

# Simulation numérique d'un écoulement viscoplastique frictionnel autour d'un cylindre circulaire

N. EL KHOUJA<sup>a</sup>, N. ROQUET<sup>a</sup>, B. CAZACLIU<sup>a</sup>

a. Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR), Université de Nantes, France

## Résumé :

L'objet de cet article est d'étudier l'écoulement de matériaux viscoplastiques frictionnels autour d'un cylindre. Une Loi Viscoplastique Frictionnelle  $LVF(p_0)$  est décrite et examinée à cet effet. Il s'agit d'une loi de Bingham dont le seuil dépend d'une pression hydrostatique  $p_0$ . Des simulations numériques par éléments finis mixtes sont utilisées avec un algorithme de résolution de point fixe. Ces simulations mettent en relief des cinématiques différentes en fonction de  $p_0$ . Cependant, un comportement cinématiquement proche de celui d'un fluide de Bingham de seuil  $Bi(p_0)$  est observé. Ainsi, le coût énergétique est comparé à celui d'un tel fluide de Bingham. En outre, l'absence d'un paradoxe de Stokes est postulée.

## Abstract :

The aim of this paper is to study the flow of a frictional viscoplastic material around a circular cylinder. A Frictional Viscoplastic Law  $FVL(p_0)$  for this purpose is described and discussed. It is a Bingham law whose threshold depends on hydrostatic pressure  $p_0$ . Numerical simulations by mixed finite element are used together with a fixed point resolution algorithm. These simulations put in relief different kinematics with respect to reference pressure  $p_0$ . However, a behavior similar Bingham fluid of threshold  $Bi(p_0)$  is observed. Thus, the energy cost is compared as that of a Bingham fluid. Moreover, the non-existence of Stokes paradox is postulated.

**Mots clefs :** pâte viscoplastique frictionnelle, fluide à seuil, cylindre.

## 1 Introduction

Le malaxage des pâtes granulaires telles que le béton est caractérisé par l'agitation d'une suspension granulaire *via* un objet rigide (un agitateur). Le présent travail effectue une étape vers la modélisation du malaxage en se consacrant à l'écoulement stationnaire d'une telle pâte autour d'un barreau en translation. Ainsi, un modèle de comportement viscoplastique frictionnel noté  $LVF(p_0)$  est introduit sous la forme d'une loi de Bingham [1] dont le seuil de plasticité dépend de la pression locale et d'une pression de référence  $p_0$  (une pression hydrostatique). Ce modèle prend en compte les caractères établis dans la littérature [2] pour des assemblages granulaires en se limitant à l'expression la plus simple du caractère frictionnel et tout en modifiant le comportement en dépression où la friction disparaît.

La littérature sur les écoulements d'un fluide à seuil autour d'un cylindre se limite à un seuil constant. On peut citer les premiers travaux expérimentaux de Yoshioka et Adachi [3] et ceux de Brooks et Whitmore [4] et [5] sur la mesure du coefficient de traînée dans les fluides de Bingham. De plus, Beris *et al.* [6] ont étudié numériquement ce type de problème. La même étude est également faite par Mitsoulis et Beaulne [7] dans le cas du modèle d'Herschel-Bulkley.

Dans la suite, ce travail suit les étapes suivantes. Tout d'abord, le modèle d'écoulement  $LVF(p_0)$  est formulé. Puis, les simulations numériques effectuées pour différents paramètres rhéologiques sont présentées. Enfin, nos travaux sont conclus.

## 2 Formulation du problème

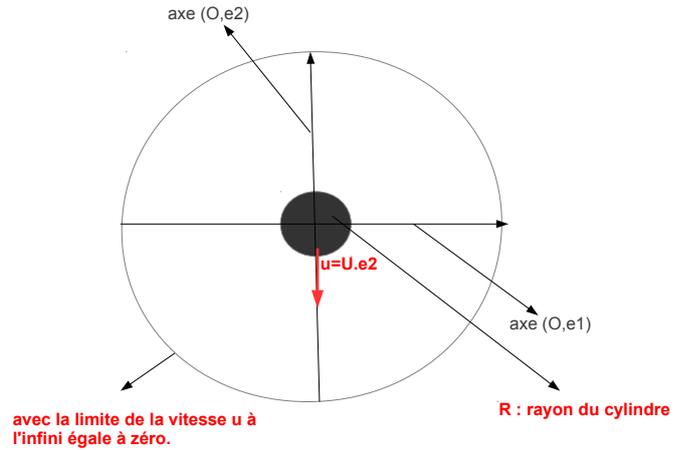
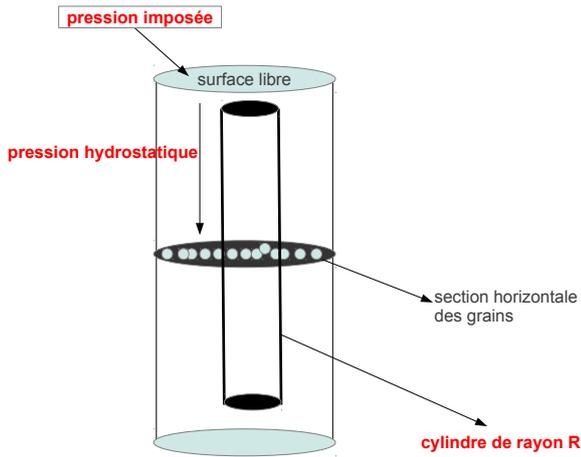


FIGURE 1 – Cylindre de rayon  $R$  se déplaçant à vitesse constante  $U$  dans une colonne verticale des grains viscoplastiques frictionnels.

FIGURE 2 – Représentation schématique du problème bidimensionnel.

Nous nous intéressons ici aux comportements bidimensionnels d'écoulements d'assemblages granulaires de type viscoplastique frictionnel. Une section horizontale dans une colonne verticale de ces matériaux est décrite. Un barreau cylindrique se translate à une vitesse constante  $U$  dans cette pâte qui est considérée comme un milieu infini au repos loin de cylindre (voir figures 1 et 2).

Dans ce travail, la densité est supposée constante et nous considérons que l'inertie est négligeable. En outre, nous adoptons une présentation adimensionnelle. Ainsi, la longueur de référence est le rayon  $R$  du cylindre et la vitesse de référence est sa vitesse  $U$  de translation. Cela réduit les lois de conservation à :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) - \nabla(p) &= 0 \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\sigma$  est le déviateur des contraintes sans dimension et  $p$  la pression sans dimension. La loi de comportement de la pâte viscoplastique frictionnelle ( $LVF(p_0)$ ) est présentée comme suit :

**Définition 1** (*Loi Viscoplastique Frictionnelle ( $LVF(p_0)$ )*)

Soit  $F$  la relation entre le déviateur des contraintes  $\sigma$  et le taux de déformation  $D(u)$  définissant le modèle sans dimension des comportements de matériaux viscoplastiques frictionnels :

$$\sigma \in F(D(u); \mu_0 \cdot G(p)) \text{ avec } F(D(u), \mu_0 G(p)) = \begin{cases} \left\{ 2D(u) + \mu_0 G(p) \frac{D(u)}{D(u)_{II}} \right\} & \text{si } D_{II}(u) \neq 0 \\ \left\{ \sigma; \sigma_{II} < \mu_0 G(p) \right\} & \text{si } D_{II}(u) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où  $G(p) = \max(0, p + p_0)$  avec  $p_0$  la pression hydrostatique considérée dans  $\mathbb{R}^+$ ,  $0 < \mu_0 < 1$  le coefficient de friction,  $u$  est la vitesse sans dimension et  $D(u)_{II} = \frac{1}{2} \sqrt{D(u) : D(u)}$  la norme de Frobenius.

Ce modèle met en relief deux comportements : un comportement newtonien pour des pressions négatives et un comportement de fluide à seuil  $\mu_0 \cdot (p + p_0)$  pour des pressions positives. On peut considérer que ce modèle remplace le critère de Von Mises par un critère de Drucker-Prager dans le modèle de Bingham.

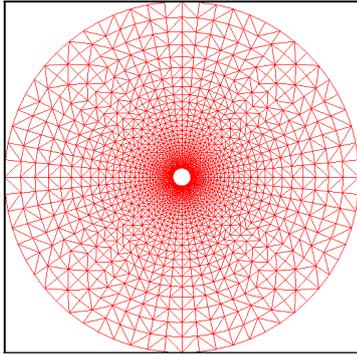


FIGURE 3 – Discretisation du domaine annulaire. Sur la figure ( $N_r = 32, N_\theta = 64$ ), en pratique on choisit ( $N_r = 124, N_\theta = 256$ ).

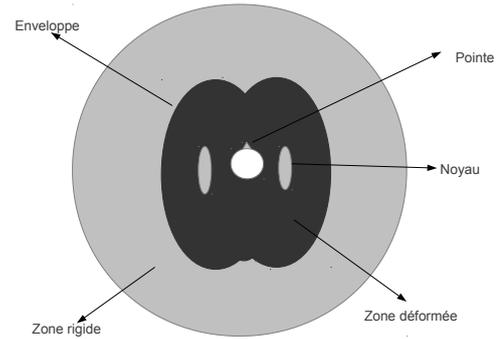


FIGURE 4 – Représentation schématique des différentes zones de l'écoulement : zones déformées en gris foncé et zones rigides en gris clair

### 3 Résultats numériques et discussion

Une méthode de discrétisation spatiale est mise en œuvre. Elle est constituée d'un algorithme de point fixe sur la pression, contenant lui-même un algorithme de type Uzawa [8] pour la non-linéarité de seuil. L'approximation par éléments finis mixtes [9] en vitesse-pression est bilinéaire-constante et bilinéaire discontinue pour les contraintes. Dans la pratique, cela signifie qu'on considère un domaine annulaire de rayon extérieur suffisamment grand  $R_{ext} = 20$  afin de simuler un milieu infini. De plus, un maillage radial est construit comme le montre la figure 3.

Il a été prouvé dans [10] pour des écoulements LVF( $p_0$ ) confinés l'existence du point fixe et la convergence de l'algorithme de type Uzawa. L'ensemble de la méthode de résolution a été validé numériquement par des comparaisons avec la solution analytique d'un problème de type Couette.

Pour les simulations qui suivent, une tolérance de  $10^{-5}$  est choisie pour la convergence des algorithmes itératifs.

#### 3.1 Zones d'écoulement

L'écoulement présente des zones distinctes comme montré dans la figure 4 :

1. Une zone déformée (enveloppe) entoure le cylindre.
2. Deux zones rigides, en forme d'ovale, sont situées à l'intérieur de la zone déformée.
3. Une zone rigide, en forme de pointe, est située sur l'axe de l'écoulement.
4. Une zone plastique contient la zone déformée.

Contrairement aux fluides de Bingham, on n'observe pas la symétrie horizontale. Ceci est dû à la dépression derrière le cylindre.

Tout d'abord, le rôle du coefficient de friction  $\mu_0$  sur la cinématique d'écoulement est étudié. On fixe une pression de référence  $p_0$  à zéro et deux coefficients de friction  $\mu_0 = 0.1$  et  $\mu_0 = 0.5$ . D'après les figures (5 et 6), l'enveloppe est peu sensible à  $\mu_0$ . De plus, pour une pression de référence différente de zéro, en particulier  $p_0 = 10$ , les figures (7 et 8) montrent que l'enveloppe diminue lorsque  $\mu_0$  augmente. Ces éléments soulignent que le produit  $p_0 \cdot \mu_0$  agit sur le motif d'écoulement. Alors, on fixe dans la suite  $\mu_0 = 0.5$  et on fait varier  $p_0$  afin de comparer les différents motifs d'écoulement. Les figures (10 et 12) décrivent l'évolution globale des différentes zones rigides en fonction de la pression de référence  $p_0$ . On remarque que la symétrie horizontale n'existe pas, cela est dû à la discontinuité de comportement. En effet, d'une part, la pression est négative derrière le cylindre, on est donc dans un régime de comportement newtonien. D'autre part, la pression est positive devant le cylindre ceci

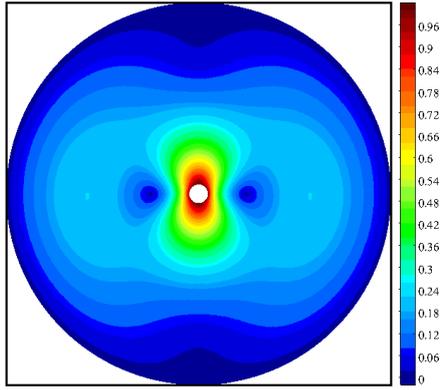


FIGURE 5 – Norme euclidienne de la vitesse pour  $LVF(p_0)$  avec  $\mu_0 = 0.1$  et  $p_0 = 0$ .

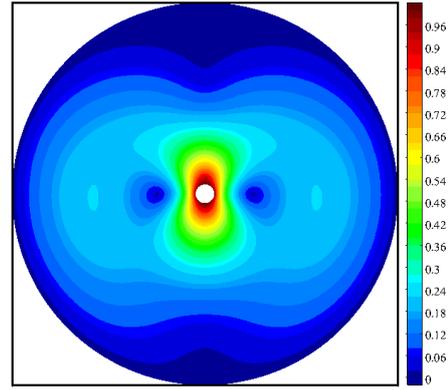


FIGURE 6 – Norme euclidienne de la vitesse pour  $LVF(p_0)$  avec  $\mu_0 = 0.5$  et  $p_0 = 0$ .

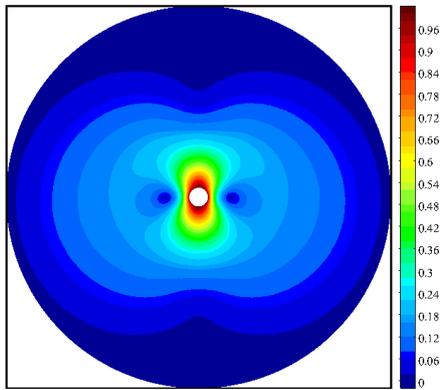


FIGURE 7 – Norme euclidienne de la vitesse pour  $LVF(p_0)$  avec  $\mu_0 = 0.1$  et  $p_0 = 10$ .

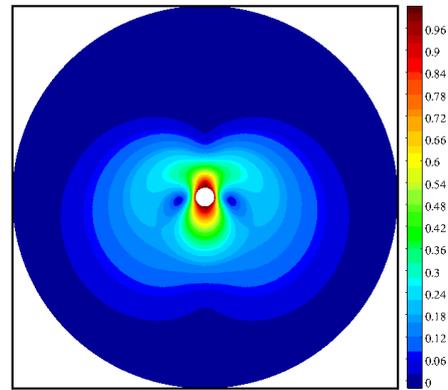


FIGURE 8 – Norme euclidienne de la vitesse pour  $LVF(p_0)$  avec  $\mu_0 = 0.5$  et  $p_0 = 10$ .

implique un comportement viscoplastique frictionnel. De plus, l'enveloppe augmente en taille lorsque  $p_0$  diminue. On constate en effet que loin du cylindre la pression  $p$  devient négligeable devant  $\mu_0 \cdot p_0$  donc le seuil devient  $\mu_0 \cdot p_0$  et comportement de type Bingham se manifeste. En conséquence, on déduit que pour tout  $p_0 \neq 0$ , le paradoxe de Stokes [11] n'existe pas pour ces matériaux.

### 3.2 Comparaison avec un fluide à seuil

Les écoulements décrits précédemment mettent en évidence une cinématique de fluides à seuil. Pour  $LVF(0)$ , on observe une cinématique proche de celle d'un fluide newtonien (figures 9 et 10).

En outre, le tableau 1 fait apparaître que la dissipation moyenne d'énergie augmente en fonction de  $p_0$ . De plus, la moyenne de la dissipation d'énergie pour un fluide newtonien égale à  $4,709 \cdot 10^{-5}$ , est plus faible que celle du matériau  $LVF(0)$  ( $E_{LVF(0)} = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p) D(u)_{II}$  et sa moyenne égale à  $9,335 \cdot 10^{-3}$ ). De manière plus générale, on constate que la cinématique d'écoulement de  $LVF(p_0)$  (figure 12) semble proche de celle d'un fluide de Bingham de seuil noté  $Bi(p_0)$  où  $Bi(p_0)$  est le nombre de Bingham (figure 11). On peut donc supposer que  $Bi(p_0)$  existe pour tout  $p_0 \geq 0$ . Cependant, d'après le tableau 1, pour  $p_0$  assez grand, la moyenne de la dissipation d'énergie devient

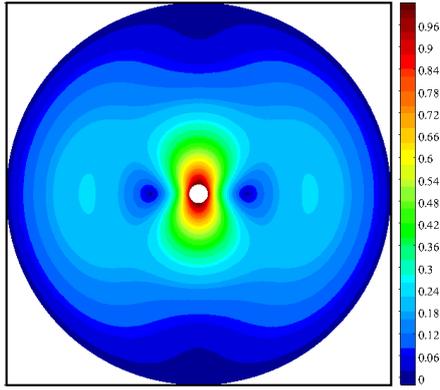


FIGURE 9 – Norme euclidienne de la vitesse pour un fluide newtonien.

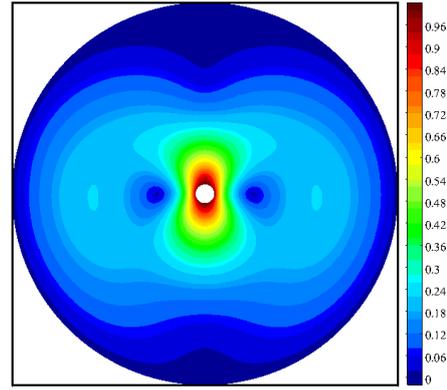


FIGURE 10 – Norme euclidienne de la vitesse pour LVF( $p_0$ ) avec  $p_0 = 0$  et  $\mu_0 = 0.5$ .

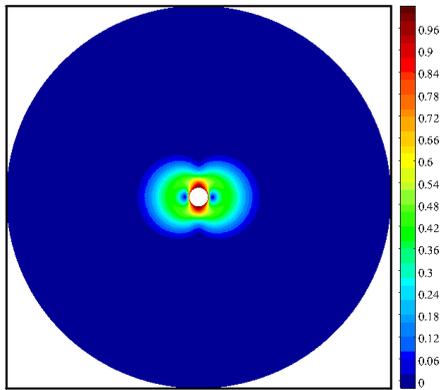


FIGURE 11 – Norme euclidienne de la vitesse pour un fluide de Bingham à seuil  $Bi = 20$ .

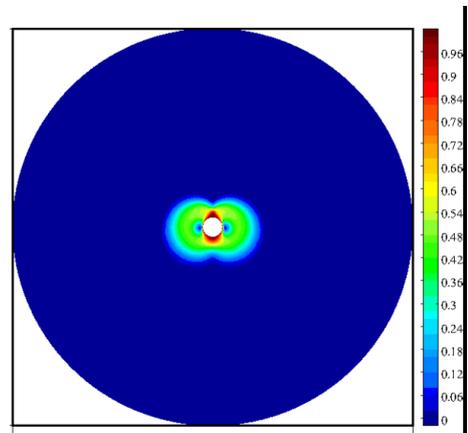


FIGURE 12 – Norme euclidienne de la vitesse pour LVF( $p_0$ ) avec  $p_0 = 20$  et  $\mu_0 = 0.5$ .

$p_0$	0	1	5	10	15	20
$\bar{E}$	$9,335.10^{-3}$	$1,183.10^{-2}$	$2,398.10^{-2}$	$4,078.10^{-2}$	$5,705.10^{-2}$	$6,666.10^{-2}$

TABLE 1 – Moyenne de la dissipation d'énergie  $E(u) = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$  en fonction de la pression de référence  $p_0$ .

$Bi$	0	1	10	20	30	50	100
$\bar{E}$	$4,709.10^{-5}$	$2,141.10^{-3}$	$3,21.10^{-2}$	$4,28.10^{-2}$	$6,422.10^{-2}$	$1,070.10^{-1}$	$2,141.10^{-1}$

TABLE 2 – Moyenne de la dissipation d'énergie  $E(u) = D(u)_{II}^2 + \mu_0 G(p)D(u)_{II}$  en fonction de nombre de Bingham.

moins importante pour LVF( $p_0$ ) que pour son fluide de Bingham cinématiquement équivalent de seuil  $Bi(p_0)$ . Cependant, d'après les tableaux 1 et 2 pour  $p_0$  assez grand, la dissipation moyenne d'énergie

devient moins importante pour LVF( $p_0$ ) que pour son fluide de Bingham cinématiquement équivalent. On peut donc supposer : a) qu'il existe une valeur critique  $p_{0,c}$  telle que le coût énergétique de LVF( $p_0$ ) soit supérieur à celui du fluide de Bingham cinématiquement équivalent si  $p_0 < p_{0,c}$ , et inférieur sinon, b) qu'il n'existe pas de paradoxe de Stokes tant que  $p_0$  est non-nul.

## 4 Conclusion

Ce travail décrit le problème d'écoulement d'une pâte viscoplastique frictionnelle autour d'un cylindre. Une nouvelle loi LVF( $p_0$ ) a été développée. La cinématique d'écoulement a été explorée en fonction de la variation de la pression de référence  $p_0$ . On a montré que pour tout  $p_0 > 0$ , il existe un fluide de Bingham à seuil  $B_i(p_0)$  cinématiquement équivalent à LVF( $p_0$ ). De plus, on déduit que tout  $p_0 > 0$ , il n'existe pas de paradoxe de Stokes.

## Références

- [1] E. C. Bingham. 1922 Fluidity and Plasticity. *McGraw-Hill. New York and London.*
- [2] F. Chevoir, J.N. Roux, F. Da Cruz, P. Rognon et G. Koval Jr. 2008 Loi de frottement dans les écoulements granulaires denses. *publié dans le bulletin des Laboratoires des Ponts et Chaussées.*
- [3] N. Yoshioka and K. Adachi. 1973 On creeping flow of a viscoplastic fluid past a cylinder. *Chem. Eng. Sci.* 28. pp. 215-266.
- [4] G. F. Brookes and R.L Whitmore. 1968 The static drag on bodies in Bingham plastics. *Rheol. Acta.* vol. 7, pp. 188-193.
- [5] G. F. Brookes and R.L Whitmore. 1969 Drag forces in Bingham plastics. *Rheol. Acta.* vol. 8, pp. 472-480.
- [6] A. N. Beris, J.A. Tsamopoulos, R.C. Amstrong and R.A. Brown. 1985 Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic. *J. Fluid Mech.* pp. 219-244.
- [7] M. Beaulne and E. Mitsoulis. 1997 Creeping motion of sphere in tubes filled with Herschel-Bulkley fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* vol. 72, pp. 55-71.
- [8] E. J. Dean, R. Glowinski and G. Guidoboni. 2006 On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* vol. 142, pp. 36 – 62.
- [9] X-L. Cheng, W. Han and H-C. Huang. 1997 Analysis of some mixed elements for Stokes problem. *J. Computational and applied mathematics.* vol. 85, pp. 19-35.
- [10] N. El Khouja. septembre 2013 Modélisation numérique des pâtes granulaires de type viscoplastique frictionnel par point fixe : application au malaxage de béton. *thèse de doctorat - université de Nantes.*
- [11] R.I. Tanner. 1993 Stokes paradox for power-law flow around a cylinder. *J. Non-Newtonian fluid Mech.* vol. 50, pp. 217-224.