modèles différents de machine asynchrone sont étudiés :

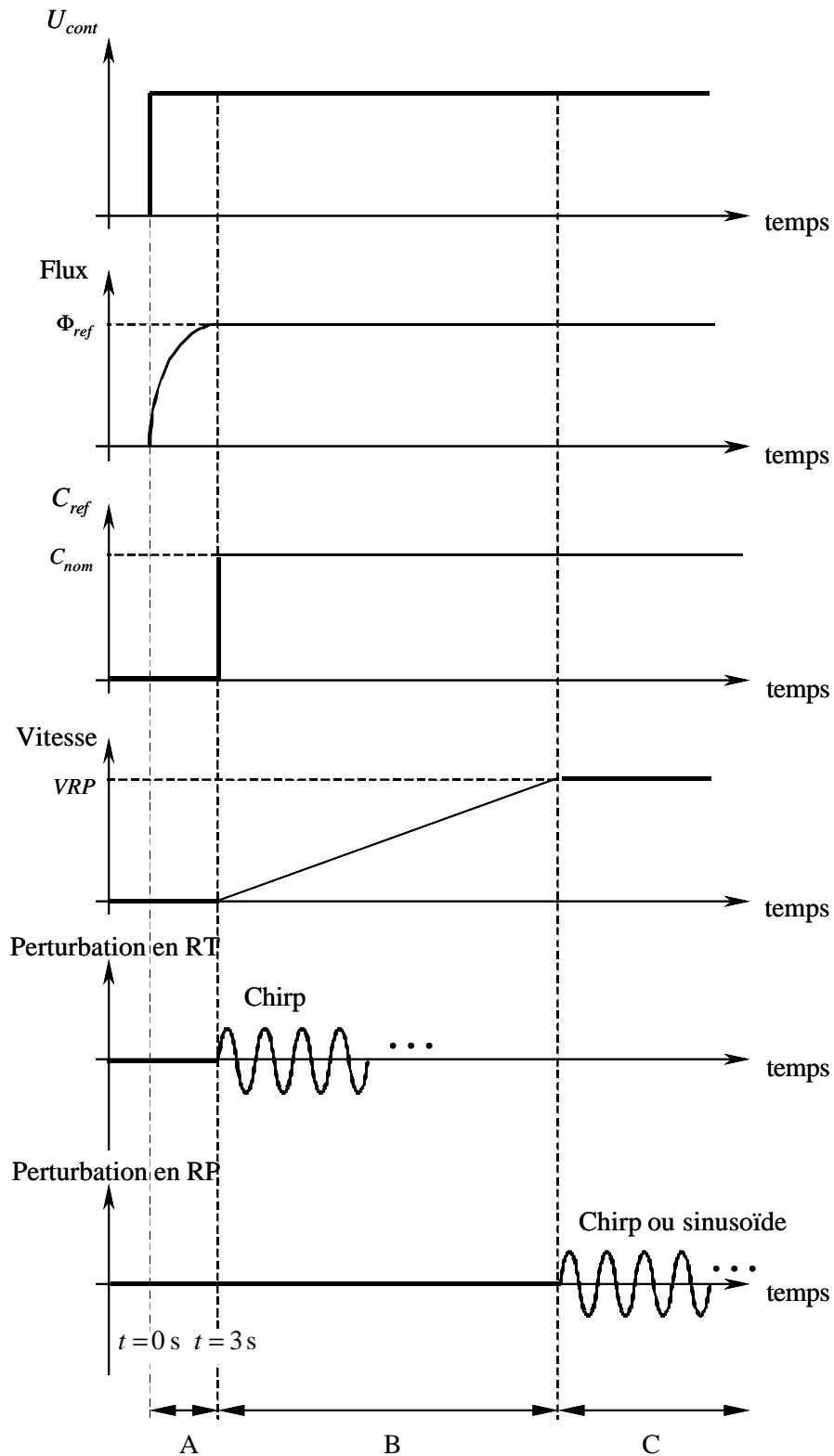
- Le premier est le modèle comportant une machine asynchrone modélisée dans le repère de Park fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments multiports. Nous l'appelons modèle A.
- Le deuxième modèle est celui avec la machine asynchrone dans le repère de Park fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) en utilisant des éléments monoports (inductances de fuites ramenées au stator). Pour la suite, ce modèle est dit modèle B.
- Enfin, le dernier modèle étudié (modèle C) est le modèle de la chaîne contenant une machine asynchrone modélisée dans le repère (d, q) lié au vecteur tension statorique.

Nous appliquons la méthode MORA pour obtenir des modèles réduits selon la gamme de fréquence d'utilisation. *Contrairement à la transmission mécanique, nous ne pouvons pas appliquer directement des signaux d'excitation alternatifs sans composante continue (sinusoïdes ou chirps) aux entrées car le système peut devenir instable. En effet, pour éviter la saturation de la commande, il est impératif de disposer d'une tension continue suffisante à l'entrée de l'onduleur. Nous sommes donc obligés de superposer ces signaux aux composantes continues correspondant au fonctionnement normal du système.*

Sur le modèle complet de la chaîne de traction, trois signaux peuvent être considérés comme entrées de système : la tension d'alimentation continue (U_{cont}), l'entrée de consigne de couple (C_{ref}) et la force de résistance à l'avancement (F_{res})

Le scénario global d'essais est illustré par la Figure 4.15. Nous distinguons 3 zones sur l'horizon de temps. La régulation du couple est commencée à partir de $t = 3$ s. Par ailleurs, nous introduisons la perturbation soit en régime transitoire soit en régime permanent de vitesse. Le calcul des activités est défini comme suit :

- Pour une perturbation de type chirp de durée T , le calcul commence à partir de l'instant où nous introduisons la perturbation et pendant la durée T .
- Pour une perturbation sinusoïdale que nous n'utilisons qu'en régime permanent de vitesse, le calcul des activités est réalisé quand nous sommes en régime harmonique établi.



- A : le temps de chargement de capacité et régulation du flux.
 B : régime transitoire (RT) où la vitesse monte car $F_{res} = 0$.
 C : régime permanent (RP) où la vitesse est constante et $F_{res} \neq 0$.

Figure 4.15. Scénario d'essais : évolution des variables.

Lorsque nous appliquons la méthode MORA sur les trois modèles, nous constatons certains problèmes :

- selon le choix du modèle de la MLI, du régime de vitesse, du modèle de la machine asynchrone utilisé et de l'entrée perturbée, l'importance (l'activité énergétique) d'un élément n'est pas toujours la même ;
- par ailleurs, le fait d'ajouter une composante continue aux entrées masque en partie l'effet de perturbation, surtout pour des perturbations en haute fréquence.

Nous allons détailler ces problématiques dans les parties suivantes.

Nous présentons les index d'activité de tous les éléments. Pour les modèles de la machine asynchrone modélisée dans le repère fixe de Park (\mathbf{a}, \mathbf{b}), seules les composantes d'axe \mathbf{a} seront présentées car les composantes d'axe \mathbf{b} ont les mêmes index d'activité en raison du fait que la machine est équilibrée. Nous utilisons les indices LF , LM et RR pour indiquer respectivement l'inductance des fuites totalisées au stator : sL_s , l'inductance magnétisante "ramenée au stator" : L_m^2/L_r , et la résistance rotorique "ramenée au stator" : $(L_m/L_r)^2 R_r$.

4.2.1.1. L'influence du modèle de la MLI

Nous remarquons que la distribution des activités énergétiques dans le modèle dépend de la manière de modéliser la MLI. Nous rappelons que la MLI peut être modélisée en valeur moyenne (sans commutations des interrupteurs) ou en valeur instantanée (représentée par les états de commutation). Nous présentons un résultat obtenu pour montrer cette comparaison Figure 4.16. Cet essai est réalisé sur le modèle B comportant une machine asynchrone modélisée dans le repère fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) avec les inductances de fuites totalisées au primaire.

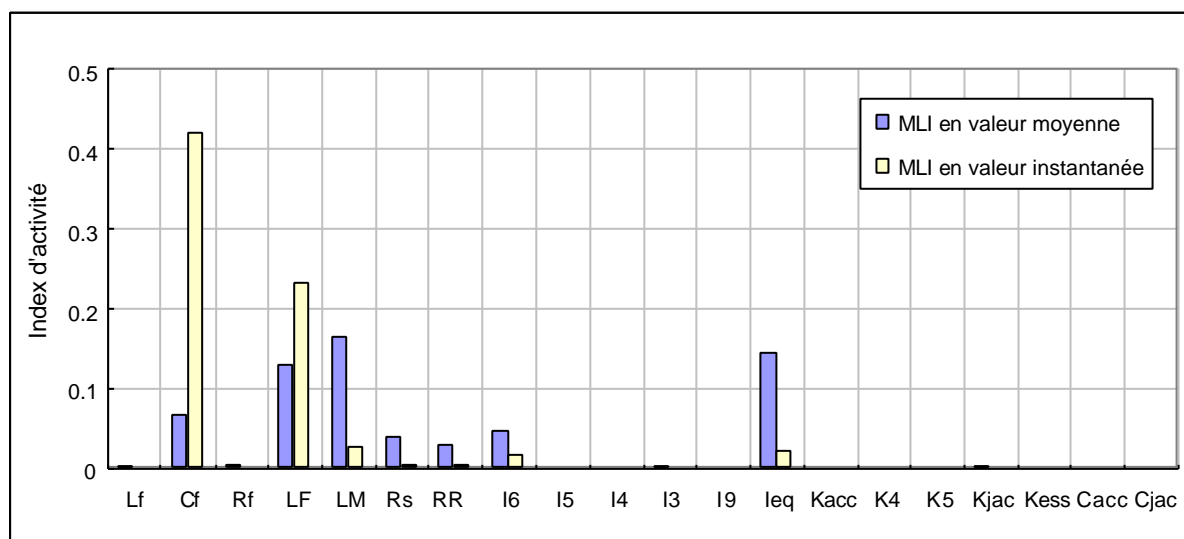


Figure 4.16. Influence du modèle de la MLI sur l'index d'activité des éléments : perturbation de type chirp de $F_0 = 0$ à $F_1 = 16$ Hz à l'entrée C_{ref} , en régime permanent, au modèle B.

Nous constatons que la capacité du filtre a un index d'activité nettement plus important dans le cas de la MLI en valeur instantanée que pour celui de la MLI en valeur moyenne. Ce phénomène s'explique par le découpage de la MLI qui crée d'importantes variations de courant côté continu que la capacité absorbe.

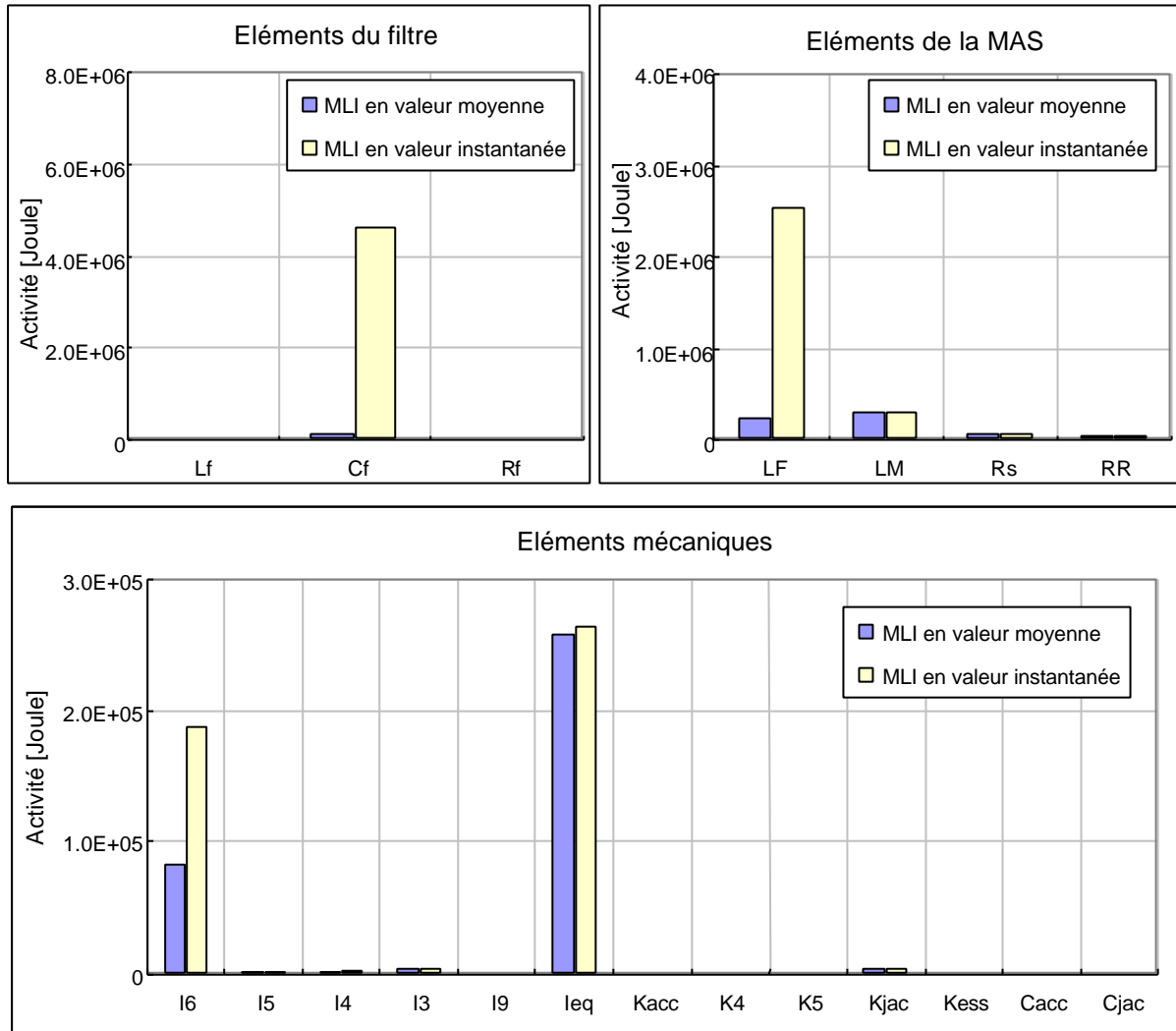


Figure 4.17. Influence du modèle de la MLI sur l'activité des éléments du modèle B : perturbation de type chirp à l'entrée C_{ref} en régime permanent.

De même, l'inductance de fuite totalisée, environ dix fois inférieure à l'inductance magnétisante, "absorbe" une grande partie des composantes haute fréquence dues au découpage en MLI. Son index d'activité énergétique est donc logiquement supérieur dans le cas instantané par rapport au cas où l'on ne considère aucun découpage haute fréquence. Par contre, le choix du modèle de la MLI n'influe pas sur l'activité énergétique des autres éléments de la machine (l'inductance magnétisante, les résistances du stator et du rotor). Dans la partie mécanique, nous constatons que l'activité de l'inertie I_6 est plus grande lorsque nous modélisons la MLI en valeur instantanée. C'est la réaction aux harmoniques de couple moteur dues au découpage MLI.

A cause de l'augmentation de l'activité énergétique de certains éléments, l'activité totale devient plus grande pour le modèle avec une MLI en valeur instantanée qu'en valeur moyenne. Les index d'activité ne sont donc plus les mêmes pour les mêmes valeurs d'activité énergétique. Les éléments qui ont des index d'activité non négligeables dans le cas où la MLI est modélisée en valeur moyenne (par exemple, la résistance du rotor RR) deviennent négligeables dans le cas d'une MLI en valeur instantanée. Le modèle réduit dépend alors la manière de modéliser la MLI. En particulier, le découpage MLI correspondant en fait à une "perturbation naturelle" haute fréquence, seul un modèle réduit lui même haute fréquence pourra être identifié de façon fiable avec une telle alimentation. Au contraire, le modèle à valeur moyenne devra être préféré si l'on cherche un modèle réduit pour les basses fréquences.

4.2.1.2. L'influence du régime de vitesse

Nous distinguons les essais selon le régime de vitesse quand nous introduisons la perturbation : en régime transitoire ou en régime permanent de vitesse. Nous constatons que les modèles réduits obtenus avec les essais en régime transitoire de vitesse ne sont pas les mêmes que ceux obtenus en régime permanent. Nous présentons les résultats d'un essai pour visualiser cette influence sur l'index d'activité des éléments à la Figure 4.18. Cet essai est effectué sur le modèle B. La perturbation est caractérisée par un chirp HF de gamme de fréquence entre $F_0 = 160$ Hz et $F_1 = 320$ Hz . La vitesse en régime permanent est définie comme $VRP = 8$ m/s .

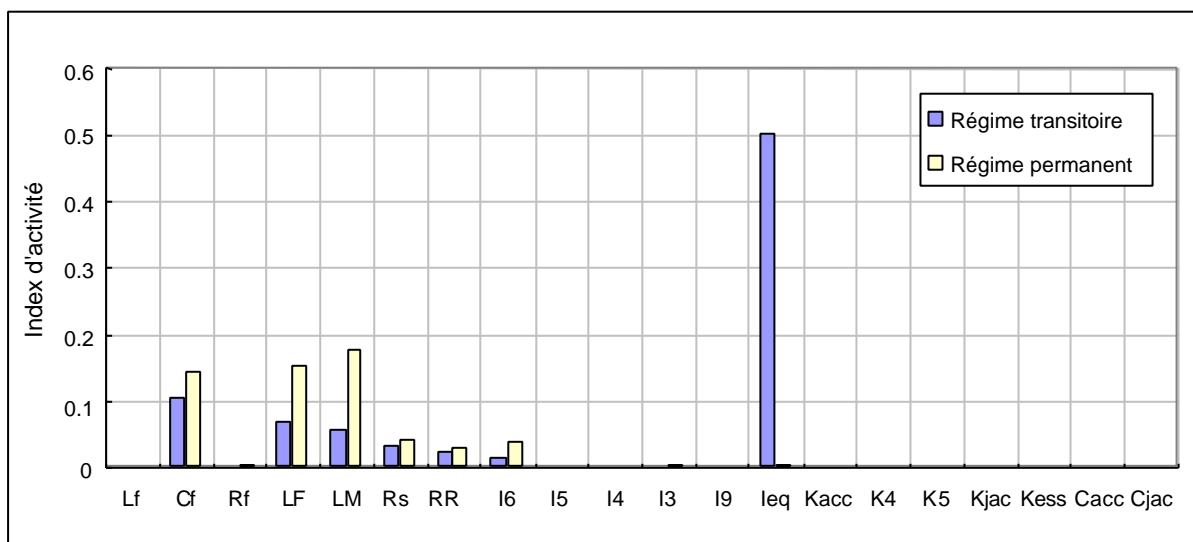


Figure 4.18. Influence du régime de vitesse sur l'index d'activité des éléments : perturbation de type chirp de $F_0 = 160$ Hz à $F_1 = 320$ Hz à l'entrée C_{ref} , au modèle B avec une MLI en valeur moyenne.

Dans ce cas particulier, nous remarquons que l'inertie I_{eq} est négligeable en régime permanent de vitesse, contrairement au cas où le régime transitoire de vitesse implique une activité

énergétique très nettement accrue. Par ces essais, nous avons 2 modèles réduits qui ne sont pas les mêmes selon le régime de vitesse.

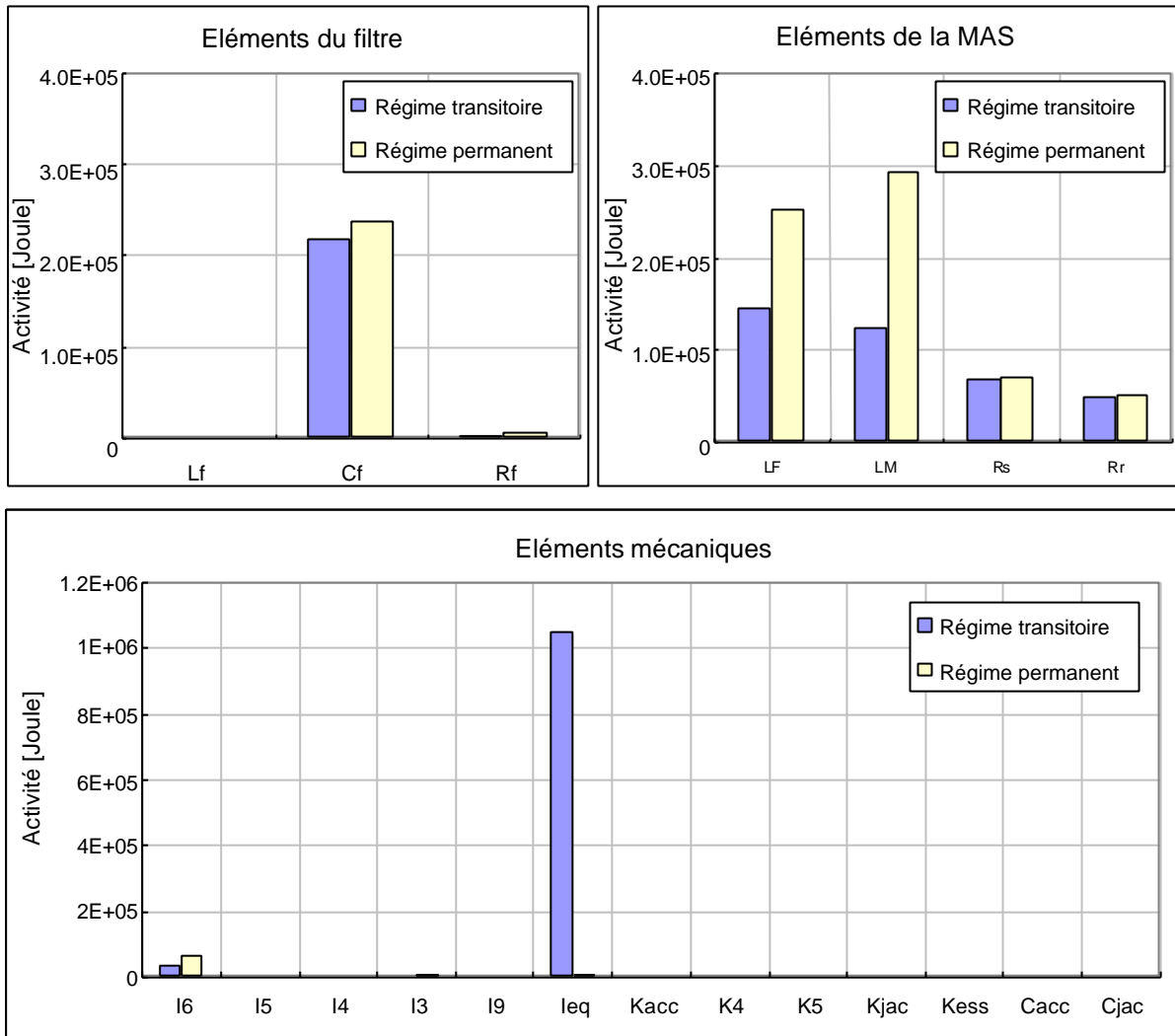


Figure 4.19. Influence du régime de vitesse sur l'activité énergétique des éléments : perturbation de type chirp à C_{ref} sur le modèle B avec une MLI en valeur moyenne.

La Figure 4.19 présente de manière plus détaillée les activités énergétiques (en Joules) des éléments. Nous constatons que l'activité de l'inertie équivalente du train I_{eq} est très nettement plus importante en régime transitoire de vitesse qu'en régime permanent. Ceci est dû aux variations "naturelles" du couple en régime transitoire de vitesse. Par contre, en régime permanent, seule la perturbation contribue à l'activité des éléments mécaniques. Nous rappelons qu'en régime permanent, un élément dynamique a une activité énergétique nulle.

En effet, le régime permanent est défini en imposant

- Pour un élément C : $\frac{d}{dt}q = 0$ ou $f = 0$
- Pour un élément I : $\frac{d}{dt}p = 0$ ou $e = 0$

Si une variable de puissance est nulle, l'activité est aussi nulle.

Par ailleurs, la perturbation haute fréquence est filtrée par l'inertie de l'arbre du rotor I_6 (indiqué par un index d'activité non négligeable de cet élément) et l'entrée C_{ref} n'excite pas beaucoup les autres éléments mécaniques. Les éléments de la machine asynchrone modélisée dans le repère fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}) n'ont pas de régime permanent car les variables (tension, courant) sont alternatives. En régime permanent, ces éléments absorbent plus d'activité due à la perturbation.

Enfin, de manière générale, nous constatons que le modèle réduit dépend du choix du régime de vitesse. Pour obtenir un modèle réduit valable uniquement vis-à-vis des perturbations d'entrée, il est préférable d'attendre que le régime mécanique soit établi.

4.2.1.3. Choix du modèle de la machine asynchrone

Lorsque nous avons réalisé la simplification de la chaîne complète en utilisant la méthode MORA modifiée, nous nous sommes aperçus que le modèle réduit obtenu dépendait de la manière avec laquelle nous modélisions la machine. Nous illustrons cette problématique en comparant les 2 modèles A et B, chacun comportant une machine asynchrone modélisée dans le repère de Park (\mathbf{a}, \mathbf{b}) . La machine asynchrone du modèle A contient des éléments I multiports, tandis que celle du modèle B est représentée uniquement avec des éléments I monoports pour les inductances de fuites totalisées au primaire et pour l'inductance magnétisante.

Nous rappelons que, du point de vue énergétique, les grandeurs de puissance (effort, flux) entrant et sortant du bloc de la machine asynchrone du modèle A et du modèle B sont les mêmes. Nous l'avons vérifié dans le cas d'une excitation normale (un échelon sans perturbation) pendant 1 seconde à l'entrée U_{cont} en régime transitoire où les activités énergétiques des éléments dans la partie du filtre et de la transmission mécanique sont les mêmes pour les deux modèles (voir Tableau 4.2 et Tableau 4.3).

Tableau 4.2. Activités énergétiques des éléments du filtre pour une excitation d'échelon pendant 1 s en régime transitoire avec MLI en valeur moyenne.

Élément	Activité énergétique	
	Avec éléments multi-ports (modèle A)	Avec éléments mono-ports (modèle B)
L_f	14.7	14.7
C_f	7 454.8	7 454.8
R_f	9.3	9.3
Somme	7 478.8	7 478.8

Tableau 4.3. Activités énergétiques des éléments mécaniques pour une excitation d'échelon pendant 1 s en régime transitoire avec MLI en valeur moyenne.

Élément	Activité énergétique	
	Avec les éléments multiports	Avec les éléments monoports
I_6	460.2	460.2
I_5	4.3	4.3
I_4	7.0	7.0
I_3	18.6	18.6
I_9	8.9	8.9
I_{eq}	10 456.0	10 456.0
K_{acc}	0	0
K_4	9.2	9.2
K_5	9.4	9.4
K_{jac}	495.4	495.4
K_{ess}	0	0
C_{acc}	0	0
C_{jac}	28.9	28.9
Somme	11 497.9	11 497.9

Tableau 4.4. Activités énergétiques des éléments de la machine asynchrone pour une excitation d'échelon pendant 1 s en régime transitoire avec MLI en valeur moyenne.

Élément		Activité énergétique	
		Avec les éléments multiports	Avec les éléments monoports
Axe α	L_s ou LF	11 353.5	1 571.1
	L_r ou LM	11 036.9	2 145.9
	R_s	6 509.8	6 509.8
	R_r ou RR	5 165.9	5 165.9
Axe β	L_s ou LF	10 640.4	1 853.9
	L_r ou LM	9 929.6	2 149.4
	R_s	7 371.2	7 371.2
	R_r ou RR	4 979.9	4 979.9
Somme		66 987.2	31 747.1

Lorsque nous examinons le bloc de la machine asynchrone, nous nous rendons compte que la somme des activités énergétiques des éléments n'est pas la même pour les deux modèles (voir Tableau 4.4). *Cette différence est due au fait que le calcul d'activité utilise la valeur absolue.* Nous présentons le calcul formel de l'activité énergétique des inductances de la machine aux équations suivantes.

Avec les éléments multiports :

$$A_{stator} = \int \left| \frac{d\Phi_s}{dt} \cdot I_s \right| dt = \int |d\Phi_s \cdot I_s| \quad (4.1)$$

$$A_{rotor} = \int \left| \frac{d\Phi_r}{dt} \cdot I_r \right| dt = \int |d\Phi_r \cdot I_r|$$

En utilisant l'équation (3.29), nous obtenons :

$$A_{stator} = \int |I_s \cdot (L_s \cdot dI_s + L_m \cdot dI_r)| \quad (4.2)$$

$$A_{rotor} = \int |I_r \cdot (L_m \cdot dI_s + L_r \cdot dI_r)|$$

La somme de l'activité des inductances est définie comme suit :

$$\sum A_{multiport} = \int |I_s \cdot (L_s \cdot dI_s + L_m \cdot dI_r)| + \int |I_r \cdot (L_m \cdot dI_s + L_r \cdot dI_r)| \quad (4.3)$$

Avec les éléments monoports :

$$\begin{aligned}
 A_{sL_s} &= \int \left| \frac{d\Phi_{sL_s}}{dt} \cdot I_s \right| dt = sL_s \int |I_s \cdot dI_s| \\
 A_{rotor} &= \int \left| \frac{d\Phi_{LM}}{dt} \cdot \left(I_s + \frac{L_r}{L_m} I_r \right) \right| dt = \frac{L_m^2}{L_r} \int \left(I_s + \frac{L_r}{L_m} I_r \right) \left(dI_s + \frac{L_r}{L_m} dI_r \right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

La somme est donc :

$$\sum A_{monoport} = sL_s \int |I_s \cdot dI_s| + \frac{L_m^2}{L_r} \int \left(I_s + \frac{L_r}{L_m} I_r \right) \left(dI_s + \frac{L_r}{L_m} dI_r \right) \tag{4.5}$$

Les équations (4.3) et (4.5) prouvent que les activités des inductances ne sont pas les mêmes dans ces modèles. Il est évident de montrer que la somme de l'activité des inductances des éléments multiports est plus grande que celle des éléments monoports. Par contre, si nous ne prenons pas en compte le terme absolu dans les équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \sum A_{monoport}^* &= sL_s \int I_s \cdot dI_s + \frac{L_m^2}{L_r} \int \left(I_s + \frac{L_r}{L_m} I_r \right) \left(dI_s + \frac{L_r}{L_m} dI_r \right) \\
 &= \int (L_s \cdot I_s \cdot dI_s + L_m \cdot I_r \cdot dI_s + L_m \cdot I_s \cdot dI_r + L_r \cdot I_r \cdot dI_r) \\
 &= \sum A_{multiport}^*
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

La différence des activités des inductances provoque un écart de l'activité totale du modèle, qui n'est pas négligeable. Du fait que les activités énergétiques sont normalisées par l'activité totale pour obtenir les index d'activité, nous obtenons différents index. Certains éléments ayant l'index d'activité non négligeable dans le modèle B (par exemple, dans ce cas, la résistance rotorique RR) peuvent être supprimés quand nous étudions le modèle A. Ceci entraîne l'obtention de différents modèles réduits selon la manière de modéliser le système. Nous qualifions cette problématique comme *la non conservativité de l'activité énergétique*.

4.2.1.4. L'effet de masquage

Dans la réduction de la chaîne complète, nous excitons le modèle par une entrée en superposant les signaux (sinusoïdes ou chirps) aux valeurs correspondant au fonctionnement normal du système. Avec ces valeurs dues au fonctionnement normal (composantes continues), nous ne pouvons pas obtenir un modèle qui correspond uniquement aux hautes fréquences.

Par ailleurs, un autre problème se pose quand nous calculons l'activité et l'index d'activité. Les composantes continues correspondant au fonctionnement normal imposent de grandes activités énergétiques à certains éléments et pas à d'autres. Dans ce cas, *l'effet de perturbation*

est "masqué" par cette grande activité (le masquage dépend du rapport entre l'amplitude de la perturbation et de la composante continue) et quand nous normalisons par l'activité totale, nous ne trouvons plus la même influence des éléments. Ainsi, des éléments qui sont physiquement importants (par exemple des éléments dynamiques sources de résonance) et qui devraient être excités par cette perturbation voient leur influence en partie masquée par les composantes continues.

Pour résoudre ce problème, nous proposons de linéariser le modèle autour de son point de fonctionnement. Dans le modèle de la machine asynchrone dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , toutes les grandeurs sont alternatives, leur "régime de repos" est nul. Ainsi, quand nous linéarisons le modèle, nous remarquons que la partie mécanique est découplée de la partie électrique et de la commande. Ce phénomène est dû aux valeurs de repos nulles. Nous ne pouvons donc pas linéariser la machine asynchrone modélisée dans le repère (\mathbf{a}, \mathbf{b}) .

Pour résoudre ce problème, l'idée est tout d'abord d'utiliser la transformation de Park afin de représenter la machine à partir de variables (d, q) à évolution continue pour lesquelles il est possible de définir un point de repos non nul. Cependant, les transformations de Park usuelles liées aux flux, voire aux courants, nécessitent le calcul de la phase et de la pulsation du vecteur sur lequel on aligne généralement l'axe d . Par exemple, la transformation classiquement utilisée pour la commande vectorielle est la suivante :

$$\mathbf{r} = \arctan\left(\frac{\Phi_{rb}}{\Phi_{ra}}\right); \mathbf{w}_r = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4.7)$$

$$\Phi_r = \Phi_{rd}, \Phi_{rq} = 0$$

L'angle \mathbf{r} , utilisé ici comme angle de transformation, dépend donc de variables alternatives (flux rotor dans les axes (\mathbf{a}, \mathbf{b}) non linéarisables autour d'un point de fonctionnement).

Nous proposons d'utiliser un modèle "assez particulier" de la machine asynchrone. Il s'agit de la machine asynchrone modélisée dans le repère (d, q) lié au vecteur tension statorique dont les deux entrées sont à évolution continue et sont constituées de $V_s = V_{sd}$ ($V_{sq} = 0$) et \mathbf{w}_s (la pulsation de l'angle \mathbf{j}_s du vecteur tension V_s). En raisonnant sur un bilan de puissance, on peut représenter l'onduleur de tension en valeur moyenne par un transformateur monophasé dont les grandeurs d'entrée/sortie sont continues (donc linéarisables) et dont le rapport de transformation s'exprime selon les trois rapports cycliques issus de la commande :

$$V_{sd} = \mathbf{h}_d V_{Cf} \quad (4.8)$$

$$I_{entrée} = \mathbf{h}_d I_{sd}$$

tel que :

$$V_{sd} = \sqrt{V_{sa}^2 + V_{sb}^2} = \sqrt{\frac{1}{3}((\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)^2 + (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_3)^2 + (\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3)^2)} V_{Cf} \quad (4.9)$$

Nous avons présenté ce modèle "tout continu" au Chapitre 3. Sa linéarisation est traitée dans la section 4.2.2.1.

4.2.1.5. Le choix de l'entrée perturbée

Comme dans l'étude du modèle de la chaîne de transmission mécanique, suivant l'entrée excitée, les éléments énergétiquement actifs ne sont pas les mêmes. Nous illustrons cette problématique par des essais effectués sur le modèle B. Nous introduisons une perturbation sinusoïdale à la fréquence de résonance mécanique ($F = 18\text{Hz}$) à une entrée (U_{cont} , C_{ref} ou F_{res}) à la fois. L'amplitude de la perturbation est de 10% de la valeur nominale de l'entrée. Nous présentons les index d'activité des éléments Figure 4.20.

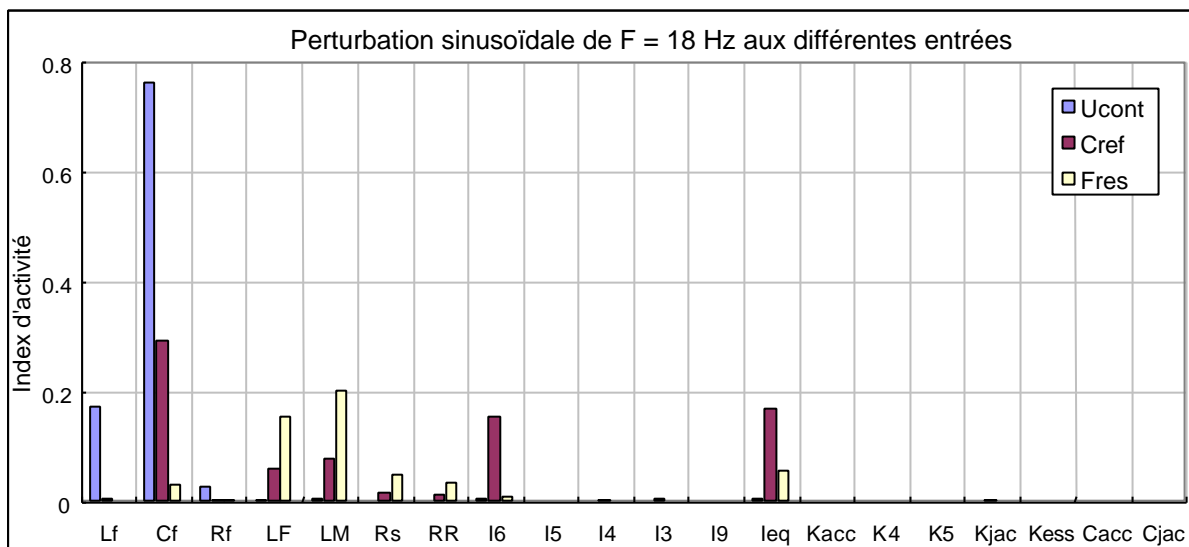


Figure 4.20. L'effet de filtrage: index d'activité pour différentes entrées perturbées.

Nous constatons qu'une perturbation sur l'entrée U_{cont} excite beaucoup plus les éléments du filtre que les éléments mécaniques, contrairement à l'entrée F_{res} . Nous remarquons que seule l'entrée C_{ref} peut exciter à la fois les domaines électrique et mécanique, surtout quand la perturbation est à la fréquence de résonance (électrique ou mécanique). Nous pouvons donc en déduire qu'un élément est plus sensible vis-à-vis d'une entrée que d'une autre. Nous qualifions cette problématique d'*effet de filtrage* en ce sens que les éléments "proches" de l'entrée excitée peuvent filtrer l'effet de la perturbation vis-à-vis des éléments les plus éloignés sur le Bond Graph.

La sensibilité de l'activité énergétique d'un élément peut être approchée en étudiant la sensibilité des variables de puissance (effort, flux). En fait, la sensibilité d'une variable V par rapport à une entrée E se base sur l'expression de la fonction de transfert de V/E . Pour un système linéaire simple ayant plusieurs entrées, il est possible d'analyser la sensibilité des variables d'effort et de flux de chaque élément par rapport à l'entrée. Quand le modèle est non linéaire comportant beaucoup d'éléments, il n'est pas évident d'effectuer cette étude (voir Annexe E).

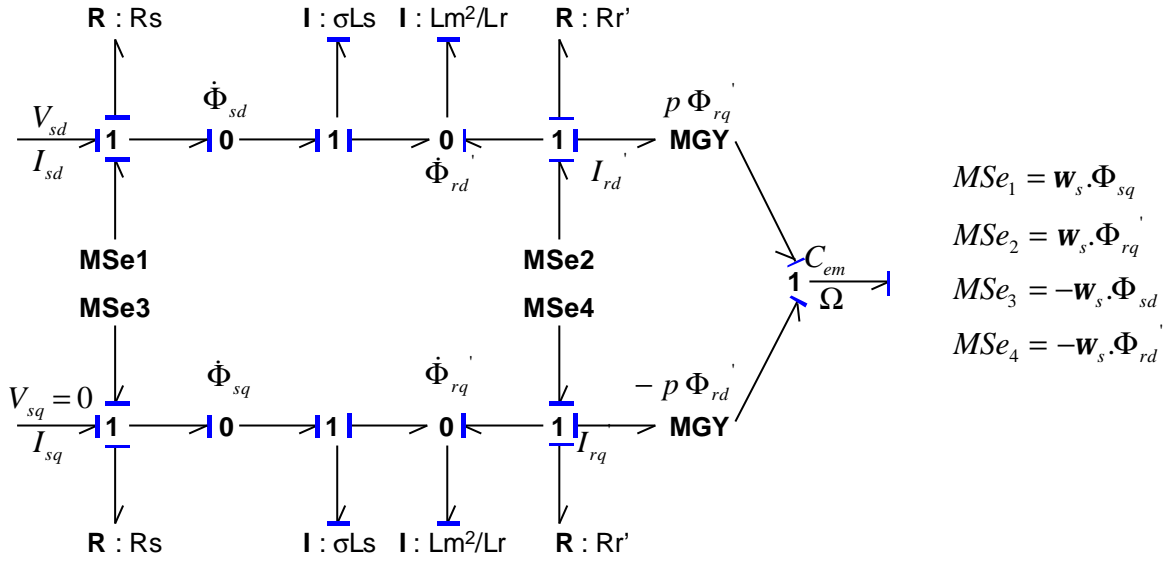
4.2.2. Une solution : se baser sur un modèle à variables continues

Nous avons montré que l'*effet de masquage* ne peut être résolu qu'en travaillant sur le modèle linéarisé. Or, le modèle à variables alternatives, en particulier pour la machine asynchrone représentée dans le repère fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}), ne nous permet pas de faire la linéarisation. Ainsi, nous considérons la machine asynchrone dans le repère tournant lié au vecteur tension statorique et le modèle moyen continu de l'onduleur. La modélisation de cette machine a été expliquée dans la partie 3.2.5.5 du Chapitre 3. L'équation d'état du modèle complet de la chaîne de traction est présentée en Annexe C.1. En régime permanent pour un point de fonctionnement donné, les valeurs nominales de toutes les grandeurs ne sont plus nulles. Comme dans les modélisations précédentes, le nouveau modèle est toujours non linéaire en raison de la conversion électromécanique et de la présence de la commande qui intervient sur le convertisseur.

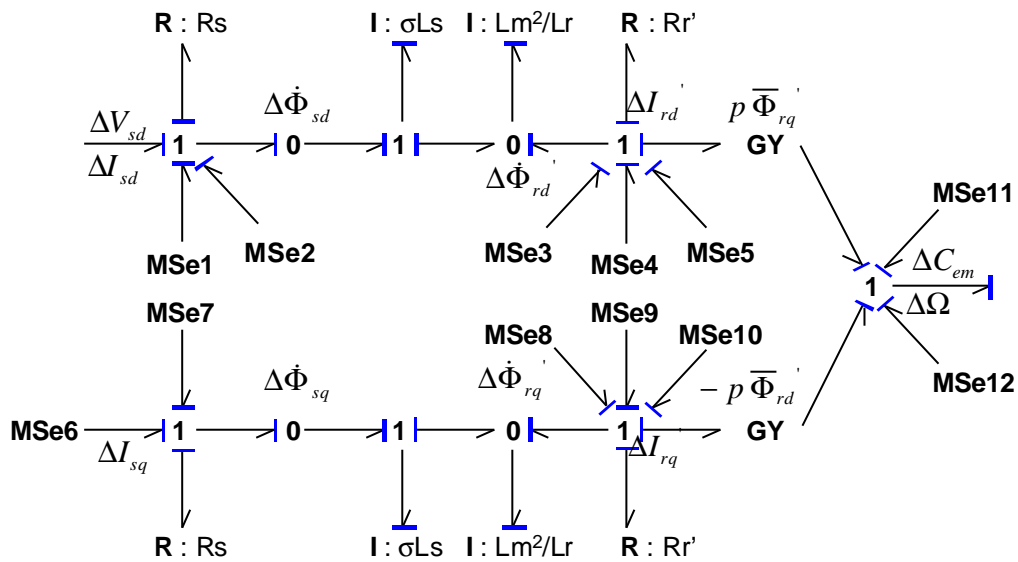
Dans un premier temps, nous linéarisons le modèle de la machine asynchrone autour de son point de fonctionnement nominal. Nous allons ensuite simplifier le modèle linéarisé en utilisant la méthode MORA et la MPS.

4.2.2.1. Modèle linéarisé

Nous construisons le modèle en petit signal en appliquant la méthode présentée dans la section 2.1.1 du Chapitre 2. Les équations d'état du modèle linéarisé sont présentées en Annexe C.2. La Figure 4.21 rappelle le modèle non linéaire initial et montre le modèle bond graph linéarisé de la machine asynchrone lié au vecteur de tension statorique.



(a). modèle non linéaire de la machine représenté dans un repère lié à la tension stator.



(b). Modèle linéarisé petit signal.

Figure 4.21. Modèle de la machine asynchrone lié au vecteur tension statorique.

Nous fixons $\Delta V_{sq} = 0$ (le modèle de la machine asynchrone liée au vecteur tension statorique impose toujours $V_{sq} = 0$). Les gains des **MSe** utilisées dans la Figure 4.21 (b) correspondent à :

$$\begin{aligned}
 MSe_1 &= \bar{w}_s \cdot \Delta \Phi_{sq} & MSe_7 &= -\Delta w_s \cdot \bar{\Phi}_{sd} \\
 MSe_2 &= \Delta w_s \cdot \bar{\Phi}_{sq} & MSe_8 &= -\bar{w}_s \cdot \Delta \Phi_{rd} \\
 MSe_3 &= \bar{w}_s \cdot \Delta \Phi_{rq} & MSe_9 &= -\Delta w_s \cdot \bar{\Phi}_{rd} \\
 MSe_4 &= \Delta w_s \cdot \bar{\Phi}_{rq} & MSe_{10} &= p \cdot \Delta \Phi_{rd} \cdot \bar{\Omega} \\
 MSe_5 &= -p \cdot \Delta \Phi_{rq} \cdot \bar{\Omega} & MSe_{11} &= p \cdot \Delta \Phi_{rq} \cdot \bar{I}_{rd} \\
 MSe_6 &= -\bar{w}_s \cdot \Delta \Phi_{sd} & MSe_{12} &= -p \cdot \Delta \Phi_{rd} \cdot \bar{I}_{rq}
 \end{aligned}$$

où les termes \bar{x} représentent les valeurs des variables x au point de fonctionnement, tandis que les notations Δx symbolisent les variations (petits signaux) des variables x .

Par ailleurs, nous devons construire le modèle linéarisé du convertisseur. En basant sur le Tableau 2.2, nous obtenons le modèle linéarisé présenté à la Figure 4.22.

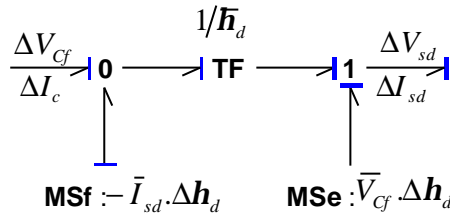


Figure 4.22. Modèle en petit signal du convertisseur de rapport cyclique h_d .

4.2.2.2. Simplification du modèle linéarisé par la méthode MORA

Nous avons effectué des simulations pour observer l'index d'activité des éléments en fonction de la gamme de fréquence des signaux d'entrée. Nous utilisons des sinusoïdes de fréquence :

- $F = 1.6$ Hz pour regarder le comportement du modèle en très basse fréquence,
- $F = 16$ Hz (fréquence juste en deçà de la fréquence de résonance de 18 Hz) pour analyser le comportement du modèle autour de la fréquence de résonance,
- $F = 160$ Hz pour représenter l'excitation en haute fréquence.

Le point de fonctionnement nominal est déterminé par l'entrée continue $U_{cont} = 2750$ V, la consigne de couple $C_{ref} = 5$ kNm, le flux de référence $\Phi_{ref} = 4$ Wb et la vitesse du train en régime permanent $VRP = 8$ m/s. Les activités énergétiques sont calculées en régime harmonique établi pendant une durée égale à 20 fois la période de la sinusoïde. Nous présentons Figure 4.23 les index d'activité des éléments pour les excitations ci-dessus. Nous excitons une entrée (U_{cont} , C_{ref} ou F_{res}) à la fois. Les index d'activité des éléments au point de fonctionnement nominal sont illustrés par la Figure 4.24.

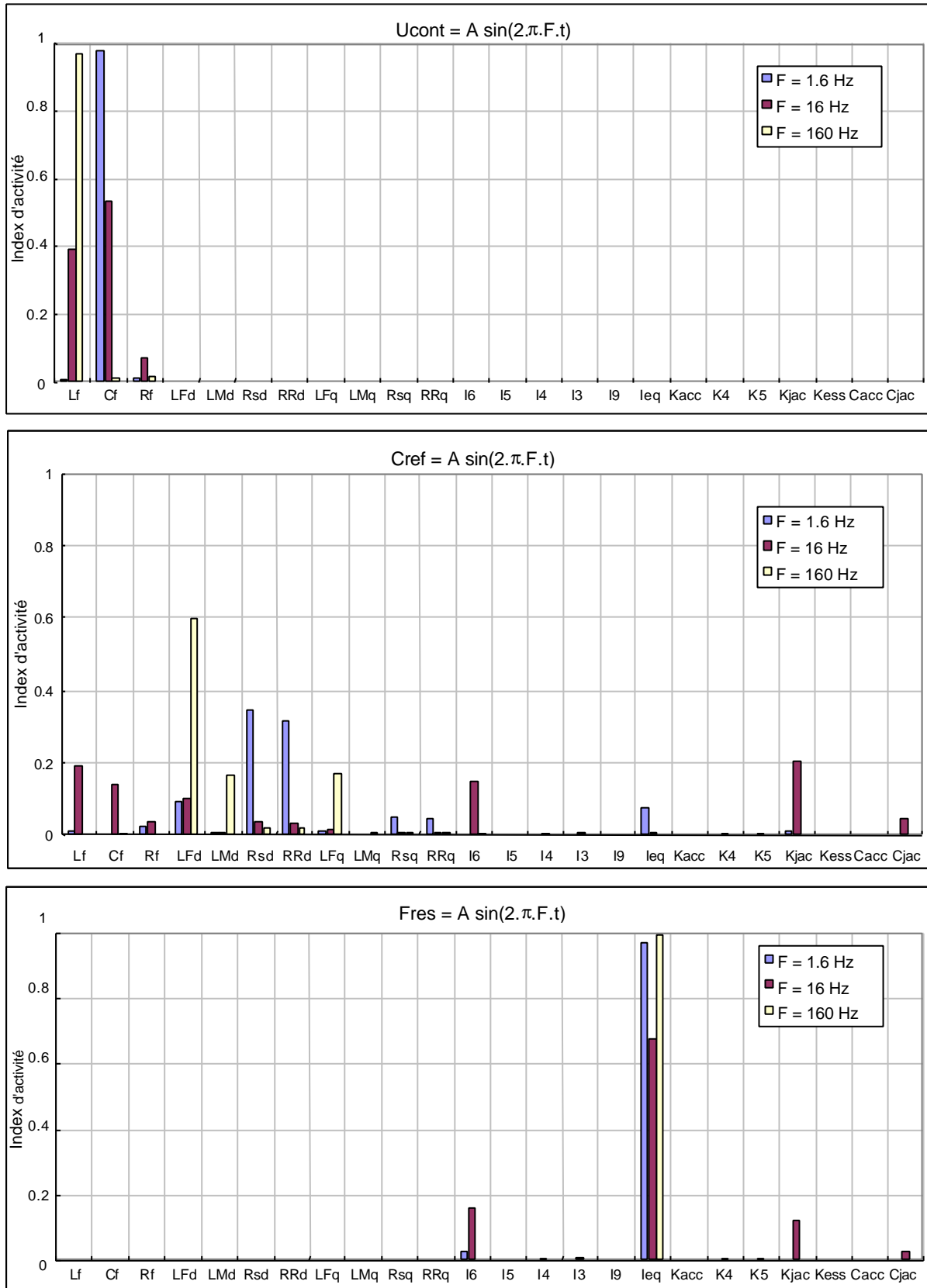


Figure 4.23. Index d'activité des éléments pour des excitations sinusoïdales sur le modèle linéarisé en entrée U_{cont} , C_{ref} et F_{res} en boucle fermée.

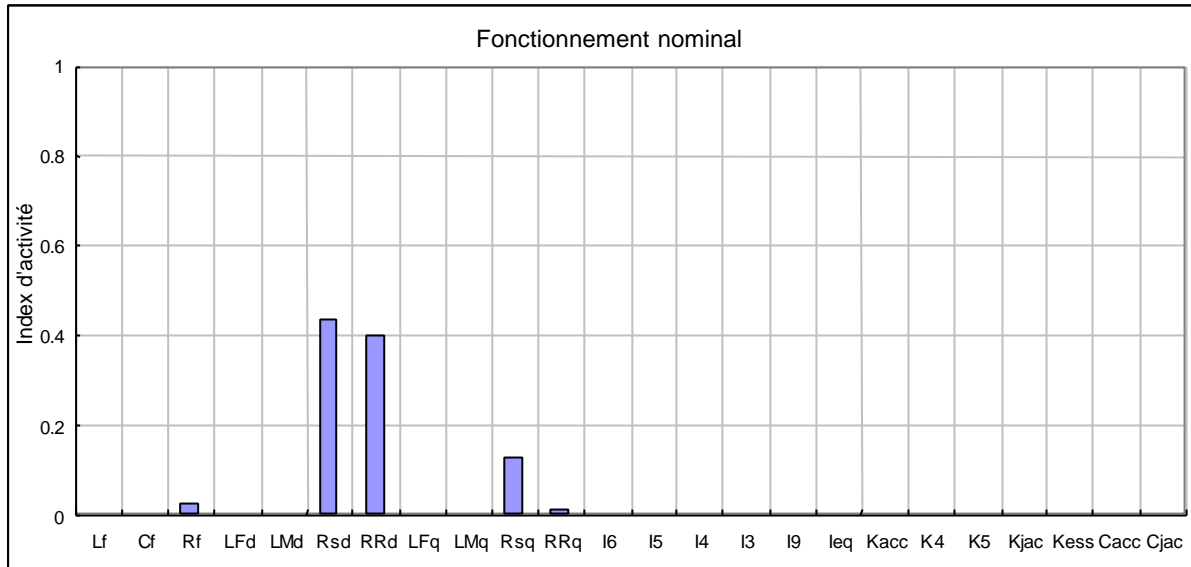


Figure 4.24. Index d'activité des éléments au point de fonctionnement nominal.

Dans ces essais en boucle fermée, nous injectons la variation $\Delta \mathbf{h}_d$ de la commande autour du point de fonctionnement $\bar{\mathbf{h}}_d$ au modèle linéarisé du convertisseur. En fait, une excitation à une entrée provoque, par l'effet de contre réaction de la commande, une variation des entrées de commande : rapport cyclique ($\Delta \mathbf{h}_d$) et pulsation statorique ($\Delta \mathbf{w}_s$). Si, comme c'est le cas ici, la fréquence des perturbations se trouve dans la bande passante de la loi de commande, les variations des entrées de commande opèrent de manière à compenser (filtrer) cette "perturbation". La Figure 4.25 montre que $\Delta \mathbf{h}_d$ est en opposition de phase (c'est à dire ayant un déphasage de 180°) par rapport à la perturbation, ce qui traduit l'effet de compensation. C'est la raison pour laquelle une excitation à l'entrée U_{cont} n'excite toujours pas les éléments mécaniques tel que I_6 et K_{jac} , même si la pulsation de cette excitation est proche de la fréquence de résonance (voir Figure 4.23 pour le cas de $F = 16$ Hz). Ce phénomène apparaît aussi pour une excitation à l'entrée F_{res} qui n'excite jamais les éléments électriques.

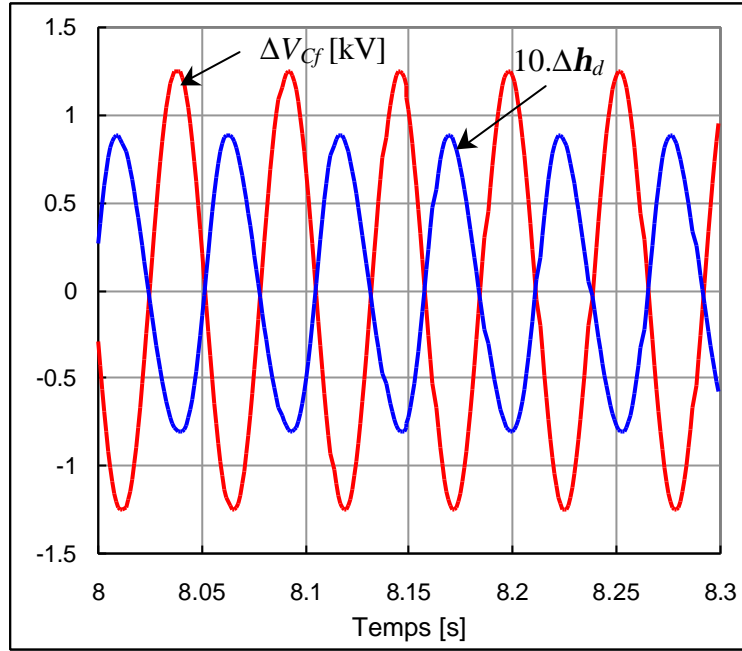


Figure 4.25. Compensation de la variation de la tension de la capacité ΔV_{cf} par la variation du rapport cyclique Δh_d pour une sinusoïde de la fréquence de résonance à l'entrée U_{cont} .

Explication mathématique :

Le modèle linéarisé du convertisseur est défini par l'équation: $\Delta V_{sd} = \bar{h}_d \Delta V_{cf} + \Delta h_d \bar{V}_{cf}$ où $\Delta V_{cf} = V_{cf} - \bar{V}_{cf}$ et $\Delta h_d = h_d - \bar{h}_d$.

- Dans le cas d'une commande en boucle ouverte ($\Delta h_d = 0$), l'équation ci-dessus devient $\Delta V_{sd} = \bar{h}_d \Delta V_{cf}$ où $\bar{h}_d = 0.182$. Cette variation est donc transmise avec un rapport de 18 % non négligeable.
- Si $\Delta h_d \neq 0$ (cas en boucle fermée) et par ailleurs $\Delta h_d = -K \Delta V_{cf}$ (avec $K > 0$), alors $\Delta V_{sd} = (\bar{h}_d - K \bar{V}_{cf}) \Delta V_{cf}$ est quasiment négligeable. Ainsi, la variation de V_{cf} est nettement atténuée à l'entrée de la machine par la commande.

Nous présentons aussi Figure 4.26 l'index d'activité des éléments dans le modèle grand signal (modèle non linéaire) pour une perturbation sinusoïdale de fréquence $F = 16$ Hz sur la consigne C_{ref} . Nous remarquons que l'effet de masquage nous empêche de voir l'importance des éléments responsables de la résonance, ce qui n'est pas le cas dans le modèle linéarisé (modèle petit signal). Nous constatons donc l'intérêt de la linéarisation du modèle autour du point de fonctionnement pour supprimer cet effet de masquage.

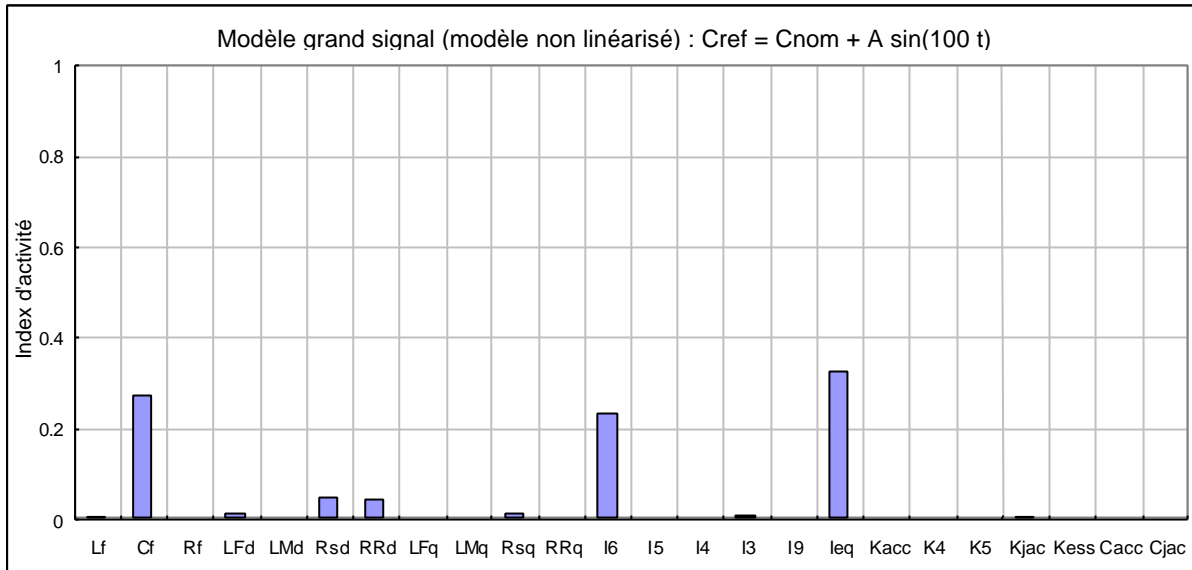


Figure 4.26. Index d'activité des éléments avec le modèle grand signal.

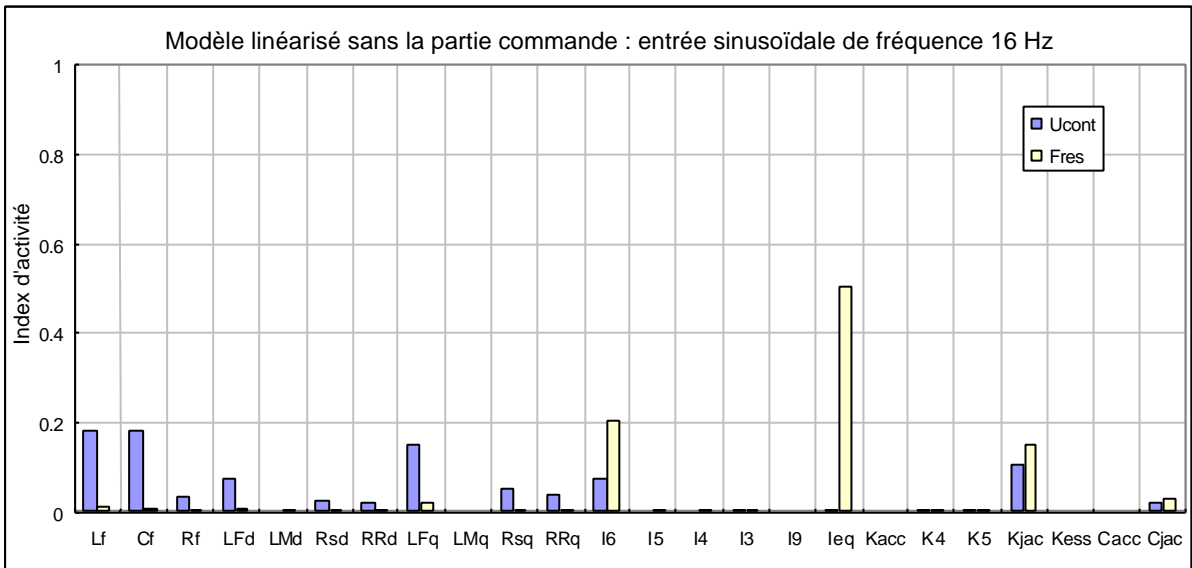


Figure 4.27. Index d'activité des éléments du modèle linéarisé en boucle ouverte pour l'entrée sinusoïdale.

En l'absence de loi de commande (voir Figure 4.27), la perturbation sur U_{cont} n'est pas rejetée. On peut noter ici qu'une perturbation de l'entrée U_{cont} de fréquence 16 Hz (très proche de la fréquence de résonance mécanique qui est de 18 Hz) excite les éléments mécaniques I_6 et K_{jac} , dont on sait qu'ils sont responsables de la résonance mécanique. Finalement, on observe qu'une entrée U_{cont} excite plus les éléments électriques que les éléments mécaniques, et *vice versa* pour l'entrée F_{res} . Le modèle linéarisé ne peut pas résoudre cette problématique qualifiée d'effet de filtrage. Ceci est dû à la sensibilité des variables par rapport à une entrée. L'étude de la sensibilité des variables sur le modèle linéarisé (voir Annexe E) n'est pas aisée à faire puisqu'il existe beaucoup d'éléments et d'entrées. Il est donc nécessaire d'exciter chaque entrée pour être sûr de la fiabilité de la réduction de modèle.

4.2.2.3. Simplification du modèle linéarisé par la MPS

Préparation :

Dans la partie mécanique, nous remarquons l'existence des raideurs de ressorts de valeurs très élevées (K_{acc} , K_4 , K_5 , et K_{ess} qui sont de l'ordre de 10^{10}). Ces éléments, que nous pouvons classer comme des éléments C de "confort", sont mis dans le modèle pour éviter des problèmes de causalité dérivée aux inerties. Ces éléments peuvent être enlevés directement du modèle. Le modèle mécanique ne contient alors que des inerties et l'accouplement Jacquemin. Les inerties peuvent être représentées par 2 inerties totalisées comme suit :

$$I_{tot1} = I_6 + I_5 + \left(\frac{R_5}{R_4}\right)^2 I_4 + \left(\frac{R_5}{R_3}\right)^2 I_3 \quad (4.10)$$

$$I_{tot2} = I_{eq} + I_9$$

Le modèle mécanique associé est représenté Figure 4.28.

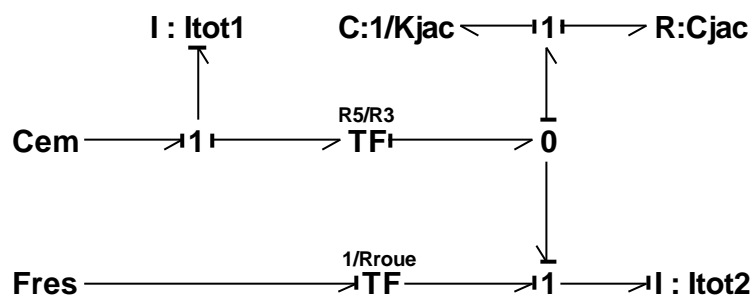


Figure 4.28. Modèle mécanique sans les éléments C de confort.

Analyse des boucles causales :

Nous appliquons la Méthode des Perturbations Singulières (MPS) sur le modèle complet avec le modèle mécanique sans les éléments C de confort. Pour mettre en œuvre cette méthode, nous avons besoin de calculer les gains et les constantes de temps ou les périodes naturelles des boucles causales dans le modèle. Une période naturelle T_n est liée à la pulsation naturelle w_n d'une boucle causale entre 2 éléments dynamiques, tandis qu'une constante de temps T est liée à une boucle causale d'ordre 1. Nous présentons les constantes de temps ou les périodes naturelles des boucles causales dans le Tableau 4.5. En gris clair, sont notés les couplages électromécaniques. La boucle causale marquée gris foncé indique le couplage associé au phénomène de résonance de la partie mécanique.

Ce dernier exemple met en exergue l'intérêt de ce modèle et la puissance de la méthodologie Bond Graph qui permet de caractériser les couplages interdomaines (ici couplage électromécanique).

Tableau 4.5. Les gains et les constantes de temps ou des périodes naturelles des boucles causales dans le modèle complet linéarisé.

Partie	Élément	$G(s)$	w_n [sec]	T ou T_n [sec]
Filtre	$L_f - R_f$	$-\frac{R_f}{L_f \cdot s}$	—	$\frac{L_f}{R_f} = 0.085$
	$L_f - C_f$	$-\frac{1}{L_f \cdot C_f \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{1}{L_f \cdot C_f}} = 117.65$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{L_f \cdot C_f} = 0.053$
MAS - d	$C_f - sL_s$	$-\frac{\bar{h}_d^2}{aL_s \cdot C_f \cdot s^2}$	$\frac{\bar{h}_d}{\sqrt{sL_s \cdot C_f}} = 38.82$	$\frac{2 \cdot p}{\bar{h}_d} \cdot \sqrt{sL_s \cdot C_f} = 0.162$
	$sL_s - R_s$	$-\frac{R_s}{\sigma L_s \cdot s}$	—	$\frac{sL_s}{R_s} = 0.044$
	$sL_s - \left(\frac{L_m}{L_r}\right)^2 R_r$	$-\frac{R_r \cdot L_m^2}{L_r^2 \cdot sL_s \cdot s}$	—	$\frac{L_r^2 \cdot sL_s}{R_r \cdot L_m^2} = 0.054$
	$\frac{L_m^2}{L_r} - \left(\frac{L_m}{L_r}\right)^2 R_r$	$-\frac{R_r}{L_r \cdot s}$	—	$\frac{L_r}{R_r} = 0.755$
	$sL_s - I_{tot1}$	$-\frac{(p \cdot p_{rq})^2}{sL_s \cdot I_{tot1} \cdot s^2}$	$\frac{p \sqrt{ p_{rq} }}{\sqrt{sL_s \cdot I_{tot1}}} = 37.39$	$\frac{2 \cdot p}{p \sqrt{ p_{rq} }} \cdot \sqrt{sL_s \cdot I_6} = 0.168$
	$\frac{L_m^2}{L_r} - I_{tot1}$	$-\frac{L_r (p \cdot p_{rq})^2}{L_m^2 \cdot I_{tot1} \cdot s^2}$	$\frac{p \sqrt{ p_{rq} } \sqrt{L_r}}{\sqrt{L_m^2 \cdot I_{tot1}}} = 10.03$	$\frac{2 \cdot p \cdot L_m}{p \sqrt{ p_{rq} }} \cdot \sqrt{\frac{I_{tot1}}{L_r}} = 0.626$
MAS - q	$sL_s - R_s$	$-\frac{R_s}{\sigma L_s \cdot s}$	—	$\frac{sL_s}{R_s} = 0.044$
	$sL_s - \left(\frac{L_m}{L_r}\right)^2 R_r$	$-\frac{R_r \cdot L_m^2}{L_r^2 \cdot \sigma L_s \cdot s}$	—	$\frac{L_r^2 \cdot sL_s}{R_r \cdot L_m^2} = 0.054$
	$\frac{L_m^2}{L_r} - \left(\frac{L_m}{L_r}\right)^2 R_r$	$-\frac{R_r}{L_r \cdot s}$	—	$\frac{L_r}{R_r} = 0.755$
	$sL_s - I_{tot1}$	$-\frac{(p \cdot p_{rd})^2}{sL_s \cdot I_6 \cdot s^2}$	$\frac{p \sqrt{ p_{rd} }}{\sqrt{sL_s \cdot I_{tot1}}} = 6.78$	$\frac{2 \cdot p}{p \sqrt{ p_{rd} }} \cdot \sqrt{sL_s \cdot I_{tot1}} = 0.927$
	$\frac{L_m^2}{L_r} - I_{tot1}$	$-\frac{L_r (p \cdot p_{rd})^2}{L_m^2 \cdot I_6 \cdot s^2}$	$\frac{p \sqrt{ p_{rd} } \sqrt{L_r}}{\sqrt{L_m^2 \cdot I_{tot1}}} = 1.82$	$\frac{2 \cdot p \cdot L_m}{p \sqrt{ p_{rd} }} \cdot \sqrt{\frac{I_{tot1}}{L_r}} = 3.455$
Mécanique	$I_{tot1} - C_{jac}$	$-\left(\frac{R_5}{R_3}\right)^2 \frac{C_{jac}}{I_{tot1} \cdot s}$	—	$\left(\frac{R_3}{R_5}\right)^2 \frac{I_{tot1}}{C_{jac}} = 0.059$
	$I_{tot1} - K_{jac}$	$-\left(\frac{R_5}{R_3}\right)^2 \frac{K_{jac}}{I_{tot1} \cdot s^2}$	$\left(\frac{R_5}{R_3}\right) \sqrt{\frac{K_{jac}}{I_{tot1}}} = 113.94$	$2 \cdot p \cdot \left(\frac{R_3}{R_5}\right) \sqrt{\frac{I_{tot1}}{K_{jac}}} = 0.055$
	$I_{tot2} - C_{jac}$	$-\frac{C_{jac}}{I_{tot2} \cdot s}$	—	$\frac{I_{tot2}}{C_{jac}} = 2.073$
	$I_{tot2} - K_{jac}$	$-\frac{K_{jac}}{I_{tot2} \cdot s^2}$	$\sqrt{\frac{K_{jac}}{I_{tot2}}} = 19.21$	$2 \cdot p \cdot \sqrt{\frac{I_{tot2}}{K_{jac}}} = 0.327$

Par ce tableau, nous remarquons que la période naturelle des boucles causales ($I - C$) les plus rapides correspond à la fréquence de résonance de 18 Hz (ou 0.055 s). Les constantes de temps ($R - I, R - C$) les plus petites ont le même ordre de grandeurs. Nous avons d'abord fait l'hypothèse que les éléments du filtre L_f et C_f représentent les dynamiques rapides. Mais, le modèle lent obtenu n'est plus stable, même au point de fonctionnement. Nous décidons alors que le modèle initial, obtenu après suppression des éléments mécaniques de confort, est déjà le modèle lent et que nous ne pouvons pas le réduire d'avantage par la méthode des perturbations singulières dans ce cas linéarisé.

4.2.3. Simplification du modèle non linéaire par la MPS

Le modèle étant non linéaire, nous allons essayer de le normaliser. Le modèle que nous prenons est le modèle dont :

- La machine asynchrone est modélisée dans le repère lié au vecteur tension statorique.
- La transmission mécanique est réduite et ne contient que les inerties totalisées et le réducteur de Jacquemin (voir paragraphe 4.2.2.3).

L'équation d'état de ce modèle est présentée par l'équation (4.11). Nous utilisons les variables de puissance comme variables d'état pour simplifier le dénominateur.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} i_{L_f} &= \frac{1}{L_f} (-R_f \cdot i_{L_f} - v_{C_f} + U_{cont}) \\
 \frac{d}{dt} v_{C_f} &= \frac{1}{C_f} (i_{L_f} - \mathbf{h}_d \cdot i_{sd}) \\
 \frac{d}{dt} i_{sd} &= \frac{1}{\mathbf{s}L_s} (\mathbf{h}_d \cdot v_{C_f} - R_{sr} \cdot i_{sd} + R_r \cdot i_{rd} + p \cdot i_{LMq} \cdot L_r \cdot \Omega_{Ito1}) + \mathbf{w}_s \cdot i_{sq} \\
 \frac{d}{dt} i_{sq} &= \frac{1}{\mathbf{s}L_s} (-R_{sr} \cdot i_{sq} + R_r \cdot i_{LMq} - p \cdot i_{LMd} \cdot L_r \cdot \Omega_{Ito1}) - \mathbf{w}_s \cdot i_{sd} \\
 \frac{d}{dt} i_{LMq} &= \frac{R_r}{L_r} (i_{sd} - i_{LMd}) - p \cdot i_{LMq} \cdot \Omega_{Ito1} + \mathbf{w}_s \cdot i_{LMq} \\
 \frac{d}{dt} i_{LMd} &= \frac{R_r}{L_r} (i_{sq} - i_{LMq}) + p \cdot i_{LMd} \cdot \Omega_{Ito1} - \mathbf{w}_s \cdot i_{LMd} \\
 \frac{d}{dt} \Omega_{Ito1} &= \frac{1}{I_{to1}} \left(p \cdot L_r (i_{LMd} i_{sq} - i_{LMq} i_{sd}) - \left(\frac{R_5}{R_3} \right)^2 C_{jac} \Omega_{Ito1} + \frac{R_5}{R_3} C_{jac} \Omega_{Ito2} - \left(\frac{R_5}{R_3} \right)^2 C_{Kjac} \right) \\
 \frac{d}{dt} \Omega_{Ito2} &= \frac{1}{I_{to2}} \left(\frac{R_5}{R_3} C_{jac} \Omega_{Ito1} - C_{jac} \Omega_{Ito2} + C_{Kjac} - R_{roue} \cdot F_{res} \right) \\
 \frac{d}{dt} C_{Kjac} &= K_{jac} \left(\frac{R_5}{R_3} \Omega_{Ito1} - \Omega_{Ito2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

où

$$R_r' = \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r$$

$$R_{sr} = R_s + R_r'$$

$$L_r' = \frac{L_m^2}{L_r}$$

$$I_{tot1} = I_6 + I_5 + \left(\frac{R_5}{R_4} \right)^2 I_4 + \left(\frac{R_5}{R_3} \right)^2 I_3$$

$$I_{tot2} = I_{eq} + I_9$$

$i_{s(d,q)}$: courant de l'inductance de fuite totalisée au stator LF .

$i_{LM(d,q)}$: courant de l'inductance magnétisante "ramenée au stator" LM .

C_{Kjac} : couple transmis au ressort de la transmission Jacquemin.

$\Omega_{I_{tot}(1,2)}$: vitesse de rotation liée à l'inertie totalisée.

Les valeurs maximales des variables d'état et des entrées sont déterminées comme deux fois leur valeur nominale (en valeur absolue) au point de fonctionnement. Ces valeurs nominales obtenues au point de fonctionnement sont définies par l'ensemble de $U_{cont} = 2.75 \text{ kV}$,

$C_{ref} = 5 \text{ kNm}$, $\Phi_{ref} = 4 \text{ Wb}$ et $VRP = 8 \text{ rad/s}$ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} i_{Lf} = 108.89 \text{ A} \\ v_{Cf} = 2744.56 \text{ V} \\ \mathbf{h}_d = 0.182 \\ i_{sd} = 597.90 \text{ A} \\ i_{sq} = -326.96 \text{ A} \\ i_{LMd} = -38.36 \text{ A} \\ i_{LMq} = -211.60 \text{ A} \\ \Omega_{I_{tot1}} = 55.05 \text{ rad/s} \\ \Omega_{I_{tot2}} = 13.91 \text{ rad/s} \\ C_{Kjac} = 19782.61 \text{ Nm} \end{array} \right.$$

L'équation d'état normalisée s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \frac{L_f (i_{Lf})_{\max}}{m_1} \frac{d}{dt} \tilde{i}_{Lf} &= \frac{1}{m_1} \left(-R_f \cdot \tilde{i}_{Lf} (i_{Lf})_{\max} - \tilde{v}_{Cf} (v_{Cf})_{\max} + \tilde{U}_{cont} (U_{cont})_{\max} \right) \\
 \frac{C_f (v_{Cf})_{\max}}{m_2} \frac{d}{dt} \tilde{v}_{Cf} &= \frac{1}{m_2} \left(\tilde{i}_{Lf} (i_{Lf})_{\max} - \tilde{\mathbf{h}}_d \cdot \tilde{i}_{sd} (\mathbf{h}_d)_{\max} (i_{sd})_{\max} \right) \\
 \frac{\mathbf{s}L_s (i_{sd})_{\max}}{m_3} \frac{d}{dt} \tilde{i}_{sd} &= \frac{1}{m_3} \left(\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{h}}_d \cdot \tilde{v}_{Cf} (\mathbf{h}_d)_{\max} (v_{Cf})_{\max} - R_{sr} \cdot \tilde{i}_{sd} (i_{sd})_{\max} \\ &+ R_r \cdot \tilde{i}_{LMd} (i_{LMd})_{\max} + p \cdot L_r \cdot \tilde{i}_{LMq} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (i_{LMq})_{\max} (\Omega_{Ito1})_{\max} \\ &+ \mathbf{s}L_s \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s \cdot \tilde{i}_{sq} (\mathbf{w}_s)_{\max} (i_{sq})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{\mathbf{s}L_s (i_{sq})_{\max}}{m_4} \frac{d}{dt} \tilde{i}_{sq} &= \frac{1}{m_4} \left(\begin{aligned} &- R_{sr} \cdot \tilde{i}_{sq} (i_{sq})_{\max} + R_r \cdot \tilde{i}_{LMq} (i_{LMq})_{\max} \\ &- p \cdot L_r \cdot \tilde{i}_{LMd} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (i_{LMd})_{\max} (\Omega_{Ito1})_{\max} \\ &- \mathbf{s}L_s \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s \cdot \tilde{i}_{sd} (\mathbf{w}_s)_{\max} (i_{sd})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{L_r (i_{LMd})_{\max}}{m_5} \frac{d}{dt} \tilde{i}_{LMd} &= \frac{1}{m_5} \left(\begin{aligned} &R_r (\tilde{i}_{sd} (i_{sd})_{\max} - \tilde{i}_{LMd} (i_{LMd})_{\max}) + L_r \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s \cdot \tilde{i}_{LMq} (\mathbf{w}_s)_{\max} (i_{LMq})_{\max} \\ &- p \cdot L_r \cdot \tilde{i}_{LMq} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (i_{LMq})_{\max} (\Omega_{Ito1})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{L_r (i_{LMq})_{\max}}{m_6} \frac{d}{dt} \tilde{i}_{LMq} &= \frac{1}{m_6} \left(\begin{aligned} &R_r (\tilde{i}_{sq} (i_{sq})_{\max} - \tilde{i}_{LMq} (i_{LMq})_{\max}) - L_r \cdot \tilde{\mathbf{w}}_s \cdot \tilde{i}_{LMd} (\mathbf{w}_s)_{\max} (i_{LMd})_{\max} \\ &+ p \cdot L_r \cdot \tilde{i}_{LMd} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (i_{LMd})_{\max} (\Omega_{Ito1})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{I_{to1} (\Omega_{Ito1})_{\max}}{m_7} \frac{d}{dt} \tilde{\Omega}_{Ito1} &= \frac{1}{m_7} \left(\begin{aligned} &p \cdot L_r (\tilde{i}_{LMd} \cdot \tilde{i}_{sq} (i_{LMd})_{\max} (i_{sq})_{\max} - \tilde{i}_{LMq} \cdot \tilde{i}_{sd} (i_{LMq})_{\max} (i_{sd})_{\max}) \\ &- \left(\frac{R_5}{R_3} \right)^2 C_{jac} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (\Omega_{Ito1})_{\max} \\ &+ \frac{R_5}{R_3} C_{jac} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito2} (\Omega_{Ito2})_{\max} - \left(\frac{R_5}{R_3} \right)^2 \tilde{C}_{Kjac} (C_{Kjac})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{I_{to2} (\Omega_{Ito2})_{\max}}{m_8} \frac{d}{dt} \tilde{\Omega}_{Ito2} &= \frac{1}{m_8} \left(\begin{aligned} &\frac{R_5}{R_3} C_{jac} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito1} (\Omega_{Ito1})_{\max} - C_{jac} \cdot \tilde{\Omega}_{Ito2} (\Omega_{Ito2})_{\max} \\ &+ \tilde{C}_{Kjac} (C_{Kjac})_{\max} - R_{roue} \cdot \tilde{F}_{res} (F_{res})_{\max} \end{aligned} \right) \\
 \frac{(C_{Kjac})_{\max}}{K_{jac} \cdot m_9} \frac{d}{dt} \tilde{C}_{Kjac} &= \frac{1}{m_9} \left(\frac{R_5}{R_3} \tilde{\Omega}_{Ito1} (\Omega_{Ito1})_{\max} - \tilde{\Omega}_{Ito2} (\Omega_{Ito2})_{\max} \right)
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

où les variables \tilde{x} représentent les variables d'état x normalisées.

Les termes m_i correspondent à la valeur maximale des coefficients (en valeur absolue) qui apparaissent dans l'équation d'état i . Par exemple :

$$m_1 = \max(R_f (i_{Lf})_{\max}, (v_{Cf})_{\max}, (U_{cont})_{\max}) \tag{4.13}$$

Les coefficients des équations d'état (qui apparaissent au début d'équation) représentent les paramètres e_i . Par exemple, pour la première équation d'état :

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_{L_f} = \frac{L_f (i_{L_f})_{\max}}{m_1} \quad (4.14)$$

En utilisant les valeurs nominales et les paramètres, nous obtenons les coefficients des équations d'état e_i comme suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{L_f} = 1.682 \times 10^{-4} \\ \mathbf{e}_{C_f} = 0.214 \\ \mathbf{e}_{L_{Fd}} = 7.742 \times 10^{-4} \\ \mathbf{e}_{L_{Fq}} = 2.787 \times 10^{-3} \\ \mathbf{e}_{L_{Md}} = 8.233 \times 10^{-4} \\ \mathbf{e}_{L_{Mq}} = 2.505 \times 10^{-2} \\ \mathbf{e}_{I_{tot1}} = 5.890 \times 10^{-2} \\ \mathbf{e}_{I_{tot2}} = 2.073 \\ \mathbf{e}_{K_{jac}} = 2.187 \times 10^{-4} \end{array} \right. \quad (4.15)$$

Nous pouvons émettre une hypothèse que l'élément L_f représente une dynamique rapide. Alors le modèle lent peut être obtenu en enlevant cet élément du modèle. Nous ne pouvons pas classer l'élément K_{jac} comme un élément rapide car nous ne pourrions pas déterminer l'inverse de l'équation d'état relative à cet élément. En effet, le terme en $C_{K_{jac}}$ ne figure pas au second membre de la dernière équation de l'équation d'état (4.12).

Pour valider notre simplification, nous faisons une comparaison entre le modèle lent et le modèle initial. Les Figure 4.29 et Figure 4.30 présentent la comparaison d'une sortie dans le modèle initial et le modèle lent pour une perturbation basse fréquence à l'entrée continue U_{cont} ou à la consigne de couple C_{ref} . Par ces simulations nous avons validé cette simplification en basse fréquence. Notons qu'en se basant sur l'analyse des boucles causales dans la section 4.2.2.3, le domaine "basse fréquence" correspond aux fréquences inférieures à 18 Hz, ou, de façon plus simple, aux très basses fréquences (TBF). Pour des fréquences proches ou supérieures à 18 Hz, nous devons prendre en compte l'élément L_f . Le fait d'enlever l'élément L_f supprime le phénomène de résonance électrique.

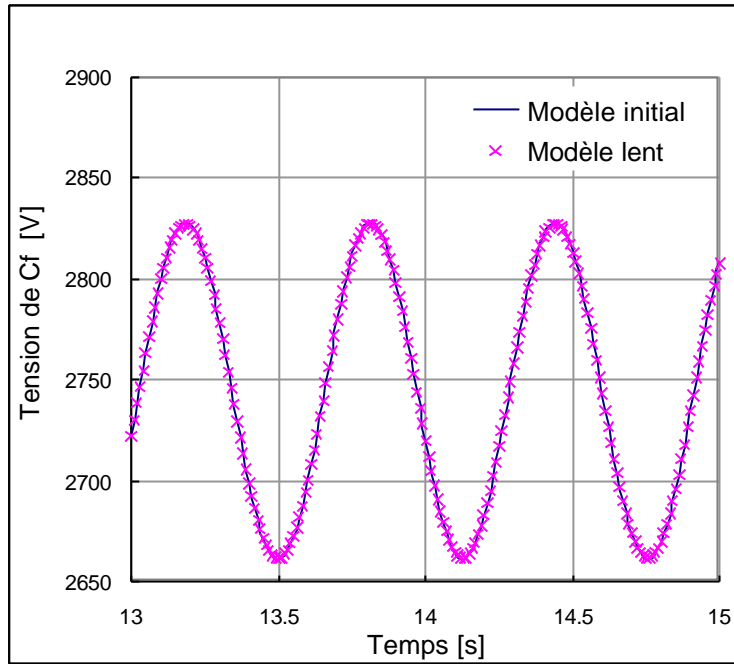


Figure 4.29. Comparaison entre les modèles lent et initial : $U_{cont} = 2750 + 82.5 \sin(10t)$, C_{ref} et F_{res} sont à leur valeur nominale perturbation à U_{cont} .

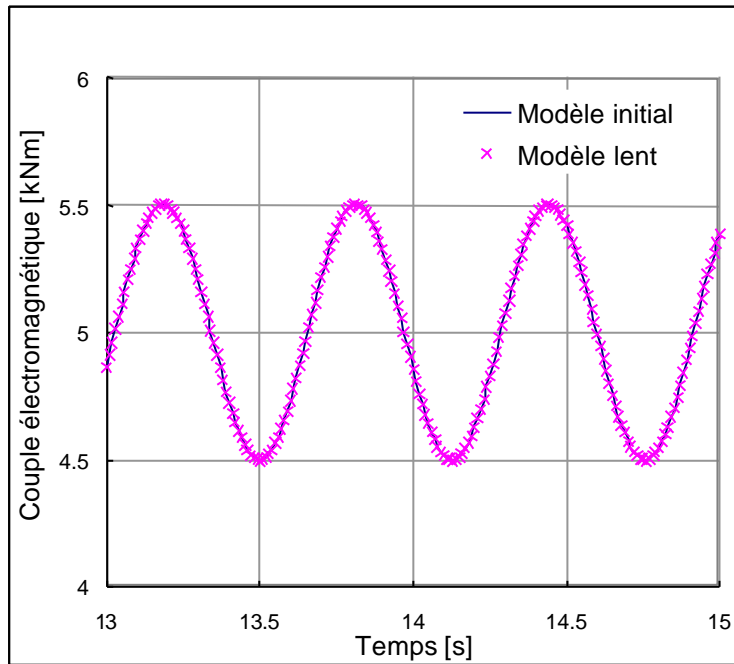


Figure 4.30. Comparaison entre les modèles initial et réduit : $C_{ref} = 5000 + 500 \sin(10t)$, U_{cont} et F_{res} sont à leur valeur nominale.

4.2.4. Synthèse sur la réduction de modèle

Nous pouvons résumer la simplification du modèle complet de la chaîne par la méthode MORA selon la gamme de fréquence de la perturbation par la Figure 4.31. Une perturbation chirp ou sinusoïdale (amplitude 82.5 V à U_{cont} ou 500 Nm à C_{ref}) est injectée en régime permanent de vitesse.

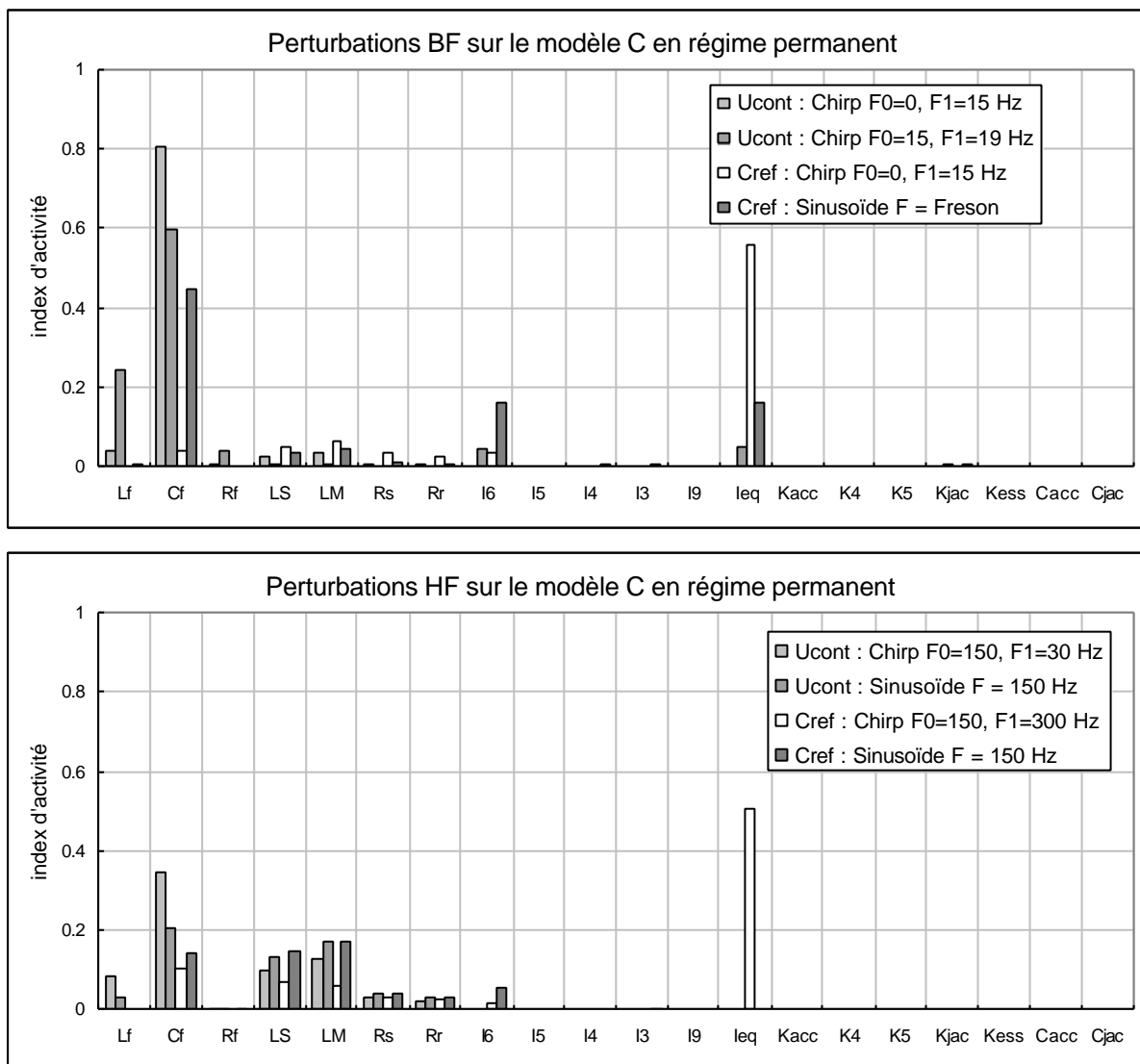


Figure 4.31. Chaîne complète : Index d'activité des éléments pour des perturbations BF et HF.

Par ailleurs, en prenant en compte le résultat obtenu présenté à la Figure 4.23, nous pouvons donc proposer 2 modèles réduits en fonction de la gamme de fréquence de perturbation. Les éléments nécessaires dans chaque modèle sont indiqués dans le Tableau 4.6. Notons que le modèle BF est quasi identique au modèle réduit obtenu par la MPS (avec les valeurs numériques, $I_{tot1} \approx I_6$ et $I_{tot2} \approx I_{eq}$).

Tableau 4.6. Simplification du modèle complet de la chaîne de traction.

Modèle	Gamme de fréquence perturbation	Eléments conservés dans le modèle réduit	
		Eléments électriques	Eléments mécaniques
BF	$f \leq f_{reson}$	Tous	I_6, I_{eq}, K_{jac} et C_{jac}
HF	$f \gg f_{reson}$	Tous	I_6 et I_{eq}

Pour valider ces simplifications, nous comparons la réponse des modèles réduits et du modèle initial par des simulations. Nous utilisons le cas d'un court circuit symétrique comme une perturbation basse fréquence (voir Figure 4.11 pour le spectre fréquentiel) pour valider le modèle BF et une perturbation d'une harmonique haute fréquence à la consigne de couple C_{ref} pour le modèle HF. Ces comparaisons sont présentées Figure 4.32 et Figure 4.33. Nous constatons que les modèles réduits sont équivalents au modèle initial dans leur gamme de fréquence de validité.

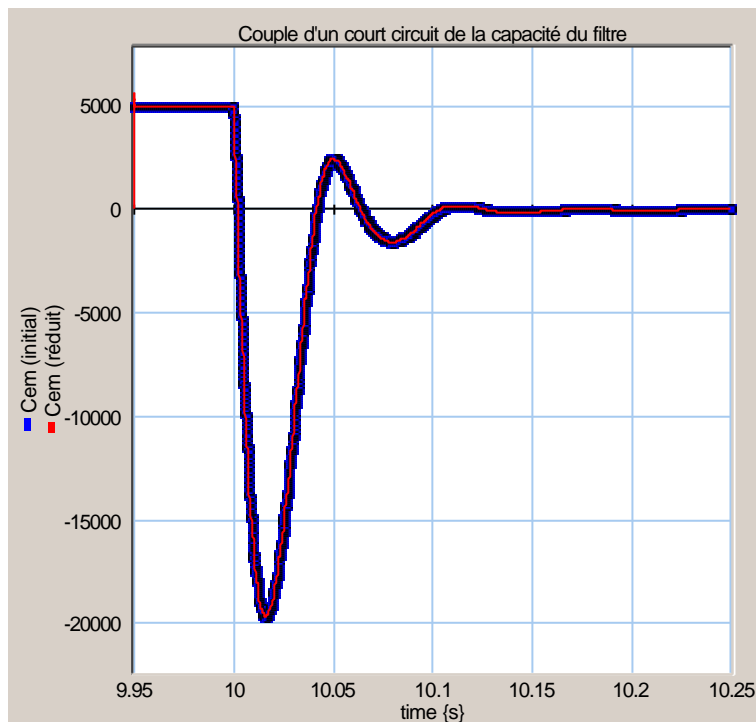


Figure 4.32. Comparaison entre le modèle réduit BF et le modèle initial.

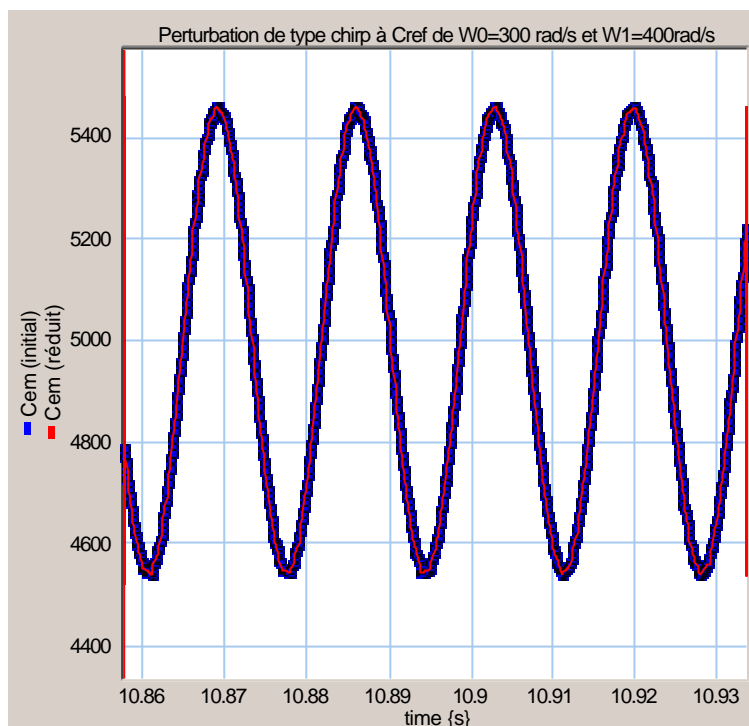


Figure 4.33. Comparaison entre le modèle réduit HF et le modèle initial.

4.2.5. Conclusions

En conclusion sur cette partie, nous avons vu que ces deux méthodes de réduction sont relativement délicates à appliquer sur des modèles à la fois non linéaires, multi entrées, à grand nombre de paramètres, possédant des composantes continues associées à des variables alternatives et dans lesquels interviennent des grandeurs de commande. Il est impératif d'exciter l'ensemble des entrées afin de limiter "l'effet de filtrage". La linéarisation petit signal d'un modèle particulier, sans variables alternatives a permis d'extraire des modèles réduits validés et d'éviter "l'effet de masquage" dû aux composantes continues.

4.3. Analyse de stabilité

Nous analysons la stabilité de la chaîne complète. Pour cela, nous utilisons le modèle C avec la machine asynchrone modélisée dans le repère (d,q) lié au vecteur tension statorique. Dans un premier temps, nous analysons la stabilité du modèle linéarisé en utilisant le lieu des pôles. L'analyse du modèle non linéaire sera ensuite effectuée en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov.

4.3.1. Modèle linéarisé

Dans cette partie, la partie mécanique est simplifiée et n'est représentée que par une inertie J_m et un frottement f [Loc-99].

Les variables d'état sont :

- la tension aux bornes du condensateur du filtre,
- les courants de l'inductance du filtre et des inductances de fuites ramenées au stator,
- les flux rotoriques,
- la vitesse de rotation mécanique.

En utilisant la méthode décrite à l'Annexe A, nous pouvons déduire l'équation d'état directement à partir du modèle bond graph (pour la machine, nous considérons le modèle illustré à la Figure 4.21.a) avec les variables de puissance comme variables d'état. Etant donné que les flux rotoriques sont les variables d'énergie, nous devons faire un changement de variable. Les flux rotoriques sont associés aux inductances magnétisantes ramenées au stator (LM). Le changement de variable est fait selon l'équation suivante :

$$\Phi_{r(d,q)} = \frac{L_r}{L_m} \cdot \Phi_{r(d,q)}' = \frac{L_r}{L_m} LM \cdot I_{LM(d,q)} = L_m \cdot I_{LM(d,q)} \quad (4.16)$$

où I_{LM} est le courant de l'inductance LM avec $LM = L_m^2 / L_r$. Le modèle d'état associé est représenté par l'équation (4.17).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} I_{Lf} = \frac{1}{L_f} (-R_f I_{Lf} - V_{Cf} + U_{cont}) \\ \frac{d}{dt} V_{Cf} = \frac{1}{C_f} \left(I_{Lf} - \frac{V_{sdV}}{V_{Cf}} I_{sdV} \right) \\ \frac{d}{dt} I_{sdV} = \frac{1}{sL_s} \left(V_{sdV} - R_{sr} I_{sdV} + \frac{L_m}{L_r} R_r \Phi_{rdV} + sL_s I_{sqV} \mathbf{w}_s + p \frac{L_m}{L_r} \Phi_{rqV} \Omega \right) \\ \frac{d}{dt} I_{sqV} = \frac{1}{sL_s} \left(-R_{sr} I_{sqV} + \frac{L_m}{L_r} R_r \Phi_{rqV} - sL_s I_{sdV} \mathbf{w}_s - p \frac{L_m}{L_r} \Phi_{rdV} \Omega \right) \\ \frac{d}{dt} \Phi_{rdV} = \frac{R_r}{L_r} (L_m I_{sdV} - \Phi_{rdV}) + \Phi_{rqV} (\mathbf{w}_s - p\Omega) \\ \frac{d}{dt} \Phi_{rqV} = \frac{R_r}{L_r} (L_m I_{sqV} - \Phi_{rqV}) - \Phi_{rdV} (\mathbf{w}_s - p\Omega) \\ \frac{d}{dt} \Omega = \frac{1}{J_m} \left(p \frac{L_m}{L_r} (\Phi_{rdV} I_{sqV} - \Phi_{rqV} I_{sdV}) - f\Omega - C_r \right) \end{array} \right. \quad (4.17)$$

où \mathbf{w}_s est associée à la vitesse de rotation de l'angle \mathbf{j}_s entre le repère tournant (d,q) lié au vecteur tension statorique et le repère fixe (\mathbf{a},\mathbf{b}) . Nous ajoutons l'indice V aux variables de la machine pour indiquer qu'elles sont représentées dans le repère (d,q) lié au vecteur V_s .

Nous ajoutons aussi les équations de commande dans notre modèle d'état. La commande vectorielle est définie dans un autre repère (d,q) lié au champ flux rotorique [Rob-96], qui n'est pas le même que le repère (d,q) lié au vecteur tension statorique en régime transitoire. Pour ne pas confondre les grandeurs de ces différents repères, nous ajoutons un indice Φ aux grandeurs du repère (d,q) lié au flux rotor.

Par souci de simplification, nous n'avons pas tenu compte ici des termes liés aux forces électromotrices (E_d et E_q) classiquement compensées à la sortie des régulateurs de courant. De même, seuls deux régulateurs de courants Proportionnels Intégraux sont considérés pour piloter le couple, la commande du flux rotorique s'effectuant de façon indirecte.

L'équation d'état de la commande s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_{sdref\Phi} &= K_i \left(\frac{\Phi_{ref}}{L_m} - I_{sd\Phi} \right) + K_p \frac{d}{dt} \left(\frac{\Phi_{ref}}{L_m} - I_{sd\Phi} \right) \\ &= K_i \left(\frac{\Phi_{ref}}{L_m} - I_{sd\Phi} \right) - K_p \frac{d}{dt} (I_{sd\Phi}) \\ \frac{d}{dt}V_{sqref\Phi} &= K_i \left(\frac{L_r C_{ref}}{pL_m \Phi_r} - I_{sq\Phi} \right) + K_p \frac{d}{dt} \left(\frac{L_r C_{ref}}{pL_m \Phi_r} - I_{sq\Phi} \right) \\ &= K_i \left(\frac{L_r C_{ref}}{pL_m \Phi_r} - I_{sq\Phi} \right) - K_p \left(\frac{L_r C_{ref}}{pL_m \Phi_r^2} \frac{d}{dt} (\Phi_r) + \frac{d}{dt} (I_{sq\Phi}) \right) \end{aligned} \quad (4.18)$$

où

$$\Phi_r = \sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2} \quad (4.19)$$

La tension d'entrée de la machine est définie comme :

$$V_{sdV} = \sqrt{V_{sdref\Phi}^2 + V_{sqref\Phi}^2} \quad (4.20)$$

Pour passer d'un repère à l'autre, nous devons transformer les grandeurs. La transformation entre les grandeurs de ces repères est définie par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} X_{d\Phi} \\ X_{q\Phi} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} X_{dV} \\ X_{qV} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

avec

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos(\mathbf{d}) & \sin(\mathbf{d}) \\ -\sin(\mathbf{d}) & \cos(\mathbf{d}) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

où \mathbf{d} représente l'angle entre ces repères (voir Figure 4.34). Cet angle est calculé de la manière suivante :

$$\mathbf{d} = \arctan\left(\frac{\Phi_{rqV}}{\Phi_{rdV}}\right) \quad (4.23)$$

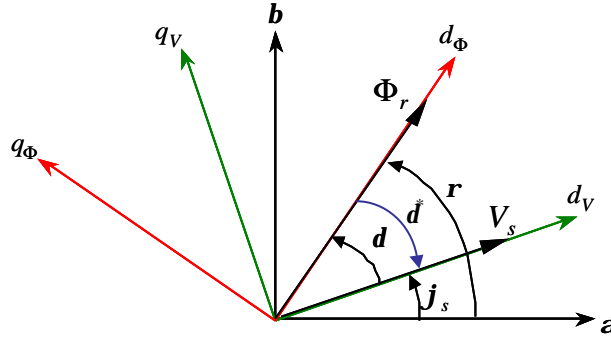


Figure 4.34. Relations entre les repères.

A partir de cette équation, nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{d}) &= \frac{\Phi_{rdV}}{\sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2}} \\ \sin(\mathbf{d}) &= \frac{\Phi_{rqV}}{\sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2}} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Nous pouvons donc déterminer les termes $I_{sd\Phi}$ et $I_{sq\Phi}$ comme :

$$\begin{aligned} I_{sd\Phi} &= \frac{\Phi_{rdV} I_{sdV} + \Phi_{rqV} I_{sqV}}{\sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2}} \\ I_{sq\Phi} &= \frac{\Phi_{rdV} I_{sqV} - \Phi_{rqV} I_{sdV}}{\sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Par ailleurs, ayant besoin la vitesse de rotation de l'angle \mathbf{j}_s dans l'équation de la machine, nous ajoutons un estimateur de cette pulsation ($\hat{\mathbf{w}}_s$). En fait, l'angle \mathbf{j}_s (voir Figure 4.34) peut être calculé à l'aide de la relation suivante :

$$\mathbf{j}_s = \mathbf{r} - \mathbf{d} = \mathbf{r} + \mathbf{d}^* \quad (4.26)$$

La pulsation de l'angle \mathbf{j}_s est définie comme :

$$\mathbf{w}_s = \frac{d}{dt} \mathbf{j}_s = \frac{d}{dt} \mathbf{r} + \frac{d}{dt} \mathbf{d}^* = \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_d^* \quad (4.27)$$

Nous avons l'équation d'autopilotage [Rob-96][Loc-99] pour déterminer \mathbf{w}_r formulée par :

$$\hat{\mathbf{w}}_r = \mathbf{w} + \frac{R_r L_m I_{sq\Phi}}{L_r \Phi_r} \quad (4.28)$$

Il nous reste à déduire le terme \mathbf{w}_d^* . A partir des équations de la commande (4.18) et (4.20), nous pouvons déduire cette pulsation en considérant que l'angle entre l'axe d_V et l'axe d_Φ est déterminé par :

$$\mathbf{d}^* = \arctan \left(\frac{V_{sqref\Phi}}{V_{sdref\Phi}} \right) \quad (4.29)$$

La dérivée de l'angle \mathbf{d}^* peut être déterminée de la manière suivante en dérivant la fonction arctan :

$$\hat{\mathbf{w}}_d^* = \frac{V_{sdref\Phi} \frac{d}{dt} (V_{sqref\Phi}) - V_{sqref\Phi} \frac{d}{dt} (V_{sdref\Phi})}{V_{sdref\Phi}^2 + V_{sqref\Phi}^2} \quad (4.30)$$

En remplaçant tous ces termes par leur expression analytique (équation d'état de la commande), nous pouvons écrire le modèle d'état complet de la chaîne de traction incluant la commande.

Pour analyser la stabilité en utilisant le lieu des pôles, nous linéarisons ce modèle d'état autour d'un point de fonctionnement déterminé par les valeurs de paramètres et l'ensemble $(C_{ref}, \Phi_{ref}, C_r)$. Nous appliquons la méthode présentée dans la section 2.1.1 directement sur le modèle bond graph de la chaîne. Le modèle d'état en petit signal obtenu est donné en Annexe F. Ce modèle est d'ordre 9. Nous avons implanté le modèle linéarisé sous Matlab. Nous analysons la stabilité en fonction de la valeur de certains paramètres. Cette étude a été faite pour le modèle dans le repère lié au flux rotorique qui est d'ordre 8, présentée dans [Loc-99]. Cette différence d'ordre est due au fait qu'il n'y a qu'une seule équation d'état du flux rotorique dans le dernier modèle, contrairement à deux dans la modélisation lié au vecteur tension statorique.

Nous choisissons comme point de fonctionnement au repos : $C_{ref} = 5$ kNm, $\Phi_{ref} = 6$ Wb et $C_r = 4998$ Nm, qui fixe la vitesse à 20 rad/s. Sur les diagrammes suivants, nous remarquons

qu'il existe un pôle nul pour tous les paramètres que l'on fait varier, ce qui veut dire que c'est un pôle nul intrinsèque du système.

4.3.1.1. Effet de la valeur de la résistance du filtre R_f

Nous regardons l'influence de la valeur de résistance du filtre R_f sur la stabilité locale (autour du point de fonctionnement) du système. La valeur de R_f varie entre 1 et 200 m Ω . Nous présentons l'évolution des valeurs des pôles à la Figure 4.35 où la flèche indique le sens de la propagation des pôles quand la valeur de R_f augmente. Nous remarquons que le point de fonctionnement est instable pour $R_f < 3.8$ m Ω .

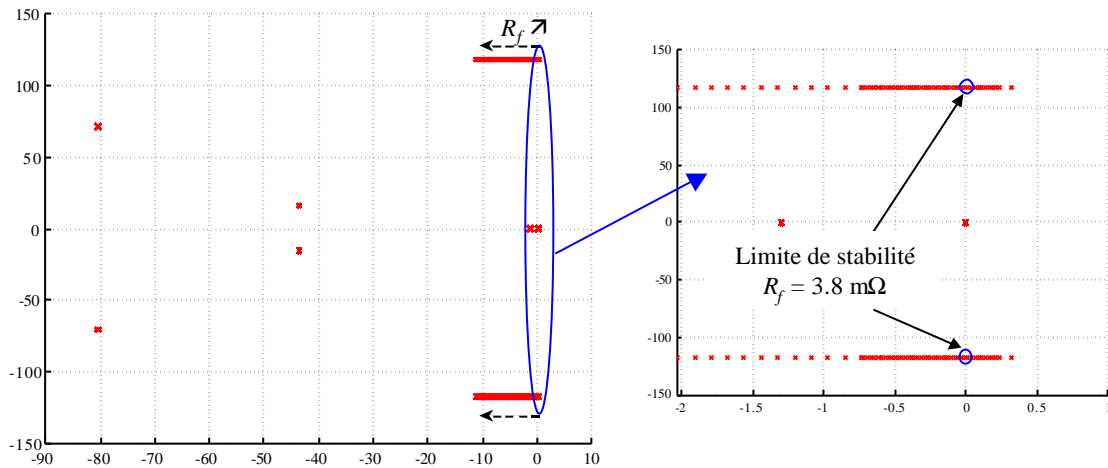


Figure 4.35. L'influence de la valeur de R_f .

4.3.1.2. Influence de la valeur de la capacité du filtre C_f

Nous examinons la stabilité du point de fonctionnement selon la valeur de C_f . La valeur de C_f varie entre 1 et 100 mF. Nous présentons le résultat à la Figure 4.36. La première figure correspond au modèle de la machine lié au vecteur tension, tandis que la deuxième correspond à un modèle de la machine lié au flux rotor [Loc-99]. Notons que l'évolution du lieu des pôles est quasi identique dans les deux cas. La flèche dans la figure indique le sens de propagation des pôles lorsque la valeur C_f augmente.

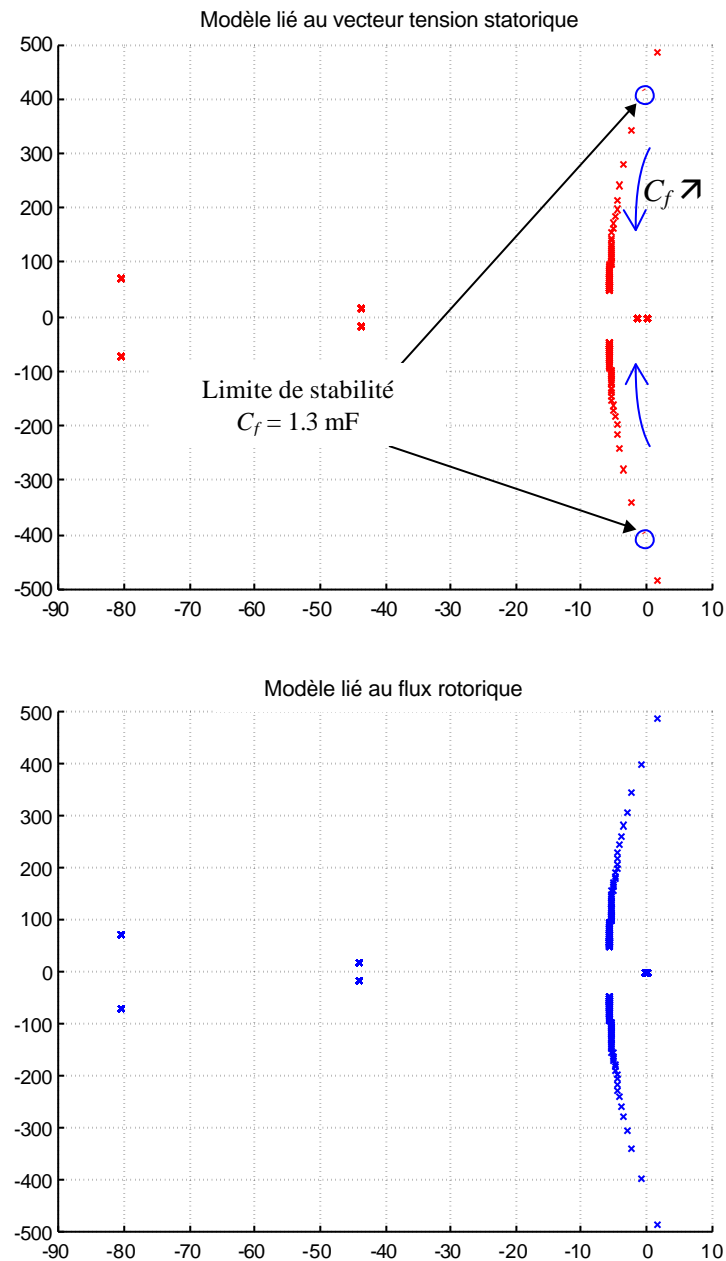


Figure 4.36. L'influence de la valeur de C_f .

Nous remarquons qu'il existe une limite de stabilité comprise entre 1 et 2 mF. En examinant la valeur des pôles dans ce domaine limité, nous constatons que le système est instable pour la valeur de $C_f < 1.3$ mF.

4.3.1.3. Influence de la valeur de l'inductance du filtre L_f

Nous regardons aussi l'influence d'un autre paramètre du filtre : l'inductance L_f . Nous remarquons que le point de fonctionnement du système est instable pour la valeur de $L_f > 57$ mH. Comme dans l'étude précédente, nous constatons que le résultat obtenu du modèle de

machine lié au vecteur tension statorique est quasi identique à celui avec le modèle lié au flux rotor (voir Figure 4.37).

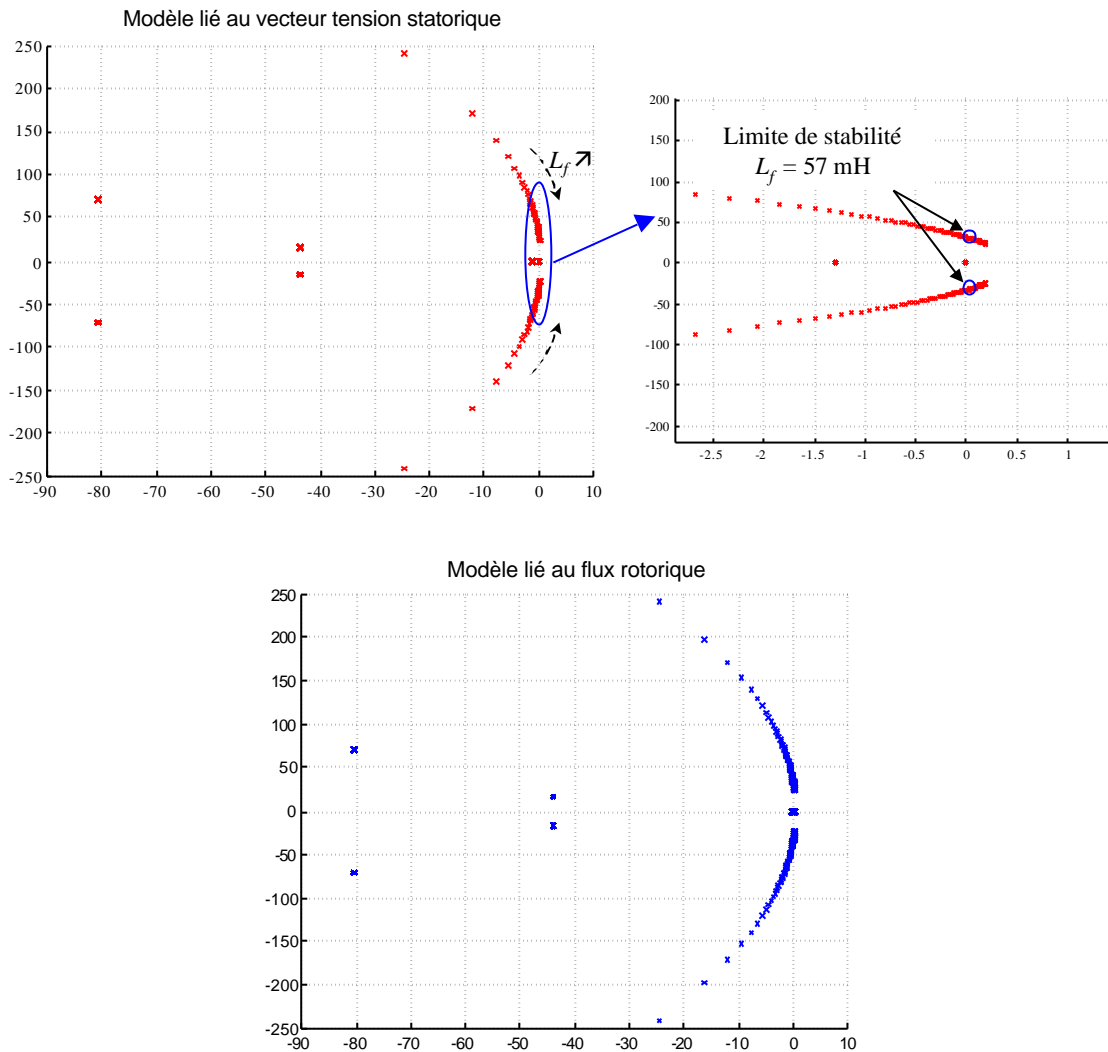


Figure 4.37. L'influence de la valeur de L_f .

4.3.1.4. Influence de la valeur de la constante de temps du régulateur de courant (T_{BF})

Nous regardons l'influence de la valeur de ce paramètre sur la stabilité du point de fonctionnement. On fait ici évoluer la valeur de $T_{BF} = 1$ ms à $T_{BF} = 100$ ms. Nous ne trouvons pas de domaine d'instabilité. Nous pouvons dire que la valeur de ce paramètre n'influe pas sur la stabilité du point de fonctionnement.

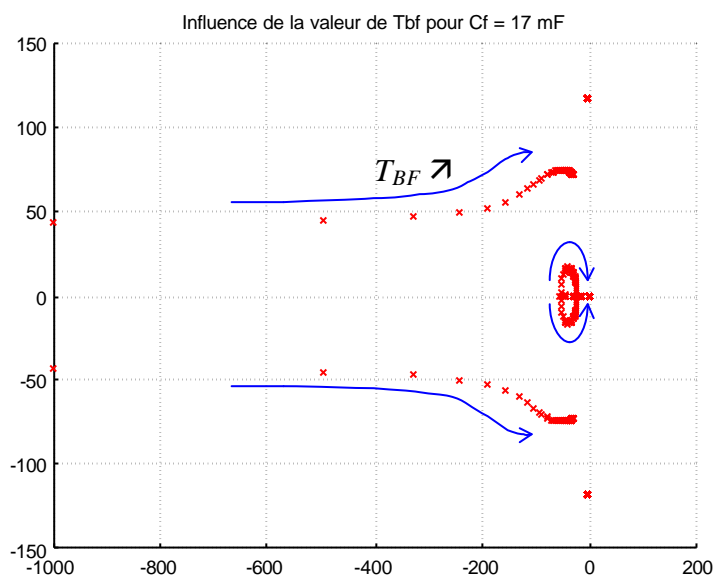


Figure 4.38. Influence de la valeur de constante de temps du régulateur.

4.3.1.5. Effet de la valeur de la vitesse

Nous regardons l'influence de la vitesse de 0 à 100 rad/s. Pour la valeur de $C_f = 17 \text{ mF}$, le système est toujours stable. Par contre, pour $C_f = 3 \text{ mF}$, nous trouvons des pôles dans le domaine instable à partir de $\Omega = 51 \text{ rad/s}$ et ceci pour les deux repères.

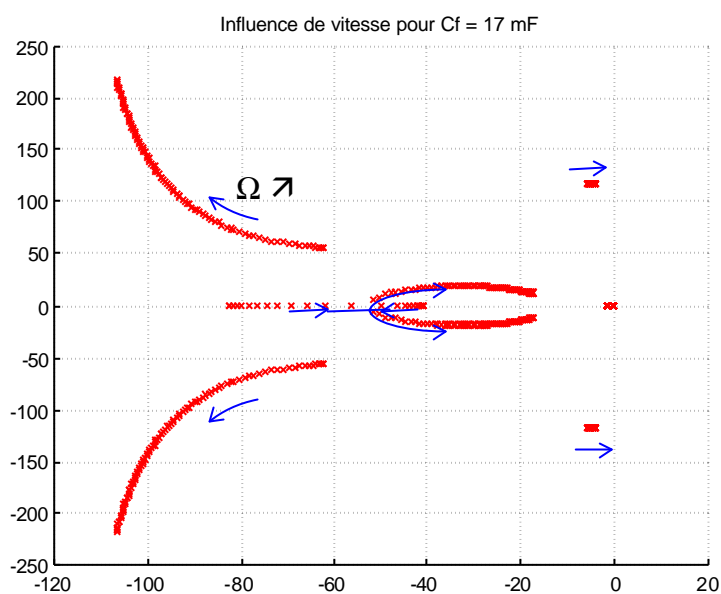


Figure 4.39. Influence de la valeur de vitesse pour $C_f = 17 \text{ mF}$.

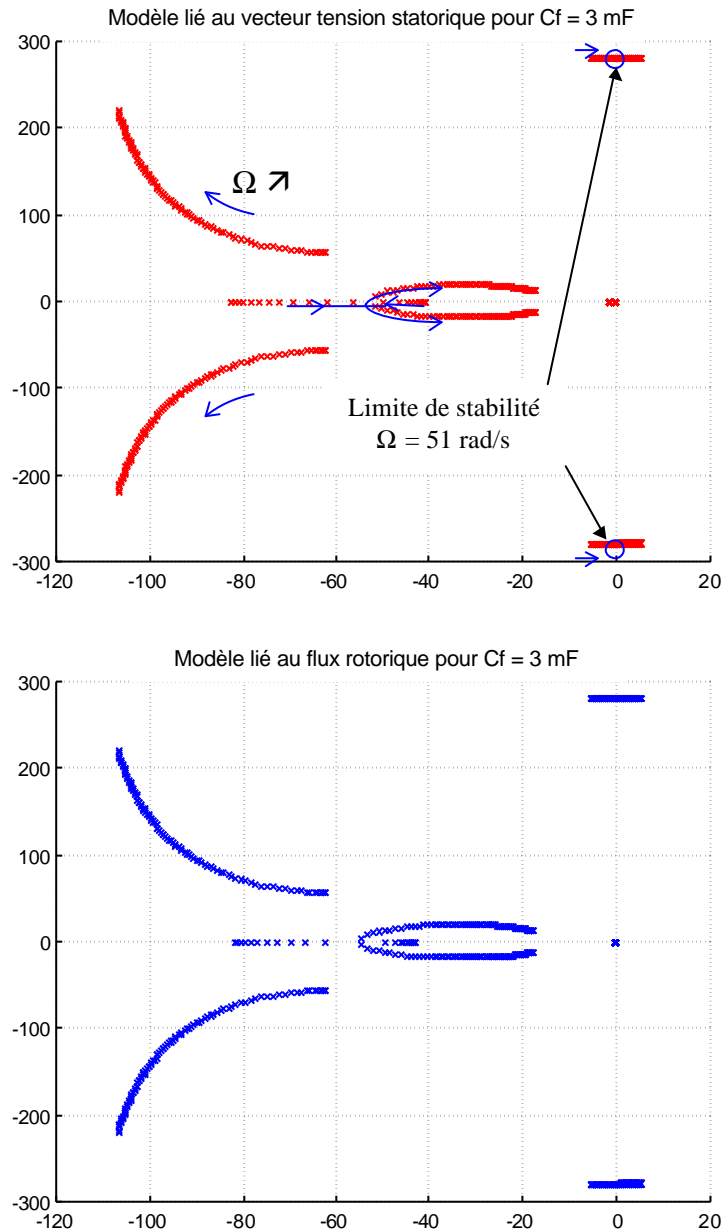


Figure 4.40. Influence de la valeur de vitesse pour $C_f = 3 \text{ mF}$.

Ce résultat est le même que celui obtenu par le calcul formel dans [Loc-99]. Nous devons donc vérifier cette analyse de stabilité par la simulation du modèle bond graph non linéaire sous 20 Sim. La machine asynchrone est modélisée dans le repère de Park fixe (\mathbf{a}, \mathbf{b}). Nous utilisons le modèle réduit de la chaîne mécanique qui contient uniquement I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} . La valeur de $C_f = 3 \text{ mF}$ est appliquée pour le filtre d'entrée. Nous examinons la réponse du flux rotorique Φ_r , la vitesse Ω et la tension V_{Cf} au borne de la capacité du filtre.

Dans nos simulations, il existe 4 régimes de vitesses (voir Figure 4.41) :

- *Régime 1* : la vitesse est nulle (le couple n'est pas encore appliqué à la chaîne).

- *Régime 2* : la vitesse augmente avec une pente importante (le premier régime transitoire de vitesse) car nous utilisons un dixième de la valeur de la masse du train pour accélérer la simulation.
- *Régime 3* : il s'agit du deuxième régime transitoire dans lequel nous fixons la masse du train à sa valeur nominale.
- *Régime 4* : le régime permanent de vitesse est établi en appliquant une force résistive pour fixer le point de fonctionnement.

Nous présentons les résultats des simulations pour les vitesses $\Omega = 70$ rad/s et $\Omega = 60$ rad/s à la Figure 4.41. Ces figures montrent l'instabilité par l'oscillation des variables qui est amplifiée. Nous remarquons que le système met plus de temps avant d'être instable pour une vitesse moins élevée (par exemple, pour $\Omega = 70$ rad/s, l'oscillation commence à $t = 7.5$ s tandis que pour $\Omega = 60$ rad/s, l'oscillation commence à $t = 12$ s).

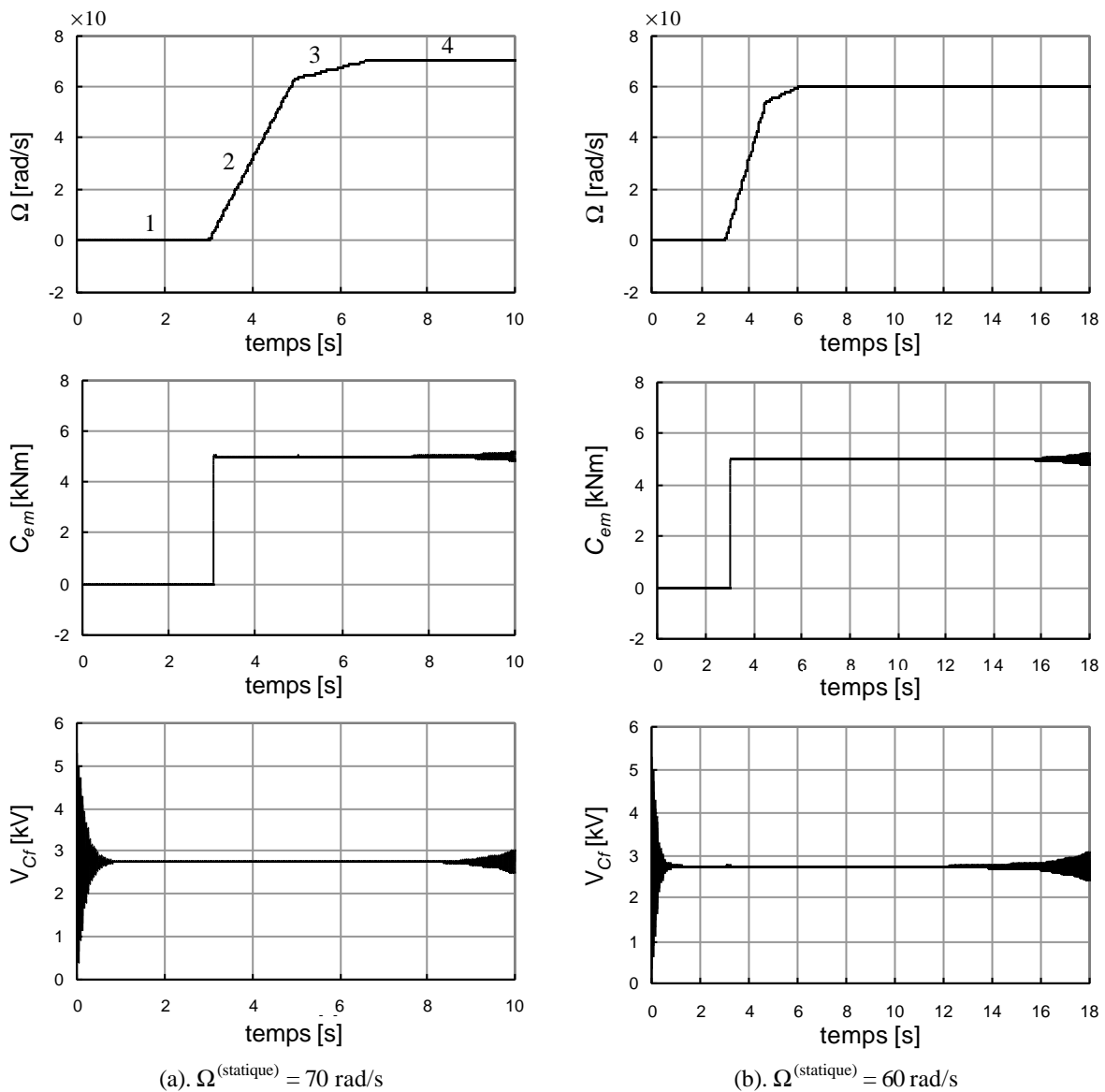


Figure 4.41. L'influence de la valeur de vitesse : points de fonctionnement instables.

Pour la vitesse $\Omega = 55 \text{ rad/s}$, l'instabilité n'est pas encore apparue à $t = 20 \text{ s}$. Mais, un zoom montre que l'oscillation de la tension de la capacité du filtre augmente en régime permanent. Le système semble donc bien instable.

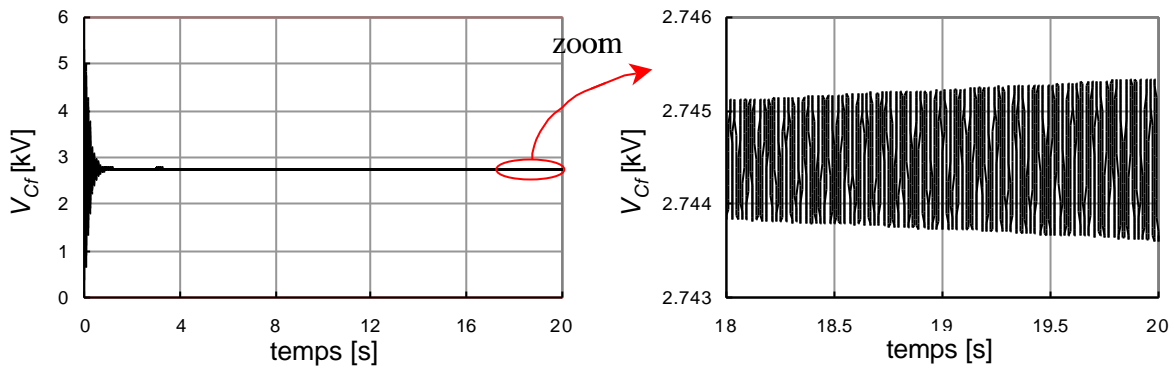


Figure 4.42. Essai pour $\Omega^{(\text{statique})} = 55 \text{ rad/s}$.

Par contre, pour $\Omega = 50 \text{ rad/s}$, nous remarquons que l'oscillation (en zoom) de la tension de la capacité du filtre est "constante". Ce point de fonctionnement est donc stable.

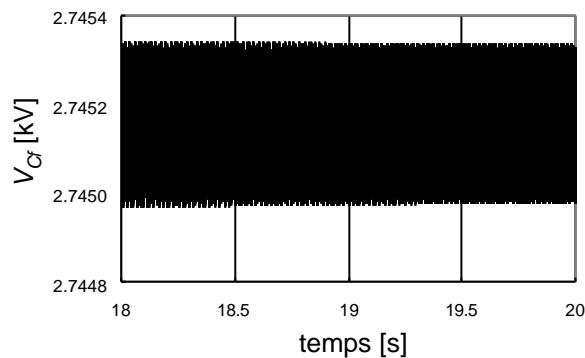


Figure 4.43. Essai pour $\Omega = 50 \text{ rad/s}$: point de fonctionnement stable .

Nous pouvons conclure par ces simulations qu'il existe 2 domaines de stabilité pour le modèle avec $C_f = 3 \text{ mF}$:

- Pour la vitesse $\Omega \leq 50 \text{ rad/s}$, le point de fonctionnement est stable.
- Au delà de cette valeur, le point de fonctionnement est instable.

Pour $C_f = 17 \text{ mF}$, le modèle est toujours stable.

Par ces résultats, nous constatons que l'analyse de stabilité en utilisant le calcul formel du modèle linéarisé sous Matlab est concordante avec la simulation du modèle non linéaire sous 20 Sim.

4.3.2. Modèle non linéaire

La deuxième méthode de Lyapunov est appliquée au modèle bond graph incrémental de la chaîne complète réduite dont la transmission mécanique ne contient que les éléments I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} en passant par un réducteur total (voir Annexe D). La machine asynchrone est modélisée dans le repère (d, q) lié au vecteur tension stator. Dans un premier temps, nous choisissons l'énergie stockée dans les éléments dynamiques comme fonction de Lyapunov. Nous utilisons les variations des variables d'énergie Δp_I et Δq_C dans cette analyse. Nous obtenons donc :

$$V(p, q) = \sum_{l=1}^{n_I} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta p_{I_l}^2}{I_l} \right) + \sum_{k=1}^{n_C} \left(\frac{1}{2} \frac{\Delta q_{C_k}^2}{C_k} \right) \quad (4.31)$$

où n_I et n_C représentent respectivement le nombre d'éléments I et C dans le modèle. Dans notre modèle, il existe :

- 7 éléments I ($n_I = 7$)
 - électriques : L_f, LF_d, LM_d, LF_q et LM_q .
 - mécaniques : I_6 et I_{eq} .
- 2 éléments C ($n_C = 2$)
 - électrique : C_f .
 - mécaniques : K_{jac} .
- 6 éléments R ($n_R = 6$)
 - électriques : $R_f, R_{sd}, RR_d, R_{sq}$ et RR_q .
 - mécaniques : C_{jac} .

Les termes LF , LM et RR valent respectivement sL_s , L_m^2 / L_r et $(L_m / L_r)^2 R_r$.

La dérivée de la fonction Lyapunov choisie est formulée comme suit :

$$\dot{V}(p, q) = \sum_{l=1}^{n_I} P_{I_l} + \sum_{k=1}^{n_C} P_{C_k} \quad (4.32)$$

où P_i est la puissance instantanée au élément i .

En appliquant cette fonction sur le modèle bond graph incrémental, nous obtenons l'équation suivante :

$$\dot{V}(p, q) = P_{Ucont} + \sum_{i=1}^{18} P_{MSe_i} + P_{MSf_a} + P_{MSe_a} + P_{Fres} - P_{Rf} - P_{Rsd} - P_{Rsq} - P_{RRd} - P_{RRq} - P_{Cjac} \quad (4.33)$$

S'il n'y a pas de variation d'entrées, nous avons des puissances nulles aux sources dans ce bond graph incrémental. L'équation (4.33) ne contient que des termes négatifs des puissances dissipées dans les éléments résistifs. Le modèle est donc stable si les valeurs de paramètres de ces éléments sont positives. *Remarque : ce cas correspond à l'absence de variation des entrées de commande, ce qui revient à analyser la stabilité du modèle en boucle ouverte.*

Supposons maintenant qu'il y a une variation à l'entrée U_{cont} . A partir de l'équation (4.33), nous ne pouvons rien conclure sur le signe analytiquement. La détermination du signe de cette équation peut être faite par simulation numérique. Mais, cette approche manque d'intérêt puisque par la simulation nous voyons directement si le modèle est stable ou instable. Nous restons donc au résultat obtenu par le lieu des pôles.

4.4. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons appliqué les méthodes d'analyses systémiques directement issues du formalisme Bond Graph sur notre cas d'étude, une chaîne de traction ferroviaire. Il s'agit de la simplification de modèle et de l'analyse de stabilité.

La simplification de modèle mécanique linéaire en utilisant la méthode MORA est concordante avec celle de la MPS. Par ailleurs, nous pouvons affiner cette simplification avec la méthode MORA que nous avons développée pour obtenir le modèle réduit selon la gamme de fréquence d'utilisation. Pour le modèle complet non linéaire, qui constitue un exemple typique de système hétérogène complexe, nous avons souligné les problèmes posés par l'approche vis-à-vis de la *non conservativité de l'index d'activité* (ce dernier dépend de la manière dont le système est modélisé), *l'effet de masquage* dû aux composantes continues et *l'effet de filtrage*. Afin que le système modélisé soit linéarisable, ceci nous a conduit à proposer un modèle original de la machine asynchrone, défini dans un repère lié au vecteur tension statorique. Avec un tel modèle, seules des grandeurs à évolution continue sont considérées pour l'ensemble du système, sans aucune composante alternative. Avec ce modèle linéarisé, l'effet de masquage dû aux composantes continues n'existe plus. Par contre, l'effet de filtrage persiste. Pour tenir compte de cette problématique, nous avons étudié la sensibilité des variables de puissance par rapport aux différentes entrées. L'ensemble de ces études nous a permis de dégager un modèle réduit valable en fonction d'une gamme de fréquence donnée des divers signaux d'entrées. Ce résultat répond donc à un enjeu majeur de l'approche système : définir un modèle à moindre coût selon les objectifs de conception.

L'analyse de stabilité a été appliquée sur le modèle linéarisé et le modèle non linéaire de la chaîne complète. Nous soulignons que cette analyse a été réalisée à l'aide de l'outil d'analyse Bond Graph. Nous avons montré que l'analyse du lieu des pôles du modèle linéarisé avec la machine asynchrone modélisée dans un repère lié au vecteur tension statorique est identique à celle réalisée avec la machine asynchrone à flux orienté effectuée dans un travail précédent [Loc-99]. Cette méthode nous a permis de caractériser la stabilité du modèle en fonction de la

valeur des différents paramètres. En outre, cette analyse est validée par la simulation du modèle non linéaire, ce qui valide du même coup son approche. Nous avons aussi mené une étude de stabilité sur la chaîne complète non linéaire en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov. Cette approche est plus délicate car il n'est pas aisé dans le cas général de déterminer analytiquement le signe de la fonction candidate de Lyapunov.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons voulu souligner l'importance et l'intérêt d'un formalisme unifiant tel que Bond Graph dans le cadre d'une approche système. Cette méthodologie permet de modéliser, de manière homogène, les systèmes hétérogènes que nous rencontrons souvent dans des dispositifs au sein desquels le domaine du Génie Electrique tient un rôle majeur. Couplée aux possibilités offertes en terme d'analyse par le Bond Graph et la causalité, cette vision unifiante facilite l'approche "système" de la conception.

Plusieurs méthodes d'analyse systémique ont été présentées en vue de la simplification de modèle et de l'analyse de stabilité. Nous avons appliqué ces méthodes sur une chaîne de traction ferroviaire qui constitue un cas typique d'étude présentant un couplage électromécanique.

Deux méthodes de simplification ont été étudiées : la Méthode des Perturbations Singulières (MPS) basée sur la séparation des dynamiques du système et la méthode MORA (*Model Order Reduction Algorithm*) fondée sur le concept d'activité énergétique :

- L'application de ces deux méthodes sur un modèle linéaire tel que celui de la transmission mécanique de la chaîne de traction est mutuellement cohérente et ne pose pas de problèmes d'application majeurs.
- La méthode MORA proposait initialement un modèle valable pour une bande passante donnée, incluant donc forcément les phénomènes basses fréquences. Afin d'obtenir un modèle réduit pour une gamme de fréquence donnée (basse ou haute fréquence), nous avons proposé une variante de la méthode MORA en utilisant des signaux d'excitation "riches" sur un spectre fréquentiel choisi.
- Pour un modèle non linéaire multientrées, tel que celui de la chaîne de traction complète, nous avons souligné les problèmes posés par l'approche MORA : *non conservativité de l'index d'activité* selon le modèle équivalent utilisé, *effet de masquage* dû aux composantes continues et *l'effet de filtrage* des entrées. Nous nous sommes attachés à proposer des solutions de ces problèmes :
 - "L'effet de masquage" nous a conduits à proposer un modèle original de la machine asynchrone alimentée par onduleur de tension. Ce modèle, défini dans un repère de Park "atypique", lié au vecteur tension statorique, ne fait intervenir que des variables continues et peut donc être linéarisé autour d'un point de fonctionnement. Avec cette représentation, l'effet de masquage des signaux d'excitation dû aux composantes continues a été supprimé.
 - Pour tenir compte de "l'effet de filtrage", nous avons étudié la sensibilité des variables de puissance par rapport aux différentes entrées. Malheureusement, cette

étude est souvent délicate et nécessite des hypothèses judicieuses pour pouvoir conclure, surtout pour un modèle complexe comportant beaucoup d'éléments et d'entrées. La solution la plus simple et efficace consiste à exciter toutes les entrées du système en ne supprimant que les éléments du modèle dont l'influence est négligeable dans tous les cas.

- Malgré ces difficultés et les précautions d'emploi qui en résultent, ces études nous ont permis de déduire un modèle réduit, valable en fonction d'une gamme de fréquence donnée des divers signaux d'entrées. Des modèles haute et basse fréquence de la chaîne de traction ferroviaire ont ainsi été proposés et validés par simulation. A partir de l'analyse des boucles causales, les *couplages interdomaines* (électromécaniques) ont été soulignés.
- Par ailleurs, nous avons vu que *l'analyse systémique se simplifie* sur la base du modèle réduit. Ainsi, sur l'exemple de la chaîne de transmission mécanique, le couplage entre les éléments responsables de la résonance du bogie apparaît de manière explicite dans le modèle réduit, ce qui n'est pas le cas dans le modèle initial. Cette capacité à simplifier l'analyse, à partir de la réduction de modèles, s'ajoute à l'avantage de la diminution des temps de simulation, élément essentiel dans le cadre d'une approche système.

Deux méthodes d'analyse de stabilité ont aussi été étudiées. L'examen du lieu des pôles, effectué sur le modèle linéarisé de la chaîne, permet de déterminer le domaine de stabilité paramétrique. La linéarisation du système peut être obtenue à partir de l'équation d'état ou directement à partir du Bond Graph, ceci à condition de disposer d'un modèle adéquat, sans composantes alternatives. Cette analyse est validée par la simulation du modèle non linéaire. Nous avons aussi mené une étude de stabilité sur la chaîne complète non linéaire en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov. Cette approche "énergétique" est plus délicate car il n'est pas aisé, dans le cas général d'un système complexe, de déterminer analytiquement le signe de la fonction candidate de Lyapunov.

Les travaux que nous avons effectués contribuent à montrer la bonne adéquation du formalisme de modélisation Bond Graph et des méthodes d'analyse qui en découlent avec une approche système de la conception. Ceci est d'autant plus vrai que le système est hétérogène en terme de structure et de champ disciplinaire.

A titre de perspectives à ce travail, il serait intéressant d'appliquer les méthodes présentées sur d'autres systèmes multidomaines, notamment ceux étudiés dans le groupe Système, tels que le véhicule solaire Solelhada, les chaînes d'énergie alimentées par des composants électrochimiques (pile à combustible, accumulateurs, super condensateur),...

Sur le plan méthodologique, la principale orientation envisagée concerne le dimensionnement et la synthèse. Il s'agirait là de partir véritablement de la mission confiée au système pour remonter aux contraintes résultantes sur les entrées, conditions nécessaires à la satisfaction de

cette mission. Au contraire de l'analyse, cette "problématique inverse" va véritablement dans le sens d'une approche systémique de la conception qui préconise une démarche descendante, du cahier des charges aux solutions, intégrant la finalité (mission) pour laquelle le dispositif est conçu. Pour cela, on pourra s'appuyer sur les notions de bicausalité qui paraissent offrir des caractéristiques intéressantes dans cette optique. Cette approche viendra compléter les outils d'analyse et d'optimisation système dont nous disposons aujourd'hui.

Bibliographie

- [And-01] R. Andoulsi, *Etude d'une classe de systèmes photovoltaïques par une approche bond graph. Modélisation, analyse et commande*, Thèse EC de Lille, Université des Sciences et Technologies de Lille, 2001
- [Ast-03] S. Astier, *Des machines à aimants permanents aux systèmes énergétiques autonomes. Systémique, électricité et développement durable*, Mémoire de l'habilitation à diriger les recherches INP Toulouse, Juillet 2003.
- [Azm-92] A. Azmani and G. Dauphin-Tanguy, "ARCHER: a program for computer aided modelling and analysis," *Bond graph for Engineers*. Ed. G. Dauphin-Tanguy and P. Breedveld, Elsevier Science Pub., pp. 263-278, 1992.
- [BB36000] *BB36000 : The European multivoltage locomotive*, Alstom
- [Bar-97] Ph. Barrade, *Comportement dynamique des ensembles filtre-convertisseur*, Thèse INP Toulouse, 1997.
- [Bon-01] G. Bonnafous, *Analyse des critères de convergence et de stabilité des algorithmes d'identification à erreur de sortie hors-ligne et récursifs*, Rapport de DEA INP Toulouse, 2001.
- [Bor-92] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Modélisation et identification des processus (tome 2)," *Méthodes et pratiques de l'ingénieur*, éditions Technip, Paris, 1992.
- [Bor-93] P. Borne, G. Dauphin-Tanguy, J.P. Richard, F. Rotella, I. Zambettakis, "Analyse et régulation des processus industriels (tome 1 : Régulation continue)," *Méthodes et pratiques de l'ingénieur*, éditions Technip, Paris, 1993.
- [Bous-02] A. Bouscayrol, P. Delarue, E. Semail, J.P. Hautier, J.N. Verhille, "Application de la Représentation Energétique Macroscopique à un système de traction multimachine", *Revue RIGE*, vol. 5, N° 3-4, pp. 431-453, 2002.
- [Bouy-96] R. Bouyekhif, A. El Moudni, A. El Hami, N. Zerhouni, M. Ferney, "Reduced Order Modelling of Two-time-scale Discrete Non-linear Systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 333, pp. 499-512, Elsevier Science Ltd, 1996.
- [Cou-90] F. de Coulon, "Théorie et traitement des signaux," *Traité d'Electricité*, vol. VI ; Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1990.
- [Dau-99a] G. Dauphin-Tanguy, "Les bond graphs et leur application en mécatronique," *Techniques de l'Ingénieur : Informatique Industrielle, Automatique*, S 7 222, Paris, 1999.

- [Dau-99b] G. Dauphin-Tanguy and Ly.T. Gruyitch, "Strict Monotonous Asymptotic Energetic Stability. Part II : Bond Graph Resolutions," *Proceedings of 14th World Congress of International Federation of Automatic Control IFAC'99*, Beijing, P.R China, July 1999.
- [Dau-00] G. Dauphin-Tanguy, *Les Bond Graphs*, édition Hermès, Paris, 2000.
- [Dem-00] H. Demni, *Conception des systèmes électrotechniques*, Rapport de DEA, INP Toulouse, 2000.
- [Dor-80] R.C. Dorf, *Modern Control Systems*, Addison-Wesley, 1980 (3rd edition).
- [Fef-02] Y. Fefermann, *Optimisation directe de systèmes hétérogènes en Génie Electrique*, Thèse INP Toulouse, 2002.
- [Fot-96] R. Fotsu-Ngwompo, S. Scavarda, D. Thomasset, "Inversion of Linear Time-invariant SISO Systems Modelled by Bond Graph," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 333(B), No. 2, pp. 157-174, Elsevier Science Ltd, 1996.
- [Fot-97] R. Fotsu-Ngwompo, *Contribution au dimensionnement des systèmes sur des critères dynamiques et énergétiques. Approche par bond graph*, Thèse INSA Lyon, 1997.
- [Fot-99] R.F. Ngwompo, S. Scavarda, "Dimensioning problems in system design using bicausal bond graphs," *Simulation Practice and Theory*, No. 7, pp. 577-587, Elsevier Science B.V., 1999.
- [Gan-00] G. Gandanegara, *De la modélisation à la simplification de modèles par bond graph. Application à une chaîne de traction ferroviaire*, Rapport de DEA INP Toulouse, 2000.
- [Gan-01a] G. Gandanegara, X. Roboam, B. Sareni, G. Dauphin-Tanguy, "Modeling and Multi-time Scale Analysis of Railway Traction Systems Using Bond Graphs," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation ICBGM'01*, Phoenix, 2001.
- [Gan-01b] G. Gandanegara, B. Sareni, X. Roboam and G. Dauphin-Tanguy, "Bond Graph Multi-time Scale Analysis of a Railway Traction System," *Proceedings of 9th European Conference of Power Electronics and Applications EPE'01*, Graz, Autriche, 2001.
- [Gan-03] G. Gandanegara, X. Roboam, B. Sareni and G. Dauphin-Tanguy, "One Model for One Frequency Range : Comparison of Bond Graph Based Simplification Methods," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation ICBGM'03*, Orlando, 2003.
- [Gaw-95] P.J. Gawthrop, "Bicausal Bond Graph," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation ICBGM'95*, volume 27, pp 83-88, 1995.

-
- [Gru-99] Ly.T. Gruyitch and G. Dauphin-Tanguy, "Strict Monotonous Asymptotic Energetic Stability. Part I : Theory," *Proceedings of 14th World Congress of International Federation of Automatic Control IFAC'99*, Beijing, P.R China, July 1999.
- [Hau-96] J.P. Hautier, J. Faucher, "Le Graphe Informationnel Causal," *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 90, juin 1996, pp 167-189.
- [Hau-99] J.P Hautier, J. Faucher, J.P. Caron, "Le Graphe Informationnel Causal, un outil pour analyser, comprendre, représenter," *Le Graphe Informationnel Causal en Electrotechnique*, Journées 3EI, Cachan, 1999.
- [Jeu-99] A. Jeunesse, M. Debruyne, "La BB36000: une locomotive passe frontière," *revue 3EI-SEE, n°19, La traction électrique ferroviaire*, 1999.
- [Jun-93] S. Junco, "Stability Analysis and Stabilizing Control Synthesis via Lyapunov's Second Method Directly on Bond Graphs of Nonlinear Systems," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation IECON'93*, pp. 2065-2069, Maui, HII, November 1993.
- [Jun-01] S. Junco, "Lyapunov Second Method and Feedback Stabilization Directly on Bond Graphs," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation ICBGM'01*, Phoenix, AZ, January 2001.
- [Kal-97] N. Kalouptsidis, *Signal Processing Systems : Theory and Design*, John Wiley & sons, New York, 1997.
- [Kar-77] D. Karnopp, "Power and Energy in Linearised Physical Systems," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 303, No. 1, pp. 86-98, Pergamon Press, January 1977.
- [Kar-00] D. Karnopp, D. Margolis, R. Rosenberg, *System Dynamics : Modeling and Simulation of Mechatronic Systems*, John Wiley & sons, 2000 (3rd edition).
- [Kok-86] P. Kokotovic, H.K. Khalil and J. O'reilly, *Singular Perturbation Methods in Control. Analysis and Design*, Academic Press, London, 1986.
- [Kub-96] Ph. Kubiak, *Analyse symbolique des systèmes physiques modélisés par Bond Graph et comportant des éléments multiports*, Thèse Université de Lille, 1996.
- [Loc-99] C. Lochot, *Modélisation et caractérisation des phénomènes couplés dans une chaîne de traction ferroviaire asynchrone*, Thèse INP Toulouse, 1999.
- [Lou-98] L.S Louca, J.L. Stein, G.M. Hulbert, "A Physical-based Model reduction Metric with an Application to Vehicle Dynamics," *Proceedings of 4th IFAC Nonlinear Control Systems Symposium*, Enschede, The Netherlands, 1998.
- [Lou-99] L.S. Louca, J.L. Stein, "Energy-based Model Reduction of Linear Systems," *Proceedings of International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation ICBGM'99*, volume 31, San Francisco, CA, 1999.

- [Piq-00] H. Piquet, H. Foch, H.E. Demni, "Une méthode de conception en électronique de puissance, à l'aide d'éléments caractérisés," *8^{ème} colloque Electronique de Puissance du Futur EPF 2000*, Lille, 2000.
- [Pli-89] Ph. Plin, *Application de la technique des perturbations singulières à la détermination en temps réel de lois de commande quasi-optimales pour le guidage de missiles*, Rapport de DEA Université des Sciences et Technologies de Lille 1, 1989
- [Rob-96] X. Roboam, *De la modélisation à la commande des machines asynchrones*, Note interne LEEI, 1996
- [Rob-00] X. Roboam, *De la modélisation à la commande et à la caractérisation des systèmes électromécaniques à propulsion asynchrone*, Mémoire de l'habilitation à diriger les recherches INP Toulouse, Mars 2000.
- [Rob-01] X. Roboam, "Design in Electrical Engineering Using Bond Graph : A System Viewpoint", *IEEE Industrial Electronics Society Newsletter*, June 2001.
- [Sai-01] R. Saïssset, *Modélisation Bond Graph de générateurs électrochimiques : Accumulateur et piles à combustibles SOFC*, Rapport de DEA INP Toulouse, 2001.
- [Sue-91] C. Sueur, G. Dauphin Tanguy, "Bond Graph Approach to Multi-time Scale Systems Analysis," *Journal of the Franklin Institute* vol. 328, pp. 1005-1026, Pergamon Press, 1991.

Annexes

Annexe A

Formalisme Bond Graph

Nous avons brièvement présenté quelques notions importantes du formalisme bond graph dans le Chapitre 1. Les informations plus détaillées se trouvent dans cette annexe.

A.1. Eléments passifs

Pour les éléments I et C , l'énergie stockée est définie comme :

$$E(t) = \int_0^t e(t) f(t) dt + E(0) \quad (\text{A.1})$$

Pour un élément I , nous avons une loi caractéristique suivante :

$$f_I = \Psi_I \left(\int e_I dt \right) = \Psi_I(p) \quad (\text{A.2})$$

L'équation (A.1) devient alors :

$$E_I(p) = \int_{p_0}^{p_I} f_I(p) dp + E_I(p_0) \quad (\text{A.3})$$

La loi caractéristique d'un élément C monoport est la suivante :

$$e_C = \Psi_C \left(\int f_C dt \right) = \Psi_C(q) \quad (\text{A.4})$$

En utilisant l'équation (A.4), nous pouvons réécrire l'équation (A.1) de la manière suivante :

$$E_C(q) = \int_{q_0}^{q_I} e_C(q) dq + E_C(q_0) \quad (\text{A.5})$$

A.2. Eléments multiports

Dans certains cas, la modélisation par les éléments monoports ne peut pas être utilisée, à cause de couplages énergétiques au sein du phénomène étudié. Des éléments passifs multiports, ayant plusieurs liens de puissance entrants, sont nécessaires. Les lois qui les caractérisent sont matricielles. L'information détaillée de l'élément multiport peut être consultée dans [Kub-97].

Considérons l'exemple d'un ensemble de bobines liées par des inductances mutuelles non négligeables (voir Figure A.1).

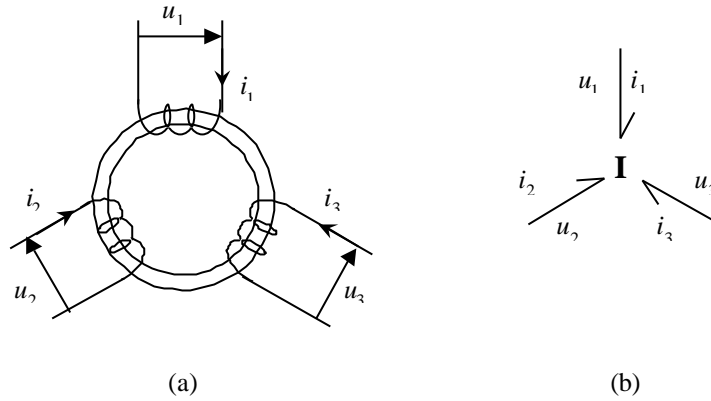


Figure A.1. Exemple d'un élément multiport : (a) schéma physique et (b) bond graph associé.

L'équation caractéristique de cet élément multiport est :

$$\mathbf{F} = \mathbf{L} \mathbf{I} \quad (\text{A.6})$$

avec

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix}$$

Le terme f_i représente le flux magnétique de la bobine i , L_i correspond à l'inductance propre de la bobine i et M_{ij} associe à l'inductance mutuelle entre les bobines i et j .

L'énergie stockée dans cet élément est formulée de la manière suivante :

$$E_1 = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{F} \quad (\text{A.7})$$

A.3. Construction d'un modèle bond graph

Nous avons décrit la procédure de construction d'un modèle bond graph à partir d'un circuit électrique dans le paragraphe 1.2.5 du Chapitre 1. Nous présentons ici les procédures en mécanique et hydraulique.

A.3.1. Modélisation d'un système mécanique de translation (adaptée en rotation)

La procédure est la suivante :

1. Fixer un axe de référence pour les vitesses et déterminer le sens de transfert de la puissance.
2. Pour chaque vitesse différente, introduire une jonction 1 et y connecter les éléments correspondants.

3. Déterminer les relations entre vitesses, et les représenter à l'aide des jonctions 0 placées entre les jonctions 1 correspondant aux vitesses impliquées dans les relations.
4. Orienter les demi-fleches en considérant le sens de transfert de puissance.
5. Supprimer les jonctions 1 associées aux nœuds de vitesse nulle.
6. Simplifier le bond graph si possible (voir Figure A.2).

A.3.2. Modélisation d'un système hydraulique

1. Fixer un sens de circulation pour le fluide. Il sera pris comme sens de transfert de la puissance
2. Rechercher tous les nœuds de pressions différentes. Placer une jonction 0 par nœud.
3. Placer une jonction 1 entre deux jonctions 0 et y attacher les éléments soumis à la différence de pressions correspondantes.
4. Relier les jonctions par des liens, en respectant le sens de transfert de la puissance.
5. Choisir une pression de référence (pression atmosphérique en général) et supprimer les jonctions 0 qui y sont associées, ainsi que tous les liens qui y sont attachés. Simplifier si possible.



Figure A.2. Exemple de simplification des jonctions.

A.4. Causalité : chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action

En parcourant la causalité dans un bond graph, nous pouvons déterminer les chemins causaux, les boucles causales et les chaînes d'actions. En fait, ces notions illustrent les couplages entre les éléments dans le modèle. Nous les présentons dans les sections suivantes.

A.4.1. Chemin causal

Définition A.1 :

Un chemin causal direct est un chemin allant d'un élément vers un autre en ne traversant que des éléments de jonction.

Un chemin causal direct est dit *simple* s'il est parcouru en suivant toujours la même variable (voir Figure A.3). Il existe donc deux chemins causaux simples passant par les mêmes liens mais en suivant différentes variables, soit l'effort, soit le flux.

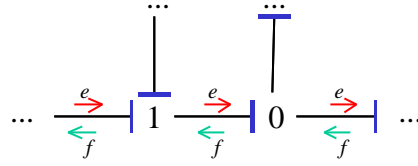


Figure A.3. Chemin causal simple.

Un chemin causal direct est dit *mixte* si son parcours comporte un élément *GY* qui impose le changement de variable suivie.

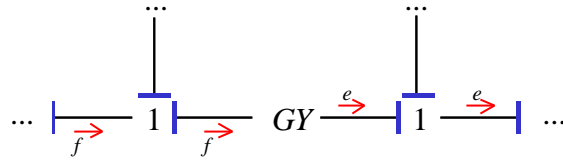


Figure A.4. Chemin causal mixte.

Un chemin causal est *indirect* lorsqu'il passe par des éléments passifs (*R, I, C*).

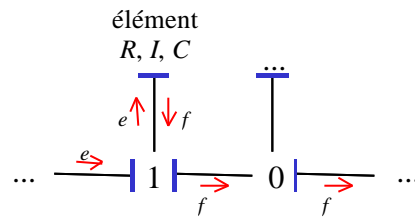


Figure A.5. Chemin causal indirect.

Le gain d'un chemin causal se calcule à l'aide des équations suivantes.

- Pour un chemin causal simple ou mixte :

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \quad (\text{A.8})$$

avec

- n_0 et n_1 : nombre de changements d'orientation aux jonctions 0 (respectivement 1) quand on suit la variable flux (respectivement effort).
- m_i : module de l'élément TF_i traversé avec $k_i = +1$ ou -1 selon la causalité appliquée.
- r_j : module de l'élément GY_j traversé avec $l_j = +1$ ou -1 selon la causalité appliquée.

- Pour un chemin causal indirect, le gain des éléments traversés doit être pris en compte.

$$T = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e \quad (\text{A.9})$$

où

g_e : gain de l'élément passif e (transmittance entrée-sortie) traversé.

En effet, le gain d'un élément passif est déterminé par sa causalité (voir Tableau 1.4 du Chapitre 1). Dans le cas linéaire, la transmittance est définie au Tableau A.1, où s représente la variable de Laplace.

Tableau A.1. Transmittance des éléments passifs linéaires.

Elément	Type de causalité	Gain	Type de causalité	Gain
R	résistance	$G_R(s) = R$	conductance	$G_R(s) = \frac{1}{R}$
I	intégrale	$G_I(s) = \frac{1}{I s}$	dérivée	$G_I(s) = I s$
C	intégrale	$G_C(s) = \frac{1}{C s}$	dérivée	$G_C(s) = C s$

A.4.2. Boucle causale

Définition A.2 :

Une boucle causale est un chemin causal fermé partant de la sortie d'un élément R , I ou C , et revenant à l'entrée de cet élément sans parcourir le même lien en suivant la même variable plus d'une fois.

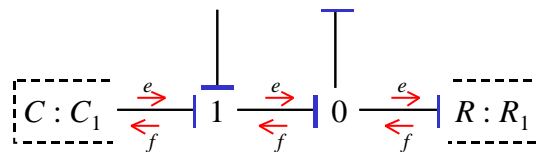


Figure A.6. Boucle causale entre R_1 et C_1 .

La formule générale du gain d'une boucle causale est définie par l'équation (A.10).

$$B = (-1)^{n_0+n_1} \prod_i (m_i^2)^{k_i} \prod_j (r_j^2)^{l_j} \prod_e g_e \quad (\text{A.10})$$

Le terme g_e correspond au gain de tous les éléments passifs qui composent la boucle.

A.4.3. Chaîne d'action

Définition A.3 :

Une chaîne d'action est un chemin causal entre une source et une sortie (ou détecteur).

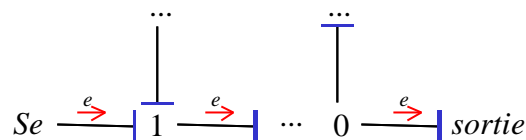


Figure A.7. Chaîne d'action.

A.5. Obtention d'un modèle mathématique

En utilisant les notions de chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action, nous pouvons déduire l'équation d'état et la fonction de transfert du modèle d'une manière structurale.

A.5.1. Equation d'état (cas où tous les éléments I et C sont en causalité intégrale)

Pour déduire l'équation d'état, nous calculons les gains statiques (sans le terme s) des chemins causaux, boucles causales et chaînes d'action. Considérons le modèle général suivant :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}\end{aligned}\tag{A.11}$$

Le vecteur \mathbf{X} contient les variables d'énergie des éléments dynamiques (I et C) en causalité intégrale.

Les éléments des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} sont déterminés comme suit :

- L'élément a_{ii} (diagonale de \mathbf{A}) est la somme des gains statiques de boucles causales entre l'élément dynamique associé à X_i et les éléments résistifs.
- L'élément a_{ij} ($i \neq j$) est la somme des gains de chemins causaux partant de l'élément dynamique associé à X_j vers l'élément dynamique associé à X_i , multipliée par le gain de l'élément associé à X_j .
- L'élément b_{ik} est la somme des gains de chaînes d'actions partant de la source k vers l'élément dynamique associé à X_i .
- L'élément c_{ji} est la somme des gains de chemins causaux partant de l'élément dynamique associé à X_i vers la sortie j , multipliée par le gain de l'élément dynamique associé à X_i .
- L'élément d_{jk} est la somme des gains de chaînes d'actions partant de la source k vers la sortie j .

Remarques :

Les chemins causaux parcourus pour ce calcul ne peuvent traverser que des éléments des jonctions (0, 1, TF, GY) ou des éléments R.

Les variables d'énergie p_l et q_c formant le vecteur d'état sont liées, dans le cas linéaire, aux variables de puissance f_l et e_c par la relation :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} f_l \\ e_c \end{bmatrix} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} p_l \\ q_c \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

où \mathbf{F} est une matrice diagonale en cas d'éléments monoports et bloc diagonale en cas d'éléments multiports. Dans le cas monoport, elle est composée de termes $1/I_i$ et $1/C_j$.

Il est donc possible de construire par simple changement de base le vecteur $\mathbf{X}^* = [f_l \ e_c]^T$ associé aux variables de puissance qui correspond à des pratiques habituelles dans certains domaines physiques.

A.5.2. Fonction de transfert

La fonction de transfert d'une sortie y par rapport à une entrée e peut être déterminée en appliquant la **règle de Mason** au modèle bond graph. Cette fonction s'écrit :

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{\sum_i T_i(s) D_i(s)}{D(s)} \quad (\text{A.13})$$

avec

$$D(s) = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots \quad (\text{A.14})$$

où

$\sum_i B_i$ somme des gains de toutes les boucles causales et des mailles dans le modèle bond graph.

$\sum_{i,j} B_i B_j$ somme des produits 2 à 2 des gains de boucles causales disjointes (voir Définition 1.4).

$T_i(s)$ gain de la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.

$D_i(s)$ se calcule comme $D(s)$ en enlevant la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action du modèle.

Définition A.4 :

Deux boucles causales sont disjointes s'il n'y a aucun lien ni jonction en commun parcouru en suivant la même variable. Cette définition peut aussi être appliquée à 2 chemins causaux disjoints.

A.6. Analyses structurelles

Notations :

Nous notons BGI (respectivement BGD) le modèle bond graph obtenu lorsque la causalité intégrale (respectivement dérivée) est préférentiellement appliquée aux éléments dynamiques. Rappelons que ces derniers sont les éléments I et C .

En utilisant ces notations, nous pouvons déduire directement de l'architecture du bond graph les notions suivantes [Dau-00] :

A.6.1. Ordre d'un modèle

L'ordre d'un modèle bond graph (n) est le nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale dans le BGI.

A.6.2. Rang de la matrice d'état

Le rang BG de la matrice d'état est défini comme :

$$\text{Rang}_{BG}(\mathbf{A}) = n - q \quad (1.4)$$

où

- n l'ordre du modèle,
- q le nombre d'éléments dynamiques qui restent en causalité intégrale dans le modèle BGD.

Remarque :

Ce rang BG est le vrai "rang de \mathbf{A} ", à cause des propriétés causales du modèle bond graph.

A.6.3. Observabilité

Un modèle est structurellement observable si et seulement si :

- a. Tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement liés à un détecteur dans le modèle BGI, ou
- b. Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée dans le modèle BGD. S'il existe des éléments dynamiques restant en causalité intégrale, la dualisation des détecteurs De et Df doit permettre de les mettre en causalité dérivée. Notons que dans ce cas, nous connectons des détecteurs avec le modèle en utilisant des liens de puissance dont la variable complémentaire de celle mesurée est nulle (autrement dit, des liens de puissance nulle).

La dualisation consiste à changer la variable d'un élément ou d'une jonction par sa variable duale. Par exemple, la dualisation d'un détecteur d'effort donne un détecteur de flux, la dualisation d'une jonction 0 donne une jonction 1.

Pour rendre un modèle observable structurellement :

- il suffit d'un détecteur placé n'importe où, si tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée dans le modèle BGD.
- il faut au moins k détecteurs bien placés, si k éléments dynamiques restent en causalité intégrale dans le modèle BGD. Le bon positionnement est déterminé en fonction du placement des détecteurs dont la dualisation permet de changer la causalité de ces éléments dynamiques.

A.6.4. Commandabilité

Un modèle est structurellement commandable en état si et seulement si :

- a. Tous les éléments dynamiques en causalité intégrale sont causalement liés à une source de commande MSe ou MSf dans le modèle BGI, ou
- b. Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée dans le modèle BGD. S'il existe des éléments dynamiques restant en causalité intégrale, la dualisation des sources de commande MSe et MSf doit permettre de les mettre en causalité dérivée.

Pour rendre un modèle commandable structurellement :

- il suffit d'une source de commande placée n'importe où, si tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée dans le modèle BGD.
- il faut au moins k sources de commande bien placées, si k éléments dynamiques restent en causalité intégrale dans le modèle BGD. Le bon positionnement est déterminé en fonction du placement des sources dont la dualisation permet de changer la causalité de ces éléments dynamiques.

A.6.5. Inversibilité

Un modèle à m entrées et m sorties est inversible s'il contient un seul choix de m chemins causaux entrée/sortie (CCES) disjoints dans le modèle BGI (voir Définition 1.4).

S'il existe plusieurs choix de m CCES disjoints, il faut déterminer le déterminant de la matrice système \mathbf{S} . Cette matrice est définie comme :

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où les matrices **A**, **B**, **C** et **D** sont les matrices de l'équation d'état. La matrice **I_n** est la matrice d'identité de dimensions $n \times n$. Si le déterminant de la matrice **S(s)** n'est pas nul, le modèle est inversible. Sinon, il est non inversible.

Si le modèle ne contient pas m CCES disjoints, le modèle est non inversible.

A.6.6. Exemple

Considérons un système électrique du 3^{ème} ordre présenté la Figure A.8.

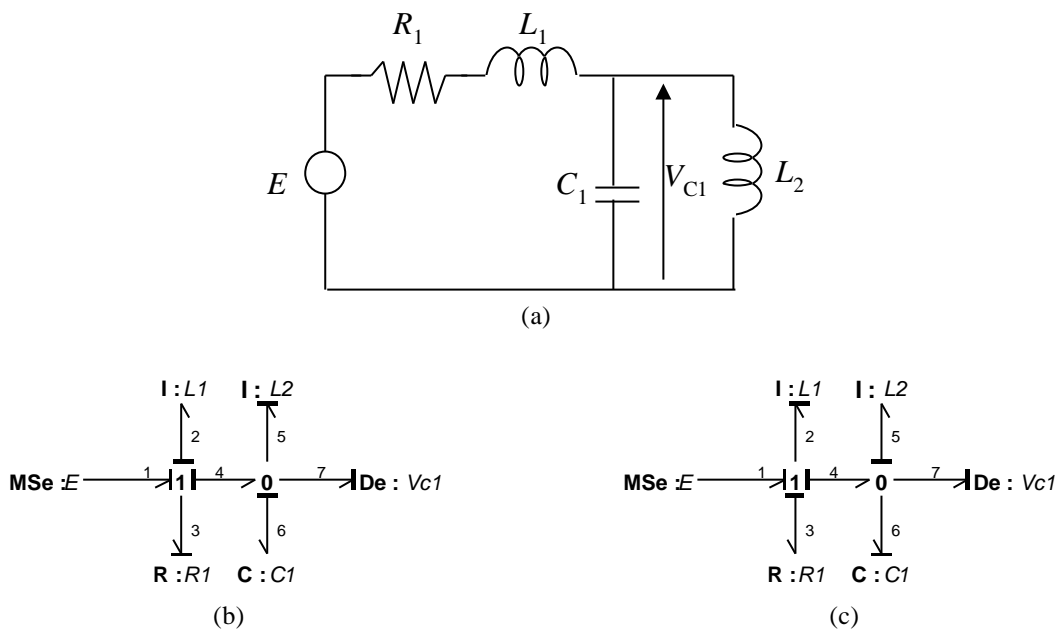


Figure A.8. Exemple : (a) circuit électrique, (b) bond graph associé (BGI), (c) BGD.

A partir du modèle bond graph, nous déduisons les propriétés suivantes :

Ordre du modèle	3 (BGI)
Rang du modèle	3 (BGD)
Observabilité	Il suffit d'un seul détecteur. Assuré par $De : V_{C1}$
Commandabilité	Il suffit d'une source de commande. Assurée par $MSe : E$
Inversibilité	Il n'existe qu'un seul choix de chemin E/S (enchaînement : $E - 1 - 2 - L_1 - 2 - 4 - 6 - C_1 - 6 - 7 - De$) Le modèle est donc inversible.

Par ailleurs, nous pouvons déduire directement le schéma bloc global à partir du modèle bond graph causal. Il existe deux lignes d'information : une pour les variables de flux et une autre pour les variables d'effort. En effet, nous illustrons les lois caractéristiques des jonctions avec des nœuds (pour représenter les variables communes), des sommateurs (pour représenter la relation entre les variables dans le cas d'un jonction 0 ou 1) ou des gains (dans le cas d'un TF

ou GY). Les lois caractéristiques des éléments passifs R , I , C sont ensuite mises pour relier les variables. Le schéma bloc de notre exemple est présenté Figure A.9.

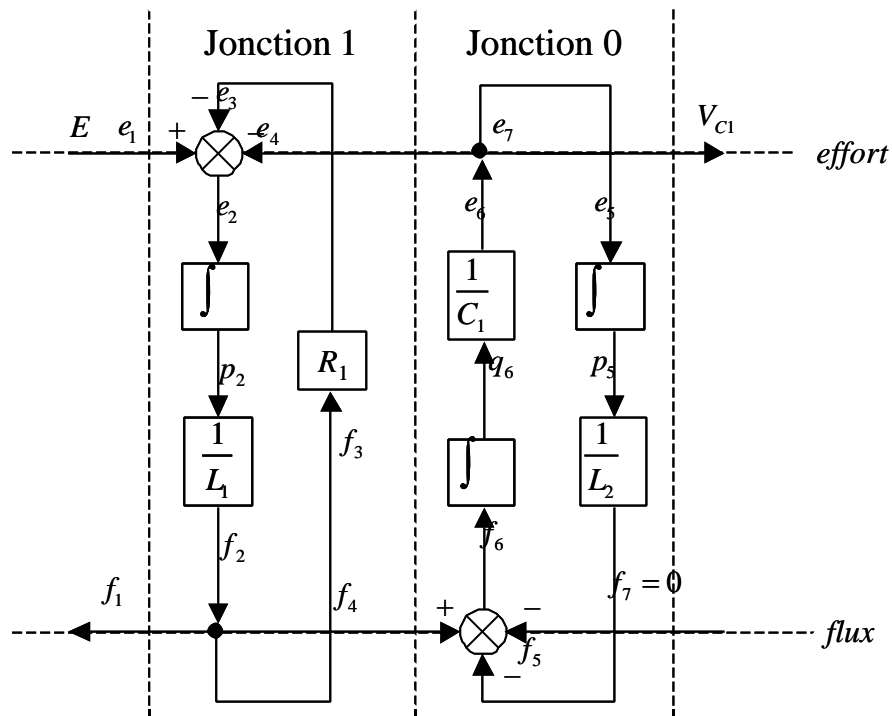


Figure A.9. Schéma bloc déduit à partir du modèle bond graph.

Pour obtenir la sortie V_{C1} , il suffit de redessiner ce schéma en enlevant les variables nulles (f_7) ou non intéressantes (f_1). Nous obtenons le schéma bloc illustré par Figure A.10.

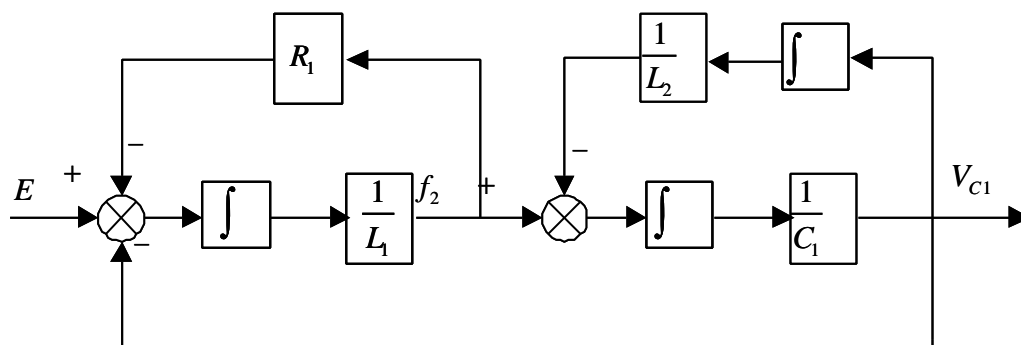


Figure A.10. Schéma bloc pour obtenir V_{C1} .

Annexe B

Les valeurs des paramètres

B.1. Moteur à courant continu

E	200 V	Tension d'alimentation continue
R_f	50 m Ω	Résistance du filtre
L_f	2.63 mH	Inductance du filtre
C_f	23.7 mF	Capacité du filtre
L_m	0.16 mH	Inductance d'induit du moteur
R_m	143 m Ω	Résistance du moteur
J_m	0.0037 kg.m ²	Inertie de l'arbre du moteur
F_m	0.007 N.m/(rad/s)	Frottement torsionnel de l'arbre du moteur
F_r	100 N.m/(rad/s)	Frottement torsionnel de la souplesse d'accouplement
J_c	0.0037 kg.m ²	Inertie de la charge
K	0.57 Wb	Coefficient du gyrateur (transformation électrique-mécanique)
N	5	Coefficient du réducteur

B.2. Chaîne de traction ferroviaire

Alimentation

U_{cont} 2750 V continue

Filtre

R_f	50 m Ω	Résistance du filtre
L_f	4.25 mH	Inductance du filtre
C_f	17 mF	Capacité du filtre

Machine Asynchrone

L_s	19.272 mH	Inductance cyclique stator
L_m	19.244 mH	Inductance cyclique rotor
L_r	18.6 mH	Inductance magnétisante

R_s	29.4 mΩ	Résistance statorique
R_r	25.5 mΩ	Résistance rotorique
p	2	Nombre de paires de pôles

Commande

T_{BF}	0.002 s	Constante de temps en boucle fermée
F_{ech}	1 kHz	Fréquence d'échantillonnage de la commande

Modèle sans transmission mécanique

J_m	30 kg.m ²	Inertie de l'arbre du moteur
f	0.1 N.m/(rad/s)	Frottement de l'arbre du moteur

Transmission mécanique

I_3	19.4 kg.m ²	Inertie de rotation de la roue dentée principale
I_4	1.78 kg.m ²	Inertie de rotation de la roue intermédiaire
I_5	0.28 kg.m ²	Inertie de rotation du pignon moteur
I_6	30 kg.m ²	Inertie de rotation du rotor
I_9	15 kg.m ²	Inertie de rotation du plateau calé sur l'essieu
K_{acc}	1×10^{10} N.m/rad	Raideur de torsion de l'accouplement mécanique
C_{acc}	10 N.m/(rad/s)	Frottement torsionnel d'un accouplement mécanique
K_4	2×10^9 N.m/rad	Raideur de denture entre les pignons 4 et 3
K_5	2×10^9 N.m/rad	Raideur de denture entre les pignons 4 et 5
K_{jac}	6.5×10^6 N.m/rad	Raideur de torsion de la transmission Jacquemin
C_{jac}	8500 N.m/(rad/s)	Frottement torsionnel de la transmission Jacquemin
K_{ess}	1×10^{11} N.m/rad	Raideur de torsion de l'essieu
R_3	0.4095 m	Rayon de la roue dentée principale
R_4	0.2025 m	Rayon de la roue intermédiaire
R_5	0.1035 m	Rayon du pignon moteur
R_{roue}	0.575 m	Rayon de la roue
I_{roue}	212 kg.m ²	Inertie de la roue
M_{train}	52610 kg	Masse de train
I_{eq}	17606.185 kg.m ²	Inertie équivalente ($I_{eq} = I_{roue} + R_{roue}^2 M_{train}$)

Annexe C

Modèles d'état de la chaîne de traction ferroviaire

La machine asynchrone de cette chaîne est modélisée dans le repère (d,q) lié au vecteur tension du stator. Nous utilisons les variables d'énergie comme variables d'état. Ces dernières sont définies comme suit :

Φ_{L_f}	Flux de l'inductance du filtre
q_{C_f}	Charge de la capacité du filtre
Φ_{sLsd} (Φ_{sLsq})	Flux de l'inductance de fuites totalisée au stator de l'axe d (respectivement q)
Φ'_{rd} (Φ'_{rq})	Flux de l'inductance de magnétisante ramenée au stator de l'axe d (respectivement q)
p_{I_6}	Impulsion de l'inertie I_6
p_{I_5}	Impulsion de l'inertie I_5
p_{I_4}	Impulsion de l'inertie I_4
p_{I_3}	Impulsion de l'inertie I_3
p_{I_9}	Impulsion de l'inertie I_9
$p_{I_{eq}}$	Impulsion de l'inertie équivalente I_{eq}
$q_{K_{acc}}$	Angle du raideur K_{acc}
q_{K_4}	Angle du raideur K_4
q_{K_5}	Angle du raideur K_5
$q_{K_{jac}}$	Angle du raideur K_{jac}
$q_{K_{ess}}$	Angle du raideur K_{ess}

La variable h_d correspond au rapport de transformation du convertisseur "simplifié", tandis que w_s représente la pulsation de l'angle du vecteur tension du stator. Les termes sL_s , R_r' et R_{sr} sont définis selon :

$$sL_s = L_s - \frac{L_m^2}{L_r}$$

$$R_r' = \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r$$

$$R_{sr} = R_s + R_r'$$

C.1. Modèle d'état non linéaire

En considérant les variables présentées précédemment, l'équation d'état non linéaire de la chaîne de traction ferroviaire est formulée comme :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{Lf} &= -\frac{R_f}{L_f} \Phi_{Lf} - \frac{1}{C_f} q_{Cf} + U_{cont} \\ \dot{q}_{Cf} &= \frac{1}{L_f} \Phi_{Lf} - \frac{h_d}{sL_s} \Phi_{sLsd} \\ \dot{\Phi}_{sLsd} &= \frac{h_d}{C_f} q_{Cf} + \Phi_{sLsq} \cdot \mathbf{w}_s - \frac{R_{sr}}{sL_s} \Phi_{sLsd} + \frac{R_r}{L_r} \Phi_{rd}' + \frac{p}{I_6} \Phi_{rq}' \cdot p_{16} - \Phi_{rq}' \cdot \mathbf{w}_s \\ \dot{\Phi}_{sLsq} &= -\Phi_{sLsd} \cdot \mathbf{w}_s - \frac{R_{sr}}{sL_s} \Phi_{sLsq} + \frac{R_r}{L_r} \Phi_{rq}' - \frac{p}{I_6} \Phi_{rd}' \cdot p_{16} + \Phi_{rd}' \cdot \mathbf{w}_s \\ \dot{\Phi}_{rd}' &= \frac{R_r'}{sL_s} \Phi_{sLsd} - \frac{R_r}{L_r} \Phi_{rd}' + \Phi_{rq}' \cdot \mathbf{w}_s - \frac{p}{I_6} \Phi_{rq}' \cdot p_{16} \\ \dot{\Phi}_{rq}' &= \frac{R_r'}{sL_s} \Phi_{sLsq} - \frac{R_r}{L_r} \Phi_{rq}' - \Phi_{rd}' \cdot \mathbf{w}_s + \frac{p}{I_6} \Phi_{rd}' \cdot p_{16} \\ \dot{p}_{16} &= \frac{p}{sL_s} (\Phi_{rd}' \cdot \Phi_{sLsq} - \Phi_{rq}' \cdot \Phi_{sLsd}) - \frac{C_{acc}}{I_6} p_{16} + \frac{C_{acc}}{I_5} p_{15} - K_{acc} \cdot q_{Kacc} \\ \dot{p}_{15} &= \frac{C_{acc}}{I_6} p_{16} - \frac{C_{acc}}{I_5} p_{15} + K_{acc} \cdot q_{Kacc} - R_5 \cdot K_4 \cdot q_{K4} \\ \dot{p}_{14} &= -R_4 \cdot K_4 \cdot q_{K4} - R_4 \cdot K_5 \cdot q_{K5} \\ \dot{p}_{13} &= -\frac{C_{jac}}{I_3} p_{13} + \frac{C_{jac}}{I_9} p_{19} - R_3 \cdot K_5 \cdot q_{K5} - K_{jac} \cdot q_{Kjac} \\ \dot{p}_{19} &= \frac{C_{jac}}{I_3} p_{13} - \frac{C_{jac}}{I_9} p_{19} + K_{jac} \cdot q_{Kjac} - K_{ess} \cdot q_{Kess} \\ \dot{p}_{1eq} &= K_{ess} \cdot q_{Kess} - R_{roue} \cdot F_{res} \\ \dot{q}_{Kacc} &= \frac{1}{I_6} p_{16} - \frac{1}{I_5} p_{15} \\ \dot{q}_{K4} &= \frac{R_5}{I_5} p_{15} + \frac{R_4}{I_4} p_{14} \\ \dot{q}_{K5} &= \frac{R_4}{I_4} p_{14} + \frac{R_3}{I_3} p_{13} \\ \dot{q}_{Kjac} &= \frac{1}{I_3} p_{13} - \frac{1}{I_9} p_{19} \\ \dot{q}_{Kess} &= \frac{1}{I_9} p_{19} - \frac{1}{I_{eq}} p_{1eq} \end{aligned}$$

C.2. Modèle d'état linéarisé

Le modèle linéarisé autour d'un point de fonctionnement est caractérisé par les équations d'état (en petites variations) suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\Phi}_{lf} &= -\frac{R_f}{L_f} \Delta \Phi_{lf} - \frac{1}{C_f} \Delta q_{cf} + \Delta U_{cont} \\ \Delta \dot{q}_{cf} &= \frac{1}{L_f} \Delta \Phi_{lf} - \frac{\bar{h}_d}{sL_s} \Phi_{sLsd} - \frac{\bar{\Phi}_{sLsd}}{sL_s} \Delta h_d \\ \Delta \dot{\Phi}_{sLsd} &= \left(\begin{aligned} &\frac{\bar{h}_d}{C_f} \Delta q_{cf} + \frac{\bar{q}_{cf}}{C_f} \Delta h_d - \frac{R_{sr}}{sL_s} \Delta \Phi_{sLsd} + \frac{R_r}{L_r} \Delta \Phi_{rd}' + \frac{p}{I_6} \bar{\Phi}_{rq}' \Delta p_{16} + \frac{p}{I_6} \Delta \Phi_{rq}' \cdot \bar{p}_{16} \\ &+ \bar{w}_s (\Delta \Phi_{sLsq} - \Delta \Phi_{rq}') + \Delta w_s (\bar{\Phi}_{sLsq} - \bar{\Phi}_{rq}') \end{aligned} \right) \\ \Delta \dot{\Phi}_{sLsq} &= \left(\begin{aligned} &-\frac{R_{sr}}{sL_s} \Delta \Phi_{sLsq} + \frac{R_r}{L_r} \Delta \Phi_{rq}' - \frac{p}{I_6} \bar{\Phi}_{rd}' \Delta p_{16} - \frac{p}{I_6} \Delta \Phi_{rd}' \cdot \bar{p}_{16} \\ &-\bar{w}_s (\Delta \Phi_{sLsd} - \Delta \Phi_{rd}') - \Delta w_s (\bar{\Phi}_{sLsd} - \bar{\Phi}_{rd}') \end{aligned} \right) \\ \Delta \dot{\Phi}_{rd}' &= \frac{R_r}{sL_s} \Delta \Phi_{sLsd} - \frac{R_r}{L_r} \Delta \Phi_{rd}' + \bar{\Phi}_{rq}' \Delta w_s + \Delta \Phi_{rq}' \bar{w}_s - \frac{p}{I_6} \bar{\Phi}_{rq}' \Delta p_{16} - \frac{p}{I_6} \Delta \Phi_{rq}' \cdot \bar{p}_{16} \\ \Delta \dot{\Phi}_{rq}' &= \frac{R_r}{sL_s} \Delta \Phi_{sLsq} - \frac{R_r}{L_r} \Delta \Phi_{rq}' - \bar{\Phi}_{rd}' \Delta w_s - \Delta \Phi_{rd}' \bar{w}_s + \frac{p}{I_6} \bar{\Phi}_{rd}' \Delta p_{16} + \frac{p}{I_6} \Delta \Phi_{rd}' \cdot \bar{p}_{16} \\ \Delta \dot{p}_{16} &= \left(\begin{aligned} &\frac{p}{sL_s} (\bar{\Phi}_{rd}' \Delta \Phi_{sLsq} + \Delta \Phi_{rd}' \bar{\Phi}_{sLsq} - \bar{\Phi}_{rq}' \Delta \Phi_{sLsd} - \Delta \Phi_{rq}' \bar{\Phi}_{sLsd}) \\ &-\frac{C_{acc}}{I_6} \Delta p_{16} + \frac{C_{acc}}{I_5} \Delta p_{15} - K_{acc} \Delta q_{Kacc} \end{aligned} \right) \\ \Delta \dot{p}_{15} &= \frac{C_{acc}}{I_6} \Delta p_{16} - \frac{C_{acc}}{I_5} \Delta p_{15} + K_{acc} \Delta q_{Kacc} - R_5 \cdot K_4 \Delta q_{K4} \\ \Delta \dot{p}_{14} &= -R_4 \cdot K_4 \Delta q_{K4} - R_4 \cdot K_5 \Delta q_{K5} \\ \Delta \dot{p}_{13} &= -\frac{C_{jac}}{I_3} \Delta p_{13} + \frac{C_{jac}}{I_9} \Delta p_{19} - R_3 \cdot K_5 \Delta q_{K5} - K_{jac} \cdot q_{Kjac} \\ \Delta \dot{p}_{19} &= \frac{C_{jac}}{I_3} \Delta p_{13} - \frac{C_{jac}}{I_9} \Delta p_{19} + K_{jac} \Delta q_{Kjac} - K_{ess} \cdot q_{Kess} \\ \Delta \dot{p}_{1eq} &= K_{ess} \Delta q_{Kess} - R_{roue} \Delta F_{res} \\ \Delta \dot{q}_{Kacc} &= \frac{1}{I_6} \Delta p_{16} - \frac{1}{I_5} \Delta p_{15} \\ \Delta \dot{q}_{K4} &= \frac{R_5}{I_5} \Delta p_{15} + \frac{R_4}{I_4} \Delta p_{14} \\ \Delta \dot{q}_{K5} &= \frac{R_4}{I_4} \Delta p_{14} + \frac{R_3}{I_3} \Delta p_{13} \end{aligned}$$

$$\Delta \dot{q}_{Kjac} = \frac{1}{I_3} \Delta p_{I3} - \frac{1}{I_9} \Delta p_{I9}$$

$$\Delta \dot{q}_{Kess} = \frac{1}{I_9} \Delta p_{I9} - \frac{1}{I_{eq}} \Delta p_{Ieq}$$

Dans notre essais, le point de fonctionnement est déterminé par l'ensemble de $C_{ref} = 5 \text{ kNm}$, $\Phi_{ref} = 4 \text{ Wb}$, $VRP = 8 \text{ rad/s}$ (la vitesse de train). Avec ces paramètres, nous pouvons calculer les valeurs nominales des variables (indiquées par \bar{x}) comme suit :

$$\bar{F}_{res} = \frac{R_3}{R_5 \cdot R_{roue}} C_{ref} = 34404.54 \text{ N}$$

$$\bar{p}_{I6} = I_6 \frac{R_3}{R_5 \cdot R_{roue}} VRP = 1651.42 \text{ rad/s}$$

$$\bar{\omega}_s = \frac{C_{ref} \cdot R_r}{p \cdot \Phi_{ref}^2} + \frac{p}{I_6} \bar{p}_{I6} = 114.08 \text{ rad/s}$$

$$\bar{h}_d = 0.182$$

$$\bar{\Phi}_{sLsd} = 0.774 \text{ Wb}$$

$$\bar{\Phi}_{sLsq} = -0.423 \text{ Wb}$$

$$\bar{\Phi}_{rd}' = -0.690 \text{ Wb}$$

$$\bar{\Phi}_{rd}'' = -3.804 \text{ Wb}$$

$$\bar{\Phi}_{lf} = 0.463 \text{ Wb}$$

$$\bar{q}_{cf} = 46.657 \text{ C}$$

$$\bar{p}_{I5} = \frac{I_5}{I_6} \bar{p}_{I6} = 0.5138 \text{ Nms}$$

$$\bar{p}_{I4} = -\frac{I_4 R_5}{I_5 R_4} \bar{p}_{I5} = -1.669 \text{ Nms}$$

$$\bar{p}_{I3} = -\frac{I_3 R_4}{I_4 R_3} \bar{p}_{I4} = 8.997 \text{ Nms}$$

$$\bar{p}_{I9} = \frac{I_9}{I_3} \bar{p}_{I3} = 6.957 \text{ Nms}$$

$$\bar{p}_{Ieq} = \frac{I_{eq}}{I_9} \bar{p}_{I9} = 8165.187 \text{ Nms}$$

$$\bar{q}_{Kacc} = \frac{C_{ref}}{K_{acc}} = 5 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

$$\bar{q}_{K4} = \frac{1}{R_5 \cdot K_4} \cdot C_{ref} = 2.416 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\bar{q}_{K5} = 2.416 \times 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\bar{q}_{Kjac} = \frac{R_3}{R_5 \cdot K_{jac}} C_{ref} = 3.044 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\bar{q}_{Kess} = \frac{R_3}{R_5 \cdot K_{ess}} C_{ref} = 1.978 \times 10^{-7} \text{ rad}$$

Annexe D

Bond graph incrémental de la chaîne de traction ferroviaire

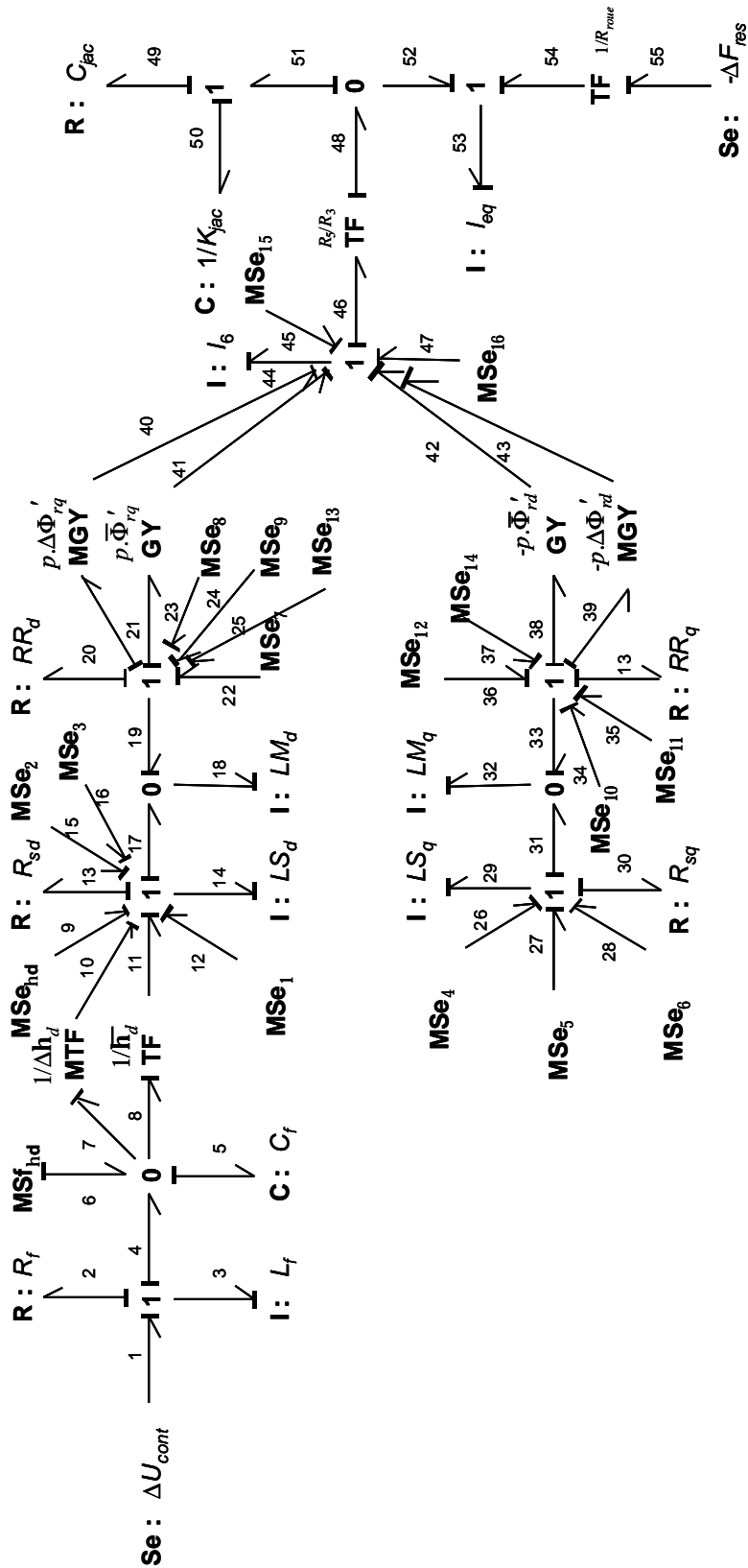


Figure D.1. Bond graph incrémental de la chaîne de traction ferroviaire.

Pour chaque repère, les éléments LF , LM et RR représentent respectivement l'inductance de fuites totalisée au stator, l'inductance magnétisante ramenée au stator et la résistance rotorique ramenée au stator. Leurs valeurs sont définies selon :

$$LF = sL_s = L_s - \frac{L_m^2}{L_r}$$

$$LM = \frac{L_m^2}{L_r}$$

$$RR = \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r$$

Les termes MSf et MSe dans le bond graph incrémental présenté précédemment correspondent à :

$$MSf_{hd} = -\bar{I}_{sd} \cdot \Delta \mathbf{h}_d$$

$$MSe_5 = -\bar{\Phi}_{sd} \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_{11} = -\bar{\Phi}_{rd}' \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_{hd} = \bar{V}_{Cf} \cdot \Delta \mathbf{h}_d$$

$$MSe_6 = -\Delta \Phi_{sd} \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_{12} = -\Delta \Phi_{rd}' \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_1 = \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \Delta \Phi_{sq}$$

$$MSe_7 = \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \Delta \Phi_{rq}'$$

$$MSe_{13} = -p \cdot \bar{\Omega} \cdot \Delta \Phi_{rq}'$$

$$MSe_2 = \bar{\Phi}_{sq} \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_8 = \bar{\Phi}_{rq}' \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_{14} = p \cdot \bar{\Omega} \cdot \Delta \Phi_{rd}'$$

$$MSe_3 = \Delta \Phi_{sq} \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_9 = \Delta \Phi_{rq}' \cdot \Delta \mathbf{w}_s$$

$$MSe_{15} = p \cdot \bar{I}_{rd} \cdot \Delta \Phi_{rq}'$$

$$MSe_4 = -\bar{\mathbf{w}}_s \cdot \Delta \Phi_{sd}$$

$$MSe_{10} = -\bar{\mathbf{w}}_s \cdot \Delta \Phi_{rd}'$$

$$MSe_{16} = -p \cdot \bar{I}_{rq}' \cdot \Delta \Phi_{rd}'$$

Annexe E

Etude fréquentielle des variables de la chaîne de traction ferroviaire

Les diagrammes de Bode de tous les éléments dans le modèle linéarisé sont présentés dans cette annexe.

Légende :

Trait plein : variable d'effort pour un élément I et variable de flux pour un élément C ou R .

Trait pointillé : variable de flux pour un élément I et variable d'effort pour un élément C ou R .

Trait bleu : sensibilité de variable par rapport au rapport cyclique h_d .

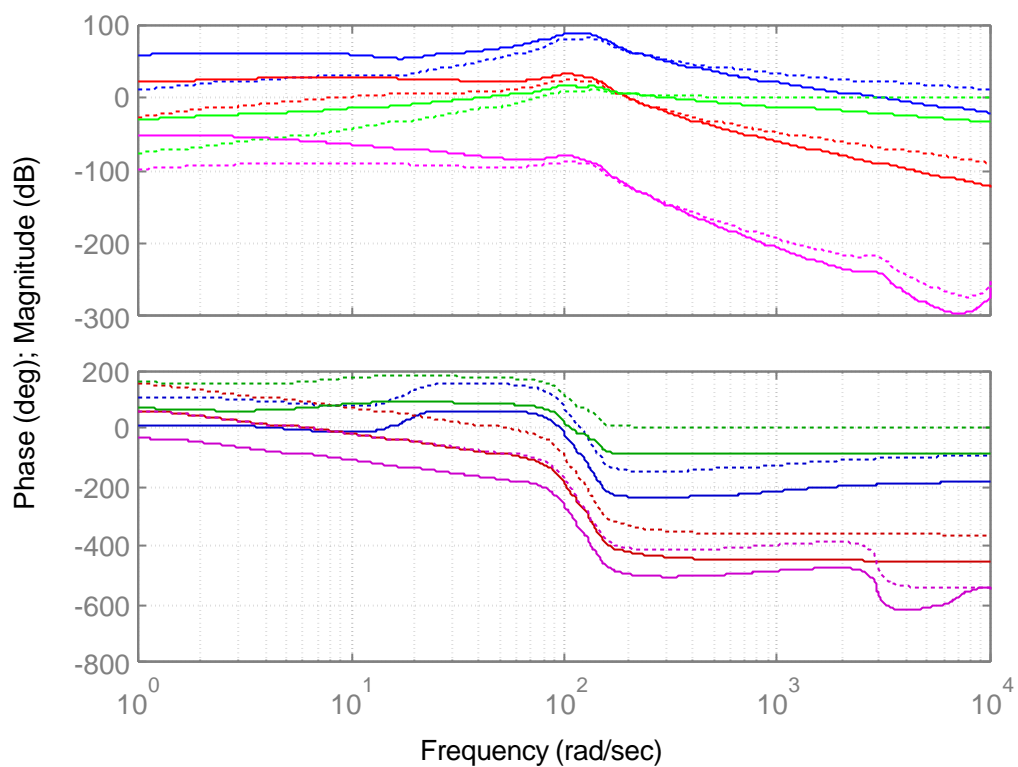
Trait rouge : sensibilité de variable par rapport à la pulsation statorique w_s .

Trait vert : sensibilité de variable par rapport à l'entrée U_{cont} .

Trait magenta : sensibilité de variable par rapport à l'entrée F_{res} .

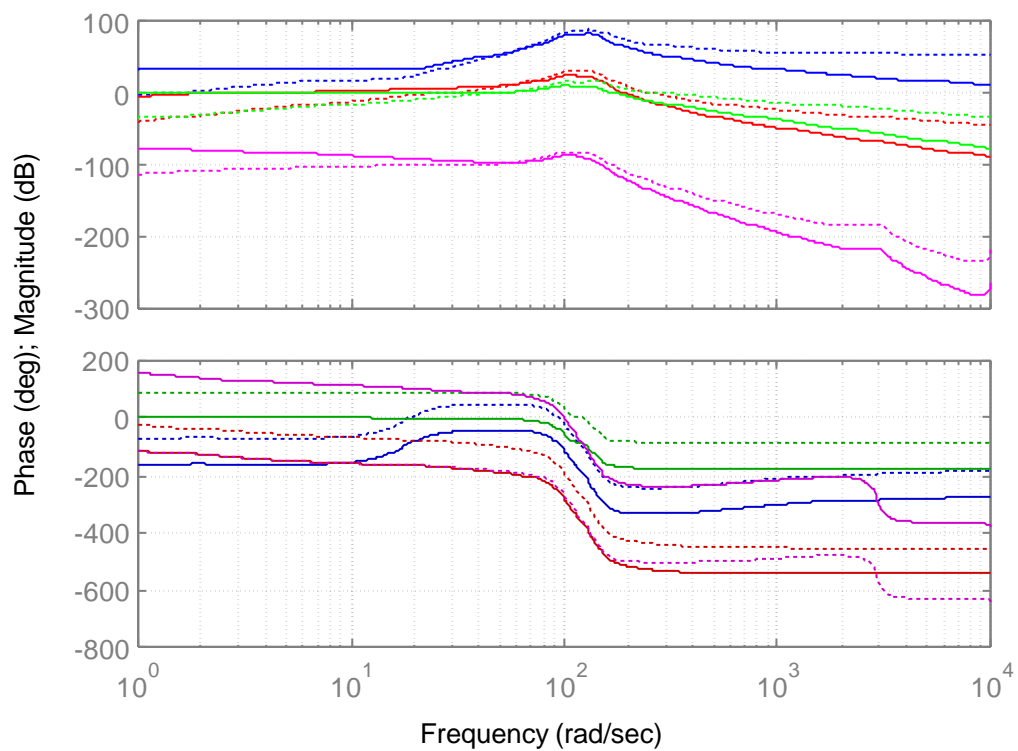
- Pour L_f

Bode Diagrams



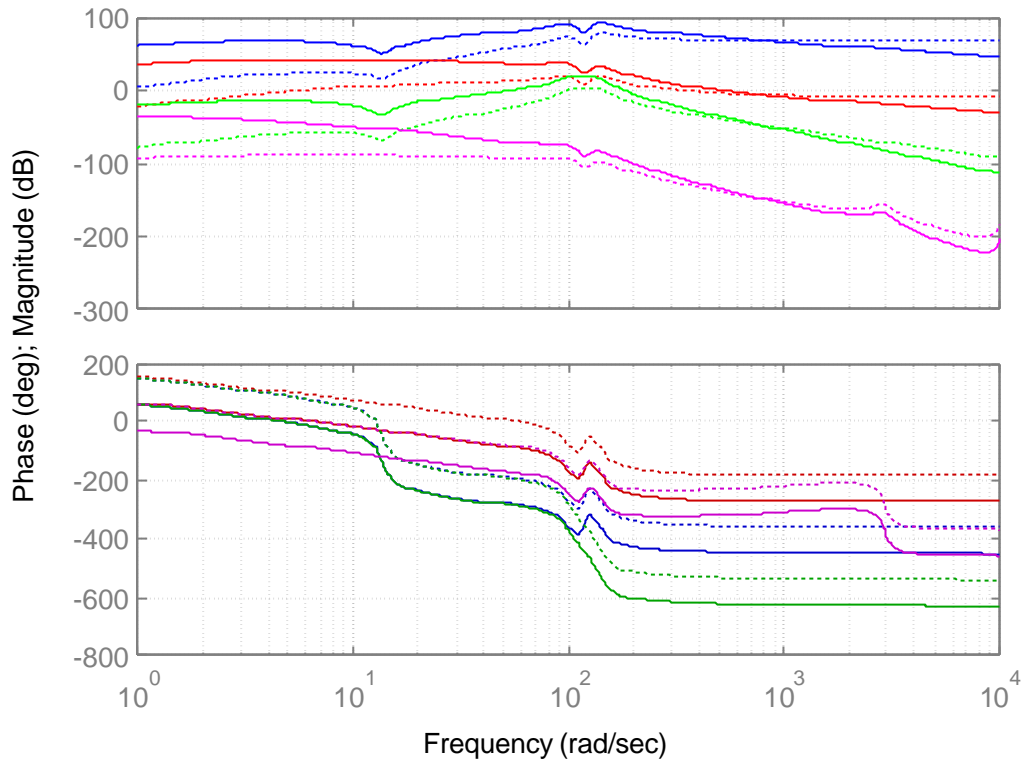
- Pour C_f

Bode Diagrams



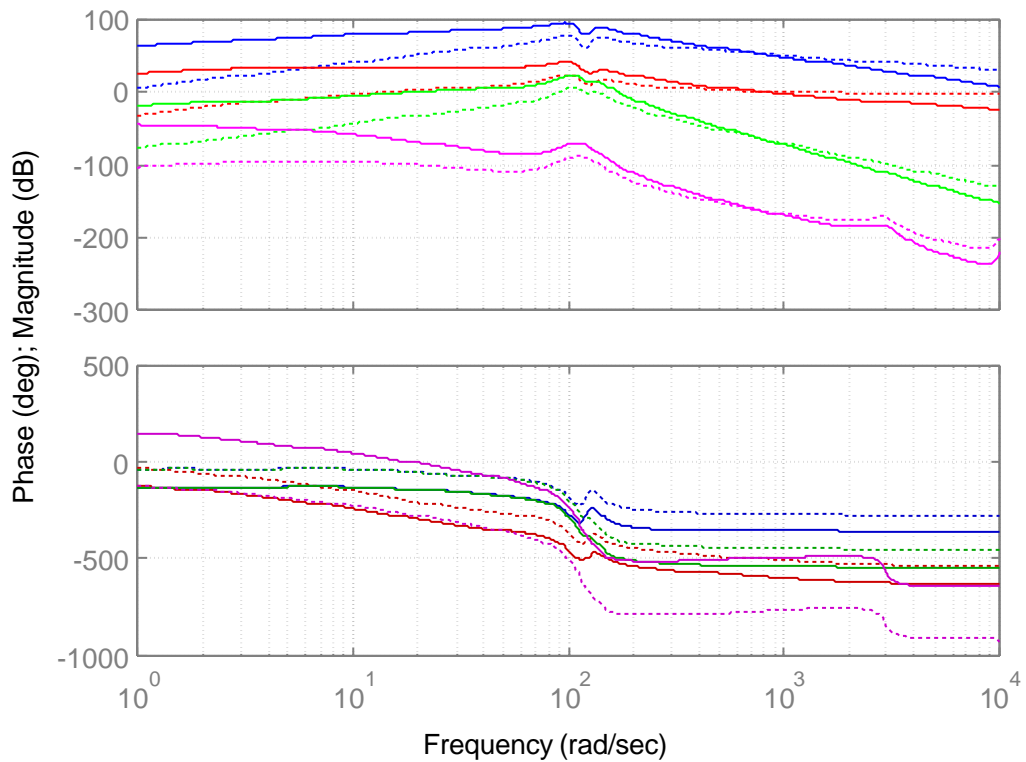
- Pour sL_s axe d (sL_{sd})

Bode Diagrams



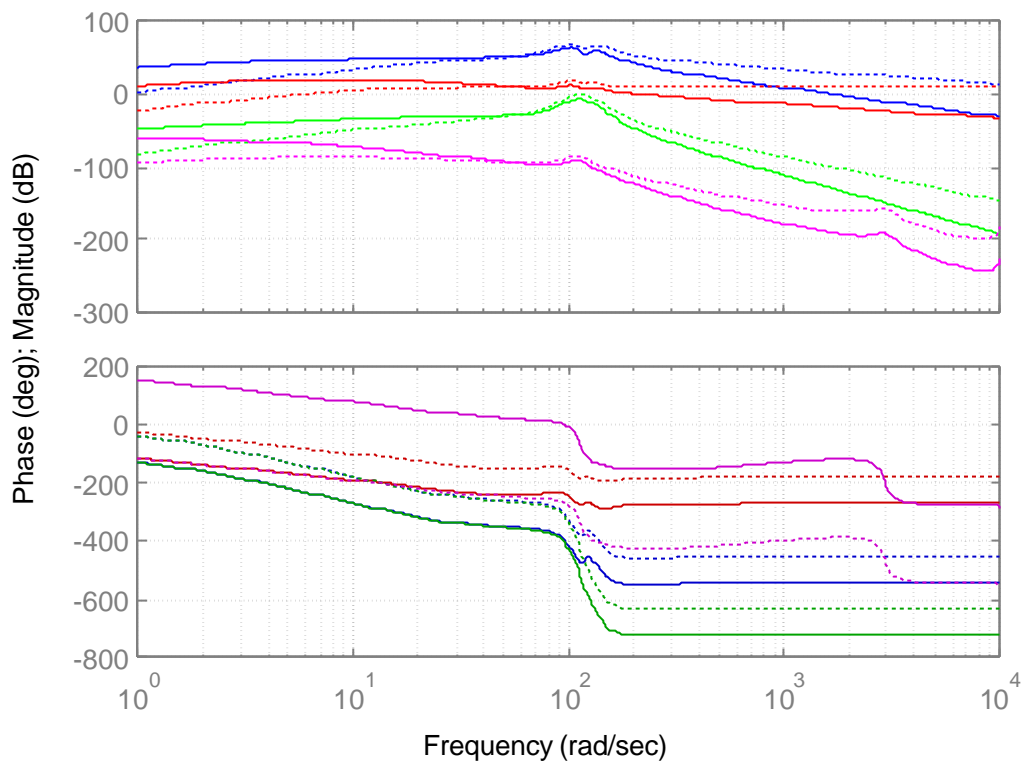
- Pour sL_s axe q (sL_{sq})

Bode Diagrams



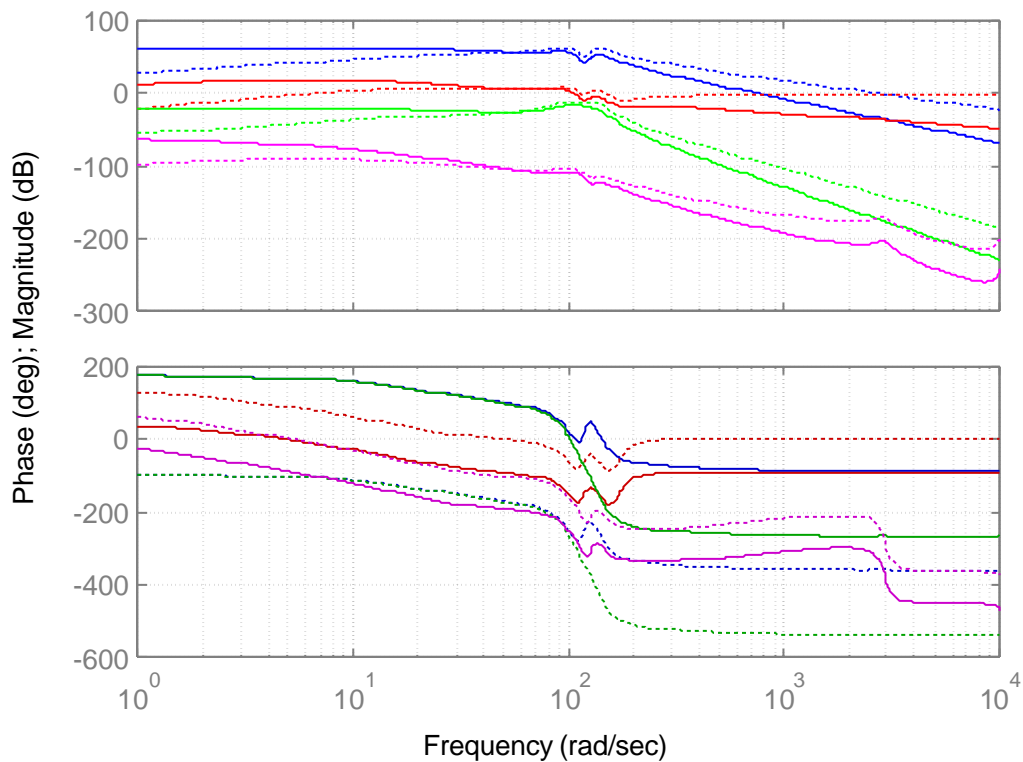
- Pour LM axe d (LM_d)

Bode Diagrams



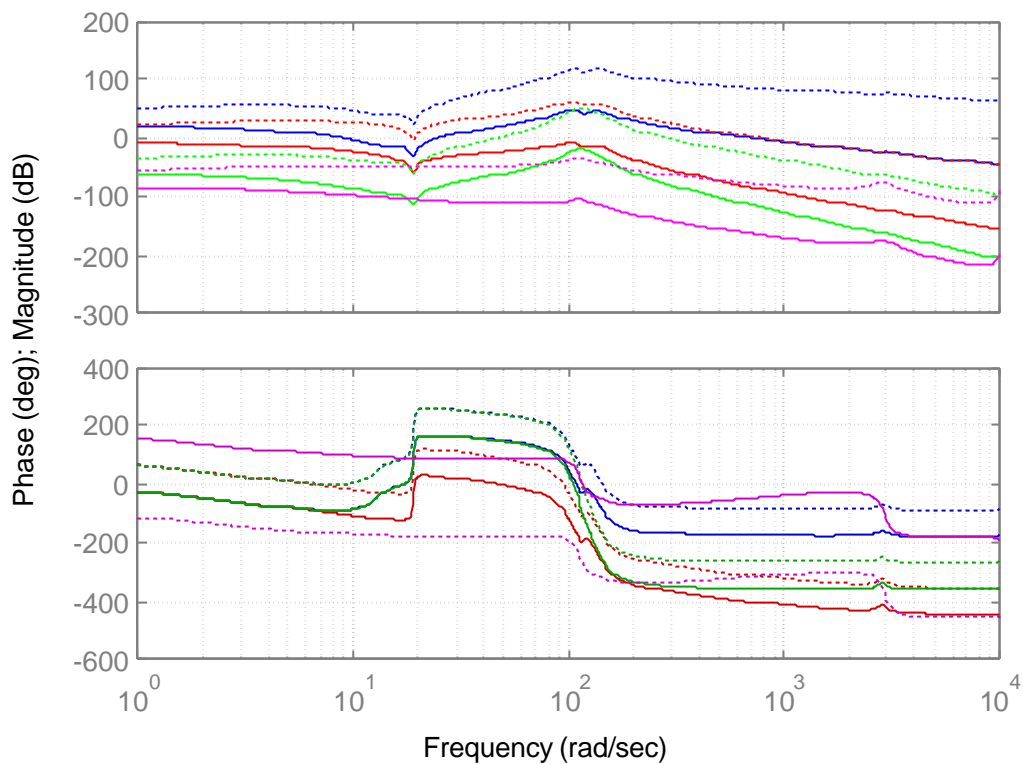
- Pour LM axe q (LM_q)

Bode Diagrams



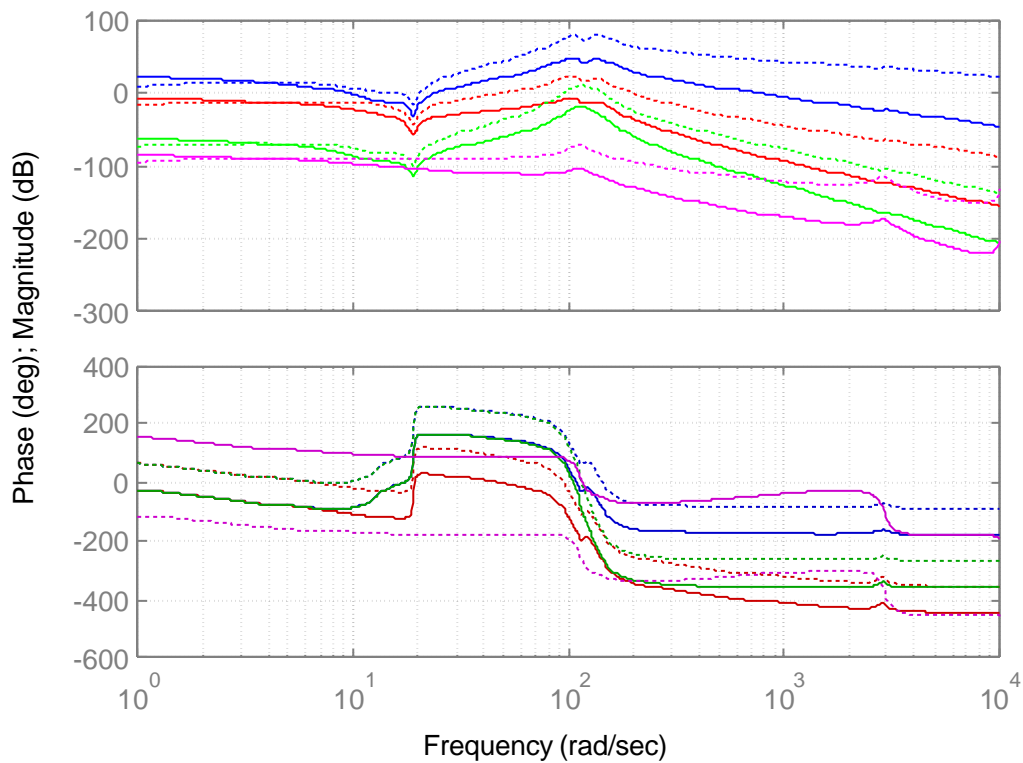
- Pour I_6

Bode Diagrams



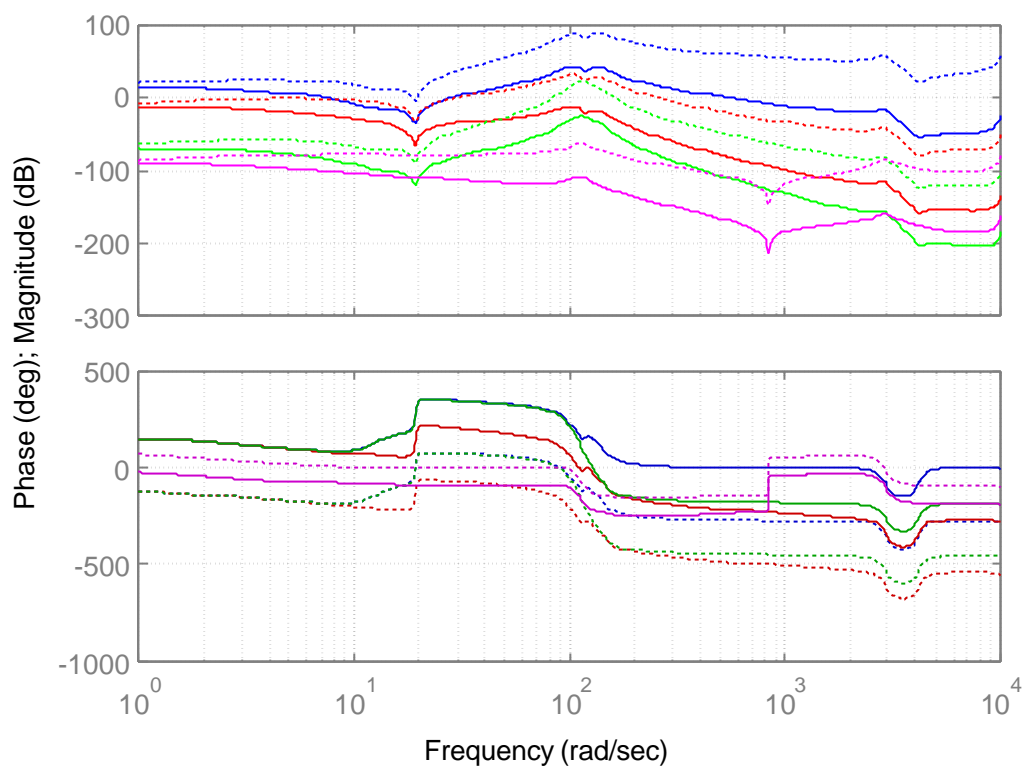
- Pour I_5

Bode Diagrams



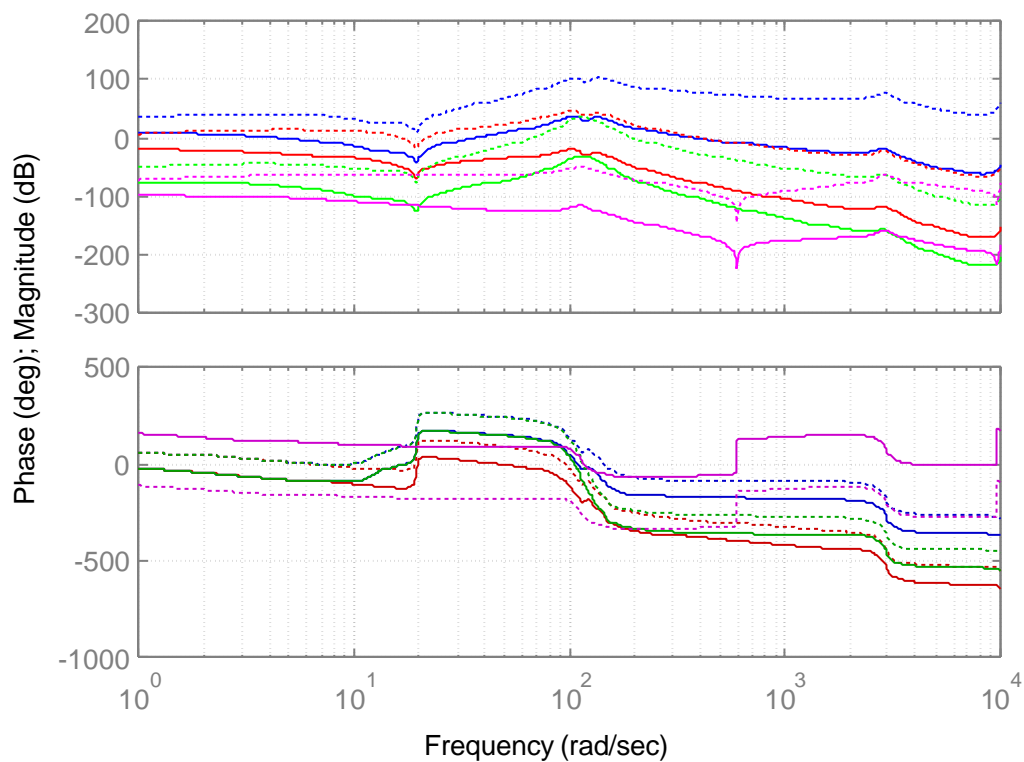
- Pour I_4

Bode Diagrams



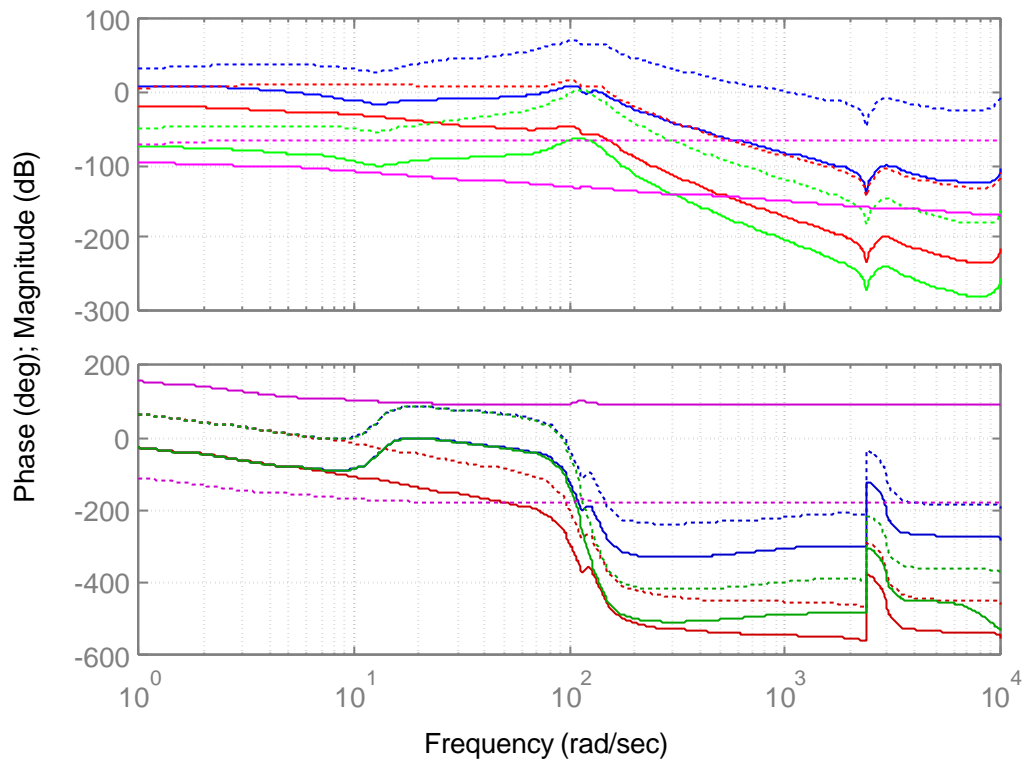
- Pour I_3

Bode Diagrams



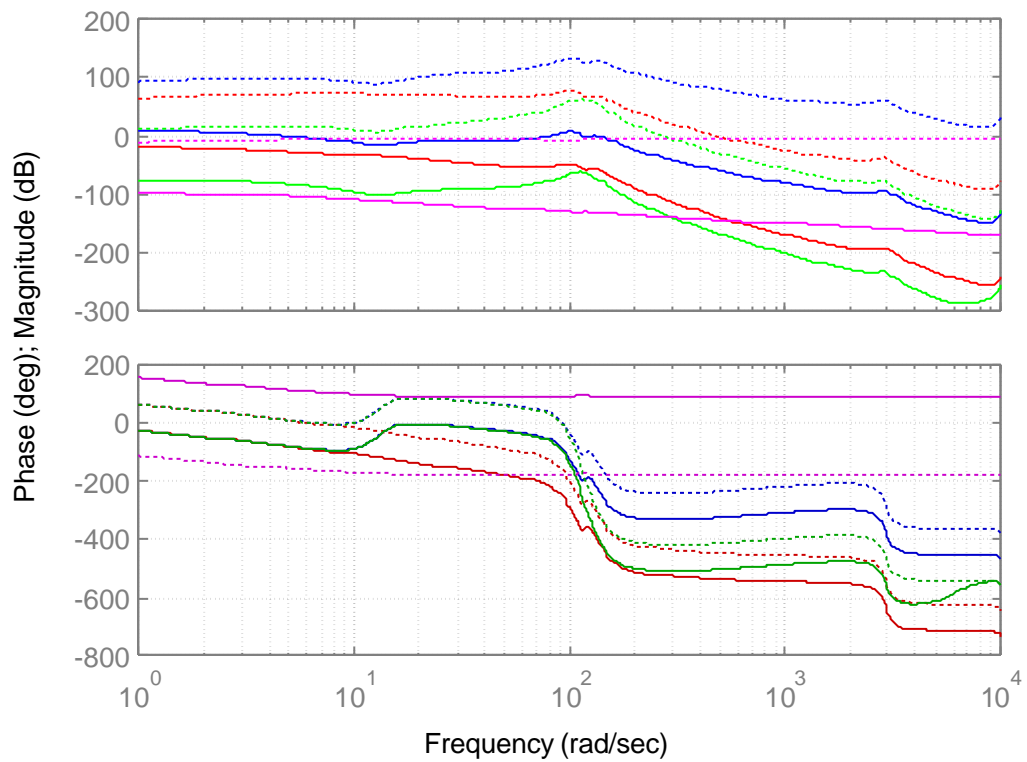
- Pour I_0

Bode Diagrams



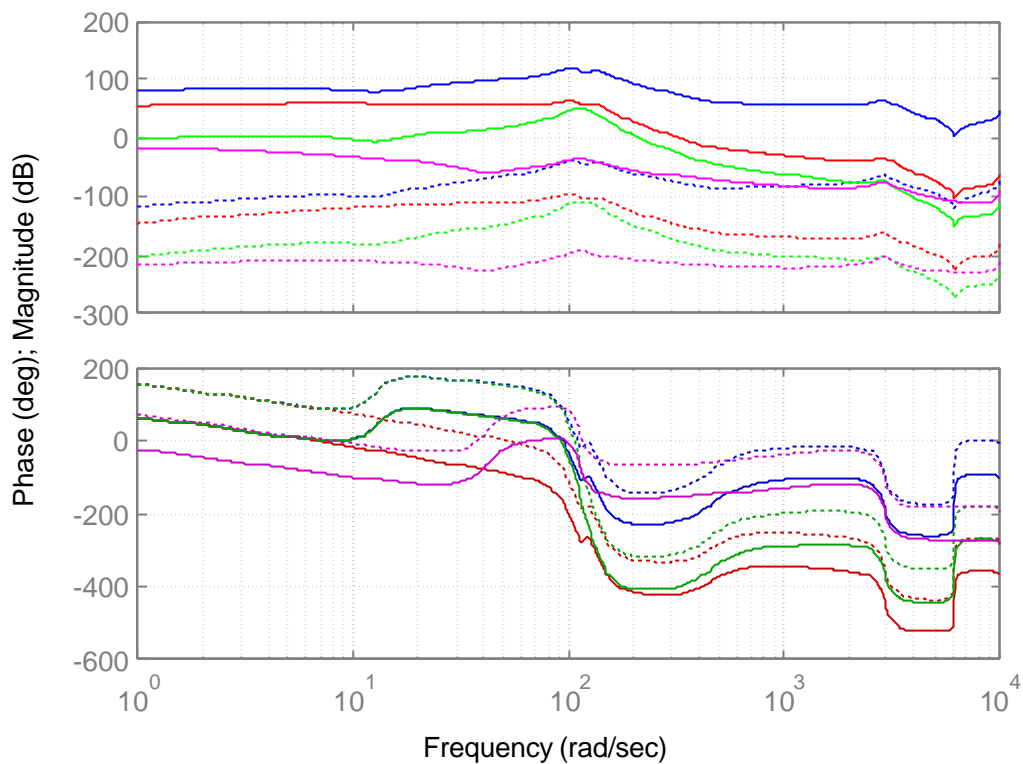
- Pour I_{eq}

Bode Diagrams



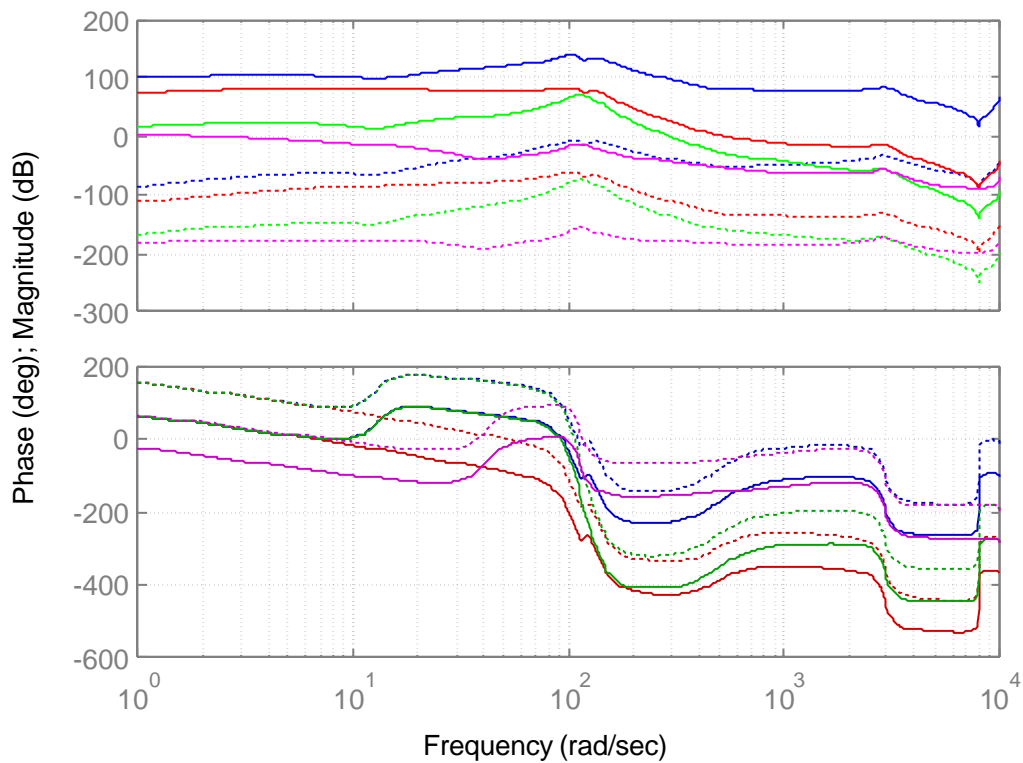
- Pour K_{acc}

Bode Diagrams



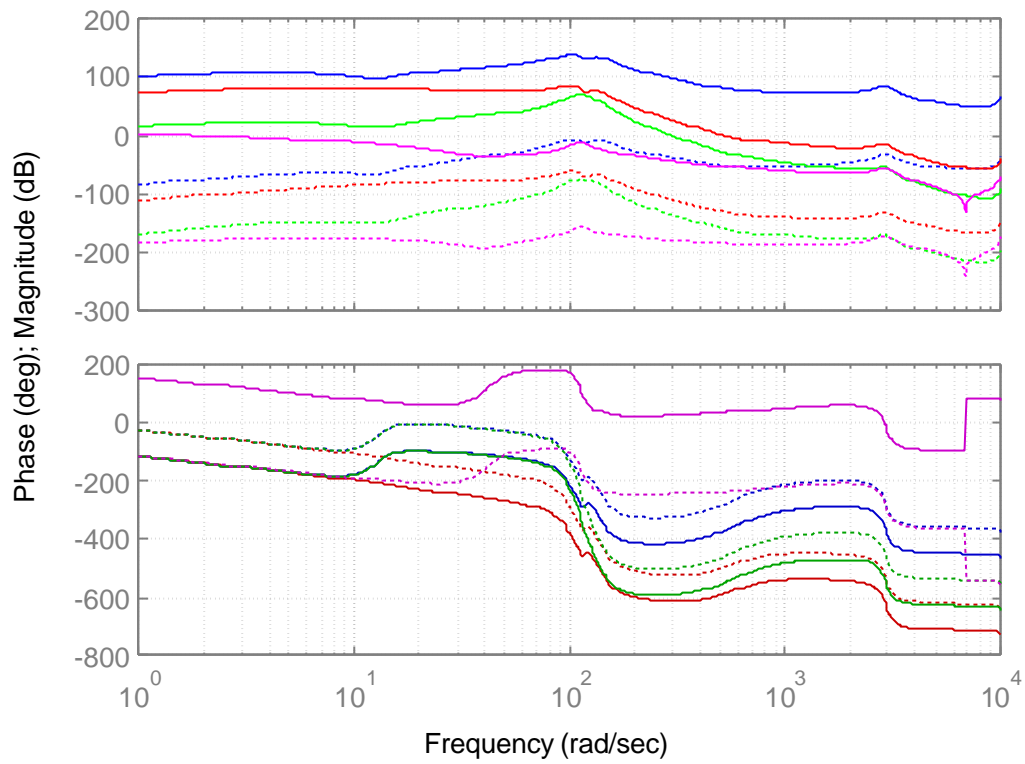
- Pour K_4

Bode Diagrams



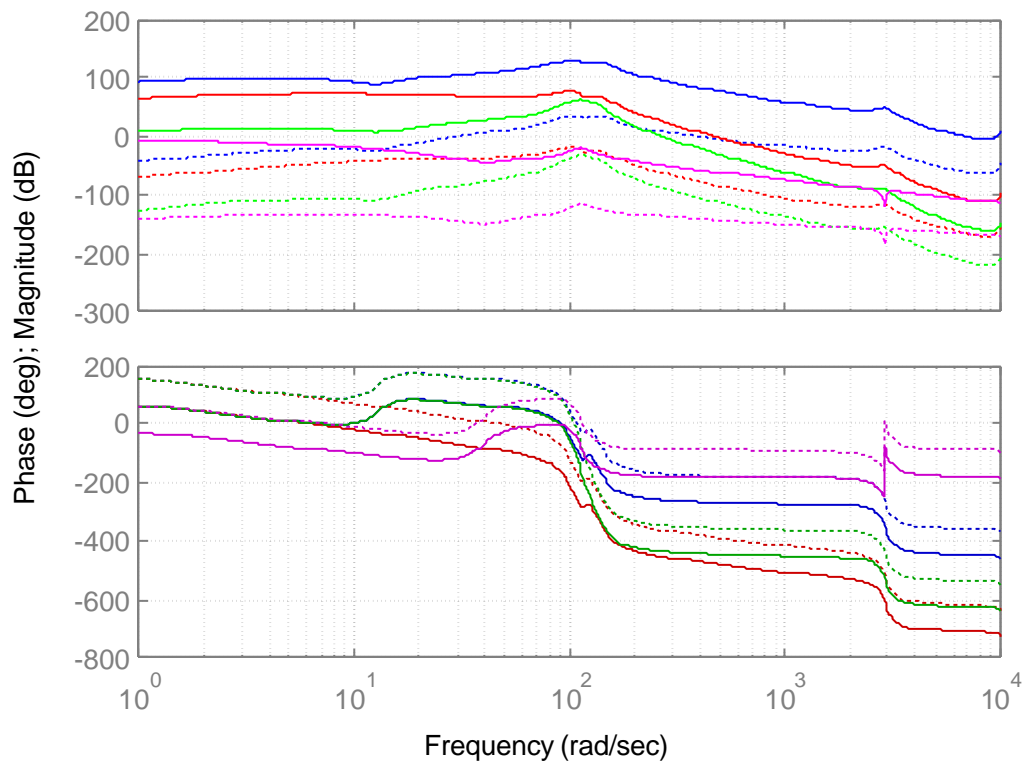
- Pour K_5

Bode Diagrams



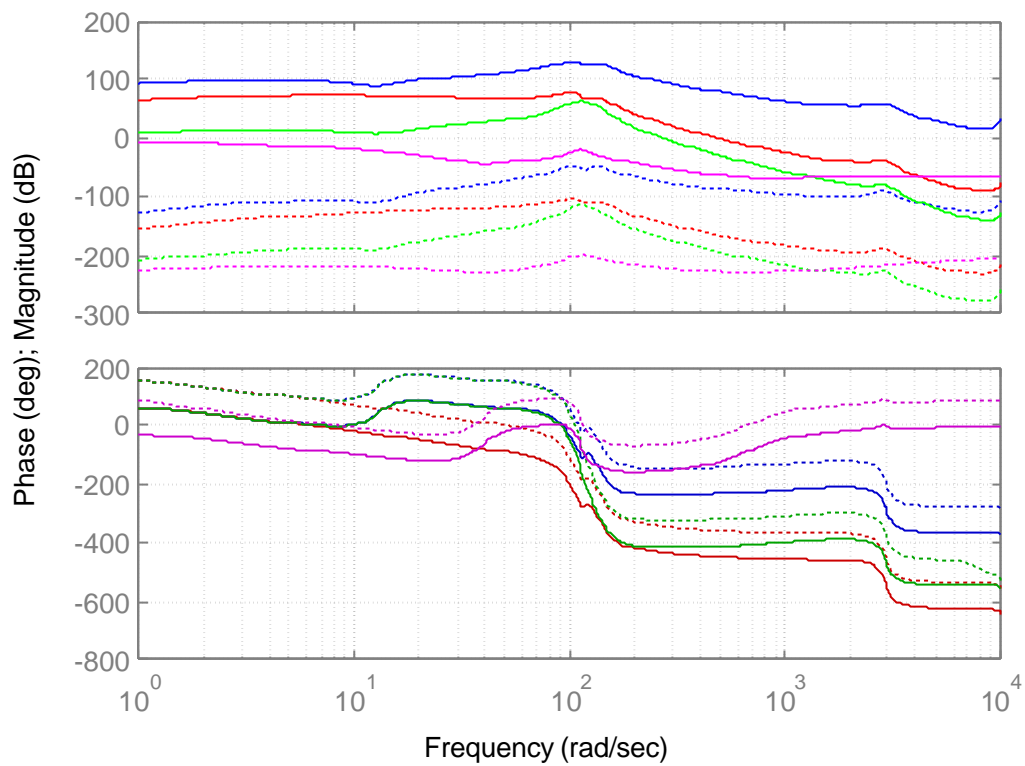
- Pour K_{jac}

Bode Diagrams



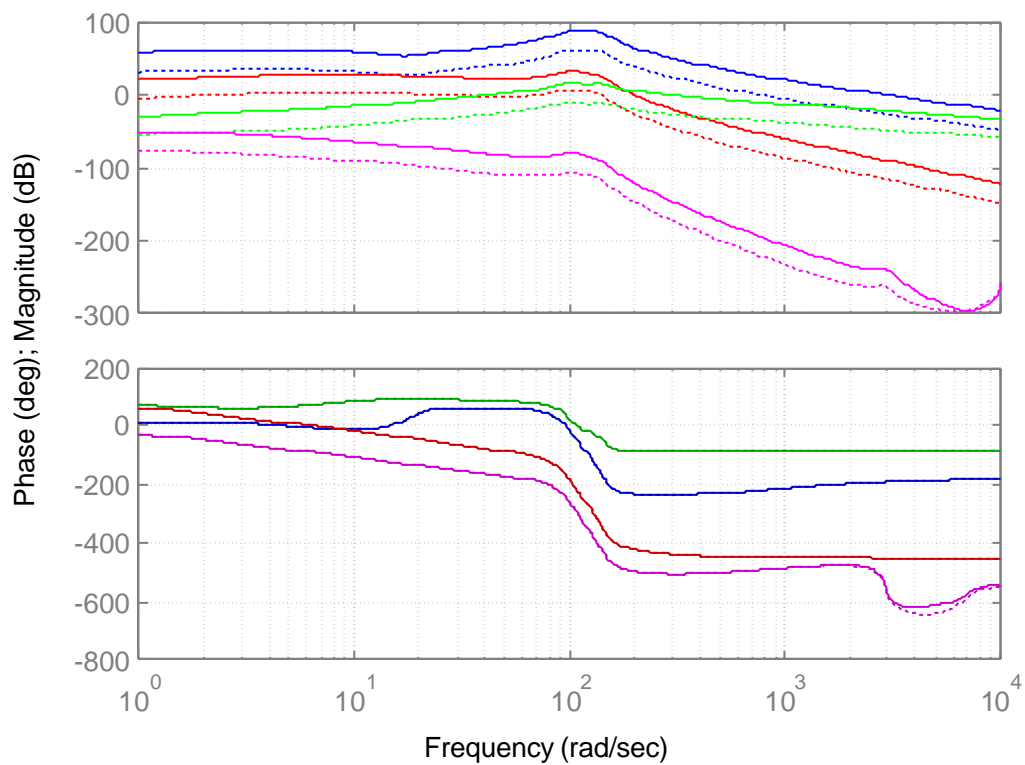
- Pour K_{ess}

Bode Diagrams



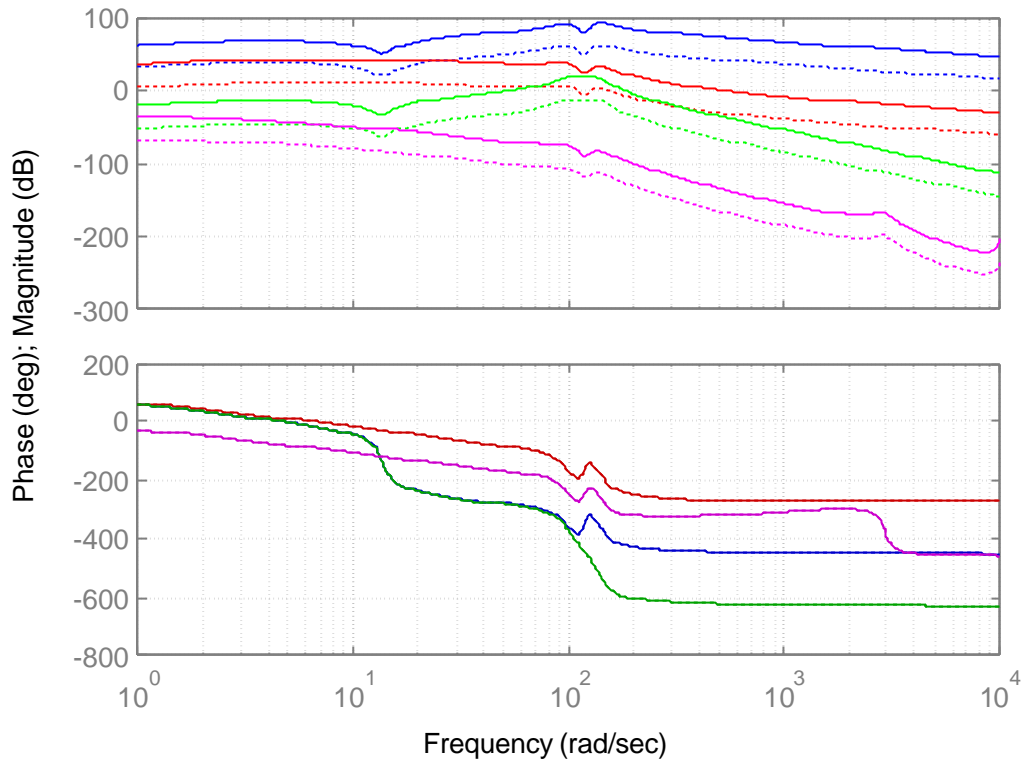
- Pour R_f

Bode Diagrams



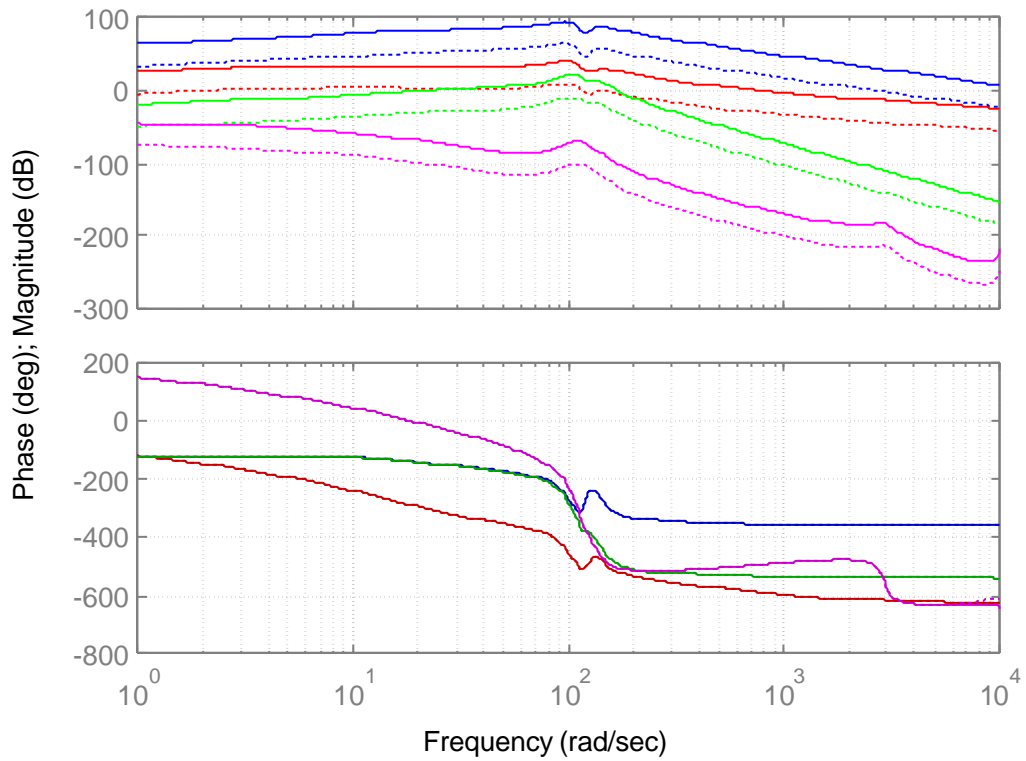
- Pour R_s axe d (R_{sd})

Bode Diagrams



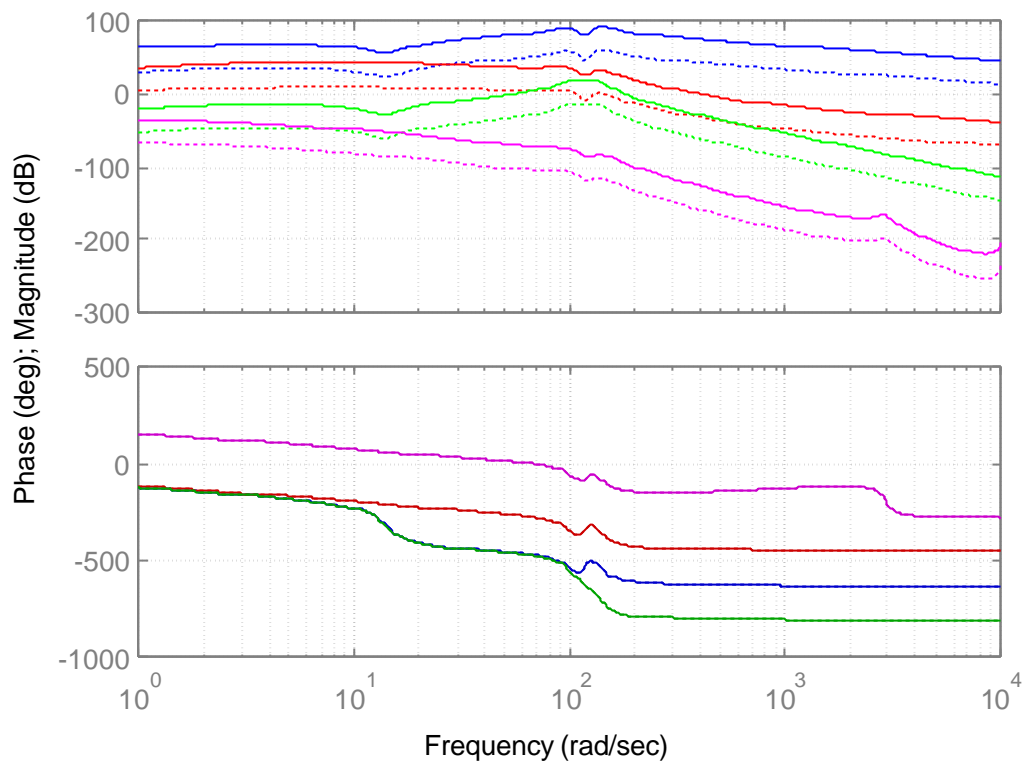
- Pour R_s axe q (R_{sq})

Bode Diagrams



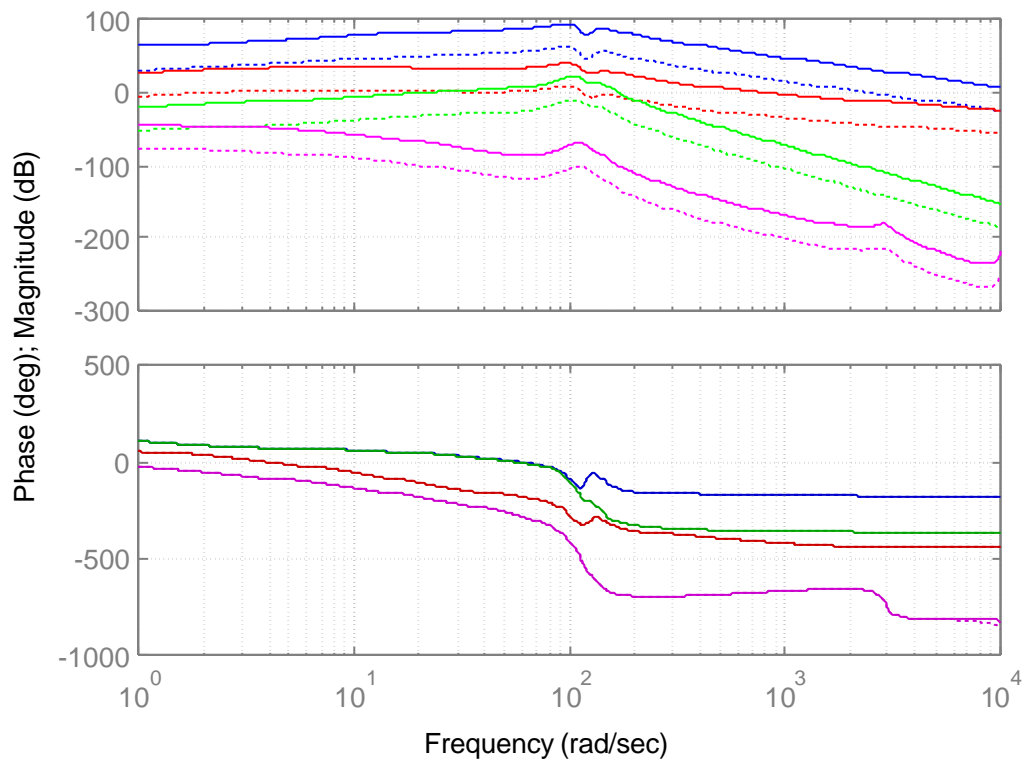
- Pour RR axe d (R_{Rd})

Bode Diagrams



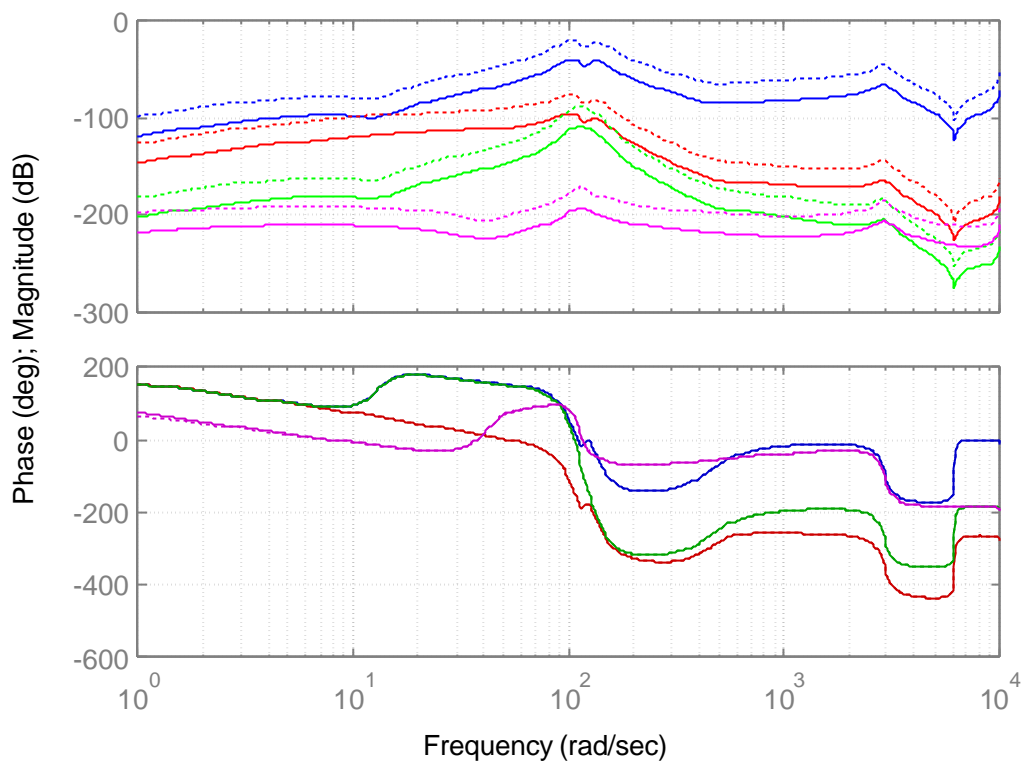
- Pour RR axe q (R_{Rq})

Bode Diagrams



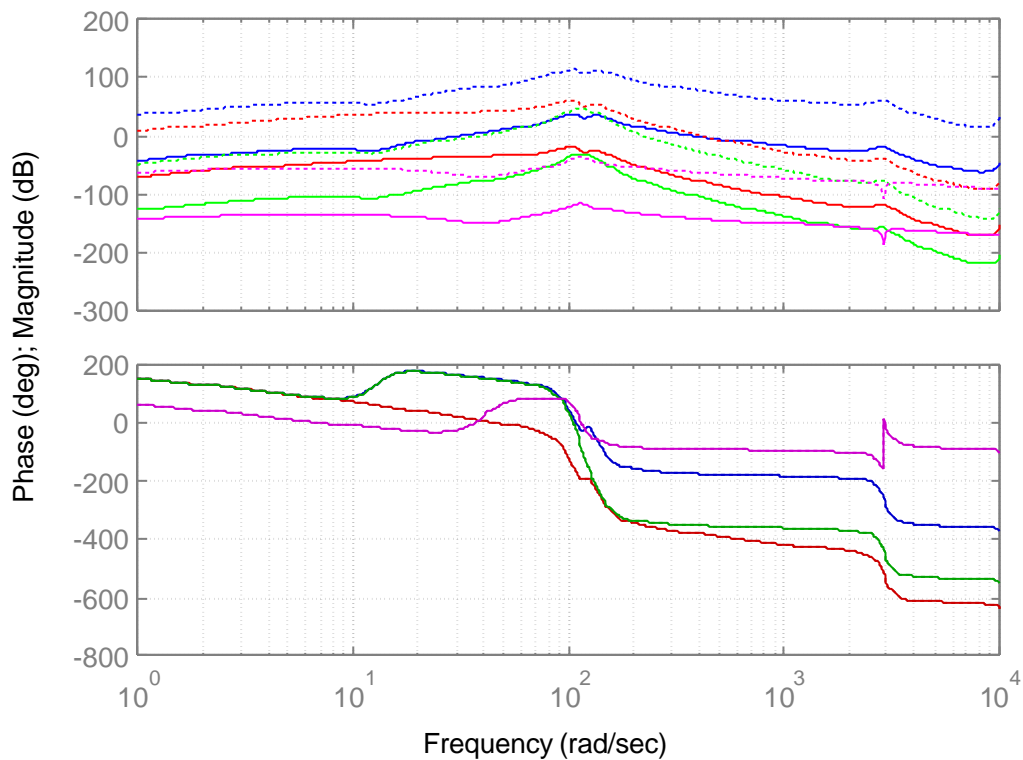
- Pour C_{acc}

Bode Diagrams



- Pour C_{jac}

Bode Diagrams



Annexe F

Modèle d'état linéarisé en petit signal pour l'analyse de stabilité avec la méthode du lieu des pôles

F.1. Modèle d'état non linéaire

Le modèle d'état de la chaîne de traction ferroviaire sans la transmission mécanique avec la machine asynchrone modélisée dans le repère (d,q) lié au vecteur tension du stator est présenté à l'équation (4.17). Pour la commande, nous remarquons que ses équations nécessitent la dérivée des courants $I_{sd\Phi}$ et $I_{sq\Phi}$. Ces dérivées peuvent être déterminées à partir de l'équation (4.25) et à l'aide de l'équation (4.17).

$$\begin{aligned} \dot{I}_{sd\Phi} &= \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{rdV} \cdot \dot{I}_{sdV} + I_{sdV} \cdot \dot{\Phi}_{rdV} + I_{sqV} \cdot \dot{\Phi}_{rqV} + \Phi_{rqV} \cdot \dot{I}_{sqV}}{\Phi_r} \\ - \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV}}{\Phi_r^3} (\Phi_{rdV} \cdot \dot{\Phi}_{rdV} + \Phi_{rqV} \cdot \dot{\Phi}_{rqV}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{rdV} \cdot V_{sdV}}{\mathbf{s}L_s \cdot \Phi_r} - \frac{R_{sr}}{\mathbf{s}L_s} \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV}}{\Phi_r} + \frac{L_m}{L_r^2} \frac{R_r}{\mathbf{s}L_s} \Phi_r \\ + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{(\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV})^2}{\Phi_r^3} + p \cdot \Omega \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}}{\Phi_r} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_{sq\Phi} &= \begin{pmatrix} \frac{\Phi_{rdV} \cdot \dot{I}_{sqV} + I_{sqV} \cdot \dot{\Phi}_{rdV} - I_{sdV} \cdot \dot{\Phi}_{rqV} - \Phi_{rqV} \cdot \dot{I}_{sdV}}{\Phi_r} \\ - \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}}{\Phi_r^3} (\Phi_{rdV} \cdot \dot{\Phi}_{rdV} + \Phi_{rqV} \cdot \dot{\Phi}_{rqV}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} - \frac{\Phi_{rqV} \cdot V_{sdV}}{\mathbf{s}L_s \cdot \Phi_r} - \frac{R_{sr}}{\mathbf{s}L_s} \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}}{\Phi_r} - p \cdot \Omega \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV}}{\Phi_r} \\ - \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{(\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}) (\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV})}{\Phi_r^3} - p \frac{L_m}{L_r} \frac{\Phi_r}{\mathbf{s}L_s} \Omega \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{s}L_s &= L_s - \frac{L_m^2}{L_r} & \Phi_r &= \sqrt{\Phi_{rdV}^2 + \Phi_{rqV}^2} \\ R_{sr} &= R_s + \left(\frac{L_m}{L_r} \right)^2 R_r & V_{sdV} &= \sqrt{V_{sdref\Phi}^2 + V_{sqref\Phi}^2} \end{aligned}$$

L'équation d'état de la commande s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_{sdref\Phi} &= K_I \left(\frac{\Phi_{ref}}{L_m} - I_{sd\Phi} \right) + K_P \left(\frac{\dot{\Phi}_{ref}}{L_m} - \dot{I}_{sd\Phi} \right) \\ &= \frac{1}{T_{BF}} \left(\begin{aligned} &\frac{R_{sr} \cdot \Phi_{ref}}{L_m} - \frac{\Phi_{rdV} \cdot V_{sdV}}{\Phi_r} - p \cdot \Omega \cdot s L_s \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}}{\Phi_r} \\ & - \frac{L_m}{L_r} R_r \cdot s L_s \frac{(\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV})^2}{\Phi_r^3} - \frac{L_m}{L_r^2} R_r \cdot \Phi_r \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (F.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{sqref\Phi} &= K_I \left(\frac{C_{ref} \cdot L_r}{p \cdot L_m \cdot \Phi_r} - I_{sq\Phi} \right) + K_P \left(- \frac{C_{ref} \cdot L_r}{p \cdot L_m \cdot \Phi_r^3} (\Phi_{rdV} \cdot \dot{\Phi}_{rdV} + \Phi_{rqV} \cdot \dot{\Phi}_{rqV}) - \dot{I}_{sq\Phi} \right) \\ &= \frac{1}{T_{BF}} \left(\begin{aligned} &\frac{C_{ref} \cdot (R_s \cdot L_r + R_r \cdot L_s)}{p \cdot L_m \cdot \Phi_r} - \frac{C_{ref} \cdot s L_s \cdot R_r}{p} \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV}}{\Phi_r^3} + \frac{\Phi_{rqV} \cdot V_{sdV}}{\Phi_r} \\ & + p \frac{L_m}{L_r} \Phi_r \cdot \Omega + p \cdot \Omega \cdot s L_s \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV}}{\Phi_r} \\ & + \frac{L_m}{L_r} R_r \cdot s L_s \frac{(\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}) (\Phi_{rdV} \cdot I_{sdV} + \Phi_{rqV} \cdot I_{sqV})}{\Phi_r^3} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (F.4)$$

avec

$$\begin{aligned} K_P &= \frac{s L_s}{T_{BF}} \\ K_I &= \frac{R_{sr}}{T_{BF}} \end{aligned}$$

Dans l'équation (4.17), le terme w_s apparaît. Or, cette pulsation n'est pas une variable d'état. A partir des équations (4.27), (4.28), (4.30), nous obtenons la relation suivante :

$$\begin{aligned} w_s &= p \cdot \Omega + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{I_{sq\Phi}}{\Phi_r} + \frac{V_{sdref\Phi} \cdot \dot{V}_{sqref\Phi} - V_{sqref\Phi} \cdot \dot{V}_{sdref\Phi}}{V_{sdV}^2} \\ &= p \cdot \Omega + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\Phi_{rdV} \cdot I_{sqV} - \Phi_{rqV} \cdot I_{sdV}}{\Phi_r^2} + \frac{V_{sdref\Phi} \cdot \dot{V}_{sqref\Phi} - V_{sqref\Phi} \cdot \dot{V}_{sdref\Phi}}{V_{sdV}^2} \end{aligned} \quad (F.5)$$

Les termes $\dot{V}_{sdref\Phi}$ et $\dot{V}_{sqref\Phi}$

peuvent être remplacés par les équations (F.3) et (F.4).

Finalement, le modèle d'état de la chaîne est défini par les équations (4.17), (F.3) et (F.4) en prenant en compte l'équation (F.5).

F.2. Linéarisation

Pour effectuer l'analyse de stabilité en utilisant le lieu des pôles, le modèle est linéarisé autour d'un point de fonctionnement défini par les valeurs de paramètres. Les variables d'état représentent les variations :

- du courant de l'inductance du filtre ΔI_{Lf} ,
- de la tension aux bornes du capacité du filtre ΔV_{Cf} ,
- des courants des inductances des fuites au stator ΔI_{sdV} et ΔI_{sqV} ,
- des flux rotoriques $\Delta \Phi_{rdV}$ et $\Delta \Phi_{rqV}$,
- de la vitesse de rotation mécanique Ω ,
- des tensions de référence à la sortie de la commande vectorielle $V_{sdref\Phi}$ et $V_{sqref\Phi}$.

A partir de l'équation (4.20) nous pouvons représenter la variation de la tension entrée de la machine asynchrone comme suit :

$$\Delta V_{sdV} = \frac{1}{V_{sdV}} \left(\overline{V_{sdref\Phi}} \cdot \Delta V_{sdref\Phi} + \overline{V_{sqref\Phi}} \cdot \Delta V_{sqref\Phi} \right) \quad (F.6)$$

La linéarisation des équations (F.3) et (F.4) autour du point de fonctionnement symbolisé par \bar{X} conduit à l'obtention des formules suivantes :

$$\Delta \dot{V}_{sdref\Phi} = \left(\begin{array}{l} \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} \Delta \Omega + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sdV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sqV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rdV} \\ + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rqV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sdref\Phi} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sqref\Phi} \end{array} \right) \quad (F.7)$$

$$\Delta \dot{V}_{sqref\Phi} = \left(\begin{array}{l} \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} \Delta \Omega + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sdV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sqV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rdV} \\ + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rqV} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sdref\Phi} + \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sqref\Phi} \end{array} \right) \quad (F.8)$$

où

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} = \frac{sL_s}{T_{BF} \cdot \Phi_r} \overline{\Phi_{rqV}} \left(2 \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\bar{M}}{\Phi_r^2} + p \cdot \bar{\Omega} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} = - \frac{sL_s}{T_{BF} \cdot \Phi_r} \overline{\Phi_{rdV}} \left(2 \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\bar{M}}{\Phi_r^2} + p \cdot \bar{\Omega} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial\Phi_{rdV}} \right|_{\bar{x}} = \frac{1}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\begin{array}{l} \overline{\Phi_{rdV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} \cdot \overline{sL_s} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} + 3 \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \cdot \overline{sL_s} \frac{\overline{M}^2}{\overline{\Phi_r}^4} - \frac{L_m}{L_r^2} \overline{R_r} \right) \\ - \overline{sL_s} \cdot \overline{I_{sqV}} \left(2 \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} + p \cdot \overline{\Omega} \right) - \frac{\overline{\Phi_{rqV}}^2 \cdot \overline{V_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \end{array} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial\Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} = \frac{1}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\begin{array}{l} \overline{\Phi_{rqV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} \cdot \overline{sL_s} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} + 3 \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \cdot \overline{sL_s} \frac{\overline{M}^2}{\overline{\Phi_r}^4} - \frac{L_m}{L_r^2} \overline{R_r} \right) \\ + \overline{sL_s} \cdot \overline{I_{sdV}} \left(2 \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} + p \cdot \overline{\Omega} \right) + \frac{\overline{\Phi_{rdV}} \cdot \overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{V_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \end{array} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial\Omega} \right|_{\bar{x}} = - \frac{p \cdot \overline{sL_s} \cdot \overline{M}}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}}$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} = - \frac{\overline{\Phi_{rdV}} \cdot \overline{V_{sdref\Phi}}}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r} \cdot \overline{V_{sdV}}}$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} = - \frac{\overline{\Phi_{rdV}} \cdot \overline{V_{sqref\Phi}}}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r} \cdot \overline{V_{sdV}}}$$

et

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial\Phi_{rdV}} \right|_{\bar{x}} = \frac{1}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\begin{array}{l} \overline{sL_s} \cdot \overline{I_{sdV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} + \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{C_{ref} \cdot \overline{R_r}}{p \cdot \overline{\Phi_r}^2} \right) + \overline{sL_s} \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{N} \cdot \overline{I_{sqV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \\ - \overline{\Phi_{rdV}} \left(\frac{C_{ref} (R_s \cdot L_r + R_r \cdot L_s)}{p \cdot L_m \cdot \overline{\Phi_r}^2} - 3 \frac{\overline{sL_s} \cdot C_{ref} \cdot \overline{R_r} \cdot \overline{N}}{p \cdot \overline{\Phi_r}^4} + \frac{\overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{V_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \right) \\ + p \cdot \overline{\Omega} \left(\overline{sL_s} \frac{\overline{N}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{L_m}{L_r} \right) + 3 \overline{sL_s} \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M} \cdot \overline{N}}{\overline{\Phi_r}^4} \end{array} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial\Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} = \frac{1}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\begin{array}{l} \overline{sL_s} \cdot \overline{I_{sqV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} + \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{C_{ref} \cdot \overline{R_r}}{p \cdot \overline{\Phi_r}^2} \right) - \overline{sL_s} \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{N} \cdot \overline{I_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \\ - \overline{\Phi_{rqV}} \left(\frac{C_{ref} (R_s \cdot L_r + R_r \cdot L_s)}{p \cdot L_m \cdot \overline{\Phi_r}^2} - 3 \frac{\overline{sL_s} \cdot C_{ref} \cdot \overline{R_r} \cdot \overline{N}}{p \cdot \overline{\Phi_r}^4} \right) + \frac{\overline{\Phi_{rdV}}^2 \cdot \overline{V_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \\ + p \cdot \overline{\Omega} \left(\overline{sL_s} \frac{\overline{N}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{L_m}{L_r} \right) + 3 \overline{sL_s} \frac{L_m}{L_r} \overline{R_r} \frac{\overline{M} \cdot \overline{N}}{\overline{\Phi_r}^4} \end{array} \right)$$

$$\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial\Omega} \right|_{\bar{x}} = \frac{p}{T_{BF}} \left(\frac{L_m}{L_r} \overline{\Phi_r} + \frac{\overline{sL_s} \cdot \overline{N}}{\overline{\Phi_r}} \right)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{sL_s}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\overline{\Phi_{rdV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{C_{ref} \cdot R_r}{p \cdot \overline{\Phi_r}^2} \right) - \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{N} \cdot \overline{\Phi_{rqV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \right) \\ \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{sL_s}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r}} \left(\overline{\Phi_{rqV}} \left(p \cdot \overline{\Omega} + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{M}}{\overline{\Phi_r}^2} - \frac{C_{ref} \cdot R_r}{p \cdot \overline{\Phi_r}^2} \right) + \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{N} \cdot \overline{\Phi_{rdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} \right) \\ \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{\overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{V_{sdref\Phi}}}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r} \cdot \overline{V_{sdV}}} \\ \left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{\overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{V_{sqref\Phi}}}{T_{BF} \cdot \overline{\Phi_r} \cdot \overline{V_{sdV}}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \overline{\Phi_{rdV}} \cdot \overline{I_{sqV}} - \overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{I_{sdV}} \\ \overline{N} &= \overline{\Phi_{rdV}} \cdot \overline{I_{sdV}} + \overline{\Phi_{rqV}} \cdot \overline{I_{sqV}} \end{aligned}$$

De la même manière, l'équation (F.5) peut être linéarisée autour du point de fonctionnement \bar{X} .

$$\Delta \mathbf{w}_s = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sdV} + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta I_{sqV} + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rdV} + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} \Delta \Phi_{rqV} \\ + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} \Delta \Omega + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sdref\Phi} + \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{X}} \Delta V_{sqref\Phi} \end{pmatrix} \quad (F.9)$$

où

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} &= -\frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{\Phi_{rqV}}}{\overline{\Phi_r}^2} + \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{X}} \right) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{L_m}{L_r} R_r \frac{\overline{\Phi_{rdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} + \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{X}} \right) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} &= \frac{L_m}{L_r} R_r \left(\frac{\overline{I_{sqV}}}{\overline{\Phi_r}^2} - 2 \frac{\overline{M} \cdot \overline{\Phi_{rdV}}}{\overline{\Phi_r}^4} \right) + \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{X}} \right) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} &= -\frac{L_m}{L_r} R_r \left(\frac{\overline{I_{sdV}}}{\overline{\Phi_r}^2} + 2 \frac{\overline{M} \cdot \overline{\Phi_{rqV}}}{\overline{\Phi_r}^4} \right) + \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{X}} \right) \\ \left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} &= p + \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial(\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{X}} \right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} = \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right)$$

$$\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} = \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) - \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\overline{V_{sdV}}^2} \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right)$$

En utilisant les équations (F.6) et (F.9), la linéarisation de l'équations (4.17) conduit au modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta I_{Lf} &= \frac{1}{L_f} (-R_f \Delta I_{Lf} - \Delta V_{Cf} + \Delta U_{cont}) \\ \frac{d}{dt} \Delta V_{Cf} &= \frac{1}{C_f} \left(\begin{aligned} &\Delta I_{Lf} - \frac{\overline{V_{sdV}}}{\overline{V_{Cf}}} \Delta I_{sdV} + \frac{\overline{V_{sdV}} \cdot \overline{I_{sdV}}}{\overline{V_{Cf}}^2} \Delta V_{Cf} \\ &- \frac{\overline{I_{sdV}}}{\overline{V_{Cf}} \cdot \overline{V_{sdV}}} (\overline{V_{sdref\Phi}} \Delta V_{sdref\Phi} + \overline{V_{sqref\Phi}} \Delta V_{sqref\Phi}) \end{aligned} \right) \\ \frac{d}{dt} \Delta I_{sdV} &= \frac{1}{sL_s} \left(\begin{aligned} &\frac{1}{\overline{V_{sdV}}} (\overline{V_{sdref\Phi}} \Delta V_{sdref\Phi} + \overline{V_{sqref\Phi}} \Delta V_{sqref\Phi}) - R_{sr} \Delta I_{sdV} + \frac{L_m}{L_r^2} R_r \Delta \Phi_{rdV} \\ &+ sL_s \cdot \overline{I_{sqV}} \Delta \mathbf{w}_s + sL_s \cdot \Delta I_{sqV} \cdot \overline{\mathbf{w}}_s + p \frac{L_m}{L_r} \cdot \overline{\Phi_{rqV}} \Delta \Omega + p \frac{L_m}{L_r} \Delta \Phi_{rqV} \cdot \overline{\Omega} \end{aligned} \right) \\ \frac{d}{dt} \Delta I_{sqV} &= \frac{1}{sL_s} \left(\begin{aligned} &-R_{sr} \Delta I_{sqV} + \frac{L_m}{L_r^2} R_r \Delta \Phi_{rqV} - sL_s \cdot \overline{I_{sdV}} \Delta \mathbf{w}_s - sL_s \Delta I_{sdV} \cdot \overline{\mathbf{w}}_s \\ &- p \frac{L_m}{L_r} \cdot \overline{\Phi_{rdV}} \Delta \Omega - p \frac{L_m}{L_r} \Delta \Phi_{rdV} \cdot \overline{\Omega} \end{aligned} \right) \\ \frac{d}{dt} \Delta \Phi_{rdV} &= \frac{R_r}{L_r} (L_m \Delta I_{sdV} - \Delta \Phi_{rdV}) + \overline{\Phi_{rqV}} (\Delta \mathbf{w}_s - p \Delta \Omega) + \Delta \Phi_{rqV} (\overline{\mathbf{w}}_s - p \overline{\Omega}) \\ \frac{d}{dt} \Delta \Phi_{rqV} &= \frac{R_r}{L_r} (L_m \Delta I_{sqV} - \Delta \Phi_{rqV}) - \overline{\Phi_{rdV}} (\Delta \mathbf{w}_s - p \Delta \Omega) - \Delta \Phi_{rdV} (\overline{\mathbf{w}}_s - p \overline{\Omega}) \\ \frac{d}{dt} \Delta \Omega &= \frac{1}{J_m} \left(p \frac{L_m}{L_r} (\overline{\Phi_{rdV}} \Delta I_{sqV} + \Delta \Phi_{rdV} \cdot \overline{I_{sqV}} - \overline{\Phi_{rqV}} \Delta I_{sdV} - \Delta \Phi_{rqV} \cdot \overline{I_{sdV}}) - f \Delta \Omega - \Delta C_r \right) \end{aligned} \quad (F.10)$$

Le modèle d'état de la chaîne pour l'analyse de stabilité est donc construit par les équations (F.10), (F.7) et (F.8). Nous pouvons le formuler sous la forme suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (F.11)$$

où \mathbf{X} contient les variables de variation présentées au début de cette section.

$$\mathbf{X} = [\Delta I_{Lf} \quad \Delta V_{Cf} \quad \Delta I_{sdV} \quad \Delta I_{sqV} \quad \Delta \Phi_{rdV} \quad \Delta \Phi_{rqV} \quad \Delta \Omega \quad \Delta V_{sdref\Phi} \quad \Delta V_{sqref\Phi}]^T$$

La matrice d'état \mathbf{A} utilisée dans l'analyse de stabilité avec la méthode du lieu des pôles s'écrit alors :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{28} & a_{29} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ 0 & 0 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix} \quad (\text{F.12})$$

où

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{R_f}{L_f} & a_{33} &= -\frac{R_{sr}}{\mathbf{s}L_s} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{43} &= -\overline{\mathbf{w}_s} - \overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{12} &= -\frac{1}{L_f} & a_{34} &= \overline{\mathbf{w}_s} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{44} &= -\frac{R_{sr}}{\mathbf{s}L_s} - \overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{21} &= \frac{1}{C_f} & a_{35} &= \frac{L_m R_r}{L_r^2 \mathbf{s}L_s} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{45} &= -\frac{p \overline{\Omega}}{\mathbf{s}L_s} \frac{L_m}{L_r} - \overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{22} &= \frac{\overline{V_{sdV}} \cdot \overline{I_{sdV}}}{C_f \cdot \overline{V_{Cf}}^2} & a_{36} &= \frac{p \overline{\Omega}}{\mathbf{s}L_s} \frac{L_m}{L_r} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{46} &= \frac{L_m R_r}{L_r^2 \mathbf{s}L_s} - \overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{23} &= -\frac{\overline{V_{sdV}}}{C_f \cdot \overline{V_{Cf}}} & a_{37} &= \frac{p \cdot \overline{\Phi_{rqV}}}{\mathbf{s}L_s} \frac{L_m}{L_r} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{47} &= -\frac{p \cdot \overline{\Phi_{rdV}}}{\mathbf{s}L_s} \frac{L_m}{L_r} - \overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{28} &= -\frac{\overline{I_{sdV}} \cdot \overline{V_{sdref\Phi}}}{C_f \cdot \overline{V_{Cf}} \cdot \overline{V_{sdV}}} & a_{38} &= \frac{\overline{V_{sdref\Phi}}}{\mathbf{s}L_s \cdot \overline{V_{sdV}}} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{48} &= -\overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ a_{29} &= -\frac{\overline{I_{sdV}} \cdot \overline{V_{sqref\Phi}}}{C_f \cdot \overline{V_{Cf}} \cdot \overline{V_{sdV}}} & a_{39} &= \frac{\overline{V_{sqref\Phi}}}{\mathbf{s}L_s \cdot \overline{V_{sdV}}} + \overline{I_{sqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{49} &= -\overline{I_{sdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \Big|_{\bar{x}} \right) \\ \\ a_{53} &= \frac{L_m R_r}{L_r} + \overline{\Phi_{rqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{63} &= -\overline{\Phi_{rdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{73} &= -\frac{p}{J_m} \frac{L_m}{L_r} \overline{\Phi_{rqV}} \\ a_{54} &= \overline{\Phi_{rqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{64} &= \frac{L_m R_r}{L_r} - \overline{\Phi_{rdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial I_{sqV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{74} &= \frac{p}{J_m} \frac{L_m}{L_r} \overline{\Phi_{rdV}} \\ a_{55} &= -\frac{R_r}{L_r} + \overline{\Phi_{rqV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{65} &= -\overline{\mathbf{w}_s} + p \overline{\Omega} - \overline{\Phi_{rdV}} \left(\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rdV}} \Big|_{\bar{x}} \right) & a_{75} &= \frac{p}{J_m} \frac{L_m}{L_r} \overline{I_{sqV}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{56} &= \overline{\mathbf{w}}_s - p \cdot \overline{\Omega} + \overline{\Phi}_{rqV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{66} &= -\frac{R_r}{L_r} - \overline{\Phi}_{rdV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{76} &= -\frac{p}{J_m} \frac{L_m}{L_r} \overline{I}_{sdV} \\
 a_{57} &= \overline{\Phi}_{rqV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \right|_{\bar{x}} - p \right) & a_{67} &= -\overline{\Phi}_{rdV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial \Omega} \right|_{\bar{x}} - p \right) & a_{77} &= -\frac{f}{J_m} \\
 a_{58} &= \overline{\Phi}_{rqV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{68} &= -\overline{\Phi}_{rdV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) \\
 a_{59} &= \overline{\Phi}_{rqV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{69} &= -\overline{\Phi}_{rdV} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) \\
 \\
 a_{83} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{87} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{93} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sdV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{97} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Omega} \right|_{\bar{x}} \right) \\
 a_{84} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{88} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{94} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial I_{sqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{98} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sdref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) \\
 a_{85} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{89} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{95} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rdV}} \right|_{\bar{x}} \right) & a_{99} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial V_{sqref\Phi}} \right|_{\bar{x}} \right) \\
 a_{86} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sdref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & & & a_{96} &= \left(\left. \frac{\partial (\dot{V}_{sqref\Phi})}{\partial \Phi_{rqV}} \right|_{\bar{x}} \right) & &
 \end{aligned}$$

Annexe G

Calcul analytique de l'activité énergétique des éléments de la transmission mécanique

Nous appliquons la méthode décrite dans la section 2.2.1 pour obtenir les modèles réduits selon la bande passante. Les activités énergétiques des éléments peuvent être calculer analytiquement en utilisant les équations (2.59). Pour cela, il nécessite les fonctions de transfert des variables f_I des éléments I , e_C des éléments C et f_R des éléments R . Dans le paragraphe A.5.2 de l'Annexe A, nous avons présenté la manière d'obtenir une fonction de transfert à partir d'un bond graph. Nous appliquons cette méthode sur notre chaîne de transmission mécanique.

G.1. Détermination des boucles causales

Nous avons vu dans le paragraphe 4.1.1 qu'il existe 14 boucles causales dans le modèle. Les gains de ces boucles causales sont présentés au Tableau G.1. Nous déterminons les ensembles de 2 boucles causales disjointes, 3 boucles causales disjointes, 4 boucles causales disjointes et 5 boucles causales disjointes. Ces gains seront utilisés dans le calcul de $D(s)$ et $D_i(s)$.

G.2. Détermination de $D(s)$

Le dénominateur des fonctions de transfert $D(s)$ du modèle de transmission mécanique est déterminée selon l'équation (G.1).

$$D(s) = 1 - \sum_{i=1}^{n_B} B_i + \sum_{i=1}^{n_E} E_i - \sum_{i=1}^{n_F} F_i + \sum_{i=1}^{n_G} G_i - \sum_{i=1}^{n_H} H_i \quad (\text{G.1})$$

où

$\sum_{i=1}^{n_B} B_i$	somme des gains de toutes les boucles causales dans le modèle ($n_B = 14$)
$\sum_{i=1}^{n_E} E_i$	somme des produits 2 à 2 des gains de boucles causales disjointes dans le modèle ($n_E = 12$)
$\sum_{i=1}^{n_F} F_i$	somme des produits 3 à 3 des gains de boucles causales disjointes dans le modèle ($n_F = 8$)
$\sum_{i=1}^{n_G} G_i$	somme des produits 4 à 4 des gains de boucles causales disjointes dans le modèle ($n_G = 6$)
$\sum_{i=1}^{n_H} H_i$	somme des produits 5 à 5 des gains de boucles causales disjointes dans le modèle ($n_H = 2$)

Les termes E_i , F_i , G_i et H_i peuvent être consultés au Tableau G.1.

Tableau G.1. Les gains des boucles causales et la somme des produits des boucles causales disjointes.

Boucle causale simple	La somme de produit de			
	2 boucles causales disjointes	3 boucles causales disjointes	4 boucles causales disjointes	5 boucles causales disjointes
$B_1(s) = -\frac{K_{acc}}{I_6 \cdot s^2}$	$E_1 = \begin{pmatrix} B_1 B_5 + B_1 B_6 \\ + \dots + B_1 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_1 = \begin{pmatrix} B_1 E_5 + B_1 E_6 \\ + \dots + B_1 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_1 = \begin{pmatrix} B_1 F_5 + B_1 F_6 \\ + B_1 F_7 + B_1 F_8 \end{pmatrix}$	$H_1 = B_1 G_5 + B_1 G_6$
$B_2(s) = -\frac{C_{acc}}{I_6 \cdot s}$	$E_2 = \begin{pmatrix} B_2 B_5 + B_2 B_6 \\ + \dots + B_2 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_2 = \begin{pmatrix} B_2 E_5 + B_2 E_6 \\ + \dots + B_2 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_2 = \begin{pmatrix} B_2 F_5 + B_2 F_6 \\ + B_2 F_7 + B_2 F_8 \end{pmatrix}$	$H_2 = B_2 G_5 + B_2 G_6$
$B_3(s) = -\frac{K_{acc}}{I_5 \cdot s^2}$	$E_3 = \begin{pmatrix} B_3 B_6 + B_3 B_7 \\ + \dots + B_3 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_3 = \begin{pmatrix} B_3 E_6 + B_3 E_7 \\ + \dots + B_3 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_3 = \begin{pmatrix} B_3 F_6 + B_3 F_7 \\ + B_3 F_8 \end{pmatrix}$	$H_3 = B_3 G_6$
$B_4(s) = -\frac{C_{acc}}{I_5 \cdot s}$	$E_4 = \begin{pmatrix} B_4 B_6 + B_4 B_7 \\ + \dots + B_4 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_4 = \begin{pmatrix} B_4 E_6 + B_4 E_7 \\ + \dots + B_4 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_4 = \begin{pmatrix} B_4 F_6 + B_4 F_7 \\ + B_4 F_8 \end{pmatrix}$	$H_4 = B_4 G_6$
$B_5(s) = -\frac{R_5^2 \cdot K_4}{I_5 \cdot s^2}$	$E_5 = \begin{pmatrix} B_5 B_7 + B_5 B_8 \\ + \dots + B_5 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_5 = \begin{pmatrix} B_5 E_7 + B_5 E_8 \\ + \dots + B_5 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_5 = B_5 F_7 + B_5 F_8$	—
$B_6(s) = -\frac{R_4^2 \cdot K_4}{I_4 \cdot s^2}$	$E_6 = \begin{pmatrix} B_6 B_8 + B_6 B_9 \\ + \dots + B_6 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_6 = \begin{pmatrix} B_6 E_8 + B_6 E_9 \\ + \dots + B_6 E_{12} \end{pmatrix}$	$G_6 = B_6 F_8$	—
$B_7(s) = -\frac{R_4^2 \cdot K_5}{I_4 \cdot s^2}$	$E_7 = \begin{pmatrix} B_7 B_9 + B_7 B_{10} \\ + \dots + B_7 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_7 = \begin{pmatrix} B_7 E_9 + B_7 E_{10} \\ + B_7 E_{11} + B_7 E_{12} \end{pmatrix}$	—	—
$B_8(s) = -\frac{R_3^2 \cdot K_5}{I_3 \cdot s^2}$	$E_8 = \begin{pmatrix} B_8 B_{11} + B_8 B_{12} \\ + \dots + B_8 B_{14} \end{pmatrix}$	$F_8 = B_8 E_{11} + B_8 E_{12}$	—	—
$B_9(s) = -\frac{K_{jac}}{I_3 \cdot s^2}$	$E_9 = B_9 B_{13} + B_9 B_{14}$	—	—	—
$B_{10}(s) = -\frac{C_{jac}}{I_3 \cdot s}$	$E_{10} = B_{10} B_{13} + B_{10} B_{14}$	—	—	—
$B_{11}(s) = -\frac{K_{jac}}{I_9 \cdot s^2}$	$E_{11} = B_{11} B_{14}$	—	—	—
$B_{12}(s) = -\frac{C_{jac}}{I_9 \cdot s}$	$E_{12} = B_{12} B_{14}$	—	—	—
$B_{13}(s) = -\frac{K_{ess}}{I_9 \cdot s^2}$	—	—	—	—
$B_{14}(s) = -\frac{K_{ess}}{I_{eq} \cdot s^2}$	—	—	—	—

G.3. Détermination de la chaîne d'action $T_i(s)$

Considérons le couple électromagnétique C_{em} comme entrée du modèle. Les gains des chaînes d'action des éléments $T_i(s)$ sont présentés au Tableau G.2. Nous rappelons que les "sorties" sont les variables f_i des éléments I , e_c des éléments C et f_R des éléments R .

Tableau G.2. Chaînes d'action des éléments

No	Elément	$T_i(s)$
1	I_6	$T_1 = \frac{1}{I_6 \cdot s}$
2	K_{acc}	$T_2 = \frac{K_{acc}}{I_6 \cdot s^2}$
3	C_{acc}	$T_3 = \frac{1}{I_6 \cdot s}$
4	I_5	$T_4 = \frac{1}{I_6 I_5 s^2} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
5	K_4	$T_5 = \frac{R_5 K_4}{I_6 I_5 s^3} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
6	I_4	$T_6 = -\frac{R_5 R_4 K_4}{I_6 I_5 I_4 s^4} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
7	K_5	$T_7 = -\frac{R_5 R_4^2 K_4 K_5}{I_6 I_5 I_4 s^5} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
8	I_3	$T_8 = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5}{I_6 I_5 I_4 I_3 s^6} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
9	K_{jac}	$T_9 = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5}{I_6 I_5 I_4 I_3 s^6} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right) \frac{K_{jac}}{s}$
10	C_{jac}	$T_{10} = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5}{I_6 I_5 I_4 I_3 s^6} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right)$
11	I_9	$T_{11} = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5}{I_6 I_5 I_4 I_3 I_9 s^7} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right) \left(C_{jac} + \frac{K_{jac}}{s} \right)$
12	K_{ess}	$T_{12} = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5 K_{ess}}{I_6 I_5 I_4 I_3 I_9 s^8} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right) \left(C_{jac} + \frac{K_{jac}}{s} \right)$
13	I_{eq}	$T_{13} = \frac{R_5 R_4^2 R_3 K_4 K_5 K_{ess}}{I_6 I_5 I_4 I_3 I_9 I_{eq} s^9} \left(C_{acc} + \frac{K_{acc}}{s} \right) \left(C_{jac} + \frac{K_{jac}}{s} \right)$

G.4. Détermination de $D_i(s)$

Pour déterminer le terme $D_i(s)$, nous enlevons la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action du modèle et recalculer $D(s)$. Nous présentons au Tableau G.3

Tableau G.3. Calcul de $D_i(s)$ des éléments.

No	Elément	$D_i(s)$
1	I_6	$D_1(s) = 1 - \sum_{i=3}^{n_B} B_i + \sum_{i=3}^{n_E} E_i - \sum_{i=3}^{n_F} F_i + \sum_{i=3}^{n_G} G_i - \sum_{i=3}^{n_H} H_i$
2	K_{acc}	$D_2(s) = 1 - \sum_{i=5}^{n_B} B_i + \sum_{i=5}^{n_E} E_i - \sum_{i=5}^{n_F} F_i + \sum_{i=5}^{n_G} G_i$
3	C_{acc}	$D_3(s) = 1 - \sum_{i=5}^{n_B} B_i + \sum_{i=5}^{n_E} E_i - \sum_{i=5}^{n_F} F_i + \sum_{i=5}^{n_G} G_i$
4	I_5	$D_4(s) = 1 - \sum_{i=6}^{n_B} B_i + \sum_{i=6}^{n_E} E_i - \sum_{i=6}^{n_F} F_i + G_6$
5	K_4	$D_5(s) = 1 - \sum_{i=7}^{n_B} B_i + \sum_{i=7}^{n_E} E_i - \sum_{i=7}^{n_F} F_i$
6	I_4	$D_6(s) = 1 - \sum_{i=8}^{n_B} B_i + \sum_{i=8}^{n_E} E_i - F_8$
7	K_5	$D_7(s) = 1 - \sum_{i=9}^{n_B} B_i + \sum_{i=9}^{n_E} E_i$
8	I_3	$D_8(s) = 1 - \sum_{i=11}^{n_B} B_i + \sum_{i=11}^{n_E} E_i$
9	K_{jac}	$D_9(s) = 1 - \sum_{i=13}^{n_B} B_i$
10	C_{jac}	$D_{10}(s) = 1 - \sum_{i=13}^{n_B} B_i$
11	I_9	$D_{11}(s) = 1 - B_{14}$
12	K_{ess}	$D_{12}(s) = 1$
13	I_{eq}	$D_{13}(s) = 1$

G.5. Détermination de $y_i(s)$

En utilisant le calcul de $D(s)$, $T_i(s)$ et $Di(s)$, nous pouvons déduire la fonction de transfert $y_i(s)$ comme :

$$y_i(s) = \frac{T_i(s) \cdot D_i(s)}{D(s)} \quad (\text{G.2})$$

Après avoir calculer y_i dans le plan complexe s , nous le transformons dans le domaine fréquentiel w pour obtenir $y_i(w)$. Nous pouvons alors obtenir le gain $Y_i(w)$ (le module) de ce signal.

G.6. Détermination de $U(w)$

La puissance d'entrée se calcul comme :

$$P_{Cem}(t) = e_{Cem}(t) \cdot f_{Cem}(t) \quad (\text{G.3})$$

En fait, la vitesse de rotation f_{Cem} est égale à la vitesse de l'inertie I_6 . Nous pouvons réécrire cette équation comme :

$$\begin{aligned} P_{Cem}(t) &= e_{Cem}(t) \cdot y_1(t) = (U(w) \sin(wt)) \cdot (Y_1(w) U(w) \sin(wt + j_1)) \\ &= Y_1(w) U(w)^2 \sin(wt) \sin(wt + j_1) \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

L'amplitude $P(w)$ de cette puissance est donc égale à $Y_1(w) U(w)^2$. Cette amplitude est considérée constante pour toutes les fréquences. Nous pouvons donc déterminer $U(w)$.

$$U(w) = \sqrt{\frac{P(w)}{Y_1(w)}} \quad (\text{G.5})$$

G.7. Calcul des activités énergétiques

En appliquant les formules de l'équation (2.59), nous pouvons calculer l'activité énergétique de chaque élément pour toutes les fréquences. Nous présentons Tableau G.4 les extraits des activités énergétiques calculées analytiquement (avec une amplitude $P(w)$ de la puissance d'entrée égale à 1) pour les éléments I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} .

Les activités énergétiques obtenues par le calcul analytique et par les simulations sont similaires. Nous donnons les valeurs d'activité obtenues par la dernière approche pour certaines valeurs de pulsation au Tableau G.5.

Tableau G.4. Activités énergétiques obtenues par le calcul analytique et les activités accumulées des éléments.

w_b [rad/s]	Activité énergétique d'élément				Intégrale de l'activité énergétique par rapport w_b			
	I_6	I_{eq}	K_{jac}	C_{jac}	I_6	I_{eq}	K_{jac}	C_{jac}
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.0001	518.29	19430.87	5.27E-07	1.08E-13	0.02591	0.97154	2.64E-11	5.42E-18
0.0002	259.15	9715.44	1.05E-06	4.33E-13	0.06479	2.42886	1.05E-10	3.25E-17
0.0005	103.66	3886.17	2.64E-06	2.71E-12	0.11921	4.46910	6.59E-10	5.04E-16
0.001	51.83	1943.09	5.27E-06	1.08E-11	0.15808	5.92642	2.64E-09	3.89E-15
0.002	25.92	971.54	1.05E-05	4.33E-11	0.19695	7.38373	1.05E-08	3.10E-14
0.005	10.37	388.62	2.64E-05	2.71E-10	0.25137	9.42397	6.59E-08	5.02E-13
0.01	5.18	194.31	5.2E-05	1.08E-09	0.29024	10.88129	2.645E-07	3.89E-12
0.02	2.59	97.15	1.05E-04	4.33E-09	0.32912	12.33860	1.05E-06	3.10E-11
0.05	1.037	38.862	2.64E-04	2.71E-08	0.38354	14.37885	6.59E-06	5.02E-10
0.1	0.518	19.431	5.27E-04	1.08E-07	0.42241	15.83619	2.63E-05	3.89E-09
0.2	0.259	9.716	1.055E-03	4.33E-07	0.461278	17.29359	1.054E-05	3.10E-08
0.5	0.104	3.889	2.638E-03	2.71E-06	0.51568	19.33442	6.59E-05	5.02E-07
1	0.052	1.949	5.287E-03	1.09E-05	0.55450	20.79385	0.00264	3.89E-06
2	0.0256	0.9829	0.0107	4.38E-05	0.59316	22.25966	0.01062	3.12E-05
5	0.0097	0.4188	0.0284	2.918E-04	0.64609	24.36230	0.06924	5.35E-04
10	0.00375	0.27254	0.07395	0.00152	0.67961	26.09077	0.32513	0.00507
20	3.448E-04	0.77712	0.84342	0.03465	0.7001	31.3391	4.9120	0.1859
50	0.00774	0.00796	0.05399	0.00555	0.8214	43.1154	18.3731	0.7888
60	0.01089	0.00490	0.04779	0.00589	0.9146	43.1796	18.8820	0.8460
70	0.01513	0.00347	0.04608	0.00663	1.0446	43.2214	19.3513	0.9086
80	0.02146	0.00278	0.04827	0.00793	1.2276	43.2527	19.8231	0.98137
90	0.03227	0.00255	0.05601	0.01035	1.4962	43.2793	20.3445	1.0728
100	0.05456	0.00278	0.07541	0.01549	1.9303	43.3059	21.0016	1.2020
110	0.10237	0.00352	0.11553	0.02610	2.71494	43.3374	21.9563	1.4100
120	0.08952	0.00215	0.08413	0.02074	3.6744	43.3658	22.9546	1.6442
130	0.05299	9.19E-05	0.04215	0.01125	4.3870	43.3812	23.5860	1.8042
140	0.03659	4.69E-04	0.02497	0.00718	4.8349	43.3881	23.9215	1.8963
150	0.02808	2.72E-04	0.01662	0.00512	5.1582	43.3918	24.1294	1.9578
200	0.01368	4.16E-05	0.00452	0.00185	6.2021	43.3997	24.6577	2.1322

Tableau G.5. Activités énergétiques obtenues par simulations.

w_b [rad/s]	Activité énergétique d'élément			
	I_6	I_{eq}	K_{jac}	C_{jac}
1	0.052	1.949	5.28E-03	1.09E-05
10	0.00375	0.27253	0.07393	0.00152
100	0.05457	0.00283	0.07544	0.01549

G.8. Intégration de l'activité énergétique par rapport à la pulsation

L'intégration de l'activité énergétique par rapport de la pulsation est faite en utilisant la méthode trapèze. Cette méthode est illustrée par la Figure G.1.

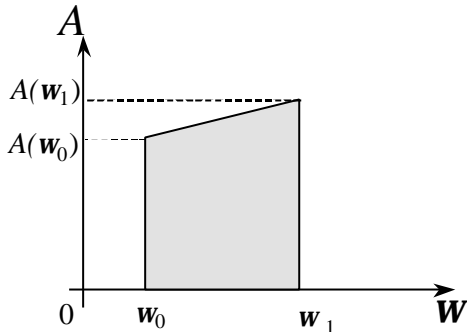


Figure G.1. Méthode de trapèze.

Nous pouvons calculer l'aire comme :

$$\int_{w_0}^{w_1} A(w) dw = \frac{1}{2} (A(w_0) + A(w_1)) (w_1 - w_0)$$

Nous avons présenté également dans le Tableau G.4 les valeurs des intégrales de l'activité énergétique des éléments I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac} . En utilisant la même méthode pour les autres éléments, nous pouvons ensuite calculer l'activité total (par rapport à la bande passante). Cette dernière est nécessaire pour obtenir les index d'activité que nous trions selon l'ordre décroissant.

En appliquant le seuil d'activité choisi (voir paragraphe 2.3.2), nous pouvons supprimer les éléments négligeables pour obtenir le modèle réduit pour chaque bande passante désirée.

Annexe H

Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA)

La Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire (SBPA) est une succession d'impulsions rectangulaires modulées en largeur. Il approxime un bruit blanc discret. Le terme pseudo-aléatoire caractérise l'existence d'une séquence se répétant à l'intérieur de laquelle la largeur des impulsions varie aléatoirement. La réalisation d'une SBPA se base sur l'utilisation d'un registre de longueur N , qui se décale vers la droite à chaque période propre du signal d'excitation de longueur T . Cette période propre est une multiplication de la période d'échantillonnage (T_e). La Figure H.1 présente une SBPA avec $N = 4$. Le spectre fréquentiel a été présenté dans le Tableau 2.5.

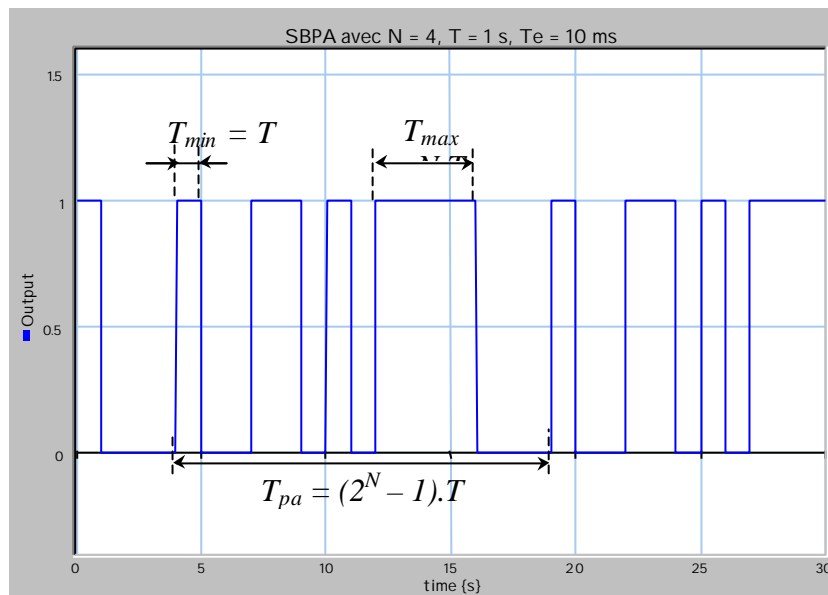


Figure H.1. Signal SBPA

Nous utilisons la SBPA dans notre étude des signaux d'excitation pour simplifier nos modèles. Nous avons implémenté une programmation sous 20 Sim pour générer ce signal.

parameters

```
real p = 5.0;           // le multiple pour obtenir T
real Te = 0.01;        // période d'échantillonnage
real Amplitude = 2750.0 {V}; // amplitude
real Ton = 0;          // temps pour commencer
```

variables

```
real y1, y2, y3, y4;   //  $y_i$  : registre ( $N = 4$ )
real dy1, dy2, dy3, dy4; //  $dy_i$  : l'ancien valeur de  $y_i$  (pour le décalage)
```

```
real    T, ph, b;                                // T : largeur minimale
                                                // b et ph sont utilisés pour l'échantillonnage

initialequations                               // pour initialiser certaines variables
y1 = 0 ;
y2 = 0;
y3 = 0;
y4 = 1;
b = 1;
T = p * Te;

equations
if time > Ton then
    dy1 = dly(y1, 0);
    dy2 = dly(y2, 0);
    dy3 = dly(y3, 1);
    dy4 = dly(y4, 1);

    ph = (time - Ton) mod T;

    if ph < Te and b <> 1 then
        y1 = ((not dy3) and dy4) or (dy3 and (not dy4));
        y2 = dy1;
        y3 = dy2;
        y4 = dy3;
        b = 1;
    else
        if ph > (p-1)*Te then
            b = 0;
        end;
    end;
end;
y = Amplitude*y4;                               // y : variable de sortie (SBPA)
```

Annexe I

Étude des signaux de la chaîne de transmission mécanique (par la méthode MORA)

Nous avons appliqué la méthode MORA associée avec une étude des signaux décrite dans le paragraphe 2.3.2 du Chapitre 2 sur le modèle de la chaîne de transmission mécanique. Nous avons utilisé les signaux de type échelon, sinusoïde, SBPA et chirp comme excitation. Il existe 2 entrées dans le modèle : C_{em} et F_{res} .

Nous présentons les index d'activité des éléments mécaniques pour chaque type d'excitation dans les figures suivantes. Nous les avons résumé ces résultats dans le paragraphe 4.1.3 du Chapitre 4 afin de déduire les modèles réduits BF et HF.

I.1. Excitation à l'entrée C_{em}

I.1.1. Echelon

Nous regardons l'influence de la durée T de l'échelon aux index d'activité. La Figure I.1 montre les index d'activité des éléments pour différentes durées d'excitation.

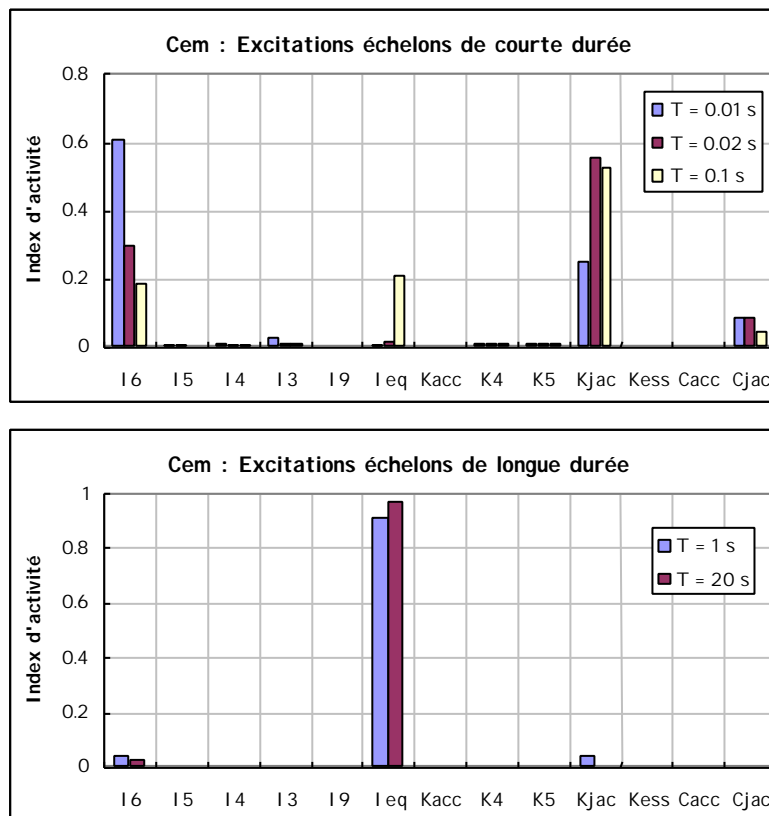


Figure I.1. Index d'activité des éléments pour les échelon à l'entrée C_{em} .

- Pour les échelons de durée $T = 0.01$ s et $T = 0.02$ s, nous voyons que les éléments les plus importants sont I_6 et K_{jac} . Ces excitations ont une gamme de fréquence de 0 à 100 Hz (pour $T = 0.01$ s) et de 0 à 50 Hz (pour $T = 0.02$ s). Nous remarquons que la fréquence de résonance de la partie mécanique ($F_{reson} = 18$ Hz) est incluse dans ces gammes de fréquence. Nous retrouvons les éléments responsables des phénomènes de résonance dans le système. Nous voyons aussi que les autres éléments ont des index d'activité non négligeables, excepté les éléments I_5 , I_9 , K_{acc} , K_{ess} et C_{acc} .
- Pour un échelon de durée $T = 0.1$ s (associée à une gamme de fréquence de 0 à 10 Hz), nous voyons qu'il y a 4 éléments nécessaires (I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac}). Nous retrouvons les éléments obtenus pour le bond graph lent de la méthode des perturbations singulières (voir paragraphe 4.1.1). L'importance des éléments K_{jac} et C_{jac} diminue quand nous augmentons la durée (voir $T = 1$ s).
- Pour une durée très longue, par exemple $T = 20$ s qui correspond à une gamme de fréquence de 0 à 0.05 Hz, soit un signal très basse fréquence, seuls 2 éléments (I_6 et I_{eq}) sont nécessaires (voir Figure I.1). Ces éléments sont des inerties élevées qui induisent des modes lents.

I.1.2. Sinusoïde

Dans un premier temps, nous excitons le modèle avec les sinusoïdes de fréquences égales aux fréquences propres des boucles causales dans le modèle. L'objectif est de voir s'il y a un rapport entre la pulsation propre d'une boucle causale et les index d'activité des éléments associés à cette boucle causale. Nous prenons les boucles causales entre I_3 et K_{jac} dont la fréquence propre est autour de $F = 90$ Hz, entre I_6 et K_{acc} ($F = 2900$ Hz) et entre I_5 et K_{acc} ($F = 30000$ Hz). Les index d'activité sont présentés Figure I.2. Nous remarquons que seul la troisième fréquence excite vraiment les éléments associés à la boucle causale (I_5 et K_{acc}).

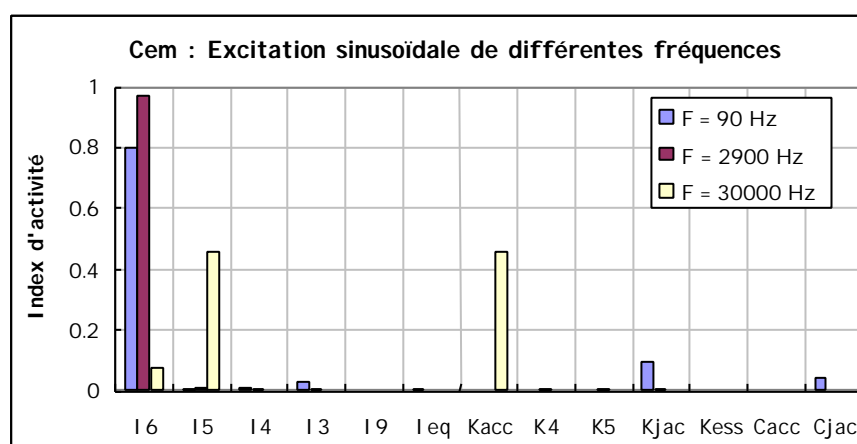


Figure I.2. Index d'activité pour des excitations sinusoïdales à l'entrée C_{em} de fréquences égales aux fréquences propres des boucles causales

Nous excitons le modèle avec des sinusoides basse fréquence (voir Figure I.2). Pour une fréquence très basse (par exemple $F = 0.3$ Hz), il n'y a que 2 éléments nécessaires (I_6 et I_{eq}), ce qui confirme le résultat précédent obtenu pour un échelon longue durée. Pour une fréquence de 1.5 Hz, l'élément K_{jac} n'est plus négligeable. Pour une sinusoïde de fréquence égale à la fréquence de résonance (18 Hz), tous les éléments sont nécessaires (sauf 4 éléments : I_9 , K_{acc} , K_{ess} et C_{acc}). Nous voyons que les index d'activité des éléments I_6 et K_{jac} sont les plus grands. Nous vérifions que ces éléments sont bien responsables de cette résonance.

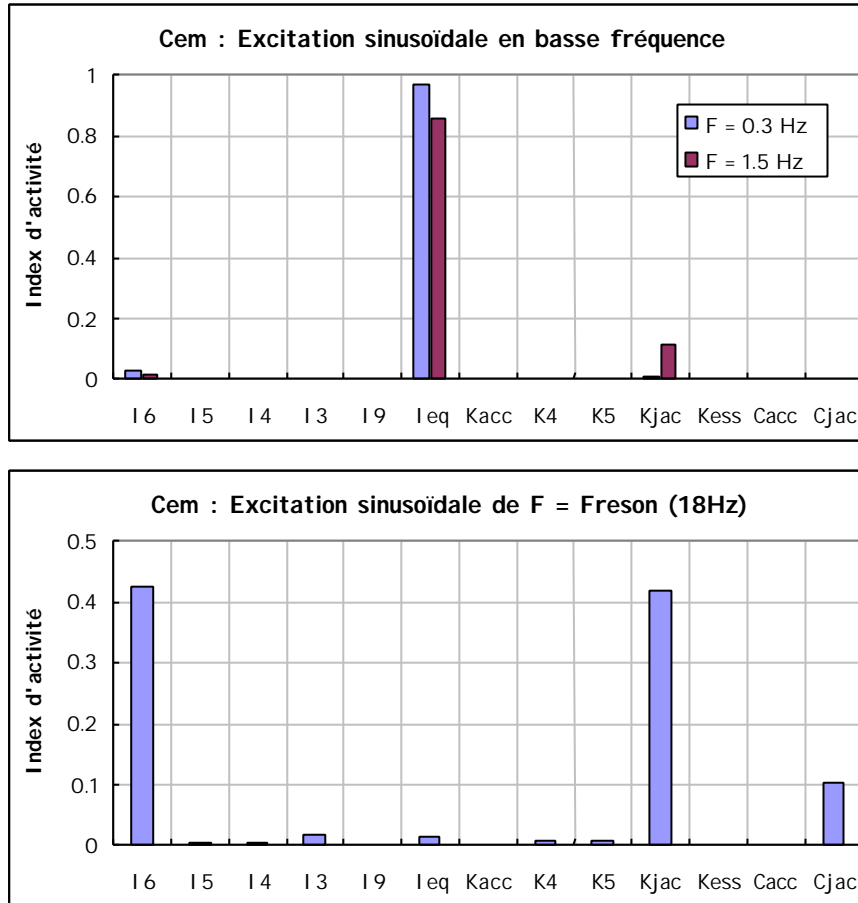


Figure I.3. Index d'activité pour des excitations sinusoïdales basse fréquence à l'entrée C_{em} .

I.1.3. SBPA

La Figure I.4 présente les index d'activité des éléments pour des excitations SBPA de différentes périodes propres de décalage T (ou différentes largeurs minimales). Nous retrouvons des résultats analogues à ceux obtenus avec des échelons de durée variable.

- Pour une période T très courte presque tous les éléments sont importants, comme dans le cas d'un signal échelon de durée très courte.
- Pour une période T assez longue, il n'y a que 2 éléments importants : I_6 et I_{eq} . Nous retrouvons la même caractéristique que celle d'un échelon de longue durée.

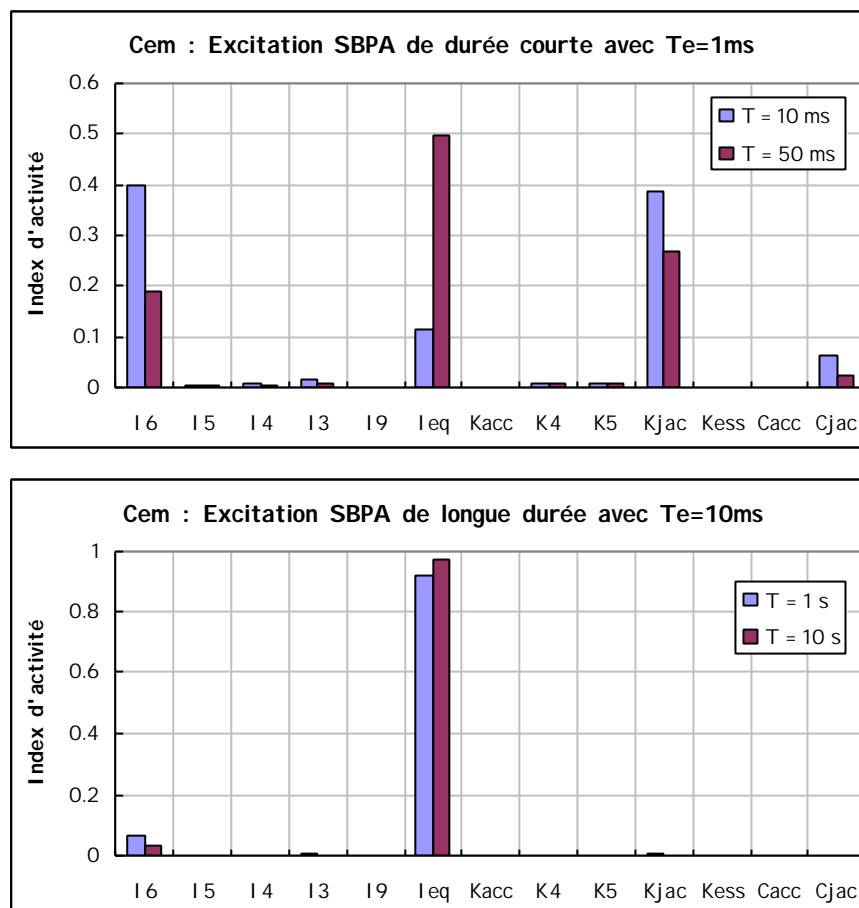


Figure I.4. Index d'activité pour des excitations SBPA à l'entrée C_{em} de différentes périodes propres de décalage T .

I.1.4. Chirp

La Figure I.5 présente les index d'activité des éléments pour des excitations chirp à l'entrée C_{em} . Nous rappelons que le chirp est une cosinusoïde balayant les fréquences entre F_0 et F_1 (voir paragraphe 2.3.2.2). Nous voyons que pour des signaux chirp basse fréquence (BF), il y a 4 éléments nécessaires (I_6 , I_{eq} , K_{jac} et C_{jac}). Pour des signaux de fréquence proche de la fréquence de résonance (18Hz), nous remarquons que les éléments les plus importants sont I_6 et K_{jac} . Les autres éléments deviennent aussi important (effet de la résonance) excepté les éléments : I_9 , K_{acc} , K_{ess} et C_{acc} . Pour un signal chirp haute fréquence (HF), l'élément le plus important est l'inertie I_6 . L'importance de l'inertie I_{eq} est moindre.

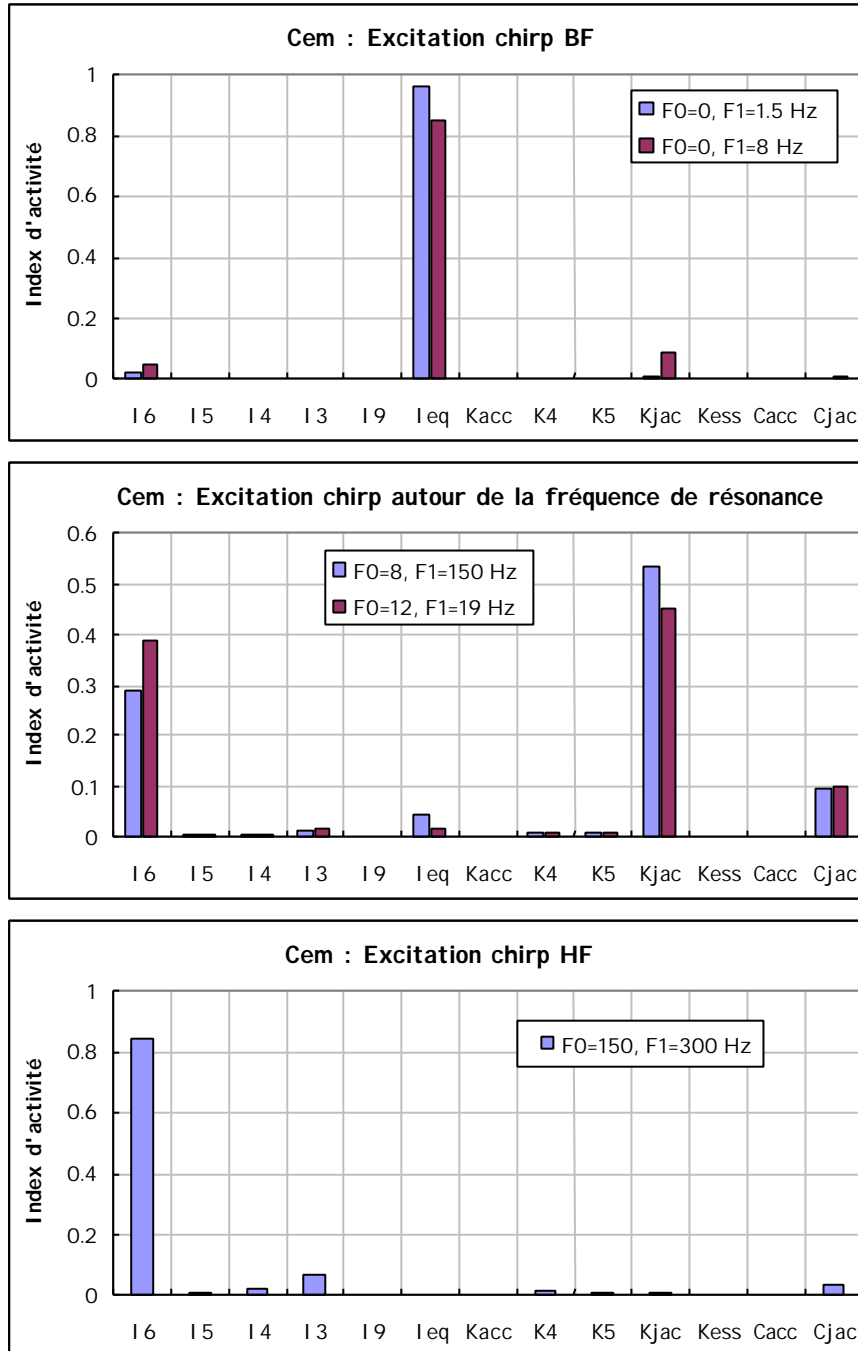


Figure I.5. Index d'activité pour des excitations chirp à l'entrée C_{em} de différentes gammes de fréquence (de F_0 à F_1).

I.2. Excitation à l'entrée F_{res}

I.2.1. Echelon

Nous voyons à la Figure I.6 qu'il n'y a que 2 éléments importants (I_6 et I_{eq}) pour un échelon de durée assez longue. Pour un échelon de courte durée, les éléments K_{jac} et C_{jac} font partie des 99.5 % de l'activité totale du modèle. Ces éléments ne peuvent plus être négligés

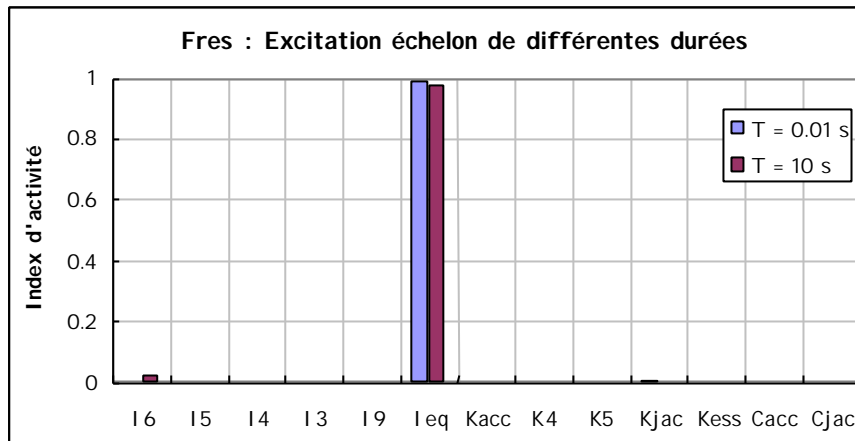


Figure I.6. Index d'activité pour des excitations de type échelon de différentes durées à l'entrée F_{res} .

Si l'on compare ce résultat à celui obtenu pour le même type d'échelon sur l'entrée couple machine (cf Figure I.1), on constate que les résultats sont notablement différents, en particulier dans le cas d'un échelon de courte durée (comportement HF). Ceci peut s'expliquer par un effet de lissage opéré par l'élément I : I_{eq} , dont la valeur très élevée filtre la perturbation sur F_{res} .

I.2.2. Sinusoïde

La Figure I.7 montre qu'en basse fréquence, il n'y a que 2 éléments nécessaires (I_6 et I_{eq}) tandis qu'en haute fréquence, seule l'inertie équivalente I_{eq} est importante. A la fréquence de résonance ($F_{reson} = 18$ Hz), presque tous les éléments deviennent importants comme dans le cas où nous donnons une même excitation à l'entrée C_{em} (voir Figure I.3).

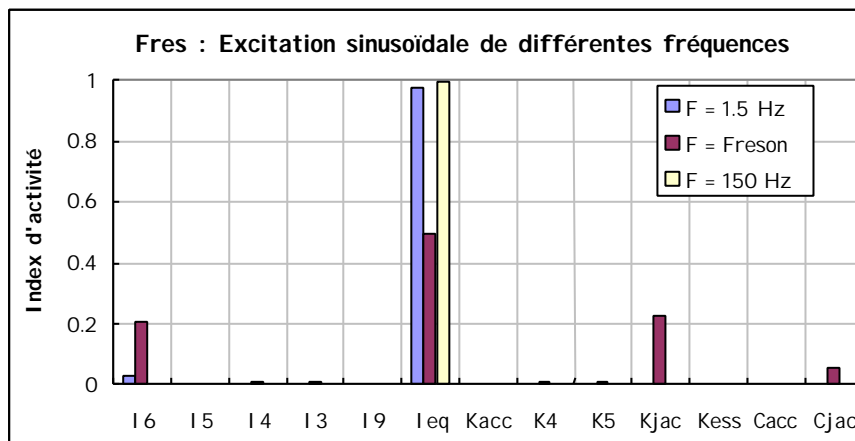


Figure I.7. Index d'activité pour des excitations sinusoïdale de différentes fréquences à l'entrée F_{res} .

I.2.3. SBPA

Nous remarquons que les excitations SBPA donnent le même résultat que les échelons (voir Figure I.6 et Figure I.8).

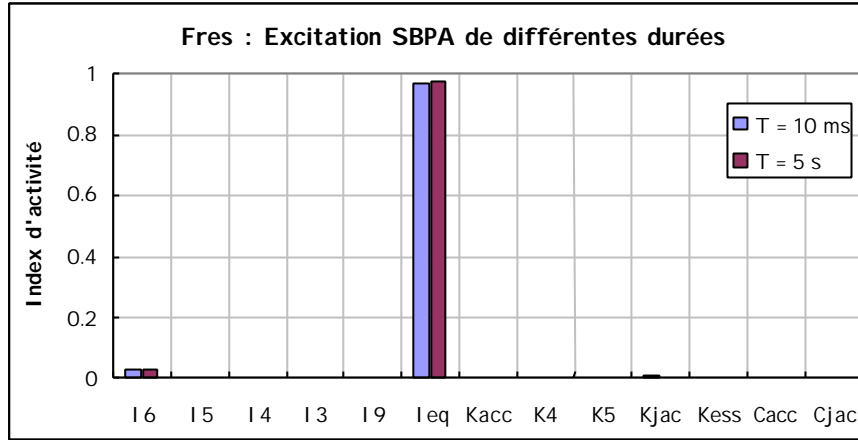


Figure I.8. Index d'activité pour des excitations SBPA de différentes largeurs minimales à l'entrée F_{res} .

I.2.4. Chirp

La Figure I.9 présente les index d'activité des éléments pour des excitations chirp de différentes gammes de fréquence. Nous voyons qu'en basse fréquence, il n'y a que 2 éléments importants (I_6 et I_{eq}), tandis qu'en haute fréquence, seule l'inertie équivalente I_{eq} est importante. Pour une gamme de fréquence proche de la fréquence de résonance, nous remarquons une grande activité pour les éléments I_6 et K_{jac} .

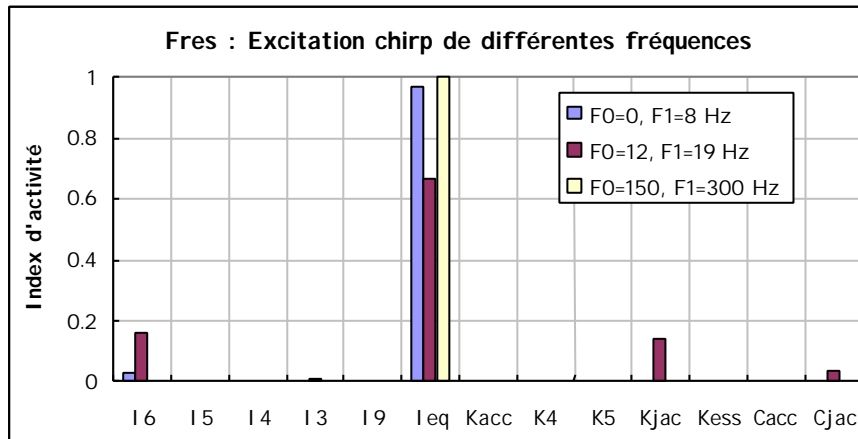


Figure I.9. Index d'activité pour les excitations chirp de différentes gammes de fréquence à l'entrée F_{res} .