Università degli Studi di Pisa
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

Il Teorema di Keisler-Shelah

Candidato
Rosario Mennuni

Relatore
Prof. Alessandro Berarducci

Anno Accademico 2012/2013

Indice

Introduzione

La Teoria dei Modelli studia le strutture matematiche attraverso le formule del prim'ordine, in un opportuno linguaggio L, che queste verificano. È naturale quindi definire una relazione di equivalenza su L-strutture che le identifichi se realizzano gli stessi enunciati: questa relazione prende il nome di *equivalenza elementare*. È immediato domandarsi quando due strutture sono elementarmente equivalenti ed altrettanto immediato è mostrare che questo succede se e solo se possono essere *elementarmente immerse* in una sovrastruttura comune. Tuttavia, la nozione di *immersione elementare* ha ancora bisogno del concetto di *formula* per essere enunciata, e potremmo chiederci se è possibile caratterizzare una nozione sintattica come questa in maniera puramente algebrica, cioè in termini di esistenza di mappe che conservino la struttura. Il Teorema di Keisler-Shelah, risultato che dà il titolo a questa tesi, risponde affermativamente a questa domanda.

Per enunciare il Teorema è necessaria una costruzione che prende il nome di *ultrapotenza*: questa è un caso particolare di *ultraprodotto*, un quoziente del prodotto diretto che utilizza gli *ultrafiltri* e gode di importanti proprietà model-teoretiche. Ad esempio un ultraprodotto di campi, a differenza del prodotto diretto, continua ad essere un campo: questo è dovuto al fatto gli ultraprodotti preservano le formule del prim'ordine, e quella di essere un campo è una proprietà che può appunto essere espressa con una formula del prim'ordine. Comunque, anche se gli ultraprodotti godono di questa importante proprietà, la definizione di ultraprodotto non necessita del concetto di *formula*. Il Teorema di Keisler-Shelah, asserendo che affinché due strutture siano elementarmente equivalenti è necessario e sufficiente che abbiano ultrapotenze isomorfe, fornisce quindi la caratterizzazione algebrica che cercavamo e permette di tradurre la nozione di equivalenza elementare, per sua natura sintattica, in termini di esistenza di isomorfismi fra opportuni quozienti di prodotti diretti.

La tesi è strutturata come segue. Nel primo capitolo richiameremo, brevemente e senza pretese di esaustività, definizioni e risultati basiliari su cui si poggerà il lavoro seguente, come la nozione di ultraprodotto, il Teorema di Łoś, le definizioni di tipo e modello saturo e il Teorema di unicità per la suddetta classe di modelli. Nel secondo capitolo introdurremo una speciale classe di ultrafiltri, ne mostreremo l'esistenza e studieremo le proprietà di saturazione dei modelli costruiti facendone uso. Da questo studio seguirà — assumendo l'Ipotesi Generalizzata del Continuo (GCH) che, ricordiamo, afferma che non esistono cardinalità intermedie fra quella di un insieme infinito e quella del suo insieme delle parti — il risultato principale. Il terzo capitolo è dedicato alla rimozione della GCH dalla dimostrazione del Teorema di Keisler-Shelah, rimozione che richiede una costruzione piuttosto delicata in cui l'ultrafiltro appropriato e l'isomorfismo fra le relative ultrapotenze vengono costruiti parallelamente. Una volta disponibile — senza bisogno di assunzioni circa l'esponenziazione cardinale — la caratterizzazione di cui sopra, la useremo per fornire una dimostrazione algebrica del risultato classico noto come Teorema di Interpolazione di Craig sensibilmente più breve di quella tradizionale realizzata con metodi sintattici. Nel quarto e ultimo capitolo presenteremo una generalizzazione dell'ultrapotenza che prende il nome di *ultrapotenza limite*, e vedremo com'è possibile utilizzare questa nuova costruzione per caratterizzare in termini algebrici la nozione di *estensione elementare completa* e per fornire alcuni risultati sui modelli della Teoria degli Insiemi.

Notazioni

La freccia "$\Rightarrow$" verrà usata per indicare l'implicazione nella metateoria, mentre "$\to$" verrà usata per denotare l'implicazione all'interno di una formula. Ad esempio $\mathcal{M} \models \varphi \Rightarrow \psi$ è da intendersi come "$(\mathcal{M} \models \varphi) \Rightarrow \psi$", mentre "$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$" significa "$\mathcal{M} \models (\varphi \to \psi)$", e analogamente per "$\Leftrightarrow$" e "$\leftrightarrow$". Se $\mathcal{M}$ è una L-struttura, conveniamo di indicare il suo dominio con M e, se $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, scriveremo per brevità $\vec{a} \in M$ invece che $\vec{a} \in M^n$. Analogamente, se $a_1, \dots, a_n$ sono funzioni $a_k \colon I \to M$ indicheremo $(a_1(i), \dots, a_n(i))$ con $\vec{a}(i)$ e $([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}})$ con $[\vec{a}]_{\mathcal{U}}$. Se $A \subseteq M$, indichiamo con L_A il linguaggio $L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ che espande L con un simbolo di costante c_a per ogni elemento $a \in A$. Indichiamo con $\mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ l'insieme delle L_A-formule vere in $\mathcal{M}$ e conveniamo che la cardinalità di una struttura $|\mathcal{M}|$ sia definita come quella del suo dominio $|M|$.

Capitolo 1

Risultati Preliminari

In questo capitolo richiamiamo molto brevemente alcune nozioni di Teoria dei Modelli, in particolare quelle di *tipo* e *modello saturo*, e dimostriamo un risultato classico di isomorfismo di cui faremo uso nel prossimo capitolo. Per una trattazione più dettagliata si veda ad esempio [2], [3] o [7].

1.1 Nozioni di Base

Linguaggi e Strutture

Ricordiamo che un linguaggio del prim'ordine L è un insieme di simboli di costante, simboli di funzione e simboli di relazione, ciascuno associato ad un numero naturale detto *arietà*, che altro non è che il suo numero di argomenti, e che una L-struttura $\mathcal{M}$ è formata da un insieme M, detto *dominio* della struttura, e di un'interpretazione per ciascun simbolo di L: i simboli di costante vengono interpretati come fissati elementi del dominio, i simboli di funzione e relazione come funzioni e relazioni sul dominio dell'appropriata arietà. Ad esempio, se R è un simbolo di relazione binaria, verrà interpretata con un opportuno sottoinsieme di M^2.

La nozione di *verità* di una formula in una struttura è data secondo quella che prende il nome di *semantica di Tarski*, definita per induzione sulla complessità della formula. Senza entrare nei dettagli, per i quali rimandiamo ad un qualunque manuale introduttivo di logica, se $\mathcal{M}$ e una L-struttura e φ è una L-formula chiusa (o *enunciato*, cioè senza variabili libere) scriveremo $\mathcal{M} \models \varphi$ per indicare che φ vera in $\mathcal{M}$ e, se T è una L-teoria, cioè un insieme di L-enunciati, $\mathcal{M} \models T$ per indicare che, per ogni $\varphi \in T$, $\mathcal{M} \models \varphi$. Diremo in questi casi che $\mathcal{M}$ è un *modello* di φ o di T, a seconda dei casi. Ad esempio, se $L = \left\{\cdot, e, {}^{-1}\right\}$ e T è l'usuale Teoria dei Gruppi, un qualunque gruppo, con l'interpretazione standard dei simboli di L, è un modello di T.

Ricordiamo inoltre che due L-strutture $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ si dicono *elementarmente equivalenti* se verificano gli stessi enunciati del prim'ordine, cioè se per ogni

L-formula chiusa φ vale $\mathcal{M} \models \varphi$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi$; in questo caso scriveremo $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Una funzione iniettiva $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ (anche se sarebbe più preciso scrivere $f\colon M \to N$) si dice *immersione elementare* se, per ogni formula con variabili libere $\varphi(\vec{x})$ e per ogni $\vec{m} \in M$, si ha $\mathcal{M} \models \varphi(\vec{m})$ se e solo se $\mathcal{N} \models \varphi(f(\vec{m}))$. Se $M \subseteq N$ diciamo che $\mathcal{N}$ è un'*estensione elementare* di $\mathcal{M}$ e scriviamo $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ se l'inclusione $i\colon \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ è un'immersione elementare. Con lieve abuso di notazione, che consiste nell'identificazione di una struttura con la sua immagine, useremo la stessa grafia per indicare che esiste un immersione elementare da $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Se esiste una bigezione $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ che è anche un'immersione elementare, diremo che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono strutture *isomorfe* e che f è un *isomorfismo di L-strutture* (o, più brevemente, *isomorfismo*); indicheremo l'esistenza di una tale mappa con $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. Ovviamente due strutture isomorfe sono elementarmente equivalenti, ma il viceversa non vale. Ad esempio è facile mostrare che $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$, ma chiaramente queste due strutture non sono isomorfe per motivi di cardinalità. La definizione di isomorfismo può essere equivalentemente data chiedendo che la mappa bigettiva in questione preservi solo le formule atomiche[1] ed è immediato accorgersi che, ad esempio, un isomorfismo di gruppi nel senso usuale del termine è un isomorfismo di L-strutture, con $L = \left\{\cdot, e, {}^{-1}\right\}$.

Ultrafiltri e Ultraprodotti

Altre nozioni essenziali in questa trattazione sono quelle di *filtro*, *ultrafiltro* e *ultraprodotto*.

Definizione 1.1.1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ su un insieme I è una famiglia non vuota di parti di I stabile per intersezione finita e sovrainsieme. Se $\emptyset \notin \mathcal{F}$ (o, equivalentemente, se $\mathcal{F} \neq \mathscr{P}(I)$), il filtro si dice *proprio*. Un *ultrafiltro* $\mathcal{U}$ è un filtro proprio che verifica una delle seguenti proprietà equivalenti:

- È massimale per inclusione, cioè non può essere esteso ad un filtro proprio $\mathcal{F} \supsetneq \mathcal{U}$.
- Per ogni $X \in \mathscr{P}(I)$, $X \notin \mathcal{U} \Rightarrow I \setminus X \in \mathcal{U}$; notiamo che l'altra implicazione è sempre vera in quanto $\mathcal{U}$ è proprio.
- Se $X \cup Y \in \mathcal{U}$, allora $X \in \mathcal{U}$ oppure $Y \in \mathcal{U}$.

Se $i \in I$, un ultrafiltro si dice *principale* su i se è l'ultrafiltro degli insiemi che contengono i. Un ultrafiltro si dice *non principale* se non è un ultrafiltro principale.

Definizione 1.1.2. Se $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di L-strutture e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, l'*ultraprodotto* $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/_{\mathcal{U}}$ è definito nella seguente maniera:

[1] Una *formula atomica* è una formula senza connettivi né quantificatori.

- Il dominio di $\mathcal{M}$ è il prodotto dei domini $\prod_{i\in I} M_i$ quozientato lungo l'ultrafiltro. Ricordando che gli elementi del prodotto sono le funzioni di scelta $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} M_i$ tali che per ogni $\forall i\ f(i) \in M_i$, due elementi f, g del quoziente appartengono alla stessa classe di equivalenza $[f]_{\mathcal{U}}$ se coincidono $\mathcal{U}$-quasi ovunque, cioè se $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

- Se c è un simbolo di costante e $c(i)$ è la sua interpretazione in $\mathcal{M}_i$, la sua interpretazione in $\mathcal{M}$ è $[c]_{\mathcal{U}}$.

- Se f è un simbolo di funzione e per ogni $i \in I$ si ha $f(\vec{a}(i)) = g(i)$, allora $f([\vec{a}]_{\mathcal{U}}) = [g]_{\mathcal{U}}$.

- Se R è un simbolo di relazione, $\mathcal{M} \models R([\vec{m}]_{\mathcal{U}})$ se e solo se $R(\vec{m})$ è vera $\mathcal{U}$-quasi ovunque, cioè se $\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models R(\vec{m}(i))\} \in \mathcal{U}$.

L'*ultrapotenza* ${\mathcal{M}^I}/{\mathcal{U}}$ è un caso particolare di ultraprodotto dove tutti i fattori coincidono.

Risultati Classici

Alcuni noti risultati di cui faremo uso, e di cui omettiamo la dimostrazione per questioni di spazio, sono i seguenti, cui premettiamo una definizione.

Definizione 1.1.3. Se $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono L-strutture, un'*immersione elementare parziale* è una funzione f a valori in N tale che $\mathrm{dom}(f) \subseteq M$ e per ogni $\vec{m} \in \mathrm{dom}(f)$ ed ogni formula $\varphi(\vec{x})$ si abbia $\mathcal{M} \models \varphi(\vec{m}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(f(\vec{m}))$.

Proposizione 1.1.4. Se $(I, <)$ è un ordine totale, $\{f_i \mid i \in I\}$ è una catena immersioni elementari parziali, cioè $\forall i, j \in I$ si ha $i < j \Rightarrow f_i \subseteq f_j$, e denotiamo $f = \bigcup_{i\in I} f_i$, allora f è ancora un'immersione elementare parziale.

Proposizione 1.1.5. Se $(I, <)$ è un ordine totale, $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ è una catena di estensioni elementari di L-strutture, cioè $\forall i, j \in I$ si ha $i < j \Rightarrow \mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}_j$, e denotiamo con $\mathcal{M}$ la struttura $\bigcup_{i\in I} \mathcal{M}_i$, ovvero la struttura il cui dominio è $\bigcup_{i\in I} M_i$ e le interpretazioni dei simboli di funzione e costante sono l'unione delle rispettive interpretazioni nelle $\mathcal{M}_i$, allora $\forall i \in I\ \mathcal{M}_i \preceq \mathcal{M}$.

Teorema 1.1.6 (di Łoś)**.** Se $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di L-strutture, e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I, per ogni L-formula $\varphi(\vec{x})$ e per ogni $[\vec{\sigma}] \in \mathcal{M} = \prod {\mathcal{M}_i}/{\mathcal{U}}$ vale

$$\mathcal{M} \models \varphi\left([\vec{\sigma}]\right) \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi(\vec{\sigma}(i))\} \in \mathcal{U}$$

In particolare se φ è un enunciato (formula chiusa)

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Notiamo che la definizione di ultraprodotto garantisce queste proprietà solo per le formule atomiche. Un corollario immediato è il seguente:

Corollario 1.1.7. Ogni struttura è elementarmente equivalente alle sue ultrapotenze, e anzi l'immersione canonica $d\colon \mathcal{M} \to {\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$ che manda ogni $m \in M$ nella classe di equivalenza della funzione che vale costantemente m è elementare.

Le ultrapotenze permettono quindi di estendere un modello a strutture che sono automaticamente estensioni elementari della struttura di partenza.

Teorema 1.1.8 (di Espansione)**.** Siano I un insieme di indici, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I, $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ una famiglia di L-strutture, $L' \supseteq L$ un linguaggio che include L e $\{\mathcal{N}_i \mid i \in I\}$ una famiglia di L'-strutture tali che per ogni $i \in I$ $\mathcal{N}_i$ sia un'espansione di $\mathcal{M}_i$ ad L'-struttura. Allora $\prod_{i\in I} {\mathcal{N}_i}/_{\mathcal{U}}$ è un espansione a L'-struttura di $\prod_{i\in I} {\mathcal{M}_i}/_{\mathcal{U}}$.

Teorema 1.1.9 (di Compattezza)**.** Una teoria T è soddisfacibile, cioè ha un modello $\mathcal{M} \models T$, se e solo se è finitamente soddisfacibile, cioè se per ogni T_0 sottoinsieme finito di T esiste un modello $\mathcal{M}_0 \models T_0$.

Teorema 1.1.10 (di Completezza)**.** Un enunciato φ è conseguenza logica di una teoria T, cioè è vero in tutti i modelli di T, se e solo se esiste una dimostrazione formale di φ da T.

Indicando $\mathrm{Mod}(T) \subseteq \mathrm{Mod}(\varphi)$ con $T \models \varphi$ e indicando l'esistenza di una dimostrazione formale di φ da T con $T \vdash \varphi$ il Teorema può quindi essere enunciato come

$$T \models \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$$

Proposizione 1.1.11 (Criterio di Tarski-Vaught)**.** Se $\mathcal{M}$ è una sottostruttura di $\mathcal{N}$ e per ogni $\vec{a} \in M$ vale

$$\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, \vec{a}) \Rightarrow \exists b \in M\ \mathcal{N} \models \varphi(b, \vec{a})$$

allora $\mathcal{M}$ è una sottostruttura elementare di $\mathcal{N}$.

Richiamiamo inoltre i seguenti risultati di Teoria degli Insiemi.

Teorema 1.1.12 (di König)**.** Se I è un insieme di indici, e $\{\alpha_i \mid i \in I\}$, $\{\beta_i \mid i \in I\}$ sono due famiglie di cardinali tali che $\forall i \in I\ \alpha_i < \beta_i$, allora

$$\sum_{i\in I} \alpha_i < \prod_{i\in I} \beta_i$$

Definizione 1.1.13. Se $(I, <)$ è un ordine totale, la sua *cofinalità* $\mathrm{cof}(I)$ è il minimo ordinale α tale che esiste $f\colon \alpha \to I$ illimitata superiormente.

Proposizione 1.1.14. Se α è un cardinale infinito, $\mathrm{cof}(2^\alpha) > \alpha$.

1.2 Tipi e Modelli Saturi

In logica classica (logica del prim'ordine) possiamo usare i connettivi per combinare diverse formule e formarne di nuove. Tuttavia, un singolo enunciato in logica classica ha una struttura forzatamente finitaria: ad esempio non può essere una congiunzione di una quantità infinita di altri enunciati. A titolo esemplificativo, potremmo voler esprimere l'esistenza di un oggetto che gode di un certo insieme infinito di proprietà con la scrittura

$$\exists x \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n(x) \tag{1.1}$$

ma questa non è una formula del prim'ordine. Esistono logiche più espressive, come le logiche infinitarie, trattate ad esempio in [5], in cui enunciati come quello precedente sono perfettamente legittimi. Il problema è che per queste logiche possono non valere risultati ampiamente utilizzati come il Teorema di Compattezza o il Teorema di Löwenheim-Skolem. Si può addirittura dimostrare (Teorema di Lindström) che se vogliamo avere a disposizione entrambi gli strumenti sopra citati, la logica più espressiva che possiamo utilizzare è proprio quella del prim'ordine.

Tuttavia nulla vieta di chiedere che una struttura realizzi un certo *insieme* di formule (o *teoria*) del prim'ordine, insieme che può a tutti gli effetti essere infinito. In un certo senso, possiamo pensare a una teoria del prim'ordine come a una congiunzione (possibilmente) infinita di formule. Questa maniera di procedere, comunque, non fornisce la stessa espressività disponibile in logica infinitaria, perché la congiunzione infinita avviene solo una volta disponibili le formule e non è disponibile nel processo ricorsivo di costruzione delle stesse.

Fortunatamente però, anche non potendo usare esplicitamente formule come la 1.1, c'è un modo di esprimere l'esistenza di un oggetto (o di una n-upla di oggetti) che soddisfi un certo insieme, possibilmente infinito, di proprietà in maniera analoga a quella in cui consideriamo "congiunzioni infinite" parlando di insiemi infiniti di formule e chiamando questi insiemi *teorie*. La nozione che ci serve è quella di *n-tipo*: se nel dare la nozione di teoria collezioniamo le formule che vorremmo congiungere in un insieme, nel dare quella di tipo ci liberiamo del quantificatore esistenziale scaricandone il "peso" sul linguaggio.

Definizione 1.2.1. Siano $\mathcal{M}$ una L-struttura, $A \subseteq M$ e p un insieme di $L_A \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$-formule (cioè di L_A-formule con variabili libere incluse in $\{v_1, \ldots, v_n\}$). Diciamo che p è un *n-tipo* con parametri da A se $p \cup \mathrm{Th}_A(\mathcal{M})$ è soddisfacibile o, equivalentemente, se esistono un'estensione elementare $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ e un $\vec{b} \in N$ tali che $\mathcal{N} \models p(\vec{b})$. Diciamo che p è un n-tipo *completo* se, data una qualunque $L_A \cup \{v_1, \ldots, v_n\}$-formula φ, si ha $\varphi \in p$ oppure $\neg\varphi \in p$. Indicheremo l'insieme degli n-tipi completi con parametri da A

con $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ e il tipo di una n-upla $\vec{m}$, cioè l'insieme $\{\varphi(\vec{v}) \mid \mathcal{M} \models \varphi(\vec{m})\} \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$ con $\mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(\vec{m}/A)$.

Diciamo che una L-struttura $\mathcal{M}$ *realizza* un n-tipo p se esiste una n-upla di suoi elementi che lo realizza. Più formalmente, se $\mathcal{M}$ può essere espansa a una $L \cup \{v_1, \dots, v_n\}$-struttura $\mathcal{M}'$ che ha lo stesso dominio, interpreta allo stesso modo i simboli di L e $\mathcal{M}' \models p$. $\mathcal{M}'$ interpreta quindi i simboli $v_1, \dots, v_n$ con elementi $m_1, \dots, m_n \in M$ tali che, per ogni formula $\varphi(v_1, \dots, v_n) \in p$, $\mathcal{M}' \models \varphi(v_1, \dots, v_n)$, il che è equivalente a chiedere che $\mathcal{M} \models \varphi(m_1, \dots, m_n)$.

Data una teoria completa T, possiamo mostrare che due suoi modelli non sono isomorfi esibendo un tipo realizzato in uno ma non nell'altro, perché chiaramente l'insieme dei tipi realizzati è stabile per isomorfismo. In generale si possono avere molte informazioni su un modello guardando quali tipi realizza e quali omette, ma questo studio va oltre gli scopi di questa tesi. Tuttavia faremo uso di una classe speciale di modelli, che prendono il nome di *saturi*:

Definizione 1.2.2. Siano $\mathcal{M}$ una L-struttura e κ un cardinale infinito. $\mathcal{M}$ è *κ-saturo* se, comunque dati $A \subseteq M$ di cardinalità $|A| < \kappa$ e $p \in S_n^{\mathcal{M}}(A)$, $\mathcal{M}$ realizza p. $\mathcal{M}$ è *saturo* (tout-court) se è $|M|$-saturo.

È chiaro che nessuna struttura $\mathcal{M}$ può essere $|M|^+$-satura, in quanto non potrà mai realizzare il tipo $\{v_1 \neq m \mid m \in M\}$. Un modello saturo, quindi, realizza più tipi possibile in relazione alla propria cardinalità. Nel prossimo capitolo ci servirà in maniera essenziale il seguente risultato, che dimostriamo subito:

Teorema 1.2.3. Siano $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ due L-strutture sature della stessa cardinalità $\kappa = |M| = |N|$ e tali che $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Allora $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Dimostrazione. Indicizziamo M come[2] $\{m_\alpha \mid \alpha < \kappa\}$ ed N come $\{n_\alpha \mid \alpha < k\}$ e costruiamo un isomorfismo $f \colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ tramite va e vieni.

Definiamo $f_0 = \emptyset$, che è elementare perché $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ e, per λ ordinale limite, $f_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_\alpha$, che è elementare perché unione di una catena di immersioni parziali elementari. Come ci si può aspettare, il nostro isomorfismo sarà $f = \bigcup_{\alpha<\kappa} f_\alpha$. I casi f_α in cui α è un ordinale successore verranno trattati separatamente in base alla parità: i passi corrispondente ad un ordinale pari assicureranno la surgettività e quelli dispari il fatto che $\mathrm{dom}(f) = M$.

Se $\alpha = \lambda + 2n + 1$, con λ ordinale limite ed $n \in \mathbb{N}$, poniamo $D = \mathrm{dom}(f_{\alpha-1})$ e sia $m \in M$ il più piccolo (nell'indicizzazione m_α) elemento

[2]In tutta la tesi i cardinali saranno pensati come ordinali iniziali, cioè come ordinali κ per cui per ogni $\alpha < \kappa$ non esistono bigezioni fra κ e α. Identificheremo inoltre ogni ordinale con l'insieme degli ordinali minori di lui.

in $M \setminus \mathrm{dom}(f_{\alpha-1})$. Vogliamo mostrare l'esistenza di un $\nu \in N$ tale che, al variare di $\vec{a} \in D$,

$$\mathcal{M} \models \varphi(m, \vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\nu, f_{\alpha-1}(\vec{a}))$$

Ma questo segue dal fatto che $\mathcal{N}$, in quanto saturo, realizza il tipo

$$\{f_{\alpha-1}(\varphi(v)) \mid \varphi(v) \in \mathrm{tp}_{\mathcal{M}}(m/D)\}$$

dove con $f(\varphi)$ indichiamo la formula ottenuta da φ rimpiazzando ogni occorenza di un parametro $a \in D$ con il corrispondente $f(a)$.

Siano dunque ν una realizzazione di questo tipo e $f_\alpha = f_{\alpha-1} \cup (m, \nu)$, che per costruzione è ancora un'immersione elementare parziale. Notiamo che l'iniettività di f_α segue dal fatto che $f_{\alpha-1}$ è induttivamente iniettiva e che il tipo usato per scegliere ν include l'insieme di formule

$$\{v \neq f_{\alpha-1}(m) \mid m \in \mathrm{dom}(f_{\alpha-1})\}$$

La costruzione nel caso $\alpha = \lambda + 2n + 2$ è simmetrica (ed usa la saturazione di $\mathcal{M}$). $\square$

Anche per quanto riguarda i modelli saturi la letteratura è particolarmente ricca, ma per questioni di spazio la nostra trattazione in merito sarà molto limitata. In ogni caso i modelli saturi godono di altre importanti proprietà: ad esempio, se nella dimostrazione precedente ignorassimo il passo corrispondente ad α pari, avremmo comunque dimostrato che $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$. Effettivamente, per dimostrare questo non ci serve la saturazione di $\mathcal{M}$, ci basta che la sua cardinalità non superi quella di $\mathcal{N}$ e che le due strutture siano elementarmente equivalenti. In altre parole, abbiamo dimostrato che un modello saturo $\mathcal{N}$ è *universale*, cioè vi possiamo immergere elementarmente qualunque altro modello della stessa teoria di cardinalità minore o uguale alla sua. Rimandiamo anche questa volta a [2], [3] o [7] per una trattazione estensiva.

Capitolo 2

Ultrafiltri α-buoni e Modelli Saturi

In questo capitolo analizziamo nel dettaglio la dimostrazione di Keisler del fatto che, assumendo l'Ipotesi Generalizzata del Continuo (GCH), ogni coppia di strutture elementarmente equivalenti ammette ultrapotenze isomorfe. La strategia di dimostrazione adottata è concettualmente semplice, e può essere riassunta come segue:

- Mostrare che le ultrapotenze lungo una particolare classe di ultrafiltri godono di κ-saturazione, per un certo κ.
- Sfruttare la GCH per mostrare che, per una scelta opportuna di κ, le ultrapotenze che andremo a costruire hanno cardinalità κ.
- Concludere usando il Teorema di unicità per modelli saturi (Teorema 1.2.3).

Prima di addentrarci nei dettagli, tuttavia, vedremo un caso particolarmente semplice, privo delle complicazioni tecniche che bisogna affrontare nel caso generale.

2.1 Linguaggi Numerabili

La classe di ultrafiltri che ci serve in questo caso gode di una proprietà molto semplice:

Definizione 2.1.1. Un ultrafiltro è *numerabilmente incompleto* se non è chiuso per intersezione numerabile.

Ad esempio qualunque ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ appartiene a questa classe, in quanto deve necessariamente contenere i segmenti finali[1]. È

[1] Un insieme di naturali è un *segmento finale* se è l'insieme dei naturali maggiori o uguali di un fissato $n \in \mathbb{N}$.

facile vedere che chiedere che un ultrafiltro sia numerabilmente incompleto è equivalente a chiedere che contenga una catena discendente con intersezione vuota.

Lemma 2.1.2. Se $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro su I numerabilmente incompleto, esiste $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tale che $I_n \supseteq I_{n+1}$ e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $\{J_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tale che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \notin \mathcal{U}$. A meno di sostituire J_n con $\bigcap_{m\leq n} J_m$ possiamo supporre $J_n \supseteq J_{n+1}$. Dato che $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n \notin \mathcal{U}$, per la proprietà di ultrafiltro $(I \setminus J) \in \mathcal{U}$, quindi è sufficiente definire $I_n = J_n \setminus J = J_n \cap (I \setminus J) \in \mathcal{U}$ e la famiglia $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ha le proprietà richieste. □

Il nostro intento è ora mostrare che le ultrapotenze lungo ultrafiltri numerabilmente incompleti sono $\aleph_1$-sature. Questo segue dal fatto che la stessa tesi è vera per ultraprodotti arbitrari:

Teorema 2.1.3. Siano L un linguaggio numerabile, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerabilmente incompleto su un insieme di indici I e $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ una famiglia di L-strutture. L'ultraprodotto $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/_{\mathcal{U}}$ è $\aleph_1$-saturo.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che, per ogni insieme numerabile di parametri $A \subseteq M$, $\mathcal{M}$ realizza tutti i tipi con parametri da A. Dato che $L \cup \{c_a \mid a \in A\}$ è ancora numerabile ed L è arbitrario, è sufficiente mostrare che $\mathcal{M}$ realizza tutti i tipi senza parametri.

Sia dunque $\Sigma(\vec{x})$ un insieme di formule finitamente realizzato in $\mathcal{M}$. Dato che L è numerabile, anche $\Sigma(\vec{x})$ lo è, quindi possiamo scrivere $\Sigma(\vec{x}) = \{\sigma_1(\vec{x}), \sigma_2(\vec{x}), \ldots\}$. Sia inoltre $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tale che $I_0 = I$, $I_n \supseteq I_{n+1}$ e $\bigcap I_n = \emptyset$, che esiste per il Lemma precedente. Definiamo $X_0 = I$ e, per $n > 0$,

$$X_n = I_n \cap \left\{ i \in I \,\middle|\, \mathcal{M}_i \models \exists \vec{x} \bigwedge_{j=1}^{n} \sigma_j(\vec{x}) \right\}$$

Per il Teorema di Łoś e il fatto che $\Sigma(\vec{x})$ è finitamente realizzato in $\mathcal{M}$, si ha $\forall n\ X_n \in \mathcal{U}$. Dato che $X_n \supseteq X_{n+1}$ e $\bigcap X_n = \emptyset$, è ben definito

$$n(i) = \max\{j \in I \mid i \in X_j\}$$

Consideriamo ora

$$y(i) = \begin{cases} \text{un arbitrario } \vec{m} \in M_i & \text{se} \quad n(i) = 0 \\ \text{un } \vec{m} \text{ tale che } \mathcal{M}_i \models \bigwedge_{j=1}^{n(i)} \sigma_j(\vec{m}) & \text{se} \quad n(i) > 0 \end{cases}$$

Se $n > 0$ e $i \in X_n$ si ha chiaramente $n \leq n(i)$, quindi $\mathcal{M}_i \models \sigma_n(y(i))$, e perciò

$$\forall n > 0 \ \ \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma_n(y(i))\} \supseteq X_n \in \mathcal{U}$$

e per il Teorema di Łoś $[y]_{\mathcal{U}}$ realizza $\Sigma(\vec{x})$ in $\mathcal{M}$. □

Ora che sappiamo che le ultrapotenze lungo questo tipo di ultrafiltri sono sempre $\aleph_1$-sature, è facile concludere utilizzando la CH e il Teorema 1.2.3.

Corollario 2.1.4. Siano L un linguaggio numerabile e $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ due L-strutture tali che $|M|, |N| \leq \aleph_1$. Assumendo la CH[2], sono equivalenti:

1. $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$
2. Per ogni coppia $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ di ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$,
$$\mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \cong \mathcal{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{V}$$
3. Esiste una coppia $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ di ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ tale che
$$\mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} \cong \mathcal{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{V}$$

Dimostrazione. (2)⇒(3) è ovvio e (3)⇒(1) è un banale corollario del Teorema di Łoś. Basta quindi dimostrare (1)⇒(2).

Dato che gli ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$ sono numerabilmente incompleti, per il Teorema precedente sia $\mathcal{A} = \mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ che $\mathcal{B} = \mathcal{N}^{\mathbb{N}}/\mathcal{V}$ sono strutture $\aleph_1$-sature. Inoltre, nelle nostre ipotesi,

$$|\mathcal{A}| \leq \left|M^{\mathbb{N}}\right| = \aleph_1^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = \aleph_1$$

e l'altra disuguaglianza segue dal fatto che una struttura numerabile non può essere $\aleph_1$-satura e che stiamo assumendo la CH. Il discorso per $\mathcal{B}$ è completamente analogo, quindi le due strutture hanno la stessa cardinalità; inoltre per il Teorema di Łoś $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ quindi, per il Teorema 1.2.3, $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. □

2.2 Ultrafiltri α-buoni

Se proviamo a riadattare la dimostrazione del Teorema 2.1.3 a linguaggi di cardinalità arbitraria ci scontriamo subito con l'impossibilità di considerare congiunzioni infinite di formule: servirebbe una maniera furba di considerare le parti finite di un tipo per poi assicurarsi che queste vengano realizzate tutte dallo stesso elemento. Purtroppo il fatto che un ultrafiltro sia numerabilmente incompleto non è sufficiente a renderlo adatto ai nostri scopi e sarà necessario introdurre una classe di ultrafiltri che godano di una proprietà più specifica. Per enunciarla abbiamo prima bisogno di dare qualche definizione.

Definizione 2.2.1. Una funzione $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathscr{P}(I)$ è *antimonotona* se $X \subseteq Y \Rightarrow f(X) \supseteq f(Y)$. È *antiadditiva* se $f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$.

[2]Senza CH il Corollario è falso. Si vedano [8] e [1].

Lemma 2.2.2. Ogni funzione antiadditiva è antimonotona.

Dimostrazione. Se $X \subseteq Y$ si ha

$$f(Y) = f\big((Y \setminus X) \cup X\big) = f(Y \setminus X) \cap f(X) \subseteq f(X)$$

$\square$

Definizione 2.2.3. Se α è un cardinale e I un insieme, definiamo un ordine parziale sull'insieme delle $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathscr{P}(I)$ in maniera che

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha)\ f(X) \subseteq g(X)$$

Chiaramente le definizioni precedenti vanno benissimo anche per funzioni con codominio ristretto a un particolare insieme di parti; in particolare nulla ci vieta di considerare funzioni il cui codominio sia un (ultra)filtro. Possiamo ora dare la definizione chiave.

Definizione 2.2.4. Sia α un cardinale. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ è *α-buono* se per ogni cardinale $\beta < \alpha$ ed ogni $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\beta) \to \mathcal{U}$ antimonotona esiste $g\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\beta) \to \mathcal{U}$ antiadditiva tale che $g \leq f$ (diremo che f si raffina a g).

Ovviamente se $\mathcal{U}$ è α-buono è κ-buono $\forall \kappa \leq \alpha$. Inoltre per dimostrare che un ultrafiltro è α^+ buono ci basta mostrare che si comporta bene su α. Più precisamente:

Lemma 2.2.5. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ è α^+-buono se e solo se ogni $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathcal{U}$ antimonotona si raffina ad una $g\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathcal{U}$ antiadditiva.

Dimostrazione. Per provare la freccia non ovvia, dati $\beta < \alpha$ e $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\beta) \to \mathcal{U}$ basta definire $f'\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathcal{U}$ come $f'(X) = f(X \cap \beta)$, verificare che è monotona, raffinarla ad una g' additiva e poi considerare come g la restrizione di g' a β. $\square$

Mentre l'esistenza di ultrafiltri numerabilmente incompleti è praticamente ovvia, non è affatto scontato che ne esistano di α-buoni. Il nostro prossimo obiettivo sarà quindi mostrare che

Teorema 2.2.6. Sia $\alpha = |I|$. Esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I numerabilmente incompleto e α^+-buono.

Questo Teorema è stato originalmente dimostrato da Keisler in [4] assumendo la GCH; tuttavia noi vedremo una dimostrazione che non ne fa uso, dovuta a Kunen e originariamente pubblicata in [6], e assumeremo ipotesi sull'esponenziazione cardinale solo in seguito. Cominciamo con un Lemma combinatorio.

Lemma 2.2.7. Dato α cardinale infinito, ogni famiglia di α insiemi ciascuno di cardinalità α si raffina ad una famiglia di insiemi *disgiunti* di cardinalità α. Più precisamente siano $|X| = \alpha$ e $\{Y_x \mid x \in X\}$ tale che $\forall x \in X \ |Y_x| = \alpha$. Allora esiste $\{Z_x \mid x \in X\}$ tale che $\forall x, x_0 \in X$

1. $Z_x \subseteq Y_x$
2. $|Z_x| = \alpha$
3. $x \neq x_0 \Rightarrow Z_x \cap Z_{x_0} = \emptyset$

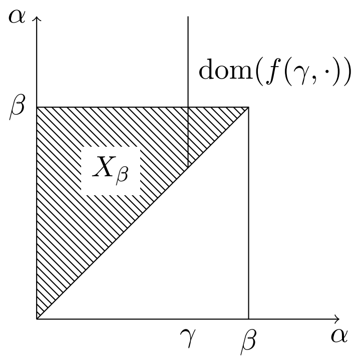
Dimostrazione. Sia (senza perdita di generalità) $X = \alpha$. Per ogni ordinale $\beta \leq \alpha$, definiamo

$$X_\beta = \{(\gamma, \delta) \mid \gamma \leq \delta < \beta\} \subseteq \beta \times \beta$$

Dato che α è un ordinale limite, abbiamo $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$. Vogliamo trovare una mappa iniettiva $f \colon X_\alpha \hookrightarrow \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$ tale che $f(\gamma, \delta) \in Y_\gamma$ per poi definire

$$Z_\gamma = \{f(\gamma, \delta) \mid \gamma \leq \delta < \alpha\}$$

e la famiglia $\{Z_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ ha chiaramente le proprietà richieste. Definiamo f per induzione transfinita come $\bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$, dove $f_\emptyset = \emptyset$, $f_\beta = \bigcup_{\delta<\beta} f_\delta$ se β è un ordinale limite, mentre data $f_\beta \colon X_\beta \hookrightarrow \{Y_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ la estendiamo scegliendo per ogni $\gamma \leq \beta$ un elemento $f_{\beta+1}(\gamma, \beta) \in (Y_\gamma \setminus f_\beta(X_\beta))$, cosa che è possibile fare perché $|X_\beta| < \alpha$ e $\forall \gamma \ |Y_\gamma| = \alpha$.



Questo rende chiaramente f iniettiva e conclude la dimostrazione. $\square$

Vogliamo ora costruire il nostro ultrafiltro α^+-buono e numerabilmente incompleto su α. L'idea sarà quella di partire da un filtro $\mathcal{F}_0$ generato da una catena discendente che ci assicuri la numerabile incompletezza, e successivamente estenderlo con degli adeguati sottoinsiemi di α. Questi insiemi saranno classi di equivalenza di opportune partizioni di α disposte in maniera *consistente* con $\mathcal{F}_0$. Precisiamo cosa intendiamo con *consistente*:

Definizione 2.2.8. Siano $\mathcal{F}$ un filtro proprio su α e Π una famiglia di partizioni di α, ciascuna delle quali con α classi di equivalenza. La coppia $(\Pi, \mathcal{F})$ è *consistente* se, $\forall X_0 \in \mathcal{F}$, e $\forall X_1, \ldots, X_n$ con $X_i \in P_i \in \Pi$ e $i \neq j \Rightarrow P_i \neq P_j$, si ha $\bigcap_{i=0}^{n} X_i \neq \emptyset$.

A livello intuitivo quindi ogni partizione di una siffatta famiglia Π, è "trasversale" a tutte le altre e agli elementi del filtro $\mathcal{F}_0$. Si pensi a titolo esemplificativo ad un quadrato partizionato prima con strisce verticali e poi con strisce orizzontali. Le classi di equivalenza delle partizioni in Π saranno quindi i "mattoni" con cui costruiremo il nostro ultrafiltro. Con il prossimo lemma mostreremo che è possibile attingere ad una riserva sufficiente di "mattoni"; data la natura piuttosto tecnica dello stesso, se si è interessati solo alla struttura generale della dimostrazione del Teorema 2.2.6, o se si preferisce sapere in anticipo dove si vuole andare a parare, è consigliabile leggere prima la dimostrazione del Teorema e in un secondo momento quella del Lemma.

Definizione 2.2.9. Un filtro è *uniforme* se tutti i suoi elementi hanno la stessa cardinalità.

Notazione 2.2.10. Se $\mathcal{F}$ è un filtro ed E è una famiglia di parti, indicheremo con $(\mathcal{F}, E)$ il filtro generato da $\mathcal{F} \cup E$.

Ricordiamo che il filtro generato da una famiglia di parti è il più piccolo filtro che la contiene, o equivalentemente la famiglia dei sovrainsiemi delle interesezioni finite della famiglia di partenza.

Lemma 2.2.11. Sia α un cardinale infinito.

1. Sia $\mathcal{F}$ un filtro uniforme su α generato da una $E \subseteq \mathcal{F}$ tale che $|E| \leq \alpha$. Esiste una famiglia Π di partizioni di α tale che $|\Pi| = 2^\alpha$, ogni partizione di Π ha α classi di equivalenza e $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente.
2. Se $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente e $J \subseteq \alpha$, allora $(\Pi, (\mathcal{F}, \{J\}))$ è consistente, oppure lo è $(\Pi', (\mathcal{F}, \{\alpha \setminus J\}))$ per una qualche $\Pi' \subseteq \Pi$ cofinita.
3. Se $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente, $p\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathcal{F}$ è antimonotona e $P \in \Pi$, esistono $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$ e $q\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \to \mathcal{F}'$ antiadditiva tali che $q \leq p$ e $(\Pi \setminus \{P\}, \mathcal{F}')$ è consistente.

Dimostrazione. 1. Sia $\{J_\beta \mid \beta < \alpha\}$ la collezione di tutte le intersezioni finite di elementi di E. Dato che $\mathcal{F}$ è uniforme, $\forall \beta < \alpha \ |J_\beta| = \alpha$. Raffiniamo questa famiglia ad una $\{I_\beta \mid \beta < \alpha\}$ di insiemi a due a due disgiunti usando il Lemma precedente. Sia ora

$$B = \{(s, r) \mid s \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha) \wedge r\colon \mathscr{P}(s) \to \alpha\}$$

Si ha $|B| = \alpha$. Sia ora (s_ξ, r_ξ), $\xi < \alpha$ un' "indicizzazione" di B, dove le virgolette indicano che non ci serve una mappa bigettiva, ma tale che

$$\forall \beta < \alpha\ B = \{(s_\xi, r_\xi) \mid \xi \in I_\beta\}$$

Visto che gli I_β sono a due a due disgiunti, basta considerare per ogni I_β una bigezione con B, unirle e, visto che vogliamo un' "indicizzazione" definita su tutto α, definirla $\emptyset$ fuori da $\bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta$.

Per ogni $J \subseteq \alpha$ definiamo ora $f_J \colon \alpha \to \alpha$

$$f_J(\xi) = \begin{cases} r_\xi(J \cap s_\xi) & \text{se } \xi \in \bigcup_{\beta<\alpha} I_\beta \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La nostra famiglia di partizioni sarà

$$\Pi = \left\{ \left\{ f_J^{-1}(\gamma) \mid \gamma < \alpha \right\} \,\middle|\, J \subseteq \alpha \right\}$$

Dimostriamo che $|\Pi| = |\{f_J \mid J \subseteq \alpha\}| = 2^\alpha$. Supponiamo $J_1 \neq J_2$ e, WLOG, $x \in J_1 \setminus J_2$. Siano $s = \{x\}$ ed $r = \{(\{x\}, \emptyset), (\emptyset, 1)\}$. Abbiamo $(s, r) \in B$ e quindi sarà $(s, r) = (s_\xi, r_\xi)$ per un qualche ξ. Ma allora $f_{J_1}(\xi) = r(J \cap s) = \emptyset$ mentre $f_{J_2}(\xi) = r(J_2 \cap s) = 1$, quindi $f_{J_1} \neq f_{J_2}$.

Mostriamo ora che, dati $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \alpha$ ordinali, e dati $J_1, \dots, J_n$ sottoinsiemi distinti di α, allora

$$\exists \xi \in I_\beta\ \forall 1 \leq i \leq n\ f_{J_i}(\xi) = \gamma_i$$

Questo garantirà la consistenza di $(\Pi, \mathcal{F})$.

A tale scopo, sia $s \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\alpha)$ tale che comunque presi $1 \leq i < j \leq n$ si abbia $s \cap J_i \neq s \cap J_j$ e sia $r \colon \mathscr{P}(s) \to \alpha$ tale che per $1 \leq i \leq n$ valga $r(J_i \cap s) = \gamma_i$. Per costruzione $\exists \xi \in I_\beta$ tale che $(s, r) = (s_\xi, r_\xi)$, e questo ξ è chiaramente quello cercato. Tra l'altro, abbiamo mostrato che ogni f_J è surgettiva: Π è quindi effettivamente una famiglia di partizioni ciascuna con α classi di equivalenza consistente con $\mathcal{F}$.

2. Se $(\Pi, (\mathcal{F}, \{J\}))$ non è consistente, vuol dire che esistono $X_0 \in \mathcal{F}$ e $X_i \in P_i \in \Pi$, $1 \leq i \leq n$ con le P_i a due a due distinte tali che

$$J \cap \bigcap_{i=0}^{n} X_i = \emptyset \tag{2.1}$$

Siano ora $\Pi' = \Pi \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$, $Q_1, \dots, Q_m$ elementi distinti di Π', $Y_0 \in \mathcal{F}$ e $Y_j \in Q_j$ per $1 \leq j \leq m$. Dato che per ipotesi $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente, si ha

$$\underbrace{X_0 \cap Y_0}_{\in \mathcal{F}} \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \neq \emptyset$$

e dato che per la (2.1) un elemento di questo insieme non può stare in J abbiamo che

$$(\alpha \setminus J) \cap X_0 \cap Y_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \neq \emptyset$$

Questo non implica la consistenza di $(\Pi, (\mathcal{F}, \{\alpha \setminus J\}))$ perché la scelta degli X_i non è arbitraria, tuttavia è ora immediato osservare che

$$(\alpha \setminus J) \cap Y_0 \cap \bigcap_{j=1}^{m} Y_j \neq \emptyset$$

e quindi $(\Pi', (\mathcal{F}, \{\alpha \setminus J\}))$ è consistente.

3. Indicizziamo in maniera iniettiva $P = \{X_\delta \mid \delta < \alpha\}$ e $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) = \{t_\delta \mid \delta < \alpha\}$. Per ogni $\delta < \alpha$ definiamo poi $q_\delta \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha)$ come

$$q_\delta(s) = \begin{cases} p(t_\delta) \cap X_\delta & \text{se} \quad s \subseteq t_\delta \\ \emptyset & \text{se} \quad s \not\subseteq t_\delta \end{cases}$$

e notiamo che:

(a) $q_\delta(s) \subseteq p(t_\delta)$ per definizione

(b) se $s \subseteq t_\delta$ si ha $q_\delta(s) \neq \emptyset$, dato che per ipotesi $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente, $p(t_\delta) \in \mathcal{F}$ e $X_\delta \in P \in \Pi$.

(c) $q_\delta(s_1 \cup s_2) = q_\delta(s_1) \cap q_\delta(s_2)$, perché $s_1 \cup s_2 \subseteq t_\delta \Leftrightarrow s_1 \subseteq t_\delta \wedge s_2 \subseteq t_\delta$, cioè ogni q_δ è antiadditiva

Definiamo quindi

$$q \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha) \qquad q(s) = \bigcup_{\delta < \alpha} q_\delta(s)$$

e notiamo che, siccome per antiadditività $t_\delta \supseteq s \Rightarrow p(t_\delta) \subseteq p(s)$ vale

$$q(s) = \bigcup_{\delta < \alpha} q_\delta(s) = \bigcup_{\substack{\delta < \alpha \\ t_\delta \supseteq s}} p(t_\delta) \cap X_\delta \subseteq p(s)$$

e dunque $q \leq p$. Inoltre, dato che P è una partizione, per $\delta \neq \delta'$ si ha $q_\delta(s) \cap q_{\delta'}(s) = \emptyset$; combinando questa cosa col fatto che, sempre perché P è una partizione, $\delta \neq \delta' \Rightarrow X_\delta \neq X_{\delta'}$ e che ogni q_δ è antiadditiva è facile vedere che anche q lo è.

Dato che volevamo che q fosse a valori in un filtro estensione di $\mathcal{F}$ consistente con $\Pi \setminus \{P\}$, dimostriamo che $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}, \mathrm{Imm}(q))$ lo è. Se infatti $s \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha)$, $X_0 \in \mathcal{F}, X_i \in P_i \in \Pi \setminus \{P\}$ per $1 \leq i \leq n$, con le P_i

distinte, dato che $s = t_\delta$ per un certo δ, si ha $q(s) \supseteq q_\delta(s) = p(t_\delta) \cap X_\delta$ e, dato che $X_\delta \in P \in \Pi$ e $(\Pi, \mathcal{F})$ è consistente,

$$\underbrace{X_\delta}_{\in P \in \Pi} \cap \underbrace{p(t_\delta) \cap X_0}_{\in \mathcal{F}} \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$$

e a maggior ragione

$$q(s) \cap X_0 \cap \bigcap_{i=1}^{n} X_i \neq \emptyset$$

$\square$

Se il primo punto di questo Lemma ci dice che possiamo sempre trovare abbastanza "sacchi di mattoni" che vanno bene per costruire il nostro ultrafiltro, il secondo ci dice che, se non possiamo usare questi mattoni per estendere un dato filtro con un particolare insieme, possiamo estenderlo con il suo complementare a patto di scartare un numero finito di sacchi dalla nostra riserva, e il terzo che possiamo effettivamente usare uno di questi sacchi per estendere il nostro filtro in maniera che una fissata funzione antimonotona si raffini ad una antiadditiva, il tutto facendo in modo che i mattoni rimanenti siano ancora utili per estensioni future. Mettendo insieme i pezzi siamo pronti a dimostrare il Teorema 2.2.6 che, ricordiamo, asserisce che se $|I| = \alpha$ esiste un ultrafiltro α^+-buono e numerabilmente incompleto su I.

Dimostrazione. Ancora una volta, assumiamo senza perdita di generalità $I = \alpha$. Sia $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di sottoinsiemi di α tali che

$$\forall n \in \mathbb{N}\ |I_n| = \alpha, \quad I_n \supseteq I_{n+1}, \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$$

ad esempio potremmo considerare, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \alpha \setminus \cup_{m \leq n} \{\lambda + m \mid \lambda < \alpha,\ \lambda \text{ ordinale limite}\}$$

Siano $\mathcal{F}_0$ il filtro (uniforme) generato da questa famiglia e, per il punto 1 del Lemma 2.2.11, Π_0 una famiglia di partizioni di α di cardinalità 2^α e consistente con $\mathcal{F}_0$. Costruiamo ora per induzione transfinita una rete $\{\Pi_\xi \mid \xi < 2^\alpha\}$ di famiglie di partizioni di α ed una $\{\mathcal{F}_\xi \mid \xi < 2^\alpha\}$ di filtri su α tali che:

1. per $\eta \leq \xi < 2^\alpha$ si abbia $F_\eta \subseteq F_\xi$ e $\Pi_\eta \supseteq \Pi_\xi$: ad ogni passo estendiamo il filtro e restringiamo la famiglia di partizioni;

2. $|\Pi_\xi| = 2^\alpha$: la cardinalità della famiglia di partizioni rimane comunque stabile, anzi

3. $|\Pi_\xi \setminus \Pi_{\xi+1}| \in \mathbb{N}$: ad ogni passo ne scartiamo solo un numero finito;
4. per λ limite $\Pi_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} \Pi_\eta$, e infine
5. $\forall \xi < 2^\alpha$ $(\Pi_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ è consistente.

Siano quindi $\{p_\xi \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathscr{P}(\alpha) \mid \xi < 2^\alpha\}$ un'indicizzazione delle funzioni antimonotone dalle parti finite di α alle parti di α e $\{J_\xi \mid \xi < 2^\alpha\}$ un'indicizzazione di $\mathscr{P}(\alpha)$. Supponiamo di aver definito induttivamente $(\Pi_\eta, \mathcal{F}_\eta)$ in maniera appropriata per tutti gli $\eta < \xi$. Se ξ è un ordinale limite, allora come ci si può aspettare sarà

$$\Pi_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} \Pi_\eta \qquad \mathcal{F}_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{F}_\eta$$

Dato che la definizione di consistenza coinvolge un numero finito di oggetti, in questo caso $(\Pi_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ "eredita" la consistenza dalle $(\Pi_\eta, \mathcal{F}_\eta)$ precedenti. Inoltre, dato che stiamo intersecando $\xi < 2^\alpha$ oggetti ognuno cofinito nel successivo, è anche chiaro che $|\Pi_\xi| = 2^\alpha$. I passi induttivi per ξ ordinale successore verranno trattati separatamente in base alla parità: i passi dispari serviranno ad assicurare la proprietà di ultrafiltro e quelli pari il fatto che sia α^+-buono.

Se $\xi = \lambda + 2n + 1$, con λ ordinale limite ed $n \in \mathbb{N}$, sia J il primo (nell'indicizzazione $\{J_\beta \mid \beta < 2^\alpha\}$) sottoinsieme di α tale che $J, (\alpha \setminus J) \notin \mathcal{F}_{\xi-1}$. Definiamo, grazie al punto 2 del Lemma 2.2.11 la coppia $(\Pi_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ in maniera che:

1. $|\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi| \in \mathbb{N}$ (in particolare $|\Pi_\xi| = 2^\alpha$)
2. $J \in \mathcal{F}_\xi \vee (\alpha \setminus J) \in \mathcal{F}_\xi$
3. $(\Pi_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ è consistente

Se $\xi = \lambda + 2n + 2$, con λ, n come prima, sia $p \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathcal{F}_{\xi-1}$ la prima (nell'indicizzazione $\{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$) funzione che non abbiamo ancora considerato. Grazie al punto 3 del Lemma 2.2.11, possiamo trovare Π_ξ, $\mathcal{F}_\xi$ e $q \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathcal{F}_\xi$ tali che:

1. $|\Pi_{\xi-1} \setminus \Pi_\xi| = 1$ (in particolare $|\Pi_\xi| = 2^\alpha$)
2. $q \leq p$ e q è antiadditiva
3. $\mathcal{F}_\xi = (\mathcal{F}_{\xi-1}, \mathrm{Imm}(q))$
4. $(\Pi_\xi, \mathcal{F}_\xi)$ è consistente

Basta adesso considerare $\mathcal{U} = \bigcup_{\xi<2^\alpha} F_\xi$, che è un ultrafiltro grazie ai passi dispari dell'induzione, ed è numerabilmente incompleto perché contiene la famiglia $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Inoltre, dato che $\mathrm{cof}(2^\alpha) > \alpha$ e $|\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha)| = \alpha$, l'immagine di ogni $p \colon \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\alpha) \to \mathcal{U}$ è contenuta in un $\mathcal{F}_\eta$ per $\eta < 2^\alpha$, e quindi $\mathcal{U}$ è α^+-buono grazie ai passi pari e al Lemma 2.2.5. $\square$

2.3 Ultrapotenze Sature

Ora che siamo certi dell'esistenza di ultrafiltri numerabilmente incompleti α-buoni possiamo usarli per generalizzare il Teorema 2.1.3.

Teorema 2.3.1. Sia α un cardinale infinito, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerabilmente incompleto α-buono su un insieme I ed L un linguaggio tale che $|L| < \alpha$. Se $\{\mathcal{M}_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di L-strutture, l'ultraprodotto $\mathcal{M} = \prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/_{\mathcal{U}}$ è α-saturo.

Dimostrazione. Per motivi analoghi a quelli esposti nella dimostrazione del Teorema 2.1.3, è sufficiente dimostrare che se $\mathcal{M}$ realizza ogni sottoinsieme finito di un certo insieme di L-formule $\Sigma(\vec{x})$, allora $\mathcal{M}$ realizza tutto $\Sigma(\vec{x})$.

Scegliamo anche questa volta una catena $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$, $I_0 = I$, $I_n \supseteq I_{n+1}$ e $\bigcap I_n = \emptyset$ e notiamo che $|\Sigma(\vec{x})| < \alpha$ perché $|L| < \alpha$. Definiamo poi $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\Sigma) \to \mathcal{U}$ come $f(\emptyset) = I$ e, per $\sigma \neq \emptyset$,

$$f(\sigma) = I_{|\sigma|} \cap \left\{ i \in I \;\middle|\; \mathcal{M}_i \models \exists\vec{x} \bigwedge_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j(\vec{x}) \right\}$$

dove $f(\sigma) \in \mathcal{U}$ per il fatto che $\Sigma(\vec{x})$ è finitamente realizzato e per il Teorema di Łoś. La f che abbiamo definito è antimonotona, perché se $\sigma \subseteq \tau$ si ha

$$I_{|\tau|} \subseteq I_{|\sigma|} \quad \text{e} \quad \models \bigwedge_{\tau_j \in \tau} \tau_j(\vec{x}) \to \bigwedge_{\sigma_j \in \sigma} \sigma_j(\vec{x})$$

quindi, dato che $\mathcal{U}$ è α-buono, possiamo raffinarla ad una $g \leq f$ antiadditiva. Ora, per $i \in I$, definiamo

$$s(i) = \{\sigma \in \Sigma \mid i \in g(\{\sigma\})\}$$

che fa comodo pensare come una parte delle σ realizzate in $\mathcal{M}_i$. Osserviamo che $|s(i)| \geq n \Rightarrow i \in I_n$, perché allora, se $s(i) \supseteq \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, per $j \leq n$ si ha $i \in g(\{\sigma_j\})$ e quindi, dato che g è antiadditiva,

$$i \in \bigcap_{j=1}^{n} g(\{\sigma_j\}) = g(\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}) \subseteq f(\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}) \subseteq I_n$$

Inoltre, dato che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$, $\forall i \in I \;\; |s(i)| \in \mathbb{N}$.

Finalmente, costruiamo $y(i)$ in maniera che $\mathcal{M} \models \Sigma([y]_{\mathcal{U}})$. Per definizione di s e costruzione di g si ha $\forall i \in I \; i \in f(s(i))$, dato che

$$i \in \bigcap \{g(\{\sigma\}) \mid \sigma \in s(i)\} = g(s(i)) \subseteq f(s(i))$$

e quindi per definizione di f possiamo scegliere $y(i) \in M_i$ tale che

$$\mathcal{M}_i \models \bigwedge_{\sigma_j \in s(i)} \sigma_j(y(i))$$

Ora, data una qualunque $\sigma \in \Sigma$, se $i \in g(\{\sigma\})$, si ha $\sigma \in s(i)$ e per quanto appena visto $\mathcal{M}_i \models \sigma(y(i))$. Dato che per costruzione $g(\{\sigma\}) \in \mathcal{U}$, per il Teorema di Łoś e la chiusura di $\mathcal{U}$ per sovrainsieme si ha $\mathcal{M} \models \sigma([y]_{\mathcal{U}})$ e, per arbitrarietà di σ, questo conclude. $\square$

Assumendo ora un'istanza della GCH, dimostriamo un risultato leggermente più forte del Teorema di Keisler-Shelah.

Teorema 2.3.2. Siano L un linguaggio e $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ due L-strutture e assumiamo $|L| \leq \alpha$, $|M|, |N| \leq \alpha^+ = 2^\alpha$. Se $|I| = \alpha$ e $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro α^+-buono numerabilmente incompleto su I, allora

$$\mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{A} = {}^{\mathcal{M}^I}\!\!/_{\mathcal{U}} \cong {}^{\mathcal{N}^I}\!\!/_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}$$

Dimostrazione. Per dimostrare la freccia non ovvia osserviamo che, per il Teorema precedente, sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$ sono α^+-saturi e hanno cardinalità al più $(\alpha^+)^\alpha = 2^\alpha = \alpha^+$ (e almeno $\alpha^+ = 2^\alpha$ per ragioni di saturazione). Inoltre sono elementarmente equivalenti perché $\mathcal{A} \equiv \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \equiv \mathcal{B}$, quindi sono isomorfi per il Teorema 1.2.3. $\square$

Per chiarezza rimarchiamo che la differenza fra il risultato precedente e il Teorema di Keisler-Shelah è che il secondo asserisce l'esistenza di ultrafiltro lungo il quale due modelli elementarmente equivalenti hanno ultrapotenze isomorfe, mentre il Teorema che abbiamo appena dimostrato dice che, assumendo la GCH, *qualunque* ultrafiltro α^+-buono numerabilmente incompleto dà luogo alla stessa (a meno di isomorfismo) ultrapotenza. Se questo risultato continui a valere anche supponendo che la GCH fallisca non è noto ma, come vedremo nel prossimo capitolo, è possibile dimostrare il Teorema di Keisler-Shelah anche evitando di assumere ipotesi sull'esponenziazione cardinale.

Concludiamo questo capitolo mostrando come il Teorema 2.1.3 segua a tutti gli effetti dal Teorema 2.3.1.

Teorema 2.3.3. Qualunque ultrafiltro è $\aleph_1$-buono.

Dimostrazione. Per il Lemma 2.2.5 ci basta mostrare che ogni funzione $f\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}$ si raffina ad una $g\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}$ antiadditiva.

Sia $h\colon \mathbb{N} \to \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ una numerazione delle parti finite dei naturali che, per ogni $A \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$, verifichi

$$h^{-1}(A) \leq 2^{1+\max A} \tag{2.2}$$

Un esempio di tale numerazione $h(n)$ è quella ottenuta scrivendo n in base 2 e intepretando questo numero come funzione indicatrice. Più precisamente

$$h\Big(\sum_{k=0}^{\infty} c_k 2^k\Big) = \bigcup_{c_k=1} \{k\}$$

Dato che i $c_k \in \{0,1\}$ sono univocamente determinati e definitivamente nulli la definizione è ben posta. Definiamo

$$g(A) = \bigcap_{i=0}^{2^{1+\max A}} f(h(i))$$

e notiamo che per la proprietà 2.2 si ha $g(A) \subseteq f(A)$, quindi $g \leq f$, e chiaramente per ogni A vale $g(A) \in \mathcal{U}$ per la chiusura di quest'ultimo per interserzione finita, per cui $g\colon \mathscr{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}$. Usando il fatto che $\max\{\max A, \max B\} = \max(A \cup B)$ si ha inoltre

$$g(A \cup B) = \bigcap_{i=0}^{2^{1+\max A \cup B}} f(h(i)) = g(A) \cap g(B)$$

per cui g è antiadditiva come volevamo. □

Non è difficile modificare la dimostrazione precedente per mostrare che ogni ultrafiltro α-completo, cioè stabile per meno di α intersezioni, è α^+-buono. Ricordiamo tuttavia che nella dimostrazione del Teorema 2.3.1 abbiamo avuto bisogno di un ultrafiltro che, oltre ad essere α-buono, fosse numerabilmente incompleto, per cui questo risultato non sostituisce il Teorema 2.2.6.

Capitolo 3

Il Teorema di Keisler-Shelah

In questo capitolo esaminiamo la dimostrazione di Shelah del Teorema centrale in questa tesi, apparsa originariamente in [9]. La dimostrazione in un certo senso ricalca quella precedente, ma evita il ricorso alla GCH tramite una costruzione più sottile: anche in questo caso infatti costruiremo l'ultrafiltro appropriato partendo da un'adeguata famiglia di partizioni e da un filtro molto semplice e aggiungendo a quest'ultimo gli insiemi che ci servono scegliendoli fra le classi di equivalenza delle precedenti ma, invece di mostrare l'esistenza di ultrafiltri che garantiscano proprietà di saturazione, fisseremo subito due strutture e costruiremo un ultrafiltro "su misura" che renda le rispettive ultrapotenze isomorfe. La dimostrazione principale è nella seconda parte del capitolo, preceduta da una sezione in cui dimostriamo i risultati tecnici necessari alla stessa e seguita da una in cui ne mostriamo alcune applicazioni.

3.1 Triple Consistenti

Il primo Lemma che dimostriamo è un risultato di aritmetica cardinale.

Lemma 3.1.1. Se λ è un cardinale infinito e μ è il minimo cardinale tale che $\lambda^\mu > \lambda$, allora

- $\mu \leq \mathrm{cof}(\lambda)$ (in particolare $\mu \leq \lambda$)
- μ è regolare.

Dimostrazione. Se $f\colon \mathrm{cof}(\lambda) \to \lambda$ è cofinale, per il Teorema di König si ha

$$\lambda \leq \sum_{\beta<\mathrm{cof}(\lambda)} f(\beta) < \prod_{\beta<\mathrm{cof}(\lambda)} \lambda = \lambda^{\mathrm{cof}(\lambda)}$$

Inoltre, ricordando che per definizione $\lambda^{<\mu} = \sup_{\alpha<\mu} \lambda^{\alpha}$ e fissata una qualsiasi $f\colon \operatorname{cof}(\mu) \to \mu$ cofinale, si ha

$$\lambda^{\mu} \leq \lambda^{\sum\limits_{\beta<\operatorname{cof}(\mu)} f(\beta)} \leq \prod_{\beta<\operatorname{cof}(\mu)} \lambda^{f(\beta)} \leq (\lambda^{<\mu})^{\operatorname{cof}(\mu)} \leq \lambda^{\mu \operatorname{cof}(\mu)} \leq \lambda^{\mu}$$

per cui

$$\lambda^{\mu} = \left(\lambda^{<\mu}\right)^{\operatorname{cof}(\mu)} = \left(\sup_{\beta<\mu} \lambda^{\beta}\right)^{\operatorname{cof}(\mu)} = \left(\sup_{\beta<\mu} \lambda\right)^{\operatorname{cof}(\mu)} = \lambda^{\operatorname{cof}(\mu)}$$

e $\operatorname{cof}(\mu) < \mu$ contraddirebbe la minimalità. □

D'ora in avanti λ sarà sempre un cardinale infinito e μ il minimo cardinale tale che $\lambda^{\mu} > \lambda$. La prossima definizione è centrale in tutta la costruzione esattamente come quella di coppia consistente nel Capitolo 2, e in effetti vi può essere in un certo senso ricondotta.

Definizione 3.1.2. Siano F un insieme di funzioni $f\colon \lambda \to \mu$, G un insieme di funzioni $g\colon \lambda \to \beta(g)$, con $\beta(g) < \mu$ cardinale, $\mathcal{D}$ un filtro su λ e κ un cardinale infinito. Diciamo che la tripla $(F, G, \mathcal{D})$ è *κ-consistente* se $\mathcal{D}$ è generato da un insieme $E \subseteq \mathcal{D}$ di cardinalità $|E| \leq \kappa$ e se, comunque dati

1. un cardinale $\beta < \mu$,
2. una rete $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$ di $f_\rho \in F$ distinte (cioè $\rho \neq \rho' \Rightarrow f_\rho \neq f_{\rho'}$),
3. una rete $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ di ordinali $\sigma_\rho < \mu$,
4. una $f \in F$ ed una $g \in G$,

l'insieme

$$\{\{\xi < \lambda \mid \forall \rho < \beta \ f_\rho(\xi) = \sigma_\rho,\ f(\xi) = g(\xi)\}\} \cup \mathcal{D}$$

genera un filtro proprio su λ (in particolare $\mathcal{D}$ non può essere il filtro improprio).

Come preannunciato la definizione di tripla consistente, anche se a una prima lettura può non essere evidente, ha molto in comune con quella di *coppia* consistente: se pensiamo alle $f_\rho = \sigma_\rho$ come a classi di equivalenza delle partizioni f_ρ l'analogia con la definizione di consistenza di una coppia $(\Pi, \mathcal{F})$ è immediata. In questo spirito, dimostriamo l'analogo del punto 1 del Lemma 2.2.11.

Lemma 3.1.3. Esiste una famiglia F di funzioni $f\colon \lambda \to \mu$ tale che $|F| = 2^{\lambda}$ e la tripla $(F, \emptyset, \{\lambda\})$ è μ-consistente.

Dimostrazione. Il filtro $\{\lambda\}$ è generato da un solo elemento, in particolare da meno di μ. Sia

$$H = \{(A, S, h) \mid A \subseteq \lambda, |A| < \mu,\ S \subseteq \mathscr{P}(A), |S| < \mu,\ h\colon S \to \mu\}$$

Per scelta di μ si ha $|\{A \subseteq \lambda \mid |A| < \mu\}| = \lambda^{<\mu} = \lambda$ e, fissato A di cardinalità $\alpha < \mu$,

$$|\{S \subseteq \mathscr{P}(A) \mid |S| < \mu\}| = (2^{\alpha})^{<\mu} \leq (\lambda^{\alpha})^{<\mu} = \lambda$$

mentre fissando S di cardinalità $\nu < \mu$, $|\{h\colon S \to \mu\}| = \mu^{\nu} \leq \lambda^{\nu} = \lambda$, per cui $|H| = \lambda$ e possiamo quindi indicizzare

$$H = \{(A_\xi, S_\xi, h_\xi) \mid \xi < \lambda\}$$

Per $B \subseteq \lambda$ e $\xi \in \lambda$ fissati, definiamo ora

$$f_B(\xi) = \begin{cases} h_\xi(B \cap A_\xi) & \text{se} \quad B \cap A_\xi \in S_\xi \\ \emptyset & \text{se} \quad B \cap A_\xi \notin S_\xi \end{cases}$$

e prendiamo $F = \{f_B \mid B \subseteq \lambda\}$, che ha la cardinalità richiesta perché, se $B \neq C$ e, senza perdita di generalità $x \in B \backslash C$, $f_B(\xi) \neq f_C(\xi)$, dove ξ è quello che indicizza la tripla (A, S, h) con $A = \{x\}$, $S = \{\{x\}\}$, $h = \{(\{x\}, 1)\}$.

Mostriamo ora che, dati $\beta < \mu$, $\{B_\rho \subseteq \lambda \mid \rho < \beta\}$, e $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ con i $\sigma_\rho < \mu$ ordinali

$$\left\{\xi < \lambda \mid \forall \rho < \beta\ f_{B_\rho}(\xi) = \sigma_\rho\right\} \neq \emptyset$$

A questo scopo prendiamo A tale che $\forall \rho \neq \rho'\ A \cap B_\rho \neq A \cap B_{\rho'}$ e $|A| < \mu$, $S = \{A \cap B_\rho \mid \rho < \beta\}$ e h tale che $h(A \cap B_\rho) = \sigma_\rho$. Anche in questo caso si ha $H \ni (A, S, h) = (A_\xi, S_\xi, h_\xi)$ e questo ξ testimonia che il nostro insieme è non vuoto. $\square$

Il prossimo Lemma raccoglie alcune proprietà di verifica immediata.

Lemma 3.1.4.

1. Se $\kappa < \gamma$ e $(F, G, \mathcal{D})$ è κ-consistente, è anche γ-consistente.

2. Supponiamo che per $\xi < \eta < \delta$ sia vero che:

   (a) $\kappa_\xi \leq \kappa$;

   (b) $(F_\xi, G_\xi, \mathcal{D}_\xi)$ è κ_ξ-consistente;

   (c) $F_\xi \supseteq F_\eta$, $G_\xi \subseteq G_\eta, \mathcal{D}_\xi \subseteq \mathcal{D}_\eta$;

   (d) $\mathrm{cof}(\delta) \leq \kappa$.

   Allora $\left(\bigcap_{\xi<\delta} F_\xi, \bigcup_{\xi<\delta} G_\xi, \bigcup_{\xi<\delta} \mathcal{D}_\xi\right)$ è κ-consistente.

3. Se $(F, G, \mathcal{D})$ è κ-consistente, $F' \subseteq F$ e $G' \subseteq G$, anche $(F', G', \mathcal{D})$ è κ-consistente.

Dimostrazione.

1. Nella definizione di κ-consistenza, κ interviene solo nel chiedere che $\mathcal{D}$ sia generato da una famiglia E tale che $|E| \leq \kappa$, e a maggior ragione $|E| \leq \gamma$.

2. L'unico fatto non banale è che $\bigcup_{\xi<\delta} \mathcal{D}_\xi$ sia generato da una famiglia E di cardinalità $|E| \leq \kappa$. Se $f\colon \kappa \to \delta$ è cofinale ed E_ν genera $\mathcal{D}_\nu$ ed ha cardinalità $|E_\nu| \leq \kappa_\nu \leq \kappa$, allora

$$|E| = \left| \bigcup_{\xi<\kappa} E_{f(\xi)} \right| \leq \sum_{\xi<\kappa} \kappa_{f(\xi)} \leq \kappa$$

3. Questo è ovvio dalla definizione di tripla consistente.

□

Dimostriamo ora che è possibile espandere la seconda componente di una tripla restringendo la prima in misura controllata. Si pensi a κ come a una quantità trascurabile relativamente all'uso che ne faremo.

Lemma 3.1.5. Sia G un insieme di funzioni da λ a cardinali più piccoli di μ tale che $|G| + \mu \leq \kappa$. Se $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ è κ-consistente, esiste $F' \subseteq F$ tale che $|F \setminus F'| \leq \kappa$ e la tripla $(F', G, \mathcal{D})$ è κ-consistente.

Dimostrazione. Dato che $|G| \leq \kappa$, ci basta dimostrare che $\forall g \in G\ \exists F_g \subseteq F$ di cardinalità $|F_g| \leq \kappa$ e tale che $(F \setminus F_g, \{g\}, \mathcal{D})$ è consistente, per poi prendere $F' = F \setminus \bigcup_{g\in G} F_g$.

Se supponiamo per assurdo che esista $g \in G$ tale che, per ogni $S \subseteq F$ di cardinalità $|S| \leq \kappa$, $(F \setminus S, \{g\}, \mathcal{D})$ non è κ-consistente, possiamo definire per $\xi < \kappa^+$ dei sottoinsiemi F_ξ, S_ξ tali che

1. $F_0 = F$

2. $F_{\xi+1} = F_\xi \setminus S_\xi$

3. per $\eta < \kappa^+$ ordinale limite, $F_\eta = \bigcap_{\xi<\eta} F_\xi$

4. $S_\xi \subseteq F_\xi$, $|S_\xi| \leq \kappa$ e $(F_\xi \setminus S_\xi, \{g\}, \mathcal{D})$ non è κ-consistente, cioè esistono un cardinale $\beta_\xi < \mu$, una rete $\{f^\xi_\rho \mid \rho < \beta\}$ di funzioni, una rete $\{\sigma^\xi_\rho \mid \rho < \beta\}$ di ordinali più piccoli di μ e una funzione f^ξ tali che $\{A_\xi\} \cup \mathcal{D}$ genera il filtro improprio, dove

$$A_\xi = \left\{ \nu < \lambda \mid \forall \rho < \beta_\xi\ f^\xi_\rho(\nu) = \sigma^\xi_\rho,\ f^\xi(\nu) = g(\nu) \right\}$$

Sia E una famiglia di cardinalità $|E| \leq \kappa$ che genera $\mathcal{D}$, che esiste per l'ipotesi di κ-consistenza di $(F, \emptyset, \mathcal{D})$. Possiamo trovare, per ogni $\xi < \kappa^+$, un $X_\xi \in E$ tale che $A_\xi \cap X_\xi = \emptyset$ e, siccome $|E| \leq \kappa$, possiamo anche trovare per pidgeonhole un $X \in E$ e una famiglia di κ^+ ordinali ξ tali che $A_\xi \cap X = \emptyset$. Assumeremo senza perdita di generalità che questo valga $\forall \xi \in \kappa^+$. Analogamente siccome abbiamo κ^+ cardinali β_ξ e per ciascuno di questi vale $\beta_\xi < \mu \leq \kappa$ possiamo assumere senza perdita di generalità, sempre passando dal pidgeonhole, che per ogni $\xi < \kappa^+$ sia $\beta_\xi = \beta < \mu$ per un certo β fissato.

Se $g\colon \lambda \to \gamma < \mu < \kappa^+$, consideriamo le famiglie

$$\left\{f^\xi_\rho \mid \xi < \gamma, \rho < \beta\right\} \cup \left\{f^\xi \mid \xi < \gamma\right\}, \qquad \left\{\sigma^\xi_\rho \mid \xi < \gamma, \rho < \beta\right\} \cup \left\{\xi \mid \xi < \gamma\right\}$$

e indicizziamole con la loro cardinalità $\beta + \gamma < \mu$. In questo modo, sfruttando la κ-consistenza di $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ e posto

$$A = \left\{\nu < \lambda \;\middle|\; \forall \xi < \gamma \; \forall \rho < \beta \; f^\xi_\rho(\nu) = \sigma^\xi_\rho, \; f^\xi(\nu) = \xi\right\}$$

abbiamo che il filtro generato da $\mathcal{D} \cup \{A\}$ è proprio, e in particolare $A \cap X \neq \emptyset$. Sia dunque $\nu \in A \cap X$. Per definizione di X dovremmo avere $\nu \notin A_\xi$ per ogni $\xi < \kappa^+$, ma $g(\nu) < \gamma < \kappa^+$ per cui, per definizione di A e degli A_ξ, otteniamo l'assurdo $\nu \in A_{g(\nu)}$. □

Mostriamo ora com'è possibile estendere il filtro, sempre scartando una quantità trascurabile di partizioni.

Lemma 3.1.6.
1. Se $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ è κ-consistente e $A \subseteq \lambda$, esiste $F' \subseteq F$ tale che $|F \setminus F'| < \mu$ e almeno una fra le triple $(F', \emptyset, (\mathcal{D}, \{A\}))$ e $(F', \emptyset, (\mathcal{D}, \{\lambda \setminus A\}))$ è κ-consistente.

2. Se $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ è κ-consistente, $\mu \leq \kappa$ e, per $\xi < \kappa$, $A_\xi \subseteq \lambda$, esistono $F' \subseteq F$ e un filtro $\mathcal{D}' \supseteq \mathcal{D}$ tali che $|F \setminus F'| \leq \kappa$, $(F', \emptyset, \mathcal{D}')$ è κ-consistente e $\forall \xi < \kappa$ si ha $A_\xi \in \mathcal{D}'$ oppure $(\lambda \setminus A_\xi) \in \mathcal{D}'$.

Dimostrazione.
1. Se E genera $\mathcal{D}$ e $|E| \leq \kappa$, aggiungere un insieme ad E è — per quanto riguarda la cardinalità — innocuo. Supponiamo che esistano quindi $\beta < \mu$, $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$, $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ tali che, posto

$$B = \{\xi < \lambda \mid \forall \rho < \beta \; f_\rho(\xi) = \sigma_\rho\}$$

si abbia $B \cap X \cap A = \emptyset$ per un qualche $X \in E$. Poniamo $F' = F \setminus \{f_\rho \mid \rho < \beta\}$ e mostriamone la κ-consistenza con $\emptyset$ e $(\mathcal{D}, \{\lambda \setminus A\})$. Prendiamo quindi $\beta' < \mu$, $\left\{f'_\rho \mid \rho < \beta'\right\}$, $\left\{\sigma'_\rho \mid \rho < \beta'\right\}$ e consideriamo

$$B' = \left\{\xi < \lambda \mid \forall \rho < \beta' \; f'_\rho(\xi) = \sigma'_\rho\right\}$$

Per consistenza di $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ si ha, comunque preso $Y \in \mathcal{D}$,

$$B \cap B' \cap X \cap Y \neq \emptyset$$

e, dato che $B \cap X \cap A = \emptyset$, si ha

$$B \cap B' \cap X \cap Y \subseteq \lambda \setminus A$$

e in particolare

$$B' \cap Y \cap (\lambda \setminus A) \neq \emptyset$$

2. Basta iterare il punto precedente usando il punto 2 del Lemma 3.1.4.

□

3.2 Dimostrazione del Teorema di Keisler-Shelah

Prima di dimostrare il Teorema principale, ci serve un ultimo Lemma, che potremmo enunciare e dimostrare (e che useremo) per generiche $\varphi_\xi(x, y_1, \ldots, y_{n_\xi})$. Per evitare di appesantire troppo la notazione, ci limiteremo al caso $n_\xi = 1$.

Lemma 3.2.1. Siano $\mathcal{M}$ una L-struttura tale che $|M| < \mu$, $(F, \emptyset, \mathcal{D})$ una tripla κ-consistente, $\{\varphi_\xi(x, y) \mid \xi < \kappa\}$ un insieme di L-formule chiuso per congiunzione, e $\left\{m^\xi \mid \xi < \kappa\right\}$ una famiglia di funzioni $m^\xi \colon \lambda \to M$. Se, $\forall \xi < \kappa$, si ha

$$\left\{\nu < \lambda \,\middle|\, \mathcal{M} \models \exists x \; \varphi_\xi(x, m^\xi(\nu))\right\} \in \mathcal{D}$$

allora esistono $m \colon \lambda \to M$, $F' \subseteq F$ e $\mathcal{D}' \supseteq \mathcal{D}$ tali che $|F \setminus F'| \leq \kappa$, $(F', \emptyset, \mathcal{D}')$ è consistente e, $\forall \xi < \kappa$,

$$\left\{\nu < \lambda \,\middle|\, \mathcal{M} \models \varphi_\xi(m(\nu), m^\xi(\nu))\right\} \in \mathcal{D}'$$

Dimostrazione. Sia $M = \{m_\xi \mid \xi < \alpha\}$, dove $\alpha = |M|$. Per $\xi < \kappa$ definiamo $g_\xi \colon \lambda \to \alpha$ come

$$g_\xi(\nu) = \begin{cases} \min\left\{\eta \mid \mathcal{M} \models \varphi_\xi(m_\eta, m^\xi(\nu))\right\} & \text{se esiste} \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e definiamo $G = \{g_\xi \mid \xi < \kappa\}$. Dato che $\mu + |G| \leq \kappa$, per il Lemma 3.1.5 esiste $\bar{F}$ tale che $\left|F \setminus \bar{F}\right| \leq \kappa$ e $(\bar{F}, G, \mathcal{D})$ è consistente. Scegliamo ora $f \in \bar{F}$ e definiamo $m \colon \lambda \to M$ come

$$m(\nu) = \begin{cases} m_{f(\nu)} & \text{se } f(\nu) < \alpha \\ m_0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e, per $\xi < \kappa$,

$$B_\xi = \left\{\nu < \lambda \,\middle|\, \mathcal{M} \models \varphi_\xi(m(\nu), m^\xi(\nu))\right\}$$

Siano ora $F' = \bar{F} \setminus \{f\}$ e $\mathcal{D}'$ il filtro generato dall'unione (di cardinalità al più κ) $\mathcal{D} \cup \{B_\xi \mid \xi < \kappa\}$. Per concludere è sufficiente mostrare che $(F', \emptyset, \mathcal{D}')$ è κ-consistente. Dati, come al solito, $\beta < \mu$, $\{f_\rho \mid \rho < \beta\}$, $\{\sigma_\rho \mid \rho < \beta\}$ poniamo

$$B = \{\nu < \lambda \mid \forall \rho < \beta \; f_\rho(\nu) = \sigma_\rho\}$$

e consideriamo dei generici $X \in \mathcal{D}$ e B_ξ[1]. Ricordando che $f \in \bar{F}$, $g_\xi \in G$ e che la tripla $(\bar{F}, G, \mathcal{D})$ è consistente, abbiamo che

$$\bar{B} = \{\nu < \lambda \mid \forall \rho < \beta \; f_\rho(\nu) = \sigma_\rho, \; f(\nu) = g_\xi(\nu)\}$$

è consistente con $\mathcal{D}$, per cui $\bar{B} \cap X \neq \emptyset$. Per definizione di g_ξ e B_ξ, si ha $\bar{B} \subseteq B \cap B_\xi$, per cui $B \cap X \cap B_\xi \neq \emptyset$ e $(F', \emptyset, \mathcal{D}')$ è κ-consistente. □

Ora abbiamo tutti gli strumenti per affrontare la dimostrazione centrale.

Teorema 3.2.2 (Keisler-Shelah)**.** Due L-strutture sono elementarmente equivalenti se e solo se hanno ultrapotenze isomorfe.

Dimostrazione. Il "se" è ovvio. Viceversa, siano $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ e λ, μ due cardinali infiniti tali che $|M| + |N| < \mu$ e μ è il minimo per cui $\lambda^\mu > \lambda$, ad esempio $\lambda = 2^{|M|+|N|}$. Dato che $2^{|M|} \leq \lambda^{|M|} = \lambda$, possiamo assumere senza perdita di generalità che $|L| \leq \lambda$. Costruiremo per induzione transfinita sugli ordinali $\rho < 2^\lambda$ un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su λ e un isomorfismo tra $\mathcal{M}^\lambda/\mathcal{U}$ e $\mathcal{N}^\lambda/\mathcal{U}$.

Siano, per il Lemma 3.1.3 e per il punto 1 del Lemma 3.1.4 (usando il fatto che $\mu \leq \lambda$), $\mathcal{D}_0 = \{\lambda\}$ ed F_0 tale che $|F_0| = 2^\lambda$ e $(F_0, \emptyset, \mathcal{D}_0)$ è λ-consistente. Costruiamo ora due reti $\{F_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ e $\{\mathcal{D}_\rho \mid \rho < 2^\lambda\}$ in maniera che

1. (a) per $\rho < \sigma < 2^\lambda$ si abbia $F_\rho \supseteq F_\sigma$ e $\mathcal{D}_\rho \subseteq \mathcal{D}_\sigma$
   (b) per η ordinale limite $F_\eta = \bigcap_{\rho<\eta} F_\rho$ e $\mathcal{D}_\eta = \bigcup_{\rho<\eta} \mathcal{D}_\rho$
   (c) $|F_0 \setminus F_\rho| \leq \lambda + |\rho|$, e in particolare $|F_\rho| = 2^\lambda$
   (d) $(F_\rho, \emptyset, \mathcal{D}_\rho)$ è $\lambda + |\rho|$-consistente
   (e) fissato un qualunque sottoinsieme di λ, uno fra lui e il suo complementare appartiene a $\mathcal{D}_\rho$ per un qualche ρ.

Il nostro ultrafiltro sarà $\mathcal{U} = \bigcup_{\rho<2^\lambda} \mathcal{D}_\rho$. Costruiremo inoltre

$$\left\{m_\rho \colon \lambda \to M \;\middle|\; \rho < 2^\lambda\right\} \text{ e } \left\{n_\rho \colon \lambda \to N \;\middle|\; \rho < 2^\lambda\right\}$$

in maniera che, oltre ad essere $\{m_\rho \mid \rho < 2^\lambda\} = M^\lambda$ e $\{n_\rho \mid \rho < 2^\lambda\} = N^\lambda$, valgano

[1] È sufficiente considerare un solo B_ξ grazie alla chiusura per congiunzioni delle φ_ξ.

2. per ogni $\xi < 2^\lambda$, ogni L-formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ed ogni $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$, con $\rho_i < \xi$,
$$\{\nu < \lambda \mid \mathcal{M} \models \varphi(m_{\rho_1}(\nu), \ldots, m_{\rho_r}(\nu))\} \in \mathcal{D}_\xi$$
oppure
$$\{\nu < \lambda \mid \mathcal{M} \models \neg\varphi(m_{\rho_1}(\nu), \ldots, m_{\rho_r}(\nu))\} \in \mathcal{D}_\xi$$
3. per ogni $\xi < 2^\lambda$, ogni L-formula $\varphi(x_1, \ldots, x_r)$ ed ogni $(\rho_1, \ldots, \rho_r)$, con $\rho_i < \xi$,
$$\{\nu < \lambda \mid \mathcal{M} \models \varphi(m_{\rho_1}(\nu), \ldots, m_{\rho_r}(\nu))\} \in \mathcal{D}_\xi$$
se e solo se
$$\{\nu < \lambda \mid \mathcal{N} \models \varphi(n_{\rho_1}(\nu), \ldots, n_{\rho_r}(\nu))\} \in \mathcal{D}_\xi$$

Per gli ordinali limite i punti 2 e 3 sono automaticamente soddisfatti grazie all'ipotesi induttiva, e il punto 1 segue dal Lemma 3.1.4 e dal punto 1 del Lemma 3.1.6. Tramite va e vieni, suddividiamo gli ordinali succesore in pari e dispari in maniera da assicurare nei passi dispari di esaurire tutto M e nei passi pari di esaurire N. Dato che la situazione è perfettamente simmetrica, occupiamoci del primo caso.

Siano quindi $\xi = \sigma + 1$ e m_σ il primo elemento[2] di M^λ non ancora nella lista $\{m_\rho \mid \rho < \sigma\}$ e cerchiamo $F_{\sigma+1}, \mathcal{D}_{\sigma+1}, n_\sigma$ che soddisfino i nostri requisiti. Definiamo, per ogni L-formula $\varphi(x, y_1, \ldots, y_r)$ ed r-upla di ordinali $\rho_1, \ldots, \rho_r < \sigma$ l'insieme

$$X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_r) = \{\nu < \lambda \mid \mathcal{M} \models \varphi(m_\sigma(\nu), m_{\rho_1}(\nu), \ldots, m_{\rho_r}(\nu))\}$$

dato che $|L| \leq \lambda$, i possibili diversi X sono al più $\lambda + |\sigma|$. Dato che $(F_\sigma, \emptyset, \mathcal{D}_\sigma)$ è per ipotesi $\lambda + |\sigma|$-consistente, per il punto 2 del Lemma 3.1.6 possiamo trovare $F' \subseteq F_\sigma$, $\mathcal{D}' \supseteq \mathcal{D}_\sigma$ tali che $|F_\sigma \setminus F'| \leq \lambda + |\sigma|$, $(F', \emptyset, \mathcal{D}')$ è $\lambda + |\sigma|$-consistente e, per ogni $X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_r)$, o lui o il suo complementare appartengono a $\mathcal{D}'$. Notiamo che, se

$$\Gamma = \left\{\varphi(x, m_{\rho_1}, \ldots, m_{\rho_r}) \mid X(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_r) \in \mathcal{D}'\right\}$$

allora $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$. Per ogni $\varphi \in \Gamma$ definiamo ora

$$Y(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_r) = \{\nu < \lambda \mid \mathcal{M} \models \exists x\ \varphi(x, m_{\rho_1}(\nu), \ldots, m_{\rho_r}(\nu))\}$$

che per costruzione appartiene a $\mathcal{D}'$ in quanto sovrainsieme del corrispondente X. Anche questa volta, la cardinalità dell'insieme dei possibili Y è al più $\lambda + |\sigma|$. Adesso consideriamo

$$Z(\varphi, \rho_1, \ldots, \rho_r) = \{\nu < \lambda \mid \mathcal{N} \models \exists x\ \varphi(x, n_{\rho_1}(\nu), \ldots, n_{\rho_r}(\nu))\}$$

[2] Secondo un buon ordinamento ausiliario a cui non diamo un nome per evitare di appesantire ulteriormente la notazione.

Se $Z \notin \mathcal{D}'$, a maggior ragione $Z \notin \mathcal{D}_\sigma$, e per ipotesi induttiva, usando la 3, avremmo $Y \notin D_\sigma$. Ma allora per la 2 $(\lambda \setminus Y) \in \mathcal{D}_\sigma \subseteq \mathcal{D}'$ e questo, ricordando che una tripla non può essere consistente se il filtro è improprio, è assurdo. Quindi $Z \in \mathcal{D}'$ e, per il Lemma precedente, esistono $n_\sigma \colon \lambda \to N$, $F_{\sigma+1} \subseteq F'$, $\mathcal{D}_{\sigma+1} \supseteq \mathcal{D}'$ tali che $|F' \setminus F_{\sigma+1}| \leq \lambda + |\sigma|$, $(F_{\sigma+1}, \emptyset, \mathcal{D}_{\sigma+1})$ è consistente e, per ogni $\varphi(x, m_{\rho_1}, \ldots, m_{\rho_r}) \in \Gamma$,

$$\{\nu < \lambda \mid \mathcal{N} \models \varphi(n_\sigma(\nu), n_{\rho_1}(\nu), \ldots, n_{\rho_r}(\nu))\} \in \mathcal{D}_{\sigma+1}$$

Per costruzione di $\mathcal{D}'$ il suo sovrainsieme $\mathcal{D}_{\sigma+1}$ soddisfa la 2. Se ora $\varphi(x, m_{\vec{\rho}}) \in \Gamma$, per costruzione la 3 vale per $\varphi, \sigma, \vec{\rho}$. Se $\varphi \notin \Gamma$ allora $\neg\varphi \in \Gamma$, per cui la 3 vale per $\neg\varphi, \sigma, \vec{\rho}$, e di conseguenza anche per $\varphi, \sigma, \vec{\rho}$.

Ripetendo il discorso simmetricamente per gli n_σ abbiamo completato il passo induttivo; ci resta da verificare che $\mathcal{U} = \bigcup_{\rho < 2^\lambda} \mathcal{D}_\rho$ sia un ultrafiltro. Per $A \subseteq \lambda$ indichiamo con $\chi_A \colon \lambda \to M$ la composizione della funzione indicatrice di A con $\{(0, m_0), (1, m_1)\}$, per degli elementi $m_0 \neq m_1$ di M distinti[3]. Chiaramente si ha

$$A = \{\nu \mid \chi_A(\nu) = \chi_\lambda(\nu)\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \chi_A(\nu) = \chi_\lambda(\nu)$$

e quindi per la 2 si ha che $\mathcal{U}$ è effetivamente un ultrafiltro. Inoltre la mappa $[m_\rho]_\mathcal{U} \mapsto [n_\rho]_\mathcal{U}$ è per costruzione un'immersione elementare bigettiva, quindi un isomorfismo, fra ${}^{\mathcal{M}^\lambda}\!/\!_{\mathcal{U}}$ e ${}^{\mathcal{N}^\lambda}\!/\!_{\mathcal{U}}$. □

3.3 Conseguenze

Un corollario immediato del Teorema di Keisler-Shelah è il seguente:

Teorema 3.3.1 (di Frayne)**.** Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ due L-strutture. Allora $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ se e solo se esistono un ultrafiltro $\mathcal{U}$ e un'immersione elementare $\mathcal{M} \preceq {}^{\mathcal{N}^I}\!/\!_{\mathcal{U}}$.

Dimostrazione. Se $\mathcal{M}$ si immerge elementarmente in un'ultrapotenza di $\mathcal{N}$ per il Teorema di Łoś queste sono elementarmente equivalenti. Viceversa, per il Teorema di Keisler-Shelah, se $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ esistono I e $\mathcal{U}$ ultrafiltro su I tali che ${}^{\mathcal{M}^I}\!/\!_{\mathcal{U}} \cong {}^{\mathcal{N}^I}\!/\!_{\mathcal{U}}$. Componendo questo isomorfismo con l'immersione naturale $\mathcal{M} \preceq {}^{\mathcal{M}^I}\!/\!_{\mathcal{U}}$ otteniamo l'immersione cercata. □

Inoltre, dato che per parlare di strutture, ultrapotenze e isomorfismi non sono necessarie nozioni sintattiche come quella di "formula", il Teorema di Keisler-Shelah fornisce una caratterizzazione puramente algebrica del concetto di equivalenza elementare. Questo ci permette di caratterizzare algebricamente un'altra nozione legata al concetto di "teoria", precisamente quella di *classe elementare*. Grazie a questa caratterizzazione sarà possibile

[3]Se $|M| = 1$ il problema si banalizza.

dimostrare in poche righe il risultato classico noto col nome di Teorema di Interpolazione di Craig, la cui dimostrazione originale è molto più macchinosa di quella che forniremo in queste pagine.

Classi Elementari

Definizione 3.3.2. Una classe di L-strutture è *elementare* se è la classe dei modelli di una certa L-teoria T. È una *classe elementare di base* se è la classe dei modelli di una fissata L-formula φ.

A meno di congiunzioni, quindi, una classe elementare di base è la classe dei modelli di una teoria finita. Nel resto del capitolo intenderemo con *complementare* di una classe di L-strutture il suo complemento rispetto alla classe di tutte le L-strutture.

Teorema 3.3.3. Sia K una classe di L-strutture. Allora:

1. K è elementare se e solo se è chiusa per ultraprodotti ed equivalenza elementare;
2. K è elementare di base se e solo se sia K che la sua complementare sono chiuse per ultraprodotti ed equivalenza elementare. In particolare se e solo se anche la sua complementare è una classe elementare.

Dimostrazione. 1. Che ogni classe elementare è chiusa per equivalenza elementare è ovvio, e che è chiusa per ultraprodotti è una banale conseguenza del Teorema di Łoś. Supponiamo ora che K sia chiusa per ultraprodotti ed equivalenza elementare, e sia

$$T = \{\varphi \mid \forall \mathcal{M} \in K \ \mathcal{M} \models \varphi\}$$

Dato ora $\mathcal{N} \models T$, siano $\Sigma = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ e $I = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\Sigma)$. Dato $i = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\} \in I$, esiste sicuramente $\mathcal{M}_i \in K$ tale che $\mathcal{M}_i \models i$, altrimenti per definizione di T ed $\mathcal{N}$ si avrebbe $\mathcal{N} \models \neg \bigwedge_{j=1}^{r} \sigma_j \in T$. Scegliamo quindi un $\mathcal{M}_i \models i$ per ogni $i \in I$. Siano ora

$$\hat{\sigma} = \{i \in I \mid \sigma \in i\} \qquad E = \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\}$$

Dato che $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\} \in \bigcap_{j=1}^{r} \hat{\sigma_j}$, la famiglia E ha la FIP, cioè le sue intersezioni finite sono non vuote, e può essere quindi estesa ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Per costruzione, data una qualunque $\sigma \in \Sigma$, si ha

$$\{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \sigma\} \supseteq \hat{\sigma} \in \mathcal{U}$$

e quindi, per il Teorema di Łoś,

$$\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i / \mathcal{U} = \mathcal{A} \models \Sigma$$

dato che K è chiusa per ultraprodotti, $\mathcal{A} \in K$. Ma K è chiusa anche per equivalenza elementare e, dato che $\mathcal{A} \models \Sigma$, si ha $\mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$ e quindi $\mathcal{N} \in K$.

2. Se K è la classe dei modelli di φ, la sua complementare è la classe dei modelli di $\neg\varphi$, e per il punto precedente entrambe sono chiuse per equivalenza elementare ed ultraprodotti. Viceversa, supponiamo che entrambe soddisfino i nostri requisiti di chiusura e, usando il punto precedente, sia T la teoria i cui modelli formano la complementare di K. Supponiamo che

$$\forall i \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(T)\ \exists \mathcal{M}_i \in K\ \mathcal{M}_i \models i$$

allora, esattamente come abbiamo fatto nel punto precedente, possiamo trovare un ultraprodotto $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/_{\mathcal{U}} = \mathcal{A} \in K$, e questo è assurdo perché $\mathcal{A} \models T$. Si ha quindi

$$\exists i \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(T)\ \forall \mathcal{M} \in K\ \mathcal{M} \models \neg \bigwedge i$$

per cui gli elementi di K sono modelli di $\neg \bigwedge i$. Inoltre, dato che $\bigwedge i \in T$, si ha $\mathcal{M} \models \neg \bigwedge i \Rightarrow \mathcal{M} \in K$ e questo conclude.

□

Usando nel Teorema precedente la caratterizzazione dell'equivalenza elementare data dal Teorema di Keisler-Shelah otteniamo il seguente

Corollario 3.3.4. Sia K una classe di L-strutture:

1. K è elementare se e solo se è chiusa per ultraprodotti e isomorfismi e la sua complementare è chiusa per ultrapotenze;

2. K è elementare di base se e solo se sia lei che la sua complementare sono chiuse per ultraprodotti e isomorfismi.

Dimostrazione. 1. Se K è la classe dei modelli di T e $\mathcal{M} \notin K$, si ha $\mathcal{M} \not\models T$ e, data $\mathcal{A}$ un'ultrapotenza di $\mathcal{M}$, questa le è elementarmente equivalente sempre il Teorema di Łoś, per cui $\mathcal{A} \not\models T$ e $\mathcal{A} \notin K$; la chiusura di K per isomorfismi e ultrapotenze è ovvia. Se invece K è come nelle nostre ipotesi per il Teorema precedente è sufficiente mostrare che è chiusa per equivalenza elementare. Supponiamo quindi per assurdo che sia

$$K \ni \mathcal{M} \equiv \mathcal{N} \notin K$$

Per il Teorema di Keisler-Shelah esistono due ultrapotenze isomorfe $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ rispettivamente di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$. Per la chiusura di K per ultraprodotti si ha $\mathcal{A} \in K$, e per la chiusura per isomorfismi quindi $\mathcal{B} \in K$. Tuttavia $\mathcal{B}$ è un'ultrapotenza di $\mathcal{N} \notin K$ e questo contraddice le nostre ipotesi.

2. K è elementare di base se e solo se la sua complementare lo è, quindi per il punto precedente entrambe sono chiuse per ultraprodotti ed isomorfismi. Se viceversa le due classi sono chiuse per ultraprodotti ed isomorfismi, sono ovviamente chiuse per ultrapotenze, quindi per il punto precedente sono elementari ed essendo una la complementare dell'altra sono elementari di base.

□

Un esempio di applicazione dei risultati precedenti è il seguente:

Corollario 3.3.5. La Teoria dei campi di caratteristica 0 non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione. Dato che una Teoria è finitamente assiomatizzabile se e solo se la classe dei suoi modelli è elementare di base, per la caratterizzazione precedente ci basta mostrare che la sua classe complementare non è chiusa per ultraprodotti. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$, e sia

$$\mathcal{M} = {\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} {}^{\mathbb{Z}}\!/_{p_n\mathbb{Z}}\right)}\Big/_{\mathcal{U}}$$

dove p_n è l'n-esimo primo, che è un campo per il Teorema di Łoś. Sempre per il Teorema di Łoś, dato che, per ogni naturale m, la formula

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p_m \text{ volte}} \neq 0$$

è vera in ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{p_n\mathbb{Z}}$ per cofiniti n, $\mathcal{M}$ ha caratteristica 0. □

Interpolazione e Definibilità

Vediamo ora come dalla precedente caratterizzazione segua il Teorema di Interpolazione di Craig. La dimostrazione si base sul seguente risultato intermedio:

Teorema 3.3.6 (di Separazione)**.** Siano K, H due classi disgiunte di L-strutture chiuse per isomorfismo e ultraprodotti. Allora esiste una classe elementare di base M tale che $K \subseteq M$ e $H \cap M = \emptyset$.

Dimostrazione. Consideriamo le chiusure per equivalenza elementare

$$K' = \{\mathcal{M} \mid \exists\mathcal{N} \in K\ \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}\} \qquad H' = \{\mathcal{M} \mid \exists\mathcal{N} \in H\ \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}\}$$

È chiaro che $K \subseteq K'$, $H \subseteq H'$ e che sia K' che H' sono chiuse per equivalenza elementare e ultraprodotti, quindi sono classi elementari. Se $\mathcal{M} \in K' \cap H'$, esistono $K \ni \mathcal{K} \equiv \mathcal{M} \equiv \mathcal{H} \in H$, e per il Teorema di Keisler-Shelah esistono $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ultrapotenze isomorfe rispettivamente di $\mathcal{K}$ e di $\mathcal{H}$. Dato che K ed

H sono chiuse per isomorfismi ed ultrapotenze, si avrebbe l'assurdo $\mathcal{A} \in K \cap H = \emptyset$, per cui $K' \cap H' = \emptyset$. Questo vuol dire che $\mathrm{Th}(K') \cup \mathrm{Th}(H')$ è insoddisfacibile, quindi possiamo estrarne per compattezza un sottoinsieme finito T_0 insoddisfacibile. Posto

$$T = T_0 \cap \mathrm{Th}(K') \qquad M = \left\{ \mathcal{M} \;\middle|\; \mathcal{M} \models \bigwedge T \right\}$$

abbiamo $M \supseteq K' \supseteq K$. D'altronde, usando l'insoddisfacibilità della teoria $T_0 \cup \mathrm{Th}(H')$, si ha $(H \cap M) \subseteq (H' \cap M) = \emptyset$, che è la tesi. □

Abbiamo dimostrato di più: applicare il Teorema precedente ad H ed M ci permette di separare K e H con due classi elementari di base M ed N, cosa che tra l'altro potevamo già fare ponendo

$$N = \left\{ \mathcal{M} \;\middle|\; \mathcal{M} \models \bigwedge \big(T_0 \cap \mathrm{Th}(H')\big) \right\}$$

Come anticipato più volte, usiamo l'ultimo risultato per dimostrare il

Teorema 3.3.7 (di Interpolazione di Craig)**.** Se φ è una L-formula, ψ è una L'-formula e $\vdash \varphi \to \psi$, allora esiste una $L \cap L'$-formula σ tale che $\vdash \varphi \to \sigma$ e $\vdash \sigma \to \psi$.

Dimostrazione. Consideriamo le classi di $L \cup L'$-strutture $\widetilde{K} = \mathrm{Mod}(\varphi)$ e $\widetilde{H} = \mathrm{Mod}(\neg\psi)$, e siano

$$K = \left\{ \mathcal{M}_{|L \cap L'} \;\middle|\; \mathcal{M} \in \widetilde{K} \right\} \qquad H = \left\{ \mathcal{M}_{|L \cap L'} \;\middle|\; \mathcal{M} \in \widetilde{H} \right\}$$

le classi dei modelli rispettivamente di φ e di $\neg\psi$ pensati come (cioè ristretti a) $L \cap L'$-strutture. Dato che K e H rimangono chiuse per ultraprodotti ed isomorfismo, per il Teorema di Separazione esiste una classe elementare di base $\mathrm{Mod}(\sigma) = M \supseteq K$ che le separa, per un'opportuna $L \cap L'$-formula σ. A meno di espandere le strutture di M al linguaggio $L \cup L'$, cioè considerare

$$\widetilde{M} = \left\{ \mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ è una } L \cup L'\text{-struttura e } \mathcal{M} \models \sigma \right\}$$

abbiamo $\mathrm{Mod}(\varphi) \subseteq \mathrm{Mod}(\sigma)$ e $\mathrm{Mod}(\sigma) \cap \mathrm{Mod}(\neg\psi) = \emptyset$, e per il Teorema di Completezza questo è equivalente alla tesi. □

Il Teorema di Interpolazione ha alcuni corollari classici, uno dei quali è noto come Teorema di definibilità di Beth ed asserisce l'equivalenza delle nozioni che definiamo di seguito.

Definizione 3.3.8. Sia L un linguaggio, $P \in L$ un simbolo di relazione n-aria e T una L-teoria. P è *esplicitamente definibile* in T se esiste una $L \setminus \{P\}$-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tale che

$$T \models P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

P è *implicitamente definibile* in T se, per ogni $L \setminus \{P\}$-struttura $\mathcal{M}$, esiste al più un sottoinsieme $P^{\mathcal{M}} \subseteq M^n$ tale che $(\mathcal{M}, P^{\mathcal{M}})$[4] $\models T$.

Teorema 3.3.9 (di definibilità di Beth)**.** Una relazione è implicitamente definibile se e solo se è esplicitamente definibile.

Dimostrazione. Se P è esplicitamente definibile in T da φ, e $\mathcal{M}$ è una $L \setminus \{P\}$-struttura, le n-uple con cui possiamo interpretare P sono esattamente quelle per cui è vera φ. Se viceversa P è implicitamente definibile, sia $L' = L \cup \{Q\}$, con Q simbolo di relazione n-aria, $\widetilde{T}$ la L'-teoria ottenuna da T sostituendo le occorrenze di P con Q e $T' = T \cup \widetilde{T}$. Se $\mathcal{M} \models T'$, per ipotesi deve interpretare P e Q allo stesso modo, per cui $T' \models P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \dots, x_n)$ e, usando i Teoremi di Completezza e Compattezza, possiamo trovare $T_0 \in \mathscr{P}_{\text{fin}}(T')$ tale che

$$\vdash \bigwedge T_0 \to \big(P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow Q(x_1, \dots, x_n)\big)$$

da cui segue $\vdash (\bigwedge T_0 \wedge P) \to Q$. Ora, usando il Teorema di interpolazione, troviamo una $L \setminus \{P\}$-formula $\sigma(x_1, \dots, x_n)$ tale che

$$\vdash (\bigwedge T_0 \wedge P) \to \sigma_1 \qquad \vdash \sigma_1 \to Q$$

da cui

$$T_0 \vdash P \to \sigma_1 \qquad T_0 \vdash \sigma_1 \to Q$$

e dato che $T_0 \vdash Q \to P$ e $T \supseteq T_0$ otteniamo finalmente

$$T \vdash P(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \sigma_1(x_1, \dots, x_n)$$

□

[4]Si intende l'espansione di $\mathcal{M}$ che interpreta P con $P^{\mathcal{M}}$.

Capitolo 4

Ultrapotenze Limite

Concludiamo questa tesi con un capitolo dedicato ad una generalizzazione delle ultrapotenze che permette di caratterizzare, anche questa volta in termini puramente algebrici, le estensioni complete di una struttura. L'unico risultato collegato al Teorema di Keisler-Shelah che utilizzeremo nelle prossime pagine sarà il Teorema di Frayne (Teorema 3.3.1), che può essere comunque dimostrato per altra via (si veda a tal proposito [2, p. 256]), motivo per cui il presente Capitolo può essere letto indipendentemente dai due che lo precedono. Per una trattazione più approfondita, che include anche alcuni risultati sugli universi non-standard, consultare [2, pp. 447-457].

4.1 Estensioni Complete

Dati una L-struttura infinita $\mathcal{M}$ e un sottoinsieme del dominio $A \subseteq M$ abbiamo più volte considerato il linguaggio L_A ottenuto aggiungendo ad L un simbolo di costante per ogni elemento di A per poi espandere $\mathcal{M}$ ad una L_A-struttura dando ai nuovi simboli la loro interpretazione naturale. Possiamo estendere questa idea ampliando il linguaggio a quello più ricco possibile relativamente a $\mathcal{M}$.

Definizione 4.1.1. Se $\mathcal{M}$ è una L-struttura, indichiamo con $L_{\mathcal{M}}$ il linguaggio ottenuto aggiungendo ad L:

- un simbolo di costante per ogni elemento di M,
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, un simbolo di funzione per ogni funzione $f\colon M^n \to M$,
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, un simbolo di relazione per ogni relazione $R \subseteq M^n$.

Il *completamento* $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ è l'espansione di $\mathcal{M}$ a $L_{\mathcal{M}}$-struttura ottenuta interpretando ogni simbolo nella maniera naturale.

Ci chiediamo ora quali siano le estensioni elementari che conservano le formule in questo linguaggio espanso. Per prima cosa diamo loro un nome.

Definizione 4.1.2. Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ due L-strutture, $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ il completamento di $\mathcal{M}$ ed $L_{\mathcal{M}}$ il suo linguaggio. Un'immersione elementare $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ si dice *completa* se esiste un'espansione di $\mathcal{N}$ ad $L_{\mathcal{M}}$-struttura $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ tale che $f\colon \mathcal{M}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ è ancora un'immersione elementare. Un'estensione elementare $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ è *completa* se l'inclusione è un'immersione completa.

Ricordiamo che sarebbe più preciso scrivere $f\colon M \to N$, ma la notazione utilizzata rende chiaro il fatto che pensiamo f prima come mappa fra L-strutture, e poi come mappa fra $L_{\mathcal{M}}$-strutture[1]. Un'immersione completa è quindi un'immersione che preserva tutte le proprietà esprimibili con il linguaggio del prim'ordine più ricco possibile.

Un esempio disponibile "in natura" di immersione completa è dato dall'immersione canonica di una struttura in una sua ultrapotenza.

Proposizione 4.1.3. Sia $\mathcal{M}$ una L-struttra e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. L'immersione canonica di $\mathcal{M}$ in ${\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$ è completa.

Dimostrazione. Per il Teorema di Łoś l'immersione canonica di $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ in ${\mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}}/_{\mathcal{U}}$ è elementare, e per il Teorema di Espansione quest'ultima struttura è un'espansione di ${\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$ ad una $L_{\mathcal{M}}$-struttura. $\square$

In altre parole questa Proposizione ci dice che ogni estensione di una struttura $\mathcal{M}$ isomorfa ad un'ultrapotenza di $\mathcal{M}$ è un'estensione completa. La domanda che sorge spontanea è se valga il viceversa, ma la risposta è negativa[2]. Per fornire una caratterizzazione delle estensioni complete di una struttura bisognerà considerare una classe di estensioni più ampia di quelle ottenibili tramite ultrapotenze.

4.2 Ultrapotenze limite

Come sappiamo, all'interno di un'ultrapotenza di una struttura $\mathcal{M}$ le classi di equivalenza di funzioni costanti formano una sottostruttura elementare isomorfa a $\mathcal{M}$. L'idea dietro le ultrapotenze limite è considerare sottostrutture di un'ultrapotenza formate da classi di equivalenza di funzioni *quasi* costanti, dove il "quasi" può essere reso preciso tramite un filtro. Senza indugiare oltre, vediamo i dettagli.

[1] Il lettore potrebbe essere confuso dal fatto che nel primo caso f è un'immersione elementare per definizione, mentre nel secondo potrebbe non esserlo, per cui dire che $f\colon M \to N$ è solo una mappa fra i domini potrebbe sembrare contraddittorio. In realtà non lo è: la sottigliezza sta nel fatto che ad essere precisi dovremmo specificare se con "immersione elementare" intendiamo "immersione elementare di L-strutture" oppure "immersione elementare di $L_{\mathcal{M}}$-strutture".

[2] Per un controesempio si veda [2, p. 458]

Definizione 4.2.1. Sia $g\colon I \to M$. Definiamo la *classe di equivalenza determinata da g* come

$$\mathrm{eq}(g) = \{(i, j) \in I \times I \mid g(i) = g(j)\}$$

Il primo passo per definire l'ultrapotenza limite di una struttura è definirne il dominio. Diamo quindi la definizione di ultrapotenza limite per insiemi:

Definizione 4.2.2. Siano M un insieme, I un insieme di indici, $\mathcal{U}$ un filtro su I e $\mathcal{F}$ un filtro su $I \times I$. Definiamo l'*ultrapotenza limite* di M come

$$\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M = \left\{[g]_{\mathcal{U}} \mid g \in M^I, \mathrm{eq}(g) \in \mathcal{F}\right\}$$

Dato che fra $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$ può benissimo non esserci nessuna relazione che assicuri l'indipendenza della scelta del rappresentante modulo $\mathcal{U}$ per la verifica della proprietà relativa al filtro $\mathcal{F}$, chiariamo subito che la definizione precedente è da leggersi come "le classi di equivalenza modulo $\mathcal{U}$ per cui *esiste* un rappresentate g tale che $\mathrm{eq}(g) \in \mathcal{F}$"; il punto è che anche se $[g]_{\mathcal{U}} = [f]_{\mathcal{U}}$ e $\mathrm{eq}(g) \in \mathcal{F}$ non è assolutamente detto che $\mathrm{eq}(f) \in \mathcal{F}$. Questo è in generale falso e un facile controesempio si ottiene considerando:

- $M = I = \mathbb{N}$
- $g(n) = 0$
- $f(0) = 1,\ f(n) = 0$ se $n > 0$
- $\mathcal{U}$ un qualsiasi ultrafiltro su $\mathbb{N}$ diverso da quello principale su 0
- $\mathcal{F} = \{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

In questo caso infatti $\mathrm{eq}(g) = \mathbb{N}^2 \in \mathcal{F}$, mentre $\mathrm{eq}(f) = (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2 \notin \mathcal{F}$, nonostante $[g]_{\mathcal{U}} = [f]_{\mathcal{U}}$. Questo controesempio funziona con tutti gli ultrafiltri principali su $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e ovviamente anche con tutti quelli non principali. In generale, quindi, la proprietà di essere $\mathcal{F}$-quasi ovunque costante dipende dalla scelta del rappresentante per la classe di equivalenza modulo $\mathcal{U}$. Questo non pregiudica la buona definizione di ultrapotenza limite di un insieme e non è nemmeno un caso isolato in matematica: si pensi ad esempio agli spazi L^p, dove si lavora con classi di equivalenza di funzioni, ma si parla di continuità anche se non tutti i rappresentanti per una classe sono funzioni continue.

La buona definizione di ultrapotenza limite per L-strutture invece necessita di una verifica preliminare:

Proposizione 4.2.3. Sia $\mathcal{M}$ una L-struttura, $L_{\mathcal{M}}$ il linguaggio del suo completamento, $\mathcal{U}$ un filtro su un insieme di indici I e $\mathcal{F}$ un filtro su $I \times I$. $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$ è un sottoinsieme non vuoto di ${M^I}/_{\mathcal{U}}$ chiuso per le funzioni e le costanti di $L_{\mathcal{M}}$.

Dimostrazione. Se $f \in M^I$ è una funzione costante, $\mathrm{eq}(f) = I^2 \in \mathcal{F}$, per cui $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$ non solo è non vuoto, ma è possibile interpretare al suo interno tutte le costanti di $L_{\mathcal{M}}$ nella maniera naturale. Sia ora $h\colon M^n \to M$ una funzione n-aria di $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ e H la corrispondente funzione di ${\mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}}/_{\mathcal{U}}$. Se $[f_1]_{\mathcal{U}}, \ldots, [f_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$ vuol dire che, per $1 \le r \le n$, si ha $\mathrm{eq}(f_r) \in \mathcal{F}$ e quindi, dato che i filtri sono chiusi per intersezione finita, $\bigcap_{r=1}^n \mathrm{eq}(f_r) \in \mathcal{F}$. Chiaramente, se per $1 \le r \le n$ vale $f_r(i) = f_r(j)$, si ha $h(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = h(f_1(j), \ldots, f_n(j))$, e perciò, se $g\colon I \to M$ è la funzione definita come $g(i) = h(f_1(i), \ldots, f_n(i))$, si ha

$$\mathrm{eq}(g) \supseteq \bigcap_{r=1}^{n} \mathrm{eq}(f_r) \in \mathcal{F}$$

e dato che $H([f_1]_{\mathcal{U}}, \ldots, [f_n]_{\mathcal{U}}) = [g]_{\mathcal{U}}$, otteniamo $[g]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$, per cui è possibile interpretare in $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$ tutti i simboli di funzione di $L_{\mathcal{M}}$ semplicemente restringendo la loro interpretazione in ${\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$. □

Ora che sappiamo che le ultrapotenze limite sono chiuse per costanti e funzioni, ricordando che l'interpretazione dei simboli di relazione può essere ristretta senza bisogno di verifica alcuna, possiamo enunciare la definizione di ultrapotenza limite di una L-struttura.

Definizione 4.2.4. Siano $\mathcal{M}$ una L-struttura, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su un insieme di indici I e $\mathcal{F}$ un filtro su $I \times I$. L'*ultrapotenza limite* $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$ è la sottostruttura di ${\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$ che ha come dominio $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} M$, e in cui intepretiamo i simboli di L restringendo la loro interpretazione in ${\mathcal{M}^I}/_{\mathcal{U}}$.

Per le ultrapotenze limite valgono due risultati fondamentali che sono rispettivamente l'analogo del Teorema di Espansione e del Teorema di Łoś:

Teorema 4.2.5 (di Espansione per Ultrapotenze Limite)**.** Sia $\mathcal{M}'$ un'espansione di un L-struttura $\mathcal{M}$ a un linguaggio $L' \supseteq L$. Ogni ultrapotenza limite $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}'$ è un'espansione a L' della corrispondente $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Fissati $\mathcal{U}$ e $\mathcal{F}$, l'interpretazione dei simboli di L in $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}'$ dipende solo dalla loro interpretazione in $\mathcal{M}'$. Dato che questa interpretazione coincide con quella in $\mathcal{M}$, abbiamo la tesi. □

Teorema 4.2.6 (Teorema Fondamentale delle Ultrapotenze Limite)**.** Sia $\mathcal{M}$ una L-struttura. Per ogni insieme di indici I, ultrafiltro $\mathcal{U}$ su I e filtro $\mathcal{F}$ su I^2 vale

$$\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M} \preceq {}^{\mathcal{M}^I}\!/\!_{\mathcal{U}}$$

Dimostrazione. Indichiamo per brevità l'ultrapotenza limite con $\mathcal{L}$, l'ultrapotenza con $\mathcal{N}$ e $[f]_{\mathcal{U}}$ con $[f]$. Per il Criterio di Tarski-Vaught ci basta verificare che, se $[\vec{a}] \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, [\vec{a}])$, allora esiste $[b] \in \mathcal{L}$ tale che $\mathcal{N} \models \varphi([b], [\vec{a}])$.

Supponiamo quindi $[\vec{a}] \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{N} \models \exists x \varphi(x, [\vec{a}])$. Per il Teorema di Łoś abbiamo $B = \{i \in I \mid \mathcal{M} \models \exists x \varphi(x, \vec{a}(i))\} \in \mathcal{U}$. Indichiamo con $\mathrm{eq}(\vec{a}) \in \mathcal{F}$ l'intersezione delle classi di equivalenza determinate dalle componenti di $\vec{a}$ e definiamo $b \colon I \to M$ in maniera che

- se $(i, j) \in \mathrm{eq}(\vec{a})$, $b(i) = b(j)$;
- se $i \in B$, $\mathcal{M} \models \varphi(b(i), \vec{a}(i))$.

Chiaramente per il primo punto si ha $\mathrm{eq}(b) \supseteq \mathrm{eq}(\vec{a}) \in \mathcal{F}$ e quindi $[b] \in \mathcal{L}$, mentre per il secondo e per il Teorema di Łoś $\mathcal{N} \models \varphi([b], [\vec{a}])$, e per quanto detto sopra questo è sufficiente per concludere. □

Questo Teorema, combinato con il Teorema di Łoś, ci permette di usare come test di verità per una formula in un'ultrapotenza limite lo stesso test che usiamo nelle semplici ultrapotenze. In particolare è vero l'analogo della Proposizione 4.1.3.

Corollario 4.2.7. Sia $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$ un'ultrapotenza limite di $\mathcal{M}$. L'immersione naturale $d \colon \mathcal{M} \to {}^{\mathcal{M}^I}\!/\!_{\mathcal{U}}$ è anche un'immersione completa in $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$. Inoltre, esiste un'estensione completa $\mathcal{N}$ di $\mathcal{M}$ tale che

$$(\mathcal{N}, m)_{m \in M} \cong \Big(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}, d(m) \Big)_{m \in M}$$

dove intendiamo che l'isomorfismo è da intendersi fra $L_{\mathcal{M}}$-strutture e manda ogni $m \in M$ in $d(m)$.

Dimostrazione. Espandiamo $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ e consideriamo $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$. Per la Proposizione 4.1.3 abbiamo $\mathcal{M}_{\mathcal{M}} \preceq {}^{\mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$, quindi ogni $L_{\mathcal{M}}$-formula φ è vera in quest'ultima struttura se e solo se è vera in $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ (notiamo che $L_{\mathcal{M}}$ rende superfluo l'uso di parametri). Tuttavia, per il Teorema Fondamentale delle Ultrapotenze Limite, φ è vera in $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ se e solo se è vera in ${}^{\mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}}\!/\!_{\mathcal{U}}$, quindi se e solo se è vera in $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$. Inoltre per il Teorema di Espansione per Ultrapotenze Limite $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ è un'espansione di $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$, da cui la tesi. □

Come preannunciato, in questo caso vale anche il viceversa.

Teorema 4.2.8. Siano $\mathcal{M} \preceq \mathcal{N}$ due L-strutture. $\mathcal{N}$ è un'estensione completa di $\mathcal{M}$ se e solo se esiste un'ultrapotenza limite $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$ tale che

$$(\mathcal{N}, m)_{m \in M} \cong \Big(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}, d(m)\Big)_{m \in M}$$

Dimostrazione. Una delle due implicazioni è il Corollario precedente. Viceversa, sia $L_{\mathcal{M}}$ il linguaggio del completamento $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$. Per ipotesi possiamo espandere $\mathcal{N}$ a una $L_{\mathcal{M}}$-struttura $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ tale che $\mathcal{M}_{\mathcal{M}} \preceq \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$. In particolare $\mathcal{M}_{\mathcal{M}} \equiv \mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ quindi, per il Teorema di Frayne, esistono un ultrafiltro $\mathcal{U}$ e un'immersione elementare $\pi\colon \mathcal{N}_{\mathcal{M}} \preceq \mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}/_{\mathcal{U}}$. Inoltre quest'immersione coincide con quella naturale se ristretta a $\mathcal{M}_{\mathcal{M}}$: questo segue dal fatto che ogni elemento $m \in M$ è associato ad una costante di $L_{\mathcal{M}}$, per cui $\pi(m) = d(m)$.

Siano ora $C = \mathrm{Imm}(\pi)$ e $\mathcal{F}$ il filtro su I^2 generato dalla famiglia

$$\big\{\mathrm{eq}(f) \mid f \in M^I, [f]_{\mathcal{U}} \in C\big\}$$

Per definizione di $\mathcal{F}$ si ha $C \subseteq \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$; il nostro intento ora è mostrare l'altra inclusione. Adottando anche questa volta la convenzione che $[\cdot]$ significhi $[\cdot]_{\mathcal{U}}$, sia quindi $[g] \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ e sia $f \in [g]$ tale che $\mathrm{eq}(f) \in \mathcal{F}$. Per definizione di filtro generato, questo è equivalente a chiedere che esistano $[h_1], \dots, [h_n]$ tali che $\bigcap_{r=1}^n \mathrm{eq}(h_r) \subseteq \mathrm{eq}(f)$. È ben definita quindi una funzione n-aria $G\colon M^n \to M$ tale che, per ogni $i \in I$, valga $G(h_1(i), \dots, h_n(i)) = f(i)$ e per definizione $L_{\mathcal{M}}$ contiene un simbolo di funzione associato a G. Se $\mathfrak{G}$ è l'interpretazione di questo simbolo in $\mathcal{M}^I_{\mathcal{M}}/_{\mathcal{U}}$ per costruzione vale $\mathfrak{G}([h_1], \dots, [h_n]) = [f]$. Dato che gli $[h_r]$ appartengono a C e che C, in quanto immagine di un'immersione elementare, è chiuso per le funzioni del linguaggio, otteniamo finalmente che $[f] = [g] \in C$ e quindi $C \supseteq \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$. Basta ora restringere $\mathcal{N}_{\mathcal{M}}$ e $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}_{\mathcal{M}}$ ad L-strutture per avere la tesi. $\square$

4.3 Applicazioni

Ovviamente il Teorema 4.2.8 può essere letto anche nell'altro verso, ed enunciato come

Teorema 4.3.1. Una L-struttura è isomorfa ad un'ultrapotenza limite $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}$ se e solo se è isomorfa ad un'estensione completa di $\mathcal{M}$.

Inoltre possiamo utilizzarlo per ottenere il seguente risultato:

Corollario 4.3.2. Sia $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un'immersione completa. Per ogni estensione $\mathcal{M}' \supseteq \mathcal{M}$ è possibile trovare due estensioni $\mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}$ e $f' \supseteq f$ tali che $f'\colon \mathcal{M}' \to \mathcal{N}'$ è un'immersione completa.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.2.8 esiste un isomorfismo

$$\pi\colon (\mathcal{N}, f(m))_{m\in M} \cong \Big(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}, d(m)\Big)_{m\in M}$$

Consideriamo l'ultrapotenza limite $(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}', M)$. Questa è chiaramente una sovrastruttura di $(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}, M)$, per cui sarà isomorfa ad una struttura $\mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}$ secondo una mappa $\pi' \supseteq \pi$

$$\pi'\colon (\mathcal{N}', N) \cong \Big(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}', M\Big)$$

Sia ora $f'\colon M' \to N'$ la funzione definita come $f' = \pi'^{-1} d$. Chiaramente $f' \supseteq f$, perché per $m \in M$ si ha $f'(m) = \pi'^{-1}(d(m)) = \pi^{-1}(d(m)) = f(m)$ e, dato che $d\colon (\mathcal{M}', M) \to (\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \mathcal{M}', M)$ è un'immersione completa, anche $f'\colon (\mathcal{M}', M) \to (\mathcal{N}', N)$ lo è in quanto composizione di un'immersione completa con un isomorfismo. □

Questo corollario può essere usato per dimostrare risultati come i seguenti.

Corollario 4.3.3. Sia α un ordinale limite ed $f\colon V_\alpha \preceq \mathcal{N}$ un'immersione elementare di $\{\in\}$-strutture. Se possiamo estendere $\mathcal{N}$ a una $\{\in\}$-struttura $\mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}$ ed f ad un'immersione elementare $f'\colon V_{\alpha+1} \preceq \mathcal{N}'$, allora per ogni ordinale $\beta > \alpha$ esistono $\mathcal{N}'' \supseteq \mathcal{N}$ e $f'' \supseteq f$ tali che $f''\colon V_\beta \preceq \mathcal{N}''$ è un'immersione completa.

Dimostrazione. Se riusciamo a mostrare che f è un immersione completa possiamo applicare il Corollario precedente e ottenere la tesi. Dato che α è un ordinale limite ogni costante, funzione e relazione su V_α è un elemento di $V_{\alpha+1}$. Se R è una relazione di $V_{\alpha V_\alpha}$, è sufficiente considerare $f'(R)$ ed espandere $\mathcal{N}$ a $\{\in\}_{V_\alpha}$-struttura interpretando R con l'insieme degli x per cui $\mathcal{N}' \models x \in f'(R)$. Dato che f' è un'immersione elementare rispetto al linguaggio $\{\in\}$, f lo è rispetto a $\{\in\}_{V_\alpha}$. □

Corollario 4.3.4. Siano α un ordinale e $f\colon \alpha \to \mathcal{N}$ un'immersione completa di $\{\in\}$-strutture. Allora esistono $\mathcal{N}' \supseteq \mathcal{N}$ ed $f' \supseteq f$ tali che $f'\colon V_\alpha \to \mathcal{N}'$ è un'immersione completa ed N è l'insieme degli ordinali di $\mathcal{N}'$.

Dimostrazione. Per il Teorema 4.2.8 si ha $\mathcal{N} \cong \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha$, e per il Corollario 4.3.2 possiamo estendere f ad un'immersione completa

$$f'\colon (V_\alpha, \alpha) \to \Big(\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha, \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha\Big)$$

$$\begin{array}{ccc} V_\alpha & \xrightarrow{\;f'\;} & \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha \\ \cup\!\mathsf{I} & & \cup\!\mathsf{I} \\ \alpha & \xrightarrow{\;f\;} & \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha \end{array}$$

Continueremo a chiamare le mappe f ed f', benché coincidano con le immersioni naturali d. Ricordando che α è l'insieme degli ordinali di V_α, mostriamo che $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha$ è l'insieme degli ordinali di $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha$. Per non appesantire eccessivamente la notazione per il resto della dimostrazione intenderemo le strutture come espanse al linguaggio completo. Se $\alpha^\# \in \{\in\}_{V_\alpha}$ è il simbolo di relazione 1-aria che V_α interpreta con α, f' deve preservare la formula

$$\forall x \left(x \in \mathrm{ON} \leftrightarrow \alpha^\#(x) \right)$$

dove "$x \in \mathrm{ON}$" è un'abbreviazione per l'opportuna $\{\in\}$-formula vera se e solo se x è un ordinale, cioè un insieme transitivo e ben ordinato dall'appartenenza. Basta quindi mostrare che vale $\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha \models \alpha^\#([x]_\mathcal{U})$ se e solo se $[x]_\mathcal{U} \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha$. Per ogni $x \colon I \to V_\alpha$ tale che $\mathrm{eq}(x) \in \mathcal{F}$ si ha

$$\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha \models \alpha^\#([x]_\mathcal{U}) \Leftrightarrow \left\{ i \in I \;\middle|\; V_\alpha \models \alpha^\#(x(i)) \right\} = \left\{ i \in I \;\middle|\; x(i) \in \alpha \right\} \in \mathcal{U}$$

Fissata x tale che $\left\{ i \in I \;\middle|\; x(i) \in \alpha \right\} \in \mathcal{U}$ e $\mathrm{eq}(x) \in \mathcal{F}$ definiamo $y \colon I \to \alpha$

$$y(i) = \begin{cases} x(i) & \text{se } x(i) \in \alpha \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per costruzione si ha $[y]_\mathcal{U} = [x]_\mathcal{U}$ ed $\mathrm{eq}(y) \supseteq \mathrm{eq}(x) \in \mathcal{F}$, quindi $[y]_\mathcal{U} \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha$ e questo dimostra che, a meno di cambiare rappresentante,

$$\prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} V_\alpha \models \alpha^\#([x]_\mathcal{U}) \Rightarrow [x]_\mathcal{U} \in \prod_{\mathcal{U}|\mathcal{F}} \alpha$$

Per il viceversa basta osservare che f preserva la formula $\forall x\; x \in \mathrm{ON}$. $\square$

Ringraziamenti

Mi sembra doveroso ringraziare diverse persone che mi hanno, in maniere diverse e a volte anche molto indirette, permesso di essere qui a scrivere questa tesi. In primis ringrazio la mia famiglia, per avermi sostenuto economicamente e moralmente, ma sopratutto per avermi insegnato che la maniera migliore per assicurarsi che le cose vengano fatte è rimboccarsi le maniche e farle. Ringrazio il mio relatore, Alessandro Berarducci, per avermi introdotto alla Teoria dei Modelli ed essere stato più volte illuminante su diversi aspetti. Devo inoltre un grazie a Lorenzo Lami, Marco Capitani e Giorgio Mossa per le varie discussioni in ambito logico.

Estesi ringraziamenti vanno anche a chi, pur non essendo direttamente collegato alla stesura di questa tesi, ha comunque fatto in modo che io custodisca un bel ricordo di questi ultimi anni. Un grazie mastodontico va a Jack D'Aurizio per tutte le volte che mi ha sopportato quando avevo bisogno di una mano coi conti, per avermi insegnato a non aver paura degli stessi, e per una marea di altre cose che elencare sarebbe riduttivo. Alla stessa maniera trovo insensato elencare la miriade di motivi per cui ringraziare Davide Francesco Matteo Nudo e Davide Nocera, motivi che sintetizzerò con un "for the lulz". Grazie a Riccardo Morandin per tutti gli esami preparati insieme, le cene, le sessioni di D&D, eccetera. Grazie anche all'Aula Studenti per essere il posto migliore in cui avrei potuto pensare di studiare, confrontarmi e tanto altro ma sopratutto per essere il Monster Model del Disagio. In particolare grazie a (in ordine alfabetico ed evitando di ripetere nomi già comparsi in precedenza) Antonio Alfieri, Denise Massa, Felice Iandoli, Kirill Kuzmin, Marco Carbone, Marco Castronovo, Raffaele Scandone, Roberta Montefusco, Sabino Di Trani, e un sacco di altre persone che sono costretto a non citare esplicitamente per motivi di spazio.

Hanno inoltre contribuito a rendere positiva la mia esperienza qui a Pisa due ambienti senza i quali i miei giorni sarebbero stati senz'altro più vuoti. Grazie a Radiocicletta per tutte le ore dietro i microfoni, le estenuanti assemblee, le feste e tutto il resto, e in particolare grazie a Leonardo Fiorini per aver reso possibile tutto questo con una mole di lavoro spropositata. Grazie a Piazza dei Cavalieri per le notti e le albe, e in particolare grazie a Nicola per essere una delle poche persone che ha il coraggio di essere coerente con le proprie idee fino in fondo.

Bibliografia

[1] Michael Canjar, *Countable Ultraproducts Without CH*, Annals of Pure and Applied Logic 37, 1988, pagine 1-80.

[2] Chen Chung Chang, Howard Jerome Keisler, *Model Theory*, Terza edizione, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 73. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1990.

[3] Wilfrid Hodges, *Model Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 42, Cambridge University Press, 1993.

[4] Howard Jerome Keisler, *Ultraproducts and Elementary Classes*, Ph.D. thesis, University of California Berkeley, 1961.

[5] Howard Jerome Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 62, 1971.

[6] Kenneth Kunen, *Ultrafilters and Independent Sets*, Transactions of the American Mathematical Society 172, 1972, pagine 299-306.

[7] David Marker, *Model Theory, An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics 217, Springer, 2002.

[8] Judy Roitman, *Non-isomorphic Hyper-real Fields from Non-isomorphic Ultrapowers*, Mathematische Zeitschrift 181, 1982, pagine 93-96.

[9] Saharon Shelah, *Every Two Elementarily Equivalent Models Have Isomorphic Ultrapowers*, Israel Journal of Mathematics June 1971, Volume 10, Issue 2, pagine 224-233.