

Stabilité d'un rideau visqueux

C. Perdigou^a, G. Pfingstag^b, A. Boudaoud^c, B. Audoly^a

a. *Institut Jean le Rond d'Alembert, UPMC, Paris*

b. *Saint Gobain Recherche, Aubervilliers*

c. *Laboratoire RDP, ENS, Lyon*

Résumé :

Nous étudions numériquement le flambement d'un rideau visqueux en écoulement vertical. Sous l'effet de l'accélération par la gravité, et en l'absence de contrainte aux bords, un liquide visqueux injecté par une fente forme un rideau. Celui-ci est accéléré verticalement par la gravité, et développe un écoulement à faible nombre de Reynolds. En régime stationnaire, le rideau voit sa largeur et son épaisseur s'affiner légèrement par un effet Poisson. Ceci génère des contraintes compressives, et une analyse de stabilité locale révèle des modes de flambements globaux. L'écoulement de base et l'analyse de stabilité sont obtenues numériquement, dans un cadre où l'advection domine les effets de la gravité. Un mode instable est obtenu en dessous d'une épaisseur critique pour tous les rapports d'aspect β , rapport de la demi-largeur du rideau sur sa hauteur de chute.

Abstract :

In this paper we propose to study the possible buckling instabilities of thin viscous films flowing vertically and only driven by gravity. A viscous liquid is pouring from a slit and a low Reynolds flow is developed, with no constraints on the edges. In permanent regime, when we move downstream, both the thickness and the width of the sheet are narrowing as the downward velocity is increasing under the acceleration of gravity. The local stability analysis of such sheets suggests that the most unstable modes would develop over the whole sheet. It leads us to study the stability of the system on a global scale. This base flow and the related stability analysis are solved under the assumption of small gravitational forces. Unstable modes are obtained under a critical value of the thickness for all values of β , β being the ratio of the half width of the sheet to the height of fall.

Mots clefs : rideau visqueux ; flambement ; stabilité écoulement

1 Introduction

Les couches fines de liquide visqueux en écoulement faiblement inertiel ont un comportement analogue à celui d'une structure élastique. L'un des problèmes classiques en mécanique des structures fines est la question du flambement. Dans le cas d'une poutre par exemple, des contraintes compressives peuvent causer un événement catastrophique nommé flambement, qui provoque en général une rupture de la structure et devant être évité. L'apparition de ce phénomène dans les couches visqueuses fines a d'abord été révélé dans une série d'expériences[11, 10] en configuration cylindrique. L'intérêt suscité par ce phénomène a mené à une étude théorique[1] dans une configuration proche, présentant aussi une invariance orthoradiale. Une configuration droite, infinie dans une direction, a fait le sujet d'une étude numérique[9], les contraintes compressives prenant encore leur origine part un mouvement de cisaillement. La configuration du problème étudié diffère des études précédentes par le fait que l'écoulement compressif se développe en deux dimensions, et ne présente pas de direction invariante. D'une façon plus générale, le flambement d'un liquide visqueux en écoulement vertical lors de son contact avec une surface solide a été étudié dans le cas d'une tige, dans une configuration statique[7] et entraînée[2], ainsi que pour le cas d'une nappe statique[8].

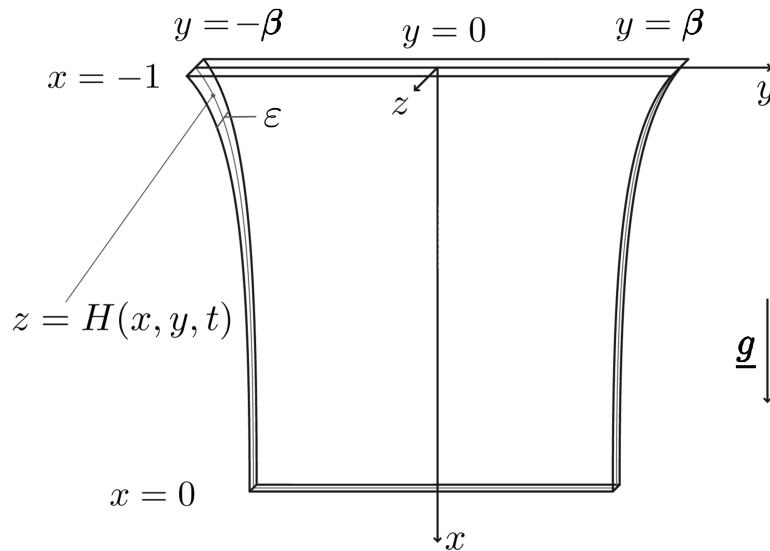


FIGURE 1 – Un fluide de viscosité μ est injecté à une vitesse U par une fente horizontale. Il s'écoule verticalement en formant un rideau et accélère sous l'effet de la gravité. Sa largeur diminue par un effet Poisson qui donnera naissance à des contraintes compressives dans le corps du rideau.

La géométrie du problème étudié est celle d'un procédé industriel de fabrication du verre, qui a fait l'objet de nombreux brevets[3], et qui reste présentement utilisé. Ainsi la connaissance de l'épaisseur critique minimale de flambement possède une application immédiate dans ce cadre. Les équations décrivant un rideau visqueux flottant sur un bain d'une autre liquide[4, 6, 5] doivent être adaptées au phénomène étudié ici. L'étude d'un système ouvert impose de considérer les éléments de matière comme advectés par la vitesse d'injection du fluide, qui reste grande devant les variations de vitesse dans le rideau.

2 Méthode et résultats

Afin d'étudier l'écoulement stationnaire qui se développe dans une rideau visqueux en chute libre, nous appliquons une méthode numérique. Le rideau est formé par une fente où le liquide est injecté à une vitesse U . Il s'y développe un écoulement à faible nombre de Reynolds, ce qui nous permet d'assimiler le rideau à une plaque élastique, selon l'analogie Rayleigh-Stokes. Le rapport d'aspect β est le rapport de la demi-largeur sur la hauteur de chute du rideau. L'autre paramètre important ϵ est égal au rapport de l'épaisseur du rideau sur la hauteur de chute. Ces notations adimensionnées sont présentées en figure 1. Le rideau a ses bords latéraux libres, et son côté inférieur est considéré en contact avec un bain du même liquide.

La solution stationnaire plane de l'écoulement s'obtient en minimisant l'énergie provenant de l'étirement du rideau et de la gravité. Un code numérique par éléments finis permet d'obtenir le champ de vitesse dans tout le rideau. Nous nous intéressons ensuite aux valeurs propres du tenseur des contraintes local. La plus petite valeur propre est négative dans certaines zones de l'écoulement, pour tous les rapports d'aspects. Ces valeurs indiquant le caractère extensif ou compressif des contraintes sur l'élément de volume local, on en déduit l'existence d'une zone de contraintes compressives dans le rideau. Ces zones sont alors susceptibles de flamber, dans un mouvement transverse au plan de l'écoulement.

Afin d'identifier le paramètre d'épaisseur en deçà duquel le rideau flambe, nous utilisons une analyse de stabilité linéaire. Celle ci permet d'obtenir un problème aux valeurs propres généralisées, qui sera résolu numériquement par le même code en éléments finis. Afin d'étudier le flambement, nous minimisons cette fois les énergies d'étirement et de pli du rideau visqueux, en fonction d'un déplacement transverse.

Le rideau est instable pour tous les rapports d'aspect β , lorsque l'épaisseur est suffisamment faible. Le rapport d'aspect le plus instable se situe autour de la valeur 0.4. Le mode le plus instable est associé à une valeur propre purement réelle puis comportant une partie imaginaire lorsque β augmente. Ceci

semble indiquer une différence qualitative entre les bifurcations à faible et à fort rapport d'aspect du rideau.

3 Conclusions

L'étude d'un rideau visqueux en écoulement vertical libre sous l'effet de la gravité a permis de mettre en évidence un phénomène de flambage global. Cette destruction catastrophique du rideau limite en épaisseur le processus de fabrication du verre. Nous avons obtenu les écoulements stationnaires du rideau accéléré par la gravité en fonction de son rapport d'aspect β , ainsi que les modes de flambements associés.

Références

- [1] T. B. Benjamin and T. Mullin. Buckling instabilities in layers of viscous liquid subjected to shearing. *Journal of Fluid Mechanics*, 195 :523–540, 1988.
- [2] P.-T. Brun, N. M. Ribe, and B. Audoly. A numerical investigation of the fluid mechanical sewing machine. *Physics of Fluids*, 24(4) :043102, 2012.
- [3] S. M. Dockerty. Sheet forming apparatus. Technical report, USPO, 1967.
- [4] P. D. Howell. Models for thin viscous sheets. *European Journal of Applied Mathematics*, 7 :321–343, 7 1996.
- [5] G. Pfingstag, B. Audoly, and A. Boudaoud. Linear and non-linear stability of floating viscous sheets. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011.
- [6] N. M. Ribe. A general theory for the dynamics of thin viscous sheets. *Journal of Fluid Mechanics*, 457 :255–283, 2002.
- [7] N. M. Ribe. Coiling of viscous jets. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2004.
- [8] M. Skorobogatiy and L. Mahadevan. Folding of viscous sheets and filaments. *EPL*, pages 532–538, 2000.
- [9] A. C. Slim, Jeremy Teichman, and L. Mahadevan. Buckling of a thin-layer couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 694 :5–28, 2 2012.
- [10] S. M. Suleiman and Bruce R. Munson. Viscous buckling of thin fluid layers. *Physics of Fluids*, 24(1) :1–5, 1981.
- [11] G. I. Taylor and Batchelor. *The scientific papers of Geoffrey Ingram Taylor*. Cambridge University Press, 1971.