

Détection de dommages localisés par une approche bayésienne

F. EL KHANNOUSSI^a, A. KHAMLI^a, A. HAJRAOUT^a, A. LIMAM^b

a. Equipe Systèmes de Communication, Université Abdelmalek Essaâdi, Tétouan, MAROC

b. Laboratoire LGCIE, Université Lyon 1, Villeurbanne, FRANCE

Résumé :

Une approche bayésienne est considérée afin d'identifier un dommage localisé occupant deux sites différents d'une plaque de Mindlin. La méthode s'appuie sur la mesure de la variation des premières fréquences propres de la plaque et sur la détermination des déformées modales pour l'état de référence où la plaque est supposé intact ainsi qu'à l'état endommagé. En supposant que les fréquences propres mesurées sont perturbées par un bruit gaussien de moyenne nulle et que l'information a priori suit une gaussienne, avec ces deux lois indépendantes et admettant chacune une matrice de covariance proportionnelle à l'identité, l'approche bayésienne a permis d'identifier la distribution de l'endommagement subi par chaque élément.

Abstract :

A Bayesian approach is considered in order to identify a localised damage occupying two distinct sites on a Mindlin Plate. The method is based on variation measurement of the first natural frequencies of the plate and determination of the modal forms for both the reference state of the plate assumed to be intact and its damaged state. Assuming that the measured natural frequencies are perturbed by a Gaussian noise having zero mean and that the prior information can be taken to be a multivariable Gaussian, with both these two random variables independent and having covariance matrices that are proportional to identity, the Bayesian approach has enabled to estimate damage distribution undergone by each element.

Mots clefs: détection, dommage, plaque, Mindlin, approche bayésienne, méthode fréquentielle, densité modale d'énergie de déformation.

1 Introduction

Sous l'effet d'un dommage localisé se produisant dans une structure, les propriétés mécaniques vont subir des variations. L'occurrence d'un dommage modifie principalement la rigidité et l'amortissement globaux de la structure. Les changements qu'il produit peuvent ainsi être exploités au sein d'une méthode de détection afin de localiser le dommage enduré et d'identifier son envergure. La détection s'appuie en général sur un algorithme spécifique qui utilise l'information sur l'évolution des modes de vibration de la structure lorsque celle-ci passe de l'état de référence à l'état où elle est endommagée. Dans le cas d'un dommage localisé isolé affectant une structure de type poutre ou plaque, la mesure des variations des fréquences propres a été utilisée conjointement avec la méthode des éléments finis pour localiser le site endommagé [1]. Une méthode numérique permettant de déterminer la position d'une fissure de profondeur variable dans une poutre à partir de la mesure des trois premières fréquences propres de la poutre endommagée a également été présentée [2].

Les méthodes fréquentielles souffrent d'un handicap sérieux, car la mesure des propriétés modales à faibles fréquences peut ne pas révéler l'existence d'un dommage si son envergure est relativement faible. Pour remédier à ses insuffisances, des techniques améliorées ont été introduites [3,4]. Elles utilisent l'énergie modale de déformation et la mesure des formes propres qui sont beaucoup plus sensibles aux défauts. L'identification du dommage a ainsi été effectuée à partir du suivi des formes propres [5,6].

Hu et al. [7] et Hu et Wu [8] ont considéré l'analyse modale et la méthode de l'énergie de déformation pour détecter des fissures de delamination dans les composites. L'analyse modale a été utilisée pour calculer les modes propres, et les formes propres pour calculer l'énergie de déformation moyennant la technique de différentiation numérique par quadrature [9,10].

L'une des limitations de ces méthodes qui s'appuient sur l'information tirée des propriétés modales de la

structure réside dans le fait qu'elles ne fonctionnent parfaitement que dans le cas d'un dommage isolé et lorsque celui dépasse une taille critique, de l'ordre de 2%. Elles butent dans le cas où le dommage occupe plusieurs sites dans la structure avec des niveaux variables compris entre 2% et 20%, [1,11]

Dans ce travail, nous proposons une méthode de détection qui couple l'approche bayésienne à deux méthodes vibratoires: (i) mesure de la variation des premières fréquences et (ii) variation de l'énergie modale de déformation évaluée par mesure des formes propres modales. Le dommage est supposé occuper deux sites séparés dans la structure avec des niveaux variables. La méthode de l'énergie de déformation est d'abord utilisée pour retracer l'information a priori relative au dommage structural présent dans la structure. Ensuite, l'analyse fréquentielle est considérée à travers la formulation bayésienne du problème qui permet d'intégrer cette information. La mesure de la variation des premières fréquences propres permet alors d'identifier les positions des sites endommagés et de quantifier l'amplitude du dommage.

2 Energie de déformation modale et indice de dommage

En utilisant $N_x \times N_y$ points pour mailler une plaque rectangulaire, avec x, y représentant les coordonnées cartésiennes d'origine le coin inférieur gauche de la plaque et d'axes ses deux bords, la densité modale d'énergie de déformation de flexion de la structure intacte pour l'élément centré sur le point (i, j) et le mode numéro k s'écrit d'après [1] sous la forme

$$u_{ijk} = D_{ij} \psi_{ij,k} \quad (1)$$

avec

$$\psi_{ij,k} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ij}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (2)$$

où D_{ij} est la rigidité de flexion de la plaque de l'élément centré sur le point (i, j) , Ω_{ij} le domaine de cet élément, ν le coefficient de Poisson et Φ_k la kème forme modale.

Un endommagement de type fissuration affecte surtout la raideur de la structure sans trop modifier la distribution de masse. La densité modale d'énergie de déformation de la structure endommagée pour l'élément centré sur le point (i, j) et pour le mode k s'écrit alors

$$u_{ijk}^* = D_{ij}^* \psi_{ij,k}^* \quad (3)$$

où l'étoile placée en exposant se réfère à la structure endommagée.

En supposant que le nombre des modes retenus après troncature modale est noté par m , l'énergie de déformation de l'élément centré sur (i, j) , pour respectivement la structure intacte et la structure endommagée s'écrit

$$U_{ij} = D_{ij} \Psi_{ij} \text{ et } U_{ij}^* = D_{ij}^* \Psi_{ij}^* \quad (4)$$

avec $\Psi_{ij} = \sum_{k=1}^m \psi_{ij,k}$ et $\Psi_{ij}^* = \sum_{k=1}^m \psi_{ij,k}^*$.

Le calcul effectif des quantités élémentaires Ψ_{ij} et Ψ_{ij}^* utilise la méthode de différentiation numérique par quadrature [9,10] afin d'évaluer les dérivées secondes apparaissant dans l'équation (2).

En supposant que le dommage est constant par élément, introduisons le coefficient d'endommagement suivant $d_{ij} = 1 - D_{ij}^* / D_{ij} \in [0,1]$, alors $U_{ij}^* = (1 - d_{ij}) D_{ij} \Psi_{ij}^*$. $d_{ij} = 0$ correspond ainsi à un élément intact alors $d_{ij} \rightarrow 1$ indique un fort endommagement pour lequel une perte quasi-totale de la rigidité se produit dans l'élément. Les expressions de l'énergie de déformation élémentaire de la structure dans son état intact et endommagé s'écrivent alors

$$U_e = D_e \Psi_e \text{ et } U_e^* = D_e \Psi_e^* (1 - d_e) \quad (5)$$

Pour éliminer la rigidité D_e , on introduit l'indice de dommage défini par

$$F_e = \frac{U_e^*}{U_e} = \frac{\Psi_e^*}{\Psi_e} (1 - d_e) \quad (6)$$

Une méthode très utilisée dans la littérature consiste à supposer que l'envergure du dommage est faible, ce qui conduit à poser $F_e \approx 1$ de sorte que $d_e \approx 1 - \Psi_e / \Psi_e^*$ représente l'indicateur de dommage de l'élément [1].

Guo et Li [11] ont utilisé le concept d'énergie de déformation modale et la méthode fréquentielle dans le contexte d'une approche bayésienne couplée avec un algorithme d'optimisation pour localiser le dommage dans un treillis. Dans le cadre de l'approche bayésienne, nous proposons dans la suite une procédure permettant d'identifier le dommage en deux étapes. Dans la première étape une estimation de d_e est obtenue par la méthode d'énergie modale de déformation où $F_e \approx 1$ est utilisé. La méthode fréquentielle est utilisée en suite afin de permettre une quantification de l'envergure du dommage. L'information « a priori » fournie par la méthode précédente permet alors d'identifier la moyenne conditionnelle de la densité de probabilité a posteriori et d'estimer la distribution élémentaire du dommage.

La méthode fréquentielle est établie pour une structure linéaire lorsque l'endommagement de type fissuration est supposé rester faible et n'affectant que la raideur de la structure [11]. Ainsi, on obtient

$$Gd = \Lambda = (\lambda_k)_{k=1,\dots,m} = (\tilde{\omega}_k^2 - \omega_k^2)_{k=1,\dots,m} \quad (7)$$

avec

$$G_{ke} = \Phi_k^t K_e \Phi_k \quad (8)$$

où K_e est la matrice de rigidité élémentaire de l'élément e , ω_k et $\tilde{\omega}_k$ sont les pulsations propres associées respectivement à la structure intact et à la structure endommagée.

3 Approche bayésienne

Nous proposons de résoudre le problème inverse associé à l'équation (7), en réécrivant cette dernière conformément à l'approche bayésienne sous la forme suivante

$$\Lambda = GD + B \quad (9)$$

où B est un bruit additif qui perturbe les mesures et Λ et D sont les deux variables aléatoires décrivant respectivement les observations et le dommage.

La mesure λ et le vecteur caractérisant le dommage d permettent de définir la loi de probabilité a posteriori

$$\pi_{post}(d) = \pi(d | \lambda) = \frac{\pi(\lambda | d) \pi_{pr}(d)}{\pi(\lambda)} \quad (10)$$

où $\pi_{pr}(d)$ est la densité de probabilités a priori reflétant l'information disponible sur le dommage, $\pi(\lambda | d)$ est la densité de probabilité de vraisemblance donnant la probabilité que l'observation soit λ lorsque le dommage est d , enfin $\pi(\lambda)$ est la densité de probabilités des observations.

En supposant que le bruit est à moyenne nulle et que les variables aléatoires D et B sont distribuées selon des gaussiennes indépendantes à matrice de covariance proportionnelles à l'identité: $D \sim \mathcal{N}(d_0, \sigma^2 I)$ et $B \sim \mathcal{N}(0, \beta^2 I)$, Λ est aussi une gaussienne [12], et on a

$$\pi_{post}(d) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(d - \bar{d})^t \Gamma_{post}^{-1} (d - \bar{d})\right) \quad (11)$$

$$\bar{d} = \left(G^t G + \frac{\beta^2}{\sigma^2} I\right)^{-1} \left(G^t \lambda + \frac{\beta^2}{\sigma^2} d_0\right) \quad (12)$$

$$\Gamma_{post} = \beta^2 \left(G'G + \frac{\beta^2}{\sigma^2} I \right)^{-1} \quad (13)$$

Pour estimer la moyenne conditionnelle a posteriori \bar{d} qui définit aussi la configuration de dommage la plus probable [12], compte tenu de l'observation réalisée, il suffit d'accomplir deux tâches: estimer la moyenne a priori d_0 et inverser la matrice $G'G + (\beta^2 / \sigma^2)I$. L'estimation de la moyenne a priori est faite à partir de l'équation (6) où l'on pose $F_e \approx 1$. Ceci traduit le fait que l'endommagement est localisé et que les éléments de la structure ne voient pas, de manière très probable, leur indice de dommage varier, ce qui permet d'obtenir en considérant $d_e \in [0,1]$ l'estimation suivante

$$d_0 = \left(1 - \Psi_e / \Psi_e^* \right)_{e=1, \dots, N_e} \quad (14)$$

L'hypothèse concernant la connaissance des paramètres σ et β , pour quantifier la matrice de covariance Γ_{post} , n'est pas une grande limitation dans la pratique. En effet la détermination de β peut être faite expérimentalement et il suffit de prendre $\sigma = 1/\sqrt{12}$, calculée en supposant une loi uniforme pour D sur l'intervalle $[0,1]$.

La détermination de \bar{d} permet finalement d'estimer la position et l'amplitude du dommage subi par chaque élément, \bar{d}_e . Signalons que contrairement à la méthode de l'énergie modale de déformation qui donne un indicateur du dommage sans pouvoir le quantifier avec précision, la procédure présentée ici qui utilise l'information sur l'évolution des fréquences propres sert à quantifier le dommage par le biais de \bar{d} .

4 Résultats et discussion

Considérons une plaque élastique homogène formé d'acier pour lequel le module d'Young est $E = 2 \times 10^{11} Pa$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$. La masse volumique est $\rho = 7800 kg.m^{-3}$. La plaque est supposée simplement appuyée sur ses quatre bords. Elle a une géométrie carrée avec $L_x = L_y = 1m$ et une épaisseur uniforme $h = 10^{-2}m$. La plaque est discrétisée de manière uniforme en choisissant $N_x = N_y = 11$, soit au total 100 éléments Q4 de plaque Mindlin définis avec un facteur de cisaillement $\kappa = 5/6$. Deux sites endommagés ont été placés sur la plaque. Ils sont indiqués en bleu sur la figure 1. Quatre capteurs ont été placés sur la plaque aux endroits indiqués sur la figure 1. Ils servent à mettre en oeuvre la méthode de d'énergie de déformation modale. Pour cela, l'excitation est supposée provenir de l'impact d'un marteau en parcourant l'ensemble des nœuds du maillage de la figure 1.

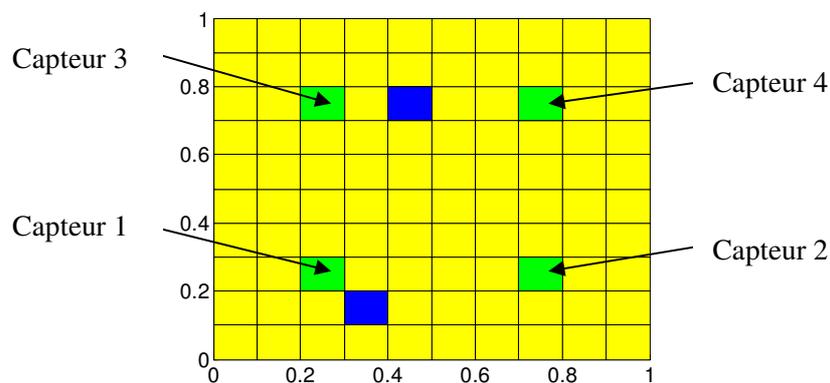


FIG. 1 – Maillage de la plaque montrant les deux sites endommagés en bleu et les lieux d'implantation des capteurs en vert

Le premier défaut en bas représente une perte de rigidité de 15% alors que le deuxième défaut en haut est associé à une perte de rigidité de 10%. Le modèle éléments finis construit a permis de calculer les 12

premiers modes. Ces modes ont été utilisés d'une part pour calculer Ψ_e et Ψ_e^* afin d'estimer d_0 par l'équation (14), en prenant la moyenne des quatre capteurs. En fixant le niveau de l'écart type du bruit à 1, l'équation (12) permet d'estimer la distribution élémentaire de l'endommagement à partir des fréquences propres calculées.

La figure 2 montre les localisations obtenus par la méthode de l'énergie de déformation modale utilisant l'équation (6) avec $F_e = 1$ pour les quatre capteurs utilisés.

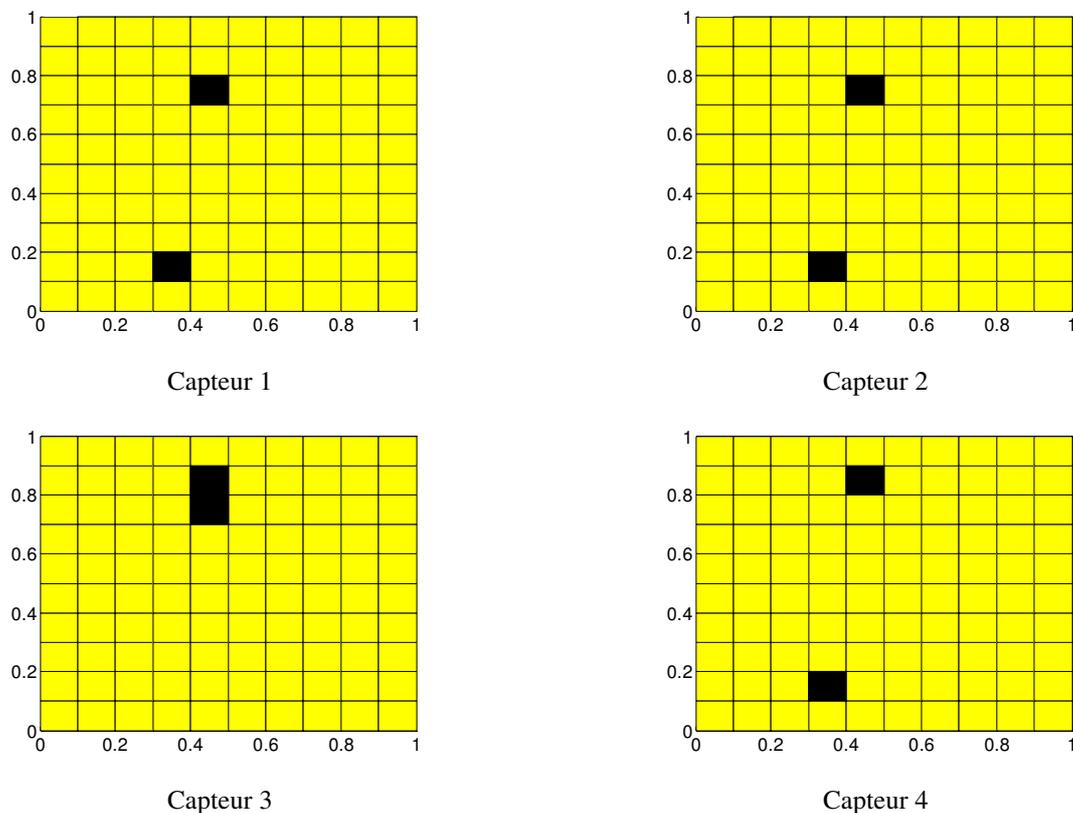


FIG. 2 – Sites de dommage identifiés par la méthode de l'énergie de déformation modale en fonction du capteur utilisé

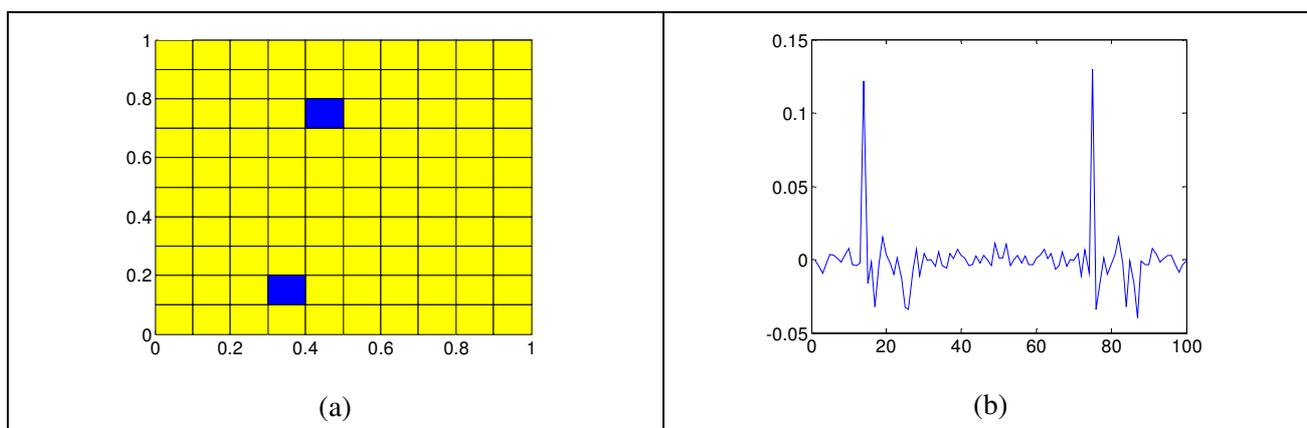


FIG. 3 – Caractéristiques du dommage identifiées par l'approche bayésienne ; (a) sites endommagés, (b) amplitude du défaut (\bar{d})

La figure 2 montre les localisations obtenues par la méthode de l'énergie de déformation modale en fonction du capteur utilisé. Nous pouvons constater que certains capteurs permettent d'identifier les bonnes

positions du défaut alors que d'autres identifient plutôt la position du défaut majeur. Dans l'approche bayésienne, nous considérons la moyenne et la figure 3(a) montre que l'identification de la position est parfaite. La figure 3(b) montre l'amplitude du défaut \bar{d} telle qu'elle est estimée par inversion bayésienne.

D'autres essais numériques non montrés ici ont permis de faire les constatations suivantes: la méthode marche parfaitement pour des défauts localisés ayant le même niveau et même lorsque ces défauts ne représentent que 2% de perte de rigidité. Par contre les performances de la méthode se dégradent énormément lorsque la disproportionnalité entre les deux défauts augmente ou lorsque leurs intensités diminuent. A titre d'exemple, si plutôt que de prendre comme niveaux des défauts 15% et 10% comme c'était le cas ci-dessus, on avait pris respectivement 10% et 5%, la méthode n'indique pas le site à faible défaut (en rouge sur la figure 4) et elle concentre les deux prédictions sur le site du défaut majeur (en bleu sur la figure 4). La méthode continue cependant de donner l'ordre de grandeur du défaut majeur, figure (4b).

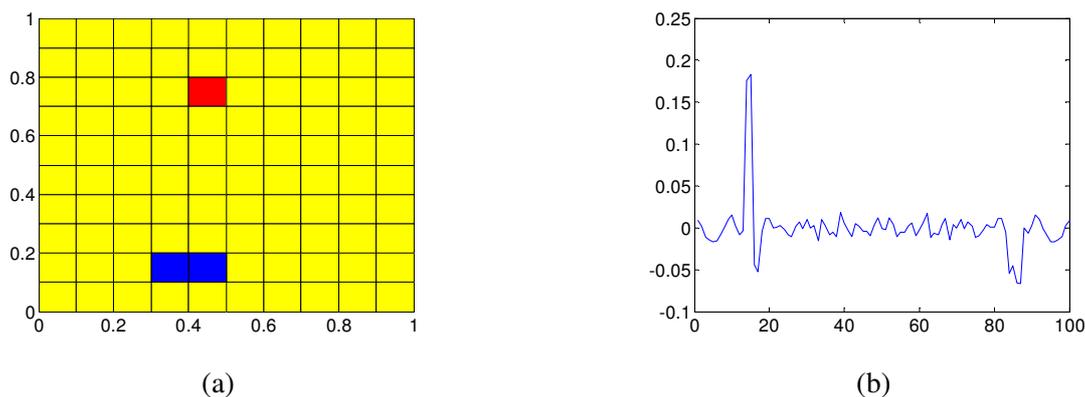


FIG. 4 – Caractéristiques du dommage identifiées par l'approche bayésienne dans le cas des niveaux 10% et 5%; (a) sites endommagés, (b) amplitude du défaut (\bar{d})

References

- [1] Cawley P., Adams R.D., The location of defects in structures from measurements of natural frequencies, *Journal of Strain Analysis*, 14(2):49-57, 1979.
- [2] Chinchalkar S., Determination of crack location in beams using natural frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, 247(3):417-429, 2001.
- [3] Guo H., Zhang L., A weighted balance evidence theory for structural multiple damage localization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:6225-6238, 2006.
- [4] Li H., Yang H., Hu S.L.J., Modal strain energy decomposition method for damage localization in 3D frame structures, *Journal of Engineering Mechanics*, 132(9):941-951, 2006.
- [5] Pindey A.K., Biswas M., Experimental verification of flexibility difference method for locating damage in structures, *Journal of Sound and Vibration*, 184(2):311-328, 1995.
- [6] Sazonov E., Klinkhachorn P., Optimal spatial sampling interval for damage detection by curvature or strain energy mode shapes, *Journal of Sound and Vibration*, 285(4-5):783-801, 2005.
- [7] Hu H., Wang B.T., Lee C.H., et Su J.S., Damage detection of surface cracks in composite laminates using modal analysis and strain energy method, *Composite Structures*, 74(4):399-405, 2006.
- [8] Hu H., Wu C., Development of scanning damage index for the damage detection of plate structures using modal strain energy method, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(2):274-287, 2009.
- [9] Bellman R.E., Kashef B.G., Casti J., Differential quadrature: a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equation, *Journal of Computational Physics*, 10: 40-52, 1972.
- [10] Bert C.W., Malik M., Differential quadrature method in computational mechanics: a review, *Applied Mechanics Review*, 49(1): 1-28, 1996.
- [11] Guo H.Y., Li Z.L., Structural damage identification based on Bayesian theory and improved immune genetic algorithm, *Expert Systems with Applications* 39: 6426-6434, 2012.
- [12] Kaipio J., Somersalo E., *Statistical and Computational Inverse Problems*, Springer Science+Business Media, Inc., New York, USA, 2005.