

УДК 517.958:531.5, 517.958:524.8

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ ВИЗУАЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ И КОСМОЛОГИИ

Ю.Г. Игнатъев¹, А.Р. Самигуллина²

¹ ignatev-yurii@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

² alsu_sam@mail.ru; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Описаны авторские программные процедуры автоматизированного исследования и визуализации нелинейных динамических систем и их приложения к задачам механики и космологии. В частности, описаны процедуры автоматизированного усреднения быстро осциллирующих численных решений.

Ключевые слова: сплайновая аппроксимация, численные методы интегрирования, визуализация вычислений, нелинейная механика, космология, прикладные математические пакеты.

1. Сервисные программные процедуры визуализации динамических моделей на основе сплайновой аппроксимации численных решений

1.1. Автоматизированный вывод численных решений системы ОДУ в форме сплайнов

Авторский пакет `DifEqTools` [4] содержит программную процедуру `ODESpline(Eqs, ICS, Method, t1, N, [i, j], x, r)` автоматизированного вывода численных решений системы ОДУ в форме равномерных N - кусочных сплайнов порядка r на отрезке t_1 , где x – пользовательское имя независимой переменной (см. [1, 2]).

> $Eqs := [(D^2(x)(t) = -0.1 * D(y)(t) - x(t), (D^2(y)(t) = -0.1 * D(x)(t) - y(t))];$

$$Eqs := \left[D^{(2)}(x)(t) = -0.1 D(y)(t) - x(t), D^{(2)}(y)(t) = -0.1 D(x)(t) - y(t) \right] \quad (1)$$

> $ICS := [x(0) = 2, D(x)(0) = 1, y(0) = 0, D(y)(0) = 0];$

$$ICS := [x(0) = 2, D(x)(0) = 1, y(0) = 0, D(y)(0) = 0] \quad (2)$$

Приведем пример автоматизированного построения 12-ти кусочного кубического сплайна численного решения системы ОДУ (5) – (6) на отрезке $[t_0, 12\pi]$ относительно первой производной первой переменной с передачей имени x независимой (временной) переменной, причем для сокращения записи выведем сплайн с точностью до 4-х значащих цифр (см. Рис. 1):

> `evalf(DifEqTools[ODESpline](Eqs, ICS, [method=rkf45], 12*Pi, 12, [1, 1], x, 3), 4);`

В цитированных работах показано, что число кусков сплайна практически не влияет на время построения сплайна, но зато увеличивает точность выводимого численного решения. Поэтому для вывода решений можно не особенно экономить на числе кусков сплайна.

$1 - 1.130x - 2.827 \cdot 10^{-16}x^2 + 0.04938x^3$	$x < 3.142$
$-2.063 + 0.3322x + 0.4654(x - 3.142)^2 - 0.1146(x - 3.142)^3$	$x < 6.284$
$1.924 - 0.1369x - 0.6147(x - 6.284)^2 + 0.1386(x - 6.284)^3$	$x < 9.426$
$-2.116 + 0.1040x + 0.6914(x - 9.426)^2 - 0.1542(x - 9.426)^3$	$x < 12.57$
$2.754 - 0.1210x - 0.7630(x - 12.57)^2 + 0.1712(x - 12.57)^3$	$x < 15.71$
$-3.736 + 0.1506x + 0.8495(x - 15.71)^2 - 0.1917(x - 15.71)^3$	$x < 18.85$
$4.999 - 0.1832x - 0.9558(x - 18.85)^2 + 0.2162(x - 18.85)^3$	$x < 21.99$
$-6.362 + 0.2092x + 1.081(x - 21.99)^2 - 0.2442(x - 21.99)^3$	$x < 25.14$
$8.308 - 0.2514x - 1.227(x - 25.14)^2 + 0.2776(x - 25.14)^3$	$x < 28.28$
$-9.491 + 0.2542x + 1.388(x - 28.28)^2 - 0.3068(x - 28.28)^3$	$x < 31.42$
$5.961 - 0.1044x - 1.502(x - 31.42)^2 + 0.3012(x - 31.42)^3$	$x < 34.56$
$18.60 - 0.6286x + 1.335(x - 34.56)^2 - 0.1418(x - 34.56)^3$	<i>otherwise</i>

Рис. 1. 12-ти кусочный сплайн системы (5) – (6) на отрезке $[t_0, 12\pi]$.

1.2. Автоматизированное построение конфигурационных и фазовых диаграмм на основе сплайновых решений

Нелинейные колебания в потенциальном поле 4-го порядка.

```
> Eq_non:=[diff(x(t),t$2) = -.1*diff(x(t),t)+.1*x(t)-2*x(t)^3];
```

```
> IC0:=[x(0)=0,D(x)(0)=1];
```

Построим график $x(t)$ решения этого нелинейного уравнения колебаний на 248-кусочном сплайне (Рис.2) :

```
> DiffeqTools[SplineConf](Eq_non,IC0,[method=rkf45,abserr=10^(-8),
relerr=10^(-8),maxfun=200000],48*Pi,248,[1,0],x,3,blue);
```

Рассмотрим также систему двух нелинейных ОДУ второго порядка:

```
> Eqs2X2:=[(D@@2)(x)(t)=-0.1*D(y)(t)+0.1*x(t)-0.0001*y(t)^2,
(D@@2)(y)(t)=-0.1*D(x)(t)+0.1*y(t)-0.0001*x(t)*y(t)];
```

с начальными условиями

```
> ICS:=[x(0)=0,D(x)(0)=0.5,y(0)=0,D(y)(0)=0];
```

Построим график $y(t)$ этого нелинейного уравнения колебаний на 200-кусочном сплайне на отрезке $[0, 16\pi]$ (Рис. 3):

```
> DiffeqTools[SplineConf](Eqs2X2,ICS,[method=rkf45],16*Pi,200,[2,0],x,3,navy);
```

Попытка проследить дальнейшую историю системы Eqs2X2 - ICS наталкивается на сообщение:

```
>DiffeqTools[SplineConf](Eqs2X2,ICS,[method=rkf45],24*Pi,200,[2,0],x,3,blue);
```

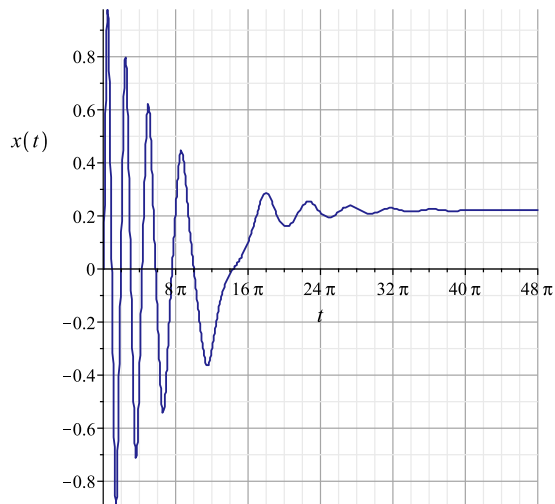


Рис. 2. Конфигурационная траектория численного решения задачи Коши Eq_non - IC0 на отрезке $[0, 48\pi]$, полученная на основе 248-кусочного сплайна. Надписи на координатных осях генерируются автоматически.

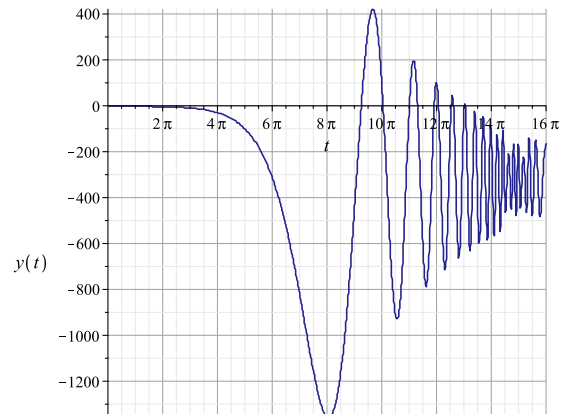


Рис. 3. Конфигурационная траектория численного решения задачи Коши Eqs2X2 - ICS на отрезке $[0, 16\pi]$, полученная на основе 200-кусочного сплайна. Надписи на координатных осях генерируются автоматически.

Error, (in unknown) cannot evaluate the solution further right of 60.720201, maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details)

Система просит увеличить значение параметра численного интегрирования maxfun, равного максимальному числу шагов интегрирования. Эта проблема преодолевается улучшенными параметрами численного интегрирования, в частности, увеличением параметра maxfun до значения 5000000 (Рис. 4):

```
> DiffeqTools[SplineConf](Eqs2X2,ICS,[method=rkf45,abserr=10^(-8),
  relerr=10^(-8),maxfun=5000000],24*Pi,1000,[2,0],x,3,navy);
```

Рассмотрим также построение двумерной фазовой траектории для приведенного выше примера (Рис. 5):

```
> DiffeqTools[SplinePhase2d](Eq_non,IC0,[method=rkf45],48*Pi,248,
  [[1,0],[1,1]],x,3,navy);
```

Приведем пример построения трехмерной фазовой траектории на основе сплайна для существенно нелинейной 3-х мерной динамической системы (Рис. 6):

```
> Eqs3n:=[(D@@2)(x)(t)=-D(y)(t)-x(t)^3,(D@@2)(y)(t)=D(x)(t)-y(t)^3,
  (D@@2)(z)(t)=0];
```

```
%
```

```
> ICS3:=[x(0)=0,D(x)(0)=1,y(0)=0,D(y)(0)=1,z(0)=0,D(z)(0)=1];
  [x(0) = 0, D(x)(0) = 1, y(0) = 0, D(y)(0) = 1, z(0) = 0,
```

```
> DiffeqTools[SplinePhase3d](Eqs3n,ICS3,
```

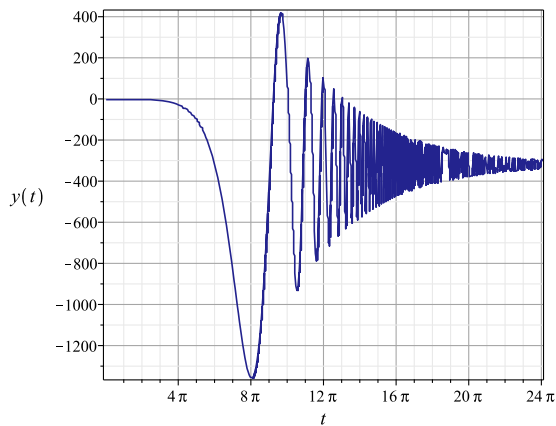


Рис. 4. Конфигурационная траектория численного решения задачи Коши $Eqs2X2 - ICS$ на отрезке $[0, 24\pi]$, полученная на основе 1000 - кусочного сплайна с улучшенными опциями численного интегрирования.

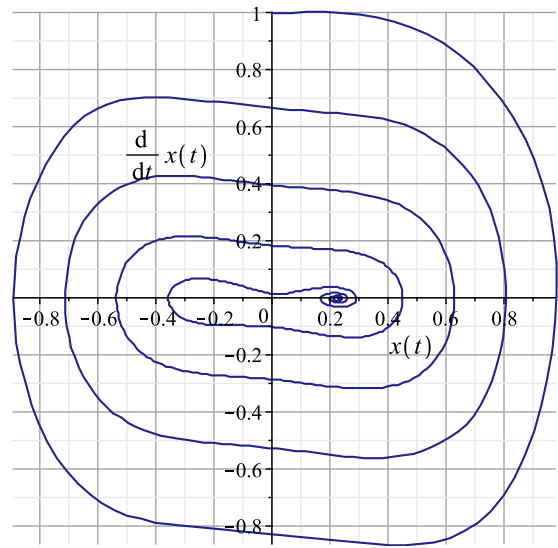


Рис. 5. Конфигурационная траектория численного решения задачи Коши $Eq_non - ICS0$ на отрезке $[0, 48\pi]$, полученная на основе 248 - кусочного сплайна.

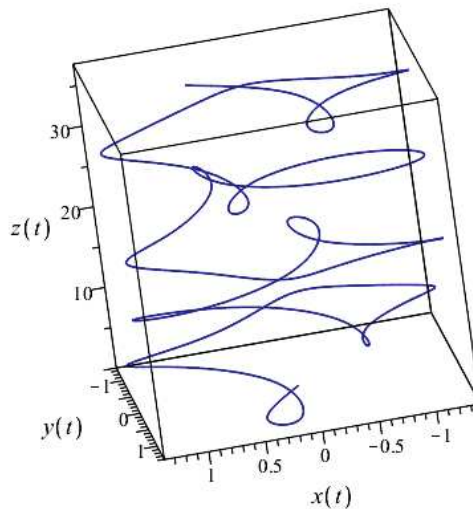


Рис. 6. Трехмерная фазовая траектория численного решения задачи Коши $Eqs3n - ICS3$ на отрезке $[0, 12\pi]$, полученная на основе 48 - кусочного кубического сплайна.

```
[method=rkf45, abserr=10-8, relerr=10-8, maxfun=5000000],
12*Pi, 48, [[1, 0], [2, 0], [3, 0]], x, 3, navy);
```

Отметим, что на основе созданных процедур построения фазовых траекторий можно строить фазовые траектории (вернее, их проекции) и для 4-х мерных и n-мерных. Рассмотрим пример 4-х мерной нелинейной системы:

```
> Eqs4n:=[(D@2)(x)(t)=-D(y)(t)-x(t)^3+0.01*u(t)^3,
```

$$(D@@2)(y)(t)=D(x)(t)-y(t)^3+0.01*z(t)^3, (D@@2)(z)(t)=0.01*u(t),$$

$$(D@@2)(u)(t)=-D(z)(t)-0.1*y(t)^3];$$

```
> ICS4:=[x(0)=0,D(x)(0)=1,y(0)=0,D(y)(0)=1,z(0)=0,D(z)(0)=1,u(0)=1,D(u)(0)=0];
```

Следующие два примера показывают, как может возникнуть мнимая «сингулярность» в точке $t=25.787255$:

```
> DifEqTools[SplinePhase3d](Eqs4n,ICS4,[method=rkf45],
26,96,[[1,0],[2,0],[4,0]],x,3,navy);
```

Error, (in unknown) cannot evaluate the solution further right of 25.787255, maxfun limit exceeded (see ?dsolve,maxfun for details) Улучшим параметры численного интегрирования (Рис. 7, 8).

```
> DifEqTools[SplinePhase3d](Eqs4n,ICS4,[method=rkf45,abserr=10^(-6),
relerr=10^(-6),maxfun=10000000],26,96,[[1,0],[2,0],[4,0]],x,3,navy);
```

```
> DifEqTools[SplinePhase3d](Eqs4n,ICS4,[method=rkf45],24,100,
[[1,0],[2,0],[3,0]],x,3,navy);
```

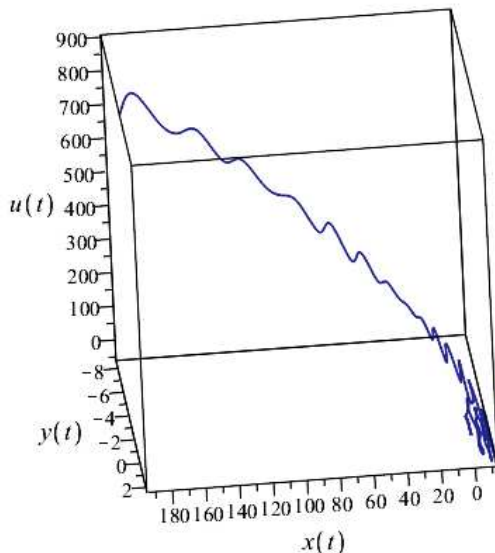


Рис. 7. Трехмерная проекция в гиперплоскости $\{XYU\}$ четырехмерной фазовой траектории численного решения задачи Коши Eqs4n - ICS4 на отрезке $[0,26]$, полученная на основе 96 - кусочного сплайна.

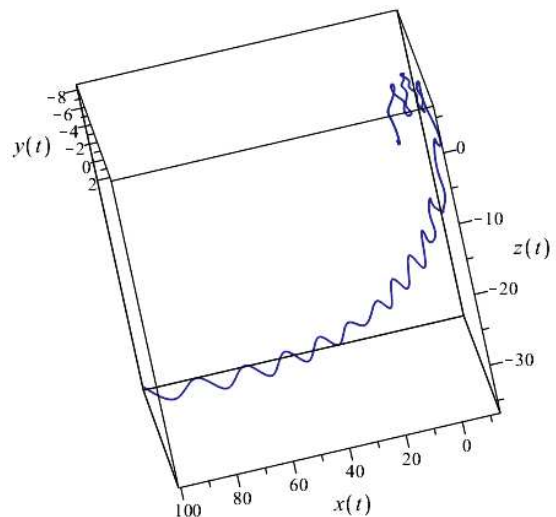


Рис. 8. Трехмерная проекция в гиперплоскости $\{XYZ\}$ четырехмерной фазовой траектории численного решения задачи Коши Eqs4n - ICS4 на отрезке $[0,24]$, полученная на основе 100 - кусочного сплайна.

2. Программные процедуры автоматизированного усреднения функций численных решений

Часто для анализа поведения нелинейных динамических систем необходимо выделить медленно меняющуюся и быстро осциллирующую части этой функции:

$$F(t) = f(t) + \phi(t)e^{iU(t)}, \quad |\dot{f}, \dot{\phi}| \ll |\dot{U}|. \quad (3)$$

Пусть $F(t)$ – некоторая интегрируемая функция. Определим ее среднее значение $F_0(t)$ на промежутке $[t - \Delta t/2, t + \Delta t/2]$ следующим образом:

$$F_0(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} F(t') dt'. \quad (4)$$

Также определим на этом же промежутке флуктуации функции $\delta F(t)$:

$$\delta F(t) = F(t) - F_0(t). \quad (5)$$

Также определим среднеквадратичные флуктуации:

$$\langle \delta F(t)^2 \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} \delta F^2(t') dt'. \quad (6)$$

Заметим, что для уверенного отделения осциллирующей части функции необходимо выполнение 2-х условий:

$$T \ll \Delta t \ll t, \quad (7)$$

где T – характерный период осцилляций. Программные процедуры, соответствующие определениям (4) – (6), в пакете `DifEqTools` реализуются следующим образом:

1. `DifEqTools[Middle](ff, T, tau, N, k)` – (4);
2. `DifEqTools[Osc](ff, T, tau, N, k)` – (5);
3. `DifEqTools[OscQuadr](ff, T, tau, N, k)` – (6),

где $ff=[t, F(t)]$, $T = \Delta t$, τ – независимая временная переменная в левых частях формул (4) – (6), N – число разбиений интервала усреднения $T = \Delta t$, k – метод интегрирования: $k=T$ – метод трапеций, $k=S$ – метод Симпсона.

В качестве примера рассмотрим следующую функцию:

$$\phi := t \rightarrow \frac{1}{1+t^2} + 0.1 \frac{\sin(10t)}{1+t^2} \quad (8)$$

```
> phi:=(t)->1/(1+t^2)+0.1*sin(10*t)/(1+t^2);
```

Определим среднее этой функции про интервалу $\pi/5$, заметив, что этот интервал соответствует одному периоду колебаний. Вычислим среднее значение с помощью метода интегрирования Симпсона, разбивая отрезок интегрирования на 1000 частей:

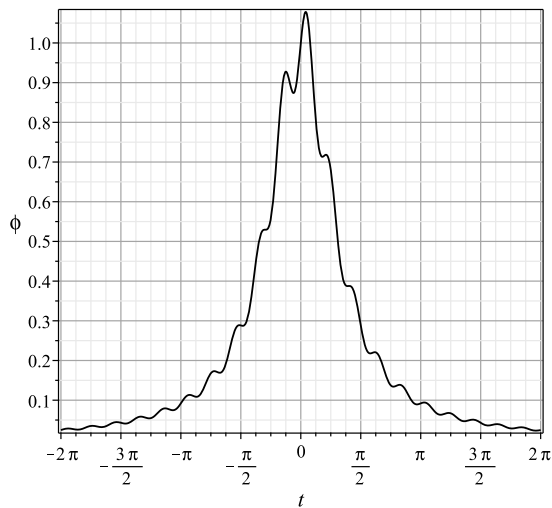


Рис. 9. График функции $\phi(t)$ (8).

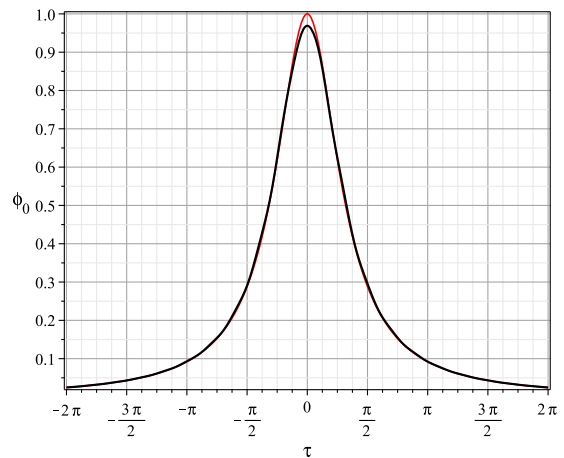


Рис. 10. График среднего значения функции $\phi(\tau)$, – черная жирная линия; красная тонкая линия – график медленно меняющейся части этой функции: $1/(1+\tau^2)$.

```
> phiS__0:=(tau)->DifEqTools[Middle]([t,phi(t)],Pi/5,tau,1000,S);
```

На Рис. 9 и 10 показаны графики функции $\phi(t)$ и ее среднего значения.

Выделим теперь осциллирующую часть функции $\phi(t)$ с помощью команды и построим график осцилляций (Рис. 11):

```
> plot(DifEqTools[Osc]([t,phi(t)],Pi/5,tau,1000,S),tau=-2*Pi..2*Pi);
```

Построим также график среднеквадратичных флуктуаций этой функции (Рис. 12):

```
> d2phi:=(tau)->DifEqTools[OscQuadr]([t,phi(t)],Pi/50,tau,100,S);
```

```
> plot(d2phi(tau),tau=-2*Pi..2*Pi);
```

Аналогично предыдущим определены и программные процедуры усреднения функций численных решений нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

1. `DifEqTools[NumericDsolveMiddle](Eqs,ICs,metod,ff,T,tau,N,k);`
2. `DifEqTools[NumericDsolveOsc](Eqs,ICs,metod,ff,T,tau,N,k);`
3. `DifEqTools[NumericDsolveQuadr](Eqs,ICs,metod,ff,T,tau,N,k),`

где `Eqs` – упорядоченная система ОДУ, `ICs` – упорядоченная система начальных условий, `metod` – упорядоченная система опций метода интегрирования ОДУ, остальные параметры команд такие же, как и для команд усреднения заданных функций.

Покажем реализацию команд на примере уравнения свободных колебаний.

```
> Eq_osc:=[diff(x(t),t$2)=-x(t)];
```

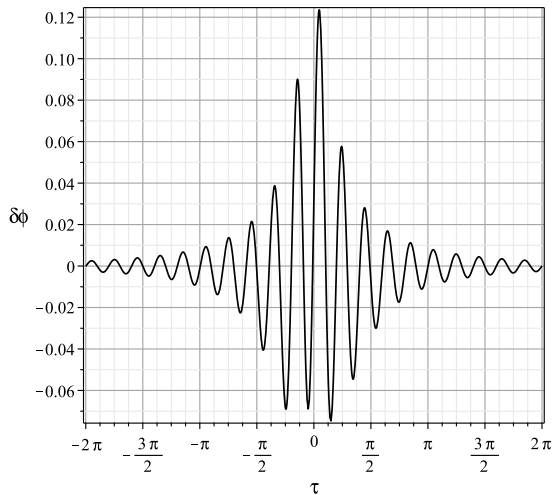


Рис. 11. График функции $\phi(\tau)$ (8).

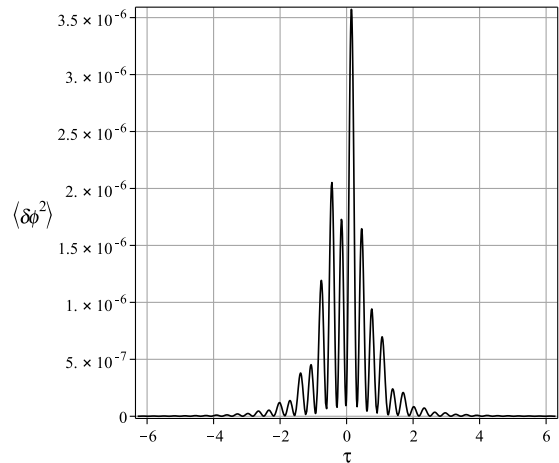


Рис. 12. Среднеквадратичные флуктуации функции $\phi(\tau)$.

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -x(t) \quad (9)$$

с начальными условиями

```
> IC_osc := [x(0)=0, D(x)(0)=1];
```

$$IC_osc := [x(0) = 0, D(x)(0) = 1] \quad (10)$$

Определим среднее на численном решении задачи Коши (9) – (10), заодно продемонстрировав возможность манипуляции параметрами опции `method`.

```
> G := (tau) -> DifEqTools[NumericDsolveMiddle](Eq_osc, IC_osc, [method=rkf45,
  maxfun=50000, abserr = 1.*10^(-7), relerr = 1.*10^(-7)]),
[t, sin(x(t))], 2*Pi, tau, 1000, S);
```

Увеличим точность решения ОДУ на порядок

```
> G1 := (tau) -> DifEqTools[NumericDsolveMiddle](Eq_osc, IC_osc, [method=dverk78,
  maxfun=50000, abserr = 1.*10^(-8), relerr = 1.*10^(-8)]),
[t, sin(x(t))], 2*Pi, tau, 1000, S);
```

и построим соответствующие графики, учитывая тот факт, что точным решением указанной задачи Коши является $x(t) = \sin(t)$.

```
> GM1 := plot(G(tau), tau=0..4*Pi, labels=[tau, phi__0], label font=[TIMES, ROMAN, 14],
  color=black);
plot(G1(tau), tau=0..4*Pi, labels=[tau, phi__0], label font=[TIMES, ROMAN, 14]);
```

Поскольку решение является строго периодической (и даже гармонической) функцией, среднее его значение должно равняться нулю. Приведенные на Рис. 13 – 14 графики как раз и показывают это. При этом увеличение абсолютной и относительной точности численного решения ОДУ на 1 порядок дает почти на 2 порядка лучший результат.

Вследствие равенства нулю среднего значения функции ее флуктуации должны совпадать со значениями самой функции. Проверим это.

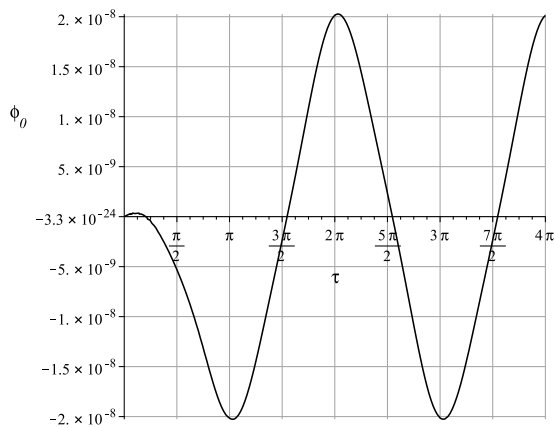


Рис. 13. Среднее значение численного решения уравнения свободных колебаний, вычисленного с точностью 10^{-7} .

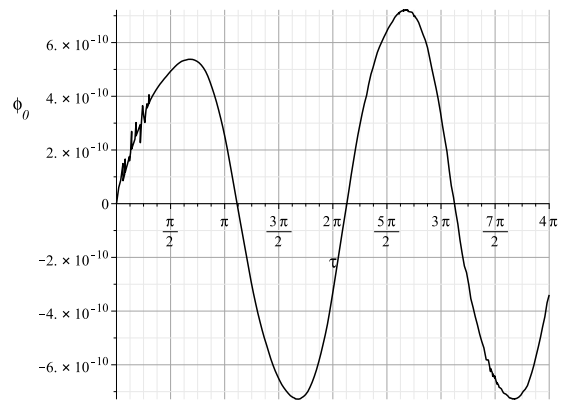


Рис. 14. Среднее значение численного решения уравнения свободных колебаний, вычисленного с точностью 10^{-8} .

```
> GSin1:=plot(sin(sin(t)),t=0..3*Pi,color=black,linestyle=dashdot);
plots[display](GSin1,0sGM1);
```

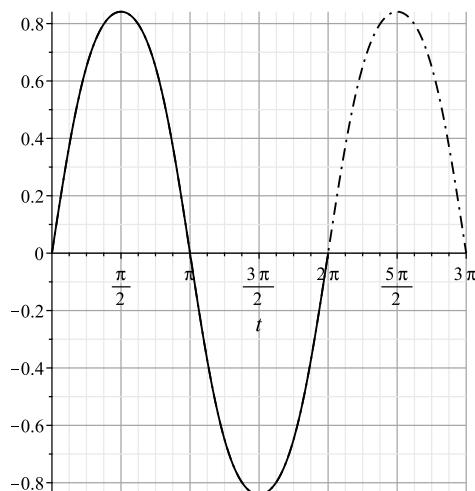


Рис. 15. Совмещение графиков осцилляции численного решения (сплошная линия) и графика $\sin t$ – пунктирная линия.

Мы видим полное совпадение графиков.

3. Приложения к нелинейным механическим системам

Как известно, колебания связанных систем вблизи точки равновесия являются одним из наиболее фундаментальных их свойств. Присущи такие колебания и нелинейным динамическим системам. Поэтому для анализа таких динамических систем важно выделить быстро осциллирующую и медленно меняющуюся части. Аналитически такая задача решается методом Боголюбова - Крылова [9]. Обычно осциллирующие части динамических переменных связывают с кинетической энергией колебаний, а медленно меняющиеся части – с внутренней энергией системы.

Этому подходу соответствует и квантово - механическая / полевая картина, в которой колебания связываются с квазичастицами, а медленно меняющаяся часть – с вакуумом. Созданные нами программные процедуры позволяют проводить соответствующие операции усреднения и выделения быстрых осцилляций.

3.1. *Нелинейные одномерные колебания в потенциальном поле Хиггса и Хиггсов механизм спонтанного нарушения симметрии*

Важнейшим примером нелинейной механической системы является модель одномерных механических колебаний в поле потенциала Хиггса, представляющем потенциал 4-го порядка (см., например, [5], [6]). Соответствующее уравнение колебаний имеет вид¹:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} - x + x^3 = 0, \quad (11)$$

где β – коэффициент трения. Потенциал Хиггса описывается симметричной потенциальной ямой с двумя минимумами и одним центральным максимумом, что позволяет описать простейший механизм Хиггса спонтанного нарушения симметрии. Последнее заключается в том, что в результате диссипации энергии свободные колебания системы со временем затухают, в результате чего система оказывается в одном из минимумов (левом или правом).

4. Фазовые траектории

Покажем, как с помощью простых команд можно реализовать конфигурационную и фазовую траектории нелинейных колебаний. Введем уравнение (11) с коэффициентом $\beta = 0.05$.

```
> EqNon := [(D@@2)(x)(t) = -0.05*D(x)(t) + x(t) - x(t)^3];
```

$$EqNon := [(D@@2)(x)(t) = -0.05D(x)(t) + x(t) - x(t)^3] \quad (12)$$

Введем теперь начальные условия задачи:

```
> IC := [x(0) = 0, D(x)(0) = 5];
```

$$IC := [x(0) = 0, (D(x))(0) = 5] \quad (13)$$

и, наконец, с помощью команд GraphConf1 и GraphPhase2d построим конфигурационную и фазовую траектории системы (Рис. 16, 17)²:

```
> DifeqTools[GraphConf1](EqNon, IC, [method=rkf45], [1, 0], 48*Pi, navy);
```

```
> T := time();
```

```
> DifeqTools[GraphPhase2d](EqNon, IC, [method=rkf45, maxfun=1000000],  
  [[1, 0], [1, 1]], 32*Pi, COLOR(RGB, 0.0, 0, 0.5));
```

```
time() - T;
```

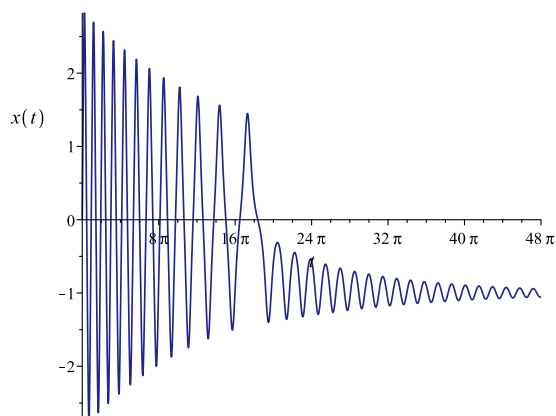


Рис. 16. Конфигурационная траектория динамической системы (12) с начальными условиями (13). Интегрирование проведено методом rkf45. Имена координатных осей сгенерированы автоматически. Нарушение симметрии налево происходит в момент времени $t \sim 16\pi$.

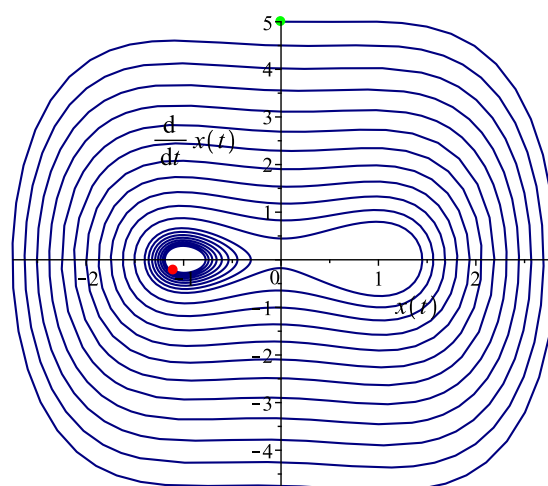


Рис. 17. Фазовая траектория динамической системы (12) с начальными условиями (13). Интегрирование проведено методом rkf45 с опцией $\text{maxfun}=1000000$. Зеленой точкой автоматически помечается начало траектории, красной ее конец.

Усреднение колебаний по быстрым осцилляциям

Приведенные на Рис. 16, 17 графики показывают возможность и необходимость исследования осцилляций нелинейных колебаний. Действительно, во-первых, графики обнаруживают колебательный характер движения, а, во-вторых, амплитуда этих колебаний падает достаточно медленно, кроме критического участка в области нарушения симметрии. Вычислим средние по численному решению уравнения (12) с помощью описанной выше программной процедуры (см. Рис. 18 и 19.)

```
> GN:=(tau)->DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqNon,IC,[method=dverk78,
maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6),
relerr = 1.*10^(-6)], [t,x(t)],Pi,tau,100,S);

> GN(1);GN(100);
      -0.15527961939736498
      -0.9713948576870406

> GN_middle:=plot(GN(tau),tau=0..48*Pi,labels=[t,x__0(t)],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],color=black);

> GN_Osc:=(tau)->DifEqTools[NumericDsolveOsc](EqNon,IC,[method=dverk78,
maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)], [t,x(t)],
Pi,tau,100,S);
```

1 Уравнение колебаний записано в безразмерных переменных, к которым можно перейти с помощью масштабных преобразований.

2 Подключена функция `time` для автоматического вычисления времени исполнения команды.

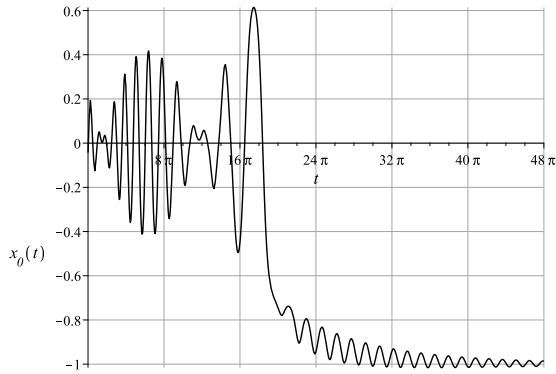


Рис. 18. Среднее от амплитуды колебаний задачи Коши (12) – (13). Усреднение проведено по длительности π .

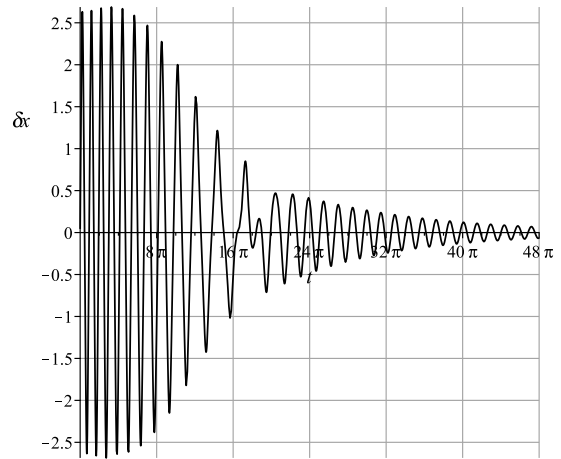


Рис. 19. Выделение осцилляций колебательного процесса, описываемого задачей Коши (12) – (13).

5. Приложения к космологии

5.1. Стандартная космологическая модель

Как известно, для пространственно-плоской космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14)$$

система уравнений Эйнштейна с космологическим членом λ и Клейна-Гордона принимает вид ($\dot{f} \equiv df/dt$):

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \lambda \Rightarrow \\ H^2 \equiv \dot{\Lambda}^2 &= \frac{1}{3}(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \lambda), \end{aligned} \quad (15)$$

– единственное нетривиальное уравнение Эйнштейна и уравнение классического массивного скалярного поля:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + m^2\Phi = 0, \quad (16)$$

где $H(t)$ - постоянная Хаббла

$$\Lambda = \ln(a); \quad \frac{\dot{a}}{a} \equiv \dot{\Lambda} = H(t), \quad (17)$$

При этом тензор энергии – импульса скалярного поля имеет структуру тензора энергии – импульса изотропной жидкости с плотностью энергии и давлением:

$$\varepsilon = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2); \quad p = \frac{1}{8\pi}(\dot{\Phi}^2 - m^2\Phi^2). \quad (18)$$

5.2. Приведение системы уравнений к нормальному виду

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна (4) через функции Φ , $\dot{\Phi}$, переходя к безразмерному комптоновскому времени:

$$mt = \tau; \quad (m \neq 0)$$

и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(t)$, приведем систему уравнений поля (4), (16) к безразмерному виду.

5.3. Космологические фазовые траектории скалярного поля

Итак, запишем уравнение поля (16) в виде:

$$\begin{aligned} > \text{EqF} := (\text{lambda}) \rightarrow [(\text{D}^2)(\Phi)(\tau) = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\text{lambda} + 8\pi * \\ & ((\text{D}(\Phi)(\tau))^2 + \Phi(\tau)^2)} * \text{D}(\Phi)(\tau) - \Phi(\tau)]; \end{aligned}$$

$$\text{EqF} := \lambda \rightarrow \left[\text{D}^{(2)}(\Phi)(\tau) = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\lambda + 8\pi (\text{D}(\Phi)(\tau)^2 + \Phi(\tau)^2)} \text{D}(\Phi)(\tau) - \Phi(\tau) \right] \quad (19)$$

$$> \text{convert}(\text{EqF}(\text{lambda}), \text{diff});$$

$$\left[\frac{d^2\Phi(\tau)}{d\tau^2} = -\sqrt{3\pi} \sqrt{\lambda + 8\pi \left[\left(\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \Phi(\tau)^2 \right]} \frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} - \Phi(\tau) \right] \quad (20)$$

Зададим далее начальные условия

$$> \text{ICF} := [\Phi(0) = 1, \text{D}(\Phi)(0) = 0];$$

$$\text{ICF} := [\Phi(0) = 1, \text{D}(\Phi)(0) = 0] \quad (21)$$

и выведем фазовую траекторию скалярного поля на большом временном интервале $t \in [0, 1000]$ при $\lambda = 0,001$ с помощью команды `DifEqTools[GraphPhase2d]`:

$$\begin{aligned} > \text{DifEqTools}[\text{GraphPhase2d}] (\text{EqF}(0.001), \text{ICF}, [\text{method} = \text{rkf45}], \\ & [[1, 0], [1, 1]], [0, 1000], \text{COLOR}(\text{RGB}, 0, 0, 0.5)); \end{aligned}$$

Выведем теперь поздний участок эволюции скалярного поля на временном интервале $t \in [900, 2000]$ при $\lambda = 0,001$:

$$\begin{aligned} > \text{DifEqTools}[\text{GraphPhase2d}] (\text{EqF}(0.001), \text{ICF}, [\text{method} = \text{rkf45}], [[1, 0], [1, 1]], \\ & [900, 2000], \text{COLOR}(\text{RGB}, 0, 0, 0.5)); \end{aligned}$$

и на временном интервале $t \in [900, 1000]$ при $\lambda = 0,001$:

$$\begin{aligned} > \text{DifEqTools}[\text{GraphPhase2d}] (\text{EqF}(0.001), \text{ICF}, [\text{method} = \text{rkf45}], [[1, 0], [1, 1]], \\ & [900, 1000], \text{COLOR}(\text{RGB}, 0, 0, 0.5)); \end{aligned}$$

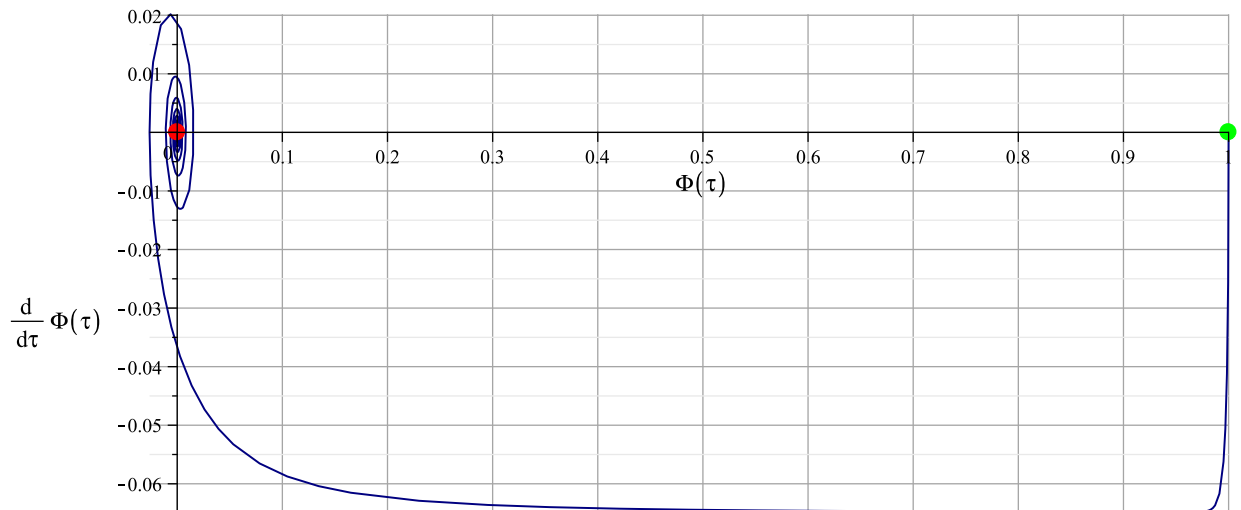


Рис. 20. Космологическая фазовая траектория классического скалярного поля на больших временных интервалах $\tau = 0 \div 10^3$. Зеленой точкой автоматически отмечено начало траектории, красной – ее конец; названия координатных осей генерируются автоматически.

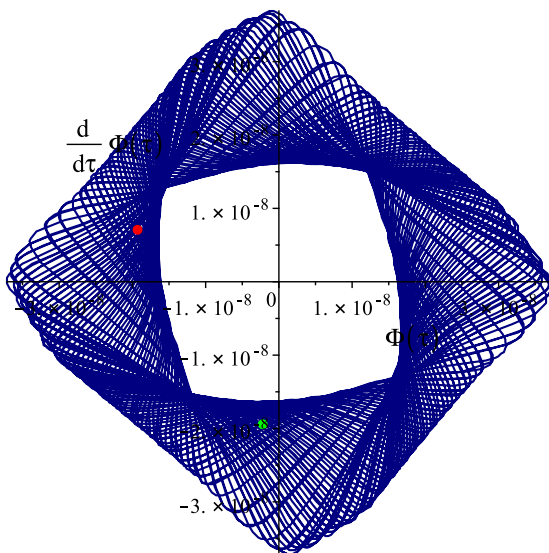


Рис. 21. Метод rkf45.

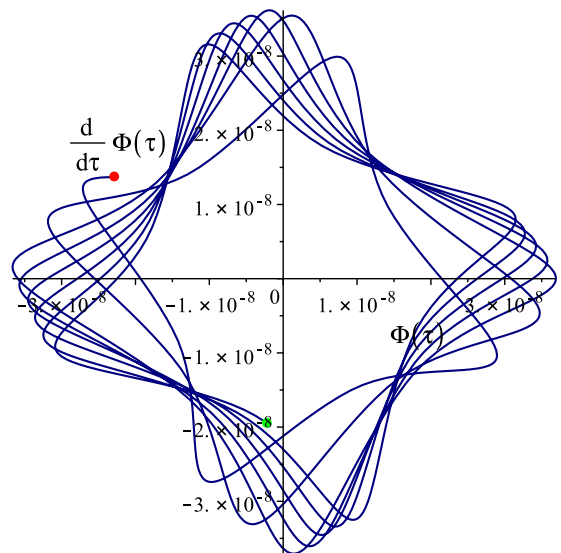


Рис. 22. Метод rkf45.

Странное поведение решения на поздних временах эволюции свидетельствует о недостаточной точности метода численного интегрирования rkf45. Заменяв метод интегрирования на более точный – метод Рунге - Кутты 7-8 порядков, получим правильное решение [7]:

```
> DifEqTools[GraphPhase2d](EqF(0.001),ICF,[method=dverk78],[[1,0],[1,1]],
  [9000,10000],COLOR(RGB,0,0,0.5));
```

```
> DifEqTools[GraphPhase2d](EqF(0),ICF,[method=dverk78],[[1,0],[1,1]],
  [99900,100000],COLOR(RGB,0,0,0.5));
```

Заметим, что на поздних временах эволюции $\tau \gg 1$, во-первых,

$$|\Phi| \approx |\dot{\Phi}| \quad (22)$$

и, во-вторых, эти величины весьма медленно убывают. Это дало повод предположить, что при $\tau \rightarrow +\infty$ система имеет конечный цикл [8]. Для выяснения поведения системы на конечных стадиях эволюции и понадобился более точный численный анализ, который был осуществлен указанными выше средствами пакета `DifEqTools` [7].

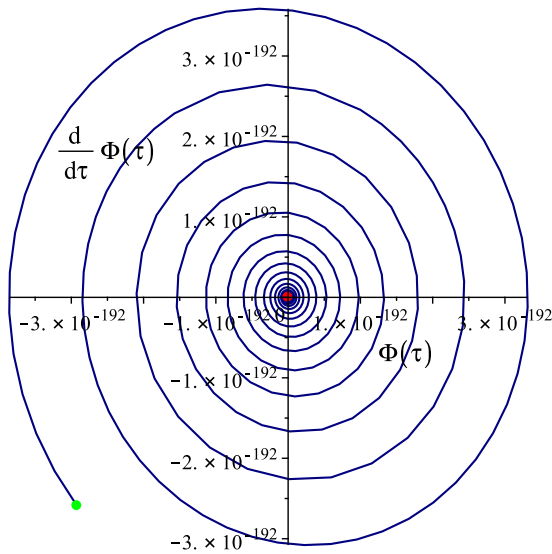


Рис. 23. Метод `dverk78`.

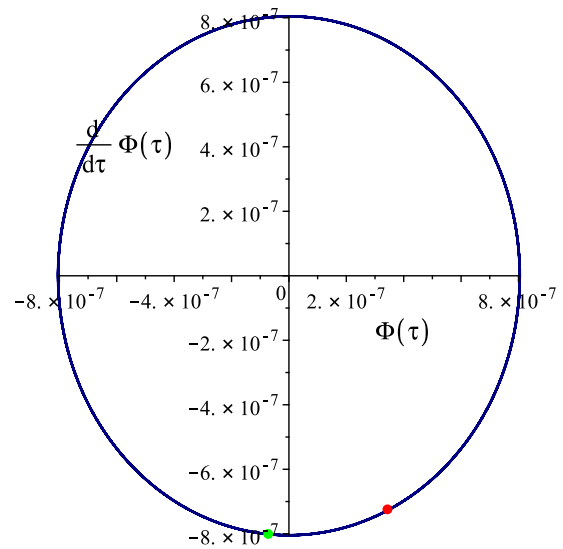


Рис. 24. Метод `dverk78`.

5.4. Усреднение космологического скалярного поля по быстрым осцилляциям

Таким образом, космологическая модель, основанная на классическом скалярном поле, обнаруживает типичные черты нелинейной динамической системы со слабой диссипацией энергии: быстрые осцилляции, с одной стороны, и их медленное затухание – с другой. Это говорит о необходимости анализа средних величин и выделения быстро осциллирующей части. Именно с этой целью и были созданы описанные выше программные процедуры усреднения.

Вычислим сначала средние величины динамических переменных $\langle \Phi(t) \rangle \equiv \Phi_0(t)$ и $\langle Z(t) \rangle \equiv Z_0(t)$ с помощью программных процедур усреднения `DifEqTools[NumericDsolveMiddle]` по интервалу $\tau \in [t - 2\pi, t + 2\pi]$:

```
> CM:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqF(0),ICF,[method=dverk78,
maxfun=500000, abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],
[tau,Phi(tau)],4*Pi,t,100,S);
> GM_middle:=plot(CM(t),t=0..100,labels=[tau,Phi__0(tau)],
labelfont=[TIMES,ROMAN,14],color=black);
> CMZ:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqF(0),ICF,[method=dverk78,
maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],
```

```
[tau,D(Phi)(tau)],4*Pi,t,100,S);
> GMZ_middle:=plot(CMZ(t),t=0..100,labels=[tau,Z__0(tau)],
  labelfont=[TIMES,ROMAN,14],color=black);
```

На Рис. 25 и 25 представлены графики зависимости средних от космологического времени τ . Выделим теперь быстрые осцилляции динамических

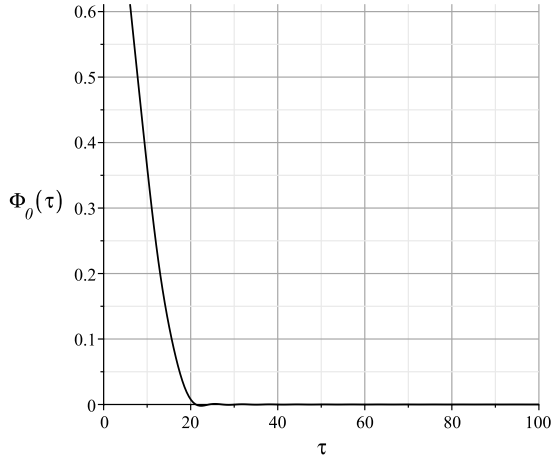


Рис. 25. Среднее значение потенциала скалярного поля, $\Phi(\tau)$, метод dverk78.

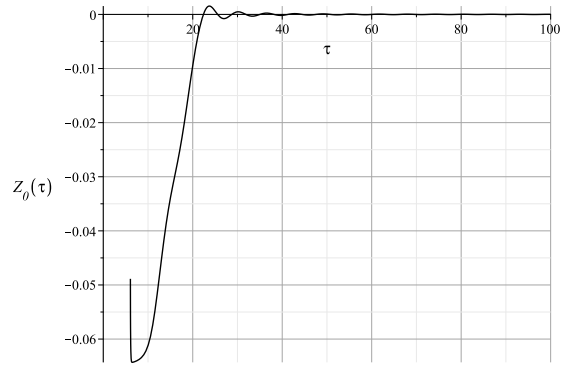


Рис. 26. Среднее значение производной потенциала скалярного поля, $Z = \dot{\Phi}(\tau)$, метод dverk78.

переменных $\delta\Phi(t)$ и $\delta Z(t)$ с помощью программных процедур усреднения `DifEqTools[NumericDsolveOsc]` по интервалу $\tau \in [t - 2\pi, t + 2\pi]$:

```
> CMF_Osc:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveOsc](EqF(0),ICF,[method=dverk78,
  maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],[tau,Phi(tau)],
  4*Pi,t,100,S);
> CMZ_Osc:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveOsc](EqF(0),ICF,[method=dverk78,
  maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],[tau,D(Phi)(tau)],
  4*Pi,t,100,S);
> GCMZ_Osc:=plot(CMZ_Osc(t),t=0..100,labels=[tau,delta Z],
  labelfont=[TIMES,ROMAN,14],color=black);
```

Вычислим теперь среднюю плотность энергии скалярного поля и среднее отношения – *среднее значение показателя баротропы*:

$$\kappa = \left\langle \frac{p}{\varepsilon} \right\rangle \quad (23)$$

по формулам (18).

```
> CME_s:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqF(0),ICF,[method=dverk78,
  maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6), relerr = 1.*10^(-6)],
  [tau,1/(8*Pi)*(D(Phi)(tau)^2+Phi(tau)^2)],4*Pi,t,100,S);
> plot(log[10](CME_s(t)),t=0..100,color=black,axes=BOXED,
  labels=[tau,epsilon__s(tau)]);
```

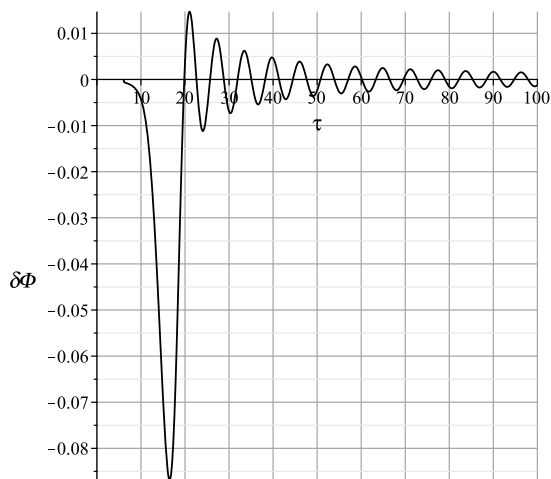



Рис. 27. Осцилляции потенциала скалярного поля, $\delta\Phi(\tau)$, метод dverk78.

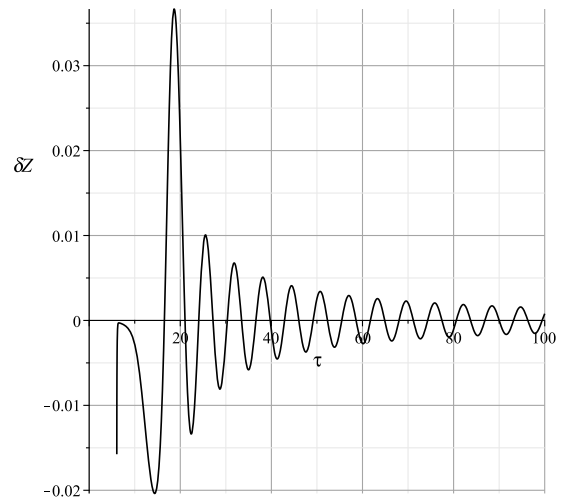


Рис. 28. Осцилляции производной потенциала скалярного поля, $\delta Z(\tau)$, метод dverk78.

```
> CMPE_s:=(t)->DifEqTools[NumericDsolveMiddle](EqF(0),ICF,
[method=dverk78,maxfun=500000,abserr = 1.*10^(-6),
relerr = 1.*10^(-6)],
[tau,(D(Phi)(tau)^2-Phi(tau)^2)/(D(Phi)(tau)^2+Phi(tau)^2)],4*Pi,t,100,S);
> plot(CMPE_s(t),t=0..1000,color=black,axes=BOXED,
labels=[tau,p_s/epsilon_s]);
```

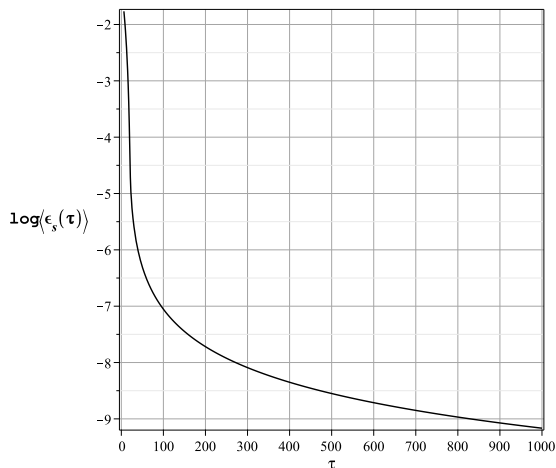


Рис. 29. Среднее значение плотности энергии скалярного поля.

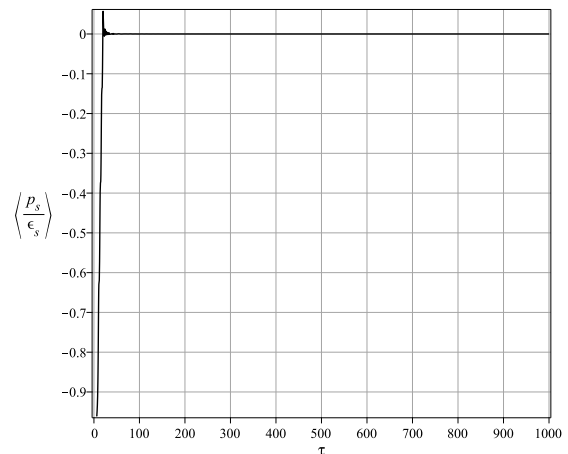


Рис. 30. Среднее значение показателя баротропы классического скалярного поля.

Как видно из графика на Рис. 30, показатель баротропы очень быстро выходит на нулевое значение. Это говорит, с одной стороны, о том, что с макроскопической точки зрения уравнение состояния скалярного поля становится нерелятивистским, а с другой стороны, – что средние значения квадрата потенциала и его производной

со временем сближаются [10], [11]:

$$\langle \Phi^2(\tau) \rangle = \langle Z^2(\tau) \rangle, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (24)$$

6. Заключение

Проведенные исследования показали важность развития численно - аналитических методов математического и компьютерного моделирования нелинейных динамических систем, в том числе, высокой размерности. В частности, применение этих методов позволило установить ряд новых свойств космологических моделей, основанных на скалярных полях, и эффективно их исследовать.

Литература

1. Игнатъев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып. 4(17). – С. 78–105.
2. Игнатъев Ю.Г. Численно - аналитические методы математического моделирования нелинейных динамических систем В СКМ Maple. II. Автоматизация математического анализа нелинейных математических моделей / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – Вып. 2(19). – С. 74–83.
3. Игнатъев Ю.Г., Самигуллина А.Р. Программный комплекс численно - аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып. 4(17). – С. 147–148.
4. Игнатъев Ю.Г. Программный комплекс численно-аналитического моделирования нелинейных динамических систем в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Пакет программ. – Режим доступа: <http://www.stfi.ru/ru/software.html>.
5. Игнатъев Ю.Г. Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple. Лекции для школы по математическому моделированию / Ю.Г. Игнатъев. – Казань: Казанский университет. – 2014. – 298 с.
6. Игнатъев Ю.Г. Математические основы физики: Математические модели теоретической физики с примерами решения задач в СКМ Maple / Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов. – Казань: Казанский университет, 2016. – 264 с. – Режим доступа: http://kpfu.ru/staff_files/F1979419611/MMTF.pdf
7. Игнатъев Ю.Г. Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. II. Сравнительный анализ моделей с классическим и фантомным полями / Ю.Г. Игнатъев, А.А. Агафонов // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2017. – Вып. 1(18). – С. 46–65.
8. Журавлев В.М. Качественный анализ космологических моделей со скалярным полем / В.М. Журавлев // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2016. – Вып. 4(17). – С. 38–51.
9. Боголюбов Н.Н. Собрание научных трудов. В 12 томах. Том 3. Математика и нелинейная механика. Асимптотические методы / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М: Наука, 2005. – 494 с.
10. Игнатъев Ю.Г. Усреднение уравнений стандартной космологической модели по быстрым осцилляциям / Ю.Г. Игнатъев, А.Р. Самигуллина // Изв. вузов. Физика. – 2017. – Т. 60, № 7. – С. 77–83.
11. Ignat'ev Yu.G. A macroscopic view to the standard cosmological model / Yu.G. Ignat'ev, D.Yu. Ignatyev, A.R. Samigullina // arXiv:1705.05000 [gr-qc].

AUTOMATED VISUALIZATION OF NON-LINEAR DYNAMIC SYSTEMS AND ITS APPLICATIONS
TO MECHANICS AND COSMOLOGY

Yu.G. Ignatev, A.R. Samigullina

Author's program procedures for automated research and visualization of nonlinear dynamical systems and their applications to the problems of mechanics and cosmology are described. In particular, procedures of the automated averaging of rapidly oscillating numerical solutions are described.

Keywords: nonlinear dynamical systems, mathematical modeling, qualitative theory of differential equations.

УДК 514.822; 27.35

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СКМ MAPLE**

А.Р. Самигуллина¹

¹ *alsu_sam@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Описаны инструменты автоматизированного решения и визуализации численных решений систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, разрешенных относительно старших производных.

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, математическое моделирование, качественная теория дифференциальных уравнений.

Программные процедуры автоматизированной визуализации нелинейных динамических систем в пакете DifEqTools

1. Сервисные программные процедуры автоматизированного построения графиков функций численных решений

Пусть задана задача Коши для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно старших производных:

$$\begin{aligned} y_i^{(n_i)} &= F_i(y_1, \dots, y_N, y_1', \dots, y_N', y_1'', \dots, y_N'', \dots, y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_1^{(n_N-1)}, t); \quad (i = \overline{1, N}), \\ \Rightarrow y_i^{(n_i)} &= F_i(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $y^{(n)} = d^n y / dt^n$ – обозначение n-той производной функции $y(t)$ по независимой переменной t , временной переменной¹, а F_i – непрерывно-дифференцируемые функции своих переменных. Будем в дальнейшем полагать выполненными начальными условиями для системы (1):

$$y_i^{(k)}(t) \Big|_{t=t_0} = C_i^k; \quad (k = \overline{1, n_i - 1}; i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

соответствующие задаче Коши, где $C_i^k \equiv y_i^{(k)}(t_0)$ – начальные значения производных k-го порядка функций $y_i(t)$.

¹ Хотя это может быть и не обязательно физическое время.