

# Note sur les équations de lubrification des fluides non newtoniens purement visqueux ou viscoélastiques

Didier Bernardin<sup>a</sup>

a. LEMTA UMR CNRS 7563. Nancy.

## Résumé :

*On s'intéresse aux écoulements de films minces d'un fluide non-newtonien entre deux parois rigides dont l'une est plane et l'autre mobile par rapport à la première. A l'ordre principal, les équations qui régissent le champ de vitesse dans le film sont les équations de la lubrification. Que le fluide soit purement visqueux, ou viscoélastique selon un modèle PTT, on montre qu'elles ne dépendent que de la fonction de cisaillement viscométrique du fluide et que leur résolution se ramène à la minimisation d'une fonctionnelle strictement convexe bien choisie. Ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution. En conséquence, la distribution des vitesses dans un film viscoélastique est la même que dans un film purement visqueux de même fonction de cisaillement et les écoulements ne se distinguent que par la distribution des contraintes. Toutefois, pour une butée Michell par exemple, l'influence de la seule élasticité sur les efforts sur la paroi mobile est négligeable.*

## Abstract :

*We re-visit the lubrication equations for non-newtonian fluids, purely viscous or viscoelastic, given then by a PTT model. We prove the existence and uniqueness of the velocity field when the pressure on the boundary is prescribed. For this purpose we show that the problem is equivalent to the minimisation of a convex function. For a viscoelastic fluid the velocity field is then the same as the one's of a purely viscous fluid with the the same viscometric shear function. Only the distributions of the stresses are different. Although, for the Michell thrust block for instance, the influence of the elasticity on the efforts is negligible.*

**Mots clefs : Lubrification ; Fluides non-Newtoniens ; Modèle PTT**

## 1 Introduction

La littérature fourmille d'études sur les problèmes de lubrification en fluides non newtoniens et on ne citera que quelques références récentes. Pour les fluides purement visqueux, les études concernent essentiellement les fluides en loi puissance et on trouvera par exemple dans [6] une analyse du fonctionnement hydro-thermique d'un palier lisse, ainsi que de nombreuses références antérieures sur ce problème ou sur des problèmes similaires. Pour ce qui concerne les fluides viscoélastiques de "type PTT", à ma connaissance la première analyse mathématiquement rigoureuse des équations de la lubrification est exposée dans [2]. Pour les films 2D le problème se réduit à une équation de Reynolds généralisée qui avait été antérieurement exhibée, et résolue numériquement pour le cas d'une surface mobile parabolique, dans [1]. Dans le cas plus simple du modèle de Maxwell B, une correction de l'équation de Reynolds, à l'ordre suivant par rapport aux équations de la lubrification, avait été étudiée précédemment dans [7] pour le même profil mobile, laquelle étude a été reprise (et en fait corrigée) plus récemment par [8]. On se propose ici de montrer l'existence et l'unicité de la solution des équations de la lubrification aussi bien pour un fluide purement visqueux arbitraire que pour un modèle PTT, les équations étant les mêmes pour ce dernier que pour un fluide purement visqueux de même fonction de cisaillement. La démonstration consiste à ramener le problème à la minimisation d'une fonctionnelle convexe. On retrouve en particulier le résultat de [2] mais la démonstration présentée ici est plus élémentaire, plus générale et, par nature, le résultat est directement utilisable numériquement.

On rapporte l'espace à un repère orthonormé  $Oxyz$  et on considère des écoulements d'un liquide incompressible dans le domaine compris entre le plan  $z = 0$  et une surface mobile relativement à ce plan, d'équation  $\{z = h(x, y, t), (x, y) \in S(t) \subset \mathbb{R}^2\}$ , qui se déplace à la vitesse relative  $U\mathbf{e}_x + V\mathbf{e}_y + W\mathbf{e}_z$  et à laquelle le fluide

adhère. Les fonctions  $h, U, V, W$  sont données et spatialement assez régulières (typiquement  $C^1, C^1, C^1$  et  $C^0$  sur  $\overline{S(t)}$ , respectivement). On distinguera entre les problèmes 2D et 3D. Dans un problème 2D (c.f. la figure 1),  $S(t)$  sera la bande  $S(t) = \{x_0(t) < x < x_1(t), y \in \mathbb{R}\}$ , la fonction  $h$  ainsi que la vitesse du fluide ne dépendront pas de  $y$  et la vitesse selon  $\mathbf{e}_y$  sera nulle. Dans un problème 3D,  $S(t)$  sera à chaque instant un domaine ouvert borné connexe du plan  $Oxy$  que l'on supposera alors assez régulier (typiquement au moins lipschitzien). On désignera par  $U_0$  une célérité caractéristique de la surface mobile, par  $L$  une longueur caractéristique de l'étendue du domaine  $S(t)$  et par  $d$  l'épaisseur caractéristique du film et on se place dans des situations où  $\epsilon = d/L \ll 1$ , typiques de la lubrification. On note  $\mathbf{v} = u\mathbf{e}_x + v\mathbf{e}_y + w\mathbf{e}_z$  la vitesse du liquide par rapport au plan  $z = 0$  et on introduit les variables et fonctions sans dimension :

$$x = L\bar{x} \quad y = L\bar{y} \quad z = \epsilon L\bar{z} \quad t = L\bar{t}/U_0 \quad u = U_0\bar{u} \quad v = U_0\bar{v} \quad w = \epsilon U_0\bar{w} \quad h = d\bar{h} \quad (1)$$

On notera  $\Sigma(\bar{t}) = S(t)/L$  le domaine a-dimensionnel dans lequel varient  $(\bar{x}, \bar{y})$  à l'instant  $\bar{t}$ . On a les conditions aux limites sur les vitesses :

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \text{ en } \bar{z} = 0 \quad \bar{u} = \bar{U}, \bar{v} = \bar{V}, \bar{w} = \bar{W} \text{ en } \bar{z} = \bar{h} \quad (2)$$

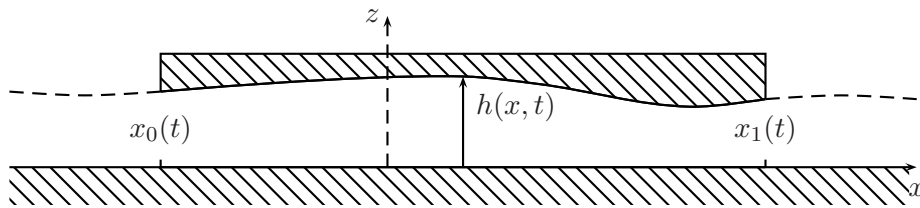


FIG. 1 – Géométrie 2D typique.

## 2 Cas d'un fluide purement visqueux.

Le tenseur des contraintes de Cauchy dans le liquide est donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Id} + \boldsymbol{\tau} \quad \boldsymbol{\tau} = 2\tau(\dot{\gamma})\mathbf{D}[\mathbf{v}]/\dot{\gamma}$$

où  $p$  est la pression,  $\tau$  la fonction de cisaillement,  $\mathbf{D}[\mathbf{v}]$  la partie symétrique du gradient de vitesse et  $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D}[\mathbf{v}] : \mathbf{D}[\mathbf{v}]}$  le taux de cisaillement. La fonction  $\tau$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ , impaire et strictement croissante et on admettra qu'aux forts taux de cisaillement elle se comporte comme une loi puissance d'indice de structure  $n > 0$  et de consistance  $K$ . C'est à dire :

$$\exists n > 0, K > 0 / \quad \tau(\dot{\gamma}) \sim_{+\infty} K\dot{\gamma}^n \quad (3)$$

ce qui est le cas de tous les modèles usuels (si  $\tau$  est une loi puissance c'est évident, pour un modèle de Carreau on a  $n = 1$  et  $K = \mu_\infty$ , etc...). Comme le taux de cisaillement est d'ordre  $\epsilon^{-1}$ , les contraintes visqueuses sont donc d'ordre  $\epsilon^{-n}$ . On introduit le nombre de Reynolds et on rend  $\boldsymbol{\tau}$  et  $p$  a-dimensionnels en posant :

$$Re = \frac{\rho U_0^2}{K} \left(\frac{L}{U_0}\right)^n \quad \boldsymbol{\tau} = K \left(\frac{U_0}{\epsilon L}\right)^n \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad p = \frac{K}{\epsilon} \left(\frac{U_0}{\epsilon L}\right)^n \bar{p} + p_{ref}$$

où  $p_{ref}$  est une pression de référence. On introduit également la fonction de cisaillement a-dimensionnelle :

$$\tau(\dot{\gamma}) = K \left(\frac{U_0}{\epsilon L}\right)^n \bar{\tau} \left(\frac{\epsilon L \dot{\gamma}}{U_0}\right) \quad (4)$$

Attention à la subtilité suivante. La fonction  $\bar{\tau}$  est une fonction de la variable  $\chi = \epsilon L \dot{\gamma} / U_0$  mais, sauf pour une loi puissance,  $\bar{\tau}$  dépendra également du paramètre  $D_e = \lambda U_0 / (\epsilon L) = \lambda U_0 / d$ , où  $\lambda$  est un temps caractéristique intrinsèque à la loi rhéologique  $\tau$ . Dans l'expression de  $\bar{\tau}$ , ce paramètre  $D_e$  est alors évidemment à considérer comme un  $O(1)$ , sinon on ne traiterait que des lois puissances. Pour  $\epsilon \ll 1, \epsilon^{n+1} Re \ll 1$ , à l'ordre principal en  $\epsilon$  les équations du mouvement dans le film se résument alors à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \\ \bar{\tau}_{xz} = \frac{\bar{\tau}(\chi)}{\chi} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} & \bar{\tau}_{yz} = \frac{\bar{\tau}(\chi)}{\chi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} & \chi^2 = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}\right)^2 \end{cases} \quad (5)$$

Le problème est de déterminer les fonctions  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  vérifiant (2-5). Pour la résolution, on supposera qu'il existe  $0 < r \leq n$  tel que la fonction  $\tau(\dot{\gamma})/\dot{\gamma}^r$  soit bornée supérieurement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Ce qui implique l'existence

d'une constante  $m > 0$  telle que :

$$\forall \chi \in \mathbb{R} : \quad \bar{\tau}(|\chi|) \leq m|\chi|^r \quad (0 < r \leq n) \quad (6)$$

Cette condition, qui ne porte en fait que sur le comportement de  $\tau$  au voisinage de l'origine, n'est pas vraiment restrictive car elle est vérifiée par tous les modèles usuels (loi puissances, modèles de Carreau, de Sisko, de Cross, de Williams, etc..).

## 2.1 Problèmes 3D.

On introduit la fonction  $\mathbf{t}$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \bar{\tau}(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ . C'est une bijection continue de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  dont l'inverse est<sup>1</sup>  $\mathbf{t}^{-1}(\mathbf{x}) = \bar{\tau}^{-1}(\|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  ( $\bar{\tau}^{-1}$  est l'inverse de  $\bar{\tau}$ ). On fixe  $\bar{t}$  et le problème (2-5) est alors équivalent à trouver les fonctions  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  définies sur  $\Sigma(\bar{t})$ , avec  $\mathbf{c} : \Sigma(\bar{t}) \mapsto \mathbb{R}^2$ , vérifiant les deux équations :

$$\int_0^{\bar{h}} \mathbf{t}^{-1}(\bar{z}\nabla\bar{p} + \mathbf{c}) d\bar{z} = \bar{\mathbf{V}} \quad \text{div} \left[ \int_0^{\bar{h}} \bar{z}\mathbf{t}^{-1}(\bar{z}\nabla\bar{p} + \mathbf{c}) d\bar{z} \right] = \bar{h}\text{div}(\bar{\mathbf{V}}) + \bar{W} \quad (7)$$

où, pour simplifier on a noté  $\bar{\mathbf{V}} = \bar{U}\mathbf{e}_x + \bar{V}\mathbf{e}_y$  et où les opérateurs div et  $\nabla$  sont 2D, c'est à dire à prendre par rapport à  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Pour la suite, on omettra d'indiquer explicitement les dépendances en  $\bar{t}$ . A noter que la première équation de (7) définit implicitement  $\mathbf{c}$  comme une fonction de  $\bar{h}\nabla\bar{p}, \bar{U}/\bar{h}, \bar{V}/\bar{h}$  et que la seconde est alors une équation elliptique non linéaire pour  $\bar{p}$  seule. Pour résoudre, il faut donc se donner  $\bar{p}$  sur le bord de  $\Sigma$ . On cherche donc  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  solution de (7) vérifiant de plus la condition :

$$\bar{p} = \bar{P} \quad \text{sur } \partial\Sigma \quad (8)$$

où  $\bar{P}$  est une fonction donnée (qui peut dépendre également de  $\bar{t}$ ). On cherche à priori une solution forte, c'est à dire  $\bar{p}$  de classe  $C^2(\bar{\Sigma})$  et  $\mathbf{c}$  de classe  $C^1(\bar{\Sigma})$  et il est clair que  $\bar{P}$  doit alors être la restriction à  $\partial\Sigma$  d'une fonction de classe  $C^2(\bar{\Sigma})$ . On met le problème sous-forme variationnelle : On multiplie la seconde équation de (7) par une fonction scalaire arbitraire  $q$  de classe  $C^\infty$  à support compact dans  $\Sigma$  et la première, scalairement dans  $\mathbb{R}^2$ , par une fonction arbitraire  $\mathbf{d} : \Sigma \mapsto \mathbb{R}^2$  également  $C^\infty$  à support compact dans  $\Sigma$ , on intègre sur  $\Sigma$  puis on additionne. On en déduit qu'un couple  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  est solution forte de (7-8) si, et seulement si, a) on a (8) et b) pour tout  $q \in \mathcal{D}(\Sigma)$  et  $\mathbf{c} \in [\mathcal{D}(\Sigma)]^2$  on a :

$$\int_{\Sigma} \left[ \int_0^{\bar{h}} (\mathbf{t}^{-1}(\bar{z}\nabla\bar{p} + \mathbf{c}) | \bar{z}\nabla q + \mathbf{d} |_{\mathbb{R}^2} d\bar{z} \right] d\sigma + \int_{\Sigma} [q(\bar{h}\text{div}(\bar{\mathbf{V}}) + \bar{W}) - (\mathbf{d} | \bar{\mathbf{V}} |_{\mathbb{R}^2})] d\sigma = 0 \quad (9)$$

Cette dernière expression n'est rien d'autre que la première variation, dans la direction  $(q, \mathbf{d})$ , de la fonctionnelle :

$$J(\bar{p}, \mathbf{c}) = \int_{\Sigma} \bar{h} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^1 |s\bar{h}\nabla\bar{p} + \mathbf{c}| \right) \bar{\tau}^{-1}(s) ds + \bar{p}\text{div}(\bar{\mathbf{V}}) \right] d\sigma + \int_{\Sigma} [\bar{p}\bar{W} - (\mathbf{c} | \bar{\mathbf{V}} |_{\mathbb{R}^2})] d\sigma \quad (10)$$

Il est clair, puisque  $\bar{\tau}^{-1}$  est croissante, que  $J$  est convexe. D'autre part, comme au voisinage de l'infini, on a  $\bar{\tau}^{-1}(\chi) \sim_{+\infty} \chi^{1/n}$ , il en résulte que la fonctionnelle  $J$  est bien définie, convexe et continue sur l'espace de Sobolev  $B = W^{1, (n+1)/n}(\Sigma) \times [L^{(n+1)/n}(\Sigma)]^2$ , qui est un Banach réflexif. De plus, comme  $\bar{\tau}^{-1}$  est continue avec  $\bar{\tau}^{-1}(0) = 0$ ,  $J$  est dérivable selon Gateaux sur  $B$ . Pour simplifier, on pose :  $B_0 = W_0^{1, (n+1)/n}(\Sigma) \times [L^{(n+1)/n}(\Sigma)]^2 = \{(\bar{p}, \mathbf{c}) \in B, \bar{p}|_{\partial\Sigma} = 0\}$ . On cherche alors les solutions faibles des équations de lubrification, c'est à dire les solutions  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  du problème (8-9) qui sont dans  $B$ . On demande alors seulement à  $\bar{P}$  d'être la trace sur  $\partial\Sigma$  d'une fonction de  $W^{1, (n+1)/n}(\Sigma)$ . La relation (9) signifie que la dérivée de Gateaux de  $J$  au point  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  s'annule sur  $B_0$ . Donc,  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  est une solution faible de (8-9) si, et seulement si,  $J(\bar{p}, \mathbf{c})$  est le minimum de  $J$  sur le sous-espace affine  $B(\bar{P}) = \{(\bar{p}, \mathbf{c}) \in B, \bar{p}|_{\partial\Sigma} = \bar{P}\} = (\bar{p}', \mathbf{0}) + B_0$ , où  $\bar{p}'$  est une fonction quelconque de  $W^{1, (n+1)/n}(\Sigma)$  vérifiant la condition limite. Or, par la stricte monotonie de  $\bar{\tau}^{-1}$ , il est clair que  $J$  est strictement convexe sur  $B(\bar{P})$  et de plus, par l'inégalité de Poincaré et la condition (6), elle y est coercive<sup>2</sup>. Il résulte alors d'un théorème classique d'analyse convexe (voir par exemple [3] ch. II, prop. 1.2) que  $J$  atteint son minimum sur  $B(\bar{P})$  en un unique point  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  qui est donc l'unique solution faible de (8-9). Comme toute solution forte est a fortiori une solution faible, on conclut que si le problème possède une solution forte elle est unique (ce que l'on pouvait montrer directement sans passer par  $J$ ) et confondue avec l'unique solution faible que l'on vient d'exhiber. Pour aller plus loin, il faut étudier la régularité de la solution faible, ce que l'on ne discutera pas ici (ce n'est en général pas trivial). En conclusion, il y a existence et unicité de la solution  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ , dès que la valeur de  $\bar{p}$  sur le bord de  $\Sigma$  est prescrite.

<sup>1</sup>Pour un fluide en loi puissance rhéofluidant  $\mathbf{t}^{-1}$  est  $C^1(\mathbb{R})$ , de même que pour les autres modèles cités.

<sup>2</sup>Ce n'est pas tout à fait évident. Pour un fluide en loi puissance, cela vient de la relation  $(\alpha + 1)2^{\alpha+1} \int_0^1 |sa + b|^\alpha ds \geq (|a|^\alpha + |b|^\alpha)$ , vraie pour tous réels  $a, b$  et tout  $\alpha \geq 0$ . Le cas général s'en déduit par (6) et Hölder.

## 2.2 Problèmes 2D.

On pose  $\bar{x}_0(\bar{t}) = x_0(t)/L$  et  $\bar{x}_1(\bar{t}) = x_1(t)/L$ . On a  $v = 0$  et le système (5) se réduit à :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} [\bar{\tau} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right)] \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (11)$$

Donc  $\bar{p}$  ne dépend que de  $(\bar{x}, \bar{t})$  et, à  $\bar{x}$  fixé,  $\bar{u}$  sera un champ de Couette-Poiseuille plan. Pour la suite, on fixe  $\bar{t}$  et on omettra d'indiquer explicitement les dépendances en  $\bar{t}$  et on notera par une dérivée droite la dérivée partielle par rapport à  $\bar{x}$  des fonctions qui ne dépendent que  $(\bar{x}, \bar{t})$ . Le problème (2-11) est maintenant équivalent à trouver deux fonctions scalaires  $(\bar{p}, c)$  définies sur  $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$  (et dépendantes également de  $\bar{t}$ ), vérifiant les deux équations :

$$\int_0^{\bar{h}} \bar{\tau}^{-1} \left( \bar{z} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + c \right) d\bar{z} = \bar{U} \quad \frac{d}{d\bar{x}} \left[ \int_0^{\bar{h}} \bar{z} \bar{\tau}^{-1} \left( \bar{z} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + c \right) d\bar{z} \right] = \bar{h} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} + \bar{W} \quad (12)$$

que l'on complète par les conditions aux limites sur  $\bar{p}$  :

$$\bar{p}(\bar{x}_0) = \bar{p}_0 \quad \bar{p}(\bar{x}_1) = \bar{p}_1 \quad (13)$$

Puis, exactement comme dans le cas 3D, on en déduit que le problème possède une unique solution faible  $(\bar{p}, c)$  dans  $B = W^{1, (n+1)/n}([\bar{x}_0, \bar{x}_1]) \times L^{(n+1)/n}([\bar{x}_0, \bar{x}_1])$  qui est l'unique point de l'espace affine  $B(\bar{p}_0, \bar{p}_1) = \{(\bar{p}, c) \in B, \bar{p}(\bar{x}_0) = \bar{p}_0, \bar{p}(\bar{x}_1) = \bar{p}_1\}$  qui rend minimale la fonctionnelle convexe :

$$J(\bar{p}, c) = \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} \bar{h} \left[ \int_0^1 \left( \int_0^{s\bar{h} \frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} + c} \bar{\tau}^{-1}(\xi) d\xi \right) ds + \bar{p} \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \right] d\bar{x} + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}_1} [\bar{p}\bar{W} - c\bar{U}] d\bar{x} \quad (14)$$

Il est plus facile d'étudier la régularité de la solution faible dans le cas 2D car le système (12) se ramène en général à une équation différentielle ordinaire du second ordre pour  $\bar{p}$  (équation de "Reynolds" généralisée). La conclusion, que l'on ne détaillera pas ici, est que pour la plupart des modèles la solution faible est une solution forte<sup>3</sup>, c'est à dire que  $\bar{p}$  est au moins  $C^2([\bar{x}_0, \bar{x}_1])$  et  $c$  au moins  $C^1([\bar{x}_0, \bar{x}_1])$  les deux dépendant régulièrement des éventuels paramètres de  $\bar{\tau}$  (et le plus souvent analytiquement pour les modèles usuels). En conclusion, et comme dans les problèmes 3D, il y a existence et unicité de la solution  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  (avec ici  $\bar{v} = 0$ ), dès que la valeur de  $\bar{p}$  sur le bord de  $\Sigma$  est prescrite.

## 3 Cas d'un fluide viscoélastique (modèle PTT sur-convecté).

Le tenseur des contraintes de Cauchy dans le liquide est maintenant donné par :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{Id} + 2\mu_S \mathbf{D}[\mathbf{v}] + \mathbf{S} \quad \lambda \frac{\Delta \mathbf{S}}{\Delta t} + \left(1 + \frac{\mathcal{K}\lambda}{\mu_E} \text{tr}(\mathbf{S})\right) \mathbf{S} = 2\mu_E \mathbf{D}[\mathbf{v}]$$

où  $p$  est une fonction scalaire (qui n'est pas la pression),  $\mu_S \geq 0$  est une viscosité constante et où la partie élastique de la contrainte,  $\mathbf{S}$ , suit un modèle différentiel sur-convecté de Phan-Thien et Tanner (noté U-PTT par la suite) dans lequel  $\Delta/\Delta t$  est la dérivée sur-convectée,  $\lambda > 0$  un temps constant,  $\mu_E > 0$  une viscosité constante et  $\mathcal{K} \geq 0$  une constante sans dimension qui caractérise la non linéarité du modèle. On posera :

$$\mu = \mu_S + \mu_E \quad r = \mu_E/\mu$$

Les fonctions viscométriques du modèle sont :

$$\tau(\dot{\gamma}) = \mu \left[ 1 - \frac{rk(\lambda\dot{\gamma})}{1+k(\lambda\dot{\gamma})} \right] \dot{\gamma} \quad \mathcal{N}_1(\dot{\gamma}) = \lambda \mu \frac{2r}{(1+k(\lambda\dot{\gamma}))^2} \dot{\gamma}^2 \quad \mathcal{N}_2(\dot{\gamma}) = 0$$

où  $x \in \mathbb{R} \mapsto k(x)$  est l'unique solution appartenant à  $\mathbb{R}^+$  de l'équation implicite :

$$k(1+k)^2 - 2\mathcal{K}x^2 = 0 \quad (15)$$

Pour  $\mathcal{K} > 0$ , la fonction de cisaillement  $\tau$  du modèle est rhéo-fluidifiante (et newtonienne si  $\mathcal{K} = 0$ ) et aux forts taux de cisaillement elle se comporte comme une loi puissance d'indice de structure  $n > 0$  et de consistance  $K$  (i.e. on a la relation (3)), avec  $n = 1, K = \mu_S$  si  $\mu_S > 0$  et  $n = 1/3, K = (2\lambda^2\mathcal{K})^{-1/3}\mu_E$  si  $\mu_S = 0$ . Dans le

<sup>3</sup>A l'exception notable, en particulier, des lois puissances rhéo-épaississantes où on peut perdre de la régularité.

problème de lubrification, comme la partie visqueuse de la contrainte est d'ordre  $\epsilon^{-1}$  si  $\mu_S > 0$ , on rend  $\mathbf{S}$  et  $p$   $a$ -dimensionnels en posant :

$$\mathbf{S} = \mu U_0 \bar{\mathbf{S}} / (\epsilon L) \quad p = \mu U_0 \bar{p} / (\epsilon^2 L) + p_{ref}$$

et on introduit les nombres de Reynolds et de Deborah :

$$R_e = \rho U_0 L / \mu \quad D_e = \lambda U_0 / (\epsilon L)$$

Pour que les équations du mouvement dans le film à l'ordre principal en  $\epsilon$  ne soit pas dégénérées, on se place dans des situations où  $R_e = O(1)$  et  $D_e = O(1)$  et ces équations se résument alors à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0 & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = (1-r) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial \bar{S}_{xz}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = (1-r) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\partial \bar{S}_{yz}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} = 0 \\ (1 + \mathcal{K} \frac{D_e}{r} \text{tr}(\bar{\mathbf{S}})) \bar{\mathbf{S}} - D_e (\bar{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}} \cdot \bar{\mathbf{C}}) - r (\bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}}^T) = \mathbf{0} & \text{où } \mathbf{C} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} \mathbf{e}_y \right) \otimes \mathbf{e}_z \end{cases}$$

Après simplification et quelques calculs algébriques, on obtient exactement le système (5) dans lequel la fonction de cisaillement viscométrique  $a$ -dimensionnelle  $\bar{\tau}$  est :

$$\bar{\tau}(\chi) = \left[ 1 - \frac{rk(D_e \chi)}{1 + k(D_e \chi)} \right] \chi \quad (16)$$

où  $x \mapsto k(x)$  est la solution positive de (15). Comme dans le cas purement visqueux, c'est exactement la fonction de cisaillement  $a$ -dimensionnelle associée à  $\tau$  par la relation (4) et elle vérifie la relation (6) (avec  $r = n$ ). Les composantes de  $\bar{\mathbf{S}}$  sont alors données, en fonction de  $(\bar{u}, \bar{v})$ , par :

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xz} &= \frac{r}{1 + k(D_e \chi)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} & \bar{S}_{yz} &= \frac{r}{1 + k(D_e \chi)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} & \bar{S}_{xy} &= \frac{D_e}{r} \bar{S}_{xz} \bar{S}_{yz} \\ \bar{S}_{xx} &= \frac{2D_e}{r} \bar{S}_{xz}^2 & \bar{S}_{yy} &= \frac{2D_e}{r} \bar{S}_{yz}^2 & \bar{S}_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Les équations de la lubrification du modèle U-PTT sont donc *rigoureusement les mêmes* que les équations de la lubrification d'un fluide purement visqueux qui aurait la même fonction de cisaillement et ne s'en distinguent que par l'interprétation de  $\bar{p}$ . En conséquence, *tous les résultats* du paragraphe précédent s'appliquent. Le problème de la lubrification d'un fluide viscoélastique vérifiant un modèle U-PTT possède donc une unique solution  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$ , quand la valeur de  $\bar{p}$  sur le bord de  $\Sigma$  est donnée, *qui est rigoureusement la même que pour un fluide purement visqueux de même fonction de cisaillement*. En particulier, la fonction  $\bar{p}$  est telle qu'il existe une unique fonction vectorielle  $\mathbf{c}$  (cas 3D), ou une unique fonction scalaire  $c$  (cas 2D), telle que  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  (resp.  $(\bar{p}, c)$ ) rende minimale la fonctionnelle  $J$  définie par (10) (resp. par (14)). On notera alors, vu les relations (15-16), que  $(\bar{p}, c)$  ne dépendent du modèle que par les deux seuls paramètres<sup>4</sup>  $r, \mathcal{K} D_e^2$ . En appliquant judicieusement le théorème des fonctions implicites, il est alors facile de montrer que  $(\bar{p}, \mathbf{c})$  sont des *fonctions analytiques* des paramètres  $(r, \mathcal{K} D_e^2)$  quand ceux-ci varient arbitrairement dans  $[0, 1] \times \mathbb{R}^+$ . Les deux écoulements, d'un fluide viscoélastique de type U-PTT ou d'un fluide purement visqueux de même fonction  $\tau$ , ne se distinguent donc que par la distribution des contraintes. **Note.** On a des résultats identiques pour un modèle PTT sous-convecté : les champs  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  sont identiques pour les deux modèles. Par contre les distributions de contraintes élastiques sont différentes. Mais, à cause de la relation  $|\mathcal{N}_2| = |\mathcal{N}_1|$  dans le modèle sous-convecté, ce dernier ne rend pas correctement compte de l'élasticité des liquides réels et est donc plutôt académique.

## 4 Écoulement d'un modèle U-PTT sous une butée Michell.

On va se contenter ici de commenter l'influence de la non linéarité du modèle U-PTT sur la portance d'une butée Michell quand  $\mathcal{K} D_e^2 \ll 1$ , c'est à dire pour un modèle faiblement non linéaire (voir aussi [4]). Il s'agit d'un problème 2D où  $U = U_0 = Cste > 0$ ,  $V = W = 0$  et où  $h = h_1 + (h_2 - h_1)(x - Ut)/L$ , avec  $h_2 > h_1 > 0$  et  $x_0(t) = Ut$ ,  $x_1(t) = Ut + L$ . On prend donc  $d = h_1$  et on posera  $\theta = (h_2 - h_1)/L$  et  $\alpha = (h_2 - h_1)/h_1$ . A l'ordre principal en  $\epsilon$  (i.e. sous les hypothèses de lubrification), le tenseur des contraintes dans le film est :

$$\frac{L}{\mu U} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\bar{p}}{\epsilon^2} \mathbf{Id} + 2 \frac{D_e}{\epsilon r} \bar{S}_{xz} \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \frac{1}{\epsilon} \bar{\tau} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_x) + O(1)$$

<sup>4</sup>A noter d'ailleurs que pour  $r = 1$  (i.e.  $\mu_S = 0$ ) on a  $\bar{\tau}^{-1}(x) = x + 2\mathcal{K} D_e^2 x^3$  ce qui permet d'écrire explicitement toutes les équations en fonction de  $\mathcal{K} D_e^2$ .

et la force exercée sur la butée par le liquide, à l'ordre principal en  $\epsilon$ , est donc (après une IPP) :

$$\mathbf{F} = \frac{\alpha\mu U}{\theta^2} \left[ \int_{\bar{t}}^{1+\bar{t}} \left[ \alpha \left( 1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \bar{p} + \theta^2 c \right] d\bar{x} \right] \mathbf{e}_z - \frac{\alpha\mu U}{\theta} \left[ \int_{\bar{t}}^{1+\bar{t}} c d\bar{x} - 2 \frac{D_e}{r} \theta \left[ \int_{\bar{t}}^{1+\bar{t}} \bar{S}_{xz}^2 d\bar{x} \right]_{\bar{z}=\bar{h}(\bar{x}, \bar{t})} \right] \mathbf{e}_x$$

La portance  $F_N = (\mathbf{F}|\mathbf{e}_z)_{\mathbb{R}^2}$  n'est donc pas affectée par l'élasticité du liquide mais uniquement par la non linéarité de sa fonction de cisaillement. Par contre, l'élasticité affecte la traînée  $F_T = -(\mathbf{F}|\mathbf{e}_x)_{\mathbb{R}^2}$  par la présence du terme en  $D_e \bar{S}_{xz}^2$ . Toutefois, sous les hypothèses de lubrification on a  $\theta \ll 1$  : La portance est alors d'ordre  $1/\theta^2$ , la partie purement visqueuse de la traînée est d'ordre  $1/\theta$  alors que la correction élastique est d'ordre 0. Donc, l'influence de l'élasticité du liquide est négligeable sur les efforts exercés sur la butée. De plus, comme à  $\bar{t}$  fixé  $\bar{p}, c$  sont analytiques en  $\mathcal{K}D_e^2$ , on a uniformément en  $\bar{x} \in [\bar{t}, \bar{t} + 1]$  :

$$\bar{p} = \bar{p}^{(0)} + \mathcal{K}D_e^2 \bar{p}^{(1)} + o(\mathcal{K}D_e^2) \quad c = c^{(0)} + \mathcal{K}D_e^2 c^{(1)} + o(\mathcal{K}D_e^2)$$

On résout alors (12-13) jusqu'à l'ordre 1 en  $\mathcal{K}D_e^2$ , avec la condition limite naturelle  $\bar{p}_0 = \bar{p}_1 = 0$ . Par identification, on détermine  $\bar{p}^{(0)}, \bar{p}^{(1)}, c^{(0)}, c^{(1)}$  et, après calculs, on en déduit que pour  $\theta \ll 1$  (le terme négligé est d'ordre 0 en  $\theta$  et est omis pour ne pas alourdir la formule) on a :

$$F_N = \frac{6\mu U}{\theta^2} \left[ \left( \ln \frac{h_2}{h_1} - 2 \frac{h_2 - h_1}{h_2 + h_1} \right) - \frac{4r\mathcal{K}D_e^2}{25} \frac{h_1^2 (h_2 - h_1)^3}{h_2^2 (h_2 + h_1)^3} \left( 13 \left( \frac{h_2 - h_1}{h_1} \right)^2 + 25 \frac{h_2}{h_1} \right) \right] + o(\mathcal{K}D_e^2)$$

A l'ordre 0 en  $\mathcal{K}D_e^2$ , comme attendu, la portance est celle d'un fluide newtonien de viscosité  $\mu$ . La non linéarité du modèle intervient, comme attendu également, à l'ordre suivant en  $\mathcal{K}D_e^2$  et a pour effet de diminuer la portance newtonienne ce qui est une caractéristique bien connue des fluide purement visqueux faiblement rhéo-fluidifiants. On indiquera des résultats numériques plus complets et pour une surface mobile plus générale lors de l'exposé oral.

## 5 Conclusions

Pour résumer, dans la limite des équations de la lubrification (i.e. à l'ordre principal en  $\epsilon$ ) on peut noter les points intéressants suivants :

1. Il y a toujours existence et unicité de la solution  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  dès que la valeur de  $\bar{p}$  sur le bord de  $\Sigma$  est prescrite. Cette solution est la même que le fluide soit viscoélastique ou purement visqueux de même fonction de cisaillement. Dans le cas viscoélastique, seule la distribution des contraintes est modifiée.
2. La méthode utilisée ici pour établir l'existence et l'unicité de  $\bar{p}$  est constructive. En effet, il est très facile d'en obtenir une approximation aux éléments finis  $P_1$  (avec  $c$  constante par morceaux) par une méthode de gradient conjugué appliquée à la minimisation de la fonctionnelle  $J$ .
3. Dans le problème de la butée et dans la limite des hypothèses de lubrification c'est uniquement le caractère rhéo-fluidifiant du modèle U-PTT qui est responsable de la diminution de portance par rapport au fluide newtonien de viscosité  $\mu$ . L'élasticité n'affecte que la traînée et son influence est négligeable.

Signalons enfin que l'analyse présentée ici s'étend assez facilement aux modèles classiques de "fluides à seuil" (i.e. de milieux qui présentent une transition gel/liquide contrôlée par l'intensité des contraintes) dont on dira quelques mots dans la présentation orale. A ce sujet, on pourra consulter l'étude récente de [5].

## Références

- [1] Akyildiz F. T., Bellout H. 2004 Viscoelastic lubrication with Phan-Tien-Tanner fluid. *J. Trib.* **126** 288-291
- [2] Bayada G., Chupin L., Martin S. 2007 Viscoelastic fluids in a thin domain. *Qu. Appl. Math.* **65** (4) 625-651
- [3] Ekeland J., Temam R. 1974 *Analyse convexe et problèmes variationnels*. Dunod
- [4] Hashemabadi S. H., Mirnajafizadeh S. M. 2007 Analytical solution of simplified Phan-Thien Tanner fluid between nearly parallel plates of a small inclination. *J. Appl. Sc.* **7** (9) 1271-1278
- [5] Hewitt I.J., Balmforth N.J. 2012 Viscoplastic lubrication theory with application to bearings and the washboard instability of a planing plate. *J. Non-New. Fl. Mech.* **169-170** 74-90
- [6] Nessil A., Larbi S., Belhaneche H., Malki M. 2013 Journal Bearings Lubrication Aspect Analysis Using Non-Newtonian Fluids *Adv. Trib. 2013* (9 pages : <http://dx.doi.org/10.1155/2013/212568>)
- [7] Tichy, J.A. 1996 Non newtonian lubrication with the convected Maxwell model. *J. Trib.* **118** 344-348
- [8] Zhang R., Li X. K. 2005 Non-newtonian effects on lubricant thin film flows. *J. Eng. Math.* **51** (1) 1-13