View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by I-Revues

Sur les solutions auto-similaires positives des équations de couche-limite d'un fluide en loi puissance quand l'écoulement extérieur est accéléré

Didier Bernardin[a]

a. *LEMTA UMR CNRS 7563. Nancy.*

Résumé :

On considère les équations de la couche limite 2D stationnaire d'un fluide en loi puissance quand l'écoulement extérieur est accéléré le long de l'obstacle. On montre l'existence et l'unicité de la solution auto-similaire positive et on donne des encadrements du taux de cisaillement à l'origine. Pour les fluides rhéo-épaississants on démontre rigoureusement que le raccordement avec l'écoulement extérieur se fait "à distance finie", dont on donne un majorant, et pour les fluides rhéo-fluidifiants on donne des équivalents à l'infini.

Abstract :

We prove the existence and uniqueness of the positive self similar solution of the 2D boundary layer equations of a power law fluid when the external flow is accelerated and give bounds of the wall shear rate. For dilatant fluids we rigorously prove that the matching with the external flow arises at a "finite distance" and, for pseudo-plastic fluids, give the asymptotic behavior at infinity.

Mots clefs : **Couche-limite ; Équation de Falkner-Skan ; Fluide en loi puissance**

1 Introduction

On s'intéresse aux solutions stationnaires et auto-similaires définies dans le domaine $x > 0, y > 0$, des équations de la couche limite bidimensionelle laminaire, écrites dans un référentiel lié à l'obstacle, d'un fluide en loi puissance d'indice de structure n, et de consistance K, quand la vitesse tangentielle extérieure le long de l'obstacle est $U(x) = U_\infty (x/L)^{\beta/(2-\beta)}$ et est accélérée ($0 < \beta < 2$). Une analyse dimensionnelle montre que si les équations de la couche limite possède une solution autosimilaire, sa fonction de courant ψ est donnée sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par[1] :

$$\psi(x,y) = yU(x)u(\eta)/\eta \qquad \text{avec} \qquad \eta(x,y) = y[\rho U^{2-n}(x)/K/x]^{\frac{1}{n+1}}(2-\beta)^{-\frac{1}{n+1}} \tag{1}$$

où la fonction sans dimension u est solution sur $\mathbb{R}^+$ du problème (voir par exemple [1], [6], [8] ou [9]) :

$$\overline{\tau}(u'')' + \alpha u u'' + \beta(1-u'^2) = 0 \qquad u \in C^2(\mathbb{R}^+),\ \overline{\tau}(u'') \in C^1(\mathbb{R}^+) \qquad u(0) = u'(0) = 0,\ \lim_{+\infty} u' = 1 \tag{2}$$

avec :

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \overline{\tau}(x) = x|x|^{n-1} \qquad \alpha = 2(1+(n-1)\beta)/(n+1) \tag{3}$$

Pour $n = 1$, l'équation différentielle dans (2) est l'équation de Falkner-Skan "habituelle" qui se réduit, pour $\beta = 0$, à l'équation de Blasius. Physiquement, les seules solutions pertinentes (i.e. au regard des hypothèses de couche limite) sont celles pour lesquelles la vitesse tangentielle dans la couche limite est strictement positive, c'est à dire (vu (1)) qui sont telles que $u'(\eta) > 0$ pour $\eta > 0$. On adoptera alors les définitions suivantes :

[1]On peut changer la fonction inconnue $\eta \mapsto u(\eta)$ en $\eta \mapsto u(\lambda\eta)/\lambda$, où $\lambda > 0$ est arbitraire, ce qui revient dans (2) à multiplier α et β par λ^{n+1} sans changer les conditions limites. On pourra donc trouver dans la littérature d'autres coefficients pour l'équation différentielle de (2). Le point important est que quand l'écoulement extérieur est accéléré le coefficient de $(1-u'^2)$ est positif. Pour $\alpha \neq 0$ on peut ainsi se ramener à $\alpha = \pm 1$, en prenant $\lambda = |\alpha|^{-1/(n+1)}$.

Définition 1 *Soit u une solution du problème (2). On dira que u est une solution positive si $u' > 0$ sur $]0, +\infty[$, que c'est une solution normale si $u'' > 0$ sur $]0, +\infty[$ et pseudo-normale si $u'' \geq 0$ sur $]0, +\infty[$.*

Une solution normale est une solution pour laquelle la vitesse tangentielle est strictement croissante à l'intérieur de la couche limite et le taux de cisaillement ne s'y annule donc pas. Le résultat principal de ce travail est que, pour tous $\beta > 0, n > 0$ il y a existence et unicité de la solution positive de (2) et ce pour tout réel α. Pour $n \leq 1$, cette solution est normale et, si $n > 1$, elle est normale si $\alpha < 0$ mais pseudo-normale et non normale si $\alpha \geq 0$ (cas physique). Pour le cas newtonien ($n = 1, \alpha > 0, \beta > 0$), la première preuve de l'existence d'une solution telle que $u' > 0, u'' > 0, u''' < 0$ avait été donnée par Weyl en 1946. Pour le même problème, une preuve beaucoup plus simple, et constructive, de l'existence d'une solution sous les seules conditions $u' > 0, u'' > 0$ (i.e. d'une solution normale) a été ensuite proposée en 1960 par Coppel[2], qui a également montré l'unicité de cette solution normale (voir aussi [5] et [6]). Par contre, toujours pour $n = 1, \alpha > 0, \beta > 0$, à ma connaissance le fait que cette solution soit également la seule solution positive n'avait pas encore était établi, ni donc à fortiori pour $0 < n \leq 1, \beta > 0$ et α quelconques. De manière générale, pour les fluides non-newtoniens je n'ai trouvé dans la littérature que des études numériques, voire analytiques mais peu rigoureuses. En particulier, dans le cas rhéo-épaississant ($n > 1$) pour $\alpha > 0$, comme l'unique solution positive est pseudo-normale mais non normale, il existe $\eta^* > 0$ tel que on ait $u' < 1, u'' > 0$ sur $]0, \eta^*[$, puis $u' = 1, u'' = 0$ pour $\eta \geq \eta^*$. La couche limite auto-similaire est donc d'épaisseur rigoureusement finie, c'est à dire que la perturbation de l'écoulement extérieur due à la présence de l'obstacle ne s'étend qu'à une distance finie de ce dernier. Ce comportement particulier des fluides rhéo-épaisissants avait déjà été signalé dans [1] et par de nombreux autres auteurs depuis (voir, par exemple, [3], [4], [7]). Toutefois, les méthodes utilisées dans toutes ces études sont essentiellement numériques avec, à ma connaissance, un seul résultat partiel rigoureux disponible dans la littérature. Ce dernier se trouve dans [6] où les auteurs, dans le cadre un peu plus général des équations de la MHD, montrent que si le problème (2), avec $\alpha > 0, \beta > 0, n \in]1, 2[$, possède une solution telle que $u' > 0, u'' \geq 0, u''' \leq 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, alors on a l'existence du η^* indiqué plus haut. Mais l'existence elle même d'une telle solution u n'est pas prouvée, ce qui est le point le plus délicat, ni le fait que ce soit la seule positive.

Dans ce qui suit, on va indiquer les résultats sous forme de théorèmes. Les démonstrations sont mathématiquement élémentaires mais très techniques et le plus souvent trop longues pour être exposées exhaustivement ici. On donnera toutefois des indications, soit sous forme de lemmes soit par des commentaires dans le texte. En complément, on exhibera des encadrements de $u''(0)$ ainsi que le comportement asymptotique des solutions pour $n < 1, \alpha \geq 0$. Il sera utile de considérer le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} y_1' = y_2 \\ y_2' = \overline{\tau}^{-1}(y_3) \\ y_3' = -(\alpha y_1 \overline{\tau}^{-1}(y_3) + \beta(1 - {y_2}^2)) \end{array}\right. \\ y_1(0) = y_2(0) = 0,\ y_3(0) = \overline{\tau}(\gamma) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y) \\ y(0) = (0, 0, \overline{\tau}(\gamma)) \end{array}\right. \tag{4}$$

où $\overline{\tau}^{-1}$ est l'inverse de $\overline{\tau}$. Il est clair qu'une fonction u est une solution de (2) si, et seulement si, il existe un réel $\gamma = u''(0)$ tel que $y = (u, u', \overline{\tau}(u''))$ soit une solution de (4) sur $\mathbb{R}^+$ telle que y_2 tende vers 1 en $+\infty$. Il y a lieu de noter que pour $n \leq 1$ (cas rhéo-fluidifiant ou newtonien), le second membre f est C^1 et le th. de Cauchy-Lipschitz s'aplique. Par contre, pour $n > 1$ (cas rhéo-épaississant) le second membre n'est pas lipschitzien au voisinage de tout point où $y_3 = 0$, ce qui complique les analyses. A noter également le :

Lemme 1 *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, n > 0$. Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^+)$, avec $\overline{\tau}(u'') \in C^1(\mathbb{R}^+)$, vérifiant l'équation différentielle $\overline{\tau}(u'')' + \alpha u u'' + \beta(1 - u'^2) = 0$. On suppose que u' possède une limite finie L en $+\infty$. Si $\beta \neq 0$ alors $L^2 = 1$. Si $L \neq 0$ alors $\lim_{+\infty} u'' = 0$.*

Pour $L^2 = 1$ si $\beta \neq 0$: On intègre (2) de 0 à $\eta > 0$, on divise par η et on passe à la limite $\eta \to +\infty$. Pour $\lim_{+\infty} u'' = 0$ si $L \neq 0$: On multiplie (2) par u'', on intègre de η_0 à η, où u' est de signe constant au delà de η_0, puis on discute le passage à la limite $\eta \to +\infty$.

2 Quelques propriétés des solutions pseudo-normales.

Lemme 2 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ et $n > 0$. Soit u une solution de (2). On a les implications suivantes :*

$$\{u \text{ normale}\} \Rightarrow \{u \text{ pseudo-normale}\} \Rightarrow \{u \text{ positive}\} \tag{5}$$

Si $n \leq 1$ on l'équivalence :

$$\{u \text{ pseudo-normale}\} \Leftrightarrow \{u \text{ normale}\} \qquad (n \leq 1) \tag{6}$$

Si $n > 1$ et si u est pseudo-normale mais pas normale, alors il existe $\eta^* > 0$ tel que :

1. *Sur $]0, \eta^*[$, on a $u'' > 0$ et $0 < u' < 1$.*
2. *Sur $[\eta^*, +\infty[$ on a $u'' = 0, u' = 1$.*

Soit u pseudo-normale. On pose $\eta^* = +\infty$ si u est normale et sinon on définit η^* comme ci-dessus. Alors u est C^∞ sur $[0, \eta^*[$ et on a $u''' < 0$ sur $[0, \eta^*[$.

Comme une solution pseudo-normale est positive, pour $\beta > 0$ on a $u''(0) > 0$ et on a alors le :

Lemme 3 (Changement de variable de Crocco.) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $n > 0$ et u une solution pseudo-normale de (2). On pose $\eta^* = +\infty$ si u est normale et sinon on définit η^* comme dans le lemme 2. Soit $\gamma = u''(0) > 0$ et $y = (u, u', \overline{\tau}(u''))$. Alors, y_2 est un homéomorphisme de $[0, \eta^*[$ sur $[0, 1[$ et un C^∞-difféomorphisme de $]0, \eta^*[$ sur $]0, 1[$. La fonction $z = y_3 \circ y_2^{-1}$ - où y_2 est restreinte à $[0, \eta^*[$ - prolongée par $z(1) = 0$, est continue sur $[0, 1]$, strictement positive et de classe C^∞ sur $[0, 1[$, et est solution du problème de Cauchy :*

$$\forall t \in [0, 1[: \qquad z''(t) = -\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1 - t^2}{\overline{\tau}^{-1}(z(t))}\right] - \frac{\alpha t}{\overline{\tau}^{-1}(z(t))} \qquad z(0) = \gamma^n \quad z'(0) = -\beta/\gamma \tag{7}$$

et on a :

$$\forall t \in [0, 1[: \qquad z'(t) + \beta \frac{1 - t^2}{\overline{\tau}^{-1}(z(t))} + \alpha \int_0^t \frac{s\, ds}{\overline{\tau}^{-1}(z(s))} = 0 \tag{8}$$

Les propriétés de y_2 et de z sont élémentaires et (2) implique alors (7), qui implique (8) en intégrant de 0 à t.

3 Existence et unicité de la solution positive.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ et $n > 0$ donnés et soit f le second membre de (4). On pose :

$$E = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ (y_2, y_3) \notin \{(1, 0), (-1, 0)\}\}$$

Lemme 4

1. *Pour chaque $y_0 \in E$, le problème de Cauchy $(y' = f(y), y(0) = y_0)$ possède une unique solution maximale dans E.*
2. *Pour chaque $\gamma \in \mathbb{R}$, soit alors $(J(\gamma), y)$ la solution maximale de (4) dans E, où $J(\gamma)$ est son intervalle ouvert de définition. On note $\eta \mapsto y(\gamma, \alpha, \beta, n; \eta)$ cette solution. Alors, l'ensemble $\bigcup_{(\gamma,\alpha,\beta,n) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^*)^2} \{\gamma, \alpha, \beta, n\} \times J(\gamma)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^5$ et, sur cet ouvert, l'application $(\gamma, \alpha, \beta, n, \eta) \longmapsto y(\gamma, \alpha, \beta, n; \eta)$ est continue.*

Le point 2 résulte directement du point 1 d'après les propriétés usuelles des EDO en dimension finie dont le second membre est continu (voir p. ex. [5]). Pour le point 1, comme f est continue on a toujours l'existence d'une solution maximale et la difficulté est de montrer son unicité. Le cas $n \leq 1$ est standard par Cauchy-Lipschitz. Reste le cas $n > 1$ où on est ramené à prouver l'unicité locale quand $y_0 = (a, b, 0)$ avec $|b| \neq 1$. La démonstration est alors assez technique et fastidieuse.
Pour prouver l'existence d'une solution positive, on s'appuie alors sur le lemme précédent et on utilise l'argument de connexité de Coppel[2]. Le raisonnement est le suivant. Soit $\Omega = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3,\ y_2 < 1, y_3 > 0\}$ et $\gamma > 0$. Sur Ω, le second membre f de (4) est C^1 et il y a donc unicité de la solution maximale dans Ω. Soit $(I(\gamma), \overline{y})$ cette solution et soit $(J(\gamma), y)$ la solution maximale dans E du même problème. Par unicité, on a $I(\gamma) \subset J(\gamma)$ et $\overline{y} = y$ sur $I(\gamma)$. Posons $\eta^+ = \sup I(\gamma)$. Si $\eta^+ < +\infty$, alors $\overline{y}$ est bornée en η^+ (par $(\eta^+, 1, \overline{\tau}(\gamma))$ et atteint nécessairement le bord de Ω (sinon η^+ ne serait pas borne sup de $I(\gamma)$). On peut donc diviser l'ensemble des $\gamma > 0$, c'est à dire $\mathbb{R}^{+*}$, en la réunion de quatre parties deux à deux disjointes : $\mathbb{R}^{+*} = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup J_4$ où :

1. J_1 est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale $(J(\gamma), y)$ de (4) dans E reste dans Ω pour tout $\eta \in \mathbb{R}^+$.
2. J_2 est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale $(J(\gamma), y)$ de (4) dans E atteint $\partial\Omega$ à un "instant" fini η^+ et en un point où $y_2 = 1, y_3 > 0$.
3. J_3 est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale $(J(\gamma), y)$ de (4) dans E atteint $\partial\Omega$ à un "instant" fini η^+ et en un point où $0 < y_2 < 1, y_3 = 0$.

4. J_4 est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale $(J(\gamma), y)$ de (4) dans E atteint $\partial\Omega$ à un "instant" fini η^+ et en un point où $y_2 = 1, y_3 = 0$.

Dans les cas 2) ou 3) la solution $(J(\gamma), y)$ dans E se prolonge au delà de η^+. Sa continuité par rapport à γ (lemme 4) implique alors que J_2 et J_3 sont ouverts. D'autre part, pour $\gamma = 0$, on a $y(0) = (0, 0, 0)$ et $y_3'(0) = -\beta < 0$, donc par continuité tout $\gamma > 0$ assez petit est dans J_3 qui n'est donc pas vide. On montre de même, par le changement de variable η/γ et par continuité (car le lemme 4 s'applique encore), que tout $\gamma > 0$ assez grand est dans J_2 qui n'est donc pas vide non plus. Or $\mathbb{R}^{+*}$ est connexe et n'est donc pas la réunion de J_2 et J_3. Ce qui implique nécessairement que $J_1 \cup J_4 \neq \emptyset$. De plus pour tout $\gamma \in J_2$, au delà de η^+ la solution maximale y rentre dans le domaine $y_3 > 0, y_2 > 1$. On montre alors (mais c'est moins évident) qu'elle y reste et donc que $\lim_{\sup J(\gamma)} y_2 = +\infty$ (par l'absurde, vu le lemme 1 si $\sup J(\gamma) = +\infty$). Donc, aucun point de J_2 ne peut être la condition initiale $u''(0)$ d'une solution de (2). De même, pour tout $\gamma \in J_3$, la solution y au delà de η^+ rentre nécessairement dans le domaine $y_3 < 0, y_2 < 1$ et on montre alors (ce n'est pas non plus si évident) qu'il existe nécessairement $\eta > \eta^+$ tel que $y_2(\eta) < 0$. Donc, aucun point de J_3 ne peut être la condition initiale $u''(0)$ d'une solution positive de (2). D'autre part, pour tout $\gamma \in J_1$, la solution maximale $(J(\gamma), y)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$ avec y_2 strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc strictement positive (car $y_2(0) = 0$), et bornée (par 1). Donc, y_2 possède une limite finie $L > 0$ en $+\infty$ et, par le lemme 1 on a $L = 1$. Donc, tout $\gamma \in J_1$, est la condition initiale $u''(0)$ d'une solution positive et normale de (2).

Pour $n \leq 1$, J_4 est vide car pour $\gamma \in J_4$ (par C.L.) on aurait $y_2 = 1$ sur tout $J(\gamma)$, et donc en particulier $y_2(0) = 1$, ce qui serait absurde. Donc, pour $n \leq 1$, J_1 n'est pas vide et J_4 est vide. Ce qui prouve que pour tout $n \leq 1$ 1) (2) possède au moins une solution positive et 2) toute solution positive est normale.

Pour $n > 1$, c'est un peu plus délicat. On montre d'abord que si $\alpha < 0$, J_4 est vide (et donc $J_1 \neq \emptyset$) alors que si $\alpha \geq 0$, J_1 est vide (et donc $J_4 \neq \emptyset$). Donc, comme dans le cas $n \leq 1$, pour $\alpha < 0$ 1) (2) possède au moins une solution positive et 2) toute solution positive est normale. Inversement, si $\alpha \geq 0$, alors tout $\gamma \in J_4$ est la condition initiale $u''(0)$ d'une solution positive et pseudo-normale, mais non-normale de (2) (il suffit de prolonger y_2 par 1 au delà η^+). De plus, on montre (ce n'est pas si évident) qu'il n'est pas possible de prolonger autrement y au delà de η^+ (attention le lemme 4 tombe en défaut) en une solution positive de (2). Donc, pour $\alpha \geq 0$ 1) (2) possède au moins une solution positive et 2) toute solution positive est pseudo-normale mais non normale.

Enfin, pour l'unicité, on montre assez facilement par l'absurde que $J_1 \cup J_4$ est toujours réduit à un unique point γ_0. Pour cela on suppose qu'il existe $\gamma_1 > \gamma_2$ dans $J_1 \cup J_4$. Pour $\alpha \leq 0$, on utilise l'équation (2) pour montrer que $u_1'' > u_2''$ sur tout $\mathbb{R}^+$ ce qui implique, en intégrant de 0 à $+\infty$, que $1 = \lim_{+\infty} u_1' > \lim_{+\infty} u_2' = 1$, ce qui est absurde. Pour $\alpha > 0$, on utilise l'équation (8) pour montrer que $z_2' > z_1'$ sur $[0, 1[$ ce qui implique, en intégrant de 0 à 1, que $\gamma_1^n < \gamma_2^n$, ce qui est absurde. D'où, en combinant avec les lemmes 1 et 2 :

Théoreme 1 (Existence et unicité.) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0$ et $n > 0$. Alors :*

1. *Le problème de Falkner-Skan généralisé (2) a une unique solution positive u. Soit $\gamma_0(\alpha, \beta, n) = u''(0)$. Alors $\gamma_0 > 0$ et l'application $(\alpha, \beta, n) \longmapsto \gamma_0(\alpha, \beta, n)$ est continue.*
2. *L'intervalle $]0, \gamma_0[$ est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale dans E de (4) quitte, en un certain $\eta^+ > 0$, le domaine $(y_3 > 0, y_2 < 1)$ en un point $y(\eta^+)$ avec $\{y_3(\eta^+) = 0, y_2(\eta^+) < 1\}$. Pour $\eta > \eta^+$, cette solution "entre" dans le domaine $(y_3 < 0, y_2 < 1)$ et y prend, pour des $\eta > \eta^+$ des valeurs $y_2(\eta) < 0$.*
3. *L'intervalle $]\gamma_0, +\infty[$ est formé des $\gamma > 0$ tels que la solution maximale dans E de (4) quitte, en un certain $\eta^+ > 0$, le domaine $(y_3 > 0, y_2 < 1)$ en un point $y(\eta^+)$ avec $\{y_3(\eta^+) > 0, y_2(\eta^+) = 1\}$. Pour $\eta > \eta^+$, elle entre dans le domaine $(y_3 > 0, y_2 > 1)$ et ne le quitte plus et y_2 tend vers $+\infty$. Un tel γ n'est la valeur initiale $u''(0)$ d'aucune solution (positive ou non) de (2).*
4. *Si $n \leq 1$, ou si $n > 1$ et $\alpha < 0$, cette unique solution positive u est normale et on a :*

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^+); \qquad \forall \eta > 0 :\ 1 > u'(\eta) > 0, \gamma_0 > u''(\eta) > 0, u'''(\eta) < 0\ , \qquad \lim_{+\infty} u'' = 0$$

   De plus, si $n \leq 1$ alors $\lim_{+\infty} u''' = 0$.
5. *Si $n > 1$ et $\alpha \geq 0$, cette unique solution positive est pseudo-normale mais pas normale. Il existe $\eta^* > 0$ tel que :*
   (a) Sur $[0, \eta^*[$, u est C^∞, avec sur $]0, \eta^*[$: $1 > u' > 0, \gamma_0 > u'' > 0, u''' < 0$.
   (b) Sur $[\eta^*, +\infty[$ on a $u'' = 0, u' = 1$.

De plus[2]*, si $n<2$ alors u est $C^3(\mathbb{R}^+)$, si $n=2$ $\lim_{\eta^*} u'''=-\alpha u(\eta^*)$ et si $n>2, \alpha>0$ alors $\lim_{\eta^*} u'''=-\infty$.*

De plus, en procédant quasiment comme pour l'unicité, on vérifie facilement qu'à n fixé γ_0 est une fonction strictement croissante de α et β. Il est à noter que le théorème induit directement une méthode très simple (par dichotomie) pour la détermination numérique de $\gamma_0=u''(0)$, et donc de la solution. On donnera quelques illustrations numériques lors de l'exposé oral. On a de plus les encadrements, qui entre autres facilitent la mise en oeuvre de la dichotonmie :

$$
\begin{aligned}
\frac{(n+1)(\alpha+4\beta)}{6n} &\geq \gamma_0^{n+1} \geq \max[\frac{2(n+1)\beta}{3n}, \frac{\alpha+4\beta}{6}] \qquad (\alpha \geq 0, n>0)\\
\frac{2(n+1)\beta}{3n} &\geq \gamma_0^{n+1} \geq \frac{n+1}{6n}\max[\alpha+4\beta, 4\beta\sqrt{\frac{2\beta}{2\beta-\alpha}}] \qquad (\alpha<0, n>0)\\
\eta^* &\leq \frac{n+1}{n}[\frac{6}{\alpha+4\beta}]^{\frac{1}{n+1}} \qquad (\alpha \geq 0, n>1)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

La majoration de η^* sera justifiée au paragraphe suivant (elle est aussi donnée dans [6], par une autre méthode). Pour les encadrements de γ_0, on peut procéder comme suit. On multiplie l'équation de (2) par u'' et il vient :

$$
\alpha \int_0^{\eta} u(s)u''^2(s)\,ds = -\beta(u'(\eta)-\frac{u'^3(\eta)}{3}) + \frac{n}{n+1}\gamma_0^{n+1} - \frac{n}{n+1}u''(\eta)^{n+1} \tag{10}
$$

Le membre de gauche est du signe de α. On fait tendre η vers $+\infty$, ou η^*, u'' tend vers 0 et on obtient la majoration pour $\alpha<0$ et une partie de la minoration pour $\alpha \geq 0$ (et pour $\alpha=0$, on obtient la valeur exacte). On utilise ensuite (8). Pour $t \in [0,1[$ et $\alpha<0$, comme z décroît, on a $z'(t)z^{1/n}(t) \leq -\beta(1-t^2)-\alpha t^2/2$, on intègre de 0 à t et il vient $n\gamma_0^{n+1}/(n+1) \geq t(\beta-(2\beta-\alpha)t^2/6)$. On prend $t=1$ et $t=\sqrt{2\beta/(2\beta-\alpha)}$ et on obtient les minorants voulus. Pour $\alpha \geq 0$ la première inégalité s'inverse, on l'intègre de 0 à 1 et on obtient la majoration. On a aussi $-z'(t)\gamma_0 \geq \beta(1-t^2)+\alpha t^2/2$, on intègre de 0 à 1 et on obtient la minoration manquante.

4 Equivalents en l'infini pour $n<1, \beta>0$ et $\alpha \geq 0$.

Soit u la solution positive de (2) et z définie comme dans le lemme 3. On a l'inégalité :

$$
\forall \eta \geq 0: \quad u'' \geq (1-u')^{2/n+1}(2\beta/3)^{1/n+1} \qquad (\beta>0, n<1, \alpha \geq 0) \tag{11}
$$

Pour le voir, on multiplie l'équation différentielle de (2) par u'' et on intègre de $\eta>0$ à $+\infty$. On en déduit l'identité intégrale :

$$
\forall t \in [0,1]: \qquad z(t) = \alpha(1-t)\int_0^t s z^{-1/n}(s)\,ds + \int_t^1 [\beta(1-s^2)+\alpha s(1-s)]z^{-1/n}(s)\,ds \tag{12}
$$

En effet, comme $z^{1/n}(s) \geq (1-s)^{2/n+1}(2\beta/3)^{1/n+1}$, les deux membres de l'égalité sont bien définis et leurs dérivées sont égales. D'autre part, dans le membre de droite, le premier terme tend vers 0 quand $t \to 1$. D'où l'identité. On introduit alors l'opérateur $\mathfrak{L}$ de domaine D défini par :

$$
\forall t \in [0,1]: \qquad \mathfrak{L}(f)(t) = \alpha(1-t)\int_0^t s f^{-1/n}(s)\,ds + \int_t^1 (\beta(1-s^2)+\alpha s(1-s))f^{-1/n}(s)\,ds
$$

où $D=\{f:]0,1[\mapsto \mathbb{R}/f>0 \ p.p., f^{-1/n} \in \mathrm{L}^1([0,1],1-s)\}$. Comme $\alpha \geq 0$, on a la relation de monotonie $f_1 \leq f_2 \Rightarrow \mathfrak{L}(f_1) \geq \mathfrak{L}(f_2)$. Il est clair que z est un point fixe de $\mathfrak{L}$ et que l'on a l'inégalité $z \geq Cz_0$ avec :

$$
C=[2\beta/3]^{\frac{n}{n+1}} \qquad z_0(t)=(1-t)^{\frac{2n}{n+1}} \quad (t \in [0,1])
$$

La fonction z_0 est dans D et, en calculant $\mathfrak{L}(z_0)$, on vérifie l'existence de constantes M, m telles que $Mz_0 \geq \mathfrak{L}(z_0) \geq mz_0$. Donc, les itérés successifs $\mathfrak{L}^k(z_0)$ sont bien définis et on a la relation :

$$
\forall p \in \mathbb{N}: \qquad \mathfrak{L}^{2p+1}(Cz_0) \geq z \geq \mathfrak{L}^{2p}(Cz_0)
$$

[2] Les cas $n \geq 2$ sont académiques, car en particulier le Reynolds non newtonien ne tend pas vers $+\infty$ avec la vitesse extérieure et les hypothèses de couche limite tombent en défaut.

On pose alors :

$$K = (1+n)[\alpha(1+n) + 2\beta(1-n)]/(2n(1-n))$$

et on définit la suite (u_p) par :

$$u_0 = C \qquad u_{p+1} = K u_p^{-1/n}$$

Elle converge vers $K^{\frac{n}{n+1}}$ et on vérifie, par récurrence sur p, que :

$$\forall p \geq 0 : \qquad \frac{\mathfrak{L}^p(Cz_0)(t)}{z_0(t)} \underset{t\to 1}{\to} u_p$$

On a donc l'implication :

$$\frac{\mathfrak{L}^{2p+1}(Cz_0)}{z_0} \geq \frac{z}{z_0} \geq \frac{\mathfrak{L}^{2p}(Cz_0)}{z_0} \Longrightarrow \frac{z(t)}{z_0(t)} \underset{t\to 1}{\to} K^{\frac{n}{n+1}}$$

En revenant à la variable η on a donc les équivalents :

Théoreme 2 (Comportement asymptotique.) *Soit $n<1$, $\beta>0$ et $\alpha \geq 0$. Soit u l'unique solution positive de (2). Alors on a les relations, où $\eta_1 > 0$ est une constante :*

$$\begin{cases} u(\eta) \underset{+\infty}{\sim} \eta - \eta_1 \quad 1-u'(\eta) \underset{+\infty}{\sim} \left[\dfrac{1+n}{1-n}\right]^{\frac{n}{1-n}} \left[\dfrac{2n}{\alpha(1+n)+2\beta(1-n)}\right]^{\frac{1}{1-n}} \dfrac{1}{\eta^{\frac{1+n}{1-n}}} \\ u''(\eta) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1+n}{1-n}\dfrac{1-u'(\eta)}{\eta} \end{cases} \tag{13}$$

A noter que dans le problème originel (c.f. (3)) on a $\alpha(1+n)+2\beta(1-n) = 2$. Signalons alors que le théorème 2 s'applique si $\alpha < 0$ avec $\alpha(1+n)+2\beta(1-n) > 0$: pour la démonstration on peut encore utiliser l'opérateur $\mathfrak{L}$ mais c'est plus délicat. A noter également que (12) reste vraie pour une solution pseudo-normale avec $\alpha \geq 0$, car on a $\eta^* = \int_0^1 z^{-1/n}(s)\,ds$, d'où l'on déduit la majoration de η^* indiquée plus haut, vu la décroissance de z.

5 Conclusions

Pour résumer, on a montré l'existence et l'unicité d'une solution auto-similaire positive pour tout $\beta > 0, n > 0$, donné des encadrements du taux de cisaillement à l'origine (i.e. de $u''(0)$), démontré le comportement "pathologique" des fluides rhéo-épaississants et donner des équivalents de la solution auto-similaire au voisinage de l'infini pour $n < 1, \alpha \geq 0$. Signalons que les encadrements et les équivalents à l'infini sont également valables pour la solution de Blasius ($\beta = 0, \alpha = 1$) dont on indiquera un théorème d'existence et d'unicité lors de l'exposé oral.

Références

[1] Acrivos A., Shah M.J., Petersen E.E. 1960 Momentum and heat transfer in laminar boundary layer flows of non-newtonian fluids past external surfaces. *A.I.Ch.E. Journal*, **6** 312-317

[2] Coppel W.A. 1960 On a differential equation of boundary-layer theory. *Phil. Trans. Roy. Soc. London A*, **253** 101-136

[3] Denier J.P., Dabrowski P.P. 2004 On the boundary-layer equations for power-law fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **460** 3143-3158

[4] Filipussi D., Gratton J., Minotti F. 2001 The self-similar laminar boundary layer of power-law non newtonian fluids. *Il Nuovo Cimento B*,**116 (4)** 393-402

[5] Hartman P. 1964, *Ordinary differential equations.* Willey

[6] Oleinik O., Samokhin V.N. 1999 *Mathematical models of boundary-layer theory.* Chapman and Hall

[7] K. B. Pavlov, I. A. Fedotov and A. P. Shakhorin 1981 On the tructure of laminar boundary layer in non-newtonian dilatant fluids. *Izvest. Akad. Nauk. SSSR Mekh. (repris dans Fl. Mech. and Gazes)*, **4** 142-145

[8] Schowalter W.R. 1960 The application of boundary-layer theory to power-law pseudoplastic fluids : Similar solutions. *A.I.Ch.E. Journal*, **6** 24-28

[9] Schowalter W.R. 1978 *Mechanics of non newtonian fluids*, Pergamon Press