La Relativité Générale, un cadre cohérent pour la mécanique classique des milieux continus

G. de Saxcé[a]

a. *Laboratoire de Mécanique de Lille (UMR CNRS 8107)*

Résumé :

S'inspirant des travaux de Jean-Marie Souriau, on se propose de revisiter la mécanique classique —pour laquelle la vitesse de la lumière est infinie— avec les outils de la Relativité Générale, en considérant le groupe de Galilée comme groupe de symétrie à la place de celui de Poincaré. L'objectif est d'énoncer les lois de la mécanique classique sous forme covariante, c'est-à-dire qu'elles conservent leur forme lors de changements quelconques de coordonnées spatio-temporelles. La géométrie de l'espace-temps n'est alors plus riemannienne, ce qui a pour conséquence majeure de ne plus pouvoir descendre ni monter les indices tensoriels. Le torseur de la dynamique se généralise sous la forme d'un tenseur affine deux fois contravariant antisymétrique de divergence nulle. La thermodynamique covariante des milieux continus s'obtient en adjoignant à l'espace-temps une cinquième coordonnée.

Abstract :

Inspired by Jean-Marie Souriau's works, we intend to revisit the classical mechanics —for which one the velocity of the light is infinite — with the tools of the General Relativity, considering Galileo's group as symmetry group instead of Poincaré's one. The aim is to state the laws of the classical mechanics in a covariant form, i.e. they preserve their form under any space-time coordinate change. Hence the geometry of the space-time is not riemannian, with a major consequence that tensorial indices may be neither lowered nor raised. The mechanics' torsor is generalized as a divergence free 2-rank contravariant skew-symmetric affine tensor. The covariant thermodynamics of continua is obtained by adding an extra fifth dimension to the space-time.

Mots clefs : **Dynamique ; géométrie ; torseur**

1 Débat d'idées

La Relativité Générale n'est pas seulement une théorie de la gravitation qui se réduirait à prédire des effets ténus tels que la courbure des rayons lumineux ou la précession du périhélie de Mercure mais —peut-être surtout— est-elle un cadre de travail cohérent pour la mécanique des milieux continus. Elle est organisée autour de quelques idées-clefs [7] :

- l'espace-temps muni d'une métrique, ce qui lui donne une structure géométrique sous-jacente de variété différentielle riemannienne,
- un groupe de symétrie, celui de Poincaré.
- associée à ce groupe, une connexion sur cette variété qui s'identifie physiquement à la gravitation et dont les potentiels sont les 10 composantes de la métrique,
- un tenseur spatio-temporel d'énergie-impulsion, représentant la matière et de divergence nulle, qui généralise le tenseur classique des contraintes,
- son identification avec un tenseur lié à la courbure de la variéte, également de divergence nulle et qui fournit les équations permettant de déterminer les 10 potentiels de la gravitation.

Ce schéma est-il transposable à la mécanique classique ?

L'idée n'est pas nouvelle et des chercheurs tels que Küntzle, Duval ou Horváthy ([4], [5], [6]) s'y sont essayés. Même si la démarche est séduisante, sa mise en œuvre se heurte toutefois à quelques écueils. Esquissons à grands traits cette approche :

- Le *point essentiel* est de travailler directement dans l'espace-temps mais avec un autre groupe de symétrie, celui de Galilée. Il ne conserve toutefois aucune métrique, ce qui ne permet plus de descendre ni de monter les indices tensoriels.
- La connexion linéaire associée est structurée en 2 composantes, la gravité classique et un nouvel objet que nous avons appelé *tournoiement*. Elle permet d'énoncer l'équation du mouvement des particules matérielles et solides rigides sous une forme covariante [2] et possède 4 potentiels.
- Les groupes de Galilée et de Poincaré sont deux sous-groupes du groupe affine, d'où l'idée de dégager les éléments communs aux théories classique et relativiste en développant une *mécanique affine*, comme le suggère Souriau dans [10]. Elle s'articule notamment autour de la notion de torseur, revisitée sous la forme d'un *tenseur affine* deux fois contravariant antisymétrique dont la divergence est nulle [1]. On retrouve par exemple de manière covariante les équations d'Euler des milieux continus.
- Et la thermodynamique classique ? Une formulation covariante peut en être construite en considérant l'espace-temps comme une sous-variété d'un espace de dimension 5 [3]. Le groupe de Galilée agit alors par l'intermédiaire d'une représentation due à Bargmann. On introduit un tenseur mixte d'ordre 2 que nous avons appelé *moment* et dont l'annulation de la divergence conduit aux équations de conservation classiques de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie, expression du premier principe de la thermodynamique. On vérifie enfin que la production locale d'entropie, expression du second principe, est bien un invariant Galiléen.

Pour découvrir les aspect plus philosophiques, la *Grammaire de la Nature* [11] de Jean-Marie Souriau constitue une bonne entrée en matière. Dévoilons-en maintenant quelques détails plus techniques.

2 Structures galiléennes

Un *événement* est une occurence ponctuelle et instantanée. L'*espace-temps* $\mathcal{M}$, ensemble des évenements, peut être considéré comme une variété différentielle de dimension 4. Chaque événement est alors identifié par ses coordonnées, le temps $X^0 = t$ et les coordonnées spatiales $X^i = r^i$ for $1 \leq i \leq 3$, ce qu'on écrira :

$$X = \begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix}$$

Les transformations affines $dX' = PdX + C$, où $P \in \mathbb{GL}(4)$ et $C \in \mathbb{R}^4$, préservant les distances, les durées de temps, le mouvement rectiligne uniforme et les volumes orientés sont appelées transformations galiléennes et telles que :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & R \end{pmatrix}$$

où $\tau \in \mathbb{R}$ est un changement d'horloge, $k \in \mathbb{R}^3$ une translation spatiale, $u \in \mathbb{R}^3$ la vitesse d'entraînement ou boost galiléen et $R \in \mathbb{SO}(3)$ une rotation. L'ensemble $\mathbb{GA}$ des transformations galiléennes est un sous-groupe de Lie de dimension 10 du groupe $\mathbb{A}ff(4)$ appelé *groupe de Galilée*.

Un fait remarquable est que les changements de coordonnées $X \mapsto X'$ dont la matrice jacobienne est une transformation galiléenne linéaire sont constitués d'un déplacement rigide et d'un changement d'horloge :

$$r' = (R(t))^T (r - r_0(t)), \qquad t' = t + \tau_0$$

La vitesse d'entraînement est alors de la forme : $u = \varpi(t) \wedge (r - r_0(t)) + \dot{r}_0(t)$ où ϖ est le vecteur de Poisson de la rotation $R(t)$. Les systèmes de coordonnés qui se déduisent l'un de l'autre par un tel changement sont appelés *systèmes de coordonnées galiléennes*. Dans de tels systèmes, les *connexions galiléennes*, c'est-à-dire les connexions linéaires symétriques dont la matrice ω est un élément de l'algèbre de Lie du groupe des transformations galiléennes linéaires, sont telles que :

$$\omega(dX) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega \wedge dr - g\,dt & j(\Omega)\,dt \end{pmatrix},$$

où $j(u)$ est l'unique matrice antisymétrique telle que $j(u)v = u \wedge v$, $g \in \mathbb{R}^3$ la *gravité* classique et $\Omega \in \mathbb{R}^3$ un nouvel objet appelé *tournoiement.* Introduisant le quadrivecteur impulsion de composantes :

$$T = \begin{pmatrix} m \\ p \end{pmatrix}$$

l'équation du mouvement de particules matérielles dans le champ de gravitation prend la forme covariante

$$\nabla T^\alpha = dT^\alpha + \omega^\alpha_\beta T^\beta = 0 \tag{1}$$

ce qui conduit à l'équation énoncée par Souriau dans [8] (formule (12.47) page 133, traduction anglaise dans [9]) :

$$\dot m = 0, \qquad \dot p = m\,(g - 2\,\Omega \wedge v)$$

Le dernier terme permet par exemple d'expliquer simplement le mouvement du pendule de Foucault sans négliger la force centripète comme dans les traités classiques.

3 Mécanique affine et torseur d'une particule ou d'un solide rigide

Le décor étant planté, intéressons-nous aux *tenseurs affines*, des objets dont les composantes sont modifiées par représentation du groupe affine $\mathbb{A}ff\,(4)$ de $\mathbb{R}^4$. Les types les plus simples de tenseurs affines sont les points (de l'espace tangent à la variété, perçu comme espace affine) et les fonctions numériques affines sur cet espace. La règle tensorielle pour les composantes V^α d'un point V de l'espace tangent est :

$$V^{\alpha'} = C^{\alpha'} + (P^{-1})^{\alpha'}_\beta\, V^\beta.$$

Pour les composantes (Φ_α, χ) de la fonction affine ψ de représentation locale :

$$\psi\,(V) = \chi + \Phi_\alpha V^\alpha$$

la règle tensorielle est :

$$\Phi_{\alpha'} = \Phi_\beta P^\beta_{\alpha'}, \quad \chi' = \chi - \Phi_\beta\, P^\beta_{\alpha'}\, C^{\alpha'}$$

On peut bien entendu construire des types de tenseurs affines plus complexes, par exemple celui des *torseurs* qui jouent un rôle-clef en mécanique. On les définit comme formes bilinéaires antisymétriques μ sur l'espace vectoriel des fonctions affines, de représentation locale :

$$\mu\,(\psi, \hat\psi) = \mu\,((\Phi_\alpha, \chi), (\hat\Phi_\beta, \hat\chi)) = J^{\alpha\beta}\,\Phi_\alpha \hat\Phi_\beta + T^\alpha(\chi\,\hat\Phi_\alpha - \hat\chi\,\Phi_\alpha),$$

avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$. La règle tensorielle pour les composantes $(T^\alpha, J^{\alpha\beta})$ du torseur μ est alors :

$$T^{\alpha'} = (P^{-1})^{\alpha'}_\beta\, T^\beta, \quad J^{\alpha'\beta'} = (P^{-1})^{\alpha'}_\mu\,(P^{-1})^{\beta'}_\nu\, J^{\mu\nu} + C^{\alpha'}\,((P^{-1})^{\beta'}_\mu\, T^\mu) - ((P^{-1})^{\alpha'}_\mu\, T^\mu)\, C^{\beta'}. \tag{2}$$

Généralisant l'équation (1), on postule alors le principe suivant :

$$\tilde\nabla \mu = 0 \tag{3}$$

où le *tilde* symbolise la différentielle covariante *affine* pour la distinguer de la différentielle covariante classique. Doter une variété d'une *connexion affine* nécessite des formes de connexion linéaire ω^α_β et des formes additionnels ω^α_A spécifiant le mouvement de l'origine courante de l'espace affine tangent [1], ce qui conduit aux formules explicites :

$$\tilde\nabla\, T^\alpha = \nabla\, T^\alpha = 0, \quad \tilde\nabla\, J^{\alpha\beta} = \nabla\, J^{\alpha\beta} + \omega^\alpha_A T^\beta - T^\alpha \omega^\beta_A = 0 \tag{4}$$

On peut alors décliner cette approche générale en fonction du groupe de symétrie choisi :

- Considérant les seules transformation affines du groupe de Poincaré (c'est-à-dire celles dont la partie linéaire est une transformation de Lorentz), on défini la classe des *torseurs relativistes* dont nous ne poursuivrons pas l'étude ici.

- Considérant les transformations galiléennes, on défini la classe des *torseurs galiléens*. L'étude de la règle tensorielle nous conduit à identifier les composantes T^α à celles du quadrivecteur impulsion et à structurer la matrice antisymétrique des composantes $J^{\alpha\beta}$ sous la forme :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -q^T \\ q & -j(l) \end{pmatrix}$$

où $q \in \mathbb{R}^3$ est appelé *passage* dans [8] et $l \in \mathbb{R}^3$ s'interprète comme le moment cinétique de la particule (ou du solide rigide). La raison en est que la loi de transport du moment :

$$l' = l + k' \times p$$

n'est plus qu'une simple conséquence de la règle tensorielle (2) appliquée à une translation spatiale k'. Que nous apprennent alors les conditions (4) ? La première n'est autre que l'équation (1) du mouvement du centre d'inertie d'un objet tandis que la seconde conduit à une expression covariante du théorème du moment cinétique :

$$\dot{l} + \Omega \times l_0 = r \times \ m\,(g - 2\,\Omega \times v)$$

où $l_0 = l - q \wedge p\,/\,m$ est le moment cinétique intrinsèque (ou spin). On peut ainsi décrire le mouvement d'un solide rigide, par exemple d'un satellite ou d'une toupie.

4 Mécanique affine et torseur d'un milieu continu

La trajectoire d'une particule n'étant au fond qu'une courbe, la théorie précédente peut se généraliser à un milieu continu en le considérant comme une sous-variété de l'espace-temps décrite par un plongement $\mathcal{N} \to \mathcal{M} : \xi \mapsto X = f\,(\xi)$. On considère alors un torseur en $X = f\,(\xi)$ *à valeur vectorielle* dans l'espace vectoriel tangent en ξ à $\mathcal{N}$. Ces composantes $({}^\gamma T^\alpha, {}^\gamma J^{\alpha\beta})$ comportent donc un nouvel indice contravariant γ que nous placerons par convention à droite. L'équation (3) se généralise en postulant que la *divergence affine* du torseur est nulle, ce qui conduit à [1] :

$$_\gamma\tilde{\nabla}\,{}^\gamma T^\alpha = {}_\gamma\nabla\,{}^\gamma T^\alpha = 0, \quad {}_\gamma\tilde{\nabla}\,{}^\gamma J^{\alpha\beta} = {}_\gamma\nabla\,{}^\gamma J^{\alpha\beta} + {}_\gamma U^\rho\,\Gamma^\alpha_{\rho C}\,{}^\gamma T^\beta \ - \ {}^\gamma T^\alpha\,{}_\gamma U^\rho\,\Gamma^\beta_{\rho C} = 0 \tag{5}$$

où :

$$_\beta U^\alpha = \frac{\partial\,X^\alpha}{\partial\,\xi^\beta}, \qquad \text{et} \qquad \omega^\alpha_C = \Gamma^\alpha_{\rho C}\,d\,X^\rho = \Gamma^\alpha_{\rho C}\,{}_\gamma U^\rho\,d\,\xi^\gamma$$

Ces équations peuvent être de nouveau déclinées en fonction du choix du groupe de symétrie. Pour le groupe de Galilée de la Mécanique classique, elles restent malgré tout très générales et s'appliquent par exemple à la dynamique des coques pour lesquelles nous avons mis en évidence dans [1] l'existence de termes nouveaux généralement absents des exposés classiques. Pour illustrer la pertinence de ces équations, examinons la dynamique d'un milieu continu 3D. Les variétés $\mathcal{N}$ et $\mathcal{M}$ sont alors de même dimension. Par convenance, on choisit le même système de coordonnées sur les deux variétés, donc l'expression locale du plongement f est l'application identité $X^\alpha = \xi^\alpha$. La distinction entre indices à gauche et à droite n'est plus pertinente et nous les placerons tous à droite : ${}^\gamma T^\alpha = T^{\alpha\gamma}$ et ${}^\gamma J^{\alpha\beta} = J^{\alpha\beta\gamma}$. Deux approches sont alors possibles :

- Aucune restriction particulière n'est faite sur les composantes $J^{\alpha\beta\gamma}$, ce qui conduit à la description d'un *milieu de Cosserat* dont nous ne poursuivrons pas l'étude ici.
- On postule que $J^{\alpha\beta\gamma} = 0$ dans les repères affines où les composantes de l'origine mobile sont nulles. On a alors affaire à un *milieu de Cauchy* avec, en vertu de la seconde équation (5), la condition de symétrie :

$$T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}$$

Pour un torseur galiléen, la matrice 4×4 symétrique T des composantes $T^{\alpha\beta}$ se structure ainsi :

$$T = \begin{pmatrix} \rho & p^T \\ p & \rho\,v\,v^T - \sigma \end{pmatrix}$$

où ρ est la densité, $p = \rho\, v$ la quantité de mouvement et σ la matrice des contraintes de Cauchy. La première équation (5) conduit à la forme covariante des *équations d'Euler des milieux continus* :

$$\frac{\partial}{\partial r^j}(\rho\, v^j) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial r^j}\right) = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial r^j} + \rho\,(g^i - 2\,\Omega^i_j\, v^j). \tag{6}$$

où Ω^i_j sont les éléments de la matrice $j(\Omega)$.

5 Thermodynamique pentadimensionnelle

Pour construire une thermodynamique covariante des milieux continus (en l'absence de gravitation), l'idée-clef est de considérer l'espace-temps $\mathcal{M}$ comme une sous-variété d'un espace $\hat{\mathcal{M}}$ de dimension 5, décrite par un plongement $\mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}} : X \mapsto \hat{X} = \hat{f}\,(X)$, et de travailler avec une extension centrale du groupe de Galilée par $\mathbb{R}$ appelé groupe de Bargmann [4], agissant linéairement sur $\mathbb{R}^5$ par :

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & R & 0 \\ \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 & u^T R & 1 \end{pmatrix}$$

La température se géneralise sous la forme d'un pentavecteur :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta v \\ \zeta \end{pmatrix}$$

où $\beta = 1\,/\,\theta$ est la température réciproque et ζ le potentiel de Planck. On introduit alors un covecteur en $\hat{X} = \hat{f}\,(X)$ *à valeur vectorielle* dans l'espace vectoriel tangent en X à $\mathcal{M}$, donc un tenseur mixte d'ordre 2, appelé *moment* et représenté par une matrice 4×5 de la forme [3] :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} e & -\rho v^T & \rho \\ h + ev - \sigma v & \sigma - \rho v v^T & \rho v \end{pmatrix}$$

où h est le flux de chaleur et e l'énergie totale par unité de volume :

$$e = \rho\,\left(e_{int} + \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 - q_I\right)$$

avec l'énergie interne spécifique e_{int}, l'énergie cinétique et la production spécifique d'entropie q_I. La règle tensorielle s'écrit matriciellement :

$$\hat{T}' = P\,\hat{T}\,\hat{P}^{-1}$$

La divergence $\hat{T}$ est un pentavecteur ligne tel que, pour tout champs lisse de pentavecteur $\hat{W}$:

$$div\ (\hat{T}\ \hat{W}) = (div\ \hat{T})\ \hat{W} + Tr\ \left(\hat{T}\ \frac{\partial \hat{W}}{\partial X}\right)$$

La forme covariante du *premier principe de la thermodynamique* :

$$div\ \hat{T} = 0$$

restitue les équations (6) de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (avec $g = \Omega = 0$) ainsi que l'équation de conservation de l'énergie :

$$\rho\ \frac{de_{int}}{dt} = Tr\ \left(\sigma\ \frac{\partial\ v}{\partial r}\right) - div\ h + \rho\ \frac{dq_I}{dt}$$

On en déduit l'équation de la chaleur classique.

Et le *second principe* ?

Pour un milieu continu, il prend la forme de l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$\Phi = \rho \, \frac{ds}{dt} - \frac{\rho}{\theta} \, \frac{dq_I}{dt} + div \, \left(\frac{h}{\theta} \right) \geq 0$$

où s est l'entropie spécifique. D'un point de vue relativiste, la question est de savoir si cette production locale d'entropie est invariante. Dans [3], on démontre qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$\Phi = div \, \left(\hat{T} \, \hat{W} \right) + \rho q_I \frac{d\beta}{dt}$$

L'invariance galiléenne de cette expression résulte alors simplement de l'invariance du premier terme et de chacun des facteurs du second.

6 Conclusions

Dans l'esprit de la relativité, nous avons esquissé à grands traits une mécanique et une thermodynamique galiléennes des milieux continus. Le torseur, perçu comme tenseur affine, joue un rôle essentiel. Il peut se décliner en fonction du choix de l'espace environnant, de la sous-variété et du groupe de symétrie.

Certes, des problèmes important restent ouvert. Quelles sont par exemple les équations qui permettent de déterminer les 4 potentiels de la gravitation galiléenne ? Comment notamment modifier l'équation de Poisson satisfaite par le potentiel ϕ de la gravitation newtonienne ? En effet, son second membre —la masse, à un facteur près— est un invariant galiléen mais le laplacien de ϕ ne l'est pas... Quelle est enfin l'équation additionnelle permettant de déterminer également le potentiel vecteur A ?

Références

[1] de Saxcé, G., Vallée, C. 2003 Affine Tensors in Shell Theory. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **41** 593-621

[2] de Saxcé, G., Vallée, C. 2011 Affine Tensors in Mechanics of Freely Falling Particles and Rigid Bodies. *Mathematics and Mechanics of Solid Journal* **17** 413-430

[3] de Saxcé, G., Vallée, C. 2012 Bargmann Group, Momentum Tensor and Galilean invariance of Clausius-Duhem Inequality. *International Journal of Engineering Science* **50** 216-232

[4] Duval, C., Burdet, G., Küntzle, H.P., Perrin, M. 1985 Bargmann structures and Newton-Cartan theory. *Phys. Rev. D* **31** 1841-1853

[5] Duval, C., Gibbons, G., Horváthy, P. 1991 Celestial mechanics, conformal structures and gravitational waves. *Phys. Rev. D* **43** 3907-3922

[6] Küntzle, H.P. 1972 Galilei and Lorentz structures on space-time : comparison of the corresponding geometry and physics. *Annales de l'Inst. Henri Poincaré* **17** 337-362

[7] Souriau, J.-M. 1964 Géométrie et relativité. Hermann (épuisé) et Jacques Gabay (réédition en 2008), Paris.

[8] Souriau, J.-M. 1970 Structure des systèmes dynamiques. Dunod, Paris (épuisé).

[9] Souriau, J.-M. 1997 Structure of Dynamical Systems, a Symplectic View of Physics. Birkhäuser Verlag, New York.

[10] Souriau, J.-M. 1997 Milieux continus de dimension 1, 2 ou 3 : statique et dynamique. *Acte du 13ième Congrès Français de Mécanique, Poitiers-Futuroscope* 41-53

[11] Souriau, J.-M. 2007 Grammaire de la Nature. `http://www.jmsouriau.com/Grammaire_de_la_nature.htm`.