ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Entre la aritmética y el álgebra. Un análisis histórico de los "problemas de grifos"

Antonio M. Oller Marcén y Vicente Meavilla Seguí

Resumen: La transición entre la aritmética y el álgebra es un tema de investigación interesante y permanente en la Didáctica de la Matemática. En este sentido, el análisis del carácter algebraico o aritmético de ciertos problemas escolares aparece como un aspecto relevante a la hora de diseñar trayectorias didácticas que faciliten dicha transición. En este trabajo, planteamos el análisis histórico de una familia de problemas como herramienta a la hora de realizar un análisis de ese tipo y lo ejemplificamos mediante el caso paradigmático de los problemas de grifos.

Palabras clave: aritmética, álgebra, problemas de grifos, análisis histórico, historia de la matemática.

Abstract: The transition between Arithmetic and Algebra is an interesting and long-standing research topic in Mathematics Education. In this sense, the analysis of the arithmetical or algebraic character of certain problems arises as a relevant issue in order to design teaching sequences that help to expedite that transition. In this work we present a historical analysis of a family of problems as a tool to perform that kind of analysis and we exemplify it with the paradigmatic case of tap problems.

Keywords: arithmetic, algebra, tap problems, historical analysis, history of mathematics.

INTRODUCCIÓN

La transición entre la aritmética y el álgebra "ha sido y es un tema de investigación permanente" (Socas, 2011, p. 10). A este respecto, Filloy y Rojano (1989, p. 20) señalan que:

Fecha de recepción: 20 de septiembre de 2013; fecha de aceptación: 20 de diciembre de 2013.

> ...las concepciones de los estudiantes respecto a que las operaciones se llevan a cabo con números deben modificarse de forma que pueda desarrollarse la idea de operar con objetos distintos de números (como incógnitas) o puedan concebirse esos nuevos objetos...

En ese mismo trabajo se apuntan dos vías posibles y opuestas de aproximación didáctica: comenzar con un trabajo de modelización en contextos concretos familiares para el alumno, o bien comenzar por trabajar en el nivel sintáctico.

En todo caso, ambos enfoques se centran, a nuestro entender, en el aspecto formal (casi lingüístico) del álgebra. Pero no es esa la única concepción posible para el álgebra. Por ejemplo, Usiskin (1998) propone cuatro alternativas que son, evidentemente, complementarias:

1. El álgebra como un conjunto de procedimientos para resolver problemas.
2. El álgebra como aritmética generalizada.
3. El álgebra como lenguaje para el estudio de las relaciones existentes entre cantidades que varían.
4. El álgebra como el estudio de estructuras algebraicas.

De los cuatro puntos anteriores, claramente los tres últimos tienen una fuerte carga formal y hacen énfasis en el aspecto simbólico. Sin embargo, pensamos que, desde un punto de vista histórico, el álgebra debe entenderse primera y principalmente como un método para resolver problemas. Así, por ejemplo, en la *Arithmetica practica, y specvlatiua* de Juan Pérez de Moya, primer libro con contenido algebraico escrito en español por un español, el autor indica que:

> ...por ella [por la regla de álgebra] se hacen y absuelven infinitas questiones [...] así de arithmética como de geometría, como de las demás artes (que dizen) mathemáticas [...] su fin no es otro sino mostrar hallar algún número proporcional dudoso demandado (Pérez de Moya, 1562, p. 387).

Si aceptamos este punto de vista respecto del álgebra, parece justificado proponer una iniciación a ella que se sustente en la resolución de problemas. En tal caso, una de las principales dificultades radica en la elección adecuada de los problemas, que deberían favorecer esa aparición de lo que llamaríamos técnicas algebraicas por parte de los alumnos. Surgen entonces de manera natural algunas preguntas (Wagner y Kieran, 1989), como por ejemplo, ¿qué es un problema algebraico? o ¿hay problemas que son más algebraicos que aritméticos? y, en fin, ¿hay problemas que ayuden a estimular el desarrollo del razonamiento de tipo algebraico?

Puig y Cerdán (1990) identifican al menos cuatro posibles vías para tratar de analizar el carácter aritmético o algebraico de un problema verbal:

1. Analizar libros de texto, identificando en qué temas se propone, así como las estrategias de resolución que se presentan.
2. Examinar soluciones de alumnos.
3. Examinar respuestas de alumnos conocedores de las técnicas algebraicas, pero a los que se les impide usarlas.
4. Analizar lo que se denomina "proceso de traducción" o "texto intermedio".

Estos autores se centran en la última de estas cuatro vías y en Cerdán (2008, p. 48) se apunta que, en efecto, "hay un tipo de problemas verbales que parecen obligar al uso del razonamiento algebraico para poder resolverlos".

Un buen lugar en el cual buscar problemas de este tipo puede ser los textos matemáticos antiguos. En ellos suelen aparecer problemas fronterizos entre la aritmética y el álgebra que los autores resuelven, en ocasiones, por diversos métodos. Esta idea motiva una quinta vía de aproximación para el estudio del carácter de un determinado problema (que en cierto modo extiende la primera de las mencionadas). Se trata de realizar un análisis histórico del problema en cuestión.

Existen familias de problemas que aparecen repetidamente en la historia de las matemáticas en textos de diferentes épocas y culturas. Las técnicas de resolución, las explicaciones y argumentaciones han podido cambiar a lo largo del tiempo. Un análisis detenido de esta evolución y de cómo resolvieron y explicaron los distintos autores la manera de resolver un problema puede aportar, creemos, una valiosa información respecto a su naturaleza. Este es el caso, por ejemplo, del trabajo de Gómez (1999) relativo a la "regla de compañías" o el de Meavilla y Oller (2013) en el que se estudian problemas sobre "comprar un caballo".

En este artículo vamos a centrarnos en el estudio de una familia de problemas que llamaremos "de trabajo cooperativo". Este tipo de problemas aparecen a lo largo del tiempo en muy diversos contextos, casi siempre realistas (Díaz y Poblete, 2001). De entre los contextos encontrados, por su persistencia en el tiempo, prestaremos especial atención a los llamados "problemas de grifos".

El estudio se organiza con base en cuatro periodos de tiempo que esencialmente recogen los cinco grandes periodos históricos determinados por Gómez (2011):

1. Desde la Antigüedad hasta el siglo XV (periodos primitivo y de oscurantismo occidental).
2. Siglos XVI a XVIII (periodo del libro impreso).
3. El siglo XIX (periodo del libro de enseñanza).
4. Desde el siglo XX hasta la actualidad (periodo del manual escolar).

Para cada uno de estos periodos presentaremos algunos ejemplos de enunciados de este tipo de problemas. En los periodos 2, 3 y 4 se ha prestado especial atención a textos escritos o editados en España. La discusión de cada problema se completa al observar cómo fueron clasificados por los autores de los textos en los que aparecen e indicar, cuando sea posible, el método o métodos de resolución propuestos. Finalmente, trataremos de analizar todo el material recopilado.

PROBLEMAS DE TRABAJO COOPERATIVO

El tipo de problemas en que nos vamos a centrar recibe el nombre de problemas de trabajo cooperativo y puede enunciarse de modo general del siguiente modo: Conocido el tiempo que necesita cada uno de una serie de "agentes" para llevar a cabo una determinada tarea, se pretende saber el tiempo que necesitarían para completarla conjuntamente y/o la parte del trabajo que realizará cada uno de ellos.

El caso más antiguo que hemos encontrado de este tipo de problemas es el siguiente ejemplo extraído del *Suan shu shu,* un texto chino del siglo II a. C.:

> Hay 3 mujeres. La mayor teje 50 chí[1] en 1 día, la mediana teje 50 chí en 2 días, la más joven teje 50 chí en 3 días. Ahora juntas producen 50 chí. Pregunta: ¿cuántos chí produce cada una? (Cullen, 2004, p. 54)

Estos problemas aparecen en contextos muy variados: obreros que realizan un trabajo, impresores que editan un libro, animales que devoran una presa,

[1] Se trata de una medida de longitud utilizada en contextos diferentes del de la medida de tierras.

etc. Sin embargo el contexto más común y que con mayor persistencia aparece a lo largo de la historia es el del llenado o vaciado de un recipiente de líquido.

El enunciado más habitual (si hablamos de llenado) suele aportar como datos el tiempo de llenado del recipiente cuando fluye una única fuente de líquido y se solicita el tiempo necesario para llenarlo cuando todas las fuentes fluyen juntas (el caso del vaciado es análogo).

A partir de esta versión, aparecen esporádicamente algunas variaciones. En algunos casos se proporciona como dato (en ocasiones innecesario) la capacidad total del recipiente. También hallamos ejemplos en los que, en lugar de los tiempos de llenado, se indica el volumen que vierte cada fuente en un tiempo determinado. En los ejemplos que presentaremos veremos estas y algunas otras variantes del problema inicial.

LOS PROBLEMAS DE GRIFOS A LO LARGO DE LA HISTORIA

Para cada uno de los periodos seleccionados se presentan ejemplos de problemas de grifos, analizando los enunciados y observando las ideas que los distintos autores pusieron en juego para resolverlos. En general, será interesante señalar el capítulo en que se presentaba ese problema o la tipología general bajo la que se encuadraba, pues esto será indicativo de la idea que el autor tenía respecto a cómo "debía" resolverse el problema.

Desde la Antigüedad hasta el siglo xv

Nuevamente el ejemplo más antiguo de problema "de grifos" que hemos encontrado aparece en un texto chino: el *Jiu Zhang Suan Shu*.[2] En concreto se trata del problema número 26 del capítulo 6, dedicado a la proporcionalidad y especialmente a los repartos proporcionales. Como es costumbre a lo largo de todo el texto, se presenta tanto la respuesta numérica concreta como el método seguido para obtenerla. En este caso dos métodos distintos. El texto dice:

> Ahora, consideremos un aljibe que se llena a través de 5 canales. Abre el primer canal y el aljibe se llena en 1/3 de día; con el segundo, se llena en

[2] El comentario que se conserva data del siglo III, aunque se cree que el texto original es anterior; aproximadamente del siglo III a. C.

> 1 día; con el tercero en 2 días y medio; con el cuarto, en 3 días, con el quinto, en 5 días. Supón que se abren todos ellos. Di, ¿cuántos días son necesarios para llenar el aljibe?
>
> Solución: en 15/74 de día.
>
> Método: dispón la cantidad llenada en un día por cada canal. Suma para el divisor, toma 1 día como dividendo. Divide, obteniendo la respuesta.
>
> Método alternativo: dispón el número de días y las veces que se llena la cisterna [en dos columnas]. Multiplica las veces que se llena la cisterna por el correspondiente número de días. Suma para el divisor. Toma el producto continuo de los números de días como dividendo. Divide, obteniendo la respuesta. (Kangshen *et al.,* 1999, p. 343)

El primero de los métodos presentados no requiere explicación, simplemente se calcula la parte de aljibe que se llena en un día si se utilizan todos los canales y, con ello, el tiempo necesario para llenarlo completamente.

Sin embargo, el segundo método no es en modo alguno evidente y, de hecho, su lectura resulta confusa. En realidad, se trata de una aplicación del método de "homogeneización y uniformización". Este método, que es central en todo el *Jiu Zhang Suan Shu,* aparece descrito en Kangshen (1999, pp. 59-60) y se utiliza para lo que hoy se denomina "reducir fracciones a común denominador".

En el caso que nos ocupa, el autor construye una serie de fracciones en las que el numerador indica cuántas veces se llena el aljibe y el denominador los días necesarios para llenarlo ese número de veces (evidentemente, esto requiere un trabajo previo sobre los datos del problema para obtener valores enteros, como indica un comentarista del texto: "si se llena una vez en 2 días y medio, eso significa dos veces en 5 días"). A continuación se reducen esas fracciones a común denominador (multiplicando todos los denominadores originales, 75 en este caso, y hallando los numeradores correspondientes) igualando así el número de días para todas las cisternas. Después se suman las veces que llena el aljibe cada canal en este nuevo número de días y así se obtiene cuántas veces se podría llenar el canal en 75 días, 370 en este caso. Basta dividir los días entre las veces para calcular el tiempo necesario para llenarlo 1 vez.

$$\begin{array}{r} \text{veces} \\ \text{días} \end{array} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 225 & 75 & 30 & 25 & 15 \\ 75 & 75 & 75 & 75 & 75 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 370 \\ 75 \end{pmatrix}$$

La *Antología Palatina* es una colección de epigramas griegos descubierta en 1606 y compilada en el siglo X, aunque contiene material de épocas muy anteriores (Requena, 2006, 2007). En ella encontramos hasta seis enunciados de este tipo de problemas, sin que ninguno de ellos indique la solución. Reproducimos tan solo un ejemplo:

> ¡Oh mezcla exquisita la que tres dioses vierten en este cráter!: el bienhechor Bromio y sus dos ríos. Pero el caudal de sus aguas no es igual. Manando solo, el Nilo llena la sima en 1 día, tan abundante emergen de sus senos los fluidos. El Tirso de Baco en 3 días lo llena del vino que allí se produce. Y el Aqueloo, tu cuerno, tarda 2 días. Pero si unís vuestros esfuerzos en muy pocas horas lo colmaréis. (Requena, 2007, p. 37)

En el *Lilavati,* texto hindú compuesto en el siglo XII, también aparecen estos problemas, junto con su solución general. La solución se indica en la estrofa 103, mientras que la estrofa siguiente presenta ya un ejemplo. Ambas aparecen en el capítulo 25 (Patwardan *et al.,* 2001, pp. 92-93) que incluye diversos problemas relacionados con la proporcionalidad:

> Uno dividido por la suma de los recíprocos es el tiempo de llenado.
>
> Cuatro canales fluyen hasta un depósito y separadamente necesitan 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, y $\frac{1}{6}$ de día respectivamente. Si los cuatro se utilizan conjuntamente, encuentra el tiempo necesario para llenar el depósito.

Aunque se presenta la solución en forma de regla que debe aplicarse, podemos fácilmente observar su origen. Los recíprocos de los tiempos de llenado nos indican el número de veces que cada canal llena el depósito en un día. Al sumar, obtenemos el número de veces que se llenaría un depósito en un día. El inverso de este valor nos proporciona, pues, el número de días necesarios para llenar el depósito una vez.

El último ejemplo que vamos a mostrar en esta sección procede del *Liber Abaci,* de Leonardo de Pisa "Fibonacci". Este texto se escribió a principios del siglo XIII y fijó en gran medida los contenidos de los textos aritméticos de varios siglos posteriores. El problema propuesto y su solución aparecen en el capítulo 12 que contiene problemas diversos resueltos en su mayor parte aplicando proporcionalidad y la regla de falsa posición (Sigler, 2002, p. 281):

> Tenemos un depósito con cuatro agujeros. Por el primer agujero el depósito se vacía en 1 día, por el segundo en 2, por el tercero en 3 y por el cuarto en 4. Se pretende saber en cuántas horas se vaciará el depósito si los 4 agujeros se abren a la vez. Pon 12 días para el vaciado. En ese tiempo el primer agujero vacía el depósito 12 veces, puesto que 12 es 12 veces 1; similarmente en los 12 días fijados el depósito se vacía 6 veces a través del segundo agujero, por el tercero se vacía 4 veces y por el cuarto 3 veces. Así, en esos 12 días el depósito se ha vaciado 25 veces; es decir, 25 depósitos se vacían en 12 días y se busca en cuántos días se vacía 1 depósito. Por tanto multiplica los extremos, a saber, el 12 por el 1, y divide por el medio; el cociente será 12/25 de un día. Si quieres convertirlo en horas, multiplica el 12 del numerador por las horas de un días, a saber, 12; habrá 144 que divides por 25. El cociente será 5 y 19/25 de hora para el tiempo necesario para vaciar el depósito.

El método de resolución propuesto por Fibonacci consiste en elegir un tiempo arbitrario, en este caso el mínimo común múltiplo de los datos, para facilitar cálculos y calcular cuántas veces vaciará el depósito cada agujero en ese tiempo. Al sumar, se obtiene el número de veces que se vaciaría el depósito en ese tiempo arbitrario a través de todos los agujeros. Finalmente, se aplica una regla de tres que permite hallar el tiempo necesario para vaciar un depósito.

Observamos que en los libros de este periodo la familia de problemas que estamos estudiando aparece estrechamente ligada a la proporcionalidad. En ellos aparecen, en esencia, dos modos diferentes de resolver estos problemas:

1. Se calcula la parte del recipiente que cada fuente llena (o vacía) en un día (es el inverso del tiempo invertido por dicha fuente en llenar el recipiente). Se suman esos valores para obtener la parte del recipiente que llenan entre todos en un día. El inverso de ese valor proporciona justamente el tiempo necesario para llenar el recipiente entre todos.
2. Se manipulan, si es necesario, los datos del problema para que solo impliquen números enteros (por ejemplo, que una fuente llene el recipiente en 2 días y medio, es equivalente a que lo llene 2 veces en 5 días). Después se toma un tiempo arbitrario que sea un múltiplo común de los que se dan en el enunciado modificado (el producto o el mínimo común múltiplo). Se calcula cuántas veces llena el recipiente cada fuente en ese tiempo. Sumando, se obtiene cuántas veces se llena el recipiente en ese tiempo fijo entre todas las fuentes. Basta aplicar una regla de tres

(o simplemente dividir) para obtener el tiempo necesario para llenar una vez el recipiente entre todas las fuentes.

Ambos métodos presentan ventajas e inconvenientes. Así, el primero no requiere ningún tipo de manipulación previa de los datos del problema y lleva, de manera muy directa, a una regla que se enuncia de un modo muy compacto: "el inverso de la suma de los inversos". El inconveniente evidente es que, para un estudiante, resulta más difícil desentrañar los motivos por los que la regla funciona a partir de su mero enunciado. El segundo método no puede enunciarse de forma compacta, pero es fácil de seguir y termina con la aplicación de una regla de tres (omnipresente en la aritmética incluso en nuestros días). Sin embargo, solo es válido cuando los datos iniciales son enteros. En caso contrario, es necesario un trabajo previo que resulta artificioso si no se lleva a cabo comprensivamente.

De cualquier modo, lo importante aquí es señalar que ambos métodos son puramente aritméticos. Es remarcable el hecho de que el *Jiu Zhang Suan Shu,* pese a ser el texto más antiguo de los estudiados en que aparecen estos problemas, ya presenta ambos métodos aritméticos de resolución.

Siglos xvi a xviii

El primer ejemplo de esta sección proviene de la *Arithmetica practica*[3] de Juan de Yciar,[4] publicado en Zaragoza en 1549. El problema se presenta en la sección dedicada a la regla de compañías y dice así:

> Es una tinaja la qual cabe 325 cantaros de vino y tiene hechas tres canillas por tal compas que si abren la vna saldrá todo el vino en tres dias: y si destapan la segunda saldrá todo el vino en dos días: y si destapan la tercera saldra todo en un dia. Pregunto si destapasen todas las tres canillas en quanto tiempo saldra todo el vino de la tenaja.
>
> Mira las partes donde caben que son 1 y 2 y 3 que es el tiempo en que abriendo cada vna de las dichas canillas saldria el vino: y hallaras que el menor numero donde cabe es 6 pues parte 6 por cada vna destas partes

[3] Subtitulado como *muy vtil y prouechoso para toda persona que quisiere exercitarse en aprender a contar.*

[4] Para datos biográficos puede consultarse, por ejemplo, Alzugarai (1988).

> y partiendola por 1 vienen 6 y por 2 3 y por 3 2 junta el numero 6 y 3 y 2 y haran 11 agora parte 6 por 11 y verna la particion 6/11 y responde que en 6/11 de dia que son 13 horas y 1/11 de hora saldra todo el vino (Yciar, 1549, p. fo. xxvii).

El método de resolución propuesto por Yciar se corresponde con el segundo de los presentados en la sección anterior. De hecho, es claramente similar al propuesto en el *Liber Abaci,* aunque hace mucho menos énfasis en motivar las operaciones realizadas. Llama la atención que el autor aporta un dato numérico, la capacidad de la tinaja, que no es necesario para resolver el problema y que, de hecho, el autor ni siquiera utiliza.

El siguiente ejemplo proviene del *Tractado subtilissimo de Arismetica y de Geometria* de Juan de Hortega (Malet, 2000), cuya primera impresión se hizo en Barcelona en 1512. La edición póstuma (Hortega murió en 1542) con la que se ha trabajado fue impresa en Sevilla y revisada por Gonçalo Busto. El problema aparece nuevamente en la sección dedicada a la regla de compañías:

> Un maestro de picar piedra ha hecho vna fuente de piedra para tener agua, y a la hecho con cinco caños en tal manera: que si abre el vn caño que es el mayor que toda el agua que estuuiere dentro saldra en un dia: y si abre el segundo saldra en dos dias:y si abre el tercero saldra en tres días: y si abre el quarto saldra en 4 dias: y si abre el quinto saldra en 6 dias: la fuente haze 400 cantaros de agua: demando que abriendolos todos cinco juntamente en quanto tiempo saldra toda el agua de la fuente.
>
> Faras assi busca vn numero donde puedan caber todos estos 5 numeros 1. 2. 3. 4. 6. y hallaras que el numero es 12 pues parte estos 12 por cada vno de los 5 numeros y hallaras que partiendo 12 por 1 viene a la particion 12 y partiendo por 2 6 y partiendo por 3 4 y partiendo por 4 3 y partiendo por 6 2. Pues pon una regla de compañias diciendo 5 hombre hizieron compañia el primero puso 12 el segundo 6 el tercero 4 el quarto 3 y el quinto 2. Ganaron 400 ducados demando que verna a cada vno de ganancia [...] Pues has sabido que abriendo todos 5 caños juntamente quantos cantaros saldra de agua por cada caño: restate saber en quanto tiempo: lo que haras por regla de tres en esta manera [...] (Hortega, 1552, pp. 146-147).

Este método de resolución comienza de un modo similar al anterior. Sin embargo, es esencialmente diferente. En este caso sí que se hace uso de la capacidad de la fuente (algo que no sucedía en el ejemplo anterior). El autor transforma el problema de tal modo que acaba aplicándose una regla de compañías. Se calcula en primer lugar la cantidad de líquido que sale por cada uno de los caños, repartiendo la capacidad total del depósito de manera inversamente proporcional al tiempo que tarda en vaciarse el depósito por cada uno de los caños. Una vez sabida la cantidad de agua que sale por cada caño se aplica una regla de tres para obtener el tiempo necesario a partir de los datos del enunciado. Vemos cómo se alarga y complica innecesariamente el procedimiento debido a que se hace entrar en juego la capacidad del recipiente.

A continuación presentamos un ejemplo extraído del libro *Arithmetica Especvlativa, y practica, y arte de algebra* escrito por Andrés Puig[5] e impreso en Barcelona en 1673. También en este caso el problema se propone en la sección dedicada a la regla de compañías:

> Es vna cisterna en la qual ay 12000 quarteros de agua, y en la parte mas baxa ay quatro cañones desiguales, y sabemos que destapando el mayor en vna hora salen 480 quarteros con el segundo salen 400 con el tercero 360 y con el quarto 320 pidese destapándose todos quatro cañones juntos, en quantas horas se vaziaria la dicha cisterna, y quantos quarteros de agua saldrian por cada cañon, començando y acabando juntos: suma estos quatro números 480 400 360 y 320 y haz 1560.Di agora, si 1560 me dan 12000 que me darán 480 del primero y de los demas por su orden, sigue la regla, y hallaras 3692 4/13 por el primero [...] y tanta saldra por cada cañon: y para saber en quantas horas, parte 12000 por 1560 [...] (Puig, 1673, p. 231)

Este ejemplo ilustra una versión simplificada del problema original en el sentido de que se proporciona la cantidad absoluta de agua que sale por cada cañón en una hora y no la cantidad relativa, como sucedía hasta ahora en los ejemplos mostrados. Con estos datos el autor aplica la regla de compañías para calcular mediante varias reglas de tres la cantidad total que sale por cada caño al cabo de una hora. Hecho esto, el tiempo necesario para vaciar la cisterna se calcula mediante una simple división.

Cerramos esta sección con un problema del texto *Elementos de aritmética, álgebra y geometría,* escrito por Juan Justo García[6] y editado en Madrid en 1782. Aunque no se presenta en el contexto de llenado o vaciado de un recipiente, es

[5] Nacido en Vic, estudió en Valencia y vivió en Barcelona.

[6] Puede consultarse Cuesta (1974) para una detallada información biobibliográfica.

interesante traerlo aquí por cuanto aparece en la sección dedicada la regla de falsa posición y se utiliza, aunque de modo totalmente auxiliar, una incógnita:[7]

> Un libro que un impresor imprime en 30 dias, otro en 25, y otro en 20, se pregunta en quántos lo imprimirán todos juntos? Si supongo que lo imprimen en 1 dia, hallo que imprimiendo el 1° 1/30 del libro, el 2° 1/25 y el 3°, 1/20, todos juntos imprimirán, sumando dichas partes, 1850/15000 = 37/300, en un dia: hago ahora esta regla de tres, si 37/300 del libro se imprime en un dia, 300/300 que es todo el libro, en quánto se imprimirá? esto es, 37/300:300/300, ó 37, p.300::1 dia: x = 300/37 = 8 4/37, que son los dias y parte de dias que tardarán todos tres. (García, 1782, p. 146)

Pese a la aparición de *"x"* casi al final de la resolución, este método es puramente aritmético. De hecho, se trata de una aplicación del método de falsa posición simple que consiste, como se ve, en poner un tiempo arbitrario y ver qué parte del trabajo se efectuaría en ese tiempo para después, mediante una regla de tres, calcular el tiempo necesario para completar el trabajo. Es decir, este método coincide con el segundo de los presentados en la sección anterior.

Observamos, pues, que durante este periodo las soluciones a este tipo de problemas siguen siendo aritméticas y siguen estando relacionadas conceptualmente con la proporcionalidad. Encontramos además una nueva idea, la aplicación de la regla de compañías, muy natural si tenemos en cuenta el contexto sociocultural de la época (Navarro, 2006). Sin embargo, el deseo de traducir los problemas de trabajo cooperativo a problemas de repartos implica, como hemos visto, que algunos autores comiencen a introducir el dato (innecesario) de la capacidad total del recipiente. La aparición de este nuevo dato (si es que se utiliza para resolver el problema) hace que el método de resolución se alargue, explicando así por qué encontramos la modificación del enunciado en la que se proporcionan flujos totales y no relativos.

También es interesante ver cómo algunos autores ubican este problema dentro de las aplicaciones de la regla de falsa posición que, sin embargo, no es más que un nuevo nombre para una de las primeras técnicas descritas. En todo caso, este deslizamiento hacia las compañías y la falsa posición anticipa, y en cierto modo explica, la algebrización de las técnicas de resolución de este tipo de problemas que observaremos en secciones siguientes.

[7] Sin embargo, en la edición de 1794 el proceso de resolución, por lo demás idéntico, omite cualquier mención a *"x"*.

El siglo xix

Comenzamos presentando un problema extraído del *Tratado elemental de aritmética* de S. F. Lacroix.[8] En este texto volvemos a encontrar el problema en la sección dedicada a la regla de compañías:

> Por conclusión supongamos dos fuentes, una de las cuales corriendo sola, llena de agua en el espacio de dos horas y media un cierto estanque; siendo así que la otra necesita, para llenarlo por sí sola, todo el tiempo de tres horas y tres cuartos, y se nos pregunta: ¿cuánto tiempo bastará para que corriendo las dos juntas lo llenen?
>
> En contestación, buscaremos en primer lugar qué parte del estanque se llena por la primera fuente en un tiempo dado, como de una hora; y veremos que si consideramos como unidad á la capacidad del estanque, con solo dividir la misma unidad por 2 ½ ó por la fracción equivalente 5/2 horas; nos resultará por cuociente 2/5 del estanque, que es lo que deseábamos conocer [...] 4/15 es la parte del estanque que debe llenarse por sola la segunda fuente en el tiempo de una hora.
>
> Sabiendo ya, pues, que corriendo las dos fuentes juntas, han de ocupar [...] en el espacio de una hora la suma de las dos porciones designadas por las fracciones 2/5 y 4/15, equivalentes a 10/15 de la capacidad del estanque, se ve con suficiente claridad que dividiendo la unidad con que hemos representado toda la capacidad por la fracción 10/15, resulta por cuociente la fracción impropia 15/10, equivalente á hora y media que necesitarán las dos fuentes para llenar el estanque corriendo ambas á un mismo tiempo. (Lacroix, 1846, pp. 318-319)

Resulta llamativo que, pese a estar incluido entre los problemas de aplicación de la regla de compañías, el método de resolución utilizado por Lacroix coincide exactamente con la regla enunciada en el *Jiu Zhang Suan Shu* o en el *Lilavati* respecto a calcular el inverso de la suma de los inversos. El procedimiento aparece en este caso completamente detallado y explicado paso a paso.

El caso anterior supone una rareza en textos de este periodo. De hecho, resulta relativamente complicado encontrar este tipo de problema en libros dedicados a la aritmética. El propio Lacroix lo señala justo después de resolver el problema anterior indicando que:

[8] Sobre este autor puede consultarse, por ejemplo, Taton (1953).

> ...a quien sepa analizar la propuesta de una cuestión [...] con dificultad se le ofrecerá alguna de este género que no pueda resolverla [...] y mayormente cuando sepa hacer uso de los ventajosos auxilios que para todo ello suministra el álgebra. (Lacroix, *op. cit.*, pp. 319-320)

Un primer ejemplo de este fenómeno se puede observar en el *Tratado de álgebra* de Juan Cortázar,[9] editado en Madrid. El siguiente problema aparece en el capítulo dedicado a los problemas de ecuaciones con una incógnita:

> Un caño llena una vasija en 30 horas, otro caño la llena en 20 horas, y un tercer caño llena dicha vasija en 10 horas. Se quiere saber en cuántas horas llenarán la misma vasija tres caños juntos.
>
> Sea x el número de horas que tardarán los tres caños en llenar la vasija. Para poner el problema en ecuación, debemos someter a la x a las mismas operaciones que haríamos si fuese conocida, para comprobarla. Deberemos, pues, hallar la parte de la capacidad de la vasija que llenarán los tres caños en el tiempo x, é igualar su suma á 1, capacidad de la vasija.
>
> Estas partes se hallan fácilmente por el método de reducción á la unidad del modo siguiente: si el primer caño llena en 30 horas la vasija, en 1 hora llenará 1/30 de la capacidad de la vasija, y en x horas llenará $x/30$ de la vasija. Del mismo modo se halla que las partes, que en las x horas llenan los otros dos caños, son $x/20$ y $x/10$: luego, como estás tres partes deben componer toda la capacidad de 1 de la vasija, será
>
> $$\frac{x}{10}+\frac{x}{20}+\frac{x}{30}=1,$$
>
> de donde resulta $x = 5\ 5/11$ horas. (Cortázar, 1849, pp. 87-88)

El método seguido es muy similar al de Lacroix, tomando la unidad como capacidad de la vasija, pero haciendo entrar en juego una incógnita para denotar el tiempo de llenado. Tanto en el desarrollo de la solución como en la forma de la ecuación final obtenida se observa que el uso del álgebra en este caso no modifica apenas el método de resolución.

---

[9] En Irueste (1912) podemos leer un panegírico completo redactado 39 años después de su fallecimiento.

El siguiente ejemplo, extraído del *Manual de álgebra*[10] escrito en Barcelona por José Oriol y Bernadet, también aparece entre los problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Como en ejemplos anteriores, el autor simplifica el problema proporcionando flujos de agua totales en vez de relativos, así como la capacidad total a llenar:

> Una fuente tiene 3 caños: el primero da 72 qq. De agua en 6 horas, el segundo 27 qq. En 5 hs. Y el tercero 36 en 7 hs. Manando juntos, en cuánto tiempo darán 8000 qq. de agua?
>
> El primer caño en una hora da 72/6 qq. de agua, el segundo 27/5 qq. y el tercero 36/7 qq.; luego juntos en una hora dan 72/6 + 27/5 + 36/7 qq. de agua; y siendo x las horas que fluyan juntos, darán un número de qq. de agua expresado por (72/6 + 27/5 + 36/7) × x; pero esta cantidad de agua ha de ser 8000 qq., luego la ecuación será (72/6 + 27/5 + 36/7) × x = 8000 [...] (Oriol, 1844, pp. 201-202)

Nuevamente se puede apreciar que el uso del lenguaje algebraico no aporta ideas nuevas al proceso de resolución. Antes al contrario, al asignar a la incógnita *"x"* el valor del número de horas, se enmascara el hecho de que conociendo la cantidad de agua que se ha vertido en total en 1 hora es inmediato obtener el tiempo necesario para verter 8000 qq.

Concluimos este repaso de textos del siglo XIX observando que fue en este periodo cuando se comenzó a utilizar el álgebra para resolver este tipo de problemas. De hecho, éstos dejan de aparecer en textos de aritmética (o en las partes dedicadas a esta disciplina en obras generales) para ocupar un lugar en los listados de problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Sin embargo, pese a este uso del lenguaje algebraico, las ideas que subyacen a los métodos de resolución siguen siendo las mismas que en periodos anteriores.

Desde el siglo XX hasta la actualidad

Pese a la corriente iniciada en el periodo anterior, este tipo de problemas de trabajo cooperativo sigue recibiendo en algunos textos un tratamiento aritmético. Encontramos uno de estos ejemplos en la *Aritmética razonada y nociones de*

[10] *Para uso de las escuelas y colegios.*

álgebra de José Dalmáu Carles. En la sección dedicada a "ejercicios y problemas sobre los quebrados comunes" encontramos el siguiente enunciado:

> Un obrero puede hacer cierto trabajo en 2 días, y otro puede hacerlo en 3 días. ¿Qué tiempo necesitarán los dos obreros trabajando juntos? (Dalmáu, 1934, p. 145)

Una posible explicación a este hecho sería que, aunque reeditada hasta mediados del siglo XX, el texto original de esta *Aritmética razonada* se remonta al menos hasta finales del XIX. Sin embargo, en textos del antiguo BUP se aprecia una cierta ambigüedad en el tratamiento de estos problemas. Se llega a dar el caso de que, en dos libros de texto de una misma editorial y de unos mismos autores, encontramos tratamientos diferentes.

Así en un texto de la editorial SM del año 1989 encontramos el siguiente problema, cuyo enunciado ilustra claramente el tratamiento algebraico que se pretende darle:

> Un trabajador A hace una obra en d_1 días y otro B lo hace en d_2 días. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerla trabajando juntos? (Vizmanos, Anzola y Primo, 1989, pp. 284-285)

Sin embargo, en otro texto de esa misma editorial, publicado tan solo un año después y escrito por algunos de los autores anteriores, encontramos el siguiente problema en el tema 1, titulado "Números racionales":

> De los tres caños que fluyen a un estanque, uno puede llenarlo en 36 horas, otro en 30 horas y el tercero en 20 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarlo juntos. (Vizmanos y Anzola, 1990, p. 17)

El tratamiento errático de estos problemas se mantiene hasta la actualidad. Por ejemplo, en un texto de 2° de ESO de la editorial Anaya se presenta el siguiente problema en el capítulo 6, titulado "Ecuaciones":

> Un depósito dispone de dos grifos, A y B. Abriendo solamente A, el depósito se llena en 3 horas. Abriendo ambos se llena en 2 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abre solamente B? (Cólera y Gaztelu, 2008, p. 144).

Aunque este problema no se ajusta exactamente al esquema original, la modificación no afecta ni a la dificultad ni a las ideas que se deben poner en juego para su resolución. La resolución dada por los autores pasa por introducir como incógnita el tiempo que tardaría B en llenar el depósito, con lo que la ecuación por resolver es:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

Por otro lado, los mismos autores, en el texto de la misma editorial correspondiente a la opción A de 4° de ESO, proponen el siguiente problema idéntico al propuesto por Andrés Puig y analizado en la sección "Siglos XVI a XVIII".

> Un depósito de 21000 l se abastece de dos grifos que aportan un caudal de 40 l/min y de 30 l/min, respectivamente. ¿Cuánto tardará en llenarse el depósito si se abren ambos grifos simultáneamente? (Cólera, Martínez, Gaztelu y Oliveira, 2008, p. 76)

Este problema, versión simplificada del original, aparece en el capítulo titulado "Problemas aritméticos", pero mientras Puig lo catalogaba como un problema de aplicación de la regla de compañías, estos autores lo ubican entre los problemas llamados "de móviles".

ANÁLISIS DE LOS PROBLEMAS ENCONTRADOS Y DE SUS MÉTODOS DE RESOLUCIÓN

Iniciaremos nuestro análisis de los problemas presentados en la sección anterior catalogando todas las magnitudes que son susceptibles de aparecer en ellos. Por simplicidad, asumiremos que en el problema únicamente aparecen dos grifos *A* y *B:*

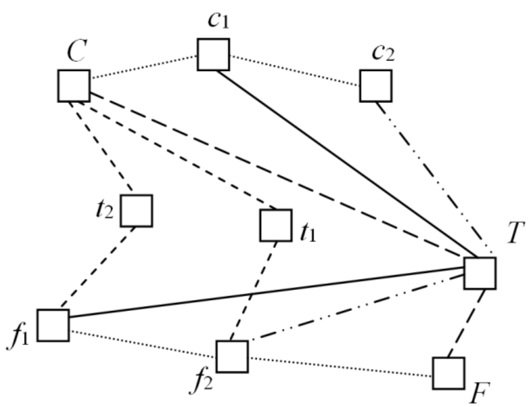
T	Tiempo necesario para llenar el depósito cuando ambos grifos están abiertos
t_1	Tiempo necesario para llenar el depósito cuando solo *A* está abierto
t_2	Tiempo necesario para llenar el depósito cuando solo *B* está abierto
C	Capacidad total del depósito
c_1	Cantidad de líquido vertida por el grifo *A* en el tiempo *T*
c_2	Cantidad de líquido vertida por el grifo *B* en el tiempo *T*
f_1	Flujo de *A:* Cantidad vertida por el grifo *A* por unidad de tiempo
f_2	Flujo de *B:* Cantidad vertida por el grifo *B* por unidad de tiempo
F	Flujo total: Cantidad vertida por *A* y *B* juntos por unidad de tiempo

Entre las magnitudes que se detallan en la tabla anterior existen una serie de relaciones "evidentes" a partir de sus definiciones y del carácter aditivo de algunas de ellas. En concreto:

$$C = c_1 + c_2, \qquad F = f_1 + f_2$$

$$C = F \cdot T, \qquad C = f_i \cdot t_i, \qquad c_i = f_i \cdot T$$

Con todas estas relaciones se puede construir lo que Cerdán (2005) llama "grafo trinomial teórico" del problema (cuando existe ambigüedad se han marcado las aristas con líneas punteadas de diferente tipo).



En los problemas estudiados siempre se solicita el cálculo del valor de T y, en algunas ocasiones, los de c_1 y c_2. Encontramos una mayor variación respecto a los datos que se proporcionan en el enunciado. En función de estos datos podemos distinguir tres tipos de problemas. Para cada uno de ellos se han identificado diversos métodos de resolución:

- Tipo 1: se proporcionan como datos los valores t_i.
    a. Método 1.1 (significados-aritmética): se obtiene la parte del depósito que llena cada grifo por unidad de tiempo, a continuación se suman dichos valores para obtener la parte del depósito que llenan entre todos por unidad de tiempo y tomando el inverso de este valor se obtiene el tiempo T buscado.
    b. Método 1.2 (falsa posición): se elige un tiempo concreto arbitrario y se calcula el número de veces que llenaría el depósito cada grifo en ese tiempo, se suman dichos valores para obtener el número de veces que se llenaría el depósito en ese tiempo con todos los grifos abiertos y, finalmente, se recurre a la proporcionalidad (regla de tres) para calcular el tiempo T necesario para llenarlo una vez.
    c. Método 1.3 (significados-álgebra): se llama x al tiempo buscado T y se llega a plantear una de las dos ecuaciones siguientes:

$$\frac{x}{t_1} + \cdots + \frac{x}{t_n} = 1, \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{t_1} + \cdots + \frac{1}{t_n}$$

- Tipo 2: se proporcionan como datos los valores C y t_i.
    a. Método 2.1: se omite el dato de la capacidad y se procede como en los problemas de tipo 1.
    b. Método 2.2 (regla de compañías): se reparte la capacidad C del depósito de forma inversamente proporcional a los valores t_i. Las partes obtenidas son justamente los valores c_i. Para calcular el tiempo T se aplica una regla de tres del siguiente modo: si en un tiempo t_i el grifo vierte C, ¿cuánto tiempo tardará en verter c_i?
- Tipo 3: se proporcionan como datos C, f_1 y f_2.
    a. Método 3.1 (flujo total): se calcula el valor del flujo total F y, llamando x al tiempo buscado, se plantea la ecuación $F \cdot x = C$.
    b. Método 3.2 (regla de compañías): se reparte la capacidad C del depósito de forma directamente proporcional a los valores f_i. Las partes

obtenidas son justamente los valores c_i. Para calcular el valor T buscado, se recurre a cualquiera de las relaciones $c_i = f_i \cdot T$.

Algunos de estos métodos pueden interpretarse observando el grafo del problema que hemos construido anteriormente. De este modo, en el método 1.1 se toma el valor $C = 1$ y a partir de allí se pueden ir calculando los valores de los demás vértices desconocidos *destruyendo* (Cerdán, 2005) el grafo. En el método 3.1, los datos proporcionados son suficientes para aplicar el proceso.

En otros casos es necesario recurrir a otro tipo de relaciones "no explicitas" entre las cantidades implicadas para poder calcular el valor de algunos vértices desconocidos. Así sucede en los métodos relacionados con técnicas propias de la proporcionalidad aritmética, como el de falsa posición y el de la regla de compañías. En ellos se recurre a la proporcionalidad entre algunas de las magnitudes implicadas para poder dar valores a algunos vértices desconocidos y poder así destruir el grafo.

Finalmente, en el método 1.3 se aplica el método de análisis-síntesis (Puig y Cerdán, 1990) tomando $C = 1$ y considerando como incógnita el tiempo T buscado.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos tratado de mostrar una interesante aplicación de la Historia de las Matemáticas a la Didáctica de la Matemática (Fauvel y Van Maanen, 2000; Katz y Tzanakis, 2011). En concreto hemos presentado un análisis detallado de los llamados problemas "de grifos", constatando su persistencia en el tiempo y observando la gran variedad de enfoques que se han seguido a la hora de resolverlos.

Desde un punto de vista histórico, pensamos que este tipo de problemas debe considerarse un problema esencialmente aritmético. Y esto, pese al progresivo desplazamiento que se ha producido a lo largo del tiempo desde los capítulos dedicados a la aritmética (en concreto a la proporcionalidad) hacia los dedicados al álgebra.

En concreto, de todos los métodos de resolución encontrados, tan solo el método 1.3 hace uso de manera esencial del lenguaje algebraico y, pese a ello, necesita recursos aritméticos, como considerar la capacidad del depósito como unidad o entender que el inverso del tiempo requerido para llenar el depósito es el número de veces que se llena dicho depósito en la unidad de tiempo.

En todo caso, si de lo que se trata es de utilizar esta familia de problemas para introducirse en el uso del lenguaje algebraico, quizá lo más natural (aunque esto debiera ponerse a prueba) sea introducir como incógnita no ya el tiempo T sino la capacidad C, puesto que, de este modo, las operaciones que se realizan con la incógnita y las cantidades conocidas son más fácilmente interpretables.

Además de este desplazamiento hacia el álgebra (entendemos que algo forzado y artificial) se observa otro fenómeno interesante: la modificación de los datos del problema encaminada bien a permitir el uso de una técnica concreta (pensamos que la aparición de los problemas de tipo 2 se sustenta en el deseo de utilizar una regla de compañías), bien a la simplificación de la situación (los problemas de tipo 3 admiten una solución muy simple y natural, el denominado método 3.1).

Finalmente, pensamos que el trabajo con esta familia de problemas es didácticamente interesante por el número de magnitudes que intervienen en ellos, y por las relaciones aritméticas que se pueden establecer entre ellas. En este sentido, puede promover entre los alumnos el uso significativo de los números racionales y de las operaciones con ellos.

AGRADECIMIENTOS

Los autores han sido parcialmente financiados por el grupo “S119-Investigación en Educación Matemática” del Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alzugarai, J. J. (1988), *Vascos universales del siglo XVI,* Madrid, Encuentro.

Cerdán, F. (2005), “En la familia de problemas aritmético-algebraicos”, Comunicación presentada en el grupo de trabajo Pensamiento Numérico y Algebraico, Córdoba, SEIEM.

———— (2008), *Estudios sobre la familia de problemas aritmético-algebraicos,* Valencia, Servei de Publicacions.

Cólera, J. e I. Gaztelu (2008), *Matemáticas 2,* Toledo, Anaya.

Cólera, J., M. Martínez, I. Gaztelu y M. J. Oliveira (2008), *Matemáticas 4. Opción A,* Toledo, Anaya.

Cortázar, J. (1849), *Tratado de álgebra,* Madrid, Imprenta de Don A. Espinosa y compañía.

Cuesta, N. (1974), *El maestro Juan Justo García,* Salamanca, Publicaciones Universidad de Salamanca.

Cullen, C. (2004), *The Suàn shù shu 'Writings on reckoning': A translation of a Chinese mathematical collection of the second century BC, with explanatory commentary,* Cambridge, Needham Research Institute.

Dalmáu, J. (1934), *Soluciones analíticas de los ejercicios y problemas contenidos en las siguientes obras del autor: Aritmética razonada y nociones de álgebra. Lecciones de aritmética, 1ª parte. Lecciones de aritmética, 2ª parte. Resumen de las lecciones de aritmética y rudimentos de aritmética,* Barcelona, Juan Darné.

Díaz, M. V., y A. Poblete (2001), "Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula", *Números,* núm. 45, pp. 33-41.

Fauvel, J., y J. van Maanen (2000), *History in Mathematics Education,* Dordrecht, Kluwer.

Filloy, E., y T. Rojano (1989), "Solving equations: The transition from arithmetic to algebra", *For the Learning of Mathematics,* núm. 2, pp. 19-25.

García, J. J. (1782), *Elementos de aritmética, álgebra y geometría,* Madrid, Joachîn Ibarra.

Gómez, B. (1999), "Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de 'compañías'", *RELIME,* vol. 2, núm. 3, pp. 19-29.

———— (2011), "Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática", *Epsilon,* vol. 28, núm. 1, pp. 9-22.

Hortega, J. de (1552), *Tratado subtilissimo de Aritmética y de Geometría,* Sevilla.

Irueste, A. (1912), "D. Juan Cortázar", *Revista de la Sociedad Matemática Española,* núm. 8, pp. 285-290.

Kangshen, S., J. N. Crossley y A.W.-C. Lun (1999), *The nine chapters on the mathematical art,* Beijing, Oxford University Press.

Katz, V. y K. Tzanakis (2011), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Educatio*n, Washington, MAA.

Lacroix, S. F. (1846), *Tratado elemental de aritmética*, Madrid, Imprenta nacional.

Malet, A. (2000), "Mil años de Matemáticas en Iberia", en A. J. Durán (ed.), *El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros,* Sevilla, SAEM Thales, pp. 193-224.

Meavilla, V., y A. M. Oller Marcén (2013), "'Comprando caballos': Soluciones históricas a un tipo de problemas famosos", *Epsilon,* vol. 30, núm. 1, núm. 83, pp. 105-126.

Navarro, J. (2006), "La regla de compañía y la didáctica del reparto proporcional", *Sigma,* núm. 28, pp. 117-130.

Oriol, J. (1844), *Manual de álgebra,* Barcelona, Imprenta y librería de José Matas.

Patwardan, K. S., S. A. Naimpally y A. L. Singh (2001), *Lilavati of Bhaskaracarya. A treatise of mathematics of vedic tradition,* Delhi, Motilal Banarsidass Publishers.

Pérez de Moya, J. (1562), *Arithmetica practica, y speculatiua,* Salamanca, Mathias Gast.

Puig, A. (1673), *Arithmetica espvlativa, y practica, y arte de Algebra,* Barcelona, Antonio Lacavalleria.

Puig, L. y F. Cerdán (1999), "Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales", en E. Filloy y T. Rojano (eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional en Educación Matemática,* Cuernavaca, Morelos, México, PNFAPM, pp. 34.58.

Requena, A. (2006), "Matemáticas, mitología y poesía. Aritmética en la Antología Palatina (I)", *SUMA*, núm. 53, pp. 19-26.

——————— (2007), "Matemáticas, mitología y poesía. Aritmética en la Antología Palatina (II)", *SUMA*, núm. 54, pp. 31-42.

Sigler, L. E. (2002), *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation,* Springer Verlag, Nueva York.

Socas, M. (2011), "La enseñanza del álgebra en la Educación Obligatoria. Aportes desde la investigación", *Números,* núm. 77, pp. 5-34.

Taton, R. (1953), "Laplace et Sylvestre-François Lacroix", *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications,* vol. 6, núm. 4, pp. 350-360.

Usiskin, Z. (1988), "Conceptions of School Algebra and Uses of Variables", en A. Coxford (ed.), *The Ideas of Algebra K−12,* Reston, Virginia, NCTM, pp. 8-19.

Vizmanos, J. R., y M. Anzola (1990), *Algoritmo 1: Matemáticas B.U.P. 1º,* Madrid, SM.

Vizmanos, J. R., M. Anzola y A. Primo (1989), *Funciones 1: Matemáticas 1º de B.U.P.,* Madrid, SM.

Wagner, S., y C. Kieran (eds.) (1989), *Research issues in the Learning and Teaching of Algebra. Volume 4,* Reston. Virginia y Hillsdale N. J., NCTM, Lawrence Erlbaum Associates.

Yciar, J. (1549), *Libro intitulado Arithmetica practica muy util y provechoso para* *toda persona que quiere exercitarse en aprender a contar agora nuevamente hecho por Juan de Yciar Vizcaino,* Zaragoza. Casa de Pedro Bernuz.

DATOS DE LOS AUTORES

Antonio M. Oller Marcén
Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, Zaragoza, España
(oller@unizar.es)

Vicente Meavilla Seguí
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España
(meavilla@unizar.es)