

# Stabilité de l'écoulement de Taylor-Couette pour un fluide rhéofluidifiant avec ou sans seuil de contrainte: approche modale et non-modale

Y. AGBESSI<sup>a</sup>, B. ALIBENYAHIA<sup>b</sup>, C. NOUAR<sup>c</sup>, C. LEMAITRE<sup>a</sup>, L. CHOPLIN<sup>a</sup>

a. Laboratoire Réactions Génie de Procédés(LRGP), 1 rue Grandville, BP 20451, 54001 NANCY

b. Laboratoire des Applications Energétiques de l'Hydrogène(LApEH), Blida (ALGERIE)

c. Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée(LEMETA), 2 avenue de la Forêt de Haye, BP 160, 54504, VANDŒUVRE LES NANCY

## Résumé:

*Cette communication porte sur l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette circulaire entre deux cylindres coaxiaux en rotation, avec un rapport de rayon  $\eta = 0.881$ , pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Les modèles de Carreau et de loi puissance sont adoptés pour les fluides rhéofluidifiants et le modèle de Bingham pour les fluides à seuil. Des approches modale et non modale sont utilisées pour décrire le comportement d'une perturbation aux temps courts et aux temps longs.*

*Le comportement asymptotique aux temps longs se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres. Les courbes de stabilité marginale sont déterminées et analysées pour des cylindres co et contrarotatifs. L'effet des paramètres rhéologiques sur la stabilité est mis en évidence.*

*Aux temps courts, un problème aux valeurs initiales est résolu en cherchant une solution sous forme d'une combinaison linéaire des fonctions propres. La non normalité de l'opérateur linéaire conduit à une croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation. Les résultats numériques montrent que le caractère rhéofluidifiant favorise l'amplification de l'énergie cinétique de la perturbation. Au contraire la présence d'un seuil de contrainte réduit fortement le degré de non normalité de l'opérateur linéaire.*

## Abstract :

*This paper deals with the linear stability of Couette flow between two rotating coaxial cylinders for shear-thinning fluids with and without yield stress. Carreau and power law models are considered for shear-thinning fluids and the Bingham model for yield stress fluids. Modal and non-modal approaches are used to describe the behavior of a perturbation for short and long times.*

*The long times asymptotic behavior leads to an eigenvalue problem. The marginal stability curves are determined and analyzed for co- and counter-rotating cylinders. The rheological behavior is shown to affect the stability.*

*At short times, an initial values problem is solved by seeking a solution as a linear combination of eigenfunctions. The operators non-normality leads to transient growth of the perturbations kinetic energy. The numerical results show that shear-thinning favors an amplification of the perturbation energy. On the contrary, the presence of a yield stress reduces drastically the degree of non-normality of the linear operator.*

**Mots clefs :** Taylor-Couette, stabilité, instabilité, turbulence, fluides rhéofluidifiants

## 1 Introduction

L'écoulement de Taylor-Couette, écoulement entre deux cylindres infinis coaxiaux en rotation a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques depuis l'article de Taylor [1]. Pour de faibles vitesses de rotation du cylindre intérieur, et pour un cylindre extérieur fixe, le champ de vitesse est stationnaire et purement azimutal. Lorsqu'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur au-dessus d'une valeur seuil, l'écoulement se déstabilise sous l'effet de la force centrifuge et évolue vers un état composé de rouleaux toroïdaux, appelés tourbillons de Taylor. La plupart des fluides considérés dans ces différentes

études sont newtoniens. Or dans de nombreux procédés industriels tels que ceux rencontrés dans les industries pétrolière et agroalimentaire, les fluides utilisés sont très souvent non-newtoniens. Le comportement rhéofluidifiant, c'est-à-dire la diminution de la viscosité du fluide lorsque le taux de cisaillement appliqué augmente, est probablement le caractère non-newtonien le plus courant. Pour ce comportement, la non-linéarité supplémentaire introduite par le comportement rhéologique peut modifier considérablement les scénarios de transition vers la turbulence. Pour mieux cerner ce comportement, la stabilité de l'écoulement de Couette circulaire d'un fluide rhéofluidifiant a déjà été étudiée par le passé pour le cas où seul le cylindre intérieur tourne. Une synthèse de ces travaux est donnée dans [2].

Dans cette étude, le caractère non newtonien des fluides sera décrit par des modèles rhéologiques rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Une étude linéaire de stabilité sera effectuée. Nous déterminerons la courbe de stabilité marginale pour délimiter la zone stable de la zone instable. Nous nous intéresserons ensuite à la croissance transitoire de l'énergie cinétique de la perturbation, dans la zone stable avec une approche définie par Schmid et Hennigson [3] et utilisée par Hristova [4] et Meseguer [5].

## 2 Equations gouvernant le problème

Nous considérons l'écoulement d'un fluide incompressible entre deux cylindres coaxiaux infiniment longs. Le cylindre intérieur de rayon  $\hat{R}_1$  tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_1$ , le cylindre extérieur de rayon  $\hat{R}_2$  tourne à la vitesse angulaire  $\hat{\Omega}_2$ . L'écoulement dans l'espace annulaire est régi par les équations de continuité et de la quantité de mouvement sous forme adimensionnelle

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + Re_1 (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (2)$$

avec  $Re_1 = \hat{\rho} \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1 \hat{d} / \hat{\mu}_{ref}$  le nombre de Reynolds interne. On définit de même un nombre de Reynolds externe  $Re_2 = \hat{\rho} \hat{\Omega}_2 \hat{R}_2 \hat{d} / \hat{\mu}_{ref}$ . Les équations du mouvement et de continuité ont été rendues adimensionnelles en utilisant la vitesse de rotation du cylindre intérieur comme échelle caractéristique de vitesse, l'espace annulaire  $\hat{d} = \hat{R}_2 - \hat{R}_1$  comme échelle de longueur, le temps de diffusion visqueuse comme échelle de temps et la quantité  $\hat{\mu}_{ref} \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1 / \hat{d}$  comme échelle de contrainte, où  $\hat{\mu}_{ref}$  est une viscosité de référence qui sera définie dans le paragraphe suivant. Aux équations précédentes, on rajoute la condition d'adhérence du fluide aux parois. Pour toute cette étude, l'accent (^) désigne des quantités dimensionnelles. On s'intéresse à des fluides non newtoniens purement visqueux et non élastiques, c'est-à-dire des fluides pour lesquels la viscosité est une fonction du deuxième invariant du tenseur des taux de déformation. Trois modèles ont été utilisés

- Modèle en loi puissance,  $\mu = \dot{\gamma}_{II}^{n-1}$ , où n est l'indice de rhéofluidification.
- Modèle de Carreau,  $\mu = (1 + \lambda^2 \dot{\gamma}_{II}^2)^{(n-1)/2}$ , où  $1/\lambda$  est un cisaillement critique adimensionnel au-delà duquel le caractère rhéofluidifiant se manifeste.
- Modèle de Bingham,  $\boldsymbol{\tau} = (1 + Bi/\dot{\gamma}_{II}) \dot{\boldsymbol{\gamma}}$  si  $\tau_{II} > Bi$  et  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{0}$  si  $\tau_{II} \leq Bi$  où  $Bi = \hat{\tau}_o \hat{d} / (\hat{\mu}_p \hat{\Omega}_1 \hat{R}_1)$  est le nombre de Bingham,  $\hat{\tau}_o$  la contrainte seuil d'écoulement et  $\tau_{II} = (1/2 \tau_{ij} \tau_{ij})^{1/2}$  le second invariant du déviateur du tenseur des contraintes.

Dans les équations précédentes,  $\dot{\gamma}_{II} = (1/2 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij})^{1/2}$  est le second invariant du tenseur des taux de cisaillement,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T$ . Pour ce qui est de la viscosités de référence  $\hat{\mu}_{ref}$ , nous avons utilisé la viscosité plastique  $\hat{\mu}_p$  pour le fluide de Bingham, la viscosité à cisaillement nul  $\hat{\mu}_o$  pour le fluide de Carreau et la viscosité dite nominale  $\hat{K} (\hat{R}_1 \hat{\Omega}_1 / \hat{d})^{n-1}$ , où  $\hat{K}$  est la consistance du fluide, pour la loi de puissance.

### 3 Comportement de la perturbation aux temps longs: approche modale

#### 3.1 Equations aux perturbations

En régime laminaire, on a un écoulement de Couette circulaire, i.e.  $\mathbf{V} = U\mathbf{e}_r + V\mathbf{e}_\theta + W\mathbf{e}_z = V^b(r)\mathbf{e}_\theta$ . Dans le cas d'un fluide de Bingham il faudra distinguer les situations où l'écoulement présente une zone non cisailée au contact du cylindre extérieur [6].

De manière classique, à l'écoulement de base  $(\mathbf{V}^b, \mathbf{P}^b, \boldsymbol{\tau}^b)$  on superpose une perturbation infinitésimale  $(\epsilon\mathbf{v}', \epsilon\mathbf{p}', \epsilon\boldsymbol{\tau}')$  où  $\epsilon$  est un nombre infiniment petit. Si on introduit cette expression dans les équations (1) et (2), on obtient après linéarisation

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + Re_1[(\mathbf{V}^b \cdot \nabla)\mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla)\mathbf{V}^b] = -\nabla p' + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}' \quad (4)$$

où la perturbation du déviateur du tenseur des contraintes est  $\boldsymbol{\tau}' = \mu^b \dot{\gamma}(\mathbf{v}') + (\mu_t - \mu^b)\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}$  étant un tenseur dont toutes les composantes sont nulles sauf  $A_{1,2} = A_{2,1} = \dot{\gamma}_{r\theta}(\mathbf{v}')$ . La viscosité tangentielle est définie par  $\mu_t = \mu(V^b) + (\partial\mu/\partial\dot{\gamma}_{r\theta})(V^b)\dot{\gamma}_{r\theta}(V^b)$ . Le domaine de calcul  $(r, \theta, z)$  étant périodique dans la direction azimutale et infini dans la direction axiale, la solution des équations (3) et (4) est recherchée sous forme de modes normaux en écrivant  $\{\mathbf{v}', p'\} = \{\mathbf{v}(r), p(r)\}\exp[\sigma t + i(m\theta + kz)]$ , où  $m \in \mathbb{N}$  est le nombre d'onde azimutal et  $k \in \mathbb{R}$  le nombre d'onde axial. En éliminant la pression et une des trois composantes de vitesse, pour ne garder que deux composantes de la vitesse  $w$  et  $p$  (resp.  $v$  et  $p$ ) on aboutit à un problème aux valeurs propres qui peut s'écrire formellement

$$\mathcal{L} \mathbf{q} = \sigma \mathcal{M} \mathbf{q} \quad (5)$$

avec  $\mathbf{q} = (u, v)^T$  pour  $k \neq 0$  (resp.  $\mathbf{q} = (u, w)^T$  pour  $m \neq 0$ ) et  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{M}$  des opérateurs matriciels [2]. Dans (5),  $\sigma$  est un complexe ( $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ ) dont la partie réelle  $\Re(\sigma)$  représente le taux de croissance temporelle de la perturbation et la partie imaginaire  $\Im(\sigma)$  représente la fréquence d'oscillation.

Le problème aux valeurs propres est discrétisé en utilisant une méthode pseudo spectrale de collocation basée sur les polynômes de Chebychev évalués en  $N$  points de collocation de Gauss-Lobatto. Pour s'assurer de la convergence de cette méthode numérique, nous avons effectué nos calculs pour  $N$  et  $N+5$  points de collocation. Les résultats suivants sont obtenus pour  $N=40$  et un rapport de rayons  $\eta = 0.881$ .

#### 3.2 Courbe de stabilité marginale

La condition  $\Re(\sigma) = 0$  définit les conditions critiques d'instabilité. La Figure 1(a), montre à titre d'exemple des courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_1, Re_2)$  pour un fluide newtonien, un fluide de Bingham et un fluide en loi de puissance. Il n'est pas opportun de tirer des conclusions à ce stade sur les effets stabilisants ou déstabilisants de la rhéologie du fluide utilisé dans la mesure où la viscosité de référence considérée n'est pas pertinente d'un point de vue physique. En effet, elle n'est atteinte nulle part dans l'espace annulaire.

Une étude énergétique permet de montrer que l'échange d'énergie entre l'écoulement de base et la perturbation, ainsi que la dissipation visqueuse ont lieu essentiellement au voisinage de la paroi du cylindre intérieur et ce pour tous les nombres de Reynolds  $Re_2$  explorés. Nous avons donc redimensionné les courbes de stabilité marginale en utilisant des nombres de Reynolds définis avec la viscosité calculée à la paroi interne, Figure 1(b) et Figure 2. Il apparaît que le caractère rhéofluidifiant sans seuil a un effet déstabilisant lorsque les deux cylindres sont en contra-rotation. En présence d'une contrainte seuil élevée un effet stabilisant est observé.

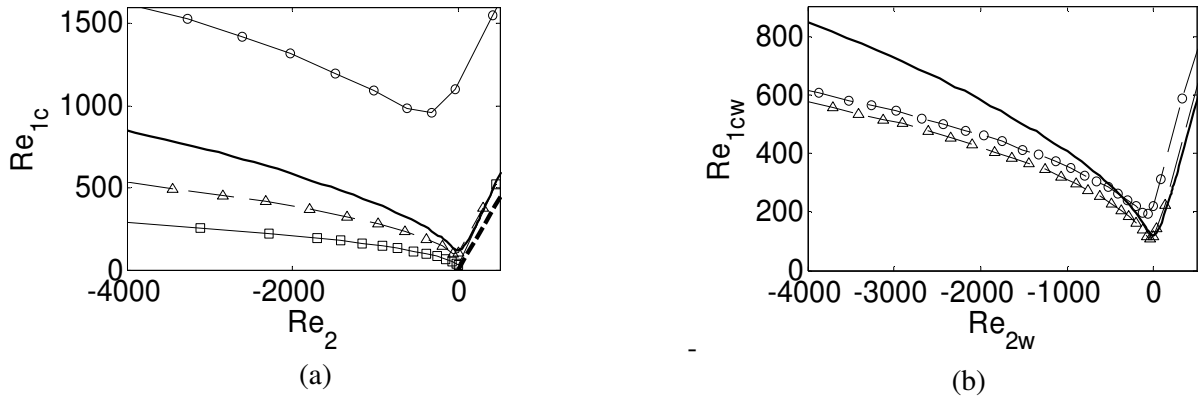


Figure 1- Courbes de stabilité marginale dans le plan des Reynolds pour un fluide de Bingham (o), un fluide newtonien (trait continu), un fluide en loi de puissance avec  $n = 0.5$  ( $\Delta$ ) et un fluide carreau avec  $n = 0.5$  et  $\lambda = 10$  ( $\square$ ). (a) Les nombres de Reynolds sont définis avec une viscosité issue de la mise sous forme adimensionnelle des équations. (b) Les nombres de Reynolds sont définis avec la viscosité évaluée à la paroi du cylindre intérieur  $\hat{\mu}^b(R_1)$ .

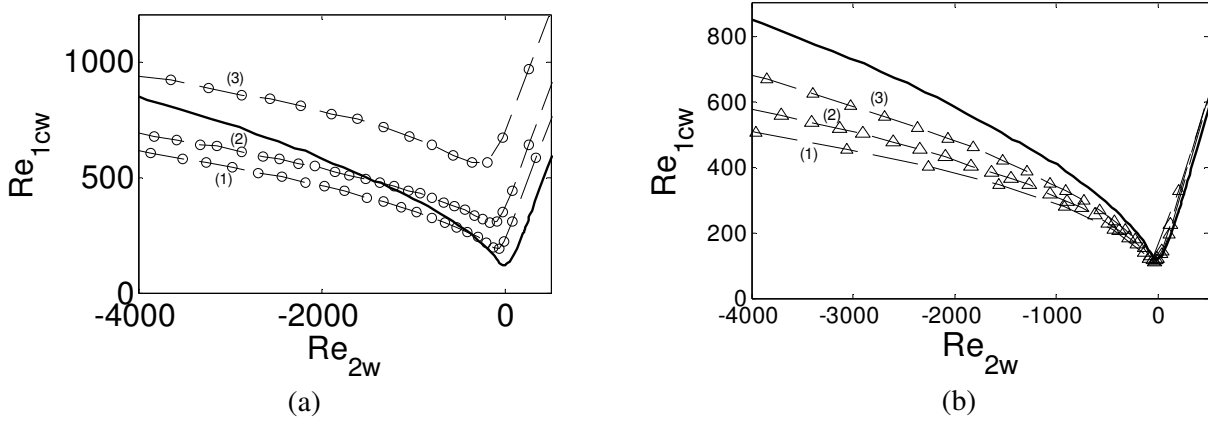


Figure 2-Courbes de stabilité marginale dans le plan  $(Re_{1cw}, Re_{2w})$ . Le cas newtonien est représenté en trait continu. (a) Cas d'un fluide de Bingham (1)  $Bi = 10$ , (2)  $Bi = 20$ , (3)  $Bi = 50$ . (b) Cas d'un fluide en loi de puissance (1)  $n = 0.7$ , (2)  $n = 0.5$ , (3)  $n = 0.7$ .

#### 4 Comportement de la perturbation aux temps courts: approche non modale

L'approche modale présentée dans le paragraphe précédent a permis de déterminer les conditions critiques d'instabilité ainsi que la structure du mode le plus amplifié. Cependant, du fait de la non normalité de l'opérateur linéaire qui intervient dans le problème aux valeurs propres, l'énergie cinétique de la perturbation peut croître de manière transitoire même si l'écoulement est linéairement stable. Cette amplification de l'énergie peut être suffisamment importante pour que les termes non linéaires prennent de l'importance et déclenchent la transition vers la turbulence. Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier l'amplification de l'énergie de la perturbation et de déterminer la structure de la perturbation qui permet d'avoir le maximum d'amplification. Nous avons suivi la démarche décrite dans Schmid & Henningson [3].

Soit  $E_c(t)$  l'énergie cinétique de la perturbation calculée à l'instant  $t$ , moyennée sur le domaine délimité par les deux cylindres et une longueur d'onde axiale. L'amplification maximale de l'énergie par rapport à l'ensemble des perturbations initiales est notée  $G(t) = \sup_{E_c(t=0) \neq 0} \frac{E_c(t)}{E_c(t=0)}$ .

Nous définissons  $G^{max}$ , le maximum atteint par  $G(t)$  au cours du temps. Enfin, l'amplification optimale, notée  $G^{opt}$  est définie par

$$G^{opt}(Bi \text{ ou } n, Re_1, Re_2) = \sup_{k,m} G^{max}(Bi \text{ ou } n, k, m, Re_1, Re_2) \quad (6)$$

La perturbation donnant lieu à l'amplification d'énergie  $G^{opt}$  est appelée perturbation optimale. Les calculs ont été au préalable validés par comparaison avec les résultats obtenus par Meseguer dans le cas Newtonien [5].

Sur la Figure 3, nous avons représenté les contours de  $G^{opt}$  pour un fluide de Bingham, Figure 3(a) et un fluide de Carreau, Figure 3(b). Comparativement au cas newtonien l'amplification de l'énergie est fortement accrue pour un fluide Carreau et réduite de manière significative pour un fluide de Bingham.

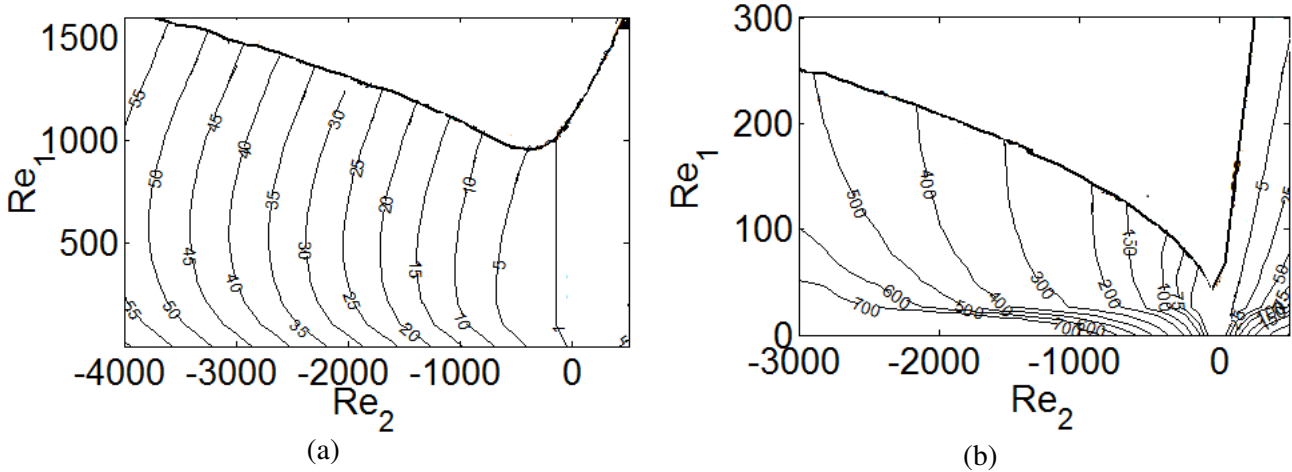


Figure 3- Contours d'amplification optimale de l'énergie cinétique de la perturbation,  $G^{opt}$ , dans le plan  $(Re_1, Re_2)$ . (a) Fluide de Bingham  $Bi = 10$  et (b) fluide de Carreau  $n = 0.5, \lambda = 10$ .

Cette évolution pourrait être reliée aux spectres de valeurs propres. En effet dans le cas d'un fluide à seuil les valeurs propres sont plus éloignées les unes des autres que pour un fluide de Carreau. Les valeurs optimales des nombres d'ondes azimutaux et axiaux sont similaires à celles du cas newtoniens ( $0 \leq m \leq 15, 0.1 \leq k \leq 5$ ). De plus, dans les trois cas, l'inclinaison de la perturbation optimale augmente avec le nombre de Reynolds intérieur  $Re_1$  mais varie peu avec le nombre de Reynolds extérieur  $Re_2$ .

Nous nous sommes intéressés à la forme de la perturbation optimale. Sur la Figure 4 sont tracés dans le plan  $(r, z)$  les contours d'énergie cinétique de la perturbation à l'instant initial, Figure 4(a), et à l'instant  $t_{opt}$  où l'amplification de l'énergie est maximale, Figure 4(b). L'inclinaison de la perturbation s'inverse entre les deux instants. Ceci est révélateur du fait que le transfert entre l'écoulement de base et la perturbation a lieu selon le mécanisme de basculement, « tilting mechanism », décrit par [7].

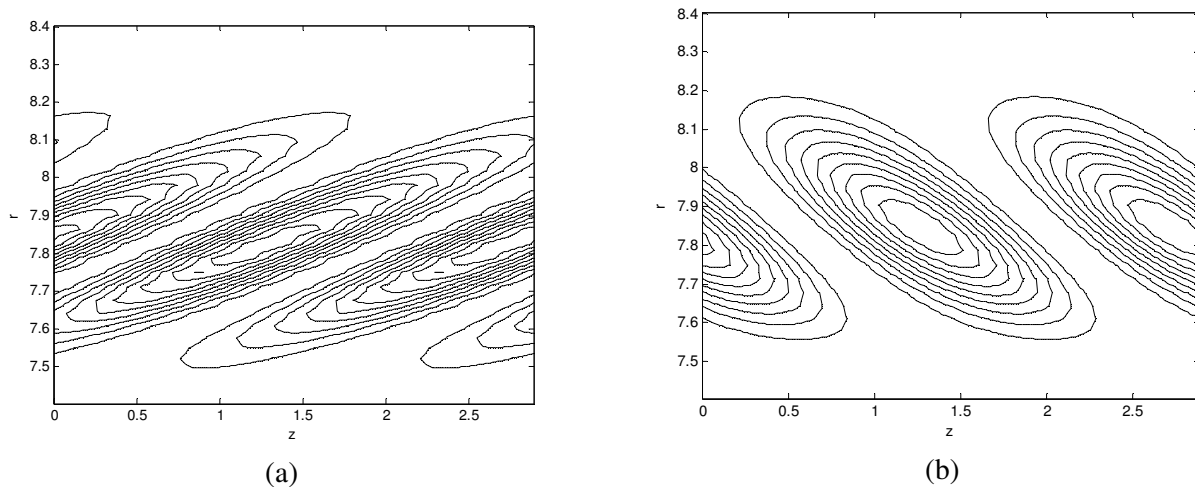


Figure 4 - Forme de la perturbation optimale pour un fluide de Bingham,  $Bi = 10$ , avec  $Re_1 = 101, Re_2 = -1061.2, k = 1.965$  et  $m = 13$ . Contours d'énergie cinétique de la perturbation (a) à l'instant initial  $t = 0$  et (b) à l'instant optimal,  $t = t_{opt}$ .

## 5 Conclusions et perspectives

Nous avons effectué une analyse linéaire de stabilité de l'écoulement de Couette pour des fluides rhéofluidifiants avec ou sans seuil de contrainte. Les résultats numériques montrent qu'en utilisant des nombres de Reynolds définis avec la viscosité calculée à la paroi du cylindre intérieur, la rhéofluidification a un effet déstabilisant lorsque les deux cylindres sont en contra-rotation, contrairement à ce qui est connu pour les écoulements dans un canal plan[8]. Dans le cas des fluides de Bingham, un effet déstabilisant est observé pour des valeurs faibles ou modérées de  $B$ . Cette différence de comportement entre l'écoulement en canal plan et l'écoulement de Couette circulaire est liée à une différence dans les mécanismes d'instabilité.

La croissance transitoire de la perturbation est également fortement affectée par la rhéologie. Elle est grandement amplifiée pour un fluide de Carreau et réduite pour un fluide de Bingham. L'analyse des pseudo-spectres, dans un futur proche, devrait permettre de clarifier ces évolutions.

## References

- [1] G. I. Taylor, « Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders », *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 223, n° 605-615, p. 289-343, 1923.
- [2] B. Alibenyahia, C. Lemaitre, C. Nouar, et N. Ait-Messaoudene, « Revisiting the stability of circular Couette flow of shear-thinning fluids », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 183-184, p. 37-51, sept. 2012.
- [3] P. J. Schmid et D. S. Henningson, *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer, 2001.
- [4] H. Hristova, S. Roch, P. J. Schmid, et L. S. Tuckerman, « Transient Growth in Exactly Counter-Rotating Couette–Taylor Flow », *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, vol. 16, n° 1, p. 43-48, 2002.
- [5] Á. Meseguer, « Energy transient growth in the Taylor–Couette problem », *Physics of Fluids*, vol. 14, n° 5, p. 1655-1660, mars 2002.
- [6] M. P. Landry, I. A. Frigaard, et D. M. Martinez, « Stability and instability of Taylor-Couette flows of a Bingham fluid », *J. Fluid Mech.*, vol. 560, p. 321-353, août 2006.
- [7] K. M. Butler et B. F. Farrell, « Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow », *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, vol. 4, n° 8, p. 1637-1650, août 1992.
- [8] R. Govindarajan, V. S. L'vov, I. Procaccia, et A. Sameen, « Stabilization of hydrodynamic flows by small viscosity variations », *Phys. Rev. E*, vol. 67, n° 2, p. 026310, févr. 2003.