

論文審査の要旨及び担当者

No.1

報告番号	甲 第 号	氏 名	高梨 耕作
論文審査担当者	主 査	：大垣 昌夫（慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.）	
	副 査	：新井 拓児（慶應義塾大学経済学部教授 博士(理学)）	
		：中妻 照雄（慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.）	
	面接担当	：河井 啓希（慶應義塾大学経済学部教授 商学修士）	
		：中嶋 亮（慶應義塾大学経済学部教授 Ph.D.）	
（論文審査の要旨）			
論文題名：Variational Convergence and Their Applications to Econometrics and Statistics			
1. 論文の概要			
<p>本論文の主たる目的は、ノンパラメトリックな統計モデルの漸近理論を整備し、従来の手法では取り扱うことのできなかつた問題への応用の道を拓くことである。「ノンパラメトリックである」とはパラメータ空間が無限次元となることを意味する。この種の推定法の性質については Empirical Process の理論として計量経済学のみならず広く統計学の各分野において研究がなされてきた。この従来の理論の枠組みにおいては、統計モデルを推定する際に使われる目的関数がパラメータ空間上で一様収束することを仮定するのが通例である。しかしながら、標準的な一様ノルムでは制約が強すぎるために一様収束を容易に示せない問題が存在することが知られている。そのような例として、まず第1に無限次元空間におけるコンパクト性の欠如の問題が挙げられる。パラメータ空間が有限次元であるパラメトリックな統計モデルに対しては、一様収束のためにパラメータ空間のコンパクト性を想定することが多い。しかし、無限次元空間においては有限次元空間のような形ではコンパクト性を扱えないため、ノンパラメトリックな統計モデルに対してコンパクト性によって一様収束を示すことは一般にはできない。第2の例としては制約付き推定問題がある。制約付き M 推定において目的関数に最適化問題の罰則項を加えると、目的関数の値が無限に発散しうるため、一様収束をいうことはできない。第3の例に微分作用素を含んだ目的関数がある。この場合には目的関数が凸であっても滑らかさが失われるため、一様収束を示すのは難しくなる。</p> <p>本論文は、従来よりも弱い位相（Mosco 位相）での収束を利用して、上述の従来手法が適用できない条件下でも、ノンパラメトリック推定量の一致性、漸近正規性、そして尤度比検定の漸近分布などを導出することに成功した。結果として、凸関数に限るが、微分不可能な点を含む目的関数、微分作用素が含まれた目的関数による M 推定の漸近理論を幅広く扱うことができることを示した。</p>			

本論文は8つの章から構成されている。第1章は導入、第2・3章の前半は数学的準備に費やされており、後半において、抽象的な一般理論を証明している。一方、第4章～第8章において、計量経済学・数理統計学への応用が扱われている。以下では本論文の核心部分である第4章～第8章の概要とその評価を手短に述べたい。

第4章では回帰係数が無限次元であるときの凸である目的関数を用いた関数線形分位点回帰における Mosco 位相での確率収束と法則収束を示している。Mosco 位相は一様ノルムより弱い位相であり、目的関数の Mosco 位相での収束すなわち Mosco 収束を示すことで、目的関数の極小点の真の値への収束を通して分位点回帰推定量の一致性を証明できる。無限次元での漸近正規性には、目的関数の極限での2次テイラー展開を求め、さらに無限次元の「Hessian 作用素」が可逆であることを示さなければならない。これは非常に困難であるが、本章は Mosco 位相の性質を活用することで2次テイラー展開および Hessian 作用素の可逆性を示して漸近正規性を証明するとともに、尤度比検定統計量の漸近分布の導出にも成功した。本章の成果は分位点回帰に留まらず、もっと一般的な M 推定の一致性、漸近正規性および尤度比検定の漸近分布の導出にも適用できるものであり、幅広い応用が期待されるものである。

第5章では Hansen and Scheinkman (1995) (以下、HS) によって提案されたマルコフ過程の拡散係数の一般化モーメント法(GMM)を用いたノンパラメトリック推定を再検討している。HS の GMM でのモーメント条件は、(a)任意の可積分関数に(対称)マルコフ過程の生成作用素を掛けたものと(b)1期間の半群作用素と生成作用素の可換性を用いたもので構成される。このとき推定すべき無限次元のパラメータは生成作用素の中にあり、微分作用素に係る形になっている。したがって、HS の提示した問題は目的関数に微分作用素を含む場合のノンパラメトリック推定問題の一例となっている。しかしながら HS では拡散過程の係数の GMM 推定の手法が提案されただけであり、その漸近的性質は長らく研究されてこなかった。実に20年の歳月を経て、HS による GMM 推定量の一致性と漸近正規性、さらには生成作用素の識別条件とその固有値の漸近的性質までも明らかにしたのが本章の大きな貢献である。しかし、今後の課題もある。本章では多変量の生成作用素の係数を推定しているが、多変量マルコフ過程の場合、生成作用素の係数と確率微分方程式の拡散係数の間に一対一の対応は存在しない。例えば仮に経済理論などにより導かれるモーメント条件を別途導入できるのであれば、これらは識別可能となるとともに経済学的な解釈も自然とできるようになるため、応用先の広がることが期待される。

第6章では偏微分方程式に基づくカーネル密度推定法を提案している。カーネル密度推定で広く使われる Gaussian カーネル(正規分布の確率密度関数)は偏微分方程式の一種である熱伝導方程式の解として特徴づけられる。そして、このようなカーネルを解として持つ偏微分方程式を利用し、その解を求めることでカーネル密度推定と同等の推定量を構築する方法が Botev et al. (2010)によって提案されている。この方法は、密度関数を推定したい分布の台が境界を持つとき

でも境界上で密度関数の一致推定量が得られるという利点を持つ。そこで本章では、Gaussianカーネルよりも裾の厚いカーネルによる密度関数のノンパラメトリック推定を目指して、Lévy過程を利用したカーネル密度推定法を提案している。そして、この推定量のバイアスと分散の構造を明らかにするとともに最適なバンド幅の選択法も提案している。本章の問題においてもマルコフ過程の2次形式という形で微分作用素を含んだ目的関数が現れるため、Mosco収束が証明に威力を発揮する。

第7章では統計的推定問題から一旦離れて近似された政策関数の下での状態変数の不変測度の収束を論じている。マクロ経済分析などでは、解析解を持たないモデルに対して数値的に近似された政策関数で分析を行うことが通例である。その際、近似された政策関数に基づいて得られた不変分布の近似精度の評価が必要となるが、Santos and Peralta-Alva (2005)などの既存研究では状態変数およびショック項にコンパクト性が仮定されてきた。本章では、このコンパクト性を緩めて正規分布など広く使われる分布にも適用できるように拡張を行っている。

第8章では数理統計学の問題に戻り、推定量の許容性とマルコフ過程の再帰性の関連を論じている。統計量の許容性がある種のマルコフ過程の再帰性と密接な関係にあることが知られている。例えば、Brown (1971)は正規分布の平均の推定量の3次元以上での非許容性と2次元以下での許容性がブラウン運動の3次元以上での過渡性と2次元以下での再帰性に対応していることを示した。本章はBrown (1971)の結果を拡張し、もっと一般的な仮定の下においてベイズ的推定量の許容性と尤度関数のマルコフ過程の再帰性の間に同様の関係が成り立つことを示している。そして、その応用としてCauchy分布の最尤推定量が2次元以上で非許容性となることを証明した。

2. 論文の評価

実証分析において広く使われるパラメトリックな統計モデルが正しく特定化されていることは稀であり、モデルの特定化誤差を含むと考えるのが自然である。そのためパラメトリック推定法に替わる様々なノンパラメトリック推定法が開発されてきたが、ノンパラメトリック推定ではパラメータ空間が無次元次元となって数学的扱いの難易度が上がるため、その漸近理論はまだ十分整備されているとは言いがたい。この状況を鑑みると、一様収束より弱いMosco収束に着目し、これに基づくノンパラメトリック推定の漸近理論に関する一般的結果を導出するという本論文の着眼点は正鵠を射たものであり、マルコフ過程のノンパラメトリック推定や偏微分方程式を利用したカーネル関数構成などに関する成果は当該分野に一石を投じるものとなると大いに期待される。特に目的関数が微分作用素を含むM-推定の理論研究は独創的かつ先進的であり、将来

論文審査の要旨

No.4

当該分野の先駆的論文として評価が高まる可能性を秘めている。さらに付け加えるならば、本論文が提案する手法は、計量経済学のみならず機械学習など工学分野においても重要なツールの一つとなりうる汎用性の高いものでもある。なお第4章の元となった分位点回帰に関する研究成果は査読付き論文として **Keio Economic Studies** において公刊される予定である。

しかしながら本論文に問題点がないわけではない。高度に一般化された問題設定を行っているため、実際の実証研究への利用可能性が読者に見えづらいという指摘が一部の審査委員から出された。もう少し具体例（例えば離散選択モデルやファイナンスへの応用など）を盛り込んでもよかったのではという声もあった。また、あまりに多くの要素を詰め込みすぎているのではないかと、もっと焦点を絞る方が論文としての質が高まるのではないかとという批判も出された。但し、これらの指摘された課題は本論文の学術的な価値や貢献を損なうものではなく、ここで提案された諸手法が経済の実証分析に幅広く利用されるための今後の検討課題であるといえよう。

以上の所見から、本論文の内容は計量経済学、数理統計学と統計的意思決定理論への応用という点において極めて新規性のある研究成果であり、審査委員会は全員一致で本論文が博士（経済学）の学位を授与するにふさわしい内容のものであると判断した。