

# Les éléments de frontière accélérés par la Méthode Multipôle Rapide (FMM) pour modéliser des domaines 3D multizone fissurés

T. TRINH<sup>a</sup>, S. MOUHOUBI<sup>a</sup>, C. CHAZALLON<sup>a</sup>, M. BONNET<sup>b</sup>

a. ICUBE, UMR 7357, INSA de Strasbourg, 24 boulevard de la Victoire, 67084 Strasbourg Cedex

b. Equipe POEMS – ENSTA ParisTech, 1024 boulevard des Maréchaux, 91762 Palaiseau Cedex

## Résumé :

*Les domaines contenant les frontières internes, telles que les interfaces entre plusieurs matériaux, sont décrits dans de nombreuses applications faisant appel aux matériaux composites, aux simulations géophysiques... Aussi, la présence de fissures dans les structures peut conduire à des modèles numériques par éléments finis très complexes. Les développements de l'approche symétrique de Galerkin de la méthode des éléments de frontière (SGBEM) restent très attractifs pour modéliser de telles structures. Dans le cas de domaines hétérogènes, le traitement des différentes zones avec leurs caractéristiques nécessite la prise en compte des conditions de continuité à travers les diverses interfaces internes au domaine étudié. Ces dernières engendrent un surplus d'inconnues et rendent la résolution du système matriciel global bien plus complexe. L'originalité du travail mis en œuvre réside dans la construction d'une procédure de couplage entre la méthode des éléments de frontière par approche de Galerkin (SGBEM) et la méthode multipôle rapide (Fast Multipole Method) adaptée aux domaines multizones et présentant des fissures. Cette dernière consiste à réorganiser les formulations de manière à ce que le stockage de la matrice ne soit plus nécessaire et que chaque itération utilise typiquement un produit matrice-vecteur. Le processus de calcul se retrouve de ce fait accéléré. Les résultats numériques obtenus sont satisfaisants et laissent entrevoir l'adaptation de la procédure numérique développée au traitement de problèmes plus complexes traitant de la propagation de fissures.*

## Abstract:

*Domains containing internal boundaries, such as interfaces between different materials are described in many applications: composite material, geophysical simulations... Also, the presence of cracks in structures can lead to very sophisticated models by domain methods. Developments in the Symmetric Galerkin approach of the Boundary Elements Method (SGBEM) are very attractive in the modeling of such situations. In the case of heterogeneous solids, the treatment of different bodies requires the continuity of displacement and equilibrium of traction across the interfaces. This feature generates more unknowns to the system and makes the final matrix equation more complicated to solve. In our work, the coupling between the Galerkin BEM and the Fast Multipole Method (FMM) applied to multizone fractured domains is presented. The latter basically reorganizes the formulations so that the matrix storage is no longer necessary and that also speeds up greatly the matrix-vector product. The numerical results are satisfactory and suggest the developments of the method to more complex problems where the crack propagation may be taken in to consideration.*

**Mots clés :** Galerkin BEM, Méthode multipôle rapide, Multizone, GMRES, Mécanique de la rupture\*

## 1 Introduction

La possibilité de représenter des domaines multifissurés en s'affranchissant des difficultés soulevées par la méthode des éléments finis rend les méthodes intégrales (Symmetric Galerkin Boundary Element Method) très attractives ([2], [3], [7]). D'autre part, le comportement des structures en Génie Civil décrit souvent des domaines tridimensionnels, complexes, hétérogènes et de grandes tailles. Néanmoins, la modélisation de systèmes complexes par la SGBEM produit des matrices pleines tout en créant de réelles difficultés liées au temps d'intégration numérique et à l'impossibilité de stocker ces matrices en mémoire centrale. Pour s'affranchir de ces limitations, il convient de reformuler ces méthodes pour les associer à d'autres procédures

numériques : solveurs itératifs et la méthode de la multipôle rapide (Fast Multipole Method). La FMM, qui consiste en une réorganisation complète du produit *matrice-vecteur*, permet d'effectuer ces produits en un temps proportionnel au nombre d'inconnues nodales  $N$ , là où l'approche classique exige un temps de calcul proportionnel au carré de  $N$ . Le travail mené est basé sur la mise en œuvre de procédures couplant la SGBEM, les processus itératifs GMRES (Generalized Minimum RESidual) et la Fast Multipole Method et a conduit à la construction d'un outil numérique adapté au traitement de problèmes décrits par des domaines multifissurés, hétérogènes et de grandes tailles. La présence d'interfaces internes, séparant les zones à caractéristiques distinctes fait appel à un traitement basé sur plusieurs techniques telles que celles mentionnées dans [5]. Le travail présenté dans le cadre de cette communication s'est inspiré de la stratégie présentée dans [7] pour prendre en compte les conditions de continuité à travers les interfaces. Cette dernière consiste à intégrer directement les contributions de différentes zones lors de l'assemblage du système global.

## 2. Les formulations SGBEM pour un domaine fissuré

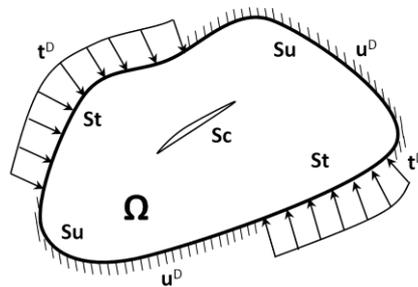


Fig. 1 – Domaine fissuré avec conditions aux limites mixtes

Considérons un solide  $\Omega$  contenant une fissure  $Sc$  considérée comme une zone caractérisée par des discontinuités de déplacements. Le domaine  $\Omega$  est soumis à des conditions aux limites mixtes (Fig. 1). Nous nous sommes intéressés à l'évaluation du saut de déplacements  $\Delta u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}+) - u(\mathbf{x}-)$  à travers la fissure ainsi considérée.  $u(\mathbf{x}+)$  et  $u(\mathbf{x}-)$  représentent respectivement les déplacements des deux lèvres supérieure et inférieure de la fissure  $Sc$ . Les formulations intégrales de la SGBEM pour ce problème s'écrivent :

$$\begin{cases} B_{uu}(u, \tilde{u}) + B_{tu}(t, \tilde{u}) + B_{\Delta uu}(\Delta u, \tilde{u}) = F_u(\tilde{u}) \\ B_{ut}(u, \tilde{t}) + B_{tt}(t, \tilde{t}) + B_{\Delta ut}(\Delta u, \tilde{t}) = F_t(\tilde{t}) \\ B_{u\Delta u}(u, \Delta \tilde{u}) + B_{t\Delta u}(t, \Delta \tilde{u}) + B_{\Delta u\Delta u}(\Delta u, \Delta \tilde{u}) = F_{\Delta u}(\Delta \tilde{u}) \end{cases} \quad (1)$$

Dans cette formulation,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{t}$  et  $\Delta \mathbf{u}$  désignent respectivement le déplacement, la traction et le saut de déplacements inconnus sur les frontières  $St$ ,  $Su$  et  $Sc$ . Les termes,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{t}$ ,  $\Delta \tilde{u}$  quant à eux, représentent les fonctions *test* respectivement en déplacement, en traction et en saut de déplacements. Le second membre de l'équation (1) regroupe les données sur la frontière ([1], [3]). La solution numérique de cette équation est obtenue suite à une phase de discrétisation ayant conduit à l'écriture du système matriciel  $[\mathbf{K}].\{\mathbf{x}\}=\{\mathbf{b}\}$ .

$[\mathbf{K}]$  est symétrique et pleine;  $\{\mathbf{x}\}$  regroupe les inconnues du problème et  $\{\mathbf{b}\}$  constitue le second membre. Dans l'analyse des éléments de frontière, un solveur du type itératif (GMRES) est souvent utilisé pour résoudre le système d'équations.

La phase d'évaluation des doubles intégrations à chaque itération du GMRES s'avère très lente, ce qui limite la méthode au traitement des problèmes de petite taille. Le recours à d'autres techniques avancées telle que la méthode multipôle rapide pour optimiser la phase de résolution reste nécessaire. La méthode multipôle rapide (FMM) ne traite pas séparément les interactions entre les points comme le fait la SGBEM traditionnelle mais considère l'ensemble de plusieurs points en évaluant l'influence de ce groupe par l'intermédiaire d'un point « pôle ».

Considérons alors une intégrale double typique de le SGBEM – équation (2) – les termes s'y

trouvant :  $\tilde{v}(x), w(y), K(x, y)$  représentent respectivement la fonction *test*, fonction inconnue et fonction fondamentale (fonction *noyau*)  $K(x, y)$  (cette fonction relie les deux variables  $x$  et  $y$  et devient singulière quand  $x = y$ ).

$$\int_{S_x} \tilde{v}(x) f(x) dS_x = \int_{S_x} \int_{S_y} \tilde{v}(x) K(x, y) w(y) dS_y dS_x \quad (2)$$

La FMM est basée sur la reformulation des noyaux constituant les fonctions fondamentales en termes de développements en séries multipôles de manière à ce que les variables  $x$  et  $y$  de l'intégrale soient séparées [8] :

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(\overline{Ox}) \Psi_i(\overline{Oy}) \quad (3)$$

L'intégrale double dans l'équation (2) devient donc :

$$\int_{S_x} \int_{S_y} \tilde{v}(x) K(x, y) w(y) dS_y dS_x = \int_{S_x} \tilde{v}(x) \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(\overline{Ox}) M_i(O) dS_x \quad (4)$$

$$M_i(O) = \sum_{L=1}^N \int_{S_L} \Psi_i(\overline{Oy}) w(y) dS_y \quad (5)$$

$M_i(O)$ , appelé «moment multipôle» au pôle  $O$  et comprend toutes les contributions des points qui se trouvent dans la frontière  $S_y$  (qui est l'union des éléments frontière  $S_L (L = 1, \dots, N)$ ). Ces contributions sont transférées par la suite, aux points d'observation  $x$  qui se trouvent dans la frontière  $S_x$  par l'intermédiaire du point pôle  $O$ . L'avantage de la FMM réside dans le fait que ce moment multipôle reste réutilisable à chaque fois que le point d'observation  $x$  change (Fig. 2), ce qui réduit d'une manière significative le nombre total des opérations nécessaires. L'évaluation des intégrales doubles (aussi connue comme le produit *matrice-vecteur*) est de ce fait considérablement accélérée et le stockage de la matrice globale n'avère inutile. Ces adaptations rendent la FM-SGBEM particulièrement attractive pour l'étude des problèmes de grandes tailles avec présence de fissures ([2][3][4]).

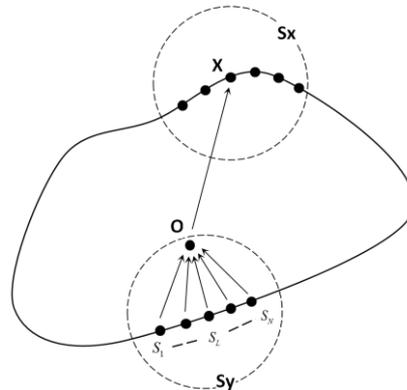


Fig 2-Illustration simple de la FMM

## 2.2 Formulation multizone

Le solide  $\Omega$  présente plusieurs interfaces internes. Ces interfaces font apparaître des conditions de continuité en déplacement et en traction (Eg.  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ ,  $\mathbf{t}_1 = -\mathbf{t}_2$  pour l'interface qui sépare les sous-domaines 1 et 2). Les normales au niveau des interfaces sont orientées selon des domaines à numérotations croissantes (Fig. 3).

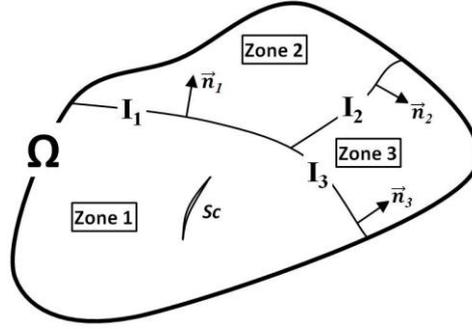


Fig. 3 – Solide fissuré à 3 sous-domaines

Les équations intégrales pour la zone-d (ayant n interfaces) sont écrites sous la forme discrétisée  $[K^d]\{x^d\}=\{b^d\}$  dont la représentation détaillée s'écrit :

$$\begin{bmatrix}
 B_{uu}^{StSt} & B_{tu}^{SuSt} & B_{\Delta uu}^{ScSt} & B_{uu}^{I_1St} & \circ B_{tu}^{I_nSt} & \dots & B_{uu}^{I_nSt} & \bullet B_{tu}^{I_nSt} \\
 B_{ut}^{StSu} & B_{tt}^{SuSu} & B_{\Delta ut}^{ScSu} & B_{ut}^{I_1Su} & \circ B_{tt}^{I_2Su} & \dots & B_{ut}^{I_nSu} & \bullet B_{tt}^{I_nSu} \\
 B_{u\Delta u}^{StSc} & B_{t\Delta u}^{SuSc} & B_{\Delta u\Delta u}^{ScSc} & B_{u\Delta u}^{I_1Sc} & \circ B_{t\Delta u}^{I_nSc} & \dots & B_{u\Delta u}^{I_nSc} & \bullet B_{t\Delta u}^{I_nSc} \\
 B_{uu}^{StI_1} & B_{tu}^{SuI_1} & B_{\Delta uu}^{ScI_1} & B_{uu}^{I_1I_1} & \circ (B_{tu}^{I_1I_1} + I_1^u) & \dots & B_{uu}^{I_nI_1} & \circ B_{tu}^{I_nI_1} \\
 \circ B_{ut}^{StI_1} & \circ B_{tt}^{SuI_1} & \circ B_{\Delta ut}^{ScI_1} & \circ (B_{ut}^{I_1I_1} - I_1^t) & B_{tt}^{I_1I_1} & \dots & \circ B_{ut}^{I_nI_1} & \circ \bullet B_{tt}^{I_nI_1} \\
 \dots & \dots \\
 B_{uu}^{StI_n} & B_{tu}^{SuI_n} & B_{\Delta uu}^{ScI_n} & B_{uu}^{I_nI_n} & \bullet B_{tu}^{I_nI_n} & \dots & B_{uu}^{I_nI_n} & \bullet (B_{tu}^{I_nI_n} + I_n^u) \\
 \bullet B_{ut}^{StI_n} & \bullet B_{tt}^{SuI_n} & \bullet B_{\Delta ut}^{ScI_n} & \bullet B_{ut}^{I_nI_n} & \bullet \circ B_{tt}^{I_nI_n} & \dots & \bullet (B_{ut}^{I_nI_n} - I_n^t) & B_{tt}^{I_nI_n}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u^{St} \\
 t^{Su} \\
 \Delta u^{Sc} \\
 u^{I_1} \\
 t^{I_1} \\
 \dots \\
 u^{I_n} \\
 t^{I_n}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_u(\tilde{u}) \\
 F_t(\tilde{t}) \\
 F_{\Delta u}(\Delta \tilde{u}) \\
 F_u(\tilde{u}^{I_1}) \\
 \circ F_t(\tilde{t}^{I_1}) \\
 \dots \\
 F_u(\tilde{u}^{I_n}) \\
 \bullet F_t(\tilde{t}^{I_n})
 \end{bmatrix}$$

Le signe des termes (symbole  $\circ$  ou  $\bullet$ ) doit être correctement adopté en prenant compte de la direction du vecteur normal de l'interface : si la normale est sortante, le terme prend la signe '+' ; si la normale est rentrante, la signe est '-'.

Les termes  $[B^{**}]$  sont symétriques. L'intégrale simple  $[I_u]$  diffère de la transposée de  $[I_t]$ , ce qui rend la matrice locale  $[K^d]$  non-symétrique. Toutefois, lors de la phase d'assemblage de la matrice globale, en raison des signes opposés adoptés, tous les termes englobant les intégrales simples, sources de dissymétries, s'annulent. L'implantation de la FMM pour le cas multizone fait appel à une procédure de construction de l'arbre *octree* englobant toutes les zones du domaine. Nous y traitons chaque zone localement : le calcul des moments, le transfert des termes, les expansions locales se trouvent uniquement dans la zone étudiée. Le résultat des produits *matrice-vecteur* locaux est ensuite traité dans le repère global pour le solveur GMRES.

## 2 Exemples numériques

Dans cette section, nous étudions un barreau élastique, hétérogène (deux matériaux) et soumis à une traction uniforme unitaire. Le barreau étudié contient également une fissure circulaire de rayon  $r=1$  positionnée au centre et à mi-hauteur de la zone 2 (Fig. 4). Le saut de déplacement  $\Delta u$  de ces fissures y est calculé. L'interface  $S_i$  séparant les deux domaines à matériaux différents se situe à mi-hauteur du cylindre. Le maillage des zones non fissurées du barreau est constitué de 136 éléments quadrilatéraux à 4 nœuds. Les fissures circulaires quant à elles sont approchées par 48 éléments spéciaux à 8 nœuds (éléments avec nœuds au quart décrits dans [3]) adaptés aux zones de fronts de fissures caractérisées par la singularité de leurs champs de contraintes.

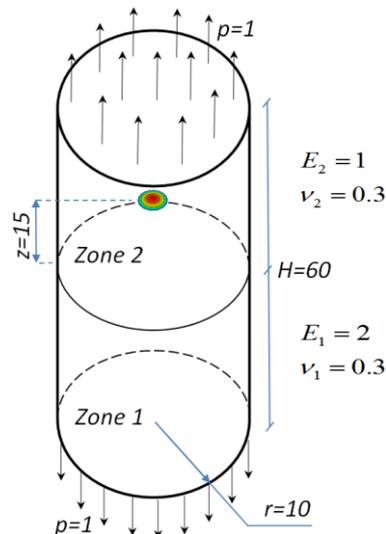


Fig. 4 – Barreau hétérogène sous traction uniforme

Le calcul du saut de déplacement au sein de l'unique fissure caractérisant le domaine, obtenu est comparé à la solution analytique (Fig. 5). L'écart n'excède pas 1%.

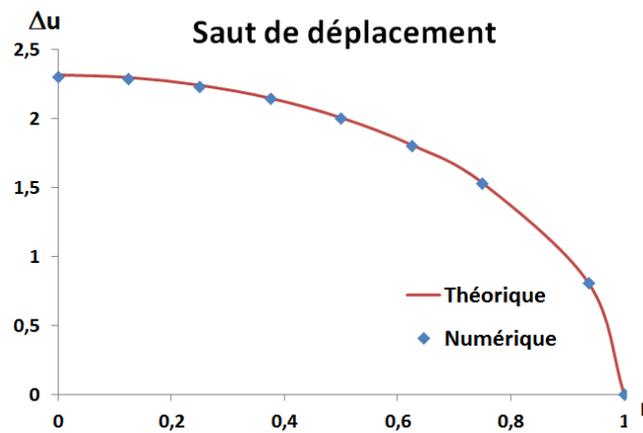


Fig. 5 – Le saut de déplacement à travers de la fissure

### 3 Conclusions et perspectives

Dans cette communication, la méthode multipôle rapide appliquée aux formulations intégrales variationnelles de Galerkin en 3D a été étendue au traitement des domaines multizones avec présence de fissures non débouchantes. Les formulations et la mise en œuvre numériques ainsi décrites ont conduit à des tests de validation attestant du bon fonctionnement des procédures numériques du code multizone. Des modèles de grandes tailles exploitant d'une manière optimale les avantages de la FMM sont en cours de validation.

Une des premières applications visées à court terme, reste la modélisation de structures de chaussées : domaines multicouches et multifissurés. La propagation de fissures dans de telles structures reste également une perspective intéressante à nos travaux.

### Références

- [1] Bonnet M., Equations intégrales et éléments de frontière. Applications en mécanique des solides et des fluides, CNRS Editions, 1995.
- [2] Yoshida K., Applications of Fast Multipole Method to Boundary Integral Equation Method, 2001.
- [3] Pham D., Fast Multipole Method for Symmetric Galerkin Boundary Element Method in 3D elasticity - Application to a fractured environment, 2010.

- [4] Chaillat S., Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales de frontière en élastodynamique 3-D. Application à la propagation d'ondes sismiques, 2008.
- [5] Magonari M., Boundary element techniques for three dimensional problems in Elastostatics, 2004.
- [6] Gray L. J. et Paulino H., Symmetric Galerkin boundary integral formulation for interface and multi-zone problems, Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 40:pp. 3085-3101, 1997.
- [7] Frangi A., 3D Fracture analysis by the Symmetric Galerkin BEM, Comp. Mech. 28, 2002.
- [8] Pham D., Méthode multipôle rapide pour les équations intégrales variationnelles symétriques en élasticité 3D, 19<sup>ème</sup> Congrès français de Mécanique, Marseille, 2009.