

Stabilité des ondes interfaciales tridimensionnelles soumises à des perturbations superharmoniques

N. Allalou^{ab}, M. Debiane^b, C. Kharif^c

a. Département de Physique, Université M'Hamed Bougara de Boumerdes, Avenue de l'Indépendance, Boumerdes 35000, Algeria

b. Faculté de Physique, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, B.P. 32 El Alia, Algiers 16111, Algeria

c. Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre, Technopole de Chateau-Gombert, 49 rue F.Joliot-Curie, B.P.146,13384 Marseille Cedex 13, France

Résumé :

L'étude de la stabilité des ondes à courtes crêtes interfaciales en profondeurs infinies soumises à des perturbations superharmoniques infinitésimales a été entreprise. L'écoulement de base est généré par l'interaction oblique de deux trains d'ondes de mêmes caractéristiques. On montre que les instabilités superharmoniques s'identifient à des résonances harmoniques, comme les ondes de surface tridimensionnelles. Les résultats obtenus mettent en évidence un rapport des densités au voisinage de 0.08 pour lequel le taux d'amplification est maximal. De plus une re-stabilisation est observée pour un rapport des densités autour de 0.36.

Abstract :

A numerical investigation of the stability of short crested interfacial gravity waves of infinite depths to infinitesimal three dimensional superharmonic perturbation has been realized. The basic flow is defined as a superposition of two-dimensional progressive wave trains of equal wavelengths. Like tridimensional surface waves, harmonic resonance is associated with a superharmonic instability of class I. The results shows that the existence a value of density ratio near 0.08 for which the growth rate is maximal. In the other hand, we observe a re-stabilization when the density ratio is in the vicinity of 0.36.

Mots clefs : Onde interfaciale à courtes crêtes, perturbation superharmonique, résonance harmonique

1 Introduction

L'intérêt du problème de la stabilité des ondes interfaciales est attribuable au caractère instationnaire de plusieurs processus naturels ou industriels. Ces ondes se dissipent notamment par déferlement dont on sait que le mélange induit est capital pour l'équilibre sous-marin. Leurs mouvements contribuent au transport des sédiments et à la remise en suspension des déchets. Les charges subies par les infrastructures marines sous l'effet de la présence d'ondes internes peuvent être importantes. Les ondes interfaciales interviennent également dans d'autres situations physiques qui ont lieu en dehors des océans, des mers et des lacs. On les rencontre dans les systèmes de lubrification, de réfrigération, en aérodynamique, dans les réacteurs chimiques...

Ce travail est une extension naturelle de l'étude de la stabilité des ondes à courtes crêtes réalisée par Ioualalen [2] au cas des ondes interfaciales à courtes crêtes. Il s'agit, en particulier, d'analyser l'influence du rapport des densités sur le taux d'amplification et la zone instable.

Les ondes à courtes crêtes peuvent être générées, soit par l'interaction non linéaire de deux trains d'ondes de même amplitude qui se propagent suivant des directions différentes, soit elles naissent spontanément par bifurcation de vagues bidimensionnelles. Dans notre cas, ces ondes sont obtenues

par interaction d'un train d'ondes interfaciales avec sa réflexion sur une paroi verticale, comme indiqué dans la figure (1). Le paramètre θ est l'angle entre la direction de l'onde incidente et la normale au mur. Le cas $\theta = 0$, correspond à une onde stationnaire. Pour $\theta = \pi/2$, il s'agit d'une onde bidimensionnelle progressive. Le problème de la stabilité consiste à superposer des ondes de base que sont les formes permanentes obtenues par Allalou et *al.*[1] et de petites perturbations harmoniques. La méthode utilisée pour résoudre le problème est celle des perturbations. En utilisant le logiciel du calcul formel MAPLE, une solution analytique d'ordre 4 a été calculée, puis une extension numérique jusqu'à l'ordre 27 a été réalisée (voir [1]). En particulier, cette méthode a permis de mettre en évidence le phénomène de résonance harmonique. Physiquement, ce dernier se produit lorsque le fondamental se propage avec la même vitesse de phase avec un des harmoniques d'ordres supérieurs. Mathématiquement, la résonance se traduit par l'apparition des diviseurs nuls. Ces résonance peuvent induire des instabilités de l'onde. Afin de mieux caractériser ces résonances, une étude de la stabilité linéaire a été entreprise. Pour les ondes de surface tridimensionnelles, les résonances harmoniques correspondent à des instabilités superharmoniques. En profondeur infinie, ces instabilités ont des taux d'amplifications faibles et ne peuvent apparaître que de manière sporadique ([2]).

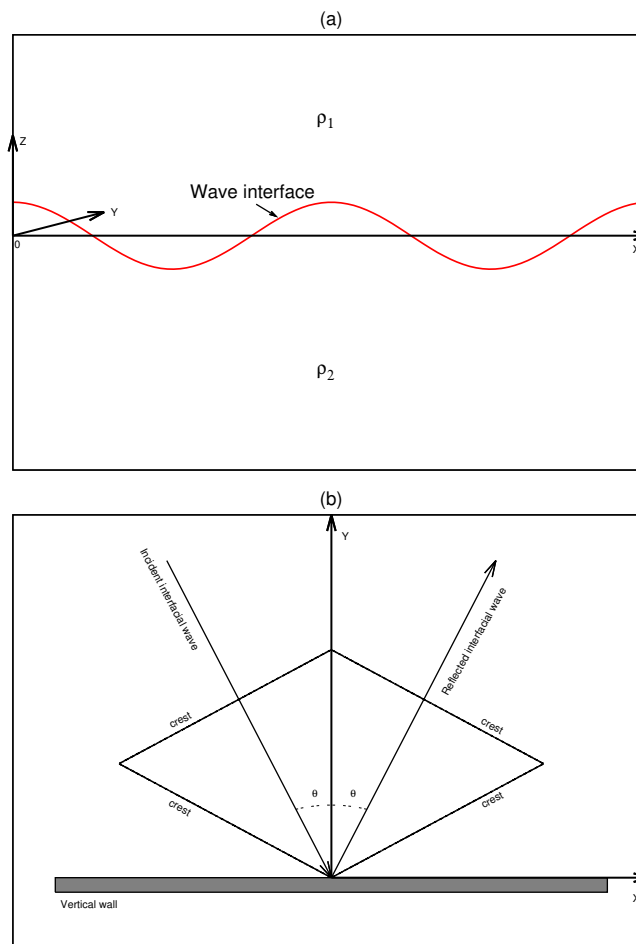


FIGURE 1 – (a) Représentation schématique d'une onde interfaciale. (b) : Génération d'ondes à courtes crêtes de formes permanentes par réflexion d'une onde interfaciale plane sur un mur vertical à une incidence θ par rapport à la normale au mur.

2 Formulation du problème

Nous considérons la réflexion oblique sur une paroi verticale d'un train d'ondes uniforme de gravité se propageant à l'interface de deux couches de fluides d'épaisseurs infinies. L'écoulement est supposé irrotationnel et les fluides parfaits, incompressibles et homogènes. Les propriétés du fluide inférieur

porteront l'indices 2 et celles de la couche supérieure l'indice 1.

On définit un repère mobile $\mathfrak{R}^*(O^*, x^*, y^*, z^*, t)$ se déplaçant à la vitesse de l'onde de base. Les variables x^* , y^* et z^* sont définies par :

$$\begin{cases} x^* = x - \omega t \\ y^* = y \\ z^* = z \end{cases} \quad (1)$$

où (x, y, z, t) sont les coordonnées dans le repère fixe. Le champ de vagues généré est celui des ondes à courtes crêtes qui se propagent uniformément dans la direction de la paroi. Ces ondes ont une forme doublement périodique suivant les deux directions (OX) et (OY) avec des longueurs d'ondes $\lambda_x = \lambda / \sin \theta$ et $\lambda_y = \lambda / \cos \theta$ le long de ces deux axes. Ici λ représente la longueur d'onde du train de vagues incident et θ l'angle entre sa direction de propagation et la normale au mur.

Dans le repère \mathfrak{R}^* , le problème des ondes interfaciales de gravité tridimensionnelles est régi par les équations suivantes dans lesquelles nous avons oté les astérisques pour des raisons de simplification :

$$\begin{cases} \phi_{ixx} + \phi_{iyy} + \phi_{izz} = 0 & z \geq \eta \text{ pour } i = 1 \text{ et } z \leq \eta \text{ pour } i = 2 \\ \eta_t + \phi_{ix}\eta_x + \phi_{iy}\eta_y - \phi_{iz} = 0 & (i = 1, 2) \quad \text{à } z = \eta \\ \mu \left[\phi_{1t} + \eta + \frac{1}{2}(\phi_{1x}^2 + \phi_{1y}^2 + \phi_{1z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/m)^2 \right] - \\ \left[\phi_{2t} + \eta + \frac{1}{2}(\phi_{2x}^2 + \phi_{2y}^2 + \phi_{2z}^2) - \frac{1}{2}(\omega/m)^2 \right] = 0 & \text{à } z = \eta \\ \phi_{1z} = 0 & \text{à } z \rightarrow \infty \text{ et } \phi_{2z} = 0 \quad \text{à } z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (2)$$

ici, $m = \sin \theta$, η est l'élévation de l'interfac, ω est la fréquence de l'onde non perturbée dans le repère fixe et ϕ_i ($i=1,2$) représentent les potentiels des vitesses des couches supérieure et inférieure respectivement.

L'étude de la stabilité linéaire consiste à superposer à l'écoulement de base des perturbations instationnaires périodiques d'amplitudes infinitésimales. On décompose ainsi le mouvement comme étant la somme d'une solution permanente et d'une perturbation :

$$\begin{cases} \eta(x, y, t) & = \bar{\eta}(x, y) + \eta'(x, y, t) \\ \phi_i(x, y, z, t) & = \bar{\phi}_i(x, y, z) + \phi'_i(x, y, z, t) \quad (i = 1, 2) \end{cases} \quad (3)$$

où $\bar{\eta}(x, y)$ et $\bar{\phi}_i(x, y, z)$ sont les solutions de formes permanentes dans \mathfrak{R}^* et $\eta'(x, y, t)$ et $\phi'_i(x, y, z, t)$ les perturbations avec :

$$\eta'(x, y, t) \ll \bar{\eta}(x, y) \quad \text{et} \quad \phi'_i(x, y, z, t) \ll \bar{\phi}_i(x, y, z) \quad (4)$$

$\bar{\phi}_1$, $\bar{\phi}_2$ et $\bar{\eta}$ ont pour expressions :

$$\begin{cases} \bar{\phi}_1 & = -cX + \sum_{r=1}^N h^r \sum_{mn} b_{mn}^r \sin mX \cos nY e^{-\alpha_{mn}Z} \\ \bar{\phi}_2 & = -cX + \sum_{r=1}^N h^r \sum_{mn} c_{mn}^r \sin mX \cos nY e^{\alpha_{mn}Z} \\ \bar{\eta} & = \sum_{r=1}^N h^r \sum_{mn} a_{mn}^r \cos mX \sin nY \\ \omega & = \sum_{r=1}^N h^r \omega_r \end{cases} \quad (5)$$

Avec $\alpha_{mn}^2 = (\alpha m)^2 + (\beta n)^2$. α et β représentent les nombres d'ondes adimensionnels suivant les directions (OX) et (OY) et sont définis par :

$\alpha = \sin \theta$ et $\beta = \cos \theta$.

Les inconnues a_{mn}^r , b_{mn}^r , c_{mn}^r et ω_r intervenant dans ces solutions ont été déterminées en utilisant la méthode décrite dans [1].

En substituant les relations (3) dans le système d'équations (2) et en développant les potentiels des

vitesse ϕ_1 et ϕ_2 autour de $z = \bar{\eta}(x, y)$ ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles, on obtient à l'ordre zéro les solutions de l'écoulement de base exprimé dans le repère mobile. Les détails de calculs sont donnés dans [1].

A l'ordre 1 on obtient le système d'équations aux perturbations :

$$\phi'_{ixx} + \phi'_{iyy} + \phi'_{izz} = 0 \quad z \geq \bar{\eta} \text{ pour } i = 1 \text{ et } z \leq \bar{\eta} \text{ pour } i = 2 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \phi'_{iz} - (\bar{\eta}_x \phi'_{ix} + \eta'_x \bar{\phi}_{ix}) - (\bar{\eta}_y \phi'_{iy} + \eta'_y \bar{\phi}_{iy}) - \eta'(\bar{\eta}_x \bar{\phi}_{ixz} + \bar{\eta}_y \bar{\phi}_{iyz}) \\ + \eta' \bar{\phi}_{zz} - \eta'_t = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{à } z = \bar{\eta}(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu \left[\eta' + \phi'_{1t} + \bar{\phi}_{1x} \phi'_{1x} + \bar{\phi}_{1y} \phi'_{1y} + \bar{\phi}_{1z} \phi'_{1z} + \eta' (\bar{\phi}_{1x} \bar{\phi}_{1xz} + \bar{\phi}_{1y} \bar{\phi}_{1yz} + \bar{\phi}_{1z} \bar{\phi}_{1zz}) \right] - \\ \left[\eta' + \phi'_{2t} + \bar{\phi}_{2x} \phi'_{2x} + \bar{\phi}_{2y} \phi'_{2y} + \bar{\phi}_{2z} \phi'_{2z} + \eta' (\bar{\phi}_{2x} \bar{\phi}_{2xz} + \bar{\phi}_{2y} \bar{\phi}_{2yz} + \bar{\phi}_{2z} \bar{\phi}_{2zz}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi'_{1z} = 0 \quad \text{à } z \rightarrow \infty \text{ et } \phi'_{2z} = 0 \quad \text{à } z \rightarrow -\infty \quad (9)$$

On cherche des solutions des équations de Laplace (6) vérifiant les conditions aux limites (7), (8) et (9). On choisit des solutions ayant les formes :

$$\begin{cases} \eta' = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} a_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} \\ \phi'_1 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} b_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{-\gamma_{JK} z} \\ \phi'_2 = e^{-i\sigma t} \sum_{J=-\infty}^{J=\infty} \sum_{K=-\infty}^{K=\infty} c_{JK} e^{i(J\alpha x + K\beta y)} e^{\gamma_{JK} z} \end{cases} \quad (10)$$

avec $\gamma_{JK} = [(p + J\alpha)^2 + (q + K\beta)^2]^{1/2}$, $\alpha = \sin \theta$ et $\beta = \cos \theta$.

3 Méthode de résolution

En portant les séries (10) et leurs dérivées spatiales et temporelles, tronquées aux ordres M et N dans les équations aux perturbations (7) et (8), et en utilisant une méthode numérique de type *Galerkin*, la résolution des équations se réduit à celle d'un problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = i\sigma\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (11)$$

où $\mathbf{u} = [a_{JK}, b_{JK}, c_{JK}]^t$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre σ . Les matrices complexes \mathbf{A} et \mathbf{B} dépendent de l'onde de base et des nombres d'onde p et q .

Pour $h = 0$, le problème aux valeurs propres peut se résoudre facilement ; on obtient :

$$\sigma_{JK}^s = s(\gamma_{JK}R)^{\frac{1}{2}} - c_0(J\alpha), \quad s = \pm 1 \quad (12)$$

avec $\gamma_{JK} = [(J\alpha)^2 + (K\beta)^2]^{1/2}$, $c_0 = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{1}{2}}$ et $R = \omega_0^2 = \frac{1-\mu}{1+\mu}$.

Une instabilité peut apparaître quand deux modes de signatures opposées ont la même fréquence :

$$\sigma_{J_1 K_1}^s(h) = \sigma_{J_2 K_2}^{-s}(h) \quad (13)$$

En substituant la relation (12) dans (13) et si l'on considère qu'une résonance harmonique (J, K) correspond à la collision de deux modes (J, K) et $(-J, K)$, c.a.d. $K_1 = K_2 = K$ et $J_1 = -J_2 = J$, on obtient :

$$\left[(J\alpha)^2 + (K\beta)^2 \right]^2 = J^2 \quad (14)$$

Cette équation peut être re-écrite sous la forme suivante :

$$\cos(\theta) = \frac{J^4 - J^2}{K^2 - J^2} \quad (15)$$

Cette condition est identique à la condition de résonance des ondes à courtes crêtes ([1]). Comme les ondes de surface tridimensionnelles, les instabilités superharmoniques des ondes à courtes crêtes s'identifient à des résonances harmoniques. La recherche des instabilités est effectuée au voisinage des pôles correspondant aux résonances harmoniques (J, K) .

4 Résultats et discussion

Nous nous sommes intéressés, en particulier, à la résonance qui est la plus forte en profondeurs infinies et qui se produit pour un angle $\theta = 53.23^\circ$. La figure (2) représente la fréquence, $Re(\sigma)$, et le taux d'amplification, $Im(\sigma)$, de la perturbation en fonction de l'onde de base pour $\theta = 53^\circ$, voisin de l'angle de résonance $\theta_{RH} = 52.23^\circ$, pour un rapport des densités $\mu = 0.1$. Lorsque l'amplitude de l'onde atteint la valeur $h_0 = 0.2419$, une instabilité naît par la coalescence de deux valeurs propres associées aux perturbations $(2, 6)$ et $(-2, 6)$. L'instabilité a une fréquence nulle relativement à l'onde de base. La figure (2(b)) montre un agrandissement du voisinage h_0 . La taille de la bulle d'instabilité est $\Delta h \approx 0.0036$, alors que le taux d'amplification maximal est de l'ordre 1.7×10^{-4} . Cette instabilité est donc faible et la taille de la bande d'instabilité indique que cette instabilité est sporadique.

Pour analyser l'influence du rapport des densités sur le taux d'amplification $Im(\sigma)$, on cherche d'abord

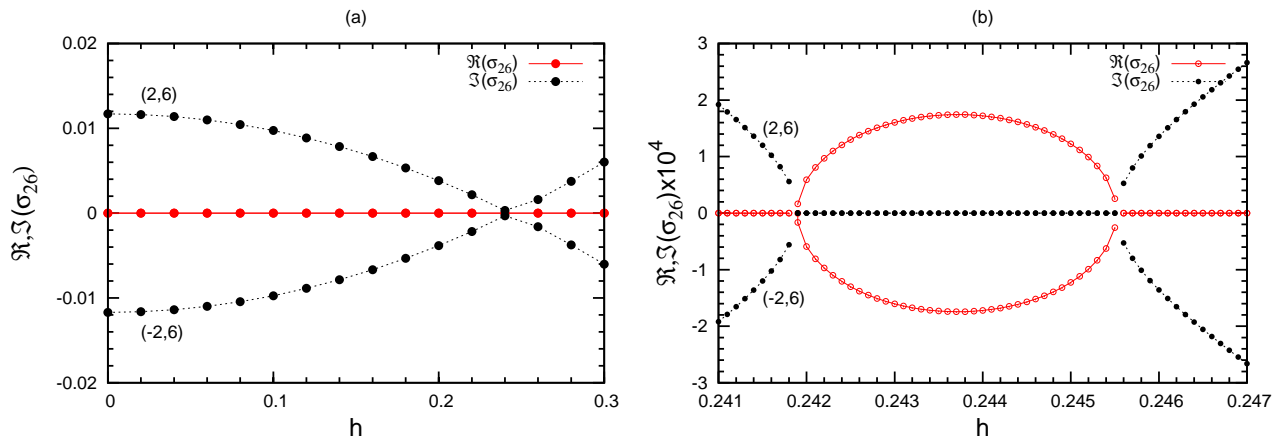


FIGURE 2 – (a) Fréquence, $Re(\sigma)$, et taux d'amplification, $Im(\sigma)$, en fonction de la cambrure de l'onde base pour $\mu = 0.1$ et $\theta = 53^\circ$. (b) L'agrandissement au voisinage de h_0 .

les pôles dus à la résonance harmonique $(2, 6)$. La figure 3 représente les lieux des pôles dans le plan (μ, θ) . Rappelons que la valeur de $\mu = 0$ correspond au cas des ondes de surface tridimensionnelles alors que pour $\mu = 1$ c'est le cas des ondes de Boussinesq. L'instabilité inhérente à la résonance $(2, 6)$ se développe au voisinage du pôle correspondant. Les figures (4)(a,b) montrent le diagramme de stabilité dans le plan (μ, θ) et l'évolution du taux d'amplification maximal en fonction de μ pour une cambrure de l'onde de base $h = 0.1$. Le taux d'amplification atteint un premier maximum $\sigma_{26}^{(1)}$ pour un rapport des densités $\mu = 0.08$, puis une restabilisation se produit pour une valeur de $\mu = 0.34$. Un deuxième maximum du taux d'amplification $\sigma_{26}^{(2)}$ est détecté pour un rapport des densités $\mu = 0.66$. Ce dernier est inférieur à $\sigma_{26}^{(1)}$ presque de moitié. Notons aussi que les taux d'amplifications maximaux sont de l'ordre $O(h^6)$. Ils sont donc faibles par rapport à ceux des ondes de surface tridimensionnelles sous-harmoniques (de l'ordre de $O(h^2)$).

5 Conclusion

L'étude de la stabilité linéaire des ondes à courtes crêtes soumises à des perturbations superharmoniques a permis de montrer que les résonances harmoniques sont des instabilités superharmoniques. Ces instabilités apparaissent de manière sporadique dans le sens où les tailles des bulles d'instabilité sont très faibles. De plus, il existe un rapport des densités $\mu = 0.08$ pour laquelle l'onde interfaciale

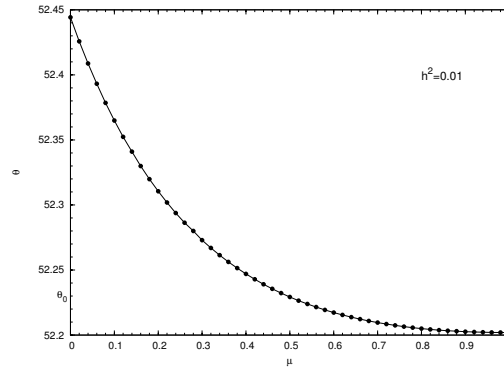


FIGURE 3 – Lieux des pôles de la résonance (2, 6) en fonction du rapport des densités pour $h = 0.1$. L'angle θ_0 correspond à l'angle de résonance pour $h = 0$.

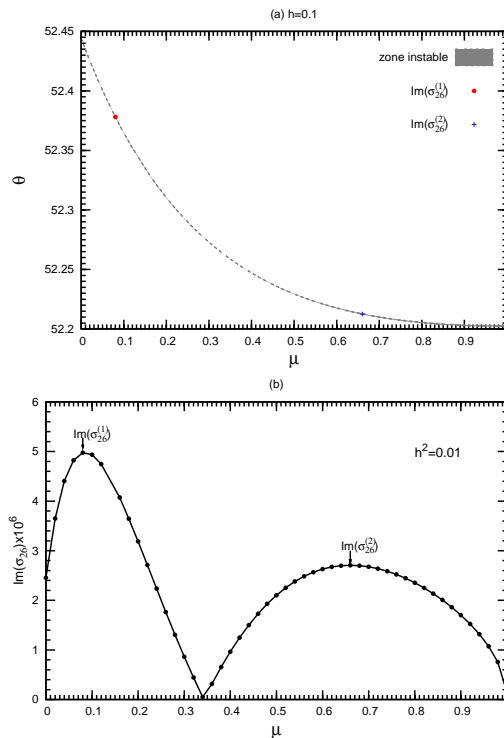


FIGURE 4 – (a) diagramme de stabilité dans le plan (μ, θ) pour $h = 0.1$, (b) L'évolution du taux d'amplification maximal en fonction du rapport des densités μ pour $h = 0.1$.

est la plus instable. Par ailleurs, pour un rapport des densités $\mu = 0.36$, les ondes à courtes crêtes sont stables aux perturbations superharmoniques.

Références

- [1] Allalou, N., Debaine, M., Kharif, C., 2011 Three-dimensional periodic interfacial gravity waves : analytical and numerical results *European Journal of Mechanics-B/Fluids* vol. **30**, no **4** 371-386.
- [2] Ioualalen, M., Kharif, C. 1993. Stability of three-dimensional progressive gravity waves on deep water to superharmonic disturbances. *European journal of mechanics. B, Fluids* **12(3)** 401-414.