

**Università degli studi di Pisa**

*Dipartimento di Matematica*

# **Omologia di Lee per Link H-sottili e Invarianti per Concordanza**



CANDIDATO  
**Alberto Cavallo**

RELATORE  
**Prof. Paolo Lisca**  
CONTRORELATORE  
**Prof. Riccardo Benedetti**

ANNO ACCADEMICO 2012/13

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>1 Teoria dei nodi</b>	<b>8</b>
1.1 Definizione ed equivalenza di link . . . . .	8
1.2 Superfici e matrici di Seifert . . . . .	12
1.3 Altri invarianti e polinomio di Jones . . . . .	14
1.4 Nodi primi e somme connesse . . . . .	16
1.5 Link alternanti . . . . .	18
1.6 Cobordismi di link . . . . .	20
1.7 Tavola dei nodi . . . . .	21
<b>2 Omologia di Khovanov</b>	<b>24</b>
2.1 Cubi n-dimensionali . . . . .	24
2.2 Categorificazione del polinomio di Jones . . . . .	25
2.3 Invarianza per mosse di Reidemeister . . . . .	29
2.4 Risultati generali . . . . .	34
<b>3 H-sottigliezza di link alternanti</b>	<b>40</b>
3.1 Una congettura dimostrata . . . . .	40
3.2 Preliminari . . . . .	41
3.2.1 Alcune notazioni e sequenze esatte . . . . .	41
3.2.2 Proprietà di colorazioni di diagrammi alternanti . . . . .	41
3.2.3 Segnatura di un link alternante non split . . . . .	49
3.3 Dimostrazione del teorema . . . . .	50
<b>4 TQFT e teorie omologiche di link: un endomorfismo di <math>H(L)</math></b>	<b>54</b>
4.1 E allora algebra! . . . . .	54
4.2 Omologia di Lee . . . . .	61
4.2.1 Motivazioni . . . . .	61
4.2.2 Definizione del morfismo $\Phi$ . . . . .	62
4.2.3 Una nuova TQFT . . . . .	66
4.3 La mossa del cavallo . . . . .	68
4.3.1 Calcolo di $H_{Lee}(L)$ . . . . .	68
4.3.2 La prova . . . . .	76

4.4	Link quasi-alternanti . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Una nuova struttura per l'omologia di Lee</b>	<b>82</b>
5.1	Filtrazioni . . . . .	82
5.2	L'invariante di John Pardon per i link . . . . .	84
5.2.1	Definizione . . . . .	84
5.2.2	Proprietà elementari di $d_L$ . . . . .	84
5.2.3	Proprietà meno elementari e link H-sottili . . . . .	87
5.3	Relazione con $s(L)$ . . . . .	90
5.3.1	L'invariante di Rasmussen . . . . .	90
5.3.2	Un'altra classe di link: i link pseudo-sottili . . . . .	92
5.3.3	Approfondimenti sulla somma connessa di link . . . . .	95
5.4	Stime vecchie e stime nuove . . . . .	97
5.5	Link torici . . . . .	102
5.6	Alcuni link pretzel . . . . .	105
<b>6</b>	<b><math>s(L)</math>, <math>d_L</math> e la concordanza</b>	<b>108</b>
6.1	Cobordismi, mosse di Morse e funtorialità . . . . .	108
6.2	Unione simmetrica di link . . . . .	112
6.3	Genere slice . . . . .	113
6.4	Nuovi risultati sui cobordismi forti . . . . .	119
6.5	Conclusioni e idee . . . . .	127
	<b>Bibliografia</b>	<b>129</b>

# Elenco delle figure

1.1	Nodo trifoglio in $S^3$ e sua proiezione su $S^2$ . . . . .	9
1.2	Mosse di Reidemeister . . . . .	10
1.3	Nodo trifoglio orientato . . . . .	11
1.4	Nodo figura otto e suo riflesso . . . . .	11
1.5	Superficie orientabile di genere $g$ con $n$ buchi . . . . .	12
1.6	Somma connessa tra nodi trifoglio e figura otto . . . . .	17
1.7	Diagramma ridotto . . . . .	19
1.8	Tavola dei nodi . . . . .	21
2.1	Cubo delle risoluzioni del nodo $3_1$ per il polinomio di Jones	25
2.2	Cubo delle risoluzioni del nodo $3_1$ per l'omologia di Khovanov	27
2.3	Diagramma per $K_1 \sqcup K_2, K_1 \# K_2$ e $K_1 \# (-K_2)$ . . . . .	38
3.1	Tipo di un incrocio in una colorazione a scacchiera . . . . .	42
3.2	Risoluzione di un incrocio in una colorazione a scacchiera . . . . .	42
3.3	Colorazioni a scacchiera per diagrammi alternanti split e non ridotti . . . . .	43
3.4	Somma connessa tra un diagramma del link di Hopf ed un altro diagramma . . . . .	44
4.1	Generatori della categoria <b>2Cob</b> . . . . .	56
4.2	Relazioni di $\mathbb{Q}$ -algebra tramite cobordismi . . . . .	58
4.3	Relazioni di $\mathbb{Q}$ -coalgebra tramite cobordismi . . . . .	58
4.4	Relazione di Fröbenius tramite cobordismi . . . . .	58
4.5	Nodo $10_{100}$ . . . . .	62
4.6	Confronto tra le orientazioni dei diagrammi $D, D(*0)$ e $D(*1)$	74
4.7	Nodo $11_{65}^n$ . . . . .	80
5.1	Confronto tra l'invariante $d_L$ e l'omologia di Khovanov per gli anelli di Solomon . . . . .	90
5.2	Somma connessa del link di Hopf col suo riflesso . . . . .	96
5.3	Calcolo di $U$ e $V$ per il nodo figura otto . . . . .	97
5.4	Link $L7_2^n$ . . . . .	100
5.6	Link $L8_1^n$ . . . . .	101

5.7	Diagramma del link torico $T_{p,q}$ . . . . .	102
5.8	Il link $T_{4,6}$ con l'altra orientazione relativa . . . . .	103
5.9	Invariante $d_{T_{2n,2m}}$ . . . . .	104
5.10	Diagramma del link pretzel $P_{2h,2k,2l+1}$ . . . . .	105
6.1	Cobordismi elementari . . . . .	108
6.2	Mosse di Morse . . . . .	109
6.3	Link $L10_{36}^n$ . . . . .	113
6.4	Diagramma del link $Tw_n$ . . . . .	114
6.5	Cobordismo di genere 1 tra il link $L10_{19}^n$ e l'unlink . . . . .	116
6.6	Link di Whitehead . . . . .	122
6.7	Cobordismo forte tra il link di Whitehead e l'unlink . . . . .	123
6.8	Diagramma del link $Ti_n$ . . . . .	123
6.9	Cobordismo forte di genere $n + 1$ tra $Ti_n$ e l'unlink . . . . .	124
6.10	Cobordismo di genere 1 tra il link $L7_3^a$ e l'unlink . . . . .	125
6.11	Cobordismo forte di genere $l + h$ tra il link $P_{2h,-2h,2l+1}$ e l'unlink . . . . .	127

# Introduzione

L'omologia di Khovanov è un invariante di nodi e link molto potente. Introdotto da Mikhail Khovanov nel 1999, ha segnato una vera e propria svolta nella ricerca in teoria dei nodi e affini. Sono state date diverse interpretazioni e molte congetture, nel corso degli anni, sono state proposte, confutate, risolte da matematici di ogni parte del mondo. Tuttavia, nonostante ormai siano passati più di dieci anni, sono molteplici gli interrogativi con cui ancora essa ci appassiona.

Anche questa tesi parte da qui; in realtà non proprio da qui, del resto non si potrebbe certo scrivere una tesi in teoria dei nodi senza prima parlare dei concetti base e di certo l'invariante di Khovanov non è un concetto base! Il primo capitolo è dedicato a questo scopo; i lettori più esperti sicuramente non ne avranno bisogno.

L'omologia di Khovanov fa la sua comparsa nel capitolo 2: è un capitolo più breve di quanto ci si aspetterebbe, infatti ho cercato in ogni modo di trattare l'argomento nel modo più semplice possibile e credo di esserci riuscito. L'articolo originale di Khovanov e l'approccio di molti altri autori, invece, fa ampio uso di tecniche avanzate di teoria delle categorie; per mia scelta questo aspetto è stato quasi completamente ignorato anche se ne ho comunque parlato nella sezione 4.1.

Tra i vari autori che nei loro lavori si sono occupati di questi argomenti spicca il nome di Eun Soo Lee: allieva di Tomasz Mrowka al MIT, già famoso per aver risolto la congettura di Milnor, a lei si deve la dimostrazione di alcune delle più importanti congetture sull'omologia di Khovanov; si veda [10] per maggiori informazioni. Scendendo più in dettaglio, Lee nella sua tesi di dottorato dà una risposta positiva alla domanda che chiedeva se, per ogni nodo alternante, l'invariante avesse un certo comportamento: ad esempio che il supporto fosse contenuto in due diagonali (si dice che un nodo con questa proprietà è H-sottile). In realtà Lee ha dimostrato di più: in primis ha provato che, non solo i nodi, ma ogni link alternante non split ha questa proprietà e in più che, per questa classe di link, l'omologia di Khovanov è equivalente a conoscere il polinomio di Jones e la segnatura (4.3.10), altri due invarianti di link già conosciuti. Di queste dimostrazioni mi occupo nei capitoli 3 e 4, dove le cose iniziano a diventare più complicate.

La trattazione segue le idee originali di Lee in [18] pur cercando di rendere più chiari alcuni aspetti, come ad esempio la costruzione dei generatori canonici e la dimostrazione del teorema principale. Ho parlato di generatori canonici, “generatori di cosa?” potrebbe domandarsi qualcuno, sì perché Lee ha introdotto una nuova omologia che è anch’essa un invariante di link e la calcolata in modo completo: questa è la tecnica usata per provare il teorema 4.3.10. I generatori canonici sono appunto i generatori di tale omologia.

L’omologia di Khovanov è bigraduata. Questo vuol dire che come oggetto algebrico essa è uno spazio vettoriale con due gradi: il grado omologico ed il grado quantico (sezione 2.2). L’omologia di Lee invece presenta soltanto il grado omologico. Da qui parte il lavoro di Rasmussen ([25]): costruisce una filtrazione sull’omologia di Lee introducendo, in questo modo, il grado filtrante. Il risultato di questa costruzione è quella che viene chiamata omologia di Lee filtrata; tale omologia, anch’essa invariante per link, ha tuttavia l’ulteriore proprietà di essere un invariante per concordanza.

Tramite l’omologia di Lee filtrata è possibile definire due ulteriori invarianti: l’invariante di Rasmussen generalizzato  $s$  (in [7]), che è la versione per link di un invariante definito in [25] per i nodi, e l’invariante  $d$  di John Pardon ([24]). Entrambi questi invarianti sono invarianti per concordanza forte, ovviamente non è semplice spiegare ora cosa voglia dire il termine forte quindi rimando alla definizione nella sezione 1.6; proprio gli articoli di Anna Beliakova e di John Pardon sono stati la principale fonte di ispirazione per gli ultimi due capitoli della tesi.

Nel capitolo 5 ho definito i due invarianti e ho dimostrato diverse loro proprietà. Per quanto riguarda l’invariante  $s$  alcune erano già presenti nell’articolo di Beliakova tuttavia, introducendo una nuova classe di link: i link pseudo-sottili, sono riuscito a migliorarle. I link pseudo-sottili sono link la cui omologia di Lee filtrata, in grado omologico zero, ha supporto in due punti. Tale classe di link risulta essere molto ampia: infatti vi appartengono sia i nodi che tutti i link H-sottili; l’introduzione di questa famiglia di link mi ha permesso di dimostrare alcune proposizioni tra cui la 5.3.3, che permette di calcolare il valore di  $s$  per il riflesso di un dato link, e il teorema 5.4.2 che dà una stima dal basso di  $s$  per i link migliore di quella data da Andrew Lobb in [20], soprattutto se il link ha un numero molto alto di componenti. Tali fatti possono essere falsi se il link in questione non è pseudo-sottile. Nella seconda parte del capitolo mostro delle applicazioni di questi teoremi tra cui il calcolo esatto di  $s$  per alcune famiglie di link come i link torici. Sull’invariante  $d$ , invece, ho semplicemente scritto in modo rigoroso la dimostrazione di alcune proprietà enunciate da Pardon.

Il capitolo 6, occupato quasi interamente da figure, tratta delle relazioni che intercorrono tra  $s$  ed il genere slice di un link, un invariante quadrimensionale (anche in questo caso per la definizione rigorosa si veda la sezione 1.6), il risultato più importante su questo è sicuramente il calcolo del genere

slice di un qualunque link torico (si tratta dell'estensione ai link della congettura di Milnor). Gli ultimi risultati riguardano tutti i cobordismi forti: come prima cosa ho generalizzato ai link pseudo-sottili un teorema di John Pardon, da cui segue che un link pseudo-sottile non split non può essere concordante ad un link split; ho poi definito il genere slice forte, un nuovo invariante strettamente correlato al genere slice, e la parte conclusiva della tesi consiste in calcoli espliciti di tale invariante per alcuni link. Per tali calcoli farò uso del teorema 6.4.5, che risulta essere una stima dal basso del genere slice forte simile alla (6.1) che riguarda invece il genere slice; quest'ultimo teorema è stato dimostrato da me usando l'invariante  $d$  con tecniche simili a quelle adoperate da Pardon per alcune dimostrazioni in [24].

Pisa, 19/11/2013



# Capitolo 1

## Teoria dei nodi

### 1.1 Definizione ed equivalenza di link

In questo primo capitolo farò una breve ricapitolazione dei principi della teoria dei nodi. Anche se sono quasi tutte cose abbastanza note è sempre meglio esprimerle il più chiaramente possibile, soprattutto perché userò questi concetti nei capitoli successivi e, non sempre in letteratura, si trovano espressi in maniera univoca. Ad esempio alcuni autori definiscono la segnatura in modo diverso da come farò io (e da come si fa usualmente). Detto questo non potrebbe esserci altro modo per cominciare questa tesi se non dando le definizioni di link e nodo.

**Definizione 1.** Un link con  $n$  componenti è un embedding  $C^\infty$

$$L : \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{n \text{ volte}} \rightarrow S^3$$

Nella maggior parte dei casi quello che vorremmo è un link orientato: in questo caso considero le varietà e l'embedding della precedente definizione orientati. Un nodo è semplicemente un link con una sola componente.

Si possono definire anche link tramite embedding PL o topologici, ma si ottengono teorie diverse; io sono interessato soltanto al caso  $C^\infty$  quindi anche tutte le altre definizioni che darò in questo capitolo si riferiranno sempre a questa categoria.

**Definizione 2.** Sia  $L$  un link in  $\mathbb{R}^3$  e  $H$  un 2-sottospazio affine di  $\mathbb{R}^3$ , una proiezione ortogonale  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow H$  è buona se  $|p^{-1}(x) \cap L| \geq 2$  solo per un numero finito di  $x$  in  $H$  nei quali è uguale a 2 (punti singolari) e vale la proprietà che le rette tangenti in quei punti non si proiettano sulla stessa retta in  $H$ .

Un facile risultato è la seguente proposizione:

**Proposizione 1.1.1.** *L'insieme dei piani per cui la proiezione di un link è buona è un aperto denso della Grassmanniana.*

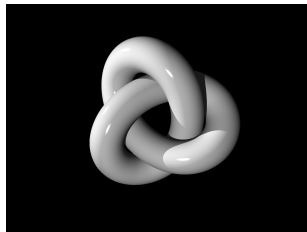
Alla luce di questo risultato posso sempre definire un diagramma di un link come immagine di una buona proiezione.

Un incrocio è l'immagine di un punto singolare.

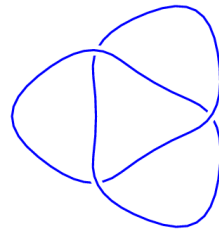
Il diagramma, inoltre, contiene l'informazione sopra-sotto ad ogni incrocio.

Un arco è una linea continua che sottopassa due incroci, possibilmente uguali, in partenza e in arrivo; un diagramma è unione dei suoi archi.

Figura 1.1



(a) Un nodo in  $S^3$



(b) Diagramma dello stesso nodo in  $\mathbb{R}^2$

Se il link è orientato ad ogni incrocio nel diagramma posso assegnare un segno + o - come in figura:

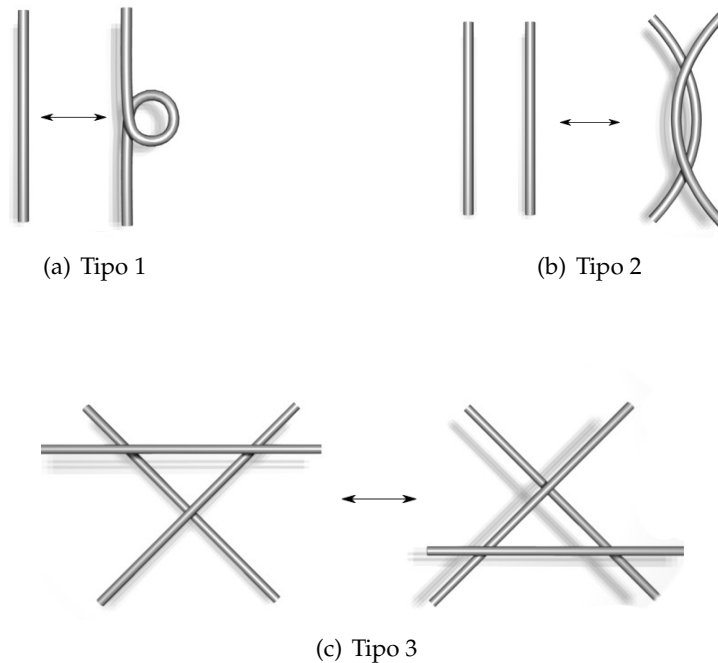


**Definizione 3.** Siano  $L, L'$  link in  $S^3$ . Dico che  $L$  ed  $L'$  sono equivalenti ( $L = L'$ ) se esiste  $H : S^3 \times I \rightarrow S^3$  tale che

1.  $H(\cdot, t)$  è un diffeomorfismo  $\forall t \in I$
2.  $H(\cdot, 0) = Id_{S^3}$
3.  $H(L(\theta_i), 1) = L'(\theta_i) \forall \theta_i \in S^1_i$

Mostrare che due link sono equivalenti usando la definizione è molto difficile, mentre risulta fattibile se passo ai diagrammi alla luce delle mosse di Reidemeister:

Figura 1.2



Dove si intende che i diagrammi siano uguali tranne che in un intorno di un punto dove appaiono come in figura. Ovviamente, queste non sono tutte le mosse possibili: infatti bisogna considerare anche le possibili variazioni sopra sotto per archi e incroci, nonché tutte le distinte orientazioni.

**Teorema 1.1.2** (Reidemeister). *Due link (orientati) sono equivalenti se e solo se due loro rispettivi diagrammi (orientati) sono uguali a meno di un numero finito di mosse di Reidemeister (orientate).*

Per una dimostrazione di questo teorema si veda [19].

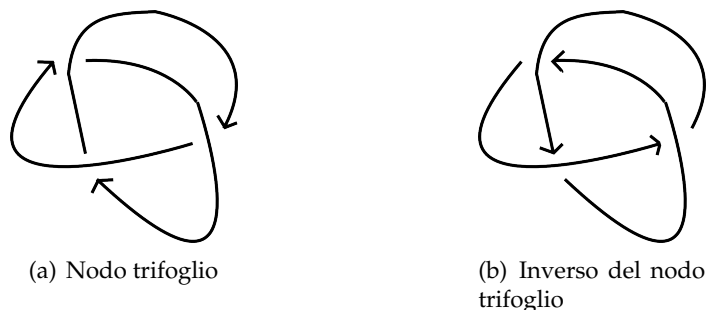
**Definizione 4.** Sia  $L : U = S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow S^3$  un link orientato  $L$ . Allora

$$-L : U \rightarrow L(U) \rightarrow \phi(L(U)) \rightarrow S^3$$

dove  $\phi$  è un diffeomorfismo di  $S^3$  che cambia l'orientazione, è un altro link orientato detto inverso.

In termini di diagrammi questo vuol dire scambiare il verso di percorrenza, come evidenziato nella figura a pagina seguente.

Figura 1.3



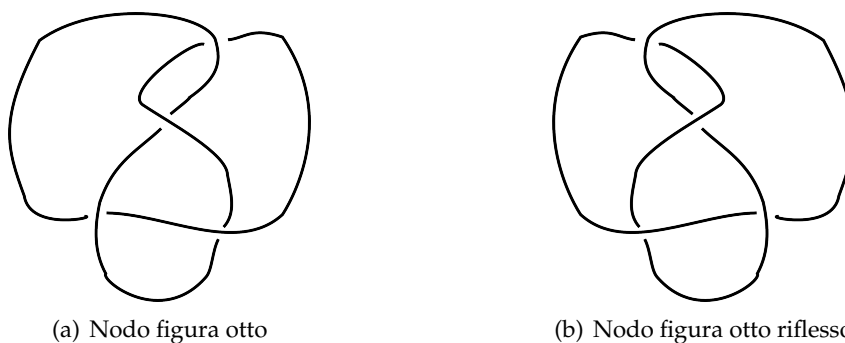
Se  $L = -L$  allora  $L$  si dice invertibile. Molti dei nodi più importanti risultano invertibili.

**Definizione 5.** Sia  $f : S^3 \rightarrow S^3$  un diffeomorfismo che scambia l'orientazione.  $L^* = f(L)$  è detto link riflesso di  $L$

$L^*$  è ben definito poiché se  $g$  è un altro diffeomorfismo che scambia l'orientazione allora risulta che  $g^{-1} \circ f$  conserva l'orientazione, ricordando che le classi di isotopia di  $S^3$  sono soltanto due quest'ultima mappa è isotopa a  $Id_{S^3}$  e  $g^{-1}(f(L)) = L$ . Da cui concludo che  $g(L) = f(L)$ .

In termini di diagrammi riflettere un link vuol dire scambiare i sopra e i sotto in tutti gli incroci.

Figura 1.4



Se  $L = L^*$  allora  $L$  si dice achirale. Il nodo figura otto rappresentato nella figura precedente è il più famoso esempio di nodo achirale.

**Definizione 6.** Un link  $K$  si dice banale se  $K = S^1$  dove per  $S^1$  intendo la circonferenza standard in  $\mathbb{R}^3$  naturalmente embedded in  $S^3$ .



Se il link è orientato allora anche  $S$  dovrà essere orientata e indurre l'orientazione corrispondente su  $L$ .

**Teorema 1.2.1** (Algoritmo di Seifert). *Ogni link ammette una superficie di Seifert.*

La descrizione dell'algoritmo si può trovare in [19].

**Definizione 8.** Il genere di un link  $L$  è

$$g(L) = \min\{g(S) \mid S \text{ è una superficie di Seifert per } L\}$$

È evidente che un nodo  $K$  è banale se e solo se  $g(K) = 0$ .

**Definizione 9.** Sia  $L = L_1 \cup L_2$  un link orientato a due componenti. Si definisce linking number tra  $L_1$  e  $L_2$  il numero intero

$$\text{lk}(L_1, L_2) = \sum_{p \mid D_1 \uparrow D_2} \epsilon_p$$

dove  $\uparrow$  indica che nell'incrocio  $p$   $D_1$  è sopra  $D_2$ , con  $D_1$  e  $D_2$  diagrammi per  $L_1$  ed  $L_2$ , mentre  $\epsilon_p$  è il segno dell'incrocio.

**Teorema 1.2.2.**  $\text{lk}(L_1, L_2)$  è invariante per mosse di Reidemeister e vale  $\text{lk}(L_1, L_2) = \text{lk}(L_2, L_1)$ .

Per la dualità di Alexander esiste ed è unica una forma bilineare simmetrica  $\beta : H_1(S, \mathbb{Z}) \times H_1(S^3 \setminus S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  tale che  $\beta([a], [b]) = \text{lk}(a, b)$  per ogni  $a$  e  $b$  curve semplici chiuse in  $S^3$ .

Inoltre definisco  $i^\pm : S \rightarrow S^\pm$  dove  $S^+ \sqcup S^- = \partial S \times I$  bordo di un intorno tubolare di  $S$  in  $S^3$  con le orientazioni coerenti; e chiamo  $i_*^\pm [a] = [a^\pm] = [i^\pm(a)]$ .

Arrivo quindi alla seguente definizione

**Definizione 10.** Sia  $\delta : H_1(S, \mathbb{Z}) \times H_1(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  definita ponendo

$$\delta([a], [b]) = \beta([b], [a^-]) = \beta([a], [b^+]) \quad \forall [a], [b] \in H_1(S, \mathbb{Z})$$

$\delta$  è bilineare, ma non è detto che sia simmetrica, anzi non lo è quasi mai.

**Definizione 11.** Una matrice  $A$  si dice matrice di Seifert per  $L$  se rappresenta la forma  $\delta$  associata ad una superficie di Seifert per  $L$ .

**Osservazione 1.2.3.** *La matrice  $A$  associata alla base standard di  $S$  è tale che  $A - A^T$  è uguale alla matrice  $-J$ .*

La definizione di matrice di Seifert è importante poiché mi permette di definire la segnatura di un link.

**Definizione 12.** La segnatura di un link  $L$  è  $\sigma(L) = \text{sgn}(A + A^T)$ .

La segnatura è un invariante del link, ossia se  $L$  ed  $L'$  sono equivalenti allora  $\sigma(L) = \sigma(L')$ . La prova di tale fatto si trova nel libro di Lickorish [19] e si basa sul fatto che matrici di Seifert associate a superfici di Seifert distinte per  $L$  sono  $S$ -equivalenti. Ovviamente la segnatura risulta invariante per  $S$ -equivalenza.

### 1.3 Altri invarianti e polinomio di Jones

La ricerca di nuovi invarianti è molto importante in teoria dei nodi; in questa sezione ne descrivo alcuni.

**Teorema 1.3.1** (Gordon-Luecke). *Siano  $K, K'$  nodi.*

*Esiste  $f : S^3 \setminus K \rightarrow S^3 \setminus K'$  diffeomorfismo orientato se e solo se  $K = K'$  a meno di invertibilità e chiralità.*

Questo teorema, di fondamentale importanza, mi dice che la classe di omeomorfismo del complementare di un nodo è un invariante completo.

**Teorema 1.3.2.** *Un nodo  $K$  è banale se e solo se  $\pi_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$*

Il gruppo fondamentale del complementare di un nodo riconosce il nodo banale.

Questi invarianti, facili da definire sono molto forti, ma hanno il difetto di essere molto difficili da calcolare. Per cui nel corso del XX secolo si è andati alla ricerca di altri invarianti, magari meno potenti, ma più efficienti dal punto di vista computazionale.

Di particolare importanza è la categoria degli invarianti polinomiali, ossia in cui ad un link viene associato un polinomio che risulta lo stesso all'interno della classe di equivalenza del link. In questa sezione parlerò del polinomio di Jones: definito nel 1984 nell'articolo di V.F.R. Jones [13] risulta un invariante molto efficace anche per la nascita di altre teorie collegate ad esso di cui mi occuperò nei capitoli successivi.

Il primo passo è definire le parentesi di Kauffman, la cui esistenza è molto precedente rispetto al lavoro di Jones.

**Definizione 13.** Le parentesi di Kauffman  $\langle \cdot \rangle$  sono una funzione che ad un diagramma di un link  $D$  associa un polinomio in  $\mathbb{Z}[A^{-1}, A]$  caratterizzata dalle seguenti relazioni:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2.  $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = -(A^2 + A^{-2})\langle D \rangle$
3.  $\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \rangle = A \langle \begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array} \rangle + A^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array} \rangle$

$\begin{array}{c} \diagdown \diagdown \\ \diagup \diagup \end{array}$  e  $\begin{array}{c} \diagup \diagup \\ \diagdown \diagdown \end{array}$  si dicono 0-risoluzione ed 1-risoluzione di  $\begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array}$ . Si chiama risoluzione di un diagramma un altro diagramma ottenuto applicando risoluzioni ad ogni incrocio.

Nel seguente lemma vedo come si comportano le parentesi di Kauffman applicando le mosse di Reidemeister a  $D$ .

**Lemma 1.3.3.**

$$\begin{aligned} \langle \times \rangle &= -A^3 \langle \curvearrowright \rangle & \langle \times \rangle &= -A^{-3} \langle \curvearrowleft \rangle \\ \langle \text{crossing} \rangle &= \langle \text{parallel} \rangle \\ \langle \text{crossing} \rangle &= \langle \text{crossing} \rangle \end{aligned}$$

La dimostrazione è semplicemente un'applicazione delle relazioni date nella definizione.

**Definizione 14.** Si definisce il writhe di un diagramma  $D$  come

$$w(D) = \sum_p \epsilon_p$$

dove si intende che la somma è fatta su tutti gli incroci  $p$  di  $D$ .

Il writhe è invariante per mosse di tipo 2 e 3 come è facilmente verificabile, mentre cambia di  $\pm 1$  per mosse di tipo 1. Ma vale il seguente fatto:

**Teorema 1.3.4.**  $(-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle$  è un invariante del link.

Posso quindi definire il polinomio di Jones.

**Definizione 15.**  $V_D(q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$  si dice polinomio di Jones di  $L$  ed è definito come

$$V_L(q) = ((-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle)_{-A^{-2}=q}$$

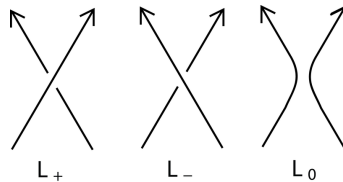
Il polinomio di Jones è invariante per mosse di Reidemeister [19].

Inoltre vale la seguente proposizione:

**Proposizione 1.3.5.**  $V_D(q)$  è caratterizzato dalla seguente relazione skein

1.  $V_{\bigcirc}(q) = 1$
2.  $q^{-2}V_{D_+}(q) - q^2V_{D_-}(q) + (q - q^{-1})V_{D_0}(q) = 0$

Dove  $D_+$ ,  $D_-$  e  $D_0$  sono diagrammi uguali tranne nell'intorno di un incrocio dove appaiono come in figura



Le frecce indicano l'orientazione locale dei diagrammi.

Anche in questo caso la prova è un semplice conto.

Sono più interessato, però per quello che farò nel prossimo capitolo, a definire il polinomio di Jones in maniera combinatoria diversamente da quanto ho appena fatto.



**Proposizione 1.3.6.** Sia  $\alpha \in \{0,1\}^n$  allora

$$\langle D \rangle = \sum_{\alpha} A^{n-2|\alpha|} (-A^{-|\alpha|} - A^{|\alpha|})^{k_{\alpha}-1}$$

dove  $|\alpha|$  è il numero di 1 in  $\alpha$  e  $k_{\alpha}$  il numero di cerchi nella risoluzione di  $D$  associata.

Allora si ottiene

$$\begin{aligned} (-A)^{-3w(D)} \langle D \rangle &= (-A)^{-3w(D)} \sum_{\alpha} A^{n-2|\alpha|} (-A^{-|\alpha|} - A^{|\alpha|})^{k_{\alpha}-1} = \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{-3w(D)} A^{n-2|\alpha|-3n_++3n_-} (-A^{-2} - A^2)^{k_{\alpha}-1} = \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{n_+-n_-} A^{4n_- - 2n_+ - 2|\alpha|} (-A^{-2} - A^2)^{k_{\alpha}-1} = \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{n_+-n_-} (A^{-2})^{n_+-2n_-+|\alpha|} (-A^{-2} - A^2)^{k_{\alpha}-1} = \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{n_+-n_-} (-1)^{n_+-2n_-+|\alpha|} q^{n_+-2n_-+|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}-1} = \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} (-1)^{|\alpha|} q^{|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}-1} \end{aligned}$$

Quindi ho ottenuto che

$$V_D(q) = (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \sum_{r=0}^n (-1)^r q^r \sum_{|\alpha|=r} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}-1} \quad (1.1)$$

Se definisco il polinomio di Jones non normalizzato  $\hat{V}_D(q)$  come  $(q + q^{-1})V_D(q)$  allora la (1.1) diventa

$$\hat{V}_D(q) = (-1)^{n_-} q^{n_+-2n_-} \sum_{r=0}^n (-1)^r q^r \sum_{|\alpha|=r} (q + q^{-1})^{k_{\alpha}} \quad (1.2)$$

L'importanza di questa equazione risulterà evidente all'inizio del prossimo capitolo.

## 1.4 Nodi primi e somme connesse

La seguente sezione, sebbene non fondamentale, viene inserita per completezza, visto che i concetti di link primo e di somma connessa sono molto importanti in teoria dei nodi; anche se meno per i nostri scopi.

Da adesso in poi confonderò un link con la sua immagine in  $S^3$ .

**Definizione 16.** Un tangle elementare è una coppia  $(D^3, \alpha)$  tale che  $\alpha \cong I$  e  $\partial D^3 \cap \alpha = \partial \alpha$

Un tangle elementare si dice banale se è isotopo a  $(D^2 \times I, \{0\} \times I)$ .

Posso definire l'operazione di somma connessa di nodi.

**Definizione 17.** Siano  $K_1, K_2$  nodi e siano  $D_1, D_2$  palle tali che  $(D_i, D_i \cap K_i)$  siano tangle elementari banali.

Attacco i tangle complementari  $(D_i^c, D_i^c \cap K_i)$  con un omeomorfismo orientato  $\phi : \partial D_1^c \rightarrow \partial D_2^c$  in modo che  $D_1^c \cap K_1$  si incolli su  $D_2^c \cap K_2$  rispettando le orientazioni.

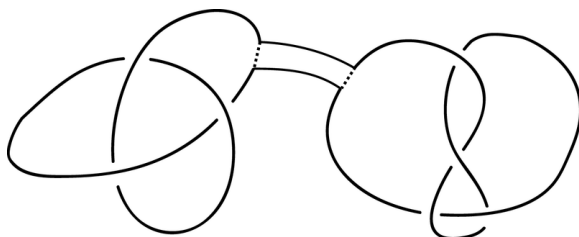
Il risultato di questa operazione è la coppia  $(S^3, K_1 \# K_2)$  dove  $K_1 \# K_2$  è la somma connessa di  $K_1$  e  $K_2$ .

Il nodo  $K_1 \# K_2$  è ben definito, inoltre se  $K_1$  e  $K_2$  sono orientati anche la somma connessa orientata lo è.

**Osservazione 1.4.1.** La somma connessa è un'operazione commutativa e associativa.

Nella figura seguente mostro cos'è la somma connessa in termini di diagrammi:

Figura 1.6: Somma connessa tra nodi trifoglio e figura otto

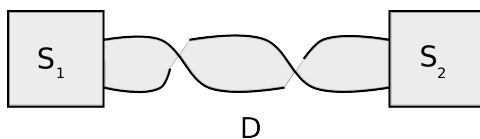


L'insieme dei nodi orientati equipaggiato con tale operazione è quindi un monoide commutativo come i numeri naturali. E come i numeri naturali posso dare la definizione di nodo primo.

**Definizione 18.** Un nodo  $K$  si dice primo se è non banale e  $K = K_1 \# K_2$  implica che esiste un  $i$  tale che  $K_i$  è banale.

**Teorema 1.4.2.** Vale  $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$  ossia il genere è additivo per la somma connessa.

*Dimostrazione.* Il fatto che  $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$  è facile, infatti basta attaccare due superfici di Seifert minimali per  $K_1$  e  $K_2$  lungo una banda in modo da ottenere  $S$  superficie di Seifert per  $K_1 \# K_2$ :



Ovviamente  $g(S) = g(S_1) + g(S_2)$ .

Per l'altra disuguaglianza vedere [19]. □

Ho immediatamente i seguenti corollari:

**Corollario 1.4.3.** *Se  $K = K_1 \# \dots \# K_n$  con  $K_i$  non banale per ogni  $i$  allora  $g(K) \geq n$*

*Dimostrazione.*

$$g(K) = \sum_{i=1}^n g(K_i) \geq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

□

**Corollario 1.4.4.** *Se  $K$  è un nodo con genere 1 allora  $K$  è primo.*

*Dimostrazione.* Segue facilmente dal corollario precedente. □

**Corollario 1.4.5.** *Ogni nodo ammette una decomposizione in fattori primi.*

*Dimostrazione.* Se  $K$  non è primo allora esistono  $K_1$  e  $K_2$  tali che  $K = K_1 \# K_2$  e  $K_i$  non banale per ogni  $i$ . Allora

$$g(K) = g(K_1) + g(K_2) > g(K_i) \quad i = 1, 2$$

Riapplico lo stesso ragionamento a  $K_1$  e  $K_2$  e alla fine otterrò dei nodi che hanno genere 1 e quindi sono primi. □

È possibile dimostrare che la decomposizione in primi in realtà è unica a meno di permutazione dei fattori [19].

La proposizione successiva mi dice come si comporta il polinomio di Jones rispetto alla somma connessa:

**Proposizione 1.4.6.**  $V_{K_1 \# K_2}(q) = V_{K_1}(q)V_{K_2}(q)$

Tale risultato è una semplice applicazione della relazione skein definita nella proposizione 1.3.5.

## 1.5 Link alternanti

Parlerò adesso della classe dei link alternanti.

**Definizione 19.** Un diagramma di un link orientato si dice alternante se, proseguendo lungo il link seguendo l'orientazione, gli incroci alternano il sopra con il sotto. Un link è alternante se possiede almeno un diagramma alternante.

Una delle prime proprietà dei link alternanti riguarda i link split, ossia i link che possiedono almeno un diagramma sconnesso, infatti vale il seguente fatto:

**Proposizione 1.5.1.** *Se  $D$  è un diagramma alternante per un link  $L$  allora  $L$  è split se e solo se  $D$  è split.*

Tale risultato è falso senza l'ipotesi di alternanza.

Vale l'analogo per i nodi primi:

**Proposizione 1.5.2.** *Nelle ipotesi precedenti  $K$  è primo se e solo se  $D$  è primo.*

Dove per diagramma primo di un nodo si intende un diagramma (in  $S^2$ ) in cui per ogni cerchio che interseca  $D$  trasversalmente in due punti borda un disco, da un lato, che interseca  $D$  in un diagramma del tangle banale.

Le dimostrazioni di questi due risultati non sono semplici e possono essere trovate nel quarto capitolo di [19].

**Definizione 20.** Un diagramma di un link  $D$  si dice ridotto se è non split dopo ogni risoluzione di un singolo incrocio, ossia se non è della seguente forma:

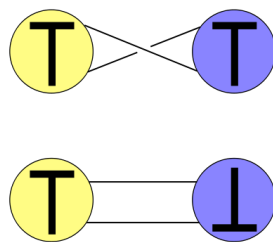


Figura 1.7

Ritornando al polinomio di Jones, detta  $B(V_D(q))$  la differenza tra il massimo e il minimo grado in  $q$  di  $V_D(q)$  allora da [19] si ha:

**Teorema 1.5.3.** *Se  $D$  è un diagramma con  $n$  incroci alternante ridotto e non split allora  $B(V_D(q)) = 2n$ .*

Anche in questo caso senza l'ipotesi di alternanza si riesce soltanto a dimostrare che  $B(V_D(q)) \leq 2n$ .

**Corollario 1.5.4.** *Se  $L$  ha un diagramma con  $n$  incroci ridotto alternante e non split allora non ha un diagramma con un numero inferiore di incroci.*

*Dimostrazione.* Segue da quanto detto precedentemente.  $\square$

Questo corollario mi dice che, se valgono le ipotesi,  $n$  è il crossing number di  $L$  cioè il minimo numero di incroci per un diagramma di  $L$ .

## 1.6 Cobordismi di link

In quest'ultima sezione darò semplicemente la definizione di cobordismo di link.

**Definizione 21.** Siano  $L, L'$  link definiti da

$$L : U = \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{n \text{ volte}} \rightarrow S^3 \quad \text{ed} \quad L' : V = \underbrace{S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{m \text{ volte}} \rightarrow S^3$$

Un cobordismo debole di genere  $g$  tra  $L$  ed  $L'$  è un embedding  $C^\infty$

$$f : S_{g,n+m} \rightarrow S^3 \times I$$

dove  $S_{g,n+m}$  è una superficie orientabile di genere  $g$  in cui  $\partial S = -U \sqcup V$ , ogni componente connessa ha bordo in  $L$  ed  $L'$  ed è tale che  $f(U) = L(U) \times \{0\}$  e  $f(V) = L'(V) \times \{1\}$ .

$L$  ed  $L'$  si dicono concordanti in modo debole se esiste un cobordismo debole di genere 0 tra loro.

Un cobordismo è forte se, inoltre, i link hanno lo stesso numero di componenti e vale anche la condizione

$$S_{g,n+n} = S_{g_1,1+1} \sqcup \dots \sqcup S_{g_n,1+1}$$

con  $g_1 + \dots + g_n = g$ .

Ovviamente  $L$  ed  $L'$  saranno concordanti in modo forte se esiste un cobordismo forte di genere 0 tra essi.

In realtà tutti i link sono cobordanti (debolmente) quindi ciò in cui sono davvero interessato è la concordanza, che risulta essere una versione quadrimensionale dell'equivalenza di link.

Se un nodo è concordante al nodo banale esso si dice slice, ciò è equivalente ad essere il bordo di un disco propriamente embedded nella palla  $D^4$ .

Dato che  $H_1(D^4, S^3, \mathbb{Z}) \cong \{0\}$  è facile concludere che esiste sempre una superficie propriamente embedded orientabile in  $D^4$  che abbia come bordo un dato link  $L$ : il minimo genere per una superficie di questo tipo viene detto genere slice di  $L$  e si indica con  $g_*(L)$  e vale  $g_*(L) \leq g(L)$ .

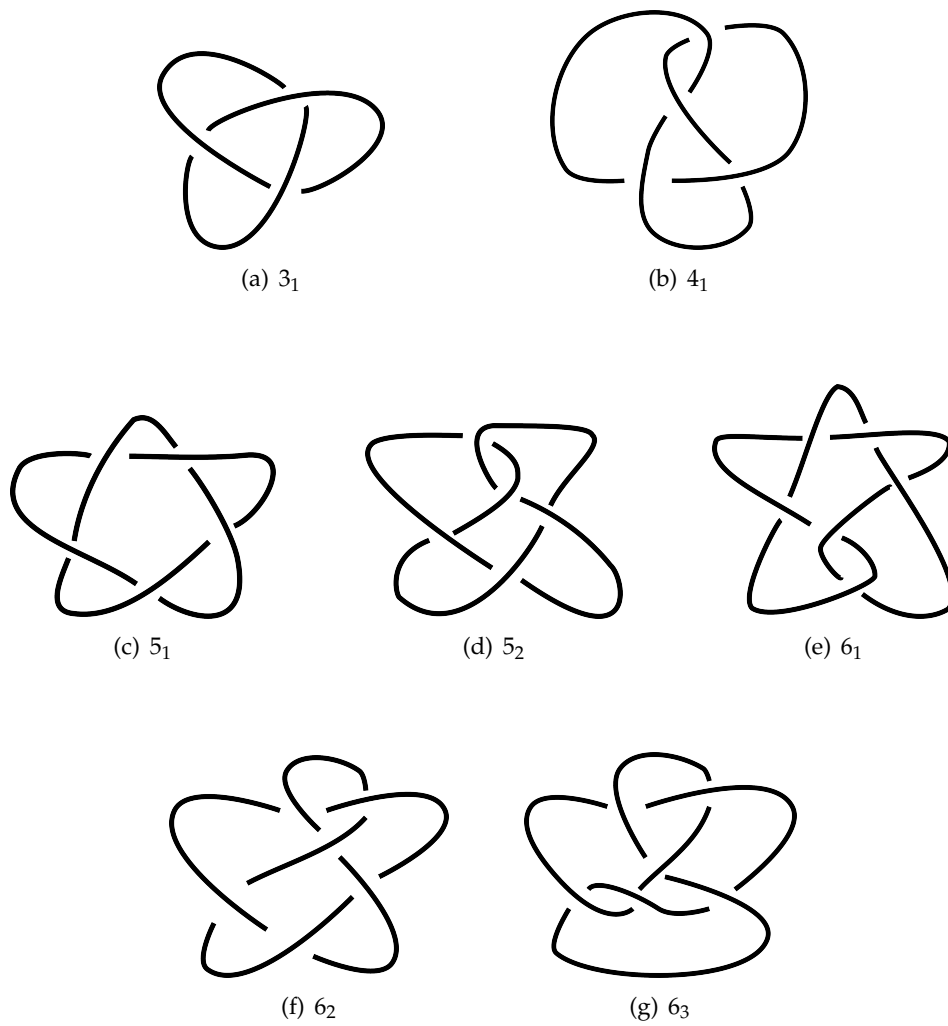
Come ultimo risultato ricordo il seguente teorema, nel Lickorish [19] è presente la dimostrazione che, però, non si estende facilmente ai link: infatti in questo caso la si può trovare in un articolo di Kauffman del 1976: "Signature of links" [14].

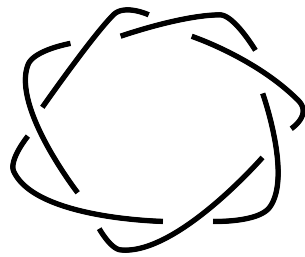
**Teorema 1.6.1.** *Due nodi concordanti hanno la stessa segnatura. In particolare un nodo slice ha segnatura 0.*

## 1.7 Tavola dei nodi

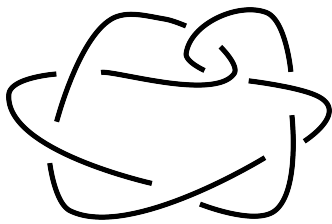
Come ultima cosa per questo capitolo allego una tavola che mostra diagrammi di tutti i nodi primi con crossing number inferiore a 8 (a meno di invertibilità e chiralità).

Figura 1.8

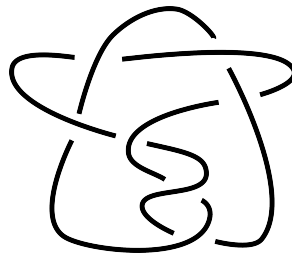




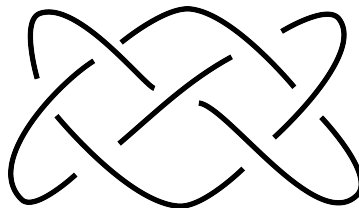
(h)  $7_1$



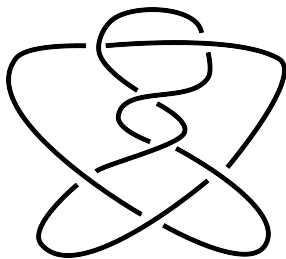
(i)  $7_2$



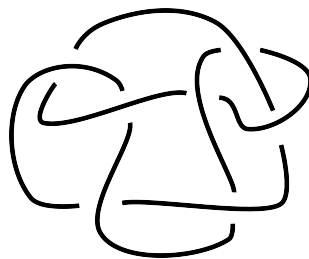
(j)  $7_3$



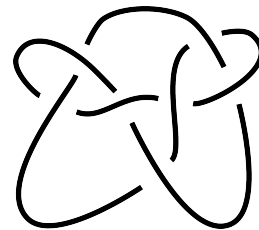
(k)  $7_4$



(l)  $7_5$



(m)  $7_6$



(n)  $7_7$





## Capitolo 2

# Omologia di Khovanov

### 2.1 Cubi n-dimensionali

Nel 1999 l'uscita dell'articolo [15] di Mikhail Khovanov ha gettato le basi per nuove ricerche nell'ambito della teoria dei nodi; molte delle quali verranno descritte in questa tesi.

In questa prima sezione parlerò della costruzione dell'invariante scoperto da Khovanov e che porta il suo nome, per ora farò questo in maniera puramente combinatoria senza spendere molto tempo a parlare di algebra come invece viene fatto nell'articolo originale. Nel quarto capitolo si parlerà meglio di questo aspetto.

Voglio costruire un cubo n-dimensionale, quindi con  $2^n$  vertici, per calcolare il polinomio di Jones di un link con diagramma  $D$ .

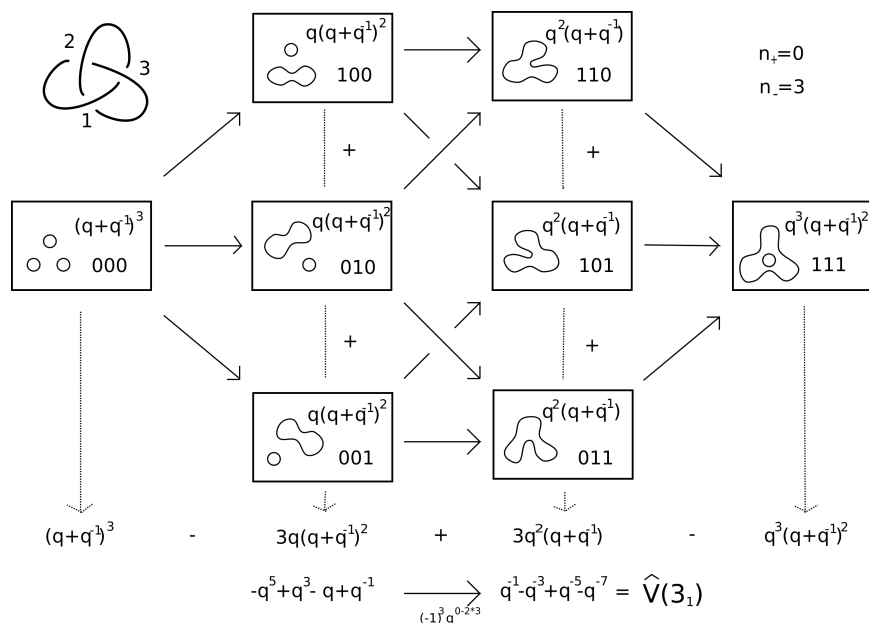
Per ogni  $\alpha \in \{0, 1\}^n$  vertice del cubo associo una risoluzione  $S_\alpha$  di  $D$ .

1. Ad ogni  $S_\alpha$  corrisponde il polinomio  $(-1)^{|\alpha|} q^{|\alpha|} (q + q^{-1})^{k_\alpha}$
2. Ora sommo i polinomi tali che  $|\alpha| = r$  per  $r = 0, \dots, n$
3. Infine sommo ancora tra loro i polinomi ottenuti e ho che  $\hat{V}_D(q)$  si ottiene moltiplicando il risultato per la quantità  $(-1)^{n-} q^{n+ - 2n-}$

Il processo che ho descritto è schematizzato, nella pagina successiva, con un cubo in cui  $D$  è il diagramma standard del nodo trifoglio ( $3_1$  nella tavola della sezione 1.7).

È facile osservare il parallelo con l'equazione (1.2).

Figura 2.1: Ottengo il polinomio di Jones del trifoglio tramite il cubo delle risoluzioni



Concludo che  $V_{3_1}(q) = q^{-2} + q^{-6} - q^{-8}$

## 2.2 Categorificazione del polinomio di Jones

Voglio sostituire i polinomi del cubo descritto nella precedente sezione con spazi vettoriali graduati, in modo da rendere il polinomio di Jones un oggetto omologico.

Cominciamo con le definizioni:

**Definizione 22.** Sia

$$W = \bigoplus_m W_m$$

uno spazio vettoriale graduato. La dimensione quantistica di  $W$  è la serie formale

$$\text{qdim } W = \sum_m \dim W_m \cdot q^m$$

**Osservazione 2.2.1.** Ricordo che un complesso di cocatene di bigrado  $(1, k)$  è una coppia  $(W, d)$  dove  $W$  è uno spazio vettoriale bigradato e il differenziale  $d$  è tale che  $d^r : W^{r,j} \rightarrow W^{r+1,j+k}$ .

Per ogni addendo  $W^{r,j}$  di  $W$   $r$  viene detto grado omologico, mentre  $j$  grado quantico.

Definisco  $\cdot\{l\}$  l'operazione shift di grado su  $W$  in questo modo:

**Definizione 23.** Sia  $W$  uno spazio vettoriale graduato, allora

$$W\{l\} = \bigoplus_m W\{l\}_m$$

dove  $W\{l\}_m = W_{m-l}$

Da cui risulta

$$\begin{aligned} \text{qdim } W\{l\} &= \sum_m q^m \dim W\{l\}_m = \sum_m q^m \dim W_{m-l} = \\ &= \sum_k q^l q^k \dim W_k = q^l \cdot \text{qdim } W \end{aligned} \quad (2.1)$$

E quella di shift di altezza  $\cdot [s]$  su un complesso di cocatene in questo:

**Definizione 24.** Sia

$$\left( \bar{C} = \bigoplus_r \bar{C}^r, d \right)$$

un complesso di cocatene. Allora definisco il complesso  $(C = \bar{C}[s], d)$  ponendo  $C^r = \bar{C}^{r-s}$  per ogni  $r$ .

Ho semplicemente “traslato” gli addendi omogenei di  $\bar{C}$ .

Adesso descrivo la costruzione del complesso di Khovanov costruendo un cubo  $n$ -dimensionale analogo a quello della figura 2.1.

Sia  $V$  uno spazio vettoriale graduato su  $\mathbb{Q}$  di dimensione 2 con base  $\{v_+, v_-\}$  i cui elementi hanno grado rispettivamente +1 e -1, ossia:

$$V = \underbrace{\text{Span}\{v_+\}}_{V_1} + \underbrace{\text{Span}\{v_-\}}_{V_{-1}}$$

e quindi

$$\text{qdim } V = q + q^{-1}$$

Siano, come in precedenza,  $D$  un diagramma di un link,  $k$  il numero di cerchi e  $r$  il numero di 1 in una risoluzione di  $D$ . Ad ogni vertice  $\alpha$  dell' $n$ -cubo  $\{0, 1\}^n$ , corrispondente ad una risoluzione, associo lo spazio vettoriale

$$V_\alpha(D) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ volte}}\{r\} \quad (2.2)$$

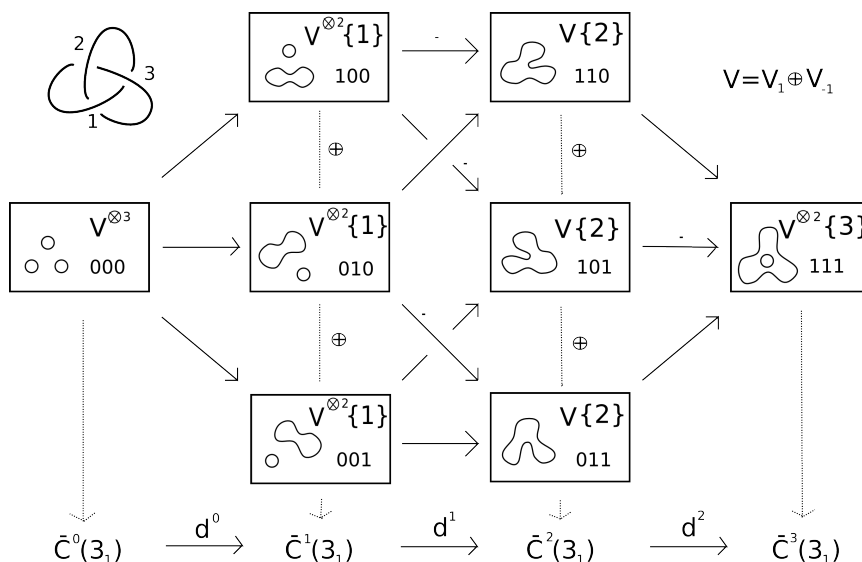
Risulta che  $\text{qdim } V_\alpha(D)$  è il polinomio che compare nel vertice  $\alpha$  del cubo 2.1.

Per ogni  $r$  chiamo l' $r$ -simo gruppo di cocatene

$$\bar{C}(D)^r = \bigoplus_{|\alpha|=r} V_\alpha(D)$$

per ottenere un complesso dovrò definire un differenziale  $d^r : \bar{C}^r \rightarrow \bar{C}^{r+1}$  di bigrado  $(1,0)$  cosa che farò successivamente.

Figura 2.2: Cubo  $n$ -dimensionale per l'omologia di Khovanov



Chiamo

$$(C(D) = \bar{C}(D)[-n_-]\{n_+ - 2n_-\}, d)$$

il complesso di Khovanov; ovviamente sto supponendo di aver già definito  $d$ .

L'omologia di Khovanov a coefficienti razionali è l'omologia di tale complesso; si può generalizzare usando coefficienti in ogni anello commutativo con unità, ma a me interessa soltanto questo caso. Risulta evidente che essa è in realtà una coomologia, ma per ragioni storiche in letteratura viene quasi sempre indicata col termine omologia, termine comunque non scorretto dal punto di vista formale.

Chiaramente quello che ho fatto finora non sarebbe molto importante se potessi definire soltanto  $H(D)$  e non  $H(L)$ , ma, proprio come ci saremmo aspettati,  $H$  è invariante per mosse di Reidemeister; tale fatto sarà ciò di cui mi occuperò nella prossima sezione.

La caratteristica di Euler del complesso è definita come

$$\chi_q(C(D)) = \sum_k (-1)^k q^{\dim H^k(D)}$$

Se il grado di  $d$  è  $(1,0)$  e tutti i gruppi di cocatene hanno dimensione finita, come nel nostro caso, allora vale

$$\chi_q(C(D)) = \sum_k (-1)^k q^{\dim C^k(D)} \quad (2.3)$$

Che ci porta al risultato principale di questa sezione

**Teorema 2.2.2.** *L'omologia di Khovanov categorifica il polinomio di Jones:*

$$\chi_q(C(D)) = \hat{V}_D(q)$$

*Dimostrazione.* È evidente confrontando i due cubi che ho costruito e dalle osservazioni fatte sopra.  $\square$

Questo teorema mi dice che due link con la stessa omologia di Khovanov hanno anche lo stesso polinomio di Jones, ma posso dire di più:

**Proposizione 2.2.3.** *L'omologia di Khovanov è un invariante più forte del polinomio di Jones. Cioè esistono due link tali che  $V_L(q) = V_{L'}(q)$  e  $H(L) \neq H(L')$ .*

*Dimostrazione.* Considero i nodi  $10_{136}$  e  $11_{92}^n$  (nella notazione di Alexander-Briggs). Vale

$$V_{10_{136}}(q) = V_{11_{92}^n}(q)$$

ma hanno diversa omologia di Khovanov come mostrato in [4].  $\square$

$H(L)$  è quindi un invariante di link molto potente.

Il mio obiettivo adesso è definire  $d$  con le proprietà enunciate sopra, in modo da rendere  $(C(D), d)$  un complesso di cocatene a tutti gli effetti.

Devo definire  $d^{r-n-} : \bar{C}(D)^r \rightarrow \bar{C}(D)^{r+1}$ : ad ogni vertice  $\alpha$  del cubo mi servono delle mappe  $d_\xi$  tra gli spazi vettoriali associati a  $\alpha$  e ad ogni altro vertice collegato a  $\alpha$ .

Ad ogni  $\alpha$  associo delle  $n$ -uple  $\xi$  in  $\{0, 1, *\}^n$  uguali ad  $\alpha$  con una sola  $*$  al posto di uno 0; ho che  $|\xi| = |\alpha|$ .

Definisco

$$d^{r-n-} = \sum_{|\xi|=r} (-1)^\xi d_\xi \quad \text{con} \quad (-1)^\xi = (-1)^{\sum_{i<j} \xi_i}$$

dove  $j$  è la posizione di  $*$  in  $\xi$ ; nel cubo in figura 2.2 ho indicato con un meno le mappe che cambiano segno secondo questa definizione. In realtà una qualunque altra convenzione sui segni andrebbe bene purché per ogni 2-sottocubo ci sia un numero dispari di segni meno ([15]). Restano solo da definire le  $d_\xi$ .

Ho due casi: cambiare una 0-risoluzione di un incrocio con una 1-risoluzione può far sì che o due cerchi si uniscono in uno solo oppure che un cerchio si scinda in due cerchi. La mappa

$$d_\xi : \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k_\alpha \text{ volte}}\{r\} \longrightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k_{\alpha'} \text{ volte}}\{r+1\}$$

sfruttando le proprietà del prodotto tensore si può definire su ogni fattore.

Suppongo di numerare da 1 a  $k_\alpha$  i cerchi di  $\alpha$ :

1. Se un cerchio è immutato da  $\alpha$  ad  $\alpha'$  allora  $d_{\bar{c}}$  è l'identità su quel cerchio.
2. Se sono nel primo caso allora uso  $V \otimes V \xrightarrow{m} V$  dove

$$m : \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_- \rightarrow 0 \end{cases}$$

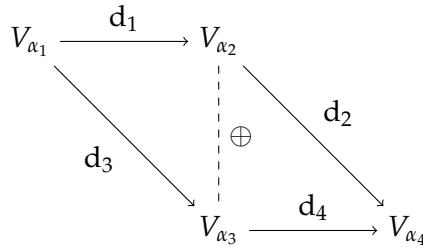
3. Se sono nel secondo caso invece uso  $V \xrightarrow{\Delta} V \otimes V$  dove

$$\Delta : \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- \end{cases}$$

**Proposizione 2.2.4.** *La mappa  $d$ , ottenuta estendendo per linearità a  $\bar{C}(D)$  le  $d^{r-n_-}$  definite ora, è un differenziale di bigrado  $(1,0)$ .*

*Dimostrazione.* Il fatto che  $d$  abbia bigrado  $(1,0)$  si vede facilmente osservando gli shift. Affinché sia un differenziale resta solo da provare che  $d \circ d = 0$ .

Considero un 2-sottocubo di  $\bar{C}(D)$ :



Ho che per ogni  $x \in \bar{C}(D)$  vale  $\tilde{d}_2(\tilde{d}_1(x)) = \tilde{d}_4(\tilde{d}_3(x))$  dove con la tilde indico le mappe, tra vertice e vertice, senza segni: vedrò meglio questo nella sezione 4.1. Per la convenzione messa prima, però ho che  $d_2 = -\tilde{d}_2$  e  $d_i = \tilde{d}_i$  se  $i \neq 2$  per cui

$$d(d(x)) = d_2(d_1(x)) + d_4(d_3(x)) = \tilde{d}_4(\tilde{d}_3(x)) - \tilde{d}_2(\tilde{d}_1(x)) = 0$$

Da cui la tesi. □

## 2.3 Invarianza per mosse di Reidemeister

Come preannunciato in questa sezione farò vedere che l'omologia di Khovanov è invariante per mosse di Reidemeister; ciò mi permetterà di

poter definire  $H(L) = H(D)$  dove  $D$  è un qualunque diagramma di un link orientato  $L$ .

La tecnica delle dimostrazioni seguirà quella di Bar-Natan in [6] per le mosse di tipo 1 e 2 mentre seguirà quella di Lee in [18] per le mosse di tipo 3. Il motivo di questa scelta risiede nel fatto che la dimostrazione di Bar-Natan risulta più intuitiva e semplice da capire nei primi due casi, ma esattamente l'opposto nell'ultimo.

**Definizione 25.** Per un diagramma  $D$  indico per comodità  $\bar{C}(D)$  con  $\llbracket D \rrbracket$ . Tale operatore prende il nome di parentesi di Khovanov di un diagramma e vale  $C^{i,j}(D) = \llbracket D \rrbracket^{i+n_-,j-n_++2n_-}$  per ogni  $i, j$ .

Lo scopo di questa sezione è provare il seguente teorema:

**Teorema 2.3.1.** Siano  $D$  un diagramma per un link orientato  $L$  e sia  $Kh_D(t, q) = \sum_r t^r q^{\dim H^r(D)}$  il polinomio di Khovanov associato a  $D$ .

Allora  $Kh_D(q)$  è un invariante di  $L$  e vale  $Kh_L(-1, q) = \hat{V}_L(q)$ .

*Dimostrazione.* L'ultima affermazione è già stata dimostrata nella sezione precedente, mentre la prima coincide con quanto dichiarato nell'introduzione e sarà provata dai teoremi seguenti.  $\square$

Comincio con un facile lemma:

**Lemma 2.3.2.** Se cambio l'ordine degli incroci o dei cerchi in ognuna delle risoluzioni di  $D$  allora  $H(D)$  non cambia.

*Dimostrazione.* Segue dalla commutatività rispettivamente della somma diretta e del prodotto tensore.  $\square$

E proseguo con un altro puramente algebrico

**Lemma 2.3.3.** Siano  $(C, d)$  un complesso di cocatene e  $(C' \subset C, d|_{C'})$  un suo sottocomplesso. Allora

$$H(C) = H\left(\frac{C}{C'}\right) \quad \text{se } C' \text{ è aciclico}$$

$$H(C) = H(C') \quad \text{se } \frac{C}{C'} \text{ è aciclico}$$

dove in questo caso aciclico vuol dire avere omologia nulla.

*Dimostrazione.* La sequenza esatta corta

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{\pi} \frac{C}{C'} \longrightarrow 0$$

induce la sequenza esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_r(C') \xrightarrow{i_*} H_r(C) \xrightarrow{\pi_*} H_r\left(\frac{C}{C'}\right) \xrightarrow{d^r} H_{r+1}(C') \longrightarrow \dots$$

da cui segue subito la tesi.  $\square$

**Teorema 2.3.4.**  $H(D)$  è invariante per mosse di Reidemeister di tipo 1.

*Dimostrazione.* Voglio provare che  $H(\curvearrowright) = H(\curvearrowleft)$ , il caso con l'incrocio negativo si fa in modo analogo.

Sia

$$\mathcal{C} = \llbracket \curvearrowright \rrbracket = \left( \mathbb{P} \circ \mathbb{I} \xrightarrow{m} \llbracket \curvearrowright \rrbracket \{1\} \{1\} \right)$$

dove si intende

$$\llbracket \curvearrowright \rrbracket^{i,j} = \mathbb{P} \circ \mathbb{I}^{i,j} \oplus \llbracket \curvearrowleft \rrbracket \{1\} \{1\}^{i,j}$$

come in [6]. Chiamo

$$\mathcal{C}' = \left( \mathbb{P} \circ \mathbb{I}_{v_+} \xrightarrow{m} \llbracket \curvearrowright \rrbracket \{1\} \{1\} \right) \subset \mathcal{C}$$

un sottocomplesso, dove il primo complesso è  $\text{Span}\{v_+\} \subset V$  per ogni  $V$  spazio vettoriale associato al cerchio speciale di  $\circ$  (e inalterato sugli altri fattori).

Si nota facilmente che  $\mathcal{C}'$  è aciclico quindi, per il lemma,  $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$  dove

$$\mathcal{C}/\mathcal{C}' = \left( \mathbb{P} \circ \mathbb{I}|_{v_+=0} \xrightarrow{m} 0 \right)$$

Ma  $V|_{v_+=0}$  è 1-dimensionale e generato da  $v_-$  sempre per  $V$  associato al cerchio speciale di  $\circ$ ; quindi ho un isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{C}/\mathcal{C}' &= \mathbb{P} \circ \mathbb{I}|_{v_+=0} \rightarrow \llbracket \curvearrowleft \rrbracket \{-1\} \\ v \otimes v_- &\rightarrow v \end{aligned}$$

che conserva il bigrado.

In conclusione  $H(\mathcal{C}) = H(\llbracket \curvearrowleft \rrbracket \{-1\})$  cioè

$$H(\curvearrowright) = H(\mathcal{C})\{1\} = H(\llbracket \curvearrowleft \rrbracket \{-1\})\{1\} = H(\llbracket \curvearrowleft \rrbracket) = H(\curvearrowleft)$$

□

In modo simile si dimostra:

**Teorema 2.3.5.**  $H(D)$  è invariante per mosse di Reidemeister di tipo 2.

*Dimostrazione.* Mostro che  $H(\curvearrowright\curvearrowleft) = H(\equiv)$  dove entrambe le componenti sono orientate da sinistra verso destra. Ho il complesso  $\mathcal{C} = \llbracket \curvearrowright\curvearrowleft \rrbracket$



che si decompone in somma diretta nel modo rappresentato dal seguente cubo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[1]\{1\} \\
 \downarrow & & \downarrow m \\
 \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[1]\{1\} & \rightarrow & \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[2]\{2\}
 \end{array}$$

Considero il seguente sottocomplesso  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}_{v_+}[1]\{1\} \\
 \downarrow & & \downarrow m \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[2]\{2\}
 \end{array}$$

$\mathcal{C}'$  è aciclico, come già detto nella dimostrazione del teorema precedente, quindi  $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}/\mathcal{C}')$  dove  $\mathcal{C}/\mathcal{C}'$  è

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}_{v_+=0}[1]\{1\} \\
 \downarrow & & \downarrow m \\
 \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[1]\{1\} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Considero ora un altro sottocomplesso  $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}/\mathcal{C}'$  determinato da

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{I} \circlearrowleft \mathbb{I}[1]\{1\} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

$(\mathcal{C}/\mathcal{C}')/\mathcal{C}''$  risulta essere aciclico per cui  $H(\mathcal{C}) = H(\mathcal{C}'')$ .

Quindi

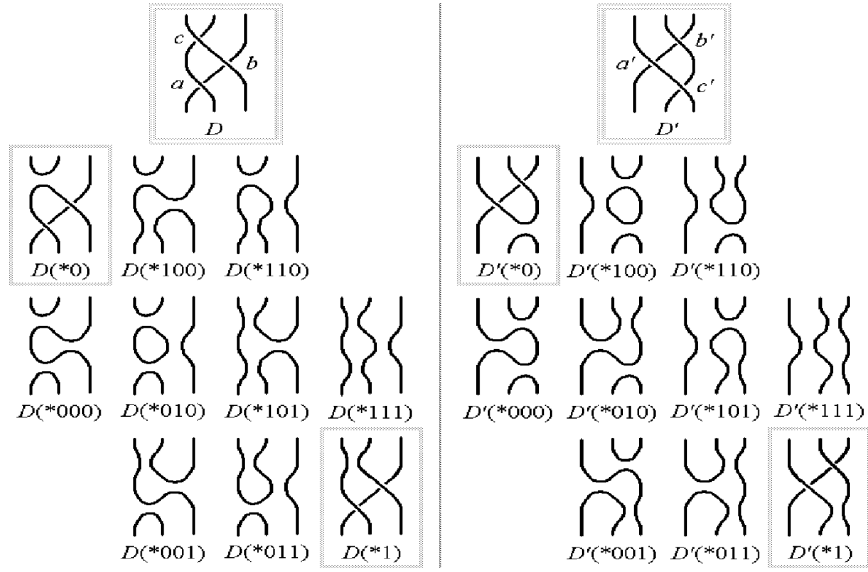
$$H(\infty) = H(\mathcal{C})[-1]\{-1\} = H(\mathcal{C}'')[-1]\{-1\} = H(\equiv)$$

Le altre orientazioni si fanno allo stesso modo.  $\square$

Come già preannunciato per l'ultimo caso userò una strategia diversa, più diretta.

**Teorema 2.3.6.**  $H(D)$  è invariante per mosse di Reidemeister di tipo 3.

*Dimostrazione.* Stavolta quello che dimostrerò è che  $H[\text{diagramma}] = H[\text{diagramma}']$ ; è sufficiente provare questo poiché  $n_+$  ed  $n_-$  non cambiano e gli altri casi sono analoghi. Recupero una figura da [18]:



$a, b, c$  e  $a', b', c'$  sono i primi tre incroci nell'ordine fissato su  $D$  e  $D'$ , gli altri sono nelle stesse posizioni.

Siano  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  come segue:

$$\alpha : \mathbb{I}[D(*110)]\mathbb{I}[2]\{2\} \longrightarrow \mathbb{I}[D(*010)]\mathbb{I}[1]\{1\} = \mathbb{I}[D(*110)]\mathbb{I}[1]\{1\} \otimes V$$

$$z \longrightarrow z \otimes v_+$$

$$\beta : \mathbb{I}[D(*100)]\mathbb{I}[1]\{1\} \longrightarrow \mathbb{I}[D(*010)]\mathbb{I}[1]\{1\}$$

$$z \longrightarrow \alpha \circ \mathbf{d}_{100 \rightarrow 110}(z)$$

$$\alpha' : \mathbb{I}[D'(*110)]\mathbb{I}[2]\{2\} \longrightarrow \mathbb{I}[D'(*100)]\mathbb{I}[1]\{1\} = \mathbb{I}[D'(*110)]\mathbb{I}[1]\{1\} \otimes V$$

$$z \longrightarrow z \otimes v_+$$

$$\beta' : \mathbb{I}[D'(*010)]\mathbb{I}[1]\{1\} \longrightarrow \mathbb{I}[D'(*100)]\mathbb{I}[1]\{1\}$$

$$z \longrightarrow -\alpha' \circ d'_{010 \rightarrow 110}(z)$$

Valgono le seguenti decomposizioni:

$$\mathbb{[D]} = X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$$

$$X_1 = \{x + \beta(x) + y \mid x \in \mathbb{[D(*100)]}[1]\{1\}, y \in \mathbb{[D(*1)]}[1]\{1\}\}$$

$$X_2 = \{x + dy \mid x, y \in \mathbb{[D(*000)]}\}$$

$$X_3 = \{\alpha(x) + d \circ \alpha(y) \mid x, y \in \mathbb{[D(*110)]}[2]\{2\}\}$$

$$\mathbb{[D']} = Y_1 \oplus Y_2 \oplus Y_3$$

$$Y_1 = \{x + \beta'(x) + y \mid x \in \mathbb{[D'(*010)]}[1]\{1\}, y \in \mathbb{[D'(*1)]}[1]\{1\}\}$$

$$Y_2 = \{x + d'y \mid x, y \in \mathbb{[D'(*000)]}\}$$

$$Y_3 = \{\alpha'(x) + d' \circ \alpha'(y) \mid x, y \in \mathbb{[D'(*110)]}[2]\{2\}\}$$

$X_2, X_3, Y_2, Y_3$  sono aciclici e chiaramente ho che

$$\mathbb{[D(*100)]}[1]\{1\} = \mathbb{[D'(*010)]}[1]\{1\} \quad \mathbb{[D(*1)]}[1]\{1\} = \mathbb{[D'(*1)]}[1]\{1\}$$

Per cui  $X_1$  è isomorfo a  $Y_1$  tramite  $\rho : x + \beta(x) + y \rightarrow x + \beta'(x) + y$  che preserva il bigrado quindi

$$H\mathbb{[D]} = H(X_1) = H(Y_1) = H\mathbb{[D']}$$

□

La dimostrazione del teorema 2.3.1 è così completa.

Per ognuna delle tre mosse è stato fondamentale il fatto che alcuni complessi fossero aciclici: nell'articolo originale di Khovanov ([15]) quest'aspetto è mostrato molto più dettagliatamente.

## 2.4 Risultati generali

Parlerò tra breve di alcune delle proprietà di  $H$ , già provate da Khovanov in [15]. La maggior parte di queste mi sarà poi utile in seguito.

La dimostrazione della seguente proposizione non è presente nell'articolo originale di Khovanov [15] dove viene enunciata per la prima volta; la prova inserita qui è nuova ed è stata scritta da me e da Carlo Collari.

**Proposizione 2.4.1.** *Se  $L$  è un link con  $n$  componenti allora  $C^{i,j}(L) = 0$  se  $j \equiv n + 1 \pmod{2}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha$  la 0-risoluzione di  $D$ , diagramma per  $L$ . Allora in  $\bar{C}(D)$  gli unici addendi diversi da zero hanno tutti la stessa parità di  $k_\alpha$ : infatti i gradi quantici degli addendi non nulli di  $\bar{C}^0$  hanno differenza pari tra loro e inoltre i vertici sono tutti collegati da mappe di bigrado  $(1, 0)$ .

In base a questo per dimostrare il teorema mi basta provare che

$$k_\alpha + n_+(D) - 2n_-(D) \equiv n \pmod{2}$$

cioè che

$$k_\alpha \equiv n_+(D) + n \pmod{2}$$

Ciò lo dimostrerò per induzione sul numero  $c(D)$  di incroci nel diagramma:

- $c(D) = 0$

$D$  è un diagramma banale dell'unlink a  $n$  componenti  $(\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc)$  quindi  $k_\alpha = n$  e  $n_+(D) = 0$  da cui segue la congruenza.

- $c(D) \rightarrow c(D) + 1$

Suppongo che  $n_+(D) > 0$ . Sia  $D(*0)$  il diagramma ottenuto applicando una 0-risoluzione ad un incrocio positivo di  $D$ . Allora ho che  $k_\alpha$  rimane invariato mentre il numero di incroci positivi cala di uno; inoltre è facile verificare che cambia di  $\pm 1$  anche il numero di componenti.

Per cui l'ipotesi induttiva per  $D(*0)$  mi dice che vale

$$k_\alpha \equiv n_+(D) - 1 + n \pm 1 \equiv n_+(D) + n \pmod{2}$$

che è la tesi.

Suppongo  $n_+(D) = 0$ . Considero  $D^*$  il diagramma riflesso di  $D$ , per il quale so già che la tesi vale; allora detto  $k_\alpha^*$  l'equivalente di  $k_\alpha$  per  $D^*$ , è un fatto noto, [19], che  $k_\alpha + k_\alpha^* \equiv c(D) \pmod{2}$ . Quindi

$$k_\alpha \equiv c(D) + k_\alpha^* \equiv c(D) + c(D) + n \equiv n \equiv n_+(D) + n \pmod{2}$$

e ho finito. □

Dalla 2.4.1 si ha l'immediato corollario

**Corollario 2.4.2.** *Se  $L$  è un link con  $n$  componenti allora  $H^{i,j}(L) = 0$  se  $j \equiv n + 1 \pmod{2}$ .*

**Proposizione 2.4.3.** *Se  $L = L_1 \sqcup L_2$  allora  $C(L) = C(L_1) \otimes C(L_2)$ .*

*Dimostrazione.* Dato che

$$C(L) = \bar{C}(L)[-n_{1,-} - n_{2,-}]\{n_{1,+} + n_{2,+} - 2n_{1,-} - 2n_{2,-}\}$$

e

$$C(L_i) = \bar{C}(L_i)[-n_{i,-}]\{n_{i,+} - 2n_{i,-}\}$$

basta provare che  $\bar{C}(L) = \bar{C}(L_1) \otimes \bar{C}(L_2)$  ossia:

$$\bar{C}(L)^{i,j} = \bigoplus_{h,k} \left( \bar{C}^{h,k}(L_1) \otimes \bar{C}^{i-h,j-k}(L_2) \right)$$

Ma quest'ultima affermazione risulta evidente osservando il cubo delle risoluzioni di  $D = D_1 \sqcup D_2$ , diagramma per  $L$ , e per il fatto che ad ogni vertice di tale cubo trovo unioni disgiunte di risoluzioni di  $D_1$  e  $D_2$ .  $\square$

E come prima:

**Corollario 2.4.4.** *Se  $L = L_1 \sqcup L_2$  allora  $H(L) = H(L_1) \otimes H(L_2)$ .*

Dovrei verificare il comportamento di  $d$ , ma è un facile esercizio.

Descrivo adesso la costruzione del cosiddetto complesso duale di  $(C(D), d)$ .

Sia  $(C^*)^{i,j} = (C^{-i,-j})^*$  in modo che

$$(C^*)^i = \bigoplus_j (C^*)^{i,j} = \bigoplus_j (C^{-i,-j})^* = \left( \bigoplus_j C^{-i,-j} \right)^* = (C^{-i})^*$$

e

$$C^* = \bigoplus_i (C^*)^i = \bigoplus_i (C^{-i})^* = \left( \bigoplus_i C^{-i} \right)^* = C^*$$

per cui  $C^*$  è effettivamente lo spazio duale di  $C$  (il primo  $C$  è una definizione, il secondo il duale "vero"). Sia inoltre

$$(d^*)^{i,j} : (C^*)^{i,j} = (C^{-i,-j})^* \longrightarrow (C^*)^{i+1,j} = (C^{-i-1,-j})^*$$

definita come la mappa duale di  $d^{-i-1,-j} : C^{-i-1,-j} \rightarrow C^{-i,-j}$  estesa a  $C^*$  per linearità.

**Definizione 26.** Ho così ottenuto un altro complesso di cocatene  $(C^*(D), d^*)$  che chiamo, appunto, complesso duale del mio complesso di partenza.

È un facile esercizio di algebra dimostrare che

$$H_{i,j}(C^*(D), d^*) = H_{-i,-j}(C(D), d) \quad \text{per ogni } i, j$$

Il motivo per cui questa costruzione è importante e del perché ne ho parlato sta nella prossima proposizione.

**Proposizione 2.4.5.** *Siano  $D$  il diagramma di un link  $L$  e  $D^*$  il suo riflesso. Allora detto  $(C(D), d)$  il complesso di Khovanov di  $D$  risulta che*

$$(C(D^*), d_{D^*}) = (C^*(D), d^*)$$

*In particolare  $H^{i,j}(L^*) = H^{-i,-j}(L)$ .*

*Dimostrazione.* Una risoluzione  $\alpha$  per  $D^*$  risulta identica alla risoluzione complementare in  $D$ , cioè quella che gli zeri e gli uno scambiati. Il cubo quindi sarà identico se non per il fatto che è invertito da destra a sinistra.

Ad ogni cerchio in ciascun vertice associo lo spazio vettoriale  $V^*$ , duale di  $V$ , che ha come base  $\{v_+^*, v_-^*\}$  dove  $v_+^*$  e  $v_-^*$  hanno grado quantico rispettivamente  $-1$  e  $1$  (per definizione).

Definendo le mappe  $\tilde{m}$  e  $\tilde{\Delta}$  come nella sezione 2.2 si vede subito che

$$\tilde{m} = \Delta^* \quad \text{e} \quad \tilde{\Delta} = m^*$$

Per cui il differenziale su  $\bar{C}(D^*)$  è proprio  $d^*$ . Resta solo da provare che  $C^{i,j}(D^*) = (C^{-i,-j})^*(D)$ :

se un elemento ha grado omologico  $h$  in  $\bar{C}(D)$  allora ha grado omologico  $n - h$  in  $\bar{C}(D^*)$  da cui

$$\begin{aligned} i_{D^*} &= n - h - n_+ = n_+ + n_- - h - n_+ = \\ &= n_- - h = -(h - n_-) = -i_D \end{aligned}$$

se un elemento ha grado quantico  $k + (i_D + n_-)$  in  $\bar{C}(D)$  allora ha grado quantico  $-k + (i_{D^*} + n_+) = -k - i_D + n_+$  in  $\bar{C}(D^*)$  (quando dualizzo  $V$  i gradi quantici si scambiano segno per come li ho definiti) da cui

$$\begin{aligned} j_{D^*} &= -k - i_D + n_+ + n_- - 2n_+ = -(k + i_D - n_- + n_+) = \\ &= -(k + i_D + n_- + n_+ - 2n_-) = -j_D \end{aligned}$$

e ho finito. □

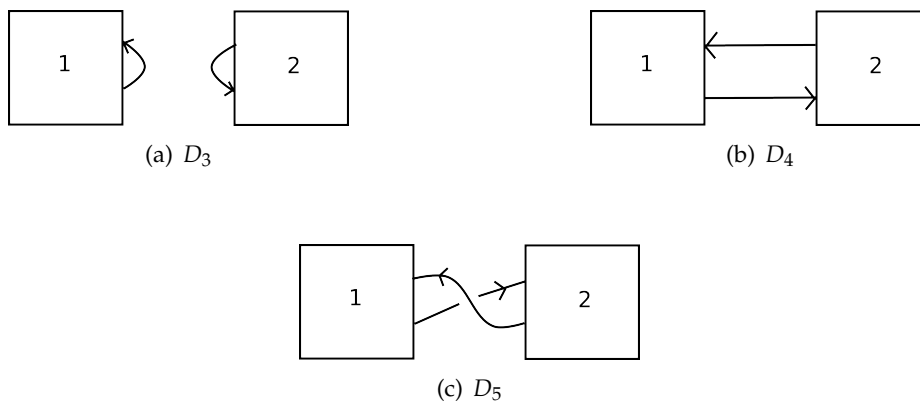
Infine, come ultimo risultato, vediamo delle sequenze esatte che permettono di calcolare l'omologia di Khovanov della somma connessa di due nodi. La dimostrazione è quella in [15].

**Proposizione 2.4.6.** *Siano  $K_1, K_2$  nodi. Allora esistono le seguenti successioni esatte lunghe per ogni  $j$ :*

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^{i-1, j-1}(K_1 \sqcup K_2) \longrightarrow H^{i-1, j-2}(K_1 \sharp K_2) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{i, j}(K_1 \sharp K_2) \longrightarrow H^{i, j-1}(K_1 \sqcup K_2) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* È ovvio che  $H(K_1 \# K_2) = H(K_1 \# (-K_2))$ . Siano  $D_1$  e  $D_2$  diagrammi per  $K_1$  e  $K_2$  allora

Figura 2.3



$D_3, D_4$  e  $D_5$  sono diagrammi per  $K_1 \sqcup K_2, K_1 \# K_2$  e  $K_1 \# (-K_2)$ ; risolvendo l'incrocio in  $D_5$  ottengo la seguente successione esatta corta:

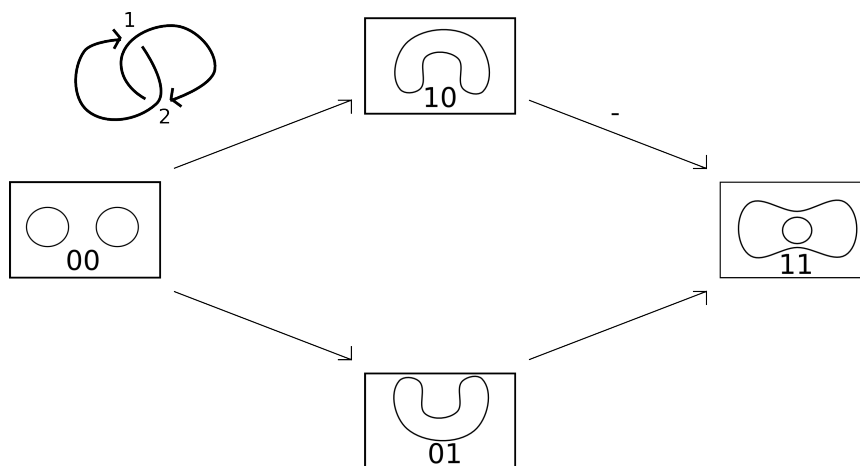
$$0 \longrightarrow C(D_3)[1]\{1\} \longrightarrow C(D_5)[1]\{2\} \longrightarrow C(D_4) \longrightarrow 0$$

i dettagli sono nella 3.2.1; tale successione induce

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow H^{i-1, j-1}(D_3) \longrightarrow H^{i-1, j-2}(D_5) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^{i, j}(D_4) \longrightarrow H^{i, j-1}(D_3) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

da cui la tesi. □

Concludo il capitolo con un calcolo effettivo dell'omologia di Khovanov per un link. Per comodità ne scelgo uno semplice: il link di Hopf.



Il complesso  $(\bar{C}(\text{Hf}), d)$  è

$$0 \longrightarrow V \otimes V \xrightarrow{d^0} V \oplus V\{1\} \xrightarrow{d^1} V \otimes V\{2\} \longrightarrow 0$$

dove

$$d^0 : \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow (v_+, v_+) \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow (v_-, v_-) \\ v_- \otimes v_+ \rightarrow (v_-, v_-) \\ v_- \otimes v_- \rightarrow (0, 0) \end{cases} \quad d^1 : \begin{cases} (v_+, 0) \rightarrow -v_- \otimes v_+ - v_+ \otimes v_- \\ (v_-, 0) \rightarrow -v_- \otimes v_- \\ (0, v_+) \rightarrow v_- \otimes v_+ - v_+ \otimes v_- \\ (0, v_-) \rightarrow v_- \otimes v_- \end{cases}$$

Quindi

$$\bar{H}^{i,j}(\text{Hf}) = \frac{\text{Ker } d^{i,j}}{\text{Im } d^{i-1,j}} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } i = (2,4), (2,2), (0,-2), (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e, dato che  $n_+ = 0$  e  $n_- = 2$ , infine ho che

$$H^{i,j}(\text{Hf}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } i = (0,0), (0,-2), (-2,-6), (-2,-4) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



## Capitolo 3

# H-sottigliezza di link alternanti

### 3.1 Una congettura dimostrata

Prima di tutto mi occupo di cosa significa H-sottigliezza:

**Definizione 27.** Un link è H-sottile se  $H(L)$  ha supporto contenuto in due rette nello spazio  $\mathbb{Z}^2$  della forma  $j = 2i + s \pm 1$ , dove gli assi sono  $i$  e  $j$  che rappresentano il bigrado di  $H$ .

È stato congetturato in [10] che, per ogni nodo alternante  $K$ ,  $H^{i,j}(K) = 0$  se  $i$  e  $j$  non appartengono alle rette  $j = 2i - \sigma(K) \pm 1$ .

Eun Soo Lee ha dimostrato [18] che questa congettura è vera, non solo per ogni nodo alternante, ma per ogni link alternante non split; ossia ha fornito la prova del seguente teorema:

**Teorema 3.1.1.** *Ogni  $L$  link alternante non split è H-sottile.*

*In più il supporto di  $H(L)$  è contenuto nelle rette  $j = 2i - \sigma(L) \pm 1$  e, di conseguenza, se due link verificanti le ipotesi hanno la stessa omologia di Khovanov allora hanno anche la stessa segnatura.*

Lo scopo di questo capitolo sarà quindi descrivere tale dimostrazione che risulterà essere una semplice induzione sul numero di incroci, ma prima di arrivare a questo punto mi serviranno diverse altre cose di cui parlerò nella sezione successiva.

Prima di cominciare con il divertimento, però, anticipo che in realtà esiste un'ulteriore generalizzazione del teorema 3.1.1 ad una classe ancora più generale di link: i cosiddetti link quasi-alternanti; di questo parlerò brevemente alla fine del prossimo capitolo.

## 3.2 Preliminari

### 3.2.1 Alcune notazioni e sequenze esatte

Introduco un'altra definizione che mi sarà utile nel corso del capitolo per alleggerire la notazione: chiamo  $\bar{H}(D) = H(\bar{C}(D)) = H[\bar{D}]$  per ogni diagramma  $D$ . È possibile dimostrare che tale omologia non è un invariante.

Inoltre per convenzione  $D(*abc)$  indica che i primi tre incroci, secondo l'ordine stabilito, vanno risolti come indicato; l'ordine è da destra verso sinistra (c il primo e così via) questo affinché sia rispettata la convenzione sui segni di  $d$  introdotta nella sezione 2.2.

Come prima cosa vediamo una proposizione sulle sequenze esatte:

**Proposizione 3.2.1.** *La seguente sequenza è esatta*

$$0 \longrightarrow \bar{C}(D(*1))[1]\{1\} \longrightarrow \bar{C}(D) \longrightarrow \bar{C}(D(*0)) \longrightarrow 0$$

per cui

$$\longrightarrow \bar{H}^{i-1}(D(*1))\{1\} \longrightarrow \bar{H}^i(D) \longrightarrow \bar{H}^i(D(*0)) \xrightarrow{\delta} \bar{H}^i(D(*1))\{1\} \longrightarrow$$

è esatta.

In particolare il supporto di  $\bar{H}(D)$  è contenuto nell'unione dei supporti di  $\bar{H}(D(*0))$  e  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$ .

*Dimostrazione.* Ho che

$$\bar{C}(D) = \bar{C}(D(*0)) \oplus \bar{C}(D(*1))[1]\{1\} \text{ e } d(y+z) = d_0(y) + d_{0 \rightarrow 1}(y) - d_1(z)$$

È evidente che la successione corta dell'enunciato è esatta e la mappa

$$\delta : \bar{H}^i(D(*0)) \rightarrow \bar{H}^{i+1}(D(*1))[1]\{1\}$$

è indotta da  $d_{0 \rightarrow 1}$ . □

### 3.2.2 Proprietà di colorazioni di diagrammi alternanti

Per un diagramma alternante le colorazioni a scacchiera risultano particolarmente importanti come mi appresto a mostrare in questa sottosezione.

Sia  $D$  il diagramma di un link visto in  $S^2$ .

Le regioni di  $S^2 \setminus D$  possono essere colorate di bianco e nero in modo alternato (come una scacchiera, appunto). Per ogni incrocio di  $D$  posso avere due situazioni:



Figura 3.1

Incroci alternanti adiacenti avranno lo stesso tipo di colorazione quindi se  $D$  è il diagramma di un link alternante le colorazioni hanno tutti gli incroci di tipo A o tutti di tipo B. Inoltre scambiare i colori scambia il tipo di ogni incrocio.

Per quanto riguarda le risoluzioni degli incroci vale il seguente diagramma:

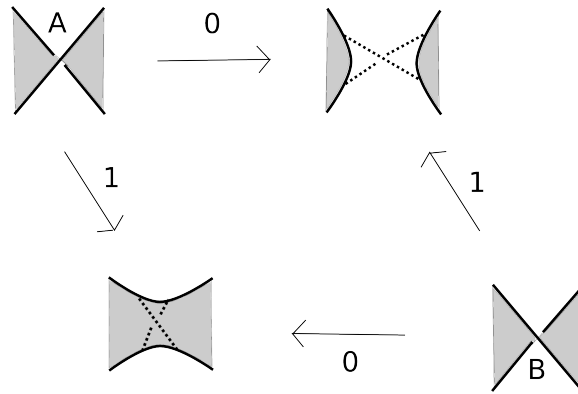


Figura 3.2

**Definizione 28.** Per un diagramma alternante non split  $D$  di un link chiamo colorazione di  $D$  esclusivamente quella in cui tutti gli incroci sono di tipo A.

Mentre chiamo colorazione di una risoluzione di  $D$  la colorazione che il diagramma risolto riceve dalla colorazione di  $D$ .

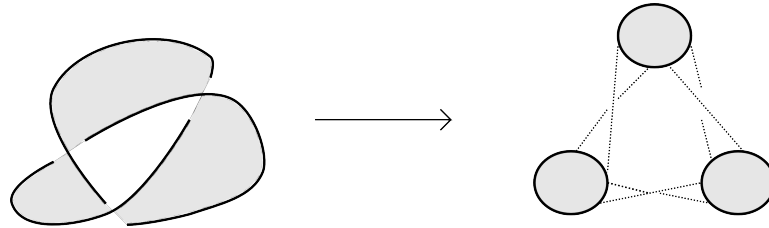
Quando applico 0-risoluzioni a tutti gli incroci di  $D$  ottengo un diagramma che chiamo  $D(\emptyset)$ : come si osserva dalla figura 3.2, nella colorazione di  $D(\emptyset)$  la traccia di ogni incrocio giace in una regione bianca.

Ecco, quindi, il primo risultato del capitolo:

**Proposizione 3.2.2.** Sia  $D$  un diagramma ridotto, alternante e non split di un link, allora in  $D(\emptyset)$ :

1. Le componenti bordano dischi neri disgiunti nella colorazione corrispondente.

2. Per ogni coppia di dischi neri esiste una catena, di dischi neri, che li connette; dove due dischi neri sono connessi se la traccia di almeno un incrocio li unisce.
3. Nessuna traccia connette un disco nero a se stesso.

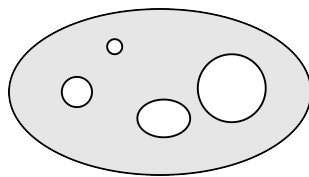


*Dimostrazione.* Ad ogni incrocio la 0-risoluzione separa regioni nere adiacenti (Figura 3.2).

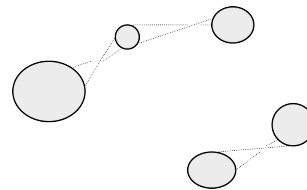
Questo mi dà una corrispondenza tra le regioni nere nella colorazione di  $D$  e quelle nella colorazione di  $D(\emptyset)$  e in quest'ultima non è presente nessuna traccia nei dischi neri, da cui:

1. Se esiste una regione nera che non è un disco allora  $D$  è split.
2. Se esiste una coppia di dischi neri non connessa da una catena allora  $D$  è split.
3. Se una traccia di un incrocio connette un disco a se stesso allora  $D$  non è ridotto.

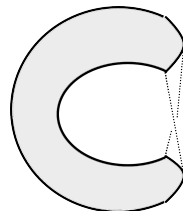
Figura 3.3



(a)  $D$  è ovviamente split



(b) Anche in questo caso è evidente



(c)  $D$  non è ridotto

□

Per ogni diagramma  $D$  siano  $\chi(D)$  l'insieme ordinato dei suoi incroci,  $c(D)$  la cardinalità di  $\chi(D)$  e  $o(D)$  il numero di componenti di  $D(\emptyset)$ , ossia il numero di dischi neri nella colorazione di  $D(\emptyset)$ .

Definisco, inoltre,  $D(\zeta)$ , con  $\zeta(D) \subset \chi(D)$ , il diagramma ottenuto applicando 1-risoluzioni agli elementi di  $\zeta(D)$  e 0-risoluzioni agli altri. Allora vale:

**Proposizione 3.2.3.**  $D(\chi) = D^*(\emptyset)$  e, se  $D$  è alternante non split,  $o(D) + o(D^*) = c(D) + 2$ .

*Dimostrazione.* La prima affermazione è una semplice osservazione, mentre la seconda è provata in [19]. □

Ora sono in grado di dimostrare un'importante proposizione.

**Proposizione 3.2.4.** Sia  $D$  un diagramma ridotto, alternante e non split tale che  $c(D) > 0$ .

Allora vale almeno uno dei seguenti fatti:

a) Esiste una coppia di dischi neri nella colorazione di  $D(\emptyset)$  connessa da esattamente un incrocio.

b) Esiste una coppia di dischi neri nella colorazione di  $D^*(\emptyset)$  connessa da esattamente un incrocio.

c)  $D$  è somma connessa di un link di Hopf e di un altro diagramma  $D'$  ridotto, alternante e non split tale che  $c(D) = c(D') + 2$  (Figura 3.4).



Figura 3.4

*Dimostrazione.* Dato che  $o(D) + o(D^*) = c(D) + 2$ , vale uno e uno solo dei seguenti 3 fatti:

1.  $o(D) > \frac{c(D)}{2} + 1$
2.  $o(D^*) > \frac{c(D)}{2} + 1$
3.  $o(D) = o(D^*) = \frac{c(D)}{2} + 1$

1.  $\Rightarrow$  **a)**

Ho che  $o(D)$  dischi neri sono connessi tra loro con catene di dischi quindi esistono almeno  $o(D) - 1$  coppie distinte di dischi connesse da almeno un incrocio.

Dato che  $2(o(D) - 1) > c(D)$  almeno una di tali coppie è connessa da esattamente un incrocio.

2.  $\Rightarrow$  **b)**

È uguale al caso precedente con  $D^*$  al posto di  $D$ .

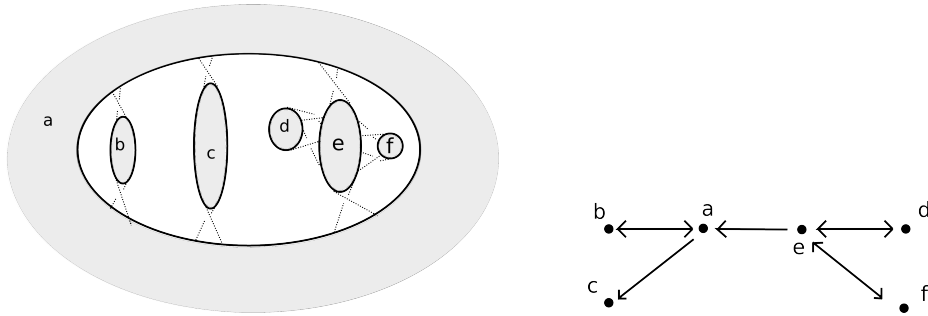
3.  $\cup$  non **a)**  $\cup$  non **b)**  $\Rightarrow$  **c)**

Se non vale **a)** allora esistono esattamente  $o(D) - 1$  coppie distinte di dischi neri connesse da esattamente 2 incroci, perché le coppie distinte sono almeno  $o(D) - 1$  come prima, ma stavolta per 3. vale  $2(o(D) - 1) = c(D)$ .

Considero un grafo formato da  $o(D)$  vertici e  $o(D) - 1$  lati; ogni vertice è associato ad un disco nero e ogni lato ad una coppia di dischi connessa da 2 incroci.

Il grafo risulta connesso poiché  $D$  è non split ed inoltre non può contenere loop visto che, altrimenti, il numero dei lati sarebbe almeno uguale a  $o(D)$ . Ne consegue che il grafo è un albero.

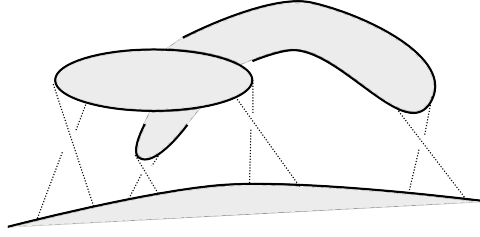
Per ogni lato  $\{a, b\}$ , che connette i vertici  $a$  e  $b$ , marco la  $a$ -fine con una freccia se i due incroci tra  $a$  e  $b$  sono adiacenti sul bordo di  $a$ .



Un vertice dell'albero si dice terminale se è incidente ad un solo lato; un lato si dice terminale se è incidente ad un vertice terminale.

Se  $a$  è un vertice terminale allora il suo lato terminale corrispondente ha la  $a$ -fine marcata.

Se  $b$  non è un vertice terminale allora almeno due lati incidenti ad esso sono marcati nella  $b$ -fine, poiché non posso avere situazioni di questo tipo per la proposizione 3.2.2:



Se  $o(D) = 2$  allora ho un solo lato che è un lato terminale con entrambi i vertici marcati.

Se  $o(D) > 2$ , detto  $p$  il numero dei vertici terminali, allora il numero di lati terminali è anch'esso  $p$ . Quindi ci sono almeno  $p + 2(o(D) - p)$  estremi marcati, ma il numero di lati non terminali è  $o(D) - 1 - p$ .

In entrambi i casi ho che esiste almeno un lato terminale con entrambi i vertici marcati:

$$p \cdot 1 + 2(o(D) - p - 1) = 2o(D) - p - 2 < 2o(D) - p$$

Questo implica c). □

Applico ora i risultati ottenuti per dimostrare delle proprietà dell'omologia di Khovanov che poi utilizzerò nell'ultima sezione di questo capitolo per provare il teorema 3.1.1.

**Lemma 3.2.5.** *Sia  $D$  un diagramma ridotto, alternante e non split. Allora  $\bar{H}(D)$  ha supporto contenuto in*

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq c(D) \\ -o(D) \leq j \leq 2c(D) - o(D) + 2 \end{cases} \text{ per ogni } i, j$$

e vale

$$\bar{H}^{0, -o(D)}(D) \cong \bar{H}^{c(D), 2c(D) - o(D) + 2}(D) \cong \mathbb{Q}$$

*Dimostrazione.* Ovviamente  $\mathbb{[D]}^i = 0$  se  $i > c(D)$  o  $i < 0$  quindi  $\bar{H}^{i,j}(D)$  è nullo a meno che  $0 \leq i \leq c(D)$ . Inoltre vale  $-o(D) \leq j \leq 2c(D) - o(D) + 2$ , infatti:

ricordando che, nel cubo di  $D$ , passando da una risoluzione ad altezza  $i$  ad una di altezza  $i + 1$  il numero di componenti cambia di  $\pm 1$  e l'equazione (2.2) segue subito la disuguaglianza

$$\max\{j \mid \mathbb{[D]}^{i,j} \neq 0\} \leq \max\{j \mid \mathbb{[D]}^{i+1,j} \neq 0\} \quad \forall i \quad (3.1)$$

quindi basta vedere cosa succede in  $\mathbb{[D]}^{c(D)}$  dove risulta

$$\begin{aligned} \max\{j \mid \mathbb{[D]}^{c(D),j} \neq 0\} &= o(D^*) + c(D) = \text{(proposizione 3.2.3)} \\ &= 2c(D) - o(D) + 2 \end{aligned}$$

allo stesso modo è

$$\min\{j \mid \llbracket D \rrbracket^{i,j} \neq 0\} \leq \min\{j \mid \llbracket D \rrbracket^{i+1,j} \neq 0\} \quad \forall i \quad (3.2)$$

quindi osservo  $\llbracket D \rrbracket^0$  e ho

$$\min\{j \mid \llbracket D \rrbracket^{0,j} \neq 0\} = -o(D)$$

Per la proposizione 3.2.2  $D(\emptyset)$  ha un cerchio in più di ogni  $D(a)$  con  $a \in \chi$ , poiché due dischi neri distinti si uniscono; quindi la (3.1) è stretta e ho che:

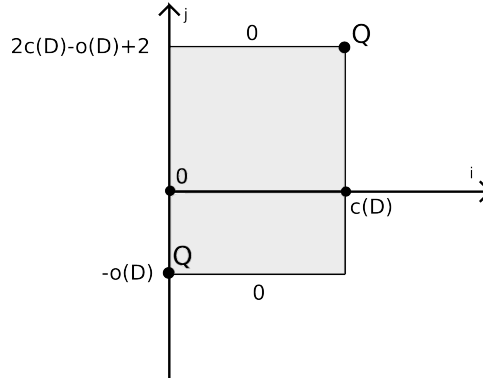
$$\llbracket D \rrbracket^{i,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } i = 0, j = -o(D) \\ 0 & \text{se } i > 0, j = -o(D) \end{cases}$$

Allo stesso modo  $D(\chi) = D^*(\emptyset)$  ha un cerchio in più di ogni altro  $D(\chi \setminus a) = D^*(a)$  quindi anche la (3.2) è stretta e

$$\llbracket D \rrbracket^{i,j} \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } i = c(D), j = 2c(D) - o(D) + 2 \\ 0 & \text{se } i < c(D), j = 2c(D) - o(D) + 2 \end{cases}$$

□

Si nota che l'ipotesi che il diagramma  $D$  sia ridotto è fondamentale per provare la seconda parte dell'enunciato. Il risultato di questa proposizione è riassunto nel seguente grafico:



Il supporto di  $\tilde{H}(D)$  è contenuto nell'area grigia

**Corollario 3.2.6.** *Se  $D$  è un diagramma ridotto, alternante e non split allora  $D(\emptyset)$  ha una componente in più rispetto a  $D(a)$  per ogni  $a \in \chi$ .*

*Lo stesso vale per  $D^*$ .*

*Dimostrazione.* Ne ho già parlato nella dimostrazione precedente (lemma 3.2.5). □



Prima di concludere la sottosezione ecco un'altra proposizione "geometrica", che in quanto ad importanza, però non è certo inferiore alle precedenti.

**Proposizione 3.2.7.** *Sia  $D$  un diagramma ridotto, alternante e non split e sia  $a \in \chi$  il primo incrocio di  $D$ . Allora:*

- $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono a loro volta alternanti e non split (ma non ridotti).
- $D(*0)$  ha la proprietà che  $D(*0)(\emptyset)$  ha un cerchio in più rispetto a  $D(*0)(b)$  per ogni  $b \in (\chi \setminus a)$ .
- Se vale la **a)** della 3.2.4 per  $D$  allora anche  $D(*1)$  possiede la precedente proprietà, stando attenti al fatto che l'incrocio della proposizione deve essere esattamente  $a$  (ed è quello che viene 1-risolto).

*Dimostrazione.* Un caso alla volta:

- L'alternanza è ovvia. Il motivo per cui sono non split è che i dischi neri nella colorazione sono tutti connessi tra loro:  
Questo è ovvio per  $D(*1)$ , mentre per  $D(*0)$  osservo che se dei dischi di  $D(\emptyset)$  si sono sconnessi dopo aver eliminato  $a$  allora  $D$  era della stessa forma della figura 1.7 e quindi non ridotto, ma ciò è assurdo.
- Il numero di cerchi di  $D(*0)(\emptyset)$  è identico a quello di  $D(\emptyset)$  e, per lo stesso motivo, quello di  $D(*0)(b)$  è uguale a quello di  $D(b)$  per ogni  $b \in (\chi \setminus a)$ ; per i due nuovi insiemi so già che vale la proprietà dell'enunciato per il corollario 3.2.6.
- Se vale la **a)** ho che esiste una coppia di dischi neri nella colorazione di  $D(\emptyset)$  connessi solo dall'incrocio  $a$ : questa condizione mi dice che anche  $D(*1)$  è ridotto e quindi la tesi segue dal corollario 3.2.6 come prima.

□

Da qui ho il seguente corollario:

**Corollario 3.2.8.** *Se  $D$  è un diagramma ridotto, alternante e non split tale che vale la **a)** della proposizione 3.2.4, allora  $\tilde{H}(D(*0))$  e  $\tilde{H}(D(*1))$  hanno supporto contenuto rispettivamente in*

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq c(D(*\epsilon)) \\ -o(D(*\epsilon)) \leq j \leq 2c(D(*\epsilon)) - o(D(*\epsilon)) + 2 \end{cases} \quad \text{per ogni } i, j \text{ e } \epsilon = 0, 1$$

e vale

$$\tilde{H}^{0, -o(D(*\epsilon))}(D(*\epsilon)) \cong \tilde{H}^{c(D(*\epsilon)), 2c(D(*\epsilon)) - o(D(*\epsilon)) + 2}(D(*\epsilon)) \cong \mathbb{Q}$$

*Dimostrazione.* Segue dalla dimostrazione del lemma 3.2.5 e dalla proposizione 3.2.7. □

### 3.2.3 Segnatura di un link alternante non split

In questa sottosezione, come si intuisce dal titolo, parlerò della segnatura di un link. Ho già parlato di questo invariante nella sezione 1.2, ma stavolta voglio definirla diversamente:

infatti, la definizione 12, che fa uso delle matrici di Seifert, per quanto sempre applicabile ha lo svantaggio di essere complicata per il calcolo effettivo di  $\sigma(L)$ .

Mi accingo, quindi, come già fatto per il polinomio di Jones nella (1.1), a definire la segnatura in maniera combinatoria. Il risultato a cui giungo, comunque, vale solo per i link alternanti e non split.

Sia  $D$  un diagramma orientato, colorato a scacchiera e siano  $X_0, \dots, X_n$  le regioni bianche di  $D$ , poiché assumerò che  $D$  sia ridotto suppongo che ogni incrocio sia incidente a due regioni bianche distinte. Allora definisco

$$\eta(a) = \pm 1 \quad \forall a \in \chi(D)$$

con la convenzione mostrata in figura



Siano adesso

$$g_{i,j} = \begin{cases} - \sum_{a \text{ incidenti a } X_i, X_j} \eta(a) & \text{se } i \neq j \\ - \sum_{0 \leq k \leq n, k \neq i} g_{i,k} & \text{se } i = j \end{cases} \quad \text{per } 0 \leq i, j \leq n$$

Si chiama matrice di Goeritz la matrice  $n \times n$  simmetrica

$$G(D) = (g_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

In [11], Gordon e Litherland hanno dimostrato il seguente teorema, che mette in relazione la segnatura di un link con la matrice di Goeritz di un suo diagramma.

**Teorema 3.2.9.**

$$\sigma(L) = \text{sgn } G(D) - \mu(D) \quad \text{dove } \mu(D) = \sum_{a \text{ di tipo 2}} \eta(a)$$



Uso questo teorema per dimostrare tale proposizione:

**Proposizione 3.2.10.** *Per ogni link alternante non split  $L$  e  $D$  diagramma alternante ridotto di  $L$  vale*

$$\sigma(L) = o(D) - n_+(D) - 1$$

*Dimostrazione.* Considero la colorazione di  $D$  in cui tutti gli incroci sono di tipo B (figura 3.1), allora  $\eta(a) = 1$  per ogni  $a \in \chi(D)$  e gli incroci positivi sono tutti e soli quelli di tipo 2.

Inoltre il fatto che  $D$  è ridotto mi dice che ogni incrocio è incidente a due regioni bianche distinte nella B-colorazione di  $D$  (3.2.2), quindi sono nelle ipotesi del teorema 3.2.9:

$$\begin{cases} g_{i,j} \leq 0 & \forall i \neq j \\ g_{i,i} \geq 0 & \forall i \end{cases} \quad \text{e} \quad \mu(D) = n_+(D)$$

Inoltre per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  vale

$$\langle x, G(D)x \rangle = \sum_{1 \leq i, j \leq n} g_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |g_{i,j}| (x_i - x_j)^2 + \sum_{i=1}^n |g_{i,0}| x_i^2 \geq 0$$

e  $G(D)$  è definita positiva.

In conclusione

$$\sigma(L) = \text{sgn } G(D) - \mu(D) = \text{rg } G(D) - n_+(D) = o(D) - 1 - n_+(D)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla 3.2.2. □

### 3.3 Dimostrazione del teorema

Sono ora giunto alla dimostrazione vera e propria del teorema 3.1.1; come già detto è una dimostrazione per induzione sul numero di incroci di un diagramma del link.

Per prima cosa proverò che il supporto di  $\bar{H}(D)$  è contenuto sulle rette  $j = 2i - s(D) \pm 1$  con  $s(D) \in \mathbb{Z}$ ; poi farò vedere che, dopo aver shiftato,  $s(D) = \sigma(L)$ .

**Teorema 3.3.1.** *Sia  $D$  un diagramma alternante non split. Allora  $\bar{H}(D)$  ha supporto contenuto sulle rette  $j = 2i - s(D) \pm 1$  per un certo intero  $s$  che dipende da  $D$ .*

*Inoltre  $\bar{H}^{c(D),j}(D)$  è non nullo per il punto  $(c(D), j)$  che appartiene alla prima retta e  $\bar{H}^{0,j}(D)$  è non nullo per il punto  $(0, j)$  che appartiene alla seconda.*

*Dimostrazione.* Sia  $c(D)$  il numero di incroci di  $D$ : comincio con il passo base.

Se  $D$  non ha incroci, essendo non split, sarà un diagramma banale del nodo banale e la sua omologia è:

$$\bar{H}^{i,j}(D) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{se } i = 0, j = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la formula vale.

Sia  $D$  un diagramma alternante non split con  $c(D)$  incroci. Se  $D$  non è ridotto allora

$$\bar{H}^{i,j}(D) \cong \bar{H}^{i+h,j+k}(D') \quad \text{per ogni } i, j$$

dove  $D'$  è un altro diagramma alternante non split con  $c(D) - 1$  incroci;  $h$  e  $k$  dipendono dal segno dell'incrocio eliminato, ma in ogni caso ho che il teorema vale con le rette  $j = 2i - (s(D') - k + 2h) \pm 1$  per ipotesi induttiva.

Suppongo che  $D$  sia ridotto:

dato che, per la proposizione 2.4.5, vale

$$H^{i,j}(D^*) \cong H^{-i,-j}(D) \quad \text{per ogni } i, j$$

da cui si ricava con facili conti che

$$\bar{H}^{i,j}(D^*) \cong \bar{H}^{-i+h,-j+k}(D) \quad \text{per ogni } i, j$$

quindi se il teorema vale per  $D$  allora vale anche per  $D^*$  con rette  $j = 2i - (2h - k - s(D)) \pm 1$ .

In pratica posso dimostrare il teorema indifferentemente per  $D$  o per il suo riflesso.

Quindi posso supporre che valga la proprietà **a)** o la proprietà **c)** della proposizione 3.2.4:

- **a)** L'ipotesi induttiva vale per  $D(*0)$  e  $D(*1)$  (uso la 3.2.7).

Per il corollario 3.2.8 e l'ipotesi induttiva  $\bar{H}(D(*0))$  ha supporto in due rette, che chiamo diagonali, e quella con intercetta minore contiene il punto  $(0, -o(D(*0)))$ ; lo stesso vale per  $\bar{H}(D(*1))$ .

Vale

$$o(D) = o(D(*0)) = o(D(*1)) + 1$$

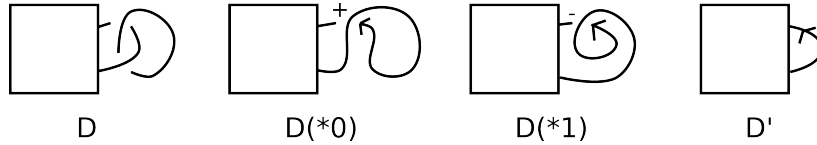
quindi la diagonale inferiore di  $\bar{H}(D(*0))$  contiene  $(0, -o(D))$ , mentre quella di  $\bar{H}(D(*1))$  passa per  $(0, -o(D) + 1)$ ; quindi la diagonale inferiore di  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$  passa per  $(1, -o(D) + 2)$ .

Ma questi due punti appartengono alla stessa retta di coefficiente angolare 2 che quindi coincide con entrambe le diagonali inferiori; dato che le diagonali superiori sono parallele ad esse con intercetta aumentata di 2, concludo che le diagonali di  $\bar{H}(D(*0))$  coincidono con quelle di  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$ .

Per la proposizione 3.2.1 il supporto di  $\bar{H}(D)$  è contenuto nell'unione dei supporti di  $\bar{H}(D(*0))$  e di  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$  cioè in due rette della forma  $j = 2i - s(D) \pm 1$ .

Inoltre il lemma 3.2.5 mi dice che nel punto  $(c(D), j)$ , che appartiene alla diagonale superiore,  $\bar{H}(D)$  è non nulla e lo stesso vale nel punto  $(0, j)$  che appartiene alla diagonale inferiore. Si nota, grazie a quanto detto precedentemente, che questo fatto non sarà vero solo in questo caso, ma per ogni  $D$  alternante non split, cioè anche nel caso successivo.

- c)  $D(*0), D(*1)$  e  $D'$  sono come in figura:



$\bar{H}(D')$ ,  $\bar{H}(D(*0))$  e  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$  sono shiftati come segue:

$$\begin{aligned} \bar{H}(D(*0)) &= \\ &= H(D(*0))[n_-(D(*0))]\{2n_-(D(*0)) - n_+(D(*0))\} = \\ &= H(D')[n_-(D')]\{2n_-(D') - n_+(D') - 1\} = \bar{H}(D')\{-1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(D(*1))[1]\{1\} &= \\ &= H(D(*1))[n_-(D(*1)) + 1]\{2n_-(D(*1)) - n_+(D(*1)) + 1\} = \\ &= H(D')[n_-(D') + 2]\{2n_-(D') + 2 - n_+(D') + 1\} = \bar{H}(D')[2]\{3\} \end{aligned}$$

Per l'ipotesi induttiva  $\bar{H}(D(*0))$  e  $\bar{H}(D(*1))[1]\{1\}$  hanno supporto in due rette e, ecco il punto chiave, per il lemma 3.2.5 applicato a  $D'$  (che è ridotto!) sono non nulle, rispettivamente, nei punti  $(0, -o(D') - 1)$  e  $(2, -o(D') + 3)$ .

Tali punti appartengono alla stessa retta di coefficiente angolare 2 quindi, come nel caso precedente, concludo che le diagonali coincidono e la tesi segue dalla 3.2.1.

□

È arrivato il momento di completare la dimostrazione del teorema 3.1.1, mi resta solo da provare che l'intercetta delle diagonali dipende solo dalla segnatura.

Sia  $L$  un link alternante non split e sia  $D$  un suo diagramma alternante e ridotto. Per il teorema appena dimostrato esiste un intero  $s(D)$  tale che  $\tilde{H}(D)$  ha supporto contenuto nelle rette  $j = 2i - s(D) \pm 1$  ed è non nulla, sulla diagonale inferiore, nel punto  $(0, -o(D))$ .

$$H(D) = \tilde{H}(D)[-n_-(D)]\{n_+(D) - 2n_-(D)\}$$

Da cui ho che la diagonale inferiore di  $H(D)$  in  $(-n_-(D), n_+(D) - 2n_-(D) - o(D))$  è non nulla.

In base a questo riesco a trovare le diagonali di  $H(D)$  che risultano essere le rette

$$\begin{cases} j = 2i + n_+(D) - o(D) + 2 \\ j = 2i + n_+(D) - o(D) \end{cases}$$

Ossia le rette  $j = 2i - c \pm 1$  con  $c = o(D) - n_+(D) - 1$ , ma per la proposizione 3.2.10  $c = \sigma(L)$ .

La dimostrazione è conclusa.

$s(D)$  sarebbe stato, in ogni caso, un invariante del link alternante  $L$ , dato che caratterizza il supporto dell'omologia di Khovanov; il risultato del teorema 3.1.1 mi dice che in realtà non si è scoperto niente di nuovo: l'invariante non era altro che la segnatura, già conosciuta da moltissimo tempo.

Tale caso non è unico: l'invariante di Rasmussen  $s$ , infatti, definito nel 2009 nell'articolo [25], coincide anch'esso con la segnatura nel caso dei nodi alternanti.

Sembra quindi che l'omologia di Khovanov, nel caso alternante, non riesca a dare altre informazioni che non siano ottenibili tramite il polinomio di Jones o la segnatura. Nel prossimo capitolo farò vedere che tale sospetto è in effetti fondato.

## Capitolo 4

# TQFT e teorie omologiche di link: un endomorfismo di $H(L)$

### 4.1 E allora algebra!

Bene è arrivato il momento, del resto era difficile aspettarsi di sfuggire a lungo: l'algebra mi ha infine raggiunto. È l'ora infatti di fare un passo indietro e rivedere l'omologia di Khovanov da un punto di vista diverso da quello del capitolo 2, più algebrico appunto (molto più algebrico). Lo strumento principale di cui avrò bisogno si chiama TQFT, acronimo di "Topological Quantum Field Theory"; per maggiori informazioni consiglio di leggere l'articolo di Abrams [1] ed il libro di Kock [17], mentre in questa tesi cercherò di semplificare il più possibile le cose restringendomi solo a ciò che mi serve davvero.

Mi concentrerò quasi completamente sugli enunciati ed indicherò dove è possibile trovare le dimostrazioni mancanti.

La prima cosa di cui parlo è la categoria  $\mathbf{2Cob}$ , ma ho bisogno di alcune definizioni:

Sia  $\Sigma$  una 1-sottovarietà in una superficie  $M$  entrambe equipaggiate con un'orientazione. In un punto  $x \in \Sigma$  sia  $\{v\}$  una base positiva di  $T_x\Sigma$ . Un vettore  $w \in T_xM$  si dice positivo se  $\{v, w\}$  è una base positiva per  $T_xM$ . Supponendo che  $\Sigma$  sia una componente connessa del bordo di  $M$  e che  $\{v, w\}$  sia una base positiva, ha senso chiedersi se  $w$  è diretto verso l'interno o l'esterno di  $M$ . Nel primo caso dirò che  $\Sigma$  è nel bordo sinistro  $\partial_s M$  di  $M$ , mentre nel secondo nel bordo destro  $\partial_d M$ . Si nota che questa definizione è ben posta e che  $\partial M = \partial_s M \sqcup -\partial_d M$ .

Date  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  1-varietà differenziabili chiuse ricordo che un 2-cobordismo orientato tra le due varietà è una superficie compatta orientata  $M$  e delle

mappe

$$\Sigma_0 \xrightarrow{f_0} M \xleftarrow{f_1} \Sigma_1$$

tali che  $f_i$  sia un diffeomorfismo con l'immagine sul bordo sinistro e sul destro di  $M$ , rispettivamente per  $i = 0, 1$ .

Due 2-cobordismi tra  $\Sigma_0$  e  $\Sigma_1$  si dicono equivalenti se esiste un diffeomorfismo da  $M$  in sé tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_0 & \longrightarrow & M \\ & \searrow & \uparrow \cong \\ & & M \\ & & \longleftarrow \Sigma_1 \end{array}$$

Sto dicendo che due 2-cobordismi sono identificati se sono diffeomorfi fissando il bordo. In seguito quando parlerò di 2-cobordismi intenderò sempre la classe di equivalenza corrispondente.

Posso ora dare la seguente definizione:

**Definizione 29.** **2Cob** è la categoria in cui gli oggetti sono 1-varietà differenziabili chiuse, ossia collezioni di cerchi disgiunti e le mappe sono 2-cobordismi tra esse (classi di equivalenza).

Devo dire come si compongono i cobordismi e trovare un'identità per ogni oggetto:

dati due 2-cobordismi  $M_1$  ed  $M_2$  tali che  $\partial_d M_1 = \partial_s M_2$  ho che la composizione è il 2-cobordismo ottenuto incollando  $M_1$  ed  $M_2$  lungo le componenti di bordo che so essere uguali.

Per quanto riguarda le identità, considero semplicemente i cilindri.

Il motivo per cui sono passato alle classi di equivalenza nella definizione è proprio per fare in modo che queste due operazioni fossero ben definite. Per maggiori dettagli su incollamenti e simili c'è il libro di Milnor [22].

Posso dire di più su **2Cob**:

se  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  sono due oggetti della mia categoria allora  $\Sigma \sqcup \Sigma'$  lo è a sua volta, dati  $M, M'$  2-cobordismi tra  $\Sigma_0, \Sigma_1$  e tra  $\Sigma'_0, \Sigma'_1$  ho che  $M \sqcup M'$  è ancora un cobordismo tra  $\Sigma_0 \sqcup \Sigma'_0, \Sigma_1 \sqcup \Sigma'_1$ .

Per convenzione indico con  $\emptyset_2$  la superficie vuota e con  $\emptyset_1$  la 1-varietà vuota.

In [17] è descritto in che modo un cobordismo può essere indotto da un diffeomorfismo di una varietà in sé. Il cobordismo indotto da  $\Sigma \sqcup \Sigma' \rightarrow \Sigma' \sqcup \Sigma$  (che non è l'identità di  $\Sigma \sqcup \Sigma'$ ) è chiamato cobordismo twist e si indica  $T_{\Sigma, \Sigma'}$ .



Chiaramente queste strutture rendono  $(\mathbf{2Cob}, \sqcup, \emptyset, T)$  una categoria monoidale simmetrica (per la definizione precisa o maggiori dettagli consultare il libro [17]).

Le superfici compatte orientabili sono completamente classificate; questo mi permette di vedere ogni 2-cobordismo in  $\mathbf{2Cob}$  come composizione ed unione disgiunta dei seguenti sei:

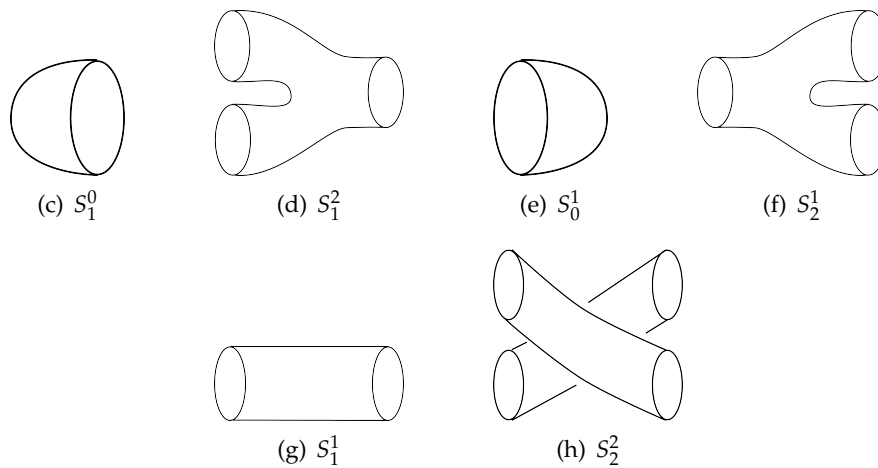


Figura 4.1

**Proposizione 4.1.1.** *I 2-cobordismi in figura formano un insieme di generatori per la categoria monoidale  $\mathbf{2Cob}$ .*

La dimostrazione si trova nel libro di Kock [17].

Passiamo ora a ciò che mi interessa davvero per gli scopi della mia tesi: le TQFT.

**Definizione 30.** Una 2-TQFT è una legge  $\mathbf{A}$  che ad ogni oggetto di  $\mathbf{2Cob}$   $\Sigma$  associa un  $\mathbb{Q}$ -spazio vettoriale  $\mathbf{A}(\Sigma)$  di dimensione finita e ad ogni mappa

$$M : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$$

in  $\mathbf{2Cob}$  associa un'applicazione lineare

$$\mathbf{A}(M) : \mathbf{A}(\Sigma_0) \rightarrow \mathbf{A}(\Sigma_1)$$

inoltre voglio che rispetti certe condizioni che elencherò tra breve.

Il termine "topological" si riferisce al fatto che  $\mathbf{A}$  è ben definita sulle classi di equivalenza di cobordismo.

Voglio che  $\mathbf{A}(\text{Id}_\Sigma) = \text{Id}_{\mathbf{A}(\Sigma)}$  e che se  $M = M' \circ M''$  allora  $\mathbf{A}(M) = \mathbf{A}(M') \circ \mathbf{A}(M'')$ . Questo mi dice che  $\mathbf{A}$  è un funtore da  $\mathbf{2Cob}$  nella categoria  $\mathbf{Vect}_\mathbb{Q}$  degli spazi vettoriali su  $\mathbb{Q}$ .

La prossima condizione giustifica il termine “quantum”:

$$\mathbf{A}(\Sigma \sqcup \Sigma') = \mathbf{A}(\Sigma) \otimes \mathbf{A}(\Sigma')$$

e lo stesso vale per i 2-cobordismi, riflettendo uno dei principi standard della meccanica quantistica [2].

Inoltre deve valere  $\mathbf{A}(\mathcal{O}_1) = \mathbb{Q}$  da cui  $\mathbf{A}(\mathcal{O}_2) = \text{Id}_\mathbb{Q}$  e  $\mathbf{A}(T_{\Sigma, \Sigma'}) = \sigma_{\mathbf{A}(\Sigma), \mathbf{A}(\Sigma')}$  dove

$$\sigma_{V, V'} : V \otimes V' \rightarrow V' \otimes V$$

$$\sigma_{V, V'}(v \otimes w) = w \otimes v$$

Tutto questo mi permette di concludere che una 2-TQFT  $\mathbf{A}$  è un funtore monoidale simmetrico da  $(\mathbf{2Cob}, \sqcup, \mathcal{O}, T)$  a  $(\mathbf{Vect}_\mathbb{Q}, \otimes_\mathbb{Q}, \mathbb{Q}, \sigma)$ .

È la definizione data da Atiyah [3].

Ora voglio collegare il concetto di TQFT appena definito con quello di algebra di Fröbenius e farò vedere che sono in un certo senso la stessa cosa.

**Definizione 31.** Un'algebra di Fröbenius commutativa è una quintupla  $\mathcal{A} = (V, m, \Delta, \iota, \epsilon)$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione finita e:

- La moltiplicazione  $m$  e l'unità  $\iota$  sono tali che  $m : V \otimes V \rightarrow V$   
 $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow V$  e

$$m(x \otimes y) = m(y \otimes x) \quad \forall x, y \in V$$

$$m(x \otimes m(y \otimes z)) = m(m(x \otimes y) \otimes z) \quad \forall x, y, z \in V \quad (4.1)$$

$$m(x \otimes \iota(1)) = m(\iota(1) \otimes x) = x \quad \forall x \in V$$

cioè  $(V, m, \iota)$  è una  $\mathbb{Q}$ -algebra commutativa.

- La comoltiplicazione  $\Delta$  e la counità  $\epsilon$  sono tali che  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$   
 $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{Q}$  e

$$\sigma(\Delta(x)) = \Delta(x) \quad \forall x \in V$$

$$(\text{Id} \otimes \Delta)(\Delta(x)) = (\Delta \otimes \text{Id})(\Delta(x)) \quad \forall x \in V \quad (4.2)$$

$$(\epsilon \otimes \text{Id})(\Delta(x)) = (\text{Id} \otimes \epsilon)(\Delta(x)) = x \quad \forall x \in V$$

cioè  $(V, \Delta, \epsilon)$  è una  $\mathbb{Q}$ -coalgebra commutativa.

- Vale la relazione di Fröbenius

$$\Delta \circ m = (\text{Id} \otimes m) \circ (\Delta \otimes \text{Id}) = (m \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta) \quad (4.3)$$

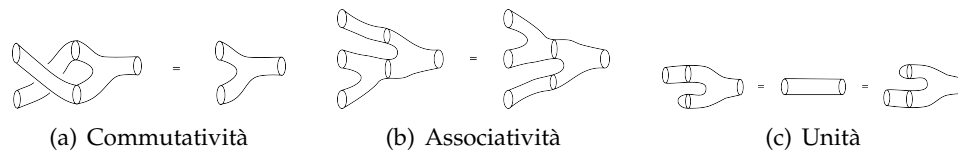
Un omomorfismo di algebre di Fröbenius è una mappa  $\Phi : V \rightarrow V'$  che è sia un omomorfismo di algebre che di coalgebre.

Sia  $\mathbf{A}$  una 2-TQFT, allora  $\mathbf{A}(\bigcirc)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione finita. Con la notazione della figura 4.1  $\mathbf{A}(S_1^2)$  e  $\mathbf{A}(S_1^0)$  sono applicazioni lineari tali che

$$\mathbf{A}(S_1^2) : \mathbf{A}(\bigcirc) \otimes \mathbf{A}(\bigcirc) \rightarrow \mathbf{A}(\bigcirc) \quad \mathbf{A}(S_1^0) : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{A}(\bigcirc)$$

e dato che sui 2-cobordismi valgono le seguenti relazioni

Figura 4.2



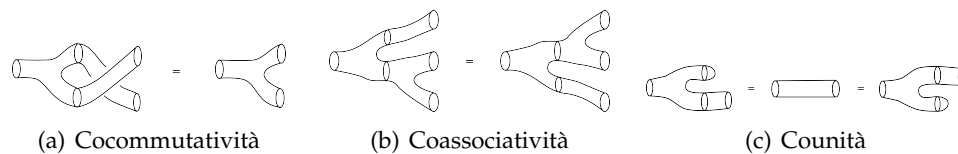
esse valgono anche per le mappe associate dalla TQFT da cui ho che  $\mathbf{A}(S_1^2)$  e  $\mathbf{A}(S_1^0)$  verificano la (4.1).

Mentre  $\mathbf{A}(S_2^1)$  e  $\mathbf{A}(S_0^1)$  sono tali che

$$\mathbf{A}(S_2^1) : \mathbf{A}(\bigcirc) \rightarrow \mathbf{A}(\bigcirc) \otimes \mathbf{A}(\bigcirc) \quad \mathbf{A}(S_0^1) : \mathbf{A}(\bigcirc) \rightarrow \mathbb{Q}$$

e stavolta da queste relazioni

Figura 4.3



ho che  $\mathbf{A}(S_2^1)$  e  $\mathbf{A}(S_0^1)$  verificano la (4.2).

Infine da quest'ultima figura

Figura 4.4



(a) Relazione di Fröbenius

segue che le mappe definite prima verificano anche la relazione di Fröbenius (4.3).

Quindi  $\mathcal{A}_A = (\mathbf{A}(\bigcirc), \mathbf{A}(S_1^2), \mathbf{A}(S_2^1), \mathbf{A}(S_1^0), \mathbf{A}(S_0^1))$  è un'algebra di Fröbenius.

Viceversa data un'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A} = (V, m, \Delta, \iota, \epsilon)$  è evidente che posso definire una TQFT  $\mathbf{A}_{\mathcal{A}}$  semplicemente facendo la costruzione inversa di quella appena fatta. Le cose funzionano perché per la proposizione 4.1.1 i 2-cobordismi nella figura 4.1 sono un insieme di generatori per **2Cob**. Ho quindi provato che:

**Teorema 4.1.2.** *Esiste una corrispondenza biunivoca tra 2-TQFT ed algebre di Fröbenius.*

Posso vedere tutto a meno di isomorfismi: se definisco due TQFT isomorfe se lo sono le algebre di Fröbenius corrispondenti allora il teorema vale identico sulle classi di isomorfismo. Nel seguito mi riferirò sempre a tali classi.

Voglio ora ricondurmi a ciò di cui stavo parlando fin dall'inizio: l'omologia di Khovanov.

**Definizione 32.** Chiamo teoria omologica di link l'omologia di un complesso  $(C(D), d)$ , dove  $C(D)$  è lo stesso del complesso di Khovanov e  $d$  è un differenziale costruito a partire da mappe  $m$  e  $\Delta$  come nella sezione 2.2, tale che esistono  $\iota : \mathbb{Q} \rightarrow V$  ed  $\epsilon : V \rightarrow \mathbb{Q}$  per cui  $(V, m, \Delta, \iota, \epsilon)$  è un'algebra di Fröbenius (e quindi  $m$  e  $\Delta$  provengono da cobordismi tramite una TQFT) e che sia un invariante di link.

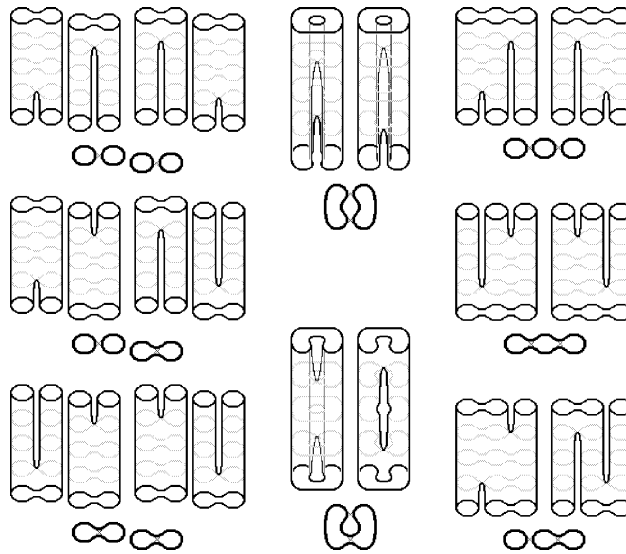
Dal lavoro fatto nel capitolo 2 so già che l'omologia di Khovanov è una teoria omologica di link, infatti, in questo caso

$$\iota : 1 \rightarrow v_+ \quad \epsilon : \begin{cases} v_+ \rightarrow 0 \\ v_- \rightarrow 1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Un fatto importante è la seguente proposizione:

**Proposizione 4.1.3.** *Sia  $d$  una mappa su  $C(D)$  costruita a partire da due mappe  $m$  e  $\Delta$  come nella sezione 2.2; allora se  $m$  e  $\Delta$  sono la moltiplicazione e la comoltiplicazione di un'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A}$  ho che  $d$  è automaticamente un differenziale, cioè  $d \circ d = 0$ .*

La prova di questo fatto è in [18], tramite la figura seguente dove mostro tutte le possibili risoluzioni successive di una coppia di incroci di  $D$ . Nel linguaggio della 2.2.4 devo provare che  $\tilde{d}_2 \circ \tilde{d}_1 = \tilde{d}_4 \circ \tilde{d}_3$ ; vedo ognuna di queste coppie di mappe come immagine, tramite la TQFT, di una coppia di 2-cobordismi in figura. Ma è evidente che tutte le coppie di cobordismi sono equivalenti e quindi definiscono la stessa mappa.



**Osservazione 4.1.4.** *Se anche  $m$  e  $\Delta$  non sono la moltiplicazione e la comoltiplicazione di un'algebra di Fröbenius, ma verificano le relazioni (4.1), (4.2) e (4.3) (escluse quelle in cui appaiono  $\iota$  e  $\epsilon$ ), allora  $d$  è comunque un differenziale.*

La domanda interessante che una persona potrebbe porsi adesso è: esistono altre algebre di Fröbenius con cui riesco a costruire una teoria omologica di link?

La risposta è sì.

Dal lavoro di Bar-Natan in [5] scopro che esistono condizioni necessarie affinché da un'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A}$  si ottenga un'omologia invariante:

$$\dim V = 2 \quad e \quad \epsilon \circ \iota = 0$$

da cui si ricava che, a meno di isomorfismo, l'unità e la counità sono fissate e sono quelle nella (4.4). Dalle altre relazioni si ha, infine che la moltiplicazione e la comoltiplicazione devono essere di questa forma:

$$m_{(h,t)} : \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow v_+ \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_+ \rightarrow v_- \\ v_- \otimes v_- \rightarrow hv_- + tv_+ \end{cases} \quad \Delta_{(h,t)} : \begin{cases} v_+ \rightarrow v_+ \otimes v_- + v_- \otimes v_+ \\ -hv_+ \otimes v_+ \\ v_- \rightarrow v_- \otimes v_- + tv_+ \otimes v_+ \end{cases}$$

con  $(h, t) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ : la coppia  $(0, 0)$  mi dà l'omologia di Khovanov. In realtà le condizioni enunciate prima sono anche sufficienti e anche per tutte le altre coppie ottengo una teoria omologica di link.

Vale il seguente teorema, enunciato da Turner in [26]:

**Teorema 4.1.5.** *Esistono soltanto due, a meno di isomorfismi, teorie omologiche di link: l'omologia di Khovanov, definita tramite l'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A}_{(h,t)}$  con  $h^2 + 4t = 0$  e l'omologia di Lee, tramite  $\mathcal{A}_{(h,t)}$  con  $h^2 + 4t \neq 0$ .*

L'omologia di Lee è stata introdotta, nel 2004, da Eun Soo Lee nell'articolo "An endomorphism of the Khovanov invariant" ([18]) e sarà la protagonista della prossima sezione. Non mostrerò che è davvero l'unica altra teoria omologica di link (anche se non è difficile), ma mi limiterò a costruirla per un'opportuna coppia e a far vedere che è un invariante di link.

## 4.2 Omologia di Lee

### 4.2.1 Motivazioni

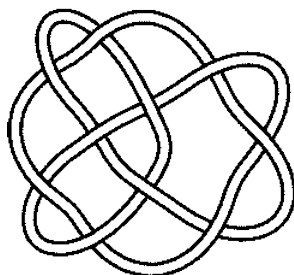
Ora so che posso costruire un'altra omologia invariante per link ed in effetti è quello che farò in questa sezione, ma ci si potrebbe chiedere se posso davvero ottenere dei risultati interessanti da questa operazione; la risposta è di nuovo sì, ma prima di ulteriori dettagli ecco che arriva una tabella...

j \ i	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
3											1
1										2	
-1									3	1	
-3								4+1	2		
-5							5	3+1			
-7						6	4				
-9					4	5					
-11				4	6						
-13			2	4							
-15		1	4								
-17		2									
-19	1										

Tabella 4.1:  $H(10_{100})$

Questa tabella apparentemente priva di senso mostra l'omologia di Khovanov del nodo  $10_{100}$  che è rappresentato nella seguente figura. Il nodo è alternante ed infatti si notano immediatamente le diagonali, in cui è contenuto il supporto dell'omologia; ma non è l'unica cosa che salta agli occhi: i numeri sulla diagonale inferiore risultano essere, tranne in un caso, gli stessi che sono sulla diagonale superiore.

Figura 4.5: Nodo  $10_{100}$



In modo più formale:

**Teorema 4.2.1.** *Per ogni  $K$  nodo  $H$ -sottile e per un certo  $s \in \mathbb{Z}$  risulta*

$$\dim H^{i,j}(K) = \begin{cases} \dim H^{i+1,j+4}(K) & \text{se } i \neq -1, 0 \quad j = 2i + s - 1 \\ \dim H^{0,s+1}(K) - 1 & \text{se } i = -1 \quad j = s - 3 \\ \dim H^{1,s+3}(K) + 1 & \text{se } i = 0 \quad j = s - 1 \end{cases}$$

*In particolare il teorema vale per tutti i nodi alternanti con  $s = -\sigma(K)$ .*

Eun Soo Lee ha dimostrato questo teorema nello stesso articolo [18] in cui ha definito l'omologia che porta il suo nome; anzi si può dire che questo teorema sia stato il motivo principale per cui l'omologia di Lee è stata introdotta.

Ci si potrebbe stupire che sia stata fatta tanta fatica per provare quella che sembra più che altro essere una curiosità e nient'altro, ma non è così: come mostrerò in questo capitolo, il teorema 4.2.1 permette di concludere che l'omologia di Khovanov, per i nodi alternanti, è completamente determinata dal polinomio di Jones e dalla segnatura, fatto già intuito alla fine del precedente capitolo.

L'omologia di Lee, in seguito, si è rivelata essere ancora più utile; di recente la ricerca in teoria dei nodi si è spostata verso la ricerca di nuovi invarianti per concordanza (ricordo che la segnatura lo è: teorema 1.6.1) e, negli ultimi capitoli di questa tesi, parlerò di alcuni di questi invarianti, costruiti proprio usando tale teoria omologica; ne è un esempio il già citato invariante di Rasmussen per i nodi.

#### 4.2.2 Definizione del morfismo $\Phi$

Comincio adesso, dopo l'introduzione, con la costruzione vera e propria dell'omologia.

Definisco una mappa  $\Phi$  di bigrado  $(1, 4)$  su  $C(D)$  per un qualunque diagramma  $D$ :  $\Phi$  dovrà essere un differenziale proprio come  $d$  ed infatti la

sua costruzione è praticamente identica a quella fatta nella sezione 2.2, tranne che per il fatto che le mappe  $m$  e  $\Delta$  sono sostituite da  $m_\Phi$  e  $\Delta_\Phi$

$$m_\Phi : \begin{cases} v_+ \otimes v_+ \rightarrow 0 \\ v_+ \otimes v_- \rightarrow 0 \\ v_- \otimes v_+ \rightarrow 0 \\ v_- \otimes v_- \rightarrow \frac{v_+}{4} \end{cases} \quad \Delta_\Phi : \begin{cases} v_+ \rightarrow 0 \\ v_- \rightarrow \frac{v_+ \otimes v_+}{4} \end{cases}$$

$m_\Phi$  è commutativa e associativa ( (4.1) ):

$$m_\Phi(m_\Phi(x \otimes y) \otimes z) = m_\Phi(x \otimes m_\Phi(y \otimes z)) = 0 \quad \forall x, y, z \in V$$

$\Delta_\Phi$  è cocommutativa e coassociativa ( (4.2) ):

$$(\Delta_\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\Phi(z) = (\text{Id} \otimes \Delta_\Phi) \circ \Delta_\Phi(z) = 0 \quad \forall z \in V$$

Inoltre vale  $\Delta_\Phi \circ m_\Phi = (m_\Phi \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta_\Phi)$  ( (4.3) ) infatti:

$$(\Delta_\Phi \circ m_\Phi)(y \otimes z) = (m_\Phi \otimes \text{Id})(y \otimes \Delta_\Phi(z)) \quad \forall y, z \in V$$

Per l'osservazione 4.1.4 questo mi assicura che  $\Phi \circ \Phi = 0$  e quindi che è effettivamente un differenziale.

Si verifica facilmente che  $m_\Phi$  e  $\Delta_\Phi$  non possiedono un'unità ed una counità compatibile e, di conseguenza, in questo caso  $V$  non può essere equipaggiato con una struttura di algebra di Fröbenius; quindi non posso neanche definire una TQFT. Tuttavia vale comunque il seguente teorema:

**Teorema 4.2.2.** *Il morfismo  $\Phi$  è ben definito su  $H(L)$  per ogni link  $L$ .*

*Dimostrazione.* Affinchè io possa definire  $\Phi^{i,j} : H^{i,j}(L) \rightarrow H^{i+1,j+4}(L)$  per ogni  $i, j$  basta provare che  $\Phi$  anticommuta con  $d$  e che si "comporta bene" applicando le mosse di Reidemeister, nel senso che spiegherò dopo.

La prova di questi due fatti è rimandata alle prossime proposizioni.  $\square$

Ecco cosa mi serve:

**Proposizione 4.2.3.**  $\Phi \circ d = -d \circ \Phi$

*Dimostrazione.* Lo dimostro per  $4\Phi$  per semplificare il fattore 4. Mi basta provare queste tre uguaglianze:

1.  $m \circ (m_\Phi \otimes \text{Id}) + m_\Phi \circ (m \otimes \text{Id}) = m \circ (\text{Id} \otimes m_\Phi) + m_\Phi \circ (\text{Id} \otimes m)$
2.  $(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\Phi + (\Delta_\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Delta = (\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta_\Phi + (\text{Id} \otimes \Delta_\Phi) \circ \Delta$



$$3. \Delta \circ m_\Phi + \Delta_\Phi \circ m = (m \otimes \text{Id}) \circ (\text{id} \otimes \Delta_\Phi) + (m_\Phi \otimes \text{Id}) \circ (\text{Id} \otimes \Delta)$$

per fare ciò basta osservare le seguenti tabelle, dove sulle quattro colonne principali sono indicati i valori che le mappe assumono sugli elementi delle basi di  $V$  e  $V \otimes V$ :

2.

	$(\Delta \otimes \text{Id}) \circ \Delta_\Phi$	$(\Delta_\Phi \otimes \text{Id}) \circ \Delta$	$(\text{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta_\Phi$	$(\text{Id} \otimes \Delta_\Phi) \circ \Delta$
$v_+$	0	$v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$	0	$v_+ \otimes v_+ \otimes v_+$
$v_-$	$v_+ \otimes v_- \otimes v_+$ $v_- \otimes v_+ \otimes v_+$	$v_+ \otimes v_+ \otimes v_-$	$v_+ \otimes v_+ \otimes v_-$ $v_+ \otimes v_- \otimes v_+$	$v_- \otimes v_+ \otimes v_+$

1. Segue dal punto 2 poiché  $(V, m, \Delta)$  e  $(V, m_\Phi, \Delta_\Phi)$  sono entrambe algebre autoduali.

3.

	$\Delta \circ m_\Phi$	$\Delta_\Phi \circ m$	$m \otimes \text{Id} \circ \text{Id} \otimes \Delta_\Phi$	$m_\Phi \otimes \text{Id} \circ \text{Id} \otimes \Delta$
$v_+ \otimes v_+$	0	0	0	0
$v_+ \otimes v_-$	0	$v_+ \otimes v_+$	$v_+ \otimes v_+$	0
$v_- \otimes v_+$	0	$v_+ \otimes v_+$	0	$v_+ \otimes v_+$
$v_- \otimes v_-$	$v_+ \otimes v_-$ $v_- \otimes v_+$	0	$v_- \otimes v_+$	$v_+ \otimes v_-$

□

**Proposizione 4.2.4.** *Il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 H(D) & \xrightarrow{\Phi} & H(D) \\
 \Downarrow \cong & & \Downarrow \cong \\
 H(D') & \xrightarrow{\Phi'} & H(D')
 \end{array}$$

dove  $D$  e  $D'$  sono diagrammi uguali a meno di una mossa di Reidemeister.

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione di 2.3.1 per le mosse di tipo 1 e 2 non ho scritto esplicitamente l'isomorfismo tra  $H(D)$  e  $H(D')$  quindi per questi due casi rimando a [18]. Scrivo qui, senza scendere troppo nei dettagli, la prova per mosse di tipo 3:

Se  $d(x + \beta(x) + y) = 0$  allora la componente su  $\bar{C}(D(*100))[1]\{1\}$  di  $d(x + \beta(x) + y)$ , che è  $-d_{100}(x)$ , è nulla.

In  $\bar{C}(D)$  ho:

$$\begin{aligned}
\Phi(x + \beta(x) + y) &= -\Phi_{100}(x) + \Phi_{100 \rightarrow 110}(x) + \Phi_{100 \rightarrow 101}(x) \\
&\quad - \Phi_{010}(d_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) + \Phi_{010 \rightarrow 110}(d_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) \\
&\quad + \Phi_{010 \rightarrow 011}(d_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) - \Phi_1(y) \\
&= -\Phi_{100}(x) + \Phi_{100 \rightarrow 110}(x) + \Phi_{100 \rightarrow 101}(x) \\
&\quad - \Phi_{110}d_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+ - \Phi_1(y) \\
&\stackrel{(1)}{=} -\Phi_{100}(x) + \beta(-\Phi_{100}(x)) + d_{110}\Phi_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+ \\
&\quad + \Phi_{100 \rightarrow 110}(x) + \Phi_{100 \rightarrow 101}(x) - \Phi_1(y) \\
&\stackrel{(2)}{\sim} -\Phi_{100}(x) + \beta(-\Phi_{100}(x)) + \Phi_{100 \rightarrow 110 \approx 011}x \\
&\quad + \Phi_{100 \rightarrow 101}(x) - \Phi_1(y)
\end{aligned}$$

Dove la (1) segue da

$$\begin{aligned}
0 &= (\text{componente su } \bar{C}(D(*110))[2]\{2\} \text{ di } (d\Phi + \Phi d)(x)) \\
&= d_{100 \rightarrow 110}(-\Phi_{100}x) + d_{110}\Phi_{100 \rightarrow 110}x + \Phi_{100 \rightarrow 110}(-d_{100}x) \\
&\quad + \Phi_{110}d_{100 \rightarrow 110}x \\
\beta(-\Phi_{100}(x)) &= d_{100 \rightarrow 110}(-\Phi_{100}(x)) \otimes v_+ \\
&= -(d_{110}\Phi_{100 \rightarrow 110}x + \Phi_{110}d_{100 \rightarrow 110}x) \otimes v_+
\end{aligned}$$

E la (2) da

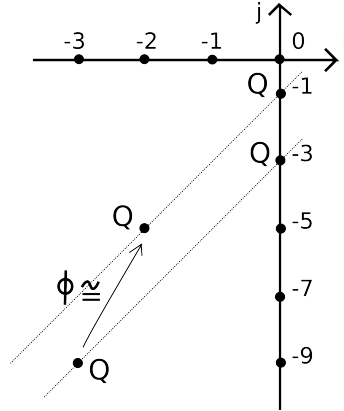
$$\begin{aligned}
d\alpha(\Phi_{100 \rightarrow 110}x) &= -d_{010}(\Phi_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) + d_{010 \rightarrow 110}(\Phi_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) \\
&\quad + d_{010 \rightarrow 011}(\Phi_{100 \rightarrow 110}x \otimes v_+) \\
&= -d_{110}(\Phi_{100 \rightarrow 110}x) \otimes v_+ - \Phi_{100 \rightarrow 110}x + \Phi_{100 \rightarrow 110 \approx 011}x
\end{aligned}$$

Lo stesso su  $\bar{C}(D')$  da cui:

$$\begin{aligned}
\Phi'(x + \beta'(x) + y) &\sim -\Phi'_{010}(x) + \beta'(-\Phi'_{010}(x)) - \Phi'_{010 \rightarrow 110 \approx 101}(x) - \Phi'_1(y) \\
&= \rho(-\Phi_{100}(x) + \beta(-\Phi_{100}(x)) + \Phi_{100 \rightarrow 101}(x) \\
&\quad + \Phi_{100 \rightarrow 110 \approx 011}x - \Phi_1(y))
\end{aligned}$$

□

Ho quindi dimostrato il teorema 4.2.2. Se potessi provare che  $\Phi^{i,j}$  è un isomorfismo per ogni  $i, j$  sulla diagonale inferiore (tranne in  $-1$  e  $0$ ) andrei vicino a concludere che 4.2.1 è vero; questo è proprio quello che farò nella prossima sezione. Vediamo, come esempio, cosa succede nel caso del nodo trifoglio:



$\Phi$  è un isomorfismo su  $H^{-3,-9}(3_1)$

Dalla figura si nota subito che l'unico caso interessante è quello del punto  $(-3, -9)$  in cui, a livello di cocatene, ho:

$$\Phi(v_- \otimes v_- \otimes v_-) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} v_+ \otimes v_- \\ v_+ \otimes v_- \\ v_+ \otimes v_- \end{pmatrix}$$

$[v_- \otimes v_- \otimes v_-]$  e  $\begin{bmatrix} v_+ \otimes v_- \\ v_+ \otimes v_- \\ v_+ \otimes v_- \end{bmatrix}$  generano, rispettivamente,  $H^{-3,-9}(3_1)$  e  $H^{-2,-5}(3_1)$  che hanno entrambi dimensione 1; quindi

$$\Phi^{-3,-9} : H^{-3,-9}(3_1) \rightarrow H^{-2,-5}(3_1)$$

è un isomorfismo.

### 4.2.3 Una nuova TQFT

Voglio ora definire una diversa TQFT nel modo in cui ho parlato nella sezione 4.1. So già che mi basta definire un'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A}_{(h,t)} = (V, m_{(h,t)}, \Delta_{(h,t)}, \iota, \epsilon)$  per una certa coppia  $(h, t)$  tale che  $h^2 + 4t \neq 0$ .

Lee in [18] sceglieva la coppia  $(0, 1)$ , ma tale scelta è sconveniente, io userò invece la coppia  $(0, \frac{1}{4})$ ; il motivo di questa scelta sta nel fatto che la mappa

associata ad un cobordismo  $\Sigma$  porta con sé un fattore  $(2\sqrt{t})^{-\frac{\chi(\Sigma)}{2}}$ , che in questo modo risulta sempre pari ad uno.

Pongo

$$m_{(0, \frac{1}{4})} = m_{\Phi+d} : \begin{cases} a \otimes a \rightarrow a \\ a \otimes b \rightarrow 0 \\ b \otimes a \rightarrow 0 \\ b \otimes b \rightarrow -b \end{cases} \quad \Delta_{(0, \frac{1}{4})} = \Delta_{\Phi+d} : \begin{cases} a \rightarrow a \otimes a \\ b \rightarrow b \otimes b \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\text{dove } \begin{cases} a = v_- + \frac{v_+}{2} \\ b = v_- - \frac{v_+}{2} \end{cases}$$

infatti è evidente che esse siano proprio la somma delle mappe  $m_\Phi, m$  e  $\Delta_\Phi, \Delta$  che ormai conosciamo bene e da loro posso definire la mappa

$$\Phi + d : C(D) \rightarrow C(D)$$

per un certo diagramma  $D$ ; inoltre dato che

$$(\Phi + d) \circ (\Phi + d) = \Phi \circ \Phi + \Phi \circ d + d \circ \Phi + d \circ d = 0$$

poiché  $\Phi$  e  $d$  sono differenziali e per la 4.2.3, risulta che  $\Phi + d$  è un differenziale a sua volta quindi posso definire

$$H_{\text{Lee}}(D) = \frac{\text{Ker}(\Phi + d)}{\text{Im}(\Phi + d)}$$

l'omologia di Lee.

Dato che il differenziale che ho usato è la somma di altri due, uno di bigrado  $(1,0)$  e l'altro di bigrado  $(1,4)$  si osserva che  $H_{\text{Lee}}(D)$  non ha grado quantico, ma soltanto grado omologico e quindi è davvero "diversa" dall'omologia di Khovanov. Non verifico che essa sia l'unica, a meno di isomorfismo, come premesso nella sezione 4.1, ma mostro brevemente che è un invariante di link:

**Teorema 4.2.5.** *Per ogni  $D$  e  $D'$  diagrammi di un link risulta  $H_{\text{Lee}}(D) = H_{\text{Lee}}(D')$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione, a parte alcuni accorgimenti, è identica a quella del teorema 2.3.1:

- Per le mosse di tipo 1 e 2 devo soltanto sostituire  $m_{\Phi+d}$  a  $m$  e  $\Delta_{\Phi+d}$  a  $\Delta$ , oltre che nei sottocomplessi in cui compare  $v_+$  devo, al suo posto, usare  $a - b$  (l'unità  $\iota(1)$ ...).

- Per le mosse di tipo 3 a parte le mappe, che vanno ovviamente cambiate anche in questo caso, l'unica differenza è nella definizione di  $\alpha$  e  $\alpha'$ : anziché

$$z \rightarrow z \otimes v_+$$

sarà

$$z \rightarrow z \otimes (a - b)$$

In realtà non ho fatto nient'altro che tenere conto del cambio di base. Le conclusioni sono esattamente le stesse.  $\square$

Ho così fatto vedere che l'omologia di Lee è una teoria omologica di link.

## 4.3 La mossa del cavallo

### 4.3.1 Calcolo di $H_{\text{Lee}}(L)$

Il titolo di stampo camilleriano riporta alla mente il teorema 4.2.1; infatti nella tabella dell'omologia del nodo  $10_{100}$  il morfismo  $\Phi$  corrisponde proprio al muoversi di due caselle verso l'alto ed una verso destra, cioè precisamente come il cavallo nel gioco degli scacchi.

Per dimostrare il teorema ho già anticipato che mi servirà l'omologia di Lee, quindi sarà opportuno calcolarla per ogni link  $L$ .

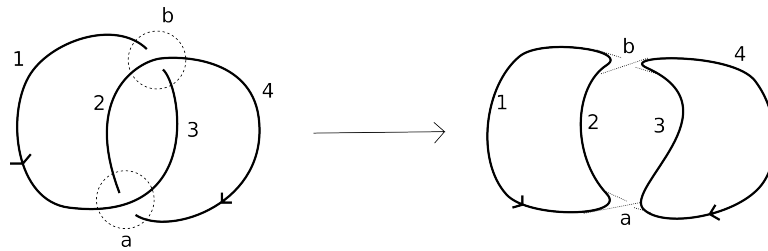
Sia  $D$  un diagramma per  $L$ , una risoluzione di  $D$  si dice coerente con un'orientazione  $\mathbf{o}$  di  $D$  se applico 0-risoluzioni a tutti gli incroci positivi e 1-risoluzioni a tutti i negativi.

Con questa convenzione è facile osservare che  $\mathbf{o}$  viene indotta sui cerchi che compongono la risoluzione, le risoluzioni coerenti con  $\mathbf{o}$  e  $-\mathbf{o}$ , per esempio, sono formate dagli stessi cerchi, orientati tutti in modo opposto. Quindi:

sia  $\mathcal{O}(D)$  l'insieme delle orientazioni di  $D$ ; allora  $|\mathcal{O}(D)| = 2^n$  dove  $n$  è il numero di componenti di  $D$ . Inoltre se  $\mathbf{o}, \mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D)$  sono distinte allora anche le risoluzioni coerenti corrispondenti lo sono; nel senso che o hanno numero di cerchi diverso o esiste almeno un cerchio (o un arco di cerchio) su cui le orientazioni sono opposte.

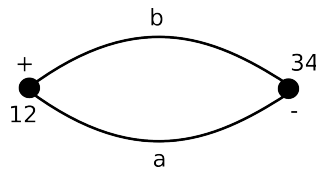
Il significato di quanto ho appena detto non è molto chiaro, ed era così anche nelle altre fonti in cui l'ho letto; tuttavia capirlo è importantissimo per cui ho trovato un modo diverso di spiegarlo che ora esporrò:

un diagramma  $D$  è formato da incroci e da archi, indico ogni incrocio con una lettera ed ogni arco con un numero, come in figura



dopo aver messo un'orientazione  $\mathbf{o}$  su  $D$  applico la risoluzione coerente ed ottengo una collezione di cerchi, ognuno composto dagli archi di  $D$  orientati tutti nello stesso modo. Dico che un cerchio è positivo se l'orientazione lo percorre in senso antiorario ed è contenuto in un numero pari di cerchi, dico che è negativo negli altri casi.

Ora voglio associare un grafo alla risoluzione coerente ad  $\mathbf{o}$ : un vertice corrisponde ad un cerchio e lo nomino con l'unione dei numeri che indicano gli archi che lo compongono; un lato corrisponde ad un incrocio e lo nomino con la stessa lettera; in più ad ogni vertice associo il segno del cerchio corrispondente.



Due grafici di questo tipo si dicono uguali se valgono queste tre condizioni:

1. Il numero dei vertici è lo stesso.
2. Per ogni vertice nel primo ne esiste uno (ed ovviamente uno solo) nel secondo che ha lo stesso nome.
3. I vertici che nei due grafi hanno lo stesso nome hanno anche lo stesso segno.

Se dico che due risoluzioni coerenti sono diverse se lo sono i loro grafi, l'affermazione precedente può, finalmente, essere formalizzata nella seguente proposizione:

**Proposizione 4.3.1.** *Siano  $\mathbf{o}, \mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D)$  distinte; allora le risoluzioni coerenti associate ad esse sono diverse. Quindi ad ogni diagramma riesco ad associare almeno (e per ciò esattamente)  $2^n$  risoluzioni coerenti diverse.*

*Dimostrazione.* Ho due casi:

- Suppongo che, passando da  $\mathbf{o}$  ad  $\mathbf{o}'$ , ci sia almeno un incrocio che cambia segno:



a meno di rinominare gli archi, nel primo caso un vertice contiene sia 1 che 2, un altro 3 e 4; nel secondo le coppie sono 1, 3 e 2, 4. Quindi se i grafi fossero uguali i vertici dovrebbero coincidere e quindi i quattro archi dovrebbero essere contenuti nello stesso cerchio in entrambi i casi. Questo è assurdo.

- Ora suppongo che gli incroci abbiano tutti lo stesso segno in entrambi i casi: se  $D$  è non split allora  $\mathbf{o}' = -\mathbf{o}$  e i grafi hanno stessi vertici con i segni scambiati, quindi sono diversi.

Se  $D$  è split allora su ogni componente connessa l'orientazione è o uguale o l'opposta; ma dato che  $\mathbf{o} \neq \mathbf{o}'$  esiste una componente  $D'$  in cui sono opposte e, per il caso precedente, su  $D'$  i grafi sono diversi. Concludo osservando che il grafo su tutto  $D$  è l'unione disgiunta di quello su  $D'$  con un altro.

□

Osservo che, nella risoluzione coerente di  $(D, \mathbf{o})$ , ogni traccia di un incrocio connette un cerchio positivo ad uno negativo, infatti altrimenti le risoluzioni non sarebbero compatibili con l'orientazione e per lo stesso motivo nessuna traccia di un incrocio connette un cerchio a se stesso. Inoltre la risoluzione coerente di  $(D, \mathbf{o})$  identifica un vertice  $\alpha$  del cubo delle risoluzioni di  $D$ . Queste affermazioni sono importanti perché da esse segue

**Lemma 4.3.2.** *Le componenti di  $d$  che partono da  $\alpha$  arrivano in vertici le cui risoluzioni hanno tutte un cerchio in meno rispetto a quella in partenza.*

*Lo stesso vale per i vertici da cui partono mappe che arrivano in  $\alpha$ .*

*Dimostrazione.* Le risoluzioni in partenza e in arrivo coincidono tranne che per un incrocio dove applico, nel primo caso, una 0-risoluzione e nel secondo una 1-risoluzione. Per quanto osservato prima del lemma ho che questo equivale ad avere due cerchi in  $\alpha$  che si uniscono in uno solo.

Per il secondo enunciato basta osservare che la risoluzione coerente a  $(D, \mathbf{o})$  è uguale a quella a  $(D^*, \mathbf{o})$  e usare il primo enunciato. □

Per ultimare i preliminari mi restano solo alcuni ripassi di algebra lineare:

**Osservazione 4.3.3.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione finita e sia  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base. Allora esiste un prodotto scalare definito positivo su  $V$  tale che  $\mathcal{B}$  sia una base ortonormale.

Nel mio caso  $\dim V = 2$  e  $\mathcal{B} = \{a, b\}$ .

Estendo il prodotto scalare a  $V \otimes V$  ponendo

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle \langle w, w' \rangle$$

in modo che  $\{a \otimes a, a \otimes b, b \otimes a, b \otimes b\}$  sia ancora una base ortonormale.

Dopodiché lo estendo alla somma diretta per linearità. Ho così definito  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  su tutto  $C(D)$ .

**Osservazione 4.3.4.** Sia  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  come nell'osservazione 4.3.3 e sia  $f \in \text{End } V$ . Allora si dice  $f^*$  l'applicazione aggiunta di  $f$  l'unica applicazione da  $V$  in sé tale che vale

$$\langle f^*(v), w \rangle = \langle v, f(w) \rangle \quad \forall v, w \in V$$

Nel mio caso, dato che  $C(D) = \bigoplus_i C^i(D)$ , ho che

$$(\Phi + d)^{*,i} : C^i(D) \rightarrow C^{i-1}(D)$$

è l'unica applicazione tale che

$$\langle (\Phi + d)^{*,i}(v), w \rangle = \langle v, (\Phi + d)^{i-1}(w) \rangle \quad \forall v \in C^i(D), w \in C^{i-1}(D)$$

Infine ho che

**Lemma 4.3.5.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione finita tale che  $A \oplus B = V$ . Se  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$  per cui  $A \subset W$  allora  $A \oplus (W \cap B) = W$ .

*Dimostrazione.* Sia  $w \in W \subset V$ , allora  $w = a + b$  con  $a \in A$  e  $b \in B$ . Ma quindi  $a \in A \subset W$  da cui, dato che  $W$  è un sottospazio vettoriale di  $V$ , ho che  $b \in W$ . Inoltre ovviamente  $A \cap (W \cap B) = \{0\}$ .  $\square$

Si verifica immediatamente che

$$C^i(D) = \text{Im } (\Phi + d)^{i-1} \oplus \text{Ker } (\Phi + d)^{*,i}$$

quindi

$$\text{Ker } (\Phi + d)^i = \text{Im } (\Phi + d)^{i-1} \oplus (\text{Ker } (\Phi + d)^{*,i} \cap \text{Ker } (\Phi + d)^i)$$

Ho ottenuto che

$$H_{\text{Lee}}^i(D) = \frac{\text{Ker } (\Phi + d)^i}{\text{Im } (\Phi + d)^{i-1}} \cong \text{Ker } (\Phi + d)^{*,i} \cap \text{Ker } (\Phi + d)^i$$

e una base di  $H_{\text{Lee}}^i(D)$  è formata dalle classi di omologia di elementi di una base di  $\text{Ker } (\Phi + d)^{*,i} \cap \text{Ker } (\Phi + d)^i$ .

Adesso sono pronto a fare sul serio.



**Definizione 33.** Sia  $D$  un diagramma di un link; per ogni  $\mathbf{o} \in \mathcal{O}(D)$  considero l'elemento  $v(\mathbf{o}) \in C(D)$  ottenuto associando  $a$  ad ogni cerchio positivo e  $b$  ad ogni cerchio negativo nella risoluzione coerente a  $(D, \mathbf{o})$ , e tensorizzando tutto. Gli elementi di  $\{v(\mathbf{o}) \in C(D) \mid \mathbf{o} \in \mathcal{O}(D)\}$  sono detti generatori canonici di Lee.

Per la proposizione 4.3.1 i generatori canonici di Lee sono  $2^n$  elementi indipendenti di  $C(D)$ : infatti se  $\mathbf{o} \neq \mathbf{o}'$  allora  $v(\mathbf{o})$  e  $v(\mathbf{o}')$  corrispondono a risoluzioni coerenti diverse; se i loro grafi hanno vertici con nomi diversi è chiaro che i due elementi vivono in vertici distinti del cubo e quindi sono indipendenti, mentre se i vertici hanno tutti lo stesso nome ne deve esistere almeno una coppia con segno opposto e ciò equivale a dire che  $v(\mathbf{o})$  e  $v(\mathbf{o}')$  sono elementi diversi della base di  $V \otimes \dots \otimes V$  introdotta nella 4.3.3.

Vale la proposizione seguente:

**Proposizione 4.3.6.** Sia  $D = D_1 \cup \dots \cup D_n$  un diagramma con  $n$  componenti connesse e chiamo  $l_{j,k} = lk(D_j, D_k)$ ; allora i generatori canonici di Lee rappresentano classi di omologia di  $H_{Lee}(D)$  e quindi

$$\dim H_{Lee}(D) \geq 2^n$$

in più posso dire che

$$\dim H_{Lee}^i(D) \geq 2 \left| \left\{ E \subset \{2, \dots, n\} \mid E \neq \emptyset, \sum_{j \in E, k \notin E} 2l_{j,k} = i \right\} \right| + 2\delta_{i,0}$$

dove  $\delta_{j,k}$  è il delta di Kronecker.

*Dimostrazione.* Da quanto ho già detto devo provare che ogni generatore canonico  $v(\mathbf{o})$  appartiene a  $\text{Ker}(\Phi + d)^{*i} \cap \text{Ker}(\Phi + d)^i$ :

- $\text{Ker}(\Phi + d)^i$

per il lemma 4.3.2 ho che, se restringo  $(\Phi + d)^i$  al vertice del cubo che contiene  $v(\mathbf{o})$ , ottengo la mappa

$$W \otimes V \otimes V \rightarrow W \otimes V$$

$$w \otimes z \otimes z' \rightarrow w \otimes m_{\Phi+d}(z \otimes z')$$

nella risoluzione coerente con  $(D, \mathbf{o})$  ogni traccia di un incrocio connette un cerchio positivo (a cui ho associato  $a$  in  $V$ ) ad uno negativo ( $b$ ), ricordando come è costruito il differenziale ((4.5)) ho finito.

- $\text{Ker}(\Phi + d)^{*i}$

la tesi segue esattamente come nel caso precedente, applicando il secondo enunciato del lemma 4.3.2 e considerando che  $(\Phi + d)^*$  è costruita, come  $(\Phi + d)$ , a partire dalle mappe:

$$m_{(\Phi+d)^*} : \begin{cases} a \otimes a \rightarrow a \\ a \otimes b \rightarrow 0 \\ b \otimes a \rightarrow 0 \\ b \otimes b \rightarrow b \end{cases} \quad \Delta_{(\Phi+d)^*} : \begin{cases} a \rightarrow a \otimes a \\ b \rightarrow -b \otimes b \end{cases}$$

Questo mi dice che  $\dim H_{\text{Lee}}(D) \geq 2^n$ , ora devo far vedere dove si trovano i generatori canonici:

considero  $(D, \mathbf{o})$  e  $(D, -\mathbf{o})$ , allora  $n_-(D, \mathbf{o}) = n_-(D, -\mathbf{o})$  quindi

$$\dim \bar{H}_{\text{Lee}}^{n_-(D, \mathbf{o})}(D) \geq 2$$

da cui

$$\dim H_{\text{Lee}}^0(D) = \dim \bar{H}_{\text{Lee}}^{n_-(D, \mathbf{o})}(D)[-n_-(D, \mathbf{o})] \geq 2$$

In generale osservo che un'orientazione e la sua opposta mi danno sempre due generatori ortonormali nello stesso gruppo di omologia; quindi mi basta considerare le orientazioni relative e moltiplicare tutto per due.

Se  $D$  è il diagramma di un nodo ho già finito, altrimenti, per ognuna delle altre  $2^{n-1} - 1$  orientazioni relative, ragiono così:

sia  $\mathbf{o}'$  un'altra orientazione (relativa, suppongo di non cambiare mai l'orientazione della componente 1) ottenuta scambiando l'orientazione di  $D_j$  per  $j \in E \subset \{2, \dots, n\}$ .

Dato che una risoluzione coerente risolve incroci positivi con 0-risoluzioni e negativi con 1-risoluzioni, allora i due generatori associati a  $(D, \mathbf{o}')$  appartengono a  $H_{\text{Lee}}^{n_-(D, \mathbf{o}') - n_-(D, \mathbf{o})}(D)$ .

In più posso dire che il numero di incroci negativi tra  $D_j$  e  $D_k$  cambia se e solo se su  $D_k$  l'orientazione resta la stessa e che vale

$$\begin{aligned} 2l_{j,k} &= (n_+(D, \mathbf{o}) - n_-(D, \mathbf{o}) \text{ lungo } D_j \text{ e } D_k) \\ &= (n_-(D, \mathbf{o}') - n_-(D, \mathbf{o}) \text{ lungo } D_j \text{ e } D_k) \end{aligned}$$

da cui

$$n_-(D, \mathbf{o}') - n_-(D, \mathbf{o}) = \sum_{j \in E, k \notin E} 2l_{j,k}$$

Fine. □

Il prossimo teorema mi dice che ogni altro elemento in  $H_{\text{Lee}}(D)$  è combinazione lineare dei generatori canonici:

**Teorema 4.3.7.**  *$\dim H_{\text{Lee}}(D) = 2^n$  per ogni  $D$  diagramma di un link ad  $n$  componenti.*

*Dimostrazione.* Dimostro il teorema prima per  $n \leq 2$  per induzione sul numero di incroci  $c$  di  $D$ :

- $c = 0$

$$H_{\text{Lee}}(\bigcirc) \cong V \cong \mathbb{Q}^2 \quad \text{e} \quad H_{\text{Lee}}(\bigcirc \sqcup \bigcirc) \cong V \otimes V \cong \mathbb{Q}^4$$

quindi la tesi vale.

- $c - 1 \rightarrow c$

Sia  $D$  un diagramma minimale con  $c$  incroci, suppongo che  $D$  rappresenti un nodo:

uno tra  $D(*0)$  e  $D(*1)$  è un nodo e l'altro un link a 2 componenti. Suppongo che  $D(*0)$  sia un nodo, l'altro caso è uguale. Una delle due orientazioni relative di  $D(*1)$  è compatibile con  $D(*0)$ :

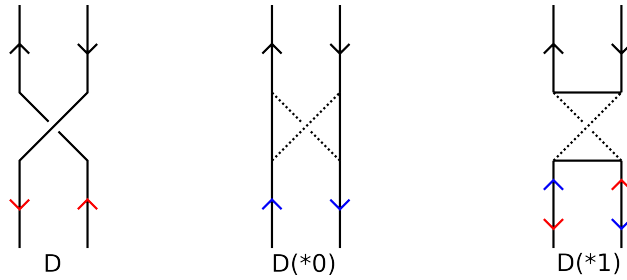


Figura 4.6: I diagrammi di  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono praticamente identici, tranne che in un intorno dell'incrocio risolto

Dalla figura risulta chiaro che, dopo aver fissato delle orientazioni compatibili,  $n_-(D(*0)) = n_-(D(*1)) = k$ .

Per la proposizione precedente e l'ipotesi induttiva su  $D(*0)$  e  $D(*1)$  ho che

$$\bar{H}_{\text{Lee}}^k(D(*0)) \cong \mathbb{Q}^2 \quad \text{e} \quad \dim \bar{H}_{\text{Lee}}^k(D(*1)) = 2 \text{ o } 4$$

Una parte della sequenza esatta della 3.2.1, che vale anche in questo caso, diventa:

$$0 \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^{k-1}(D(*1)) \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^k(D) \longrightarrow \mathbb{Q}^2 \xrightarrow{\phi} \bar{H}_{\text{Lee}}^k(D(*1)) \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^{k+1}(D) \longrightarrow 0$$

dove, per il lemma 4.3.8 che dimostrerò dopo,  $\dim \text{Im } \phi = 2$ .

Se  $\dim \bar{H}_{\text{Lee}}^k(D(*1)) = 2$  la successione, per ogni  $i \neq k$ , si spezza in

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Q}^2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^{i+1}(D) \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^i(D(*1)) \longrightarrow 0$$

Quindi esiste  $s \neq k$  per cui

$$\bar{H}_{\text{Lee}}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}^{s+1}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}^s(D(*1)) \cong \mathbb{Q}^2$$

per l'ipotesi induttiva su  $D(*1)$ .

Se  $\dim \bar{H}_{\text{Lee}}^k(D(*1)) = 4$  la successione, sempre per ogni  $i \neq k$ , diventa

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{Q}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{Q}^4 \longrightarrow \mathbb{Q}^2 \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^{i+1}(D) \longrightarrow \bar{H}_{\text{Lee}}^i(D(*1)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi come prima segue

$$\bar{H}_{\text{Lee}}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}^{k+1}(D) \cong \mathbb{Q}^2$$

In entrambi i casi

$$H_{\text{Lee}}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}(D) \cong \mathbb{Q}^2$$

Adesso suppongo che  $D$  rappresenti un link con due componenti:

se  $D = D_1 \sqcup D_2$  con  $D_i$  nodi per  $i = 1, 2$ , allora

$$H_{\text{Lee}}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}(D) \cong \bar{H}_{\text{Lee}}(D_1) \otimes \bar{H}_{\text{Lee}}(D_2) \cong \mathbb{Q}^2 \otimes \mathbb{Q}^2 \cong \mathbb{Q}^4$$

poiché i  $D_i$  sono diagrammi di nodi con un numero di incroci non superiore a  $c$ .

Se invece  $D$  è non split allora esiste un incrocio per cui, una volta risolto, sia  $D(*0)$  che  $D(*1)$  sono nodi con un numero di incroci inferiore a  $c$ . Allora

$$4 \leq \dim \bar{H}_{\text{Lee}}(D) \leq \dim \bar{H}_{\text{Lee}}(D(*0)) + \dim \bar{H}_{\text{Lee}}(D(*1)) = 4$$

dove la prima disuguaglianza segue dalla 4.3.6 e la seconda dalla sequenza esatta.

Ora devo provare il teorema per i diagrammi di link con un numero di componenti  $n \geq 3$ :

o  $D$  è già split oppure posso applicare una risoluzione ad un incrocio in modo che  $D(*0)$  e  $D(*1)$  siano due diagrammi con  $n - 1$  componenti, quindi, per induzione:

$$2^n \leq \dim H_{\text{Lee}}(D) \leq \dim H_{\text{Lee}}(D(*0)) + \dim H_{\text{Lee}}(D(*1)) = 2^n$$

e la dimostrazione è terminata.  $\square$

Per finire manca soltanto la dimostrazione del lemma

**Lemma 4.3.8.** *La mappa*

$$\phi : \bar{H}_{Lee}^k(D(*0)) \cong \mathbb{Q}^2 \rightarrow \bar{H}_{Lee}^k(D(*1))$$

dove  $k, D(*0)$  e  $D(*1)$  sono come nel teorema precedente, manda i due generatori canonici del primo spazio in due del secondo.

In particolare  $\dim \text{Im } \phi = 2$ .

*Dimostrazione.* Basta osservare la figura 4.6:  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono orientati in modo compatibile, se applico le risoluzioni coerenti ad entrambi ottengo  $v(\mathbf{o})$  e  $w(\mathbf{o})$  generatori canonici.

Ho che le risoluzioni sono identiche tranne in un intorno dell'incrocio centrale dove, nel primo caso ho un cerchio che nel secondo caso si separa in due; cioè in questo vertice del cubo  $\phi$  è della forma

$$W \otimes V \rightarrow W \otimes V \otimes V$$

$$w \otimes v \rightarrow w \otimes \Delta_{\Phi+d}(v)$$

Quindi  $\phi(v(\pm\mathbf{o})) = w(\pm\mathbf{o})$ . □

Ho quindi calcolato, nel modo più completo possibile, l'omologia di Lee.

### 4.3.2 La prova

Dopo aver fatto non poca fatica nella sottosezione precedente, è il momento di raccogliere i frutti del lavoro svolto. Mettendo in relazione l'omologia di Lee, di cui ormai so tutto, con il morfismo  $\Phi$  della sottosezione 4.2.2.

**Teorema 4.3.9.** *Per ogni  $L$  link  $H$ -sottile vale*

$$H_{Lee}(L) \cong \frac{\text{Ker}(\Phi : H(L) \rightarrow H(L))}{\text{Im}(\Phi : H(L) \rightarrow H(L))}$$

*Dimostrazione.* Un elemento  $z$  nel nucleo di  $(\Phi + d)^i : \bar{C}^i(D) \rightarrow \bar{C}^{i+1}(D)$  si può scrivere come somma finita di elementi omogenei,  $z = z^0 + z^1 + \dots + z^k$  dove  $z^j \in \bar{C}^{i,s+2j}(D)$  per un certo  $s$ .

Dato che  $z$  è nel nucleo ho:

$$0 = (\Phi + d)(z) = dz^0 + dz^1 + (dz^2 + \Phi z^0) \dots + (dz^k + \Phi z^{k-2}) + \Phi z^{k-1} + \Phi z^k$$

Suppongo che  $z^r$  e  $z^{r+1}$  siano sulle diagonali dove  $\bar{H}(D)$  può essere non nulla, e che  $4 \leq r \leq k-1$ . Esistono, allora,  $y^j \in \bar{C}^{i,s+2j}(D)$  per  $j = 0, 1, \dots, r-1$  tali che

$$\begin{cases} z^0 = dy^0 \\ z^2 = \Phi y^0 + dy^2 \\ \dots \\ z^{r-2} = \Phi y^{r-4} + dy^{r-2} \end{cases} \quad \begin{cases} z^1 = dy^1 \\ z^3 = \Phi y^1 + dy^3 \\ \dots \\ z^{r-1} = \Phi y^{r-3} + dy^{r-1} \end{cases}$$

L'isomorfismo cercato è dato da:

$$\bar{H}_{\text{Lee}}^i(D) = \frac{\text{Ker}(\Phi + d)^i}{\text{Im}(\Phi + d)^{i-1}} \rightarrow \frac{\text{Ker } d^i \cap (\Phi^i)^{-1}(\text{Im } d^i)}{\text{Im } d^{i-1} + \Phi^{i-1}(\text{Ker } d^{i-1})}$$

$$[z] \rightarrow [z^r - \Phi y^{r-2} + z^{r+1} - \Phi y^{r-1}]$$

dove è facile vedere che

$$\frac{\text{Ker } d^i \cap (\Phi^i)^{-1}(\text{Im } d^i)}{\text{Im } d^{i-1} + \Phi^{i-1}(\text{Ker } d^{i-1})} \cong \frac{\text{Ker}(\Phi^i : \bar{H}^i(D) \rightarrow \bar{H}^{i+1}(D))}{\text{Im}(\Phi^{i-1} : \bar{H}^{i-1}(D) \rightarrow \bar{H}^i(D))}$$

□

Se  $K$  è un nodo H-sottile posso, quindi, provare il teorema 4.2.1: osservo che per la 4.3.6 e il 4.3.7 vale

$$H_{\text{Lee}}(K) \cong H_{\text{Lee}}^0(K) \cong \mathbb{Q}^2$$

chiamo

$$\begin{cases} A^i = H^{i,2i+s-1}(K) \\ B^i = H^{i,2i+s+1}(K) \end{cases}$$

gli addendi dell'omologia di Khovanov che si trovano sulle diagonali di  $K$ . Vale

$$\begin{aligned} \Phi^i : A^i \oplus B^i &\rightarrow B^{i+1} \\ (v, w) &\rightarrow \Phi^i(v) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{cases} \text{Ker } \Phi^i = \text{Ker}(A^i \rightarrow B^{i+1}) \oplus B^i \\ \text{Im } \Phi^{i-1} = \text{Im}(A^{i-1} \rightarrow B^i) \end{cases}$$

Da cui ottengo che

$$\frac{\text{Ker } \Phi^i}{\text{Im } \Phi^{i-1}} = \text{Ker}(A^i \rightarrow B^{i+1}) \oplus \frac{B^i}{\text{Im}(A^{i-1} \rightarrow B^i)} \quad (4.6)$$

Per  $i \neq 0$  il teorema 4.3.9 mi dice che entrambi gli addendi della (4.6) sono nulli, cioè che  $A^i \rightarrow B^{i+1}$  è iniettiva e  $A^{i-1} \rightarrow B^i$  è surgettiva.

Posso concludere che

1.  $A^i \rightarrow B^{i+1}$  è un isomorfismo per  $i \neq -1, 0$ .
2.  $A^{-1} \rightarrow B^0$  è iniettiva.
3.  $A^0 \rightarrow B^1$  è surgettiva.

Per  $i = 0$  invece, andando a controllare bene come lavora l'isomorfismo della dimostrazione di 4.3.9, ottengo

$$\dim \text{Ker}(A^0 \rightarrow B^1) = 1 \quad \text{e} \quad \dim \text{Im}(A^{-1} \rightarrow B^0) = \dim B^0 - 1$$

che, messo insieme ai precedenti, mi dà 4.2.1.

Il pattern della tabella 4.1 non era una semplice coincidenza, ma è riscontrabile in tutti i nodi alternanti e non solo...

Per concludere questa sezione interminabile dimostro l'ultimo risultato promesso nella 4.2.1:

**Teorema 4.3.10.** *Se  $L$  è un link alternante non split allora  $H(L)$  è completamente determinata dal polinomio di Jones e dalla segnatura.*

*Dimostrazione.* Il teorema 3.1.1 per i nodi alternanti, visto in una diversa forma, mi dice che esistono  $A$  e  $B$  polinomi tali che

$$\text{Kh}_L(t, q) = q^{-\sigma(L)} \left( q^{-1}A(tq^2) + qB(tq^2) \right)$$

Il teorema 4.2.1, invece, sempre per i nodi alternanti mi dà

$$\text{Kh}_L(t, q) = q^s(q^{-1} + q) + (q^{-1} + tq^2 \cdot q)C(tq^2)$$

per un certo polinomio  $C$  ed un intero  $s$ .

Mettendo insieme le due cose ho che esiste un certo polinomio  $\text{Kh}'_L$  per cui vale

$$\text{Kh}_L(t, q) = q^{-\sigma(L)} \left\{ (q^{-1} + q) + (q^{-1} + tq^2 \cdot q)\text{Kh}'_L(tq^2) \right\}$$

Questo risultato si estende ai link alternanti non split grazie al lavoro fatto in questo capitolo (i dettagli sono in [18]), quindi ho:

$$\begin{aligned} \text{Kh}_L(t, q) = q^{-\sigma(L)} \left\{ (q^{-1} + q) \left( 1 + \sum_{E \subset \{2, \dots, n\}} (tq^2)^{\sum_{j \in E, k \notin E} 2l_{j,k}} \right) \right. \\ \left. + (q^{-1} + tq^2 \cdot q)\text{Kh}'_L(tq^2) \right\} \end{aligned}$$

dove  $\text{Kh}'_L$  è calcolabile poiché l'omologia di Khovanov categorifica il polinomio di Jones e

$$\text{Kh}_L(-1, q) = (q^{-1} + q)V_L(q)$$

□

Tale teorema è falso per i nodi non alternanti ed il controesempio della 2.2.3 va bene anche in questo caso. Infatti i nodi  $10_{136}$  e  $11''_{92}$  hanno anche la stessa segnatura.

## 4.4 Link quasi-alternanti

Tutto il lavoro svolto in questi due capitoli riguardava lo studio dei link H-sottili: ho già visto che link con questa proprietà risultano essere molto importanti e il teorema di cui ho parlato poco fa ne è sicuramente la prova.

Ho visto, nel capitolo 3 che tutti i link alternanti non split sono H-sottili, mi piacerebbe trovare una classe più ampia di link di questo tipo in modo da poter generalizzare quanto fatto finora (compresi i teoremi 4.2.1 e 4.3.10).

Una tale classe, la classe dei link quasi-alternanti, è stata descritta da Ozsváth e Szabó in [23] e la descriverò brevemente in questa sottosezione, che va intesa più che altro come un'appendice.

**Definizione 34.** Sia  $L$  un link e sia  $A$  la matrice di Seifert per  $L$  descritta nella sezione 1.2. Allora

$$\det(L) = \left| \det(A + A^T) \right|$$

si definisce determinante di  $L$ .

Il determinante è un invariante per il link  $L$  e, da [19], vale:

**Proposizione 4.4.1.** *Se  $L$  è split allora  $\det(L) = 0$ .*

Dopo questa premessa ecco la definizione che ci si aspetta:

**Definizione 35.** Un link  $L$  si dice quasi alternante se verifica queste proprietà:

- È l'unlink.
- Se non è l'unlink allora ammette un diagramma con un incrocio tale che  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono entrambi quasi-alternanti e

$$\det(D) = \det(D(*0)) + \det(D(*1))$$

Dato che  $\det(\bigcirc) = 1$  segue subito che un link quasi-alternante ha determinante non nullo e che quindi è non split. Inoltre ([23]) ogni link alternante non split è quasi-alternante.

La classe che ho definito, quindi, è effettivamente più grande di quella con cui ho lavorato finora.



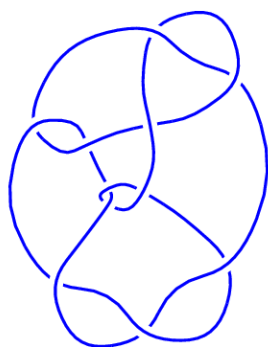


Figura 4.7: Un esempio di nodo quasi-alternante

La figura mostra il nodo  $11^u_{65}$ , che non è alternante, ma risulta essere quasi-alternante.

Infine, ecco il motivo per cui i link quasi-alternanti sono importanti:

**Teorema 4.4.2.** *Un link quasi-alternante è H-sottile.*

La dimostrazione di questo fatto si trova in [21].

La classe dei link quasi-alternanti risulta essere non molto ampia anche se sono stati trovati veramente pochi link H-sottili che non sono quasi-alternanti ed un esempio è descritto da Greene in [12].

Ho così terminato questa appendice e con essa anche il capitolo, che compensa la sua lunghezza, con la grande importanza degli argomenti trattati in esso; non solo per quelli di cui ho già parlato, ma anche per quanto dovrò ancora fare nei due capitoli successivi.



## Capitolo 5

# Una nuova struttura per l'omologia di Lee

### 5.1 Filtrazioni

In questo capitolo parlerò di nuovi invarianti di link, molto recenti, che avranno l'ulteriore proprietà di essere degli invarianti per concordanza. Grande importanza avranno i lavori di Jacob Rasmussen [25] e di Anna Beliakova [7], fino al più recente di John Pardon [24], da cui è stata tratta l'ispirazione per questi ultimi due capitoli della tesi.

La nuova struttura, come si intuisce dal titolo della sezione, sarà una filtrazione quindi partirò proprio da qui:

**Definizione 36.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale su  $\mathbb{Q}$  di dimensione finita. Una filtrazione decrescente su  $V$  è una famiglia  $\{\mathcal{F}^s V\}_{s \in \mathbb{Z}}$  di sottospazi vettoriali di  $V$  tale che

$$\dots \supset V = \mathcal{F}^{s_1} V \supset \dots \supset \mathcal{F}^{s-1} V \supset \mathcal{F}^s V \supset \dots \supset \{0\} = \mathcal{F}^{s_2} V \supset \dots$$

Se  $A \subset V$  è un sottospazio vettoriale allora  $\mathcal{F}$  filtrazione su  $V$  induce automaticamente una filtrazione su  $A$  ponendo  $\mathcal{F}^s A = \mathcal{F}^s V \cap A$  per ogni  $s$ .

Sia  $(\mathcal{C}, d)$  un complesso di cocatene. Allora se  $\mathcal{F}$  è una filtrazione su  $\mathcal{C}^i$  per ogni  $i$  in  $\mathbb{Z}$  ho che  $(\mathcal{C}, d, \mathcal{F})$  è un complesso di cocatene filtrato se vale

$$d^i(\mathcal{F}^s \mathcal{C}^i) \subset \mathcal{F}^s \mathcal{C}^{i+1} \text{ per ogni } i, s \in \mathbb{Z}$$

Dato  $(\mathcal{C}, d, \mathcal{F})$  ho che l'omologia di tale complesso è a sua volta filtrata:

$$\mathcal{F}^s H_i(\mathcal{C}) = \frac{\mathcal{F}^s \text{Ker } d^i}{\mathcal{F}^s \text{Im } d^{i-1}}$$

Ovviamente voglio definire i morfismi:

Dati  $(C, d, \mathcal{F})$  e  $(C', d', \mathcal{F}')$  complessi di cocatene filtrati, allora  $f$  è una mappa filtrata di grado  $n$  se  $f : C \rightarrow C'$ , oltre ad essere una mappa tra complessi, vale anche

$$f(\mathcal{F}^s C^i) \subset \mathcal{F}^{s+n}(C')^i \quad \forall i$$

si dice che  $f$  rispetta la filtrazione se ha grado filtrante 0.

Segue facilmente che allora vale

$$f_*(\mathcal{F}^s H_i(C)) \subset \mathcal{F}^{s+n} H_i(C') \quad \forall i$$

cioè la mappa indotta in omologia ha lo stesso grado filtrante.

Sia  $D$  il diagramma di un link, allora  $(C(D), \Phi + d, \mathcal{F})$  con

$$\mathcal{F}^s C^i(D) = \text{Span} \{v \in C^i(D) \mid \text{qdeg}(v) \geq s\}$$

è un complesso di cocatene filtrato. Infatti basta osservare che

$$(\Phi + d)^i : C^i(D) \rightarrow C^{i+1}(D)$$

è tale che

$$(\Phi + d)^i(\mathcal{F}^s C^i(D)) \subset \mathcal{F}^s C^{i+1}(D) \oplus \mathcal{F}^{s+4} C^{i+1}(D) \subset \mathcal{F}^s C^{i+1}(D)$$

per come avevo definito il morfismo  $\Phi + d$  nel capitolo precedente.

Tale filtrazione passa in omologia di Lee:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D) &= \frac{\mathcal{F}^s \text{Ker}(\Phi + d)^i}{\mathcal{F}^s \text{Im}(\Phi + d)^{i-1}} = \\ &= \text{Span} \left\{ [v] \in H_{\text{Lee}}^i(D) \mid \exists w \in \text{Ker}(\Phi + d)^i, \text{qdeg}(w) \geq s \text{ e } [w] = [v] \right\} \end{aligned}$$

Dico che  $[v] \in H_{\text{Lee}}^i(D)$  ha grado filtrante  $s$  e lo indico con  $\text{sdeg}[v] \geq s$  se  $[v] \in \mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D) \setminus \mathcal{F}^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(D)$  cioè

$$\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D) = \text{Span} \{ [v] \in H_{\text{Lee}}^i(D) \mid \text{sdeg}[v] \geq s \}$$

Dopo questa serie di definizioni veniamo al primo risultato importante del capitolo:

**Teorema 5.1.1.** *L'omologia di Lee filtrata è un invariante di link. Ossia se  $D$  e  $D'$  sono due diagrammi dello stesso link allora*

$$\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D) \cong \mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D') \quad \text{per ogni } i, s \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Siano  $D$  e  $D'$  diagrammi che differiscono per una mossa di Reidemeister e indico con  $\rho_* : H_{\text{Lee}}(D) \rightarrow H_{\text{Lee}}(D')$  l'isomorfismo descritto da Lee in [18]. È facile verificare che  $\rho_*$  e  $(\rho_*)^{-1}$  rispettano entrambe la filtrazione, da cui:

$$\rho_*^i(\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D)) = \mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D') \quad \text{per ogni } i, s \in \mathbb{Z}$$

□

## 5.2 L'invariante di John Pardon per i link

### 5.2.1 Definizione

È giunto il momento di definire l'invariante  $d_L$  anche se la sua effettiva importanza verrà pienamente alla luce soltanto nel prossimo capitolo. Per ora mi limito a descrivere alcune proprietà elementari e il suo rapporto con altri invarianti già conosciuti.

Sia  $D$  il diagramma orientato di un link  $L$ , allora la funzione

$$d_D : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$d_D(i, s) = \dim \frac{\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D)}{\mathcal{F}^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(D)}$$

$d_L$  è un invariante di  $L$  in base al teorema 5.1.1; ma, più importante, è un invariante per concordanza come mostrerò successivamente.

Prima di proseguire scrivo qui alcune notazioni che userò spesso da adesso in poi:

**Definizione 37.** Sia  $(D, \mathbf{o})$  il diagramma orientato di un link, allora

$$\mathcal{O}(D, \mathbf{o}) = \{ \mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D) \text{ relative ad } \mathbf{o} \}$$

dove per orientazione relativa si intende che  $\mathbf{o}'$  coincide con  $\mathbf{o}$  su una componente di  $D$  fissata.

Pongo per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D, \mathbf{o})$

$$\text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}) = \frac{1}{2} [n_-(D, \mathbf{o}') - n_-(D, \mathbf{o})]$$

In particolare  $\text{lk}(\mathbf{o}, \mathbf{o}) = 0$

### 5.2.2 Proprietà elementari di $d_L$

La prima proprietà riguarda il supporto di  $d_L$ :

**Proposizione 5.2.1.** Per ogni link  $L$  se  $d_L(i, s) > 0$  allora  $\begin{cases} i \equiv 0 \pmod{2} \\ s \equiv n \pmod{2} \end{cases}$

dove  $n$  è il numero di componenti di  $L$ .

*Dimostrazione.* Mi occupo dei due casi separatamente:

- So dalla proposizione 4.3.6 che se  $\dim H_{\text{Lee}}^i(L) > 0$  allora

$$i = n_-(D, \mathbf{o}') - n_-(D, \mathbf{o}) = 2 \cdot \text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}) \equiv 0 \pmod{2}$$

- Se  $\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L) \neq \mathcal{F}^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(L)$  allora esiste  $[v] \in H_{\text{Lee}}^i(L)$  tale che  $\text{sdeg}[v] = s$  e quindi  $v \in \bigoplus_{j \geq s} C^{i,j}(D) \setminus \bigoplus_{j \geq s+1} C^{i,j}(D)$  con  $D$  diagramma di  $L$ .

Ma per la proposizione 2.4.1 deve valere

$$s \equiv n \pmod{2}$$

□

Ora invece vedo come si comporta  $d_L$  con l'unione disgiunta di due link:

**Proposizione 5.2.2.** *Detti  $D_1, D_2$  diagrammi di link, risulta*

$$d_{D_1 \sqcup D_2}(i, s) = (d_{D_1} * d_{D_2})(i, s) \quad \text{per ogni } i, s \in \mathbb{Z}$$

dove  $*$  è il prodotto di convoluzione.

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} d_{D_1 \sqcup D_2}(i, s) &= \dim \frac{\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(D_1 \sqcup D_2)}{\mathcal{F}^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(D_1 \sqcup D_2)} = \\ &= \dim \frac{\mathcal{F}^s \bigoplus_k \left( H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)}{\mathcal{F}^{s+1} \bigoplus_k \left( H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \dim \frac{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, h \geq s-h} \left( \mathcal{F}^h H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes \mathcal{F}^{s-h} H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)}{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, h \geq s-h} \left( \mathcal{F}^h H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes \mathcal{F}^{s+1-h} H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)} = \\ &= \dim \frac{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, h \geq s+1-h} \left( \mathcal{F}^h H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes \mathcal{F}^{s-h} H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)}{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, h \geq s+1-h} \left( \mathcal{F}^{h+1} H_{\text{Lee}}^k(D_1) \otimes \mathcal{F}^{s+1-h} H_{\text{Lee}}^{i-k}(D_2) \right)} = \\ &= \sum_{k, h} d_{D_1}(k, h) \cdot d_{D_2}(i-k, s-h) = (d_{D_1} * d_{D_2})(i, s) \end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (1) segue dal fatto che, per ogni filtrazione  $\mathcal{F}$  su dei complessi  $C_1$  e  $C_2$ , vale

$$\mathcal{F}^s \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \left( C_1^k \otimes C_2^{i-k} \right) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}, h \geq s-h} \left( \mathcal{F}^h C_1^k \otimes \mathcal{F}^{s-h} C_2^{i-k} \right)$$

la cui prova è lasciata per esercizio. □

Voglio definire ora il complesso di cocatene filtrato duale di un dato complesso  $(C, d, \mathcal{F})$ .

Sia  $(\mathcal{C}^*, d^*, \mathcal{F}^*)$  dove  $\mathcal{C}^*$  e  $d^*$  sono quelli costruiti nel capitolo 2 mentre  $\mathcal{F}^*$  è definita così:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^*)^i &= (\mathcal{F}^*)^{-s_2+1}(\mathcal{C}^*)^i \supset \dots \supset (\mathcal{F}^*)^s(\mathcal{C}^*)^i = \text{Ann}_{(\mathcal{C}^*)^i} \mathcal{F}^{-s+1} \mathcal{C}^i \supset \dots \\ &\dots \supset \{0\} = (\mathcal{F}^*)^{-s_1+1}(\mathcal{C}^*)^i \quad \text{per ogni } i, s \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Infatti, dato che vale

$$d^{-i-1}(\mathcal{F}^s \mathcal{C}^{-i-1}) \subset \mathcal{F}^s \mathcal{C}^{-i}$$

allora

$$\begin{aligned} (d^*)^i((\mathcal{F}^*)^s(\mathcal{C}^*)^i) &= \\ &= (d^*)^i(\text{Ann}_{(\mathcal{C}^*)^i} \mathcal{F}^{-s+1} \mathcal{C}^{-i}) \subset \text{Ann}_{(\mathcal{C}^*)^{i+1}} \mathcal{F}^{-s+1} \mathcal{C}^{-i-1} = (\mathcal{F}^*)^s(\mathcal{C}^*)^{i+1} \end{aligned}$$

e quindi  $(\Phi + d)^*$  è un differenziale per la filtrazione  $\mathcal{F}^*$ .

In analogia a quanto visto nel capitolo 2, detto  $D$  il diagramma di un link, il complesso filtrato  $(\mathcal{C}^*(D), (\Phi + d)^*, \mathcal{F}^*)$  è il complesso associato al diagramma riflesso  $D^*$  e questo mi sarà utile per dimostrare la prossima proposizione.

**Proposizione 5.2.3.** *Per ogni link  $L$  vale  $d_{L^*}(i, s) = d_L(-i, -s)$  per ogni  $i, s \in \mathbb{Z}$*

*Dimostrazione.* Sia  $D$  un diagramma associato a  $L$ . Allora ottengo

$$\begin{aligned} d_{D^*}(i, s) &= \dim \frac{(\mathcal{F}^*)^s H_{\text{Lee}}^i(D^*)}{(\mathcal{F}^*)^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(D^*)} = \\ &= \dim \frac{(\mathcal{F}^*)^s \text{Ker}((\Phi + d)^*)^i}{(\mathcal{F}^*)^s \text{Im}((\Phi + d)^*)^{i-1}} - \dim \frac{(\mathcal{F}^*)^{s+1} \text{Ker}((\Phi + d)^*)^i}{(\mathcal{F}^*)^{s+1} \text{Im}((\Phi + d)^*)^{i-1}} = \\ &= \dim \frac{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s+1} \text{coKer}(\Phi + d)^{-i-1}}{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s+1} \text{coIm}(\Phi + d)^{-i}} - \\ &\quad - \dim \frac{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s} \text{coKer}(\Phi + d)^{-i-1}}{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s} \text{coIm}(\Phi + d)^{-i}} = \\ &= \dim \frac{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s+1} H_{\text{Lee}}^{-i}(D)}{\text{Ann } \mathcal{F}^{-s} H_{\text{Lee}}^{-i}(D)} = \dim \frac{\mathcal{F}^{-s} H_{\text{Lee}}^{-i}(D)}{\mathcal{F}^{-s+1} H_{\text{Lee}}^{-i}(D)} = d_D(-i, -s) \end{aligned}$$

□

Infine, ecco l'ultima formula che, per ora, dimostro; tuttavia essa risulta essere molto importante: infatti mette in relazione i valori dell'invariante  $d_L$  al variare delle orientazioni relative del link (ovviamente invertire l'orientazione non modifica niente), una simile proprietà è molto difficile da trovare negli invarianti fino ad ora conosciuti.

**Proposizione 5.2.4.** Sia  $(D, \mathbf{o})$  il diagramma di un link e sia  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D, \mathbf{o})$ . Allora vale la seguente formula

$$d_{(D, \mathbf{o}')} (i, s) = d_{(D, \mathbf{o})} (i + 2 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}), s + 6 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}))$$

*Dimostrazione.* Sia  $v \in C^{i_{\mathbf{o}}}(D, \mathbf{o})$  tale che  $sdeg[v] = s_{\mathbf{o}}$ . Allora  $v \in C^{i_{\mathbf{o}'}}(D, \mathbf{o}')$  e  $sdeg[v] = s_{\mathbf{o}'}$ .

Siano  $i, s$  i gradi di  $v$  in  $\bar{C}(D)$ , cioè senza considerare gli shift, allora:

$$\begin{cases} i_{\mathbf{o}} = i - n_-(D, \mathbf{o}) \\ i_{\mathbf{o}'} = i - n_-(D, \mathbf{o}') \end{cases} \quad \begin{cases} s_{\mathbf{o}} = s + n_+(D, \mathbf{o}) - 2n_-(D, \mathbf{o}) \\ s_{\mathbf{o}'} = s + n_+(D, \mathbf{o}') - 2n_-(D, \mathbf{o}') \end{cases}$$

Da cui

$$\begin{cases} i_{\mathbf{o}'} = i_{\mathbf{o}} - n_-(D, \mathbf{o}') + n_-(D, \mathbf{o}) = i_{\mathbf{o}} - 2 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}) \\ s_{\mathbf{o}'} = s_{\mathbf{o}} - 3n_-(D, \mathbf{o}') + 3n_-(D, \mathbf{o}) = s_{\mathbf{o}} - 6 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}) \end{cases}$$

e la tesi segue facilmente.  $\square$

### 5.2.3 Proprietà meno elementari e link H-sottili

Comincio con un lemma:

**Lemma 5.2.5.** Sia  $D$  un diagramma di un link,  $\mathbf{o} \in \mathcal{O}(D, \bar{\mathbf{o}})$  e  $v(\mathbf{o})$  il generatore canonico associato. Allora

$$|sdeg[v(\mathbf{o}) + v(-\mathbf{o})] - sdeg[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})]| = 2$$

*Dimostrazione.* In [25] Rasmussen dimostra che

$$sdeg[v(\mathbf{o}) + v(-\mathbf{o})] - sdeg[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})] \equiv 2 \pmod{4}$$

Mentre per far vedere che vale esattamente  $\pm 2$  uso una tecnica già adoperata da Stephan Wehrli:

per definire un morfismo di  $\bar{C}(D)$  in sé mi basta definirlo su ogni vertice del cubo e poi estenderlo per linearità.

Quindi considero l'automorfismo di  $(C(D, \mathbf{o}), \Phi + d)$  definito nel seguente modo:

$$\underbrace{V \otimes \dots \otimes V \otimes V}_{k_{\alpha}-1 \text{ volte}} \longrightarrow \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{k_{\alpha} \text{ volte}}$$

$$v' \otimes v \longrightarrow 2v' \otimes m_{\Phi+d}(v \otimes v_-)$$

dove  $k_{\alpha}$  è il numero di cerchi nella risoluzione  $\alpha$  di un vertice del cubo.

È immediato verificare che tale automorfismo ha grado filtrante  $-2$  e manda  $[v(\mathbf{o}) + v(-\mathbf{o})]$  in  $[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})]$  o viceversa.  $\square$

Posso ora dimostrare altre proprietà di  $d_L$ :



**Proposizione 5.2.6.** Sia  $(D, \mathbf{o})$  un diagramma di un link. Allora

$$d_{(D, \mathbf{o})}(0, sdeg[v(\mathbf{o}) \pm v(-\mathbf{o})]) > 0$$

*Dimostrazione.*  $[v(\mathbf{o}) \pm v(-\mathbf{o})]$  sono due elementi indipendenti di  $H_{Lee}^0(L)$ . Per il lemma precedente so che

$$\underbrace{sdeg[v(\mathbf{o}) + v(-\mathbf{o})]}_{=s_1} = \underbrace{sdeg[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})]}_{=s_2} + 2$$

o viceversa; quindi:

$$d_{(D, \mathbf{o})}(0, s_2) = \dim \frac{\mathcal{F}^{s_2} H_{Lee}^0(L)}{\mathcal{F}^{s_2+1} H_{Lee}^0(L)} = \dim \frac{\text{Span}\{[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})], \dots, w_k\}}{\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}} > 0$$

dove  $\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$  è una base di  $\mathcal{F}^{s_2+1} H_{Lee}^0(L)$ .

Per  $s_1$  si ragiona allo stesso modo.  $\square$

**Corollario 5.2.7.**

$$d_{(D, \mathbf{o})}(2 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}), sdeg[v(\mathbf{o}') \pm v(\mathbf{o}')] + 6 \cdot lk(\mathbf{o}', \mathbf{o})) > 0$$

Per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D, \mathbf{o})$ .

*Dimostrazione.* Segue subito dalla proposizione precedente e dalla 5.2.4.  $\square$

Non è detto, in generale, che tutto il supporto di  $d_{(D, \mathbf{o})}$  si ottenga nel modo descritto in tale corollario ed in seguito mostrerò un caso in cui ciò effettivamente non avviene; ma vale comunque la seguente proposizione:

**Proposizione 5.2.8.** Se  $d_{(D, \mathbf{o})}(i, s) > 0$  allora lo stesso accade per almeno uno tra  $(i, s \pm 2)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $[w] \in \mathcal{F}^s H_{Lee}^i(D, \mathbf{o}) \setminus \mathcal{F}^{s+1} H_{Lee}^i(D, \mathbf{o})$ , allora  $w \in C(D, \mathbf{o})$  e, se applico l'automorfismo descritto nel lemma 5.2.5, verrà mandato in un elemento  $w'$  tale che  $[w'] \in \mathcal{F}^{s \pm 2} H_{Lee}^i(D, \mathbf{o}) \setminus \mathcal{F}^{s \pm 2 + 1} H_{Lee}^i(D, \mathbf{o})$  da cui la tesi.  $\square$

Con la dimostrazione precedente ho quindi provato il seguente corollario

**Corollario 5.2.9.** Per ogni link  $L$  risulta

$$\sum_{s \equiv n+k \pmod{4}} d_L(i, s) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{1}{2} \dim H_{Lee}^i(L) & \text{se } k \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Ecco quindi adesso un teorema molto importante che mi permetterà di calcolare  $d_L$  per link H-sottili, a partire dall'omologia di Khovanov. Sarà facile notare che il seguente teorema chiarisce, per così dire, i risultati dei teoremi 4.2.1 e 4.3.9.

**Teorema 5.2.10.** *Sia  $L$  un link H-sottile. Allora  $d_L$  ha supporto contenuto nelle diagonali critiche di  $H(L)$ , ossia nelle rette  $s = 2i + c \pm 1$  con  $c \in \mathbb{Z}$  e di conseguenza*

$$d_L(i, 2i + c + 1) = d_L(i, 2i + c - 1) = \frac{1}{2} \dim H_{\text{Lee}}^i(L) \quad \forall i$$

*Dimostrazione.* Ho già provato nel teorema 4.3.9 che esiste il seguente isomorfismo  $\Psi$ :

$$\Psi^i : H_{\text{Lee}}^i(L) \longrightarrow \frac{\text{Ker}(\Phi^i : H^i(L) \rightarrow H^{i+1}(L))}{\text{Im}(\Phi^{i-1} : H^{i-1}(L) \rightarrow H^i(L))}$$

Ogni  $H^i(L)$  ha una filtrazione naturale:

$$\mathcal{F}^s H^i(L) = \bigoplus_{j \geq s} H^{i,j}(L)$$

$(H(L), \Phi, \mathcal{F})$  è quindi un complesso filtrato e  $\mathcal{F}$  passa in omologia, per cui

$$\mathcal{F}^s H_i(H(L)) = \frac{\mathcal{F}^s \text{Ker}(\Phi^i : H^i(L) \rightarrow H^{i+1}(L))}{\mathcal{F}^s \text{Im}(\Phi^{i-1} : H^{i-1}(L) \rightarrow H^i(L))}$$

Si verifica immediatamente, ricordando che  $\Psi$  è descritto esplicitamente in 4.3.9, che

$$\Psi^i(\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L)) \subset \mathcal{F}^s H_i(H(L)) \quad \text{e} \quad \Psi^{-1}(\mathcal{F}^s H_i(H(L))) \subset \mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L)$$

Da cui

$$\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L) \cong \frac{\mathcal{F}^s \text{Ker} \Phi^i}{\mathcal{F}^s \text{Im} \Phi^{i-1}}$$

- Se  $s > 2i + c + 1$  allora  $\mathcal{F}^s \text{Ker} \Phi^i = \{0\}$  che implica  $\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L) = \{0\}$  e  $d_L(i, s) = 0$
- Se  $s < 2i + c - 1$  allora  $\mathcal{F}^s \text{Ker} \Phi^i = \text{Ker} \Phi^i$  e  $\mathcal{F}^s \text{Im} \Phi^{i-1} = \{0\}$  che implica  $\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L) \cong \text{Ker} \Phi^i$  (anche per  $s = 2i + c - 1$ ) e  $d_L(i, s) = 0$
- Se  $s = 2i + c$  allora  $\mathcal{F}^s \text{Ker} \Phi^i = \mathcal{F}^{s+1} \text{Ker} \Phi^i$  e  $\mathcal{F}^s \text{Im} \Phi^{i-1} = \mathcal{F}^{s+1} \text{Im} \Phi^{i-1}$  che implica  $\mathcal{F}^s H_{\text{Lee}}^i(L) \cong \mathcal{F}^{s+1} H_{\text{Lee}}^i(L)$  e  $d_L(i, s) = 0$

Mi resta, ricordando le conclusioni dopo la prova del teorema 4.3.9

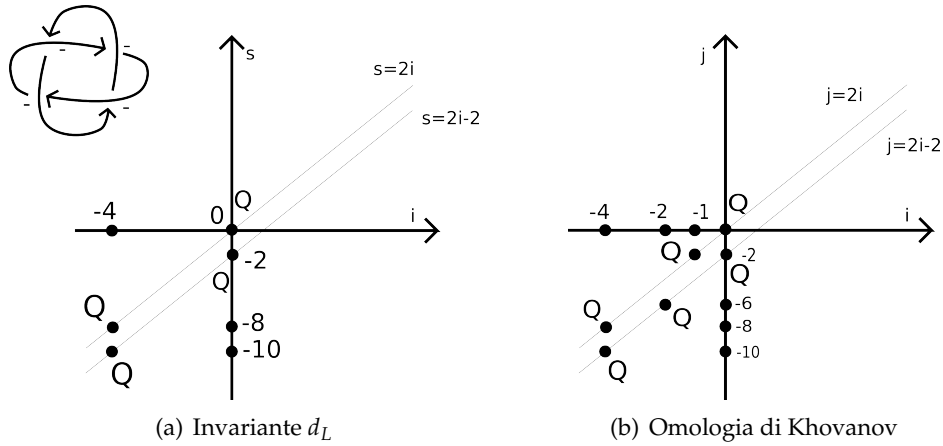
$$\mathcal{F}^{2i+c+1}H_{Lee}^i(L) \cong \frac{H^{i,2i+c+1}(L)}{\text{Im}(\Phi^{i-1} : H^{i-1,2i+c-3}(L) \rightarrow H^{i,2i+c+1}(L))}$$

$$\mathcal{F}^{2i+c-1}H_{Lee}^i(L) \cong \text{Ker}(\Phi^i : H^{i,2i+c-1}(L) \rightarrow H^{i,2i+c+3}(L))$$

che, per il corollario 5.2.9, hanno entrambi dimensione uguale a  $\frac{1}{2}\dim H_{Lee}^i(L)$ . □

Ecco cosa succede per gli anelli di Solomon:

Figura 5.1



### 5.3 Relazione con $s(L)$

#### 5.3.1 L'invariante di Rasmussen

Sia  $(D, \mathbf{o})$  il diagramma di un link, si dice invariante di Rasmussen generalizzato il numero

$$s(D, \mathbf{o}) = \frac{1}{2} (\text{sdeg}[v(\mathbf{o}) + v(-\mathbf{o})] + \text{sdeg}[v(\mathbf{o}) - v(-\mathbf{o})])$$

Se  $(D, \mathbf{o})$  è il diagramma di un nodo  $s(D, \mathbf{o})$  coincide con l'invariante di Rasmussen definito in [25] e questo ne giustifica il nome.

$s(D, \mathbf{o})$  mi dà informazioni su  $d_{(D, \mathbf{o})}$ , infatti, per il corollario 5.2.7 ho subito che

$$d_{(D, \mathbf{o})} (2 \cdot \text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}), s(D, \mathbf{o}') + 6 \cdot \text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}) \pm 1) > 0$$

per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathbb{O}(D, \mathbf{o})$ .

Per i link H-sottili e per i nodi conoscere  $s(D, \mathbf{o}')$  per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D, \mathbf{o})$  mi caratterizza completamente  $d_{(D, \mathbf{o})}$  e, ovviamente, è vero anche il viceversa. Se il link è anche alternante non split, inoltre, so anche che  $s(D, \mathbf{o}) = -\sigma(D, \mathbf{o})$ .

Se un link non è H-sottile, però,  $d_{(D, \mathbf{o})}$  in generale mi dà più informazioni:

considero il diagramma banale dell'unlink con  $n$  componenti  $\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc$  (posso trascurare le orientazioni, poiché sono tutte equivalenti).

Dato che non ho incroci si ha che  $\text{Im}(\Phi + d)^{-1} = \{0\}$  quindi  $v(\mathbf{o}) \pm v(\mathbf{o})$  sono gli unici elementi delle loro classi di omologia e questo mi dice che:

$$\text{sdeg}[v(\mathbf{o}) \pm v(\mathbf{o})] = \text{qdeg}(v(\mathbf{o}) \pm v(\mathbf{o})) = \{-n, 2 - n\}$$

Da cui

$$s(\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc) = 1 - n$$

Invece  $d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}$  lo calcolo applicando  $n$  volte la convoluzione a  $d_{\bigcirc}$  che vale 1 soltanto in  $(0, \pm 1)$ , quindi:

$$d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}(i, s) = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } i = 0, s = n - 2k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il link  $L5_1$  in figura 6.6 e l'unlink a due componenti hanno entrambi invariante  $s$  pari a  $-1$ , ma non lo stesso invariante  $d$  poiché il primo è H-sottile.

Ecco alcune proprietà di  $s$  dimostrate da Stephan Wehrli ed Anna Beliakova in [7]:

**Proposizione 5.3.1.** *Sia  $\Sigma$  un cobordismo debole tra due link  $L_1$  ed  $L_2$ , allora*

$$|s(L_1) - s(L_2)| \leq -\chi(\Sigma)$$

*Dimostrazione.* Da [25] so che

$$s(L_2) \geq s(L_1) + \chi(\Sigma)$$

Riflettendo  $\Sigma \hookrightarrow S^3 \times [0, 1]$  lungo  $S^3 \times \{\frac{1}{2}\}$  ottengo un cobordismo debole tra  $L_2$  ed  $L_1$  con la stessa caratteristica di Eulero, da cui:

$$s(L_1) \geq s(L_2) + \chi(\Sigma)$$

□

Inoltre valgono le seguenti disequaglianze:

**Proposizione 5.3.2.** *Siano  $L, L_1, L_2$  link con  $n$  numero di componenti di  $L$*

1.  $s(L_1 \sqcup L_2) = s(L_1) + s(L_2) - 1$
2.  $s(L_1) + s(L_2) - 2 \leq s(L_1 \sharp L_2) \leq s(L_1) + s(L_2)$
3.  $2 - 2n \leq s(L) + s(L^*) \leq 2$

*Dimostrazione.* Distinguo i casi:

1. Siano  $(D_1, \mathbf{o}_1)$  e  $(D_2, \mathbf{o}_2)$  diagrammi per  $L_1$  ed  $L_2$ ,  $C(D_1 \sqcup D_2, \mathbf{o}_1 \sqcup \mathbf{o}_2)$  e  $C(D_1, \mathbf{o}_1) \otimes C(D_2, \mathbf{o}_2)$  sono isomorfi e l'isomorfismo, sui generatori canonici, è definito così

$$v(\mathbf{o}_1 \sqcup \mathbf{o}_2) \rightarrow v(\mathbf{o}_1) \otimes v(\mathbf{o}_2)$$

Quindi

$$\begin{aligned} s(L_1 \sqcup L_2) - 1 &= \min \{ \text{sdeg}[v(\mathbf{o}_1 \sqcup \mathbf{o}_2) \pm v(-\mathbf{o}_1 \sqcup \mathbf{o}_2)] \} = \\ &\stackrel{(1)}{=} \text{sdeg}[v(\mathbf{o}_1 \sqcup \mathbf{o}_2)] = \text{sdeg}[v(\mathbf{o}_1) + v(\mathbf{o}_2)] = \\ &\stackrel{(2)}{=} \min \{ \text{sdeg}[v(\mathbf{o}_1) \pm v(-\mathbf{o}_1)] \} + \\ &\quad + \min \{ \text{sdeg}[v(\mathbf{o}_2) \pm v(-\mathbf{o}_2)] \} = \\ &= s(L_1) - 1 + s(L_2) - 1 \end{aligned}$$

dove (1) e (2) sono state provate in [25].

2. Segue da 1. e dalla proposizione precedente poiché tra  $L_1 \sharp L_2$  e  $L_1 \sqcup L_2$  esiste un cobordismo sella che ha caratteristica di Eulero  $-1$ .
3. Come per 2. esiste un cobordismo tra  $L \sqcup L^*$  e l'unlink ad  $n$  componenti formato da  $n$  selle; ottenuto incollando un cobordismo tra  $L \sqcup L^*$  e  $L \sharp L^*$  ed un cobordismo forte di genere 0 tra  $L \sharp L^*$  e l'unlink.

□

### 5.3.2 Un'altra classe di link: i link pseudo-sottili

Posso usare  $d_L$  e le sue proprietà per migliorare le disuguaglianze della 5.3.2. In generale ciò non sarà possibile, perciò dovrò introdurre una nuova classe di link:

**Definizione 38.** Sia  $L$  un link non split, dico che  $L$  è pseudo-sottile se per ogni  $[v] \in H_{\text{Lee}}^0(L)$  risulta  $\text{sdeg}[v] = c(L) \pm 1$  con  $c(L) \in \mathbb{Z}$ , ossia  $d_L(0, \cdot)$  ha supporto in due punti.

Un link qualunque è pseudo-sottile se ogni sua componente split è pseudo-sottile.

È immediato che, detto  $(D, \mathbf{o})$  un diagramma di un link pseudo-sottile, risulta  $s(D, \mathbf{o}') = c$  per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(D, \mathbf{o})$  tale che  $\text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}) = 0$ . Inoltre ogni nodo ed ogni link H-sottile è pseudo-sottile.

Nelle sezioni finali di questo capitolo mostrerò esempi di link pseudo-sottili non split che non sono H-sottili.

Voglio provare che:

**Proposizione 5.3.3.** *Se  $L$  è un link pseudo-sottile orientato allora*

$$s(L^*) = 2 - 2r - s(L)$$

dove  $r$  è il numero di componenti split di  $L$ . Tale proposizione generalizza il risultato di Rasmussen sui nodi.

*Dimostrazione.* Prima i link non split:

- $r = 1$

$d_{L^*}(0, s)$  è diverso da zero solo per  $s = s(L^*) \pm 1$  poiché  $L$  è pseudo-sottile e  $d_{L^*}(0, s) = d_L(0, -s)$ ; quindi:

$$s(L^*) = -s(L)$$

- $r = 2$

$L = L_1 \sqcup L_2$  con  $L_i$  non split per  $i = 1, 2$ , quindi:

$$\begin{aligned} s(L^*) &= s(L_1^*) + s(L_2^*) - 1 = -s(L_1) - s(L_2) - 1 = \\ &= -(s(L_1) + s(L_2) - 1) - 2 = -2 - s(L) \end{aligned}$$

- $r \geq 3$

La tesi segue per induzione. □

Dato che i link H-sottili sono tutti non split ([21]) ottengo che

$$s(L^*) = -s(L)$$

per ogni  $L$  link H-sottile.

Verificare se un link è pseudo-sottile richiede il calcolo dell'omologia di Lee filtrata o comunque, in particolari casi, dell'omologia di Khovanov; ciò è evidentemente una cosa scomoda per cui nella seguente proposizione do delle condizioni geometriche affinché un link appartenga alla classe in questione.

**Proposizione 5.3.4.** *Sia  $(L, \mathbf{o})$  un link non split; allora se  $L$  è quasi-alternante oppure vale*

$$\text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{o}' \in \mathcal{O}(L, \mathbf{o}) \setminus \mathbf{o}$$

*allora  $(L, \mathbf{o})$  è pseudo-sottile.*

*Dimostrazione.* Per la 4.4.2 un link quasi-alternante è H-sottile mentre la seconda ipotesi mi dice che  $\dim H_{\text{Lee}}^0(L) = 2$ .  $\square$

L'invariante  $s$  raramente può essere calcolato esplicitamente; Rasmussen in [25] ci riesce per nodi che possiedono un diagramma positivo (o negativo), cioè con tutti gli incroci dello stesso segno, positivo o negativo appunto. Tale calcolo è possibile anche per i link e lo descrivo brevemente ora, anche perché mi sarà utile nell'ultima sezione del capitolo.

**Teorema 5.3.5.** *Sia  $(D, \mathbf{o})$  un diagramma positivo, allora*

$$s(D, \mathbf{o}) = -o(D) + c(D) + 1$$

dove ricordo che  $o(D)$  è il numero di cerchi nella 0-risoluzione e  $c(D)$  è il numero di incroci di  $D$ .

*Dimostrazione.* Il fatto che il link è positivo mi dice che

$$v(\mathbf{o}) \pm v(-\mathbf{o}) \in \bar{C}^0(D) = C^0(D)\{-c(D)\}$$

inoltre so che

$$\text{Im}(\Phi + d)^{-1} = \{0\}$$

da cui

$$\begin{aligned} \text{sdeg}[v(\mathbf{o}) \pm v(-\mathbf{o})] &= \\ &= \text{qdeg}(v(\mathbf{o}) \pm v(-\mathbf{o})) = \{-o(D) + c(D), 2 - o(D) + c(D)\} \end{aligned}$$

cioè

$$s(D, \mathbf{o}) = -o(D) + c(D) + 1$$

$s$  non dipende dall'orientazione, purché il diagramma sia ancora positivo.  $\square$

È facile osservare che un link positivo o negativo è pseudo-sottile, quindi se  $s(D, \mathbf{o})$  è un diagramma negativo ho che:

$$\begin{aligned} s(D, \mathbf{o}) &= 2 - 2r - s(D^*, \mathbf{o}) = \\ &= 2 - 2r - (-o(D^*) + c(D) + 1) = o(D) - c(D) + 1 - 2r \end{aligned}$$

per la 5.3.3 e per il fatto che, per diagrammi positivi o negativi,  $o(D) = o(D^*)$ . Ponendo, inoltre,  $r = 1$  per i nodi ottengo proprio lo stesso risultato di Rasmussen.

### 5.3.3 Approfondimenti sulla somma connessa di link

Nella proposizione 5.3.2 ho visto che posso stimare il valore dell'invariante di Rasmussen generalizzato della somma connessa di due link: in generale, quindi,  $s$  non è additivo, ma posso dimostrare che lo è per la classe dei link pseudo-sottili.

**Proposizione 5.3.6.** *Se  $L_1, L_2$  e  $L_1 \# L_2$  sono link pseudo-sottili allora vale*

$$s(L_1 \# L_2) = s(L_1) + s(L_2)$$

*Dimostrazione.* So già che

$$s(L_1 \# L_2) \leq s(L_1) + s(L_2)$$

e quindi anche

$$s(L_1^* \# L_2^*) \leq s(L_1^*) + s(L_2^*)$$

Ma dato che  $L_1$  ed  $L_2$  sono pseudo-sottili allora  $s(L^*) = 2 - 2r - s(L)$  quindi

$$2 - 2(r_1 + r_2 - 1) - s(L_1 \# L_2) \leq 2 - 2r_1 - s(L_1) + 2 - 2r_2 - s(L_2)$$

dove  $r_i$  è il numero di componenti split di  $L_i$ . La precedente espressione diventa

$$s(L_1 \# L_2) \geq s(L_1) + s(L_2)$$

e ho finito. □

In [24] non viene mostrata nessuna formula che esprima  $d_{L_1 \# L_2}$  in funzione di  $d_{L_1}$  e  $d_{L_2}$ , tuttavia, usando, la precedente proposizione, sono in grado di trovare un'espressione che funziona nel caso in cui  $L_1$  ed  $L_2$  siano nodi oppure link H-sottili; purtroppo però non sono riuscito a generalizzarla, neanche per tutti i link pseudo-sottili.

**Proposizione 5.3.7.** *Siano  $L_1$  ed  $L_2$  nodi o link H-sottili; allora vale la seguente formula*

$$d_{L_1 \# L_2}(i, s \pm 1) = \left| \left\{ ((i_1, s_1), (i_2, s_2)) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \mid \right. \right. \\ \left. \left. \mid i_1 + i_2 = i, s_1 + s_2 = s \text{ e } d_{L_j}(i_j, s_j \pm 1) > 0 \forall j \right\} \right|$$

*Dimostrazione.* Ho due casi:

- Per i nodi la formula è semplicemente

$$d_{L_1 \# L_2}(0, s_1 + s_2 \pm 1) = 1 \text{ dove } d_{L_i}(0, s_i \pm 1) = 1$$

e deriva dall'additività di  $s$  per i nodi.



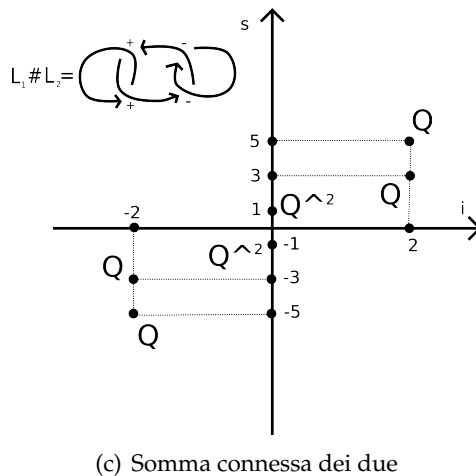
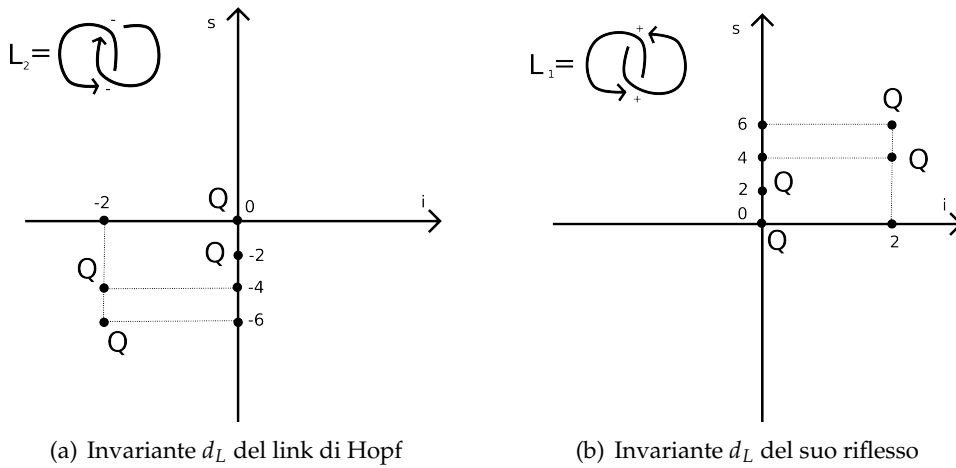
- La formula per i link H-sottili segue da due fatti:

Un link H-sottile è pseudo-sottile per ogni orientazione relativa e quindi  $s(L_1 \# L_2)$  è additivo, sempre per ogni orientazione. La somma connessa di due link H-sottili è H-sottile per via della 2.4.6, che vale anche per i link.

Dati  $D_1, D_2$  diagrammi, allora il writhe della somma connessa è additivo:  $w(D_1 \# D_2) = w(D_1) + w(D_2)$ .

□

Figura 5.2



Si può osservare che  $d_{L_1 \# L_2}$  dipende soltanto dalle orientazioni dei due link e non da quale componenti connesso.

## 5.4 Stime vecchie e stime nuove

Andrew Lobb in [20], lavorando sull'invariante di Rasmussen, ha trovato delle stime per il valore di  $s(D, \mathbf{o})$ , dipendenti dal diagramma  $D$  di un link. In questa sezione voglio provare che, in alcuni casi, tali stime possono essere migliorate.

Nel prossimo capitolo vedrò anche che tali stime sono importanti poiché possono dare un bound inferiore al genere slice di un link (sezione 1.6).

Sia  $(D, \mathbf{o})$  il diagramma orientato di un link e siano  $U(D, \mathbf{o})$  e  $V(D, \mathbf{o})$  definite in questo modo:

$$U(D, \mathbf{o}) = k(D, \mathbf{o}) + w(D, \mathbf{o}) - 2S^-(D, \mathbf{o}) + 1$$

$$V(D, \mathbf{o}) = -k(D, \mathbf{o}) + w(D, \mathbf{o}) + 2S^+(D, \mathbf{o}) - 1$$

dove

- $k(D, \mathbf{o})$  è il numero di cerchi nella risoluzione di  $D$  coerente con  $\mathbf{o}$ .
- $S^\pm(D, \mathbf{o})$  è il numero di componenti connesse del grafo ottenuto associando un vertice ad ogni cerchio della risoluzione di  $D$  coerente ad  $\mathbf{o}$  e connettendo due vertici con un lato se e solo se i vertici sono associati a cerchi connessi da almeno un incrocio positivo (o negativo).

Ecco un esempio nella figura a pagina seguente.

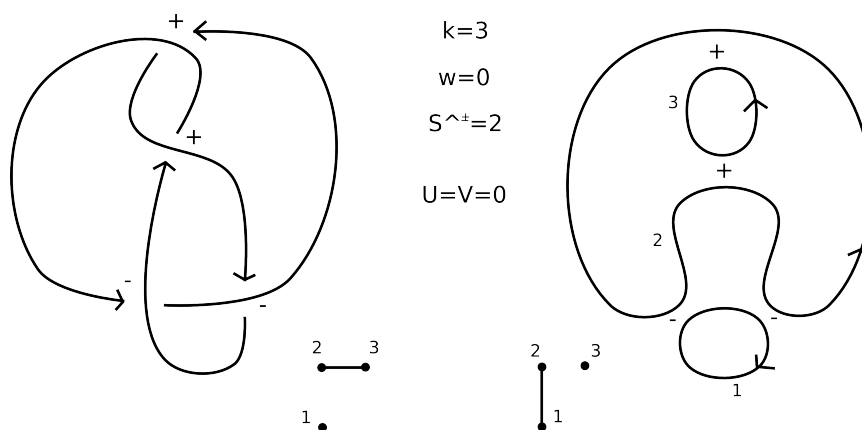


Figura 5.3

Si può verificare facilmente che  $U$  e  $V$  non sono invarianti di link, ma per [20] vale il seguente fatto:

**Teorema 5.4.1.** *Per ogni diagramma orientato si ha*

$$U(D, \mathbf{o}) \geq s(D, \mathbf{o})$$

È evidente che

$$V(D, \mathbf{o}) = -U(D^*, \mathbf{o})$$

quindi

$$U(D^*, \mathbf{o}) \geq s(D^*, \mathbf{o})$$

↓

$$-V(D, \mathbf{o}) \geq 2 - 2n - s(D, \mathbf{o})$$

↓

$$s(D, \mathbf{o}) \geq 2 - 2n + V(D, \mathbf{o})$$

Che prova la seconda stima in [20] in cui  $n$  è il numero di componenti del link.

Ma se il link è pseudo-sottile quest'ultima stima può essere migliorata:

**Teorema 5.4.2.** *Se  $(D, \mathbf{o})$  è il diagramma di un link pseudo-sottile, allora*

$$s(D, \mathbf{o}) \geq 2 - 2r + V(D, \mathbf{o})$$

dove  $r$  è il numero di componenti split del link rappresentato da  $(D, \mathbf{o})$ .

*Dimostrazione.*

$$U(D^*, \mathbf{o}) = -V(D, \mathbf{o}) \geq s(D^*, \mathbf{o}) = 2 - 2r - s(D, \mathbf{o})$$

da cui:

$$s(D, \mathbf{o}) \geq 2 - 2r + V(D, \mathbf{o})$$

□

Quindi ho dimostrato che:

**Corollario 5.4.3.** *Se  $(D, \mathbf{o})$  è il diagramma di un nodo o di un link H-sottile, allora vale*

$$U(D, \mathbf{o}) \geq s(D, \mathbf{o}) \geq V(D, \mathbf{o})$$

Lobb ha dimostrato questa stima per i nodi, ma tale corollario mi dice che il suo risultato può essere generalizzato.

Il seguente teorema, invece, dice che per i link alternanti non split le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze. La dimostrazione è identica a quella in [20] anche se nell'articolo egli si riferisce soltanto alla classe dei nodi.

**Teorema 5.4.4.** *Se  $(D, \mathbf{o})$  è un diagramma alternante non split allora vale  $U(D, \mathbf{o}) - V(D, \mathbf{o}) = 0$  e quindi*

$$U(D, \mathbf{o}) = s(D, \mathbf{o}) = V(D, \mathbf{o})$$

*cioè*

$$s(D, \mathbf{o}) = -\sigma(D, \mathbf{o}) = -k(D, \mathbf{o}) + w(D, \mathbf{o}) + 2S^+(D, \mathbf{o}) - 1$$

*Dimostrazione.* Basta provare che se  $(D, \mathbf{o})$  è come nelle ipotesi allora risulta

$$k(D, \mathbf{o}) + 1 = S^+(D, \mathbf{o}) + S^-(D, \mathbf{o})$$

Posso colorare un diagramma alternante non split come descritto nella sottosezione 3.2.2, cioè in modo che tutti gli incroci del diagramma siano del tipo A come nella figura 3.1: quindi, quando passo alla risoluzione coerente di  $(D, \mathbf{o})$  ho che le tracce degli incroci positivi si trovano in regioni bianche mentre quelle degli incroci negativi in regioni nere (figura 3.2).

Questo mi dice che ogni regione bianca corrisponde esattamente ad una componente connessa del grafo  $T^+(D, \mathbf{o})$  e ogni regione nera ad una di  $T^-(D, \mathbf{o})$ ; quindi il membro destro dell'uguaglianza da provare è uguale al numero totale di regioni colorate. Ma tale quantità coincide col numero di cerchi della risoluzione coerente più uno, da cui la tesi.  $\square$

Per induzione sul numero di componenti split di  $(D, \mathbf{o})$ , inoltre, ottengo facilmente il seguente corollario:

**Corollario 5.4.5.** *Se  $(D, \mathbf{o})$  è alternante ed  $r$  è il suo numero di componenti split allora*

$$s(D, \mathbf{o}) = -k(D, \mathbf{o}) + w(D, \mathbf{o}) + 2S^+(D, \mathbf{o}) - 2r + 1$$

Tirando le somme, l'importanza del teorema 5.4.2 sta nel fatto che, in alcuni casi, essa mi dà un limite inferiore al valore di  $s(D, \mathbf{o})$  che è in generale molto difficile da calcolare, per esempio per link H-sottili:

$$s(D, \mathbf{o}) \geq -k(D, \mathbf{o}) + w(D, \mathbf{o}) + 2S^+(D, \mathbf{o}) - 1$$

che risulta essere molto migliore della stima di Lobb in [20], soprattutto se il link ha numero molto alto di componenti connesse.

Dato che ciò a cui sono davvero interessato è stimare il modulo del valore di  $s$ , vorrei stimarlo dal basso con una quantità positiva; sarebbe interessante descrivere un caso in cui la stima originale, quella di Lobb, non dà informazioni, cioè  $2 - 2n + V(D, \mathbf{o})$  è negativa, mentre quella esplicitata poche righe più su è positiva...

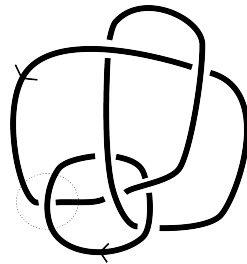


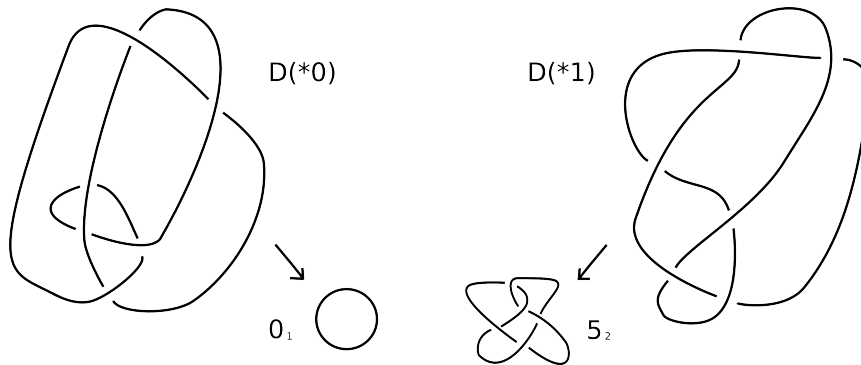
Figura 5.4: Link  $L7_2^n$  nella tavola di Morwen Thistlethwaite

Il link del diagramma rappresentato nella figura precedente è proprio quello che cercavo, ecco tutti i passaggi:

per prima cosa devo verificare che esso sia pseudo-sottile. Mi basta provare che è quasi-alternante per la 5.3.4.

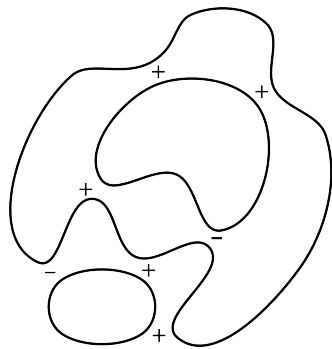
Risolvendo l'incrocio evidenziato in figura ho che  $D(*0)$  e  $D(*1)$  sono come segue:

Figura 5.5:  $D(*0)$  è l'unlink mentre  $D(*1)$  il nodo  $5_2$



Essi sono, rispettivamente, diagrammi dell'unlink e del nodo  $5_2$  che sono alternanti e hanno determinante pari a 1 e 7, ma  $\det L7_2^n = 8$  e ho finito.

Ora calcolo la risoluzione coerente del diagramma e calcolo  $U$  e  $V$



$$\begin{aligned} k &= 3 \\ w &= 3 \\ S^+ &= S^- = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= 3+3-2+1=5 \\ V &= -3+3+2-1=1 \end{aligned}$$

Quindi ho che vale

$$5 \geq s(L7_2^n) \geq 1$$

mentre, con la vecchia stima, al membro destro della disuguaglianza andava sottratto  $2 - 2n = -2$  poiché il link ha due componenti; da cui avrei potuto concludere solo che  $s(L7_2^n) \geq -1$ .

Un altro esempio è dato dal link  $L8_1^n$ :

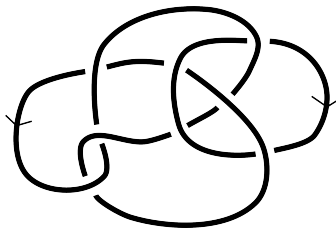
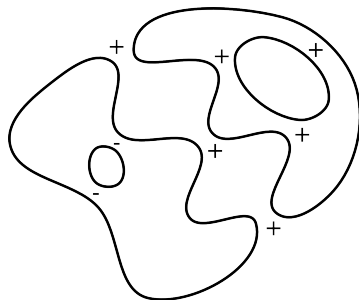


Figura 5.6: Link  $L8_1^n$

Tale link è pseudo-sottile per la 5.3.4 considerando che il linking number tra le sue componenti è diverso da zero; per cui, con gli stessi calcoli di prima, ottengo:



$$\begin{aligned} k &= 4 \\ w &= 4 \\ S^+ &= 2 \\ S^- &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= 4+4-6+1=3 \\ V &= -4+4+4-1=3 \end{aligned}$$

In questo caso riesco a calcolare esattamente  $s(L8_1^n)$  che risulta uguale a 3; inoltre, come si vedrà nel capitolo seguente, questo mi dice che  $g_*(L8_1^n) \geq 1$ , mentre la stima di Andrew Lobb non dava nessuna informazione sul genere slice di tale link.

## 5.5 Link torici

Concludo questo capitolo applicando i risultati visti in questo capitolo ai link torici.

**Definizione 39.** Sia  $(p, q)$  una coppia di interi tali che  $2 \leq p \leq q$ . Allora si chiama  $T_{p,q}$ , il link torico positivo  $(p, q)$ , il link rappresentato dal seguente diagramma:

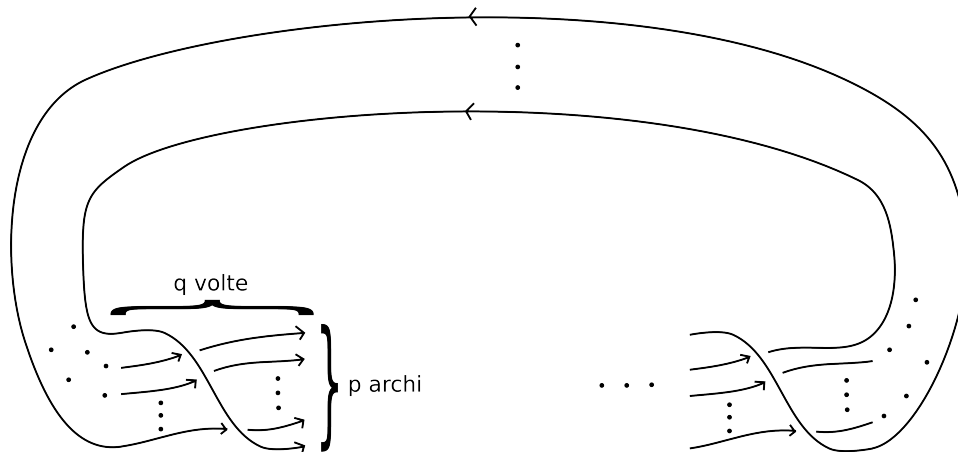


Figura 5.7

Alcuni link torici sono già noti: il nodo trifoglio è il link  $T_{2,3}$  mentre il link di Hopf il  $T_{2,2}$ .

I link torici, di solito, sono definiti per qualunque coppia di interi  $(p, q)$  (anche negativi), ma in questo caso, per semplicità, ho dato delle restrizioni che in realtà sono più teoriche che pratiche, visto che, a meno di invertibilità e chiralità, l'unico link torico che non sto considerando è l'unlink.

Le seguenti proprietà dei link torici sono note:

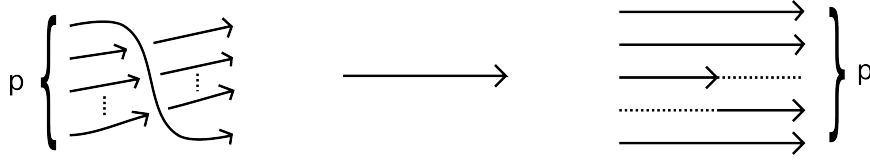
**Proposizione 5.5.1.** In tutti i casi si intende sempre  $2 \leq p \leq q$ .

1.  $T_{p,q} = -T_{p,q}$  per ogni  $(p, q)$
2.  $T_{p,q} \neq T_{p,q}^*$  per ogni  $(p, q)$
3.  $\text{mcd}(p, q)$  è pari al numero di componenti di  $T_{p,q}$
4. Il crossing number di  $T_{p,q}$  vale  $q(p - 1)$
5.  $T_{p,q}$  è non split per ogni  $(p, q)$

Dato che il diagramma  $D_{p,q}$  di  $T_{p,q}$  nella figura 5.7 è positivo posso calcolare l'invariante di Rasmussen generalizzato per tutti i link torici; infatti dal 5.3.5 so che

$$s(T_{p,q}) = -o(D_{p,q}) + c(D_{p,q}) + 1$$

Quando applico la risoluzione coerente su  $D_{p,q}$  ottengo una situazione di questo tipo:



Quindi  $o(D_{p,q}) = p$  e  $c(D_{p,q}) = q(p-1)$  da cui

$$s(T_{p,q}) = -p + q(p-1) + 1 = (p-1)(q-1)$$

Inoltre, essendo link positivi, i link torici sono tutti pseudo-sottili, anche se in generale non sono H-sottili; questo mi dice che

$$s(T_{p,q}^*) = 2 - 2r - s(T_{p,q}) = -s(T_{p,q}) = -(p-1)(q-1)$$

Infine considero il caso di un link torico con due componenti, ossia  $T_{2n,2m}$  con  $1 \leq n \leq m$  coprimi. Voglio cercare di stimare meglio possibile  $d_{T_{2n,2m}}$ .

Il primo passo è calcolare  $\text{lk}(\mathbf{o}', \mathbf{o})$  dove  $\mathbf{o}$  è l'orientazione relativa di  $D_{2n,2m}$  mentre  $\mathbf{o}'$  è l'altra (sto considerando link con due componenti): per fare ciò mi basta vedere quanti incroci negativi ha il diagramma ottenuto cambiando orientazione. Le figure seguenti per comodità rappresentano il link  $T_{4,6}$ , ma si generalizzano facilmente al caso che sto considerando.

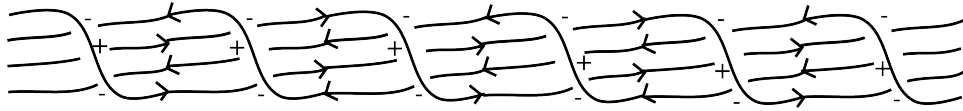


Figura 5.8: Per chiarezza ho ommesso gli archi che connettono le estremità del diagramma

Si vede immediatamente che

$$n_-(D_{p,q}, \mathbf{o}') = 2nm$$

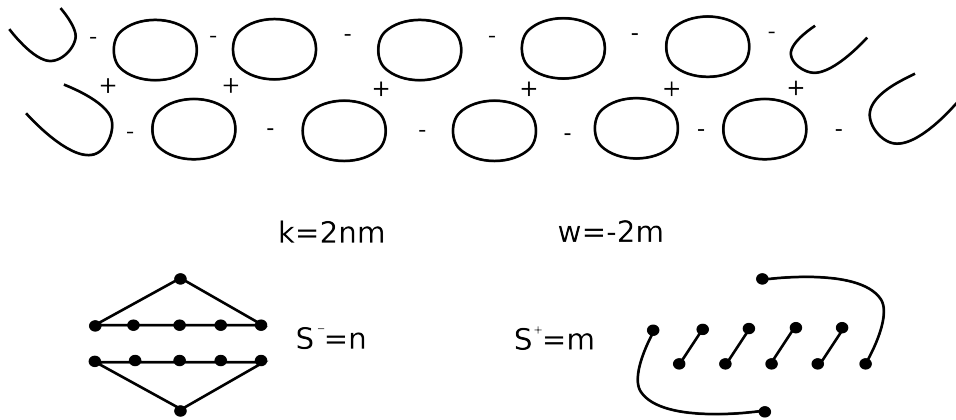
da cui segue che l'omologia di Lee di  $T_{2n,2m}$  ha dimensione 2 in grado omologico 0 e dimensione 2 in grado omologico  $2nm$ , per cui i link di questa famiglia hanno due proprietà interessanti: sono pseudo-sottili in entrambe le orientazioni relative e il loro invariante  $d_{T_{2n,2m}}$  è completamente determinato una volta conosciuti i valori di  $s(T_{2n,2m}, \mathbf{o})$  e  $s(T_{2n,2m}, \mathbf{o}')$ .

So già che

$$s(T_{2n,2m}, \mathbf{o}) = (2n-1)(2m-1)$$

mentre  $s(T_{2n,2m}, \mathbf{o}')$  non può essere calcolato esplicitamente, poiché il diagramma non è più positivo, ma dato che il link è pseudo-sottile posso usare le stime 5.4.2 e 5.4.1:





Quindi ho ottenuto che

$$2nm - 2m - 2n + 1 \geq s(T_{2n,2m}, \mathbf{o}') \geq -2nm + 2m - 1$$

dove ho usato la stima per link non split. In conclusione, ricordando la 5.2.4, posso dire che  $d_{T_{2n,2m}}$  è come raffigurato nella figura seguente:

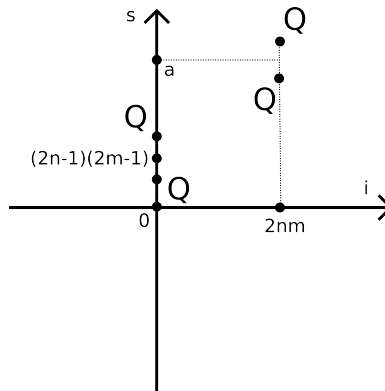


Figura 5.9

con  $a$  tale che

$$8nm - 2n - 2m + 1 \geq a \geq 4nm + 2m - 1$$

C'è un solo caso in cui quest'ultima stima è un'uguaglianza ed è quello in cui  $n = 1$ , ossia i link  $T_{2,2m}$ , che sono alternanti, dove ottengo  $a = 6m - 1$ . Si osserva che, infatti, per  $m = 1$  ho il link di Hopf ed infatti, in questo caso, la figura diventa identica al secondo caso della figura 5.2 e con questa osservazione ho terminato la sezione.

## 5.6 Alcuni link pretzel

Come nella sezione precedente, vedo in che modo, usando  $U$  e  $V$ , riesco a stimare l'invariante  $s$  per un'altra classe di link: i link pretzel.

I link pretzel sono una classe molto vasta, io mi limiterò soltanto ad alcuni casi, gli unici per cui do la definizione.

**Definizione 40.** Sia  $(h, k, l)$  una terna di interi tale che  $l \geq 0$ ; allora si definisce link pretzel associato a  $(h, k, l)$  e lo indico con  $P_{2h, 2k, 2l+1}$  il link a due componenti rappresentato dal seguente diagramma (dove ho indicato il numero di incroci presenti in ogni colonna):

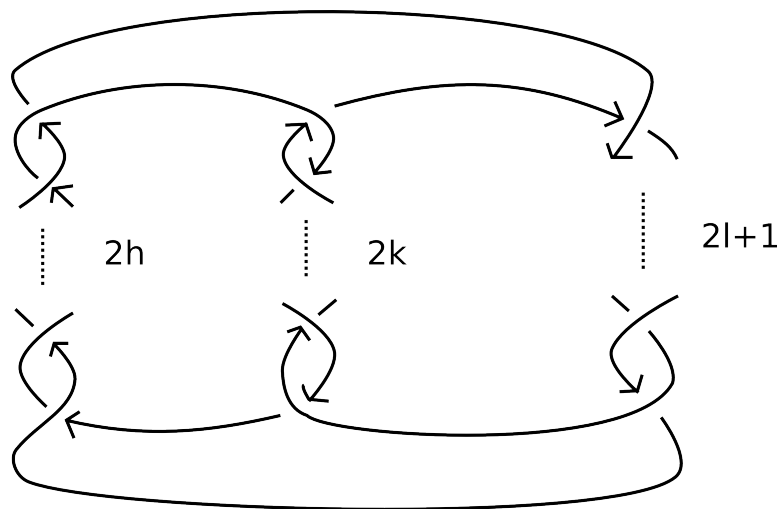


Figura 5.10

dove si intende che se  $h$  e  $k$  sono negativi allora dovranno essere negativi anche gli incroci corrispondenti. Posso supporre che  $l$  sia positivo o nullo poiché vale  $P_{-2h, -2k, -2l-1} = P_{2h, 2k, 2l+1}^*$  per ogni  $(h, k, l)$ .

Il diagramma in figura possiede  $2|h| + 2|k| + 2l + 1$  incroci, ma non è detto che, in tutti i casi, esso sia il crossing number del link.

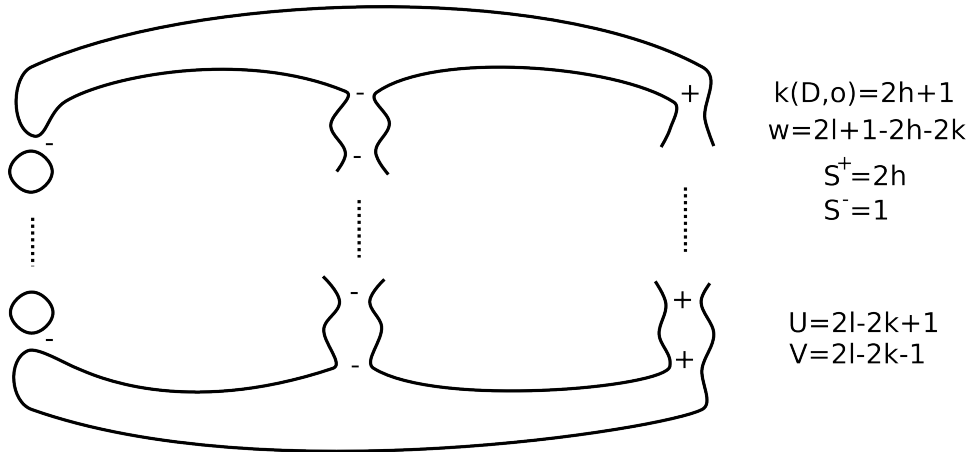
I casi in cui  $h$  o  $k$  sono uguali a zero sono banali oppure si riconducono a link torici che ho già studiato quindi non li considero; inoltre rimando al prossimo capitolo anche il caso  $h > 0$  e  $k < 0$  che mi dà link alternanti e quindi per ora poco interessanti. Mi restano quindi tre casi:

- $h > 0$  e  $k > 0$

Il link è positivo quindi grazie al 5.3.5 so che

$$s(P_{2h, 2k, 2l+1}) = 2l + 2h + 1$$

Se però cambio orientazione relativa, ossia cambio orientazione alla componente che contiene gli incroci  $h$  e  $k$ , allora non posso più calcolare  $s$  esattamente quindi uso le stime, considerando il fatto che, ogni volta che  $h + k \neq 0$ , come in questo caso, il link è sempre non split (basta calcolare il determinante).



Quindi  $s$  può valere  $2l - 2k \pm 1$ . Congetturando che  $s = 2l - 2k + 1$ , ma dimostrarlo richiederebbe di trovare un elemento non banale in omologia di grado quantico massimo, ma a parte il caso  $l = 0$  non sono riuscito a provare tale fatto.

- $h < 0$  e  $k < 0$

Tale caso risulta formalmente identico al precedente per cui mi limito a scrivere semplicemente i risultati:

$$s(P_{2h, 2k, 2l+1}) = 2l + 2h \pm 1$$

mentre con l'altra orientazione relativa il link è positivo e risulta

$$s(P_{2h, 2k, 2l+1}) = 2l - 2k + 1$$

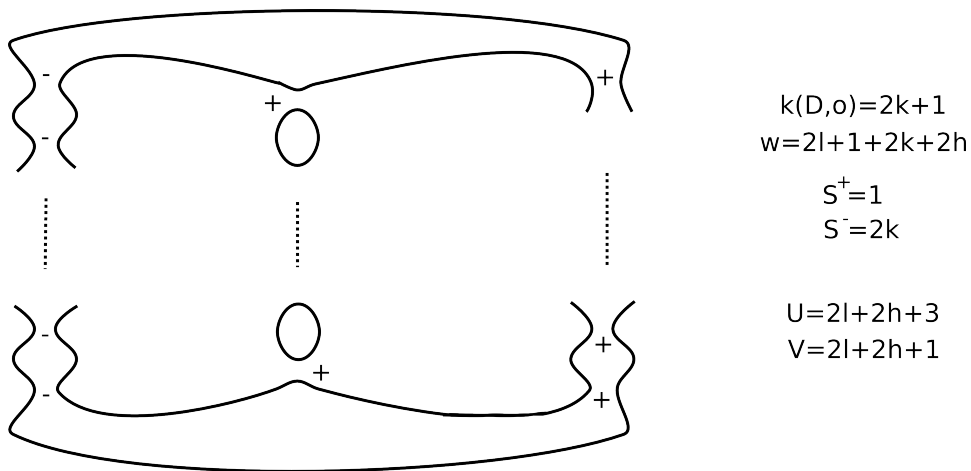
- $h < 0$  e  $k > 0$

Per usare le stime devo supporre che  $h + k = \text{lk}(\sigma', \sigma) \neq 0$  altrimenti non posso dimostrare che il link è pseudo-sottile e allora ho che:

$$s(P_{2h, 2k, 2l+1}) = 2l + 2h + 2 \pm 1$$

come si vede dalla figura a pagina seguente; mentre per l'altra orientazione relativa si ragiona allo stesso modo e si ha

$$s(P_{2h, 2k, 2l+1}) = 2l - 2k + 2 \pm 1$$



Anche i link pretzel che ho descritto in generale non è detto che siano H-sottili.

Si osserva che, nei casi in cui il link è pseudo-sottile, posso usare la 5.3.3 per stimare l'invariante di Rasmussen di  $P_{2h,2k,2l+1}^*$  mentre, quando non è detto che lo sia, ossia se  $h+k=0$ ,  $s$  è compreso tra  $2l+2h+3$  e  $2l+2h-1$  per le stime di Lobb, che sono sempre applicabili.

Nel prossimo capitolo farò vedere come, aggiungendo delle ipotesi su  $h, k$  ed  $l$ , si riesca a calcolare precisamente sia il valore di  $s$  che il genere slice di  $P_{2h,2k,2l+1}$ .

## Capitolo 6

### $s(L)$ , $d_L$ e la concordanza

#### 6.1 Cobordismi, mosse di Morse e funtorialità

Sono arrivato, dopo molta fatica, all'ultimo capitolo della tesi; qui finalmente parlerò di concordanza, cosa già promessa diverse volte, ma sempre evitata nei precedenti capitoli. Lo scopo principale sarà mostrare che gli invarianti che ho introdotto nel capitolo precedente sono, oltre che per equivalenza, invarianti per concordanza forte (cos'è la concordanza forte è stato già detto nella sezione 1.6); inoltre verrà introdotto un nuovo invariante, il genere slice forte, simile a  $g_*(L)$  di cui ho già parlato e esibirò alcuni casi di link in cui riesco a calcolare tale invariante grazie a  $s(L)$  e  $d_L$ .

Posso saltare ulteriori preamboli e cominciare subito.

Sia  $\Sigma$  un cobordismo debole tra  $L$  ed  $L'$  link; allora so dalla teoria di Morse (il lettore interessato in dettaglio alla teoria di Morse può consultare il già citato libro di Milnor [22]) che  $\Sigma$  si può decomporre in un numero finito di cobordismi elementari:

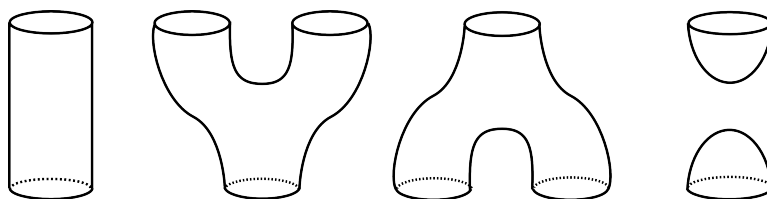


Figura 6.1

Questo fatto mi permette di generalizzare il teorema di Reidemeister:

**Teorema 6.1.1.** *Siano  $D$  e  $D'$  diagrammi per  $L$  ed  $L'$ ; allora esiste  $\Sigma$  cobordismo debole tra  $L$  ed  $L'$  se e solo se  $D'$  si ottiene da  $D$  applicando un numero finito di mosse di Reidemeister e di mosse di Morse, rappresentate nella figura a pagina seguente.*

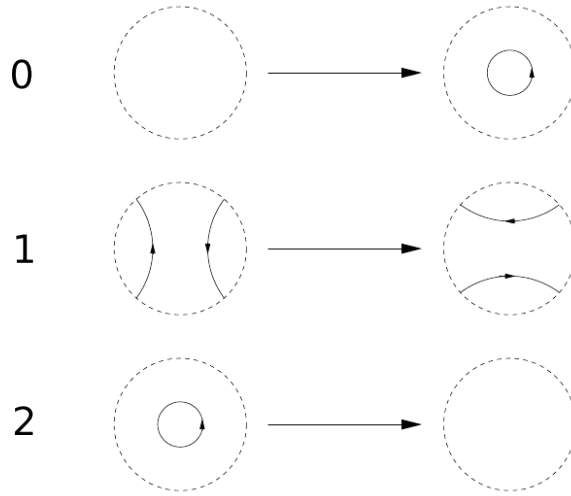


Figura 6.2: Comportamento locale delle mosse di Morse

In particolare esiste un cobordismo tra  $L$  e  $L'$  senza punti critici se e solo se  $L = L'$ .

La decomposizione in cobordismi elementari mi permette di provare un altro importante teorema, contenuto nell'articolo di Rasmussen [25].

**Teorema 6.1.2.** *Sia  $\Sigma$  un cobordismo debole tra  $L$  ed  $L'$ ; allora esiste*

$$F_{\Sigma} : (C(D), \Phi + d, \mathcal{F}) \longrightarrow (C(D'), \Phi + d, \mathcal{F})$$

*morfismo di complessi filtrato di grado  $\chi(\Sigma)$  che induce*

$$F_{\Sigma}^* : H_{Lee}(L) \rightarrow H_{Lee}(L')$$

*anch'essa filtrata di grado  $\chi(\Sigma)$ , con  $D$  e  $D'$  diagrammi per  $L$  ed  $L'$ .*

*Dimostrazione.* Suppongo che  $\Sigma$  sia un cobordismo elementare corrispondente ad una mossa di Reidemeister di tipo  $i$  (quindi un cilindro); definisco  $F_{\Sigma}^*$  come la  $\rho_*^i$  del teorema 5.1.1 che è filtrata di grado  $0 = \chi(\Sigma)$ . Invece se  $\Sigma$  corrisponde ad una mossa di Morse allora la mappa che cerco è indotta da  $F_{\Sigma}$  che si ottiene applicando la TQFT usata per definire l'omologia di Lee, cioè quella associata all'algebra di Fröbenius  $\mathcal{A}_{(0, \frac{1}{4})}$ , alle mappe tra vertici dei cubi delle risoluzioni dei due link. Cioè, ad una mossa 0 o una mossa 2, applico rispettivamente  $\iota$  ed  $\epsilon$  ad ogni vertice, mentre per una mossa 1 applico  $m$  o  $\Delta$  a seconda che due cerchi si uniscono o si separano. È facile vedere che tale mappa è filtrata di grado 1 nel primo caso e di grado  $-1$  nel secondo, quindi pari a  $\chi(\Sigma)$ .

In generale un cobordismo  $\Sigma$  sarà unione disgiunta e composizione di cobordismi elementari quindi  $F_{\Sigma}^*$  è prodotto tensoriale e composizione delle mappe definite precedentemente e risulta essere filtrata di grado  $\chi(\Sigma)$

poiché, in entrambi i casi, i gradi filtranti e le caratteristiche di Eulero si sommano.  $\square$

Vorrei che tale associazione tra cobordismi e mappe fosse funtoriale nel senso che, se  $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$  è la composizione di due cobordismi, allora vale

$$F_{\Sigma_1 \circ \Sigma_2} = F_{\Sigma_1} \circ F_{\Sigma_2}$$

ma tale uguaglianza purtroppo è vera solo a meno del segno.

Questo comportamento è simile a quanto avviene in omologia di Khovanov, ma in questo caso il problema è stato risolto in un difficile articolo di Clark, Morrison e Walker [9]. Anche se tale risultato sembra potersi applicare anche per l'omologia di Lee non me ne interessero poiché non è utile ai miei scopi.

Rasmussen, in [25], ha inoltre dimostrato la seguente proposizione:

**Proposizione 6.1.3.** *Se  $K_1$  e  $K_2$  sono nodi allora la mappa indotta da un cobordismo  $\Sigma$  tra  $K_1$  e  $K_2$*

$$F_{\Sigma}^* : H_{Lee}(K_1) \rightarrow H_{Lee}(K_2)$$

*è un isomorfismo filtrato di grado  $\chi(\Sigma)$ .*

Da cui segue il seguente corollario:

**Corollario 6.1.4.** *Se  $\Sigma$  è un cobordismo forte tra  $L$  ed  $L'$  allora*

$$F_{\Sigma}^* : H_{Lee}(L) \rightarrow H_{Lee}(L')$$

*è un isomorfismo filtrato di grado  $\chi(\Sigma)$ .*

È evidente che se  $L$  ed  $L'$  sono concordanti (in modo forte) allora  $\chi(\Sigma) = 0$  quindi  $F_{\Sigma}^*$  rispetta la filtrazione da cui

$$\mathcal{F}^s H_{Lee}^i(L) \cong \mathcal{F}^s H_{Lee}^i(L') \quad \forall i, s \in \mathbb{Z}$$

cioè la filtrazione che ho definito sull'omologia di Lee è un invariante per concordanza forte.

Dato che sia  $s(L)$  che  $d_L$  sono riduzioni di tale filtrazione ho provato che essi sono entrambi invarianti per concordanza forte.

Si osservi che tale corollario era stato già usato nella dimostrazione della 5.3.1 e proprio da tale proposizione il lettore attento avrebbe già dovuto dedurre l'invarianza per concordanza di  $s$ :

infatti da  $\chi(\Sigma) = 0$  segue subito  $|s(L) - s(L')| \leq 0$  cioè  $s(L) = s(L')$ .

Posso provare una formula analoga per  $d_L$ :

**Proposizione 6.1.5.** *Sia  $\Sigma$  un cobordismo forte tra  $L_1$  ed  $L_2$ ; allora vale*

$$\sum_{s \geq a} d_{L_1}(i, s) \leq \sum_{s \geq a + \chi(\Sigma)} d_{L_2}(i, s) \quad \forall i, a \in \mathbb{Z}$$

*Dimostrazione.* Segue dal corollario 6.1.4, in maniera simile a quanto fatto nella 5.3.1.  $\square$

Da quanto visto nel capitolo precedente so che esistono casi in cui l'invariante  $d$  dà più informazioni di  $s$ :

infatti se  $L$  è un link H-sottile con due componenti tale che  $s(L) = -1$  allora l'invariante di Rasmussen non distingue  $L$  dall'unlink, mentre  $d_L$  sì.

Tuttavia  $d$  non è necessariamente un invariante "migliore" di  $s$  infatti se  $L$  stavolta è un link a due componenti tale che

$$s(L, \mathbf{o}) = -1 \quad \text{e} \quad s(L, \mathbf{o}') = 1$$

allora, per il corollario 5.2.7, se il linking number tra le componenti è nullo si ha  $d_L = d_{\bigcirc \sqcup \bigcirc}$ , ma  $L$  non può essere l'unlink per quanto mi accingo a dire ora:

**Definizione 41.** Un link  $L$  si dice fortemente slice se è concordante in modo forte all'unlink con  $n$  componenti  $\mathbf{o}$ , equivalentemente, se tutte le componenti bordano dischi propriamente embedded disgiunti in  $D^4$ .

In particolare un link fortemente slice ha come componenti tutti nodi slice. L'unlink è evidentemente fortemente slice infatti le sue componenti bordano dischi disgiunti già in  $S^3$ . Tuttavia gli unlink sono link split, trovare link non split, con più di una componente, che siano fortemente slice è molto più difficile.

I link fortemente slice possiedono le seguenti proprietà:

**Proposizione 6.1.6.** *Se  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  è un link fortemente slice con  $n$  componenti allora  $lk(L_i, L_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$ .*

*Dimostrazione.* Segue dal fatto che  $lk(L, L')$  è la molteplicità di intersezione di  $S_L$  ed  $S_{L'}$  che sono superfici orientabili propriamente embedded in  $D^4$  in modo trasverso con  $L$  ed  $L'$  come bordo. La dimostrazione è in [8].  $\square$

**Proposizione 6.1.7.** *Se  $(L, \mathbf{o})$  è un link fortemente slice allora anche  $(L^*, \mathbf{o})$  e  $(L, \mathbf{o}')$  per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathcal{O}(L)$  lo sono.*

*Dimostrazione.* Per  $(L^*, \mathbf{o})$  è ovvio: basta applicare una riflessione a  $D^4$ . Per i cambi di orientazione considero che posso applicare mosse di Morse soltanto tra archi che appartengono alla stessa componente di  $L$ : se non fosse così, detto  $\Sigma$  il cobordismo forte tra  $(L, \mathbf{o})$  e l'unlink, avrei che  $\Sigma$  sarebbe formato da una sella che andrebbe ad unire due componenti di  $L$ , che è assurdo; quindi cambiare l'orientazione di una qualunque componente non mi crea problemi: mi basta invertire l'orientazione della componente di  $\Sigma$  corrispondente.  $\square$



Da quest'ultima proposizione segue

**Corollario 6.1.8.** *Se  $(L, \mathbf{o})$  è un link fortemente slice allora*

$$s(L, \mathbf{o}) = s(L^*, \mathbf{o}) = s(L, \mathbf{o}') = s(\bigcirc \sqcup \bigcirc) = -1$$

per ogni  $\mathbf{o}' \in \mathbb{O}(L)$ . Ovviamente vale anche

$$d_{(L, \mathbf{o})} = d_{(L^*, \mathbf{o})} = d_{(L, \mathbf{o}')} = d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc} = \begin{cases} \binom{n}{k} & \text{se } i = 0, s = n - 2k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ritornando all'esempio precedente, il mio  $L$  non può essere l'unlink poiché non è fortemente slice:  $s(L, \mathbf{o}') = 1$  contraddicendo il corollario. Purtroppo, però, non conosco un esempio di un link con queste proprietà.

## 6.2 Unione simmetrica di link

L'unione simmetrica è un particolare tipo di costruzione di diagrammi di link introdotta da Kinoshita e Terasaka nel 1957 ([16]) per descrivere dei nodi slice. Io la utilizzerò per trovare un link non split fortemente slice.

Sia  $\mathbb{R}^2$  il piano con coordinate cartesiane  $(x, y)$  e sia

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow (-x, y) \end{aligned}$$

la riflessione rispetto all'asse  $y$ .

Un diagramma  $D \subset \mathbb{R}^2$  di un link si dice simmetrico se vale  $\rho(D) = D$  tranne al più per gli incroci sull'asse  $y$  che sono necessariamente di segno opposto; dove intendo che due diagrammi  $D$  e  $D'$  sono uguali se esiste  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  diffeomorfismo che conserva l'orientazione tale che  $h(D) = D'$  e  $h \circ \rho = \rho \circ h$ .

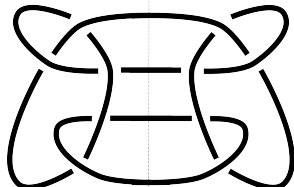
**Definizione 42.** Un diagramma  $D$  è un'unione simmetrica se è simmetrico e se per ogni componente  $C$  di  $D$  vale  $\rho(C) = C$  (sempre a meno degli incroci sull'asse  $y$ ), ma con l'orientazione invertita.

Un link è un'unione simmetrica se possiede un diagramma che è un'unione simmetrica.

L'importanza di tale classe di link sta nel seguente teorema:

**Teorema 6.2.1.** *Se un link  $L$  è un'unione simmetrica allora  $L$  è fortemente slice.*

Figura 6.3: Link  $L10_{36}^n$ : le orientazioni sono state omesse



Per il teorema precedente tale link è fortemente slice ed inoltre è non split, essendo classificato nella tavola dei link di Thistlethwaite, quindi vale

$$s(L10_{36}^n) = s(L10_{36}^{n*}) = -1$$

Ho trovato un caso in cui non vale la formula della proposizione 5.3.3 sulla riflessione di  $s$ ; infatti tale link non è pseudo-sottile visto che  $d_{L10_{36}^n} = d_{\bigcirc \sqcup \bigcirc}$  e perciò  $d_{L10_{36}^n}$  non ha supporto su due punti in ascissa zero. L'ipotesi che un link dovesse essere pseudo-sottile è quindi necessaria per dimostrare la proposizione.

### 6.3 Genere slice

Voglio ora utilizzare la 5.3.1 per mostrare che l'invariante  $s$  dà, in un certo senso, un limite inferiore al genere slice di un link. Infatti dato  $\Sigma$  un cobordismo debole tra un link  $L$  con  $n$  componenti e l'unknot vale

$$|s(L)| \leq -\chi(\Sigma) = 2g(\Sigma) + n - 1$$

Da cui si ricava

$$\frac{|s(L)| + 1 - n}{2} \leq g_*(L) \quad (6.1)$$

tale disuguaglianza rappresenta un'ulteriore generalizzazione del lavoro di Rasmussen sui nodi in [25].

Un limite superiore per  $g_*(L)$  era invece già noto, basta ricordare la seguente proposizione:

**Proposizione 6.3.1.** *Dato un link  $L$ , allora l'algoritmo di Seifert associato ad un diagramma  $(D, \mathbf{o})$  di  $L$ , che è descritto in [19], mi dà una superficie di Seifert  $S$  per  $L$  tale che  $\chi(S) = k(D, \mathbf{o}) - c(D)$ .*

*Dimostrazione.* Basta osservare la costruzione in [19]. □

Quindi

$$g_*(L) \leq g(L) \leq g(S) = \frac{2 - n - \chi(S)}{2} = \frac{2 - n - k(D, \mathbf{o}) + c(D)}{2} \quad (6.2)$$

Lo scopo di questa sezione sarà mostrare alcune applicazioni delle formule (6.1) e (6.2).

Per prima cosa ricordo che nel capitolo precedente ho calcolato, grazie alle stime 5.4.1 e 5.4.2, il valore dell'invariante di Rasmussen del link  $L8_1^n$ . Voglio generalizzare questo risultato ad una famiglia infinita di link, che contiene il link in questione, ed inoltre vedere cosa si riesce a scoprire sul genere slice.

Siano  $Tw_n$  con  $n \geq 0$  i link rappresentati dal seguente diagramma:

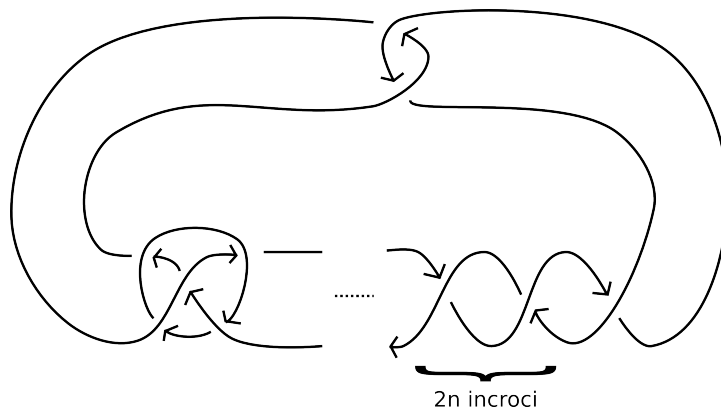
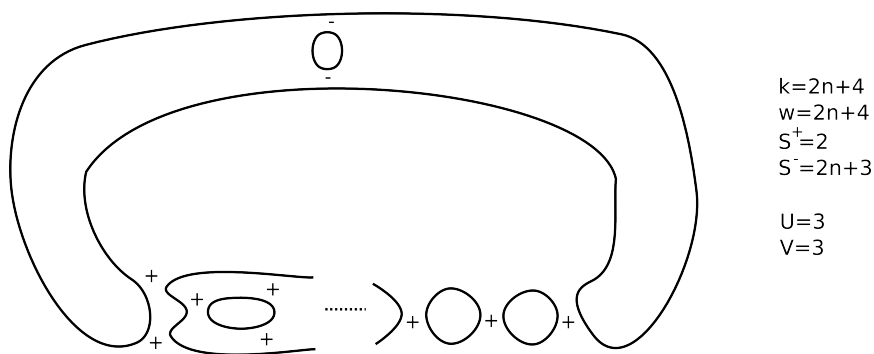


Figura 6.4

Se  $n = 0$  ottengo proprio  $L8_1^n$  e dato che  $lk(\mathbf{o}', \mathbf{o}) = 2$  la proposizione 5.3.4 mi dice che tali link sono tutti pseudo-sottili.

Applico le stime al diagramma di  $Tw_n$  (che siano non split è un semplice esercizio):



Ho quindi ottenuto che

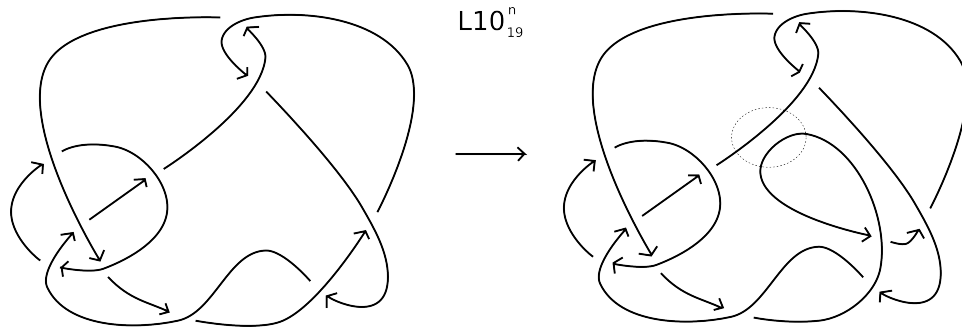
$$s(Tw_n) = 3 \quad \text{per ogni } n \geq 0$$

e, applicando la (6.1) e tenendo conto che i link hanno due componenti, che

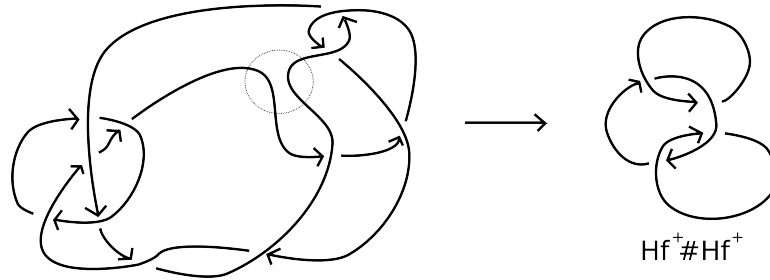
$$g_*(Tw_n) \geq 1$$

Ho quindi provato che nessun link di questa famiglia è slice (intendo debolmente slice: la superficie bordata dal link può essere connessa). Tuttavia nel caso  $n = 1$  una delle componenti del link risulta essere un nodo  $6_1$  che è noto essere slice, sfruttando questo riesco a dimostrare che in realtà vale  $g_*(Tw_1) = 1$ .

Mi basta costruire esplicitamente una superficie di genere 1 propriamente embedded in  $D^4$  che abbia come bordo il link  $Tw_1$  ( $L10_{19}^n$  nella tavola dei link):



Adesso applico una mossa di Morse di tipo 1 nel tangle evidenziato nella figura precedente.

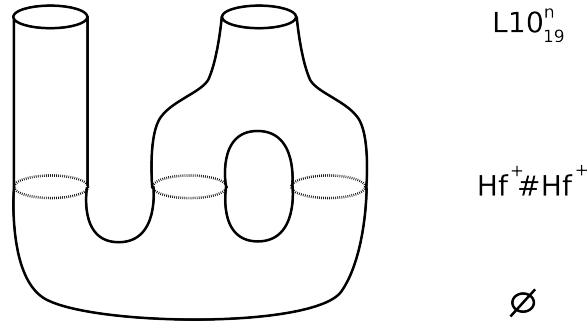


Ho descritto un cobordismo tra  $L10_{19}^n$  e la somma connessa di due link di Hopf positivi. Dato che

$$g_*(Hf^+ \# Hf^+) = g(Hf^+ \# Hf^+) = g(Hf^+) + g(Hf^+) = 0$$

poiché è semplice vedere che il link di Hopf ha genere 0, infatti borda un anello in  $S^3$ , allora la somma connessa che ho ottenuto borda una superficie di genere 0 in  $D^4$  (anche in  $S^3$ ), quindi posso ricostruire il cobordismo in questo modo:

Figura 6.5: La superficie ed il suo bordo in realtà sono annodati in  $D^4$



Ho quindi provato che il link  $L10_{19}^n$  borda un toro con due buchi in  $D^4$ .

Nel capitolo 5 ho parlato dei link torici; per molto tempo una famosa congettura, la cosiddetta congettura di Milnor, che chiedeva di trovare quale fosse il genere slice di un nodo torico, è rimasta insoluta. All'inizio degli anni novanta Kronheimer e Mrowka hanno risolto la congettura, concludendo che

$$g_*(K_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

facendo uso della teoria di gauge. Il risultato più importante di Rasmussen in [25] consistette proprio nel fornire una dimostrazione puramente combinatoria della congettura di Milnor, grazie all'invariante da lui definito. In questa tesi userò la stessa tecnica per provare la congettura per ogni link torico.

Ho già calcolato il valore di  $s$  per ogni  $T_{p,q}$  e risulta essere

$$s(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)$$

la (6.1) mi dice che

$$g_*(T_{p,q}) \geq \frac{(p-1)(q-1) + 1 - n}{2}$$

Invece la (6.2) applicata al diagramma della figura 5.7, considerando che  $k(D_{p,q}) = p$  e  $c(D_{p,q}) = q(p-1)$ , mi dà

$$g_*(T_{p,q}) \leq \frac{2 - n - p + q(p-1)}{2} = \frac{(p-1)(q-1) + 1 - n}{2}$$

Quindi ho provato che

$$g_*(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1) + 1 - n}{2} \quad \text{per ogni } 2 \leq p \leq q$$

Ponendo  $n = 1$  ottengo la formula già nota della congettura originale per i nodi. Si nota che l'unico link torico slice è il link di Hopf: infatti dovrebbe

valere  $(p - 1)(q - 1) = n - 1$  quindi  $p - 1$  sarebbe un divisore di  $n - 1$  da cui  $p \leq n$ , ma  $n$  è il massimo comune divisore di  $p$  e  $q$  quindi  $n \leq p$  e perciò  $p = n$ . L'equazione diventa

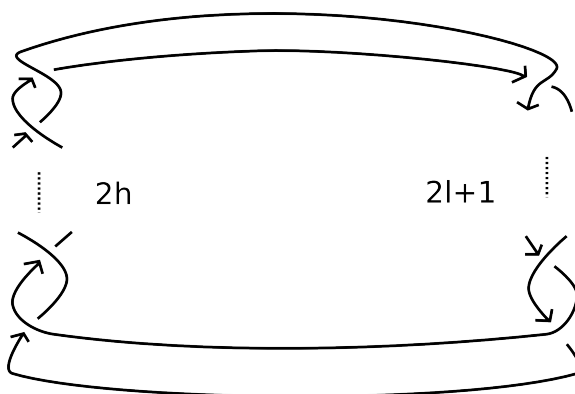
$$(n - 1)(q - 1) = n - 1$$

che, semplificando  $n - 1$  poiché nessun nodo torico è slice (ho escluso l'un-knot nella definizione), è  $q - 1 = 1$  che dà come unica soluzione il link  $T_{2,2}$  che è, appunto, il link di Hopf.

Vedo infine cosa riesco a dire sul genere slice dei link pretzel. Riesamino i tre casi della sezione 5.6:

- $h < 0$  e  $k > 0$

Osservo la figura 5.10, se applico una mossa di Morse di tipo 1 a due archi sulla colonna centrale che appartengono a componenti distinte ottengo che il link  $P_{2h,2k,2l+1}$  è cobordante al nodo della figura seguente



se aggiungo la condizione  $l + h \geq 0$  ossia  $2l + 1 \geq |2h|$  allora, con delle mosse di Reidemeister, posso eliminare i  $|2h|$  incroci nella colonna di sinistra e  $|2h|$  dei  $2l + 1$  incroci in quella di destra. Quindi ho provato che  $P_{2h,2k,2l+1}$  è cobordante al nodo torico  $T_{2,2l+1+2h}$ .

Adesso noto due cose: la prima è che il cobordismo che ho costruito consiste in una sella che unisce due componenti (quindi non aggiunge genere); la seconda che vale  $g_*(T_{2,2l+1+2h}) = l + h$  (l'ho dimostrato poco fa). Tutto questo mi dice che

$$g_*(P_{2h,2k,2l+1}) \leq l + h$$

Se il link è pseudo-sottile, cioè se  $h + k \neq 0$ , ho provato nella sezione 5.6 che  $s(P_{2h,2k,2l+1})$  può valere  $2l + 2h + 3$  o  $2l + 2h + 1$ , ma se fosse

il primo caso la (6.1) mi darebbe  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) \geq l + h + 1$  il che è assurdo; quindi

$$s(P_{2h,2k,2l+1}) = 2l + 2h + 1 \quad \text{e} \quad g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = l + h$$

Si noti che ho usato la stima 5.4.2 dimostrata da me nel capitolo precedente; senza di essa non avrei potuto dire niente.

Se vale  $l + h = -1$  il nodo in figura è l'uniknot per cui posso concludere direttamente che  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = 0$ .

Infine negli altri casi non posso dedurre niente di più di quanto già detto.

Con l'altra orientazione relativa lavoro allo stesso modo, tranne che per il fatto che stavolta la mossa di Morse viene applicata sulla colonna di sinistra. I risultati si ottengono come nel caso precedente:

Se  $l - k \geq 0$  allora

$$s(P_{2h,2k,2l+1}) = 2l - 2k + 1 \quad \text{e} \quad g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = l - k$$

Se  $l - k = -1$  allora  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = 0$ .

- $h > 0$  e  $k > 0$

Dato che ragiono esattamente come prima, per questo caso ed il successivo mi limito semplicemente a scrivere i risultati a cui sono arrivato:

$$g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = l + h$$

Ricordo che, per tali valori di  $h, k$  ed  $l$  avevo già calcolato  $s$  e che non ho bisogno di ulteriori ipotesi (i link sono sempre pseudo-sottili); lo stesso varrà anche dopo.

Con l'altra orientazione relativa ho che se  $l - k < 0$  allora

$$s(P_{2h,2k,2l+1}) = 2l - 2k + 1 \quad \text{e} \quad g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = k - l - 1$$

Se  $l = k$  allora  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = 0$ .

- $h < 0$  e  $k < 0$

Se  $l + h < 0$  allora

$$s(P_{2h,2k,2l+1}) = 2l + 2h + 1 \quad \text{e} \quad g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = -l - h - 1$$

Se  $l + h = 0$  allora  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = 0$ .

Con l'altra orientazione relativa vale sempre  $g_*(P_{2h,2k,2l+1}) = l - k$ .

I link pretzel ritorneranno ancora una volta nella prossima sezione con il caso alternante, l'unico di cui non ho ancora parlato.

## 6.4 Nuovi risultati sui cobordismi forti

John Pardon in [24] ha dimostrato un importante teorema, si tratta di un risultato molto recente, del 2011, nonché uno dei più interessanti sulla concordanza forte di link. In questa sezione userò la dimostrazione presente nel suo articolo per generalizzare il teorema alla classe dei link pseudo-sottili da me definita.

**Teorema 6.4.1.** *Sia  $L$  un link pseudo-sottile con  $h$  componenti split e sia  $\Sigma$  un cobordismo forte tra  $L$  ed  $M = M_1 \sqcup \dots \sqcup M_k$  componenti split. Allora  $g(\Sigma) \geq \lceil \frac{k-h}{2} \rceil$  dove  $\lceil \cdot \rceil$  indica la funzione soffitto.*

*Dimostrazione.* Chiamo diametro di un link  $L$  il valore

$$\max\{s \mid d_L(0, s) > 0\} - \min\{s \mid d_L(0, s) > 0\}$$

Allora il diametro di  $M_i$  è almeno 2 per ogni  $i$ , per la proprietà 5.2.9, quindi la proposizione 5.2.2 mi dice che  $M$  ha diametro al minimo  $2k$ . Dato che un link pseudo-sottile non split ha diametro esattamente 2 ho che il diametro di  $L$  è pari a  $2h$ , per lo stesso motivo di prima.

Il cobordismo  $\Sigma$  ed il suo inverso mi inducono le seguenti mappe in omologia:

$$H_{\text{Lee}}^0(L) \xrightarrow{F_\Sigma^*} H_{\text{Lee}}^0(M) \xrightarrow{F_{-\Sigma}^*} H_{\text{Lee}}^0(L)$$

entrambi isomorfismi filtrati di grado  $-2g(\Sigma)$  per il corollario 6.1.4.

Questo mi dice che l'omologia di Lee filtrata di  $M$  in 0 ha supporto in gradi compresi tra

$$\max\{s \mid d_L(0, s) > 0\} + 2g(\Sigma) \text{ e } \min\{s \mid d_L(0, s) > 0\} - 2g(\Sigma)$$

cioè  $4g(\Sigma) + 2h$  dovrà valere almeno quanto il diametro di  $M$  e quindi  $4g(\Sigma) + 2h \geq 2k$  da cui posso concludere che

$$g(\Sigma) \geq \left\lceil \frac{k-h}{2} \right\rceil \geq \frac{k-h}{2}$$

□

Ho il seguente corollario:

**Corollario 6.4.2.** *Se  $L$  ed  $M$  sono link concordanti in modo forte con  $h$  e  $k$  componenti split ed  $L$  è pseudo-sottile allora  $h \geq k$ .*

*In particolare*

1. *Un link  $H$ -sottile (in realtà qualunque link pseudo-sottile non split) non è concordante, in modo forte, ad un link split.*

*Questo è l'enunciato del teorema di Pardon.*



2. Un link pseudo-sottile è fortemente slice se e solo se è unione disgiunta di nodi slice.

*Dimostrazione.* Per il teorema precedente un cobordismo forte tra  $L$  ed  $M$  tali che  $k \geq h + 1$  ha  $g(\Sigma) \geq 1$ ; assurdo perché i link sono concordanti.

1. Se  $L$  è un link pseudo-sottile non split allora ho che qualunque link concordante in modo forte ad esso è a sua volta non split.
2. Se  $h = 1$  da 1. segue che  $M$  è un nodo slice, il viceversa è ovvio. Per  $h$  qualsiasi si ragiona in modo simile.

□

I link torici sono tutti pseudo-sottili non split quindi nessuno di essi può essere concordante in modo forte ad un link split. Nel caso dei link torici con due componenti, di cui ho dato una stima di  $d$  nel capitolo precedente, posso anche dimostrare il seguente fatto:

**Proposizione 6.4.3.** *Sia  $T_{2n,2m}$  e  $T_{2n',2m'}$  con  $1 \leq n, n' \leq m, m'$  coprimi due link torici a due componenti; allora  $T_{2n,2m}$  non è concordante in modo forte a  $T_{2n',2m'}$ .*

*Dimostrazione.* I valori di  $d_{T_{2n,2m}}$  che ho calcolato mi dicono che, se i due link fossero concordanti in modo forte, allora dovrei avere

$$\begin{cases} (2n - 1)(2m - 1) = (2n' - 1)(2m' - 1) \\ nm = n'm' \end{cases}$$

Poiché  $d$  è invariante. La prima equazione può essere riscritta come  $n + m = n' + m'$  sviluppando i prodotti e sostituendo la seconda.

Adesso noto che

$$\begin{aligned} n'^2 + 2n'm' + m'^2 &= (n' + m')^2 = \\ &= (n + m)^2 = n^2 + 2nm + m^2 = n^2 + 2n'm' + m^2 \end{aligned}$$

quindi  $n^2 + m^2 = n'^2 + m'^2$ , ma allora vale

$$(m - n)^2 = m^2 - 2nm + n^2 = m'^2 - 2n'm' + n'^2 = (m' - n')^2$$

e dato che le quantità al primo e all'ultimo membro dell'equazione sono positive per ipotesi ottengo che  $m - n = m' - n'$  e infine

$$\begin{cases} n = n' \\ m = m' \end{cases}$$

□

Dopo questa breve parentesi ecco finalmente l'ultimo argomento importante di cui parlerò. Fino ad ora mi sono occupato del genere slice inteso come il minimo genere di una superficie orientabile propriamente embedded in  $D^4$  che ha come bordo un dato link; ho già osservato che questo è soltanto un modo diverso per dire che  $g_*(L)$  è il minimo genere di un cobordismo debole tra  $L$  e l'unlink. Voglio quindi definire un altro invariante in modo simile usando, invece, i cobordismi forti.

**Definizione 43.** Sia  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  un link con  $n$  componenti tale che  $\text{lk}(L_i, L_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$ ; allora definisco il genere slice forte di  $L$  il numero intero  $g_*^*(L)$  pari al minimo genere di un cobordismo forte tra  $L$  e l'unlink con  $n$  componenti.

La condizione sui linking number è necessaria poiché, altrimenti, come si vede dalla dimostrazione della proposizione 6.1.6, non potrebbe esistere un cobordismo di questo tipo; essa è anche sufficiente a garantire la buona definizione dell'invariante. Inoltre si osservi che ciò implica che  $H_{\text{Lee}}(L)$  ha supporto interamente in grado omologico zero.

La differenza tra l'invariante che ho appena definito ed il genere slice sta nel fatto che ora sto imponendo in più la condizione che la superficie che borda  $L$  abbia  $n$  componenti connesse, ognuna delle quali borda un nodo che è una componente di  $L$ .

Ovviamente

**Osservazione 6.4.4.**  $g_*(L) = 0$  se e solo se  $L$  è fortemente slice e vale  $g_*(L) \leq g_*^*(L)$ .

Userò ora alcune tecniche della dimostrazione del teorema 6.4.1 per dimostrare il prossimo teorema che è una versione della (6.1) per il genere slice forte.

**Teorema 6.4.5.** Sia  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  un link con  $n$  componenti pseudo-sottile non split tale che  $\text{lk}(L_i, L_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$ ; allora vale

$$g_*^*(L) \geq \frac{|s(L)| + n - 1}{2}$$

*Dimostrazione.* Ricordo che, per un link pseudo-sottile non split, vale  $d_L(0, s) > 0$  solo per  $s = s(L) \pm 1$ .

Siano  $\Sigma$  ed  $M = \bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc$  come nel teorema 6.4.1 e siano  $F_{\pm\Sigma}^*$  le stesse mappe in omologia della sua dimostrazione. Ricordando i valori di  $d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc}$  ho che

$$\max\{s \mid d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc} > 0\} = n \text{ e } \min\{s \mid d_{\bigcirc \sqcup \dots \sqcup \bigcirc} > 0\} = -n$$

Quindi dato che le mappe sono filtrate di grado  $-2g(\Sigma)$  ho che

$$s(L) + 1 + 2g(\Sigma) \geq n \text{ e } s(L) - 1 - 2g(\Sigma) \leq -n$$

il che significa  $g_*^*(L) \geq \frac{\pm s(L) + n - 1}{2}$  che è la tesi.  $\square$

A questo risultato potevo arrivare anche semplicemente usando, con molti conti, la proprietà 6.1.5 di  $d_L$ .

In particolare il teorema vale per ogni link  $L = L_1 \cup L_2$  alternante non split tale che  $\text{lk}(L_1, L_2) = 0$  e proprio a questa classe di link dedico la parte finale di questa sezione; vedrò, infatti, alcune applicazioni del teorema in cui calcolerò esattamente  $g_*^*(L)$ .

Negli esempi successivi lavorerò sempre con una sola orientazione per link, infatti la prova della proposizione 6.1.7 mi dice che  $g_*^*(L, \mathbf{o}) = g_*^*(L, \mathbf{o}')$  per ogni  $\mathbf{o}, \mathbf{o}' \in \mathcal{O}(L)$ .

L'esempio più semplice che posso fare è il link di Whitehead, ossia il link  $L_{5_1}$ :

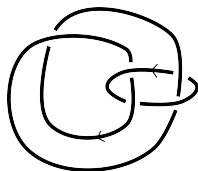
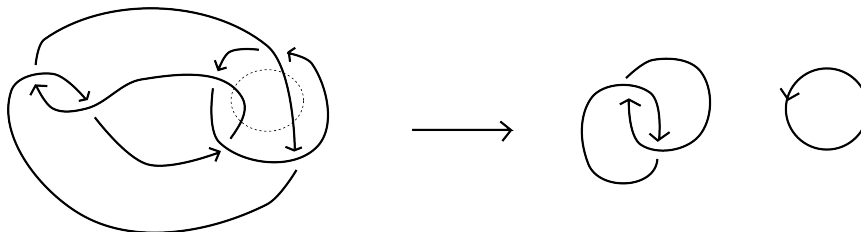


Figura 6.6: Un diagramma del link di Whitehead

Applico una mossa di Reidemeister e, nel punto indicato nella figura successiva, una mossa di Morse di tipo 1; così ottengo che il link di Whitehead è cobordante all'unione disgiunta dell'unlink con un link di Hopf positivo.



Si osserva che la mossa di Morse è stata applicata a due archi appartenenti alla stessa componente e che il link di Hopf ha genere slice zero; quindi ho costruito il cobordismo rappresentato in figura 6.7.

Dato che ho costruito un cobordismo forte di genere 1 tra l'unlink a due componenti ed il link di Whitehead ho provato che

$$g_*^*(L_{5_1}) \leq 1$$

Ma per il corollario al teorema 6.4.1 dato che il link è alternante non split non può essere fortemente slice e quindi ho che

$$g_*^*(L_{5_1}) = 1$$

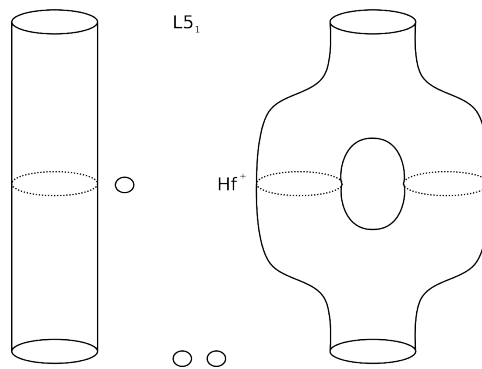


Figura 6.7

Un esempio più interessante è dato dalla famiglia di link che vado a definire ora: tali link hanno come componenti un nodo torico e un unknot.

Sia  $Ti_n$  con  $n \geq 0$  i link rappresentati dal seguente diagramma:

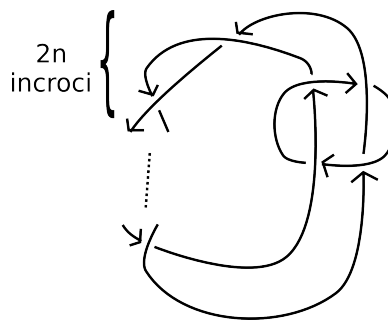
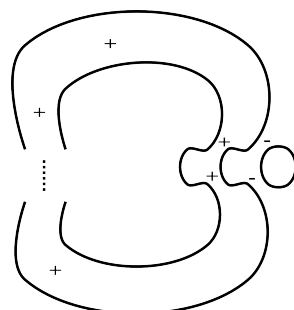


Figura 6.8

Per  $n = 0$  ottengo il link di Whitehead.

Tali link sono tutti alternanti non split ed inoltre vale  $lk(L_1, L_2) = 0$ . Essendo alternanti posso calcolare facilmente l'invariante  $s$  con uno dei metodi combinatori descritti nel capitolo precedente:



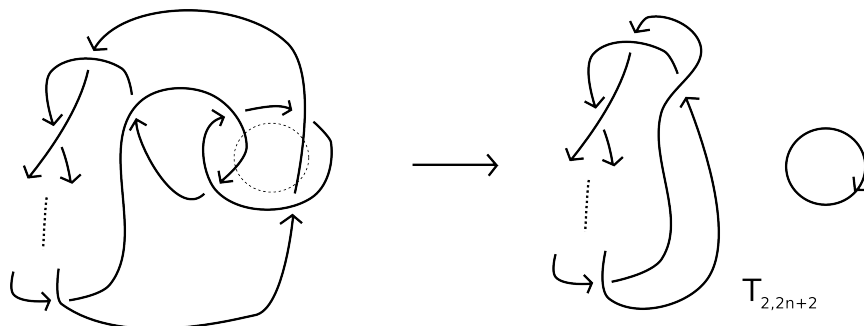
$$\begin{aligned} k &= 3 \\ w &= 2n+1 \\ S^+ &= 2 \\ S^- &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= 2n+1 \\ V &= 2n+1 \end{aligned}$$

Quindi ho che  $s(Ti_n) = 2n + 1$  e, il teorema 6.4.5, mi dice che vale

$$g_*(Ti_n) \geq \frac{2n + 1 + 1}{2} = n + 1$$

Come prima ora applico una mossa di Reidemeister ed una mossa di Morse di tipo 1:



Ho ottenuto che  $Ti_n$  è cobordante a  $\bigcirc \sqcup T_{2,2n+2}$  e so quanto vale il genere slice di questo link:

$$g_*(T_{2,2n+2}) = n$$

e ricostruendo il cobordismo

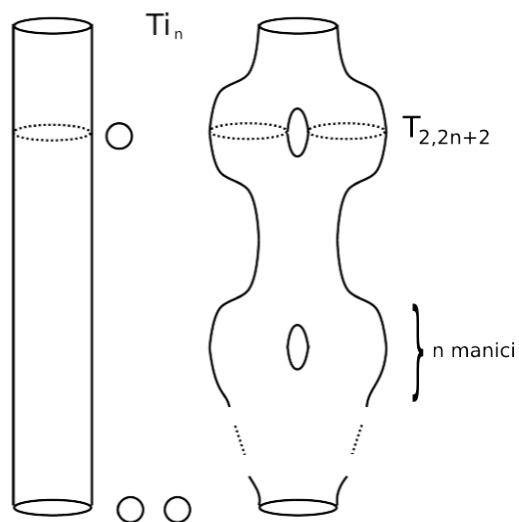
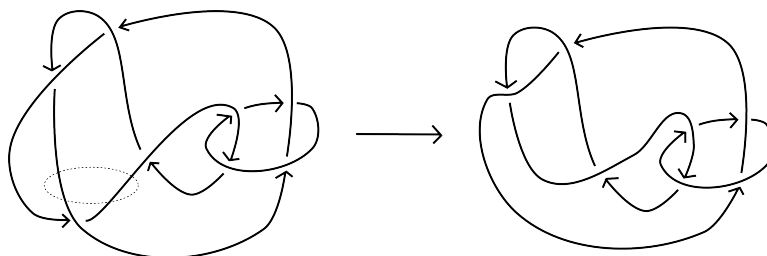


Figura 6.9

La figura precedente mostra che esiste un cobordismo forte di genere  $n + 1$  tra  $Ti_n$  e l'unlink quindi  $g_*(Ti_n) = n + 1$ .

Se pongo  $n = 1$  allora  $Ti_1 = L7_3^a$ . Tale link è un esempio in cui il genere slice ed il genere slice forte sono diversi:

ho appena calcolato che il secondo vale 2, mentre il fatto che  $s(L7_3^a) = 3$  mi dice che  $g_*(L7_3^a) \geq 1$  dalla (6.1). Quindi per mostrare che il genere slice vale esattamente 1 devo solo costruire un cobordismo debole di genere 1 tra il link  $L7_3^a$  e l'unknot. Tale costruzione è descritta nelle figure seguenti:



Il link nella figura a sinistra è  $L7_3^a$  mentre quello a destra  $L6_5^a$ , i tangle evidenziati indicano sempre che applico delle mosse di Morse di tipo 1.

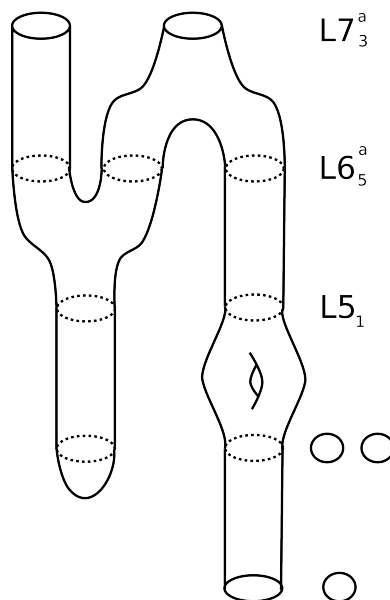
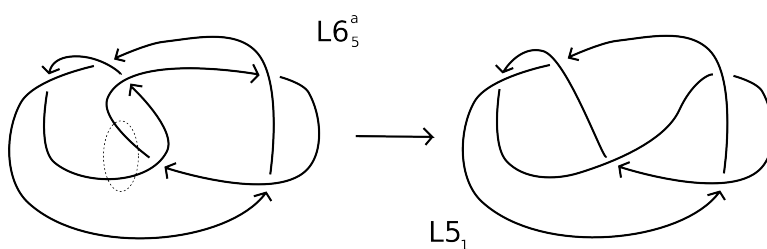


Figura 6.10

Il cobordismo ottenuto ha genere 1. L'ultimo diagramma rappresenta il link di Whitehead: è diverso dal diagramma della figura 6.6, ma sono equivalenti (esercizio). In generale,  $g_*$  e  $g_*^*$  sono due invarianti distinti.

In conclusione mostro un'ulteriore famiglia di link per cui posso calcolare il genere slice forte, tale famiglia è in realtà una generalizzazione dei link  $Ti_n$  ed è una vecchia conoscenza: sto parlando dei link pretzel.

Considero la classe dei link  $P_{2h,-2h,2l+1}$  con  $h > 0$ . Dalle osservazioni fatte nella sezione 5.6 ed in questo capitolo so già che tali link sono alternanti non split, hanno due componenti ed il linking number tra esse è nullo. Inoltre si nota facilmente che  $P_{2,-2,2l+1} = Ti_l$ .

Posso calcolare facilmente l'invariante  $s$ ; questa volta ometto i dettagli della risoluzione coerente visto che il procedimento è stato già mostrato spesso e non presenta differenze con quanto fatto con gli altri pretzel. Vale

$$s(P_{2h,-2h,2l+1}) = V(D_{2h,-2h,2l+1}) = U(D_{2h,-2h,2l+1}) = 2l + 2h - 1$$

Il teorema 6.4.5 mi dice che

$$g_*^*(P_{2h,-2h,2l+1}) \geq l + h$$

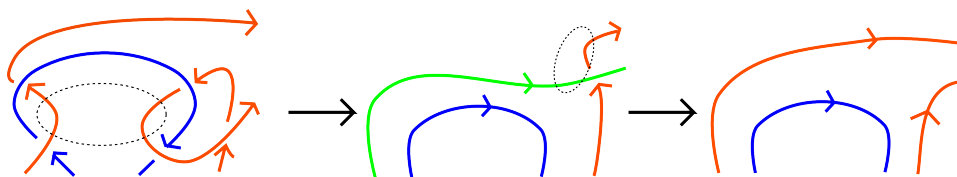
Voglio provare per induzione che esiste un cobordismo forte di genere  $l + h$  tra  $P_{2h,-2h,2l+1}$  e l'unlink:

- $h = 1$

È il risultato precedente sui link  $Ti_l = P_{2,-2,2l+1}$  che hanno genere slice forte pari a  $l + 1$ .

- $h \rightarrow h + 1$

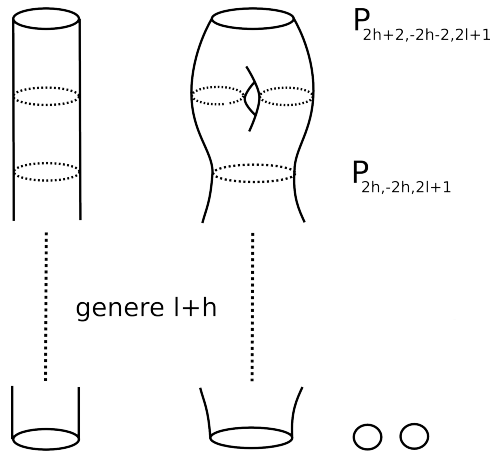
Applico due mosse di Morse di tipo 1 come indicato nella figura, che rappresenta il frammento superiore delle colonne sinistra e centrale del diagramma standard di  $P_{2h+2,-2h-2,2l+1}$ .



Il tangle sulla destra appartiene ad un link pretzel dello stesso tipo di  $P_{2h+2,-2h-2,2l+1}$ , ma con  $h$  diminuito di uno: posso applicare l'ipotesi induttiva.

Il cobordismo sarà siffatto:

Figura 6.11



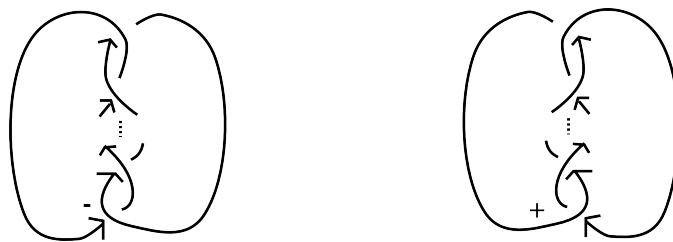
Il genere di tale superficie è  $l + h + 1$  e quindi ho terminato.

## 6.5 Conclusioni e idee

La tesi è ufficialmente finita.

In quest'ultima sezione, prima di concludere definitivamente, volevo descrivere un metodo per poter estendere la nozione di genere slice forte a qualunque link. Infatti ho già avuto modo di notare che, affinché un link  $L$  sia cobordante in modo forte all'unlink, è necessario che  $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$  rispetti la condizione  $\text{lk}(L_i, L_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$ ; il che vuol dire che, per la maggior parte dei link l'invariante che ho definito non avrebbe senso.

Un modo per superare questo ostacolo potrebbe essere quello di ricorrere alla famiglia di link rappresentati dalla seguente figura. Per semplicità mostro soltanto il caso in cui le componenti sono due, ma è abbastanza evidente che si può generalizzare.



A seconda del numero di twist il linking number tra le componenti di tali link può assumere qualsiasi valore. Inoltre se non è presente alcun twist allora ottengo l'unlink.

L'idea è definire  $g_*^*(L)$  come il minimo genere di un cobordismo forte tra  $L$  ed il link del tipo precedente che ha lo stesso linking number tra le com-



ponenti. Ovviamente per i link con  $\text{lk}(L_1, L_2) = 0$  ottengo la definizione canonica di genere slice forte.

Dopo aver dato tale definizione sarebbe interessante generalizzare anche il teorema 6.4.5 ad ogni link; purtroppo non ho potuto occuparmene in questa tesi, ma potrebbe essere una buona idea per proseguire lo studio dei cobordismi forti di link, il quale non è mai stato molto approfondito fino a questi ultimi anni.

# Bibliografia

- [1] L. Abrams, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras*, J. of Knot Theory and its Ramifications **5(5)** (1996) 569-587.
- [2] M. Atiyah, *The geometry and physics of knots*, Cambridge, Cambridge University Press, 1990.
- [3] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **68** (1989) 175-186.
- [4] D. Bar-Natan, *Khovanov homology for knots and links with up to 11 Crossings*, Advances in Topological Quantum Field Theory NATO Science Series **179** (2004) 167-241.
- [5] D. Bar-Natan, *Khovanov's homology for tangles and cobordisms*, Geometry and Topology **9** (2005) 1443-1499.
- [6] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, Algebraic and Geometric Topology **2-16** (2002) 337-370.
- [7] A. Beliakova, S. Wehrli, *Categorification of the colored Jones polynomial and Rasmussen invariant of links*, Canad. J. Math. **60(6)** (2008) 1240-1266.
- [8] S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Surfaces in 4-Space*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences **142**, Springer-Verlag, 2004.
- [9] D. Clark, S. Morrison, K. Walker, *Fixing the functoriality of Khovanov homology*, Geom. Topol. **13(3)** (2009) 1499-1582.
- [10] S. Garoufalidis, *A conjecture on Khovanov's invariants*, Fundamenta Mathematicae **184** (2004) 99-101.
- [11] C. McA. Gordon, R. A. Litherland, *On the signature of a link*, Invent. Math. **47** (1978) 53-69.
- [12] J. Greene, *Homologically thin, non-quasi-alternating links*, Math. Res. Lett. **17(1)** (2010) 39-49.

- [13] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985) 103-111.
- [14] L. H. Kauffman, L. R. Taylor, *Signature of Links*, Transactions of the American Mathematical Society **216** (1976) 351-365.
- [15] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, Duke Math. J. **101(3)** (2000) 359-426.
- [16] S. Kinoshita, H. Terasaka, *On unions of knots*, Osaka Math. J. **9** (1957) 131-153.
- [17] J. Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, LMSST **59**, Cambridge University Press, 2003.
- [18] E. S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, Adv. Math. **197(2)** (2005) 554-586.
- [19] W. B. R. Lickorish, *An introduction to knot theory*, Graduate texts in math. **175**, Springer-Verlag, 1997.
- [20] A. Lobb, *Computable bounds for Rasmussen's concordance invariant*, Compositio Mat. **147** (2011) 661-668.
- [21] C. Manolescu, P. Ozsváth, *On the Khovanov and knot Floer homologies of quasi-alternating links*, In Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference (2007) 60-81.
- [22] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton N.J., Princeton University Press, 1965.
- [23] P. Ozsváth, Z. Szabó, *On the Heegaard Floer homology of branched double-covers*, Adv. Math. **194** (2005) 1-33.
- [24] J. Pardon, *The link concordance invariant from Lee homology*, Algebr. Geom. Topol. **12(2)** (2012) 1081-1098.
- [25] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, Invent. Math. **182(2)** (2010) 419-447.
- [26] P. Turner, *Five lectures on Khovanov homology*, math.GT/0606464.