

# Comportement au flambement de poteaux avec loi de plasticité au gradient

V. PICANDET, N. CHALLAMEL, S. HIN

Laboratoire d'Ingénierie des MATériaux de Bretagne (LIMATB), Université de Bretagne-Sud,  
Centre de Recherche Christiaan Huygens, BP 92116, 56321 LORIENT Cedex

## Résumé :

*Le comportement au flambement d'un poteau élastoplastique avec une loi globale moment-courbure bilinéaire, est étudié de façon analytique pour une charge axiale centrée. Une telle étude peut trouver des applications en génie civil et peut concerner le calcul des structures en béton armé, acier, bois ou matériaux composites. Il est montré analytiquement que la solution théorique de radoucissement inélastique peut être obtenue si une condition non locale d'écroûissage est introduite, conformément aux études déjà publiées dans le cas de flexion de poutres avec écroûissage négatif (ou poutres composées d'un matériau quasi fragile [1] [2]). Une loi moment-courbure de plasticité au gradient est donc introduite, de manière à contrôler la phase post-localisation dans la plage de comportement post-flambement du poteau. L'influence de la variable d'écroûissage et celle de la longueur interne, inhérente à l'hypothèse de non-localité considérée, sur la propagation de la zone plastifiée et sur la flèche de ce système élastoplastique illustrent les principaux résultats.*

**Mots clefs :** Flambement, Elastoplasticité, Plasticité au gradient, Radoucissement, Structure.

## Abstract :

*The buckling and the post-buckling behaviours of a perfect axially loaded column are analytically investigated in this paper, through a global bilinear moment-curvature elastoplastic constitutive law. The applications of such a study can be found in various structural engineering problems, including reinforced concrete, steel, timber or composite structures. It is analytically shown that for all kinds of elastoplastic behaviors, the plasticity phenomena lead to the global softening phenomenon in the load-deflection diagram. However, it is shown that the unphysical elastic unloading solution necessarily occurs in presence of the local softening phenomenon, as already well documented for the bending of softening beams (or beams composed of quasi-brittle materials [1] [2]). A gradient plasticity moment-curvature softening law is then used to control the post-localization range in the post-buckling stage. Finally, the influence of the internal length, relative to the non-locality considered, and the influence of the plastic modulus on the spreading of plasticity and the post-buckling behaviour of these plasticity structural systems illustrate the main findings.*

**Key words :** Buckling, Elastoplasticity, gradient plasticity, Softening, Structure.

## 1 Introduction

Le comportement au flambement et post-flambement de poteaux élastoplastiques dont le comportement est régi par une loi moment – courbure bilinéaire avec un écroûissage négatif (figure 1) fait ici l'objet d'une étude analytique. Cette loi de comportement peut être utilisée pour de nombreuses applications en ingénierie, comme pour la modélisation d'éléments de structure constitués d'un matériau quasi-fragile avec un comportement post-pic adoucissant, comme pour les structures en béton armé, en bois ou composées de certains matériaux polymères – composites.

La flexion d'une poutre élastoplastique a déjà fait l'objet de nombreuses études publiées, dont celle de Wood en 1968 [3] qui montre qu'une loi élastoplastique avec radoucissement moment–courbure local conduit à une solution qui n'est pas physiquement acceptable. Il a démontré depuis qu'un modèle non local nécessitant

l'introduction de longueurs caractéristiques additionnelles doit être considéré pour les milieux radoucissants. Pijaudier-Cabot et Bažant (1987) [4] ont par exemple développé un modèle d'endommagement non local afin de contrôler les processus de localisation en phase post-pic. De nombreuses simulations d'éléments de structure découlent de ce type de modèle [5], mais très peu d'études analytiques sont disponibles pour la flexion et surtout le flambement de poutre avec une telle loi de comportement.

Dans cette étude, nous nous limiterons à la considération d'un modèle de plasticité au gradient, avec l'introduction de la longueur caractéristique,  $l_c$ . Pour ce type de modèle, les premières solutions analytiques furent obtenues en 1991 [6] [7] pour une barre homogène sous contrainte uniaxiale et montrent des solutions de localisations périodiques. Plus tard, Challamel, [8] développa un modèle moment – courbure selon une loi de plasticité au gradient dépendant d'une longueur interne et obtint des résultats de localisations similaires dans le cas de flexion uniforme. La flexion de poutres selon des modèles plus élaborés ont par la suite été développés, mais le comportement à la stabilité de tels éléments de structures a été probablement beaucoup moins étudié.

Dans cette, on étudie le comportement au flambement d'un poteau rectiligne de longueur  $L$ , avec une section constante et un poids propre négligeable, parfaitement homogène, encasté en sa base et chargé en son centre et selon son axe initial sur son extrémité libre (voir figure 2). Le long du poteau, le déplacement est noté  $w(x)$ . Typiquement, ces hypothèses sont représentatives du cas de poteaux en béton armé pour lesquels, seules de faibles rotations sont observées. Dans la phase post-flambement initialement élastique, lorsque la charge critique est atteinte,  $P_{crit} = \pi^2 EI/4L^2$ , selon les conditions d'Euler l'initiation de la plasticité est associée à l'apparition d'une courbure plastique. Une loi de plasticité au gradient explicite est introduite afin d'enrichir la loi de comportement moment – courbure considérée (voir figure 1) dans le but de pouvoir régulariser et étudier la solution analytique du problème posé.

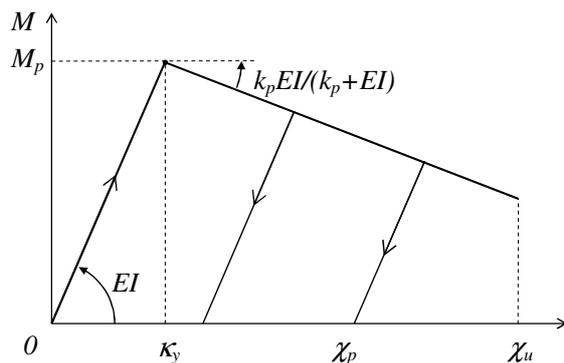


FIG. 1 – Loi moment – courbure élastoplastique avec radoucissement linéaire

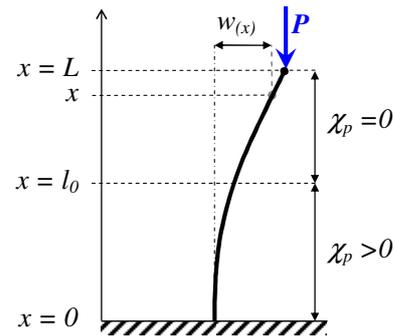


FIG. 2 – Poteau encasté et libre en tête flambant sous une sollicitation axiale

## 2 Equations différentielles associées

### 2.1 Détermination de la courbure plastique

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir du principe des travaux virtuels :

$$\int_0^L M \delta w'' - P w' \delta w' dx = 0 \Rightarrow M'' + P w'' = 0 \quad (1)$$

La loi constitutive moment courbure ( $M - w''$ ) élastoplastique bilinéaire peut s'écrire à l'échelle de la section en fonction de la rigidité  $EI$ , et de la courbure plastique,  $\chi_p$ . Pour un moment plastique,  $M_p$ , une variable d'écrouissage,  $k_p$ , et une longueur interne caractéristique,  $l_c$ , relative au gradient de plasticité, les relations suivantes sont obtenues :

$$M = EI (w'' - \chi_p) \text{ et } M = M_p + k_p (\chi_p + l_c^2 \chi_p'') \quad (2)$$

A partir des équations (1) et (2) le système d'équations différentielles selon le déplacement,  $w$ , et de la courbure plastique,  $\chi_p$ , est obtenu :

$$\begin{cases} EI(w^{(4)} - \chi_p'') + Pw'' = 0 \\ EI(w'' - \chi_p) = M_p + k_p(\chi_p + l_c^2 \chi_p'') \end{cases} \quad (3)$$

## 2.2 Adimensionnement

Les variables adimensionnées suivantes sont introduites pour exprimer les longueurs relatives de la flèche, de l'abscisse le long du poteau, de la variable interne,  $l_c$ , et de la flèche à l'extrémité libre.

$$w^* = \frac{w}{L} ; x^* = \frac{x}{L} ; \lambda_c^* = \frac{l_c}{L} \text{ et } \delta = \frac{w(L)}{L} = w^*(1) \quad (4)$$

De même, le chargement, l'écroûissage linéaire, la courbure plastique et le moment de plastification peuvent être adimensionnés :

$$\beta = \frac{PL^2}{EI} ; k_p^* = \frac{k_p}{EI} ; \chi_p^* = \chi_p L \text{ et } \kappa_y^* = \kappa_y L \text{ avec } \kappa_y = \frac{M_p}{EI} \quad (5)$$

Ainsi, le système d'équations présenté en (3) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} w^{*(4)} = -\beta w^{*''} + \chi_p^{*''} \\ w^{*''} = k_p^* \lambda_c^{*2} \chi_p^{*''} + (1 + k_p^*) \chi_p^{*''} + \kappa_y^* \end{cases} \quad (6)$$

La seconde équation donne une première relation entre la courbure du poteau et la courbure plastique de celui-ci. La combinaison des deux équations permet d'aboutir, dans la zone plastifiée du poteau, une équation différentielle d'ordre 4 de la courbure plastique :

$$k_p^* \lambda_c^{*2} \chi_p^{*(4)} + (k_p^* - \lambda_c^{*2} \beta + \beta k_p^* \lambda_c^{*2}) \chi_p^{*''} + \beta(1 + k_p^*) \chi_p^{*''} = -\beta \kappa_y^* \quad (7)$$

## 2.3 Cas particulier de l'écroûissage nul, ( $k_p = 0$ )

Si le poteau présente une plasticité pure, la variable d'écroûissage,  $k_p$ , est nulle et la longueur caractéristique,  $l_c$ , n'a plus lieu d'être puisque la zone plastique se cantonne au point de moment fléchissant maximum : le moment plastique,  $M_p$ , est égal au moment au point d'encastrement. Dans ce cas particulier, le poteau conserve un comportement élastique sur le reste de sa hauteur et sa courbure est régie par une équation différentielle du second ordre. Avec les conditions limites considérées, l'équation de la déformée s'écrit :

$$w^* = \frac{\kappa_y^*}{\beta} - \frac{\kappa_y^*}{\beta} \cos(\sqrt{\beta} x^*) + \frac{\kappa_y^*}{\beta \tan \sqrt{\beta}} \sin(\sqrt{\beta} x^*) \quad (8)$$

Dans le cas d'un déplacement de la flèche adimensionnée,  $\delta$ , supérieur à une flèche critique élastique,  $\delta_e$ , suite au flambement de la poutre, on obtient dans la phase post-flambement une relation flèche–chargement basique, de type hyperbolique, qui sert par la suite de référence dans l'analyse des résultats présentés en figure 4 :

$$\text{si } \delta \geq \delta_e = \frac{4\kappa_y^*}{\pi^2} \text{ alors } \beta = \frac{\kappa_y^*}{\delta} \quad (9)$$

## 3 Résolution

Dans le cas d'un écroûissage négatif, la variable  $k_p^*$  doit être comprise entre  $-1$  et  $0$  pour conserver une raideur positive qui soit physiquement acceptable (et éviter le « snap-back » local). Pour résoudre l'équation différentielle (9) deux variables  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , respectivement positives et négatives sont introduites :

$$\sigma_1 = -\frac{\eta}{2} + \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - \frac{\beta(k_p^* + 1)}{k_p^* \lambda_c^{*2}}} ; \sigma_2 = -\frac{\eta}{2} - \sqrt{\frac{\eta^2}{4} - \frac{\beta(k_p^* + 1)}{k_p^* \lambda_c^{*2}}} \text{ avec } \eta = \beta + \frac{1}{\lambda_c^{*2}} \quad (10)$$

La solution générale de l'équation différentielle d'ordre 4 en (9) est de la forme suivante :

$$\chi_p^* = A_3 \cosh(\sqrt{\sigma_1} x^*) + A_4 \sinh(\sqrt{\sigma_1} x^*) + A_5 \cos(\sqrt{-\sigma_2} x^*) + A_6 \sin(\sqrt{-\sigma_2} x^*) - \frac{k_y^*}{1+k_p^*} \quad (11)$$

Par la suite, deux parties du poteau sont distinguées : – i) Une partie supérieure, proche de l'extrémité libre, qui n'est pas plastifiée et dont le comportement reste purement élastique linéaire avec une courbure plastique nulle,  $\chi_p = 0$  ; – ii) Une partie inférieure, proche de la base encastree, qui est plastifiée (i.e.  $\chi_p > 0$ ) et dont la courbure plastique,  $\chi_p$ , évolue selon la relation (11).

La limite entre ces deux parties se situe à l'abscisse,  $l_0$ , variant entre 0 et L et dont la variable adimensionnée correspondante est notée  $l_0^*$  par la suite (voir figure 2). La solution générale de flèche adimensionnée de la partie inférieure, pour  $x \in [0, l_0]$ , notée  $w^{-*}$ , peut alors être déduite à partir de la seconde équation du système en (6) et de l'équation (11) :

$$w^{-*} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{k_p^* \lambda_c^2 \sigma_1 + 1 + k_p^*}{\sigma_1} \left[ A_3 \cosh(\sqrt{\sigma_1} x^*) + A_4 \sinh(\sqrt{\sigma_1} x^*) \right] \\ + \frac{k_p^* \lambda_c^2 \sigma_2 + 1 + k_p^*}{\sigma_2} \left[ A_5 \cos(\sqrt{-\sigma_2} x^*) + A_6 \sin(\sqrt{-\sigma_2} x^*) \right] \end{array} \right\} + A_2 x^* + A_1 \quad (12)$$

Parallèlement, la solution générale de la flèche adimensionnée de la partie supérieure, pour  $x \in [l_0, L]$ , notée  $w^{+*}$ , peut alors être déduite à partir de la première équation différentielle du système en (6) :

$$w^{+*} = B_1 + B_2 x^* + B_3 \cos(\sqrt{\beta} x^*) + B_4 (\sin \sqrt{\beta} x^*) \quad (13)$$

### 3.1 Conditions aux limites

Les conditions d'encastrement conduisent à :

$$[a] w^{-*}(0) = 0 ; [b] w^{-*'}(0) = 0 \text{ et } [c] \chi_p^{*'}(0) = 0 \quad (14)$$

Les conditions à la frontière de la zone plastique en  $x = l_0$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} [d] \chi_p^{*'}(l_0^*) &= 0 ; [e] \chi_p^*(l_0^*) = 0 \\ [f] w^{-*}(l_0^*) &= w^{+*}(l_0^*) ; [g] w^{-*'}(l_0^*) = w^{+*'}(l_0^*) ; [h] w^{-*''}(l_0^*) = w^{+*''}(l_0^*) \\ [i] w^{-*'''}(l_0^*) - \chi_p^{*'}(l_0^*) + \beta w^{-*'}(l_0^*) &= w^{+*'''}(l_0^*) + \beta w^{+*'}(l_0^*) \end{aligned} \quad (15)$$

Les conditions sur l'extrémité libre donnent :

$$[j] w^{+*''}(1) = 0 ; [k] w^{+*'''}(1) + \beta w^{+*'}(1) = 0 \quad (16)$$

Ces 11 conditions limites permettent de résoudre les 11 inconnues du problème :  $A_1$  à  $A_6$ ,  $B_1$  à  $B_4$ , et  $l_0^*$ .

### 3.2 Résolution du système

Les conditions aux limites [i] et [k] aboutissent respectivement à  $A_2=0$  et  $B_2=0$  puis [b] et [c] aboutissent à  $A_4=A_6=0$ . La résolution du reste du système permet d'aboutir à une relation de  $l_0^*$  en fonction de  $\beta$  :

$$1 + \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\beta}} \tanh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*) \tan[\sqrt{\beta}(1-l_0^*)] = \frac{(\sigma_2 + \lambda_c^2 \sigma_2^2)}{\beta \lambda_c^2 (\sigma_1 - \sigma_2)} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\sigma_1} \tanh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*)}{\sqrt{-\sigma_2} \tan(\sqrt{-\sigma_2} l_0^*)} \right] \quad (17)$$

Les solutions de cette équation, peuvent être facilement obtenues numériquement. Il peut aussi être vérifié que le point ( $l_0^*=0$  ;  $\beta = \pi^2/4$ ) est solution du problème tandis que la discontinuité en ( $l_0^* = \pi \lambda_c$  ;  $\beta = 0$ ) indique l'autre borne de l'intervalle dans lequel se trouve la solution (voir figure 3). La fonction  $l_0^* = f(\beta)$  est par la suite utilisée pour calculer les autres inconnues du système posé.

Les propagations de la plastification au départ de la base encastree du poteau sont ainsi présentées, selon

différentes valeurs de longueurs caractéristiques,  $\lambda_c$ , en figure 3–a et selon différentes variables d'écroissage en en figure 3–b. Les résultats confirment que cette propagation de la plastification tend à se limiter et rester concentrée autour du point d'encastrement pour de faible valeur de  $\lambda_c$  et/ou de faibles valeurs de  $k_p^*$ . Le première étude paramétrique illustre l'incidence de la non-localité induite par le modèle de plasticité au gradient à travers la valeur de la longueur interne  $\lambda_c$ , tandis que la seconde étude paramétrique confirme une continuité avec le cas particulier précédemment évoqué et traité analytiquement dans le cadre d'une variable d'écroissage nulle.

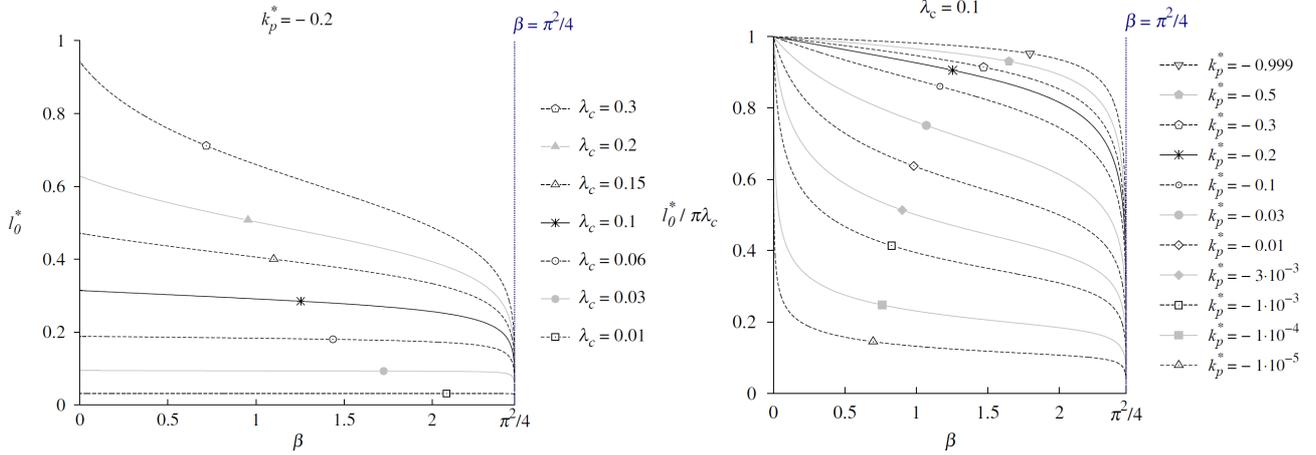


FIG. 3 – Propagation de la zone plastifiée

– a) selon  $\lambda_c$  pour  $k_p^*$  fixé à une valeur de  $-0,2$ – b) selon  $k_p^*$  pour  $\lambda_c$  fixé à une valeur de  $0,1$ 

### 3.3 Expression des résultats

Le calcul des paramètres  $A_1$  à  $A_6$  et  $B_1$  à  $B_4$  donne notamment :

$$A_3 = \frac{\kappa_y^*}{1+k_p^*} \frac{1}{\cosh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*)} \left[ 1 + \frac{\sqrt{\sigma_1} \tanh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*)}{\sqrt{-\sigma_2} \tan(\sqrt{-\sigma_2} l_0^*)} \right]^{-1} \quad \text{et} \quad A_5 = \frac{\kappa_y^*}{1+k_p^*} \frac{1}{\cos(\sqrt{-\sigma_2} l_0^*)} \left[ 1 + \frac{\sqrt{-\sigma_2} \tan(\sqrt{-\sigma_2} l_0^*)}{\sigma_1 \tanh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*)} \right]^{-1} \quad (18)$$

La solution du système d'équations défini par les conditions limite en (14) (15) et (16) donne pour la flèche adimensionnée le résultat suivant :

$$\delta = B_1 = \frac{k_p^*}{\beta} \left\{ A_3 (1 + \lambda^2 \sigma_1) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\sigma_1}{\beta} \right) \cosh(\sqrt{\sigma_1} l_0^*) \right] + A_5 (1 + \lambda^2 \sigma_2) \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\sigma_2}{\beta} \right) \cos(\sqrt{-\sigma_2} l_0^*) \right] \right\} \quad (19)$$

Les équations (18) et (19) montrent que la flèche à l'extrémité est clairement proportionnelle au moment plastique du poteau et est ainsi normalisée selon le rapport  $\delta/\kappa_y^*$  en figure 4. Cette relation vérifie que la déflexion est égale à  $\kappa_y^*/\beta$  pour  $\beta = \pi^2/4$  et vérifie la continuité avec le cas où la variable d'écroissage est nulle. Contrairement à l'intuition, les flèches obtenues pour des valeurs de  $k_p$  proches de zéro sont supérieures à la solution obtenue analytiquement pour un écroissage nul sans le recours à un modèle au gradient de plasticité. Elles devraient théoriquement être légèrement plus faibles compte tenu du caractère plus fragile du poteau. Ce phénomène de raidissement « artificiel » lié à l'introduction du gradient de plasticité a déjà été observé lors de l'étude de poutre console par une analyse identique [9]. Ce raidissement tend d'ailleurs à augmenter avec la valeur  $\lambda_c$  (figure 4–a) et sur le comportement global post-flambement pour de faibles valeurs de  $k_p$ .

Par ailleurs, pour des valeurs de  $k_p$  proches de 1 (figure 4–b) et/ou des valeurs de  $\lambda_c$  importantes, un « snap-back » global est également observé, caractéristique d'une rupture fragile avec un chargement rémanent qui s'annule à flèche décroissante [5] [10].

Il est à noter que les résultats présentés ont été comparés et vérifiés numériquement par une méthode de différences finies implicites à partir des équations différentielles définies en (6) et (7).

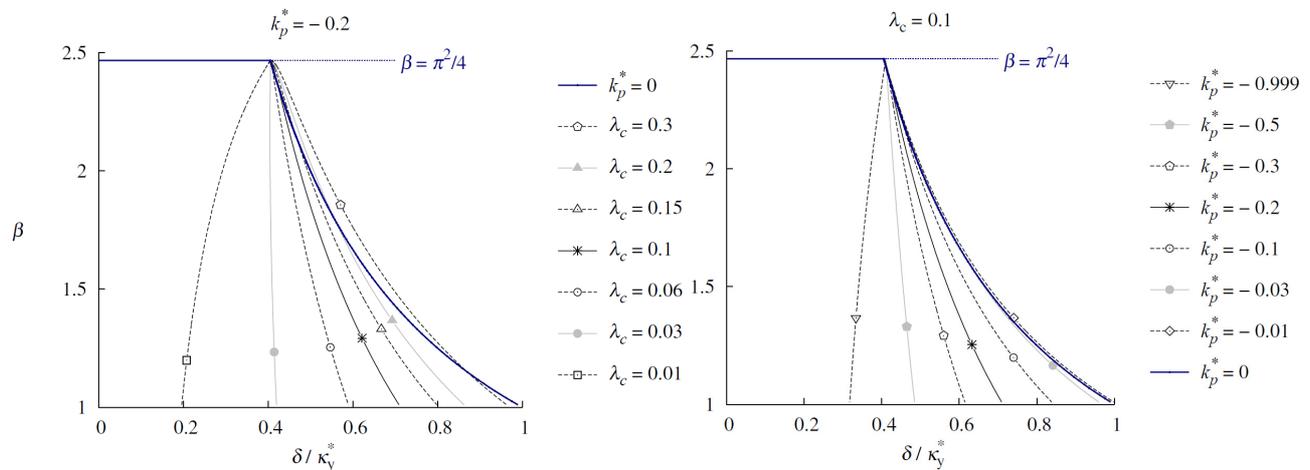


FIG. 4 – Evolution de la charge post-flambement en fonction de la flèche adimensionnée  
 – a) selon  $\lambda_c$  pour  $k_p^*$  fixé à une valeur de  $-0,2$       – b) selon  $k_p^*$  pour  $\lambda_c$  fixé à une valeur de  $0,1$

## 4 Conclusion

Une loi moment–courbure de plasticité au gradient est introduite afin de contrôler la phase post-localisation dans la plage de comportement post-flambement du poteau. D’un point de vue analytique, l’introduction d’au moins une longueur interne requise par un modèle au gradient est nécessaire et permet la résolution analytique du problème posé.

Les résultats obtenus sont globalement cohérents avec les résultats analytiques du cas simple obtenu pour un écrouissage nul sans l’utilisation de modèle au gradient. L’influence des caractéristiques du modèle macroscopique, comme celle du module de plasticité, sur le comportement en phase post-flambement est étudiée. Le rôle important de la longueur interne adimensionnée,  $\lambda_c$ , relative au gradient de plasticité du matériau est elle aussi montrée. La justification de l’introduction de ce paramètre macroscopique nécessite sans doute des recherches supplémentaires. La généralisation de ce modèle à d’autres formes de non-localité est envisagée pour compléter cette étude.

## References

- [1] Casandjian C., Challamel N., Lanos C. and Helleland J., Mechanics and design of reinforced concrete beams, columns and frames – Mechanics and design, Wiley – ISTE, 2013
- [2] Helleland J., Challamel N., Casandjian C. and Lanos C., Mechanics and design of reinforced concrete beams, columns and frames – Section and slender member analysis, Wiley – ISTE, 2013
- [3] Wood R.H., Some controversial and curious developments in the plastic theory of structures, in: Heyman J., F.A. Leckie (Eds.), Engineering Plasticity, Cambridge University Press, pp 665–691, 1968
- [4] Pijaudier-Cabot G., Bažant Z.P., Nonlocal damage theory, J. Eng. Mech, pp 113–1512–33, 1987
- [5] Jirásek M., Bažant Z.P., Inelastic Analysis of Structures, Wiley, 2002
- [6] de Borst R. and Mühlhaus H.B., Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects, Int. J. Num. Meth. Engng., 35, pp 521-539, 1992
- [7] Mühlhaus H.B. and Aifantis E.C., A variational principle for gradient plasticity, Int J Solids Structures, 28, pp 845-857, 1991
- [8] Challamel N., A gradient plasticity approach for steel structures, Comptes-Rendus de Mécanique 331 (9) pp 647–654, 2003
- [9] Challamel N., Lanos C., Casandjian C., On the propagation of localization in the plasticity collapse of hardening–softening beams – International Journal of Engineering Science 48, pp 487–506, 2010
- [10] Bažant Z.P., Cedolin L., Stability of structures, elastic, inelastic, fracture and damage theories, World Scientific, 2010