

Approche variationnelle en contraintes du critère macroscopique d'un milieu poreux ductile ayant une matrice de Drucker-Prager

Long Cheng^a, Yun Jia^a, Abdelbacet Oueslati^a, Géry de Saxcé^a, Djimédo Kondo^b

a. Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Université de Lille 1, Cité scientifique, F59655 Villeneuve d'Ascq, France

b. Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR CNRS 7190, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, F75005 Paris, France

Résumé :

Cette étude vise à formuler dans un cadre micromécanique un critère macroscopique pour des milieux poreux ductiles dont la matrice obéit à un critère de Drucker-Prager. A cette fin, on s'appuie sur l'analyse limite d'une sphère creuse soumise à des conditions de taux de déformation homogène au bord. A la différence de Guo et al. ([6]), on met en œuvre pour ce problème une approche statique basée des champs de contrainte d'essais en équilibre interne. Ceci nécessite de considérer le principe variationnel de Hill (pour les matériaux rigide-plastiques) dans lequel la condition de bord libre sur la frontière de la cavité est relaxée. L'introduction d'un multiplicateur de Lagrange permet de satisfaire en moyenne le critère de plasticité dans la matrice. Il convient de noter que le champ de contrainte d'essais est composé de la solution exacte de la sphère creuse sous sollicitations hydrostatiques pure et d'un champ de contraintes uniforme déviatorique. La démarche proposée permet d'établir une expression analytique du critère macroscopique du milieu poreux prenant explicitement en compte la compressibilité plastique de la matrice solide. Les résultats sont confirmés par des données de calcul numérique.

Abstract :

The aim of this work is to derive a macroscopic criterion for ductile porous materials whose matrix obeys the Drucker-Prager yield criterion. To this end, the macroscopic criterion is derived by means of a limit analysis approach applied to a hollow sphere subjected to a homogeneous strain rate boundary conditions. In contrast to Guo et al. ([6]), the problem is studied here through a static approach (instead of a kinematic one) by using a trial stress field in internal equilibrium. This requires the consideration of Hill's variational principle for rigid plastic materials. The stress boundary condition on the void boundary are relaxed. Using a lagrangian multiplier, we satisfy the plastic criterion on average. It should be noted that the proposed trial stress field is composed of the exact solution for pure hydrostatic loadings and a uniform deviatoric field. The newly established closed-form expression of the macroscopic criterion accounts for the matrix plastic compressibility. The theoretical results are validated by comparison to data from numerical computation.

Mots clefs : Analyse limite ; Modèle de Drucker-Prager ; Milieux poreux

1 Introduction

Dans son célèbre article de 1977, Gurson a proposé une approche par borne supérieure du problème d'analyse limite d'une sphère creuse et d'un cylindre creux constitués d'un matériau de Von-Mises. Cette démarche a abouti à un critère de macroscopique de plasticité dépendant de la pression moyenne [7]. Depuis, plusieurs extensions de ce modèle ont été proposées pour tenir en compte des effets de forme de cavités, de l'anisotropie plastique de la matrice ou encore de la compressibilité plastique

de la matrice. Tous ces travaux sont basés sur une approche par l'extérieur (approche cinématique) basée sur des champs de vitesse d'essai. A notre connaissance, à l'exception d'une tentative de [11] portant sur des matériaux poreux ayant une matrice de von Mises, aucun critère n'a été proposé dans la littérature dans le cadre d'une approche par l'intérieur (approche statique), se basant donc sur la considération de contraintes d'essai. L'objectif principal de ce travail est ainsi de formuler à l'aide d'une approche statique un critère macroscopique pour un milieu poreux dont la matrice est de type Druker-Prager. Pour ce faire, on applique le principe variationnel de Hill ([8]) à une sphère creuse. On notera que par une telle approche, le caractère de borne inférieure n'est assuré que si le champ de contrainte test est statiquement et plastiquement admissible. Le champ de contraintes test considéré ici est obtenu par addition de la solution exacte sous sollicitations hydrostatiques et d'un champ de contraintes déviatorique homogène. Afin d'obtenir une expression analytique du critère macroscopique, seul l'équilibre local est satisfait tandis que les conditions aux limites sur le bord de la cavité et le critère de plasticité de la matrice sont relaxés, en les satisfaisant en moyenne. La démarche variationnelle adoptée permet d'aboutir à un critère macroscopique de plasticité rendant compte de la compresibilité plastique de la matrice puis comparé à des résultats de calcul numériques.

2 Formulation variationnelle en contraintes

Considérons un Volume Élémentaire Représentatif (VER) Ω composé d'une matrice Ω_m contenant une cavité $\omega = \Omega - \Omega_m$. La matrice est constituée d'un matériau rigide parfaitement plastique dont le critère est pour l'instant défini de façon générale par :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0, \quad (1)$$

où \mathbf{F} est une fonction convexe et semi-continue inférieurement du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$. La loi d'écoulement plastique se traduit par :

$$\mathbf{d} = \dot{\varepsilon}^p \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (2)$$

où \mathbf{d} est le tenseur taux de déformation plastique et $\dot{\varepsilon}^p$ la vitesse de déformation plastique équivalente. Rappelons que les champs \mathbf{d} et $\boldsymbol{\sigma}$ satisfont l'inégalité de Hill :

$$\forall \boldsymbol{\sigma}' \in K, \quad (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d} \leq 0, \quad (3)$$

où K désigne le domaine d'élasticité, ensemble convexe contenant l'origine.

Les bords du VER et de la cavité sont notés respectivement $\partial\Omega$ et $\partial\omega$. On montre classiquement que le taux de déformation macroscopique \mathbf{D} est obtenu comme la moyenne de \mathbf{d} , tandis que d'après le lemme de Hill, on définit le tenseur de contrainte macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ comme la moyenne du champ microscopique $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d} \, dV. \quad (4)$$

Rappelons que l'ensemble du champ des vitesses cinématiquement admissibles est défini par :

$$\mathcal{K}_a = \{ \mathbf{v} \text{ tel que } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \cdot \mathbf{x} \text{ sur } \partial\Omega \}$$

et que le taux de déformation microscopique s'obtient par $\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \text{grad}_s \mathbf{v}$.

Quant à l'ensemble des champs de contraintes statiquement admissibles, il est défini par :

$$\mathcal{S}_a = \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\omega, \quad \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \}$$

Le problème d'homogénéisation revient à déterminer le tenseur des contraintes macroscopique pour lequel il existe au moins un couple $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{K}_a \times \mathcal{S}_a$ satisfaisant le critère (1) et la loi d'écoulement (2) en tout point de la matrice. Cependant, en raison de la non linéarité des équations, ce problème n'admet pas en général une solution exacte et explicite. C'est la raison pour laquelle une formulation variationnelle utilisant un champ de contrainte test simple est mise en oeuvre à travers une procédure

de minimisation. Considérons un couple de champs admissible $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma})$. D'après le lemme de Hill, nous avons :

$$\mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathbf{d}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{|\Omega_M|} \int_{\Omega_M} \mathbf{d}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma} dV$$

Un concept de base de l'analyse convexe, qu'il convient de rappeler ici est celui de la sous-différentielle d'une fonction ψ en un point $\boldsymbol{\sigma}$, décrit par l'ensemble :

$$\partial\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \{ \mathbf{d} \mid \forall \boldsymbol{\sigma}', \quad \psi(\boldsymbol{\sigma}') - \psi(\boldsymbol{\sigma}) \geq (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d} \} . \quad (5)$$

Pour plus de détail sur l'analyse convexe, les lecteurs peuvent se référer à la littérature spécialisée (par exemple [5], [10]). Introduisant la fonction semi-continue convexe $\psi(\boldsymbol{\sigma})$ qui est égale à 0 si $\boldsymbol{\sigma} \in K$, et $+\infty$ autrement, l'inégalité de Hill (3) peut s'écrire alors sous la forme : $\mathbf{d} \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma})$. Considérant $\boldsymbol{\sigma} \in K$, nous avons $\psi(\boldsymbol{\sigma}) = 0$. Donc si $\boldsymbol{\sigma}' \in K$, l'inégalité de (5) dégénère en celle de (3). Ceci suggère de considérer le principe variationnel de Hill pour ce problème :

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}) = \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_M} \psi(\boldsymbol{\sigma}) dV - \mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma} \right) \quad (6)$$

En effet, si les champs \mathbf{v} et $\boldsymbol{\sigma}$ sont solutions, il est facile de prouver que pour tout champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}'$ statiquement admissibles, on a :

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}') - \Pi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_M} (\psi(\boldsymbol{\sigma}') - \psi(\boldsymbol{\sigma}) - (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{d}(\mathbf{v})) dV \geq 0$$

En d'autres termes, le champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ réalise le minimum de la fonctionnelle Π parmi tous les champs de contrainte statiquement admissible $\boldsymbol{\sigma}'$. Définissons l'ensemble des champs de contraintes licites : $\mathcal{S}_l = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a \text{ tel que } F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \text{ dans } \Omega_M \}$.

On démontre que le principe variationnel (6) est équivalent au problème de minimisation suivant : $\min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_l} (-\mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma})$. La théorie de l'analyse limite consiste à trouver des solutions non triviales appelées mécanismes de rupture. Et on s'attend à ce que ces solutions existent si le tenseur macroscopique $\boldsymbol{\Sigma}$ vérifie une certaine égalité qui s'interprète comme un critère de rupture macroscopique. Par ailleurs, Si le champ de contrainte est en équilibre interne ([4]), la condition de continuité dont $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\omega$ est difficile à satisfaire. C'est pourquoi nous proposons d'adopter une condition relaxée $\Sigma_m^{void} = 0$, ce qui conduit au principe variationnel relaxé : $\min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_r} (-\mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma})$, où l'ensemble du champ de contrainte licite est modifié comme suit :

$$\mathcal{S}_r = \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad F(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \text{ dans } \Omega_M, \quad \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \Sigma_m^{void} = 0 \} . \quad (7)$$

En introduisant le champ du multiplicateur de Lagrange $\mathbf{x} \mapsto \dot{\Lambda}(\mathbf{x})$, le problème de minimisation sous contraintes est transformé en un problème équivalent de point-selle :

$$\max_{\dot{\Lambda} \geq 0} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}'_r} \left(\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\Lambda}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_M} \dot{\Lambda} F(\boldsymbol{\sigma}) dV - \mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma} \right) ,$$

où : $\mathcal{S}'_r = \{ \boldsymbol{\sigma} \text{ tel que } \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \Omega_M, \quad \boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ dans } \omega \text{ et } \Sigma_m^{void} = 0 \}$.

Nous introduisons une nouvelle simplification en supposant que le champ de multiplicateurs de Lagrange est uniforme dans Ω_M . Nous obtenons :

$$\max_{\dot{\Lambda} \geq 0} \min_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}'_r} \left(\mathcal{L}(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\Lambda}) = \dot{\Lambda} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_M} F(\boldsymbol{\sigma}) dV - \mathbf{D} : \boldsymbol{\Sigma} \right) . \quad (8)$$

qui est équivalent à minimiser la fonctionnelle Π sous la condition relaxée :

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_M} F(\boldsymbol{\sigma}) dV = 0 . \quad (9)$$

La résolution de ce problème de minimisation se ramène aux calculs des dérivées partielles de \mathcal{L} . En particulier, la dérivée partielle $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\Lambda}$ donne :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\Sigma}) = V^{-1} \int_{V_M} F(\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\Sigma})) dV = 0 . \quad (10)$$

ce qui fournit le critère macroscopique : $\mathcal{F}(\boldsymbol{\Sigma}) \leq 0$.

3 Champ de contrainte proposé et critère macroscopique obtenu

Considérons une sphère creuse comportant une cavité sphérique concentrique. Les rayons interne et externe de la cellule sont respectivement notés a et b avec une fraction de volumique de vide $f = (a/b)^3 < 1$. La matrice est supposée rigide parfaitement plastique et obéissant à la loi de Drucker-Prager :

$$F(\sigma) = \sigma_e + 3\alpha\sigma_m - \sigma_0 = 0, \quad (11)$$

où σ_e est la contrainte équivalente de Von Mises, σ_m la contrainte moyenne, $\sigma_0 > 0$ la cohésion du matériau et α le facteur de sensibilité à la pression lié à l'angle de frottement ϕ par : $\tan\phi = 3\alpha$.

En tenant compte de la symétrie sphérique de la cellule, le champ de contraintes d'essais est décomposé en la somme de deux champs :

- le champ hétérogène en coordonnées sphériques correspondant à la solution du chargement purement hydrostatique (avec la base orthonormée $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta\}$) (cf. par exemple [12]) :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \eta A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} (\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi)$$

où A_0 est un coefficient paramétrique, $\gamma = 2\alpha/(2\alpha \pm 1)$ pour $A_0 \geq 0$.

- le champ homogène en coordonnées cylindriques (avec la base orthonormée $\{\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$) :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = A_1(\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + A_2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z,$$

où A_1 et A_2 sont deux coefficients paramétriques.

Dans la base cylindrique, le champ de contrainte test $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ est donné par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \left[A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} (\sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta) + A_1 \right] (\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho) + \left[\eta A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} + A_1 \right] (\mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) \\ & + \left[A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} (\cos^2 \theta + \eta \sin^2 \theta) + A_2 \right] (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z) + (1 - \eta) A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} \sin \theta \cos \theta (\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\rho) \end{aligned} \quad (12)$$

Un calcul simple permet d'avoir les expressions de la contrainte moyenne et la contrainte équivalente microscopiques dans la matrice :

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{3} \left[A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} (1 + 2\eta) + 2A_1 + A_2 \right] \\ \sigma_e &= \sqrt{(1 - \eta)^2 A_0^2 \left(\frac{b}{r}\right)^{6\gamma} + (1 - \eta) (1 - 3 \cos^2 \theta) (A_1 - A_2) A_0 \left(\frac{b}{r}\right)^{3\gamma} + (A_1 - A_2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Le champ de contraintes macroscopique est alors donné par :

$$\boldsymbol{\Sigma} = A_0 (1 - f^{1-\gamma}) \mathbf{1} + (1 - f) [A_1(\mathbf{e}_\rho \otimes \mathbf{e}_\rho + \mathbf{e}_\varphi \otimes \mathbf{e}_\varphi) + A_2\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z]$$

où $\mathbf{1}$ est le tenseur d'identité d'ordre 2. La contrainte moyenne et la contrainte équivalent macroscopiques s'obtiennent facilement et sont données par :

$$\Sigma_m = A_0(1 - f^{1-\gamma}) + \frac{1-f}{3}(2A_1 + A_2), \quad \Sigma_e = (1 - f) |A_1 - A_2| \quad (14)$$

La condition relaxée $\Sigma_m^{void} = 0$ se ramène à la relation suivante

$$\Sigma_m^{void} = A_0 f^{1-\gamma} + \frac{f}{3}(2A_1 + A_2) = 0 \quad (15)$$

Les équations (14) et (15) permettent d'établir les relations suivantes entre les paramètres A_0 , A_1 et A_2 :

$$A_0 = \frac{\Sigma_m}{1 - f^{-\gamma}}, \quad |A_1 - A_2| = \frac{\Sigma_e}{1 - f} \quad (16)$$

Pour plus de commodité, nous introduisons les paramètres suivants :

$$x = \left(\frac{r}{b}\right)^3, \quad \mu = \frac{\frac{3}{2}\gamma A_0}{|A_1 - A_2|}, \quad \hat{\mu} = \frac{\mu}{f^\gamma} \quad (17)$$

La combinaison des relations (10), (11), (13), (16) et (17) permet d'aboutir au critère macroscopique dont l'expression suit :

$$\frac{\mathcal{F}(\Sigma)}{\sigma_0} = \frac{\Sigma_e}{\sigma_0(1-f)} \cdot \mathcal{J}(\mu(\Sigma_m, \Sigma_e), f) + 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} - (1-f) \leq 0 \quad (18)$$

où :

$$\mathcal{J}(\mu(\Sigma_m, \Sigma_e), f) = \int_f^1 \xi(\zeta) \sqrt{1 + \mu^2 x^{-2\gamma}} dx$$

$$\xi(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \sin \theta d\theta}, \quad \zeta = -\text{sgn}(A_1 - A_2) \frac{2\mu x^{-\gamma}}{1 + \mu^2 x^{-2\gamma}}, \quad |\zeta| \leq 1$$

La fonction $\xi(\zeta)$ est continue avec des valeurs extrêmes : $\xi_{max} = \xi(0) = 1$ and $\xi_{min} = \xi(-1) = 0.962$. Suivant l'approximation de Gurson [7], cette fonction est prise égal à l'unité : $\xi(\zeta) = 1$.

En introduisant, comme dans [6], les fonctions hypergéométriques de Gauss définies par :

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

le critère macroscopique (18) s'écrit comme suit :

$$\frac{\mathcal{F}(\Sigma)}{\sigma_0} = \frac{\Sigma_e}{\sigma_0(1-f)} \cdot \mathcal{J}(\mu(\Sigma_m, \Sigma_e), \hat{\mu}(\Sigma_m, \Sigma_e), f) + 3\alpha \frac{\Sigma_m}{\sigma_0} - (1-f) \leq 0 \quad (19)$$

avec $\mathcal{J}(\mu(\Sigma_m, \Sigma_e), \hat{\mu}(\Sigma_m, \Sigma_e), f) = {}_2F_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\gamma}; 1 - \frac{1}{2\gamma}; -\mu^2) - f \cdot {}_2F_1(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\gamma}; 1 - \frac{1}{2\gamma}; -\hat{\mu}^2)$

4 Résultats numériques et discussions

Dans cette section, le critère analytique (19) (Noté NEW) établi dans la section 3 est comparé aux résultats numériques obtenus par la Méthode des Eléments Finis (Noté FEM) et au critère de Guo [6] (Noté GUO). Il convient de remarquer que le critère de Guo est obtenu par l'approche cinématique d'analyse limite, cependant les approximations successives effectuées font perdre à leur résultat le statut de borne supérieure. Adoptant pour les calculs numériques le modèle élastoplastique en petites déformations et tirant profit des symétries géométriques, seul un quart de la sphère creuse est étudié en axisymétrique. Le déplacement radial est bloqué sur les axes de symétries, et un déplacement radial uniforme est appliqué sur la paroi extérieure ; la frontière de la cavité est libre de contrainte. On notera que les calculs sont menés en gardant la triaxialité de contrainte Σ_m/Σ_e constante. Ceci est réalisé à l'aide du logiciel ABAQUS/Standard et d'une procédure MPC (*Multi-Points Constraints*). L'implémentation de cette condition est détaillée dans [3].

Nous définissons deux cas avec deux valeurs de porosité différentes ($f = 0.2$ and $f = 0.25$). Les autres paramètres, mécaniques, sont fixes : $E = 1000MPa$, $\nu = 0.2$, $\sigma_0 = 0$ tandis que $\phi = 30^\circ$. La Fig.1 représente les deux critères analytiques (NEW et GUO) et celui obtenu par le calcul numérique (FEM). Nous constatons que la courbe entière (NEW) est située en dessous de la courbe (GUO) et que le critère (FEM) est 'quasiment' entre les deux surfaces des critères (NEW et GUO). Ce phénomène peut être attribué au fait que même si le champ de contrainte adopté dans Section 3 est assez simple, le critère établi est totalement sous la surface de GUO (borne supérieur) grâce au principe variationnelle d'analyse limite en contrainte (ou principe de Hill). Cependant, dans la partie correspondant à la traction générale ($\Sigma_m > 0$), la courbe (FEM) est située légèrement en dessous de la courbe NEW, mais les deux courbes ont quasiment la même allure dans cette zone. Enfin, il convient de remarquer que les critères (NEW et GUO) se rejoignent aux points correspondant à la solution purement hydrostatique ($\Sigma_m/\sigma_0 = (1-f^\gamma)/3\alpha$, $\Sigma_e/\sigma_0 = 0$) et à la même expression de charge limite pour le cas déviatorique pure que [6] et [7] ($\Sigma_m/\sigma_0 = 0$, $\Sigma_e/\sigma_0 = 1-f$).

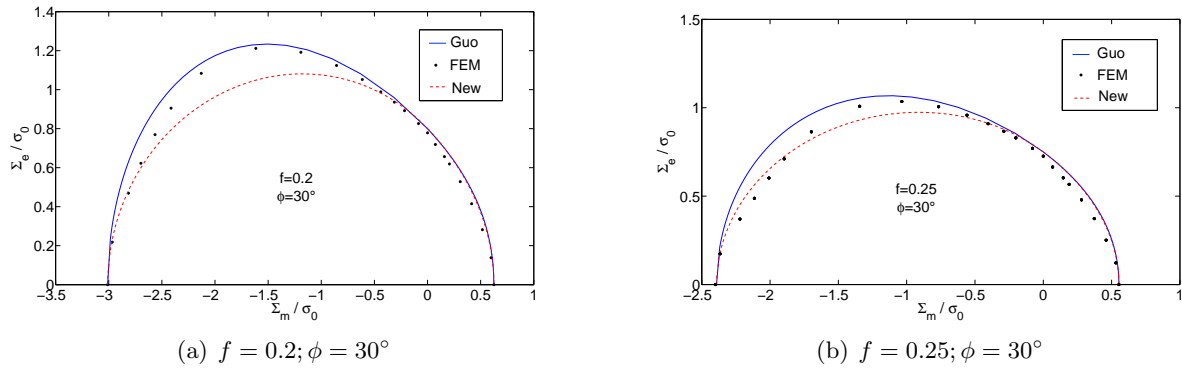


FIGURE 1 – Comparaison entre la surface du nouveau critère (Noté New), celle de Guo (Noté Guo) et la surface obtenue par Méthode des Elément Fini (Noté FEM) avec deux porosités respectives ($f = 0.2$ et $f = 0.25$) et un angle de frottement fixe $\phi = 30^\circ$ dont $\alpha = \sqrt{3}/9$.

5 Conclusions

Les techniques d'homogénéisation appliquées dans le cadre de l'analyse limite au modèle de la sphère creuse avec une matrice de Drucker-Prager permettent d'établir un nouveau critère de plasticité macroscopique pour cette classe de milieux poreux. La formulation variationnelle en contraintes proposée est obtenue grâce au principe de Hill. Sa mise en oeuvre n'a été possible qu'en relaxant les conditions que doit satisfaire le tenseur des contraintes sur le bord du pore et pour le critère microscopique de plasticité. Le critère ainsi construit est comparé à celui obtenu par l'approche cinématique établie de [6], et aux résultats numériques que nous avons obtenus par la méthode des éléments finis (FEM). Il semble que ce critère constitue une "quasi-borne" inférieure. En perspective de ce travail, nous visons à trouver un champ de contrainte strictement licite, de sorte à obtenir une borne inférieure rigoureuse.

Références

- [1] Barthélémy, J.F., Dormieux, L. 2003. Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *Comptes Rendus Mécanique*. **331** 271-276
- [3] Cheng, L., Guo, T.F., 2006. Void interaction and coalescence in polymeric materials. *International Journal of Solids and Structures*, **44**, 1787-1808.
- [4] de Saxcé, G., Fortin, J., Millet. 2004. *About the numerical simulation of the dynamics of granular media and the definition of the mean stress tensor*. *Mechanics of Materials*, **36**, 1175-1184.
- [5] I. Ekeland, I., Temam, R., 1975. 1975. *Convex analysis and variational problems*, Amsterdam, North Holland.
- [6] Guo, T.F., Faleskog, J., Shih, C.F. 2008. Continuum modeling of a porous solid with pressure-sensitive dilatant matrix. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. **56** 2188-2212.
- [7] Gurson, A.L. 1977. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth – part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of Engineering Materials and Technology*. **99** 2-15.
- [8] Hill, R., 1950. *Mathematical theory of plasticity*. Oxford University Press, London.
- [9] Maghous, S., Dormieux, L., Barthélémy, J.F. 2009. Micromechanical approach to the strength properties of frictional geomaterials. *European Journal of Mechanics A/Solids*. **28** 179-188.
- [10] Moreau, J.J. 2003. *Fonctionnelles convexes*. Istituto Poligrafico e Zecca dello Stato, Rome.
- [11] Sun Yi, Wang Duo, 1989. *A lower bound approach to the yield loci of porous materials*. *Acta Mechanica Sinica*, **5**, 237-243.
- [12] Thoré, P., Pastor, F., Pastor, J., Kondo, D., 2009. Closed-form solutions for the hollow sphere model with Coulomb and Drucker-Prager materials under isotropic loadings. *Comptes Rendus Mécanique*, **337**, 260-267.