

# Structuration des écoulements granulaires en configuration de cisaillement

Emilien Azéma, Farhang Radjai

. LMGC, Université Montpellier 2-CNRS, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 05

## Résumé :

Par simulation numérique discrètes 3D en Dynamique des Contacts (CD), nous analysons les propriétés microstructurales de systèmes granulaires cisailés en variant systématiquement le nombre inertiel  $I$  de l'état quasi-statique vers celui d'écoulement dense puis collisionnel (ou gazeux). Une analyse détaillée de la connectivité des particules révèle que la transition entre chaque régime est corrélée à de profond changement sur la topologie et la nature du réseau de contact. En particulier, nous montrons que l'augmentation de l'angle de frottement interne avec le nombre inertiel est l'unique conséquence de l'anisotropie géométrique. Avec l'augmentation du nombre inertiel le rôle des chaînes de forces diminue alors que celui de la mobilisation du frottement augmente tant que les chaînes de forces sont percolantes, i.e jusqu'à un nombre inertiel critique  $I_0 \sim 0.25$ . Au delà de  $I_0$  l'anisotropie des forces reste inchangée. Enfin, une analyse détaillée des corrélations spatiales entre particules flottantes (particules ne portant pas de contacts) montre que des zones "fluidisées" se créent dans le régime d'écoulement dense. La taille de ces zones augmente avec  $I$  et diverge à l'approche de la transition vers le régime collisionnel.

## Abstract :

By means of three-dimensional Contact Dynamics (CD) simulations, we investigate the microstructural properties of sheared granular packings by varying systematically the inertial number  $I$  from the quasi-static regime, to the intermediate dense flow and collisional regime. A detailed analysis of the connectivity of the particles reveals that the transition between the regimes is correlated to profound changes of the nature of the contact network. In particular, we show that the increase of friction angle with inertial number is only a consequence of contact anisotropy. As the inertial number increases, the role of force chains decrease and that of friction mobilization increases as long as percolating force chains are present in the system. Beyond this point, which corresponds to an inertial number  $I_0 \sim 0.25$ , the force anisotropies do not evolve with the inertial number. Finally, a detailed analysis of the spatial correlations of floating particles, i.e., particles without bearing contacts, reveals the occurrence of "fluidized" volumes in the dense flow regime which increase in size and percolate precisely at  $I_0$ .

**Mots clefs :** Ecoulement granulaire ; texture ; zone fluidisées

## 1 Introduction

Depuis maintenant plus d'une vingtaine d'année les recherches menées, aussi bien expérimentales que numériques, ont conduits à une meilleure compréhension des phénomènes physiques en jeux lors d'un écoulement granulaire que se soit à l'échelle macroscopique que microscopique [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. En particulier, il est maintenant bien accepté que les lois rhéologiques, c'est-à-dire les relations entre la contrainte normale  $\sigma_n$ , de cisaillement  $\sigma_t$ , le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la compacité peuvent être formulées de manière simple avec le nombre inertiel sans dimension  $I = \dot{\gamma}d\sqrt{\rho/\sigma_n}$ , lequel compare le temps de cisaillement au temps de relaxation d'une particule de diamètre  $d$  [8]. En fonction de ce nombre sans dimension, les régimes d'écoulement peuvent être classés en différentes catégories : 1) l'écoulement quasi-statique qui correspond aux faibles valeurs de  $I$  avec aucune variation du frottement

effectif (au sens de Mohr-Coulomb), 2) l'écoulement dense qui semble correspondre à la transition entre un écoulement intermittent et continue induisant une forte augmentation du frottement effectif, puis 3) le régime collisionnel aux plus grandes valeurs de  $I$  et semble correspondre à une saturation du frottement effective [3, 8, 9].

Au delà de ces définitions "larges" du comportement macroscopique, les mécanismes en jeux à l'échelle des grains conduisant à de telles variations du frottement effectif restent encore mal compris et, en outre, difficilement accessibles expérimentalement. Afin de proposer des modèles prédictifs de plus en plus précis et applicables à des évènements particulièrement destructifs tels que les avalanches ou les écoulements à l'échelle géologique, il est maintenant nécessaire de considérer les mécanismes primaires à l'échelle des grains.

Dans la suite nous présentons la méthode numérique adoptée dans ce travail ainsi que les échantillons simulés. Le comportement macroscopique est présenté dans la section 3. Dans la section 4 une analyse détaillée de la microstructure conduit à identifier clairement les mécanismes conduisant à la variation du frottement effectif. Nous concluons par un résumé des principaux résultats et des perspectives.

## 2 Procédure numérique

Les simulations numériques ont été menées par la méthode de Dynamique des Contacts (CD). Cette méthode utilise un schéma d'intégration implicite et une résolution des lois de contact sans régularisation ce qui en fait une méthode particulièrement bien adaptée à la modélisation des systèmes granulaires présentant un très grand nombre de particules. De plus amples détails peuvent être trouvés dans la référence suivante [10].

Nous déposons géométriquement  $N_p = 24000$  sphères dans une boîte parallélépipédique. Une faible polydispersité de  $\pm 10\%$  est considérée pour éviter toute cristallisation. Pour éviter toute localisation et s'assurer que la pression est uniformément distribuée dans le volume, la gravité est fixée à zéro. Le système est soumis à un cisaillement plan entre deux murs rigides composés de sphères "collées". Une pression  $P$  le long de l'axe  $z$  et une vitesse  $V_y$  le long de l'axe  $y$  sont appliquées comme illustré sur la figure 1. Des conditions périodiques sont appliquées le long de la direction d'écoulement  $y$  et suivant la direction transverse  $x$ . Le frottement entre les grains est fixé à 0.4.

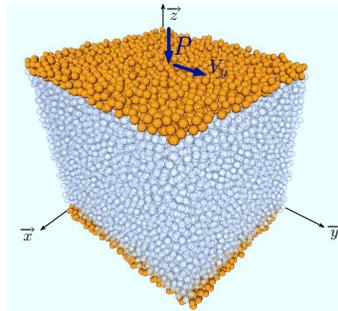


FIG. 1 – Image du système simulé. Les murs rugueux sont en oranges, les particules en gris.

Durant le cisaillement le système dilate et tend vers un état stationnaire caractérisé par des valeurs moyennes constantes comme l'énergie cinétique, la compacité ou encore un profil de vitesse linéaire dans toute la couche. Toutes les simulations présentées dans ce papier, pour lesquelles nous avons varié la pression, convergent vers un état stationnaire bien défini. La pression est donc variée systématiquement de sorte que le nombre  $I$ , caractérisant l'état du système, varie de  $\sim 4.10^{-4}$  à  $\sim 0.71$ .

## 3 Comportement macroscopique

Dans un matériau granulaire, le tenseur de contrainte est défini par  $\sigma = n_c \langle \ell^c f^c \rangle$  avec  $n_c$  la densité de contacts et où la moyenne est prise sur tout les contacts  $c$  ayant un vecteur force  $f^c$  et un vecteur branche (vecteur joignant le centre des deux particules en contacts au point  $c$ )  $\ell^c$ . Nous définissons la

pression moyenne par  $p = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$  et le déviateur de contrainte par  $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , où  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  sont les valeurs principales. Puisque l’essai de cisaillement plan implique des déformations planes, nous pouvons exclure la contribution de  $\sigma_2$  dans la définition de  $q$  et  $p$ .

Suivant le modèle de Mohr-Coulomb, l’angle de frottement interne dans l’état stationnaire est défini par  $\mu^* = \arcsin q/p$ . La figure 2(a) montre la variation de  $\mu^*$  (triangle bleu) en fonction de  $I$ . Nous voyons que  $\mu^*$  est constant et environ égal à 0.35 à faibles valeurs de  $I$ . Puis il augmente vers  $I \sim 0.09$  de manière presque linéaire [9] jusqu’à  $I \sim 0.25$ . Au delà, bien que  $\mu^*$  augmente encore, nous observons un changement de pente. Une valeur de  $\mu^* \sim 0.63$  est atteinte pour  $I \sim 0.7$ . De plus nos données numériques sont très bien appuyées par d’autres données numériques et expérimentales extraites de la littérature [1, 3, 4, 5, 6, 7].

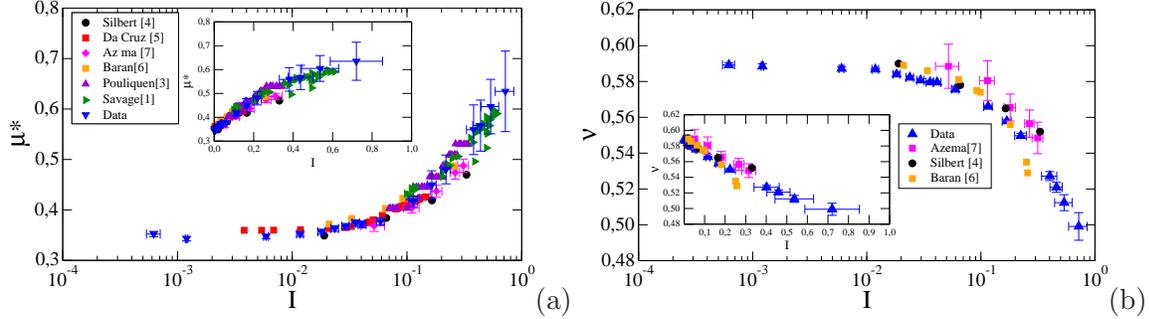


FIG. 2 – Variation de l’angle de frottement interne (a) et de la compacité (b) en fonction de  $I$  présenté avec d’autres données extraites de la littérature.

La figure 2(b) montre la variation de la compacité  $\nu$  (i.e ratio entre volume des particules et volume total) en fonction de  $I$ . Nous voyons que  $\nu$  décroît linéairement avec  $I$  de 0.59 dans l’état quasi-statique jusqu’à une valeur de 0.5 pour la plus grande valeur de  $I$  testée. Une fois de plus nous voyons que nos données sont comparables à d’autres données numériques extraites de la littérature. Il est toute fois surprenant de voir un comportement opposé à celui du frottement interne, à savoir qu’une chute de compacité est accompagnée par une augmentation de la résistance macroscopique.

Dans la section suivante nous nous concentrons plus particulièrement sur la topologie du réseau de contacts et de forces avec pour objectif d’identifier les origines de la variation du frottement interne et de clarifier, à cette échelle, les transitions de régimes.

## 4 Microstructure

### 4.1 Anisotropies

A l’ordre le plus bas, la connectivité du réseau de contact peut être quantifiée à l’aide de la probabilité  $P_c$  pour une particule d’avoir  $c$  contacts. Par construction  $P_0$ , représentant la proportion des particules ayant zéros contacts où *particules flottantes*, est normalisée par le nombre total de particules alors que  $P_{c>0}$  est normalisée par le nombre de particules participant au réseau, i.e ayant au moins un contact. L’évolution de  $P_c$  en fonction de  $I$ , tracée sur la figure 3, met en évidence que la topologie du réseau de contact varie de manière subtile entre chaque régimes. Nous voyons que  $P_{c=4}$  domine et reste constante ( $\sim 0.37$ ) dans le régime quasi-statique et tant que  $I < 0.02$ . Nous voyons aussi que  $P_{c=3}$  augmente,  $P_{c>3}$  diminue et  $P_{c=0,1,2}$  restent globalement constantes et faibles ( $< 0.1$ ). Puis, de manière intéressante,  $P_{c=4}$  diminue et bien que  $P_{c=0,1,2,3}$  augmentent ensemble,  $P_{c=3}$  domine dans l’intervalle  $I \in [0.02, 0.25]$ . Au delà de  $I = 0.25$ ,  $P_{c>3} = 0$ ,  $P_{c=3}$  diminue et  $P_{c=1,2}$  dominant et sont de l’ordre de 0.4 chacune pour la plus grande valeur de  $I$  simulée. L’autre fait remarquable est que la proportion de particules flottantes,  $P_0$ , augmente drastiquement jusqu’à atteindre presque 0.95 aux plus grandes valeur de  $I$ . Nous reviendrons sur cette observation dans la section suivante. Ce qui est remarquable et surtout paradoxal ici est qu’un très faible nombre de particules qui de plus sont faiblement connectées, contribuent à l’augmentation de la résistance macroscopique observée dans la section 3.

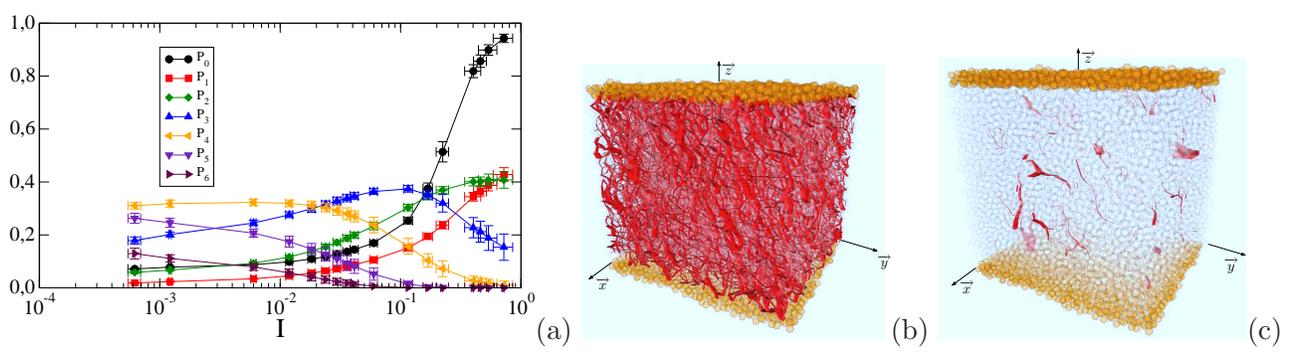


FIG. 3 – Probabilité  $P_c$  pour une particule d’avoir  $c$  contacts en fonction de  $I$  (a). Image du réseau de force à  $I = 10^{-2}$ (b) et  $I \sim 0.4$  (c), les particules flottantes sont en gris

Pour essayer de mieux comprendre ce paradoxe il est nécessaire d’analyser la texture du réseau de contact et de force. Une image du réseau de force est montrée sur la figure 3, pour  $I = 10^{-2}$ (b) et  $I \sim 0.4$  (c). Aux faibles valeurs de  $I$  le réseau de force est dense et percolant dans tout le système. Au contraire, aux valeurs de  $I$  plus élevées on observe des chaînes de forces isolées baignant dans une “soupe” de particules flottantes.

Une approche commune utilisée par de nombreux auteurs est de considérer les distributions angulaires des orientations des contacts  $\mathbf{n}$  ainsi que la moyenne angulaire des forces normales et tangentielles le long de la direction  $\mathbf{n}$ . Bien que nous soyons en 3D, la condition de cisaillement plan implique que le vecteur  $\mathbf{n}$  peut être représenté simplement par un angle  $\theta$ . De plus, dans l’état stationnaire, les systèmes s’auto-organisent de sorte que les distributions angulaires puissent être approchées par une distribution de Fourier [11, 12] :

$$\begin{aligned}
 P_n(\theta) &\simeq 1/\pi\{1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_c)\}, \\
 \langle f_n \rangle(\theta) &\simeq \langle f_n \rangle\{1 + a_n \cos 2(\theta - \theta_n)\}, \\
 \langle f_t \rangle(\theta) &\simeq -\langle f_n \rangle a_t \sin 2(\theta - \theta_t),
 \end{aligned} \tag{1}$$

avec  $a_c$ ,  $a_n$ , et  $a_t$  les paramètres d’anisotropies, reliés respectivement à la connectivité des particules, à la transmission des forces normales et à la mobilisation du frottement [12].  $\langle f_n \rangle$  est la force normale moyenne et  $\theta_c = \theta_n = \theta_t$  sont les directions principales dans le plan  $yz$  lesquelles coïncident avec la direction principale de contrainte dans l’état stationnaire ; voire Figure 4(a).

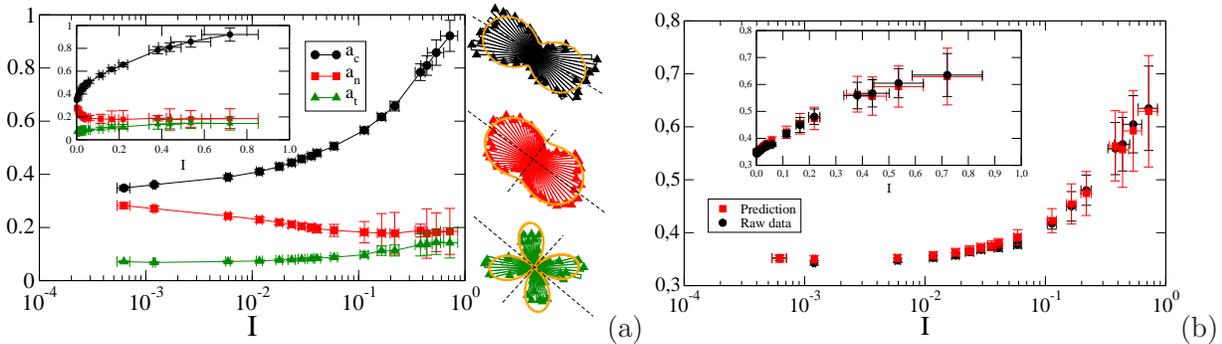


FIG. 4 – Variation des anisotropies de forces et contacts (a) et de l’angle de frottement interne calculé directement et prédit par l’équation 2 en fonction du nombre inertiel  $I$ . Les distributions angulaires  $P_n(\theta)$ ,  $\langle f_n \rangle(\theta)$  et  $\langle f_t \rangle(\theta)$  sont montrées ici pour  $I = 0.1$

Les anisotropies  $a_c$ ,  $a_n$ , et  $a_t$  sont de très bon descripteurs de la microstructure car elles mettent en évidence les différentes origines possible de la résistance au cisaillement. En effet, la relation suivante

peut être établie de manière rigoureuse [11, 12] :

$$\mu^* \simeq \frac{1}{2}(a_c + a_n + a_t). \quad (2)$$

Comme nous le voyons sur la figure 4(b), la prédiction donnée par l'équation 2 est en parfait accord avec les données mesurées pour toutes les valeurs de  $I$ . L'évolution des trois anisotropies avec  $I$  est représentée sur la figure 4(a). Nous voyons que  $a_c$  augmente rapidement avec  $I$  passant de 0.38 à presque 1. Cette forte augmentation résulte, par construction, de la perte de connectivité des particules et est le résultat des transformations topologiques du réseau de contact. En revanche, il est remarquable que l'anisotropie des forces, données par  $a_n + a_t$ , reste constante avec  $I$ . Plus particulièrement nous observons que la décroissance de  $a_n$  de 0.3 à 0.2 est compensée par une augmentation de  $a_t$  de 0.1 jusqu'à 0.2 jusqu'à  $I \sim 0.25$ . Au delà de cette valeur de  $I$  les deux anisotropies restent constantes. En d'autres termes, les forces de frottements prennent une part grandissante dans la transmission des forces au détriment des forces normales.

Dans cette section nous avons montré que la variation à l'échelle macroscopique du frottement interne trouve son origine à l'échelle microscopique via différents descripteur de la microstructure. Une valeur critique  $I_0 \sim 0.25$  semble se dégager de cette analyse. Valeur pour laquelle  $P_0(I_0)$  représente 50% et où les anisotropies de forces ne varient plus. Dans la section suivante nous nous intéressons plus particulièrement aux corrélations spatiales de ces particules flottantes.

## 4.2 Zones fluidisées

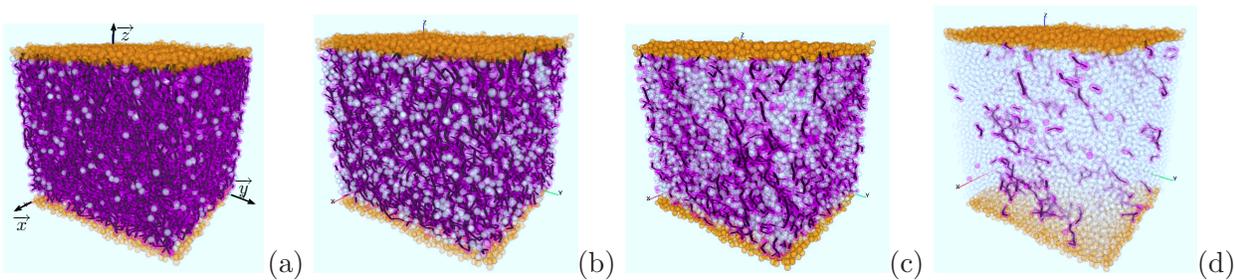


FIG. 5 – Images des systèmes simulés où les particules flottantes sont en gris, et les particules ayant au moins un contact en violet, pour  $I \sim 10^{-3}$ (a),  $I \sim 0.01$ (b),  $I \sim 0.21$ (c) et  $I \sim 0.6$ (d).

La figure 5 montre des images des systèmes simulés pour différentes valeurs de  $I$  où les particules flottantes sont représentées en gris. Nous pouvons constater que les particules flottantes sont isolées et en faible nombre aux faibles valeurs de  $I$  alors qu'elles semblent se rapprocher et former des groupes de particules flottantes fortement corrélés spatialement jusqu'aux plus grandes valeurs de  $I$  où l'on peut voir une grande "zone flottante".

Une manière simple pour caractériser la taille typique des volumes occupés par les particules flottantes est de considérer la probabilité locale  $P_0^i(I, r)$  d'avoir des particules flottantes dans le voisinage d'une particule flottante  $i$ , avec  $r$  variant entre le diamètre moyen et la taille totale du système [13]. Ainsi, pour chacune des particules flottantes et pour chaque valeur de  $I$ , nous pouvons calculer le rayon critique  $r_c$  pour lequel  $P_0^i(I, r_c) = P_0(I_0)$ . La figure 6 montre la variation de  $r_{max}^c$  et  $\langle r^c \rangle$  en fonction de  $I$ . Nous pouvons voir que tant que  $I < 0.09$ ,  $r_{max}^c$  et  $\langle r^c \rangle$  restent constants et proches de 2.5 pour le premier et 1 pour le second. Puis pour  $I \in [0.09, I_0]$  la taille des groupes de particules flottantes augmente et de manière remarquable diverge exactement à  $I_0$ . Ainsi la transition entre le régime d'écoulement dense et le régime collisionnel se traduit par une dissociation complète du réseau de contact et, d'une certaine manière, la "percolation" des groupes de particules flottantes.

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons analysé systématiquement la microstructure des écoulements granulaires par simulations numériques tri-dimensionnelles. Nous avons montré que la topologie du réseau de

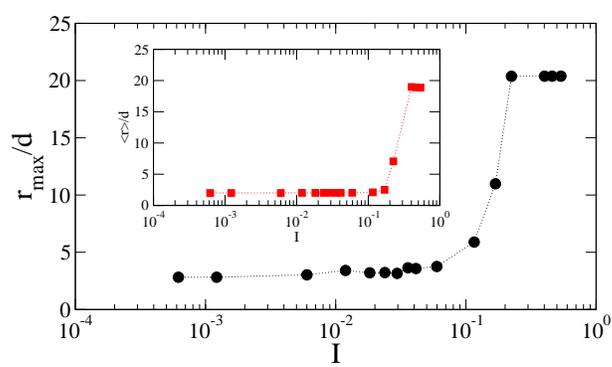


FIG. 6 – Evolution de du rayon critique max  $r_{max}^c$  et moyen  $\langle r^c \rangle$  en fonction de  $I$ .

contact varie de manière non-trivial avec le nombre inertiel. En particulier, une décomposition du tenseur de contrainte basée sur une formulation harmonique du réseau de contact et de force, montre que l’anisotropie géométrique est à l’origine de la variation de l’angle de frottement interne. De plus nos simulations tendent à montrer l’existence d’un nombre inertiel critique  $I_0$  marquant la transition entre le régime d’écoulement dense et collisionnel à partir duquel le réseau de contact est complètement dissocié et où les chaînes de forces “baignent” dans une “soupe” de particules flottantes. Nous avons vu également que le frottement prend une part active à la transmission des forces aux grandes valeurs de  $I$ . Il serait intéressant de varier systématiquement le coefficient de frottement afin de compléter cette observation. De plus, nous savons que la forme des particules modifie drastiquement les rôles entre anisotropies géométrique et de forces [12]. Il semble donc nécessaire de re-visiter ces résultats en considérant des formes de particules plus complexes.

## Références

- [1] Savage, S. 1984 The mechanics of rapid granular flows. *Adv. Appl. Mech.* **24** 289
- [2] Campbel, C. 1990 Flows of Dense Granular Media. *Annual Review of Fluid Mechanics* **24** 289
- [3] Pouliquen, O. 1990 Scaling laws in granular flows down rough inclined planes *Phys. Fluids* **11** 1956
- [4] Silbert, L. Ertas, D Grest, G. Halsey, T.C. Levine, D. and Plimpton, S.J. 1990 Granular flow down an inclined plane : Bagnold scaling and rheology. *Phys Rev E* **64** 051302
- [5] da Cruz, F. 2004 these de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussees , <http://pastel.paristech.org/946>
- [6] Baran, O. Ertas, D. Halsey, T. Grest, G. and Lechman, J. 2006 Velocity correlations in dense gravity-driven granular chute flow. *Phys Rev E* **74** 05130200
- [7] E. Azema, Y. Descantes, N. Roquet, J.-N. Roux, and F. Chevoir 2012 Discrete simulation of dense flows of polyhedral grains down a rough inclined plane. *Phys Rev E* **86** 031303
- [8] Gdr-MiDi 2004 On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E* **14** 341
- [9] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. Chevoir 2005 Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys Rev E* **72** 021309
- [10] F. Radjai and V. Richefeu 2009 Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of Materials* **41** 715
- [11] L. Rothenburg and R. J. Bathurst 1989 Analytical Study of Induced Anisotropy in Idealized Granular Materials. *Geotechnique* **39** 601
- [12] E. Azema, F. Radjai and G. Saussine 2009 Quasistatic rheology, force transmission and fabric properties of a packing of irregular polyhedral particles. *Mechanics of Materials* **41** 729
- [13] L. Staron, J.-P. Vilotte, and F. Radjai 2002 Preavalanche Instabilities in a Granular Pile. *Physical Review Letter* **89** 204302