

Stabilité hydrodynamique linéaire des écoulements plans de Poiseuille de fluides viscoélastiques en présence d'un champ magnétique transversal

A. RAFIKI^a, A. HIFDI, M. T. OUZZANI

. Université Hassan II, Faculté des Sciences Aïn Chock, Laboratoire de Mécanique Km 8 Route d'El Jadida BP 5366 Maarif, Casablanca, Maroc
abs.rafiki@gmail.com

Résumé :

La stabilité linéaire de l'écoulement en canal de fluides viscoélastiques en présence d'un champ magnétique transversal est étudiée numériquement. Ceci dans le but de cerner l'effet combiné du champ magnétique transversal et des temps de relaxation et de retard de fluide d'Oldroyd-B sur la stabilité de cet écoulement. Le système d'équations résultant de l'étude de stabilité est résolu par la méthode spectrale de collocation de Tchebychev. Il ressort de cette étude que, l'augmentation du temps de relaxation déstabilise cet écoulement, alors que celle du temps de retard lui permet de retrouver sa stabilité. Le champ magnétique transversal peut avoir un effet stabilisant ou déstabilisant sur cet écoulement. L'étude du spectre des valeurs propres de cet écoulement nous permet de prouver l'existence de deux familles de modes propres stables comme pour le cas de fluide de Maxwell généralisé.

Abstract :

The linear stability of a plane Poiseuille flow of a viscoelastic fluids in the presence of a transverse magnetic field is investigated numerically. The main purpose of this work is to check the combined effects of the magnetic field and of the relaxation and retardation times of the Oldroyd-B fluid on the stability picture of this flow. The equations governing the stability analysis is solved by a spectral method of Chebyshev collocation. Based on the results obtained in this work, the relaxation time is predicted to have a destabilizing effect on plane Poiseuille flow. However, the retardation time has a stability effect on this flow. The magnetic field has a stabilizing and a destabilizing effect on this flow. The investigation of the eigenspectrum for this flow exhibits the existence of two continuum spectrums of stable eigenmodes.

Mots clefs : Stabilité hydromagnétique ; Fluides viscoélastiques ; Méthode spectrale

1 Introduction

La stabilité hydrodynamique est un phénomène commun à tous les écoulements de fluides. D'un point de vue pratique, ces écoulements perdent leur stabilité toutes les fois que certains paramètres de contrôle changent. L'étude d'instabilité des écoulements à grand nombres de Reynolds appelée instabilité inertielle est souvent utilisée quand on a un changement de régime d'écoulement. Ce changement est toujours accompagné de celui des caractéristiques de l'écoulement surtout lorsqu'il s'agit de fluides non-newtoniens. Une telle étude est par ailleurs indispensable à de nombreuses industries : produits alimentaires, cosmétiques, construction, ressources pétrolières. C'est la raison pour laquelle se sont développées ces dernières décennies des recherches sur l'étude d'instabilité inertielle de ces écoulements [1, 2, 3].

Pour étudier de manière plus réaliste la stabilité de ces écoulements, il faut tenir compte du caractère viscoélastique du comportement de ces fluides et du phénomène de la réduction de la traînée turbulente dans l'écoulement [1]. L'évolution et la structure de la turbulence dans des solutions diluées à des

nombres de Reynolds élevés sont fortement liées aux additifs et aux états configurationnels des chaînes polymériques [4]. La loi de comportement de fluide viscoélastique la plus conforme pour décrire ces phénomènes est celle d'Oldroyd-B. Ce dernier est une extension de la loi de comportement de fluide de Maxwell généralisé (UCM) permettant de tenir compte des effets de viscosité du solvant[5].

L'instabilité linéaire de l'écoulement plan de Poiseuille de fluides newtoniens en présence d'un champ magnétique transversal a été investigué par Lock [6] pour lequel le nombre de Prandtl magnétique est très petit devant l'unité et qui lui a permis de faire une approximation en réduisant le nombre des équations à une seule équation de type Orr-Sommerfeld. Takashima [7] a repris cette étude pour des nombres de Prandtl magnétique quelconques et a validé les résultats obtenus par Lock [6]. Récemment, Eldabe et al [8] ont étendu cette étude de stabilité au cas des fluides d'Oldroyd-B en utilisant la méthode spectrale de collocation en projetant les solutions recherchées sur une base polynomiale de Tchebychev tout en utilisant l'approximation de Lock [6]. Il en résulte de toutes ces études que le champ magnétique transversal a un effet stabilisant sur l'écoulement plan de Poiseuille.

Dans ce cadre et pour un nouvel apport à ces investigations, nous reprenons l'étude d'Eldabe et al [8] sans l'approximation de Lock [6]. Potter and Kutchev [9] en 1973 ou plus récemment Takashima [7] ont montré que pour les fluides newtoniens lorsque le nombre de Prandtl magnétique est grand ($P_m > 0.01$), l'effet de la perturbation du champ magnétique doit être pris en compte dans les équations de stabilité. Dans cette situation, il est intéressant de chercher l'effet du nombre de Prandtl magnétique sur les seuils de stabilité de l'écoulement plan de Poiseuille. Par ailleurs, nous adoptons comme moyen de résolution de ce problème, la méthode spectrale de collocation de Tchebychev qui consiste à projeter les solutions recherchées sur une base polynomiale de Lagrange telle qu'elle est décrite dans Weideman et al. [10].

2 Formulation du problème

Dans le système de coordonnées cartésiennes (x^*, y^*) , on considère l'écoulement de Poiseuille d'un fluide viscoélastique incompressible et conducteur de l'électricité, situé entre deux plans parallèles d'extension infini dans la direction x^* et d'équations $y^* = h$ et $y^* = -h$, en présence d'un champ magnétique uniforme $\mathbf{B}^* = (0, B_0, 0)$; perpendiculaire aux parois.

Les équations régissant le mouvement du fluide sous forme adimensionnelle sont données par :

$$\left[\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right] = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + Ha \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{B}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Re P_m} (\nabla^2 \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

Avec $\mathbf{V} = (u, v)$ le vecteur vitesse, p la pression et $\boldsymbol{\tau}$ le tenseur des contraintes défini dans le cas où ce fluide non-newtonien est celui d'Oldroyd-B par la loi de comportement suivante :

$$\boldsymbol{\tau} + We \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} = \frac{1}{Re} (\boldsymbol{\varepsilon} + ReK \frac{D\boldsymbol{\varepsilon}}{Dt}) \quad (4)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ est le tenseur de taux de déformation et $\frac{D}{Dt}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial t}(\cdot) + (\mathbf{V} \cdot \nabla)(\cdot) + (\cdot) \cdot \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^T \cdot (\cdot)$.

Les nombres adimensionnelles utilisés dans les équations précédentes sont :

$Ha = \frac{B_0^2}{\mu_0 \rho u_0^2}$: le nombre de la pression magnétique; $Re = \frac{h u_0}{\nu}$: le nombre de Reynolds; $P_m = \mu_0 \sigma \nu$: le nombre de Prandtl magnétique; $We = \frac{\lambda_1 u_0}{h}$: le nombre de Weissenberg relatif au temps de relaxation λ_1 , $K = \frac{\nu \lambda_2}{h^2}$: le nombre d'élasticité et $W = ReK$ nombre de Weissenberg relatif au temps de retard λ_2 , ρ est la masse volumique du fluide, ν la viscosité cinématique, μ_0 la perméabilité magnétique, σ la conductivité électrique et u_0 la vitesse au centre du canal.

Les conditions aux limites adimensionnelles, qui traduisent l'adhérence aux parois qui sont impénétrables et non-conductrices de l'électricité, s'écrivent :

$$\begin{aligned} u(x, \pm 1, t) &= v(x, \pm 1, t) = 0 \\ B_x(x, \pm 1, t) &= 0 \quad B_y(x, \pm 1, t) = 1 \end{aligned} \quad (5)$$

3 Stabilité linéaire et méthode de résolution

Pour déterminer la solution de base de ce problème, nous allons nous limiter à des écoulements de base stationnaires et unidirectionnels, dont le champ de vitesse s'écrit : $\mathbf{V} = u(x, y)\vec{e}_x$

Dans ce cas-là et en tenant compte de (Eq.5), la résolution du système d'équations (Eqs.1,2,3,4) donne comme solution de base : les composantes du champ de vitesse : u_b et v_b , du champ magnétique : B_{x_b} et B_{y_b} et des contraintes normales : τ_{xx_b} et τ_{yy_b} et tangentielle τ_{xy_b} suivantes :

$$\begin{cases} u_b = \frac{\cosh(M) - \cosh(My)}{\cosh(M) - 1} ; v_b = 0 ; B_{x_b} = \frac{R_m}{M(\cosh(M) - 1)} [\sinh(My) - y \sinh(M)] ; B_{y_b} = 1 \\ \tau_{xx_b} = \frac{2M^2}{Re(\cosh(M) - 1)^2} (We - ReK)(\sinh(My))^2 ; \tau_{xy_b} = -\frac{M \sinh(My)}{Re(\cosh(M) - 1)^2} ; \tau_{yy_b} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

avec $R_m = ReP_m$ et $M = B_0 h \sqrt{\sigma/\rho\nu}$ qui sont deux nombres adimensionnelles définissent respectivement Reynolds magnétique et nombre de Hartman.

Afin d'étudier la stabilité linéaire du problème, nous perturbons légèrement la solution de l'écoulement de base à travers l'introduction des perturbations de nature bidimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned} u &= u_b + u' ; v = v' ; B_x = B_{x_b} + B'_x ; B_y = 1 + B'_y \\ \tau_{xx} &= \tau_{xx_b} + \tau'_{xx} ; \tau_{yy} = \tau'_{yy} ; \tau_{xy} = \tau_{xy_b} + \tau'_{xy} ; p = p_b + p' \end{aligned} \quad (7)$$

Pour alléger l'écriture dans la suite de la formulation, on notera tous les perturbations en otant l'indice "''".

Nous décomposons les perturbations en modes de Fourier en x telle que :

$$[u, v, B_x, B_y, \tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}, p](x, y, t) = [\phi, \psi, b_x, b_y, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}, p](y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (8)$$

avec $i^2 = -1$. α (réel positif), $c = c_r + ic_i$, $\phi, \psi, b_x, b_y, \tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}, p$ définissent respectivement le nombre d'ondes, la vitesse de propagation, les amplitudes complexes longitudinale et transversale de la vitesse et du champ magnétique, des contraintes normales suivant les directions x et y , de la contrainte tangentielle et de la pression.

Nous utilisons l'équation (Eq.3) pour éliminer la pression et chercher l'expression des amplitudes ϕ et b_x en fonction des amplitudes ψ et b_y respectivement. En tenant compte de (Eq.6), (Eq.7) et (Eq.8), le système d'équations (Eqs.1,2,4) s'écrit :

$$\begin{cases} [u'_b - (u_b - c)(D^2 - \alpha^2)]\psi = i\alpha D(\tau_{11} - \tau_{22}) + (D^2 + \alpha^2)\tau_{12} + \frac{M^2}{Re^2 P_m} [B''_{x_b} + (\frac{iD}{\alpha} - B_{x_b})(D^2 - \alpha^2)]b_y \\ (B'_{x_b} + B_{x_b}D + \frac{D^2}{i\alpha})\psi = [u'_b + (u_b - c)D - (D^2 - \alpha^2)\frac{D}{i\alpha Re P_m}]b_y \\ [We(\tau'_{xx_b} - \frac{2i}{\alpha}\tau_{xy_b}D^2 + 2\tau_{xx_b}D) + \frac{2}{Re}(1 + i\alpha ReK(u_b - c))D + \frac{2iK}{\alpha}(u'_b(2D^2 + \alpha^2))]\psi = 2Weu'_b\tau_{12} - [1 + i\alpha We(u_b - c)]\tau_{11} \\ [2i\alpha K u'_b - 2i\alpha We\tau_{xy_b} - \frac{2}{Re}(1 + i\alpha ReK(u_b - c))D]\psi = -[1 + i\alpha We(u_b - c)]\tau_{22} \\ [We(\tau'_{xy_b} - i\alpha\tau_{xx_b}) - \frac{i}{\alpha Re}(1 + i\alpha ReK(u_b - c))(D^2 + \alpha^2) - K(u''_b - 2u'_bD)]\psi = Weu'_b\tau_{22} - [1 + i\alpha We(u_b - c)]\tau_{12} \end{cases} \quad (9)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\psi(\pm 1) = D\psi(\pm 1) = b_y(\pm 1) = Db_y(\pm 1) = 0 \quad (10)$$

où $D^n = \frac{d^n}{dy^n}$.

A travers le système (Eq.9) d'équations différentielles, établies dans le cas de l'écoulement plan de Poiseuille du fluide d'Oldroyd-B (OB), on peut envisager sous certaines conditions l'étude de stabilité des écoulements de fluides suivants : si $K = 0$, le fluide est celui de Maxwell généralisé (UCM). Si

$We = 0$ et $K < 0$, le fluide est celui de seconde ordre (SO). Si $We = 0$ et $K > 0$, le fluide est celui de grade deux (GD) et enfin si $We = W$ le fluide est newtonien .

Le code de calcul que nous avons réalisé permet si le nombre de points de collocation $N = 60$, de retrouver le seuil de stabilité de l'écoulement d'un fluide newtonien [$Re_c = 5772, 222692$ (nombre de Reynolds critique), $\alpha_c = 1, 0205$ (nombre d'onde critique)] et celui des fluides UCM, SO et GD [Tab. 1]. Il permet aussi de reproduire avec précision dans la figure 1, le graphe $\sigma_i = g(\sigma_r)$ du spectre des valeurs propres donné par Sureshkumar [11] où $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i = -i\alpha c$.

	UCM		SO		GD	
	$We = 0, 5; K = 0; M = 4$	$We = 0; K = -2.10^{-4}; M = 0$	$We = 0; K = -2.10^{-4}; M = 0$	$We = 0; K = 2.10^{-4}; M = 0$	$We = 0; K = 2.10^{-4}; M = 0$	$We = 0; K = 2.10^{-4}; M = 0$
α_c	Nos resultats	Eldabe et al.[8]	Nos resultats	Sadeghy[12]	Nos resultats	Sadeghy[12]
Re_c	1,09	1,08	1,12	1,12	0,84	0,84
	90394,5152	96977,2	4013,0644	4014	13389,966	13392

TABLE 1 – Seuils de stabilité de l'écoulement de fluides UCM, SO et de GD pour $P_m = 10^{-6}$ et $N = 60$

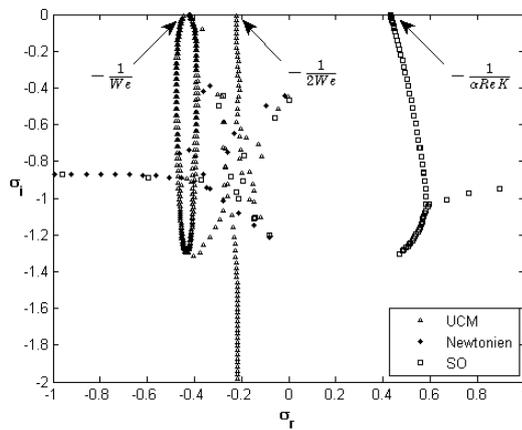


FIGURE 1 – Spectres des valeurs propres pour $Re = 10000$, $\alpha = 1$, $We = 2, 31$ et $K = 10^{-3}$.

4 Résultats et discussion

Après validation de notre code de calcul, nous présentons les résultats concernant les courbes de stabilité marginale et le spectre aux valeurs propres de l'écoulement plan de Poiseuille de fluide d'Oldroyd-B (OB). Les figures (2,3,4,5) donnent les cartes de stabilité de l'écoulement plan de Poiseuille du fluide (OB). Chaque courbe de stabilité marginale de cette figure sépare la zone stable de la zone instable de l'écoulement, pour chaque couple du nombre de Reynolds critique Re_c et du nombre d'onde critique α_c . La figure 2 illustre l'effet du nombre de Weissenberg sur la stabilité de l'écoulement plan de Poiseuille de fluide (OB). Cette figure montre que Re_c diminue avec la croissance de We et donc l'écoulement devient de plus en plus instable.

Comme le montre la figure 3, cet écoulement retrouve sa stabilité en augmentant l'élasticité du fluide à travers W . L'effet stabilisant du champ magnétique sur l'écoulement plan de Poiseuille est illustré dans la figure 4 qui montre que Re_c augmente avec le nombre de Hartmann M . Finalement, La figure 5 Montre que l'augmentation du nombre de Prandtl magnétique P_m affecte les seuils de stabilité de cet écoulement en provoquant une diminution de Re_c .

Pour mieux cerner l'effet de P_m et de M sur la stabilité de l'écoulement considéré, nous reportons dans la figure 6, la variation du mode propre le plus instable (mode dangereux), qui correspond à la plus grande partie imaginaire (c_{imax}) des valeurs propres, en fonction de M . Elle montre que l'augmentation de M a un effet stabilisant ou déstabilisant sur ce mode selon les valeurs prises par P_m . Pour $P_m \leq 10^{-6}$: il est instable ($c_{imax} > 0$) si $0 \leq M \leq 1, 92$, retrouve sa stabilité si $1, 92 \leq M \leq 8, 75$ et la perd si $M > 8, 75$. L'amplitude de c_{imax} décroît avec M pour passer par un minimum lorsque $M = 4$ (effet stabilisant) et croît ensuite (effet déstabilisant). Lorsque $P_m > 10^{-6}$, le mode dangereux perd sa stabilité rapidement pour des valeurs de M très petites par rapport à celles du cas où $P_m \leq 10^{-6}$. Il en résulte de tout cela que la stabilité d'un tel écoulement devient de plus en plus sensible à la variation de P_m .

La figure 7 illustre l'effet du temps de relaxation et du temps de retard du fluide (OB) sur la branche en Y du spectre de valeurs propres du mode fondamental ($Re = 10000; \alpha = 1$) de cet écoulement. La stabilité de celui-ci est déterminée par le signe de σ_r au lieu du signe de c_i . Nous constatons sur cette figure que la signature du spectre en Y de l'écoulement de Poiseuille de fluide newtonien est remarquablement modifiée par les temps de relaxation et de retard du fluide (OB). D'une part, deux branches de valeurs propres distinctes apparaissent : leurs parties réelles dans la première sont

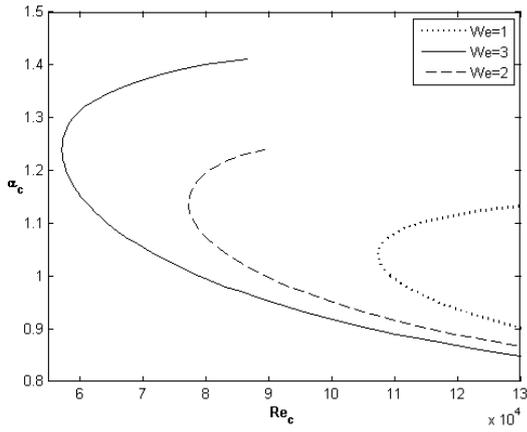


FIGURE 2 – Courbes de stabilité marginale pour le fluide (OB) à différents We lorsque $W = 1$, $M = 4$ et $P_m = 10^{-6}$

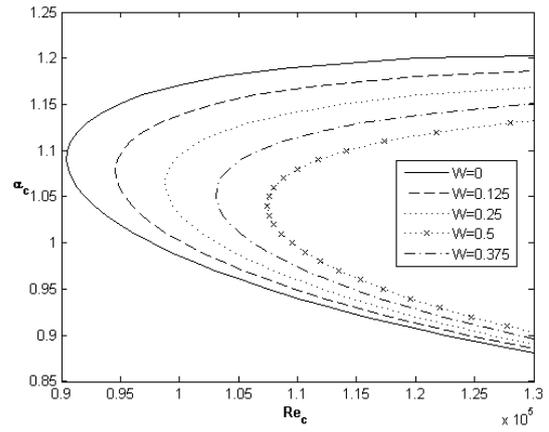


FIGURE 3 – Courbes de stabilité marginale pour le fluide (OB) à différents W lorsque $We = 0.5$, $M = 4$ et $P_m = 10^{-6}$

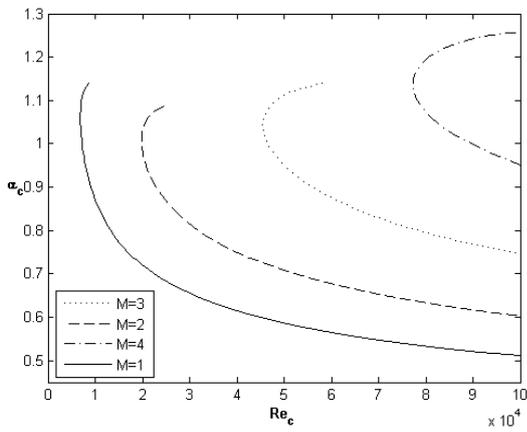


FIGURE 4 – Courbes de stabilité marginale pour le fluide (OB) à différents M lorsque $We = 0.5$, $W = 0.75$ et $P_m = 10^{-6}$

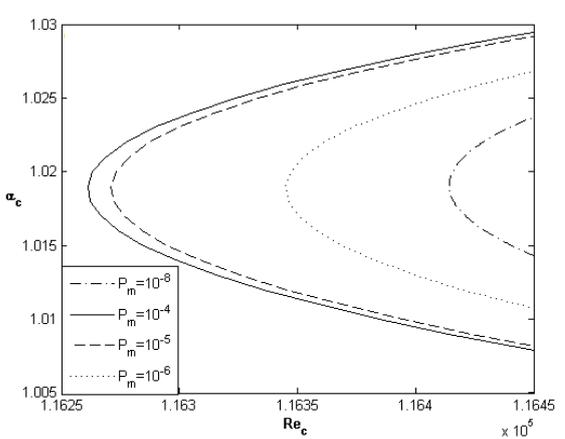


FIGURE 5 – Courbes de stabilité marginale pour le fluide (OB) à différents P_m lorsque $We = 0.75$, $W = 0.5$ et $M = 4$

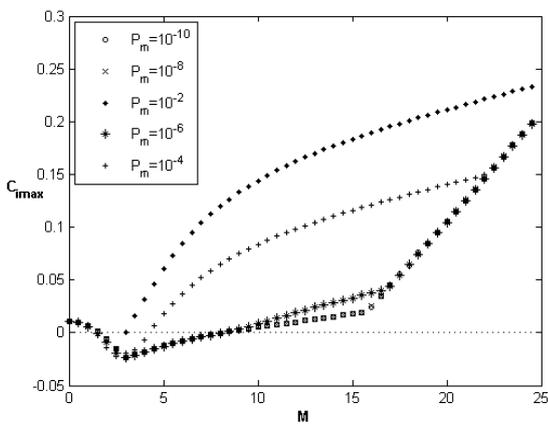


FIGURE 6 – La variation du mode dangereux en fonction de P_m et M pour $Re = 10000$, $\alpha = 1$, $We = 2$ et $K = 2.10^{-4}$.

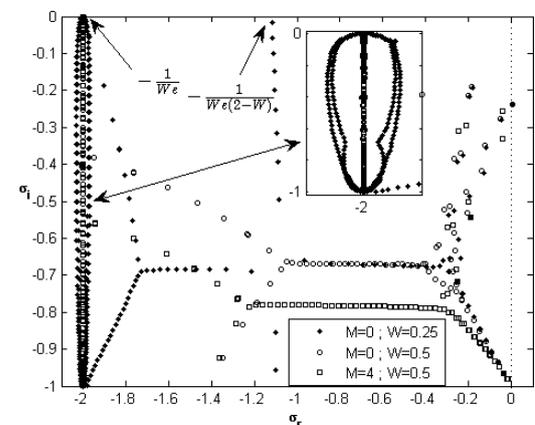


FIGURE 7 – Spectre des valeurs propres pour $Re = 10000$, $\alpha = 1$, $P_m = 10^{-6}$ et $We = 0,5$

d'ordre $(-1/We)$ et celles de la deuxième sont d'ordre $(-1/[We(2-W)])$. L'augmentation du temps de retard jusqu'à la limite newtonienne $W = We$ (qui signifie la disparition des contraintes normales dans l'écoulement du fluide (OB)) élimine la branche d'abscisse $\sigma_r = -1/[We(2-W)]$ et réduit la forme d'ellipse de la branche $(-1/We)$ à une ligne droite. En outre, ces deux familles de valeurs propres restent inchangées par l'application d'un champ magnétique transversal. Néanmoins Les amplitudes des σ_i augmentent en valeur absolue avec M tout en gardant invariante la forme du spectre de l'écoulement de ce fluide. D'autre part, l'unique valeur propre instable de ce spectre dans le cas de l'écoulement de Poiseuille d'un fluide newtonien persiste dans le cas de celui du fluide OB.

5 Conclusion

Dans un premier lieu, nous avons établi dans ce travail les cartes de stabilité de l'écoulement plan de Poiseuille de fluide d'Oldroyd-B. Il ressort de ce premier volet que la stabilité de cet écoulement diminue avec la croissance du temps de relaxation et la diminution de la conductivité de ce fluide et augmente avec la croissance du temps de retard. L'application d'un champ magnétique transversal à un effet stabilisant sur un tel écoulement lorsque $M < 4$.

Dans un second lieu, nous avons étudié l'évolution de la partie imaginaire du mode le plus dangereux. Cela nous a permis de constater que l'effet de la perturbation dans cet écoulement du champ magnétique, négligée par Eldabe et al. [8] doit être pris en compte dans les cas où $P_m > 10^{-6}$. Par contre, sa négligence peut être envisagée dans le cas où $P_m < 10^{-6}$. Cette étude confirme aussi que le champ magnétique transversal peut avoir un effet déstabilisant selon les valeurs prises par $M(P_m)$.

Finalement, l'étude du spectre aux valeurs propres lorsque $\alpha = 1$ et $Re = 10000$ a prouvé l'existence, en plus de la forme en Y , deux autres branches de familles de valeurs propres. Toutefois, la forme globale de ce spectre n'est pas affecté par la présence d'un champ magnétique ($M = 0$) malgré le décalage qu'il cause dans les valeurs de σ_i

Références

- [1] Larson, R.G. 1992 Instabilities in viscoelastic flow *Rheol. Acta.* **31** 213-263
- [2] Sureshkumar, R., Beris, A.N. 1995 Linear stability analysis of viscoelastic Poiseuille flow using an Arnoldi-based orthogonalisation algorithm. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **56** 151-182
- [3] Wilson, H.J., Renardy, M. Renardy, y. 1999 Structure of the spectrum in zero Reynolds number shear flow of the UCM and Oldroyd-B liquids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **80** 251-268.
- [4] Leal, L.G. 1989 Structure of Turbulence and Drag Reduction (IUTAM Symposium). *Part 2. Springer, Berlin* pp. 155-185.
- [5] Larson, R.G. 1988 Constitutive Equations for Polymer Melts and Solutions *Butterworths, Boston*.
- [6] Lock, R.C. 1955 The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field *Proc. Roy. Soc. Lond A* **221** 105-125
- [7] Takashima, M. 1996 The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field *Fluid Dyn. Res.* **17** 293-310
- [8] Eldabe, T.M., El-Sabbagh, M.F., El-Sayed(Hajjaj), M.A.S. 2006 Hydromagnetic stability of the plane Poiseuille and Couette flow of viscoelastic fluid *Fluid Dyn. Res.* **38** 699-715
- [9] Potter, M.C., Kutchev, J.A. 1973 Stability of plane Hartmann flow subject to a transverse magnetic field *Phys. Fluids* **16** 1848-1851
- [10] Weideman, J.A.C., Reddy, S.C.A. 2000 matlab differentiation matrix suite *ACM Transactions on Mathematical Software* **26** 465-519
- [11] Sureshkumar, R. 2001 Local linear stability characteristics of viscoelastic periodic channel flow *J. Non-Newtonian Fluid Mech* **97** 125-148
- [12] Sadeghy K., Taghavi S.M., Khabazi N., Mirzadeh M., Karimfazli I. 2007 On the use of hydrodynamic instability test as an efficient tool for evaluating viscoelastic fluid models *ASME J. Basic. Engng* **1** 367-379